

زنده یاد جلیل الله قراگوزلو

(۱۳۹۳-۱۲۹۹)

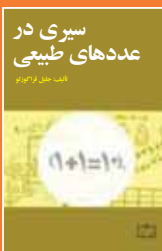


ریاضی دانان
معاصر
ایران

استاد جلیل الله قراگوزلو در مردادماه ۱۲۹۹ در شهرستان تفرش متولد شد. تحصیلات ابتدایی خود را در دبستان صفوی و تحصیلات متوسطه را در دبیرستان‌های علمیه و ایرانشهر گذراند. به دلیل علاقه وافره به معلمی و آموزش ریاضی، برای ادامه تحصیل در رشته ریاضی وارد دانش‌سرای عالی شد و از سال ۱۳۱۸ به کسوت معلمی ریاضی درآمد. وی تا سال ۱۳۲۴ در شهرستان‌های همدان، دزفول، شیراز و... به تدریس ریاضی پرداخت و سپس به تهران منتقل شد. استاد در سال ۱۳۳۹ به کشور آمریکا اعزام شد و یک دوره تکمیلی را در آنجا گذراند و در بازگشت در دانش‌سرای عالی به دستیاری زنده‌یادان پرفسور هشترودی و دکتر بهروز منصوب شد. او در سال ۱۳۴۴ از خدمت بازنشسته شد و پس از آن در دانشگاه ملی سابق و چند مؤسسه عالی و دبیرستان به تدریس پرداخت.

زنده‌یاد قراگوزلو در زمینه تألیف و ترجمه کتاب‌های درسی و کمک‌درسی ریاضی ید طولایی داشت و در این زمینه کارنامه پرباری از خود به جا گذاشته است. ایشان سال‌ها از همکاران دفتر تألیف کتاب‌های ریاضی و از مؤلفان کتاب‌های جبر و آنالیز و ریاضی جدید نظام قدیم آموزشی بود. علاوه بر آن، ده‌ها جلد کتاب را نیز که از بهترین و مشهورترین آثار ریاضی سال‌های اخیر بوده‌اند، ترجمه و تألیف کرده است که از آن جمله می‌توان به کتاب‌های «سیری در عددهای طبیعی»، «مثلثات پایه»، «آمار و احتمال»، «آنالیز و هندسه تحلیلی» و ترجمه کتاب «توپولوژی چیست؟» با مقدمه‌ای از استاد هشترودی اشاره کرد. استاد همچنین سال‌ها با مجله ریاضی یکان (به مدیریت مسئولی زنده‌یاد عبدالحسین مصحفی) همکاری داشت و مقالات زیادی را در آن به چاپ رساند.

زنده‌یاد قراگوزلو از جمله نخستین مطرح‌کنندگان و نظریه‌پردازان ریاضیات جدید در کشور ما بود و سال‌ها برای اشاعه فرهنگ تغییر در ریاضیات سنتی ایران کوشید. این استاد فرزانه در تابستان سال ۱۳۹۳ و در سن ۹۴ سالگی در دیار غربت دار فانی را وداع گفت.





ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

رشد

- دوره بیست و چهارم
- شماره پیاپی ۸۹
- دی ۱۳۹۴
- شماره ۴
- ۴۸ صفحه
- ۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیر مسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خرغانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی،
دکتر ابراهیم ریحانی،
احمد قندهاری،
میرشهرام صدر،
هوشنگ شرقی،
سید محمد رضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی پور،
دکتر محرم نژاد ایردموسی، محمدعلی قربانی، حسین
کریمی، محمود داووزنی، احسان یارمحمدی
وبگاه:
www.roshdmag.ir
roshdmag:
پیام نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-
motevaseteh2
پیام گیر نشریات رشد:
۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ - ۸۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۵
شمارگان:
۱۵۰۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)

حرف اول / هر پیروزی مقدمه‌ای برای پیروزی‌های دیگر است! / حمیدرضا امیری ۲

آموزشی / کاربرد هندسه در صنعت / نجمه مؤمنی ۳

پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۶

آموزش ترجمه متون ریاضی - «اگر و فقط اگر» یا «قضیه‌های هم‌ارز» / حمیدرضا امیری ۱۲

بحثی در باب مساحت چندضلعی‌های منتظم / حسین کریمی ۱۴

ارتباط بین آربلوس و نمایش هندسی اتحادهای جبری / مریم شاه‌محمدی ۱۶

عدد کیت / علیرضا پونید ۲۰

ریاضیات در چند دقیقه / غلامرضا یاسی پور ۲۲

تشخیص تابع‌نمایی با جدول / مراد کریمی ۲۶

درباره چهارضلعی‌های محیطی و محاطی بیشتر بدانیم / هوشنگ شرقی ۲۹

نمودار رابطه و تشخیص هم‌ارزی / سیمین افروزان و فریده کمالی‌محمدزاده ۳۲

خواصی جالب از تابع هموگرافیک / مراد کریمی ۳۹

خانه‌تکانی ریاضیات برای سال ۱۴۰۱۶ / عنایت‌الله راستی‌زاده ۴۴

ریاضیات در سینمای جهان / شهر آشوب / احسان یارمحمدی ۳۶

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی / ایستگاه اول: جدول عددی ویژه با جایزه! / هوشنگ شرقی ۱۱

ایستگاه دوم: معمای عددی / ۲۱

ایستگاه سوم: لطیفه‌های ریاضی ۲۴

مسائل برای حل / آمادگی برای آزمون‌های مستمر ۴۰

معرفی مجلات ریاضی جهان / Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem / احسان یارمحمدی ۸

معرفی کتاب / کاشانی‌نامه (زندگی‌نامه غیاث‌الدین جمشید کاشانی) / احسان یارمحمدی ۴۲

پرسش‌های پیکار جو! / ۱۰-۱۳-۲۱-۳۵-۴۳

پاسخ‌ها / راهنمای حل مسائل، آمادگی برای آزمون‌های مستمر / ۴۶

پاسخ معماهای عددی (ایستگاه دوم) / ۴۸

پاسخ پرسش‌های پیکار جو! / ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه ۲)
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان
○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

✉ نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

☎ تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲



هر پیروزی مقدمه‌ای برای پیروزی‌های دیگر است

بعد از امتحانات مستمر و کلاسی که در درس‌های ریاضی برگزار شده، حالا نوبت امتحانات پایان نیم‌سال اول است که از اهمیت بسیاری برخوردارند. از نظر معلم اهمیت موضوع در آن است که متوجه می‌شود دانش‌آموزان کلاسش در چه بخش‌هایی اشکال دارند تا در آغاز نیم‌سال دوم بیشتر به آن‌ها بپردازد. دیگر اینکه متوجه می‌شود، چه کسانی در کلاس، خوب درس خوانده و چه دانش‌آموزانی نسبت به بقیه کم کاری داشته‌اند تا به آن‌ها تذکر دهد و از آن‌ها بیشتر کار و تمرین طلب کند.

از نظر دانش‌آموز هم اهمیت موضوع تا حدی مشابه موارد فوق است.

اول اینکه دانش‌آموزان متوجه اشکالات و ایرادهای خودشان در کلاس درس می‌شوند و برای جبران آن در نیم‌سال دوم می‌کوشند. دوم اینکه به کم‌کاری‌ها و یا شیوه‌های مطالعه نامناسب خود پی می‌برند و سعی می‌کنند مدیریت زمان و روش‌های خود را بهبود بخشند. در واقع، لزوم برنامه‌ریزی دقیق و کاربردی را در مسیر آموزش خود احساس می‌کنند.

نکته بسیار مهمی که باید مورد توجه خاص شما دانش‌پژوهان عزیز قرار بگیرد آن است که شما همواره باید روی نقاط قوت خودتان تمرکز داشته باشید، نه روی نقاط ضعف! اگر شما در درسی یا موضوعی از یک درس موفق بوده‌اید، به دنبال دلایل این موفقیت باشید. آن‌ها را پیدا و تجزیه و تحلیل کنید و سپس به بقیه درس‌ها یا موضوع‌هایی که در آن‌ها موفقیت چندانی کسب نکرده‌اید، سری بزنید و تا آنجا که می‌توانید موفقیت‌های خود را به این درس‌ها یا موضوع‌ها تعمیم دهید.

برای مثال، دانش‌آموزی در یک درس یا موضوعی از موضوعات ریاضی بسیار موفق بوده است. وقتی سیر طی شده در طول نیم‌سال اول را بررسی می‌کند، درمی‌یابد که به آن موضوع علاقه‌مند بوده، سر کلاس خوب تمرکز داشته و تمرین‌ها را به موقع حل کرده است. پس اگر همین کارها را برای موضوع‌های دیگر هم انجام دهد، به احتمال زیاد نتیجه خوبی خواهد گرفت.

پس مهم‌ترین توصیه من به شما این است که روی نقاط قوت خودتان تمرکز کنید، دلایل رسیدن به این موفقیت‌ها را بیابید و به بقیه درس‌ها و موضوع‌های درسی تعمیم دهید. ان شاءالله این شعار را به خاطر می‌سپاریم که

«هر پیروزی مقدمه‌ای برای پیروزی‌های دیگر است».

مؤید و پیروز باشید
سر دبیر

کاربرد هندسه در صنعت

اشاره

از آنجا که موضوع محسوس و ملموس کردن مسائل علمی همواره از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده است، ارائه استدلال‌های ساده و جذاب و مثال‌های مناسب، خدمت بزرگی به جویندگان این دانش می‌کند. در درس‌های علوم پایه مثل ریاضی، یکی از سؤالات اساسی در کلاس درس از طرف دانش‌آموزان، کاربرد مطالب تدریس شده است. مخصوصاً در درس هندسه که جنبه اثباتی دارد. در اغلب قضایا، بدون اشاره به پیدایش و کاربرد آن‌ها، تنها به اثبات قضایا اکتفا می‌شود که انگیزه لازم را برای دانش‌آموزان فراهم نمی‌کند. در این مقاله به خواص مستطیل، یکی از مباحث هندسه که دانش‌آموزان در مدرسه می‌خوانند، اشاره شده و به کاربردهایی از خواص مستطیل در صنعت پرداخته شده است.

مقدمه

در کتاب هندسه ۱ دبیرستان، تنها کاربردی از هندسه که در کل کتاب آمده است، دو قضیه فیثاغورس و تالس است. در دوره ابتدایی به دانش‌آموزان آموخته‌ایم که قطرهای مستطیل با هم برابرند و در دبیرستان آن را برای دانش‌آموزان اثبات می‌کنیم. اما هرگز به دانش‌آموزان نمی‌گوییم که چرا اثبات این مسئله مهم است. فراوانی اثبات قضایا و مسائل در هندسه ۱ بدون اینکه کاربرد حتی یکی از آن‌ها در زندگی نشان داده شود، باعث خسته شدن و دلزدگی دانش‌آموزان می‌شود.

دانش‌آموز می‌پرسد: «حالا فهمیدیم که قطرهای مستطیل مساوی‌اند، خوب بعدش چی؟»

در ادامه، خواص مستطیل و کاربردهایی از آن در صنعت بیان می‌شود. اما قبل از آن مستطیل را تعریف می‌کنیم. «به متوازی‌الاضلاع که چهار زاویه قائمه دارد، مستطیل می‌گویند.»

خواص مستطیل

چون مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است، پس خواص متوازی‌الاضلاع را به ارث می‌برد. خواص متوازی‌الاضلاع عبارت‌اند از:

۱. اضلاع روبه‌رو موازی و مساوی‌اند.

۲. قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.

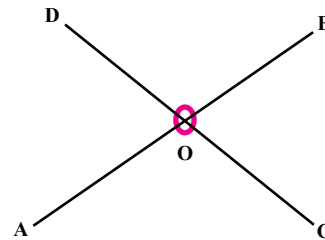


۳. زوایای روبه‌رو مساوی و زوایای مجاور، مکمل‌اند.
خاصیتی که در مستطیل برقرار است، اما در متوازی‌الاضلاع همیشه درست نیست، عبارت است از: «قطرها با هم مساوی‌اند.»

به‌کارگیری خاصیت مستطیل در صنعت

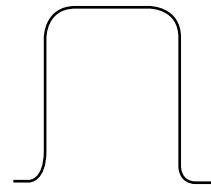
دو میله AB و CD را با طول‌های مساوی در نظر می‌گیریم. وسط آن‌ها را سوراخ می‌کنیم. سپس این دو میله سوراخ‌شده را

طوری روی هم قرار می‌دهیم که سوراخ‌ها در برابر هم قرار گیرند. از این دو سوراخ لولایی عبور می‌دهیم (شکل ۱).



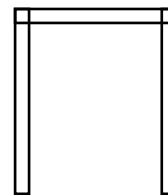
شکل ۱

دو میله AB و CD می‌توانند دور لولای O بچرخند. هنگامی که دو میله دور لولا می‌چرخند، شکل چهارضلعی ACBD تغییر می‌کند، اما همیشه یک مستطیل است. (چرا؟) یکی از کاربردهای این خاصیت را در پایه‌های میز تاشو می‌توان دید. یک جفت لوله خمیده مطابق شکل ۲ چهارپایه میز تاشو را تشکیل می‌دهند.



شکل ۲

پایه میز را می‌توان مانند شکل ۳ که لوله‌ای با دو گوشه قائمه است، نشان داد.

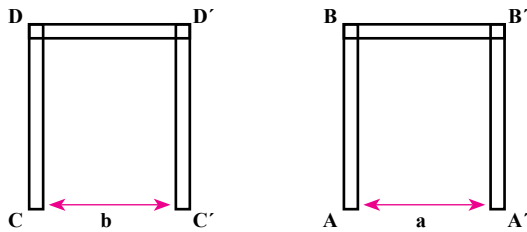


شکل ۳

دو میله گوشه‌دار $ABB'A'$ و $CDD'C'$ را در نظر می‌گیریم که در آن‌ها چهار زاویه D, B, B', D' قائمه‌اند و: $AB = A'B' = CD = C'D'$ (شکل ۴). فاصله خارجی دو پایه AB و $A'B'$ را a و فاصله داخلی دو پایه CD و $C'D'$ را b می‌نامیم. فاصله a اندکی بزرگ‌تر از فاصله b اختیار شده است.

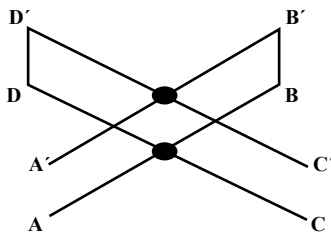
قطعات AB, $A'B'$, CD و $C'D'$ را از نقاط وسطشان به ترتیب O, O', O_1 و O_2 سوراخ می‌کنیم. لوله گوشه‌دار $CDD'C'$ را از داخل لوله گوشه‌دار $ABB'A'$ عبور می‌دهیم (چون $a > b$ است، این عمل

ممکن است)؛ به‌طوری که سوراخ O در مقابل سوراخ O_1 و سوراخ O' مقابل O_2 باشد.



شکل ۴

سپس از دو سوراخ OO' و O_1O_2 یک لولا عبور می‌دهیم. هر یک از دو لوله گوشه‌دار می‌توانند آزادانه دور دو لولای مذکور بچرخند (شکل ۵).



شکل ۵

حکم: هنگامی که یکی از دو لوله گوشه‌دار $ABB'A'$ و $CDD'C'$ دور دو لولای OO_1 و $O'O_2$ می‌چرخند، شکل فضایی حاصل از دو لوله گوشه‌دار لولا شده، تغییر شکل می‌دهد. اما همواره صفحه‌ای که از دو خط موازی BB' و DD' می‌گذرد، موازی با صفحه‌ای است که از دو خط موازی AA' و CC' می‌گذرد. برای اثبات حکم می‌گوییم:

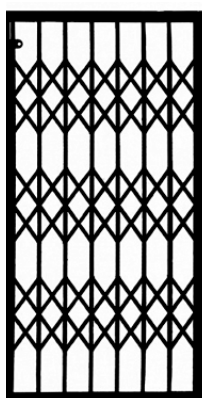
۱. دو چهارضلعی $ABB'A'$ و $CDD'C'$ دو مستطیل مساوی‌اند، زیرا هر یک از چهار زاویه B, B', D, D' قائمه‌اند و داریم: $\overline{AB} = \overline{A'B'} = \overline{CD} = \overline{C'D'}$.

۲. دو نقطه O و O' وسط‌های دو ضلع مقابل مستطیل $ABB'A'$ اند، پس دو خط AA' و BB' با خط OO' موازی‌اند. با همین شیوه استدلال ثابت می‌کنیم دو خط DD' و CC' با خط OO' موازی هستند. بنابراین چهار خط AA', CC', BB', DD' موازی یکدیگرند.

۳. چون $AA' \parallel CC'$ ، پس دو خط AA' و CC' در یک صفحه‌اند. این صفحه را P می‌نامیم. چون $DD' \parallel BB'$ ، پس دو خط DD' و BB' در یک صفحه‌اند. این صفحه را Q می‌نامیم.

۴. چهارضلعی ACBD مستطیل است، زیرا دو قطر آن مساوی هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین: $AC \parallel DB$. با همین شیوه استدلال نتیجه می‌شود: $A'C' \parallel D'B'$.

قسمت‌های متفاوتی که می‌خواهد رنگ کند، تسلط کامل داشته باشد. به کارگیری میز بالا بر هیدرولیک موجب می‌شود که کارگر دیرتر خسته شود و در نتیجه کارایی او افزایش یابد. یک مسئله زیبایی دیگر در کشویی آکوردئونی است (شکل ۱۰). در کشویی فلزی علاوه بر محکم بودن، چون به آسانی جمع می‌شود و پس از جمع شدن در کنار جرز مغازه جای کمی اشغال می‌کند، مورد توجه است. از خارج مغازه‌ای که در کشویی دارد می‌توان داخل آن را مشاهده کرد و از تنوع کالاهای آن مطلع شد.



شکل ۱۰



شکل ۹

نتیجه‌گیری

به تبع پیشرفت علم و دانش، تغییرات گسترده‌ای در همه ابعاد زندگی بشر مشاهده می‌شود که با سرعت و شتاب زیاد به سمت جلو در حال حرکت است و تغییر در نظام آموزشی نیز ضروری است. در این راستا نیاز است در کتاب‌ها تغییراتی اعمال شوند. به دلیل عدم ارتباط هندسه با دنیای واقعی و تأکید بر حفظ کردن قضایا در هندسه و عدم انگیزش لازم برای حل مسائل هندسه، نیاز است برای رهایی از این مشکل و رسیدن به آموزش و فراگیری ایده‌آل درس‌هایی مثل هندسه، کتاب‌های درسی به‌طور اساسی تغییر کنند و هم‌زمان با بیان نظری مطالب به کاربرد آن‌ها به‌عنوان فعالیت یا حتی مطالب خواندنی اشاره و اهمیت داده شود.

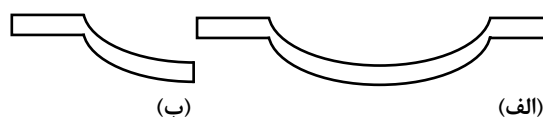
* منابع

۱. اس. لف، لارنس (۱۳۷۰). آموزش هندسه به روش ساده. ترجمه فیروز یارایی و محمد مجدآبادی. نشر شمع. تهران. چاپ اول.
۲. رستمی، محمدحاشم (۱۳۷۸). دائرةالمعارف هندسه (ج ۱). انتشارات مدرسه. تهران.
۳. شرف‌الدین، احمد (۱۳۷۷). هندسه دلپذیر. انتشارات مدرسه. تهران.
۴. هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران (۱۳۸۳). گزیده مقالات هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی. دانشکده علوم دانشگاه کردستان. سنندج.

۵. دو خط متقاطع AC و AA' از صفحه P با دو خط متقاطع DB و DD' از صفحه Q موازی‌اند. پس این دو صفحه موازی‌اند.

نتیجه: اگر چهار نقطه A, A', C, C' از دستگاه لولایی (شکل ۵) را روی زمین قرار دهیم، آن‌گاه صفحه Q که بر دو خط BB' و DD' می‌گذرد، موازی با سطح زمین قرار می‌گیرد. بنابراین اگر یک صفحه فلزی یا چوبی روی دو لوله BB' و DD' قرار گیرد، این صفحه موازی با سطح زمین قرار می‌گیرد.

بست‌هایی سطح میز را به پایه‌ها ربط می‌دهند (شکل ۶). زیر میز تاشو چند بست به شکل الف و ب نصب شده‌اند که سطح میز را به پایه‌ها ربط می‌دهند.



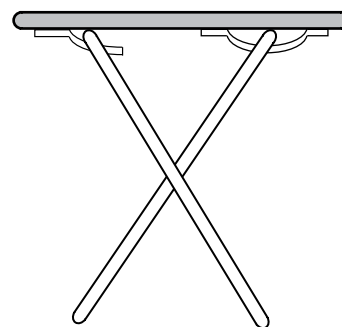
شکل ۶

این بست‌ها زیر میز چوبی قرار می‌گیرند و لوله BB' بین دو بست در صفحه میز در نقاط M و N قرار می‌گیرند (شکل ۷).



شکل ۷

اکنون میز تاشو ساخته شده است. هر وقت بخواهیم این میز را تا کنیم، لوله DD' را از بست (ب) درمی‌آوریم و پایه‌ها را دور لوله‌ها می‌چرخانیم.



شکل ۸

از جمله کاربردهای دیگر خواص مستطیل در ساختن «میز بالا بر هیدرولیک» است (شکل ۹). این گونه میزها هر جا که تنظیم ارتفاع برای انجام دادن عملی لازم باشد، به کار می‌رود. برای مثال، کارگر رنگ کار ارتفاع میز را با فشار دکمه با پدال پایی تنظیم می‌کند تا به



پای تخته

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکته آخر اینکه در چند شماره اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به تدریج پر بارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

■ بخش اول: مسئله‌ها

۱۶۶. جمله ۲۰۱۵-ام در دنباله ۱، ۲، ۳، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴، ۴، ... را به دست

آورید.

۱۶۷. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی فرد n

$$1^n + 2^n + \dots + n^n$$

۱۶۸. n ضلعی منتظمی در صفحه رسم شده است، به‌طوری که

هیچ کدام از اضلاع آن عمودی نیست. اگر $m_1, m_2, \dots, m_n$ به

ترتیب شیب اضلاع باشند، ثابت کنید:

$$m_1 m_2 + m_2 m_3 + \dots + m_{n-1} m_n + m_n m_1 = -n$$

۱۶۹. نه خط راست داریم که هر کدام مربع ABCD را

به دو چهارضلعی با نسبت مساحت ۲ به ۳ تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید سه‌تا از این خطوط از یک نقطه می‌گذرند.

۱۷۰. چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه n ، حذاق $n+1$ ، ریشه متمایز دارد.

ثابت کنید: $P(x)$ چندجمله‌ای صفر است $P(x)=0$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$.

۱۶۱. با فرض $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ و با فرض $f_1(x)=f(x)$

$$f_k = f_1 \circ f_{k-1} \quad f_{2015}$$

۱۶۲. حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

۱۶۳. N عددی است که در آن هر رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ دقیقاً

۳ بار به کار رفته، اما رقم ۸ در این عدد به کار نرفته است. ثابت

کنید N مربع کامل نیست.

۱۶۴. برای هر عدد طبیعی n ، $f(n)$ برابر است با تعداد روش‌های نوشتن

n به صورت مجموع چند عدد طبیعی. مانند: $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$

به‌طوری که: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ برای مثال: $f(4) = 4$ ، چون:

$$4 = 2+2 = 1+1+2 = 1+1+1+1$$

۱۶۵. آیا توانی از ۲ وجود دارد که چهار رقم سمت راستش برابر

۲۰۱۴ باشد؟

بخش دوم: راه حل ها

۱۳۱. بدون استفاده از ماشین حساب عدد ۱۵۹۹۹۹ را به عامل های اول تجزیه کنید.

$$159999 = 400^2 - 1 = 20^4 - 1 = (20^2 - 1)(20^2 + 1) \\ = (20 - 1)(20 + 1) \times 401 = 3 \times 7 \times 19 \times 401$$

۱۳۲. همه مقادیر صحیح n را بیابید، به طوری که حاصل $\frac{n^3 + 8}{n^2 - 4}$ مقداری صحیح داشته باشد.

$$n^3 + 8 = n(n^2 - 4) + 4(n + 2) \\ \Rightarrow \frac{n^3 + 8}{n^2 - 4} = n + \frac{4}{n - 2} \Rightarrow n - 2 \mid 4 \\ \Rightarrow n \in \{6, -2, 4, 0, 3, 1\} - \{\pm 2\} \\ \Rightarrow n \in \{0, 1, 3, 4, 6\}$$

۱۳۳. a و b دو عدد حقیقی هستند. اگر $a + b$ ، $a^2 + b$ و $a + b^2$ گویا باشند و $a + b \neq 1$ ، آن گاه ثابت کنید a و b گویا هستند. چون $a^2 + b$ و $a + b^2$ گویا هستند، پس تفاضل آن ها یعنی $(a - b)(a + b - 1)$ نیز گویاست. چون $a + b - 1$ عدد گویایی غیر صفر است، پس $a - b$ نیز گویاست. نهایتاً چون $a + b$ و $a - b$ گویا هستند، جمع و تفاضل آن ها یعنی $2a$ و $2b$ گویا هستند. در نتیجه a و b نیز گویا هستند.

۱۳۴. a و b دو عدد حقیقی هستند. اگر $a^2 + b^2$ ، $a^2 + b^4$ و $a^4 + b^2$ گویا باشند، ثابت کنید $a + b$ و ab گویا هستند.

از تساوی $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$ و مفروضات مسئله نتیجه می شود: $a^2b^2 \in Q$. سپس از تساوی $a^4 + b^4 \in Q$ نتیجه می شود: $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2) = (a^4 + b^4) + a^2b^2(a^2 + b^2)$ از طرف دیگر: $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$. در نتیجه: $a^2b^2 \in Q$. پس $ab \in Q$.

حال با توجه به تساوی $a^2 + b^2 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$ نتیجه می شود: $a + b \in Q$.

۱۳۵. برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $[2a] + [2b] \geq [a] + [b] + [a + b]$ (جزء صحیح x).

اگر $\{x\}$ نشان دهنده جزء اعشاری x ، یعنی $x - [x]$ باشد، آن گاه $x = [x] + \{x\}$. با جای گذاری $[a] + \{a\}$ به جای a و $[b] + \{b\}$ به جای b داریم:

$$[2a] + [2b] = 2[a] + [2\{a\}] + 2[b] + [2\{b\}] \\ [a] + [b] + [a + b] = 2[a] + 2[b] + [\{a\} + \{b\}]$$

در نتیجه کافی است ثابت کنیم:

$$[2\{a\}] + [2\{b\}] \geq [\{a\} + \{b\}]$$

با حالت بندی روی مقادیر $\{a\}$ و $\{b\}$ (۴ حالت) در بازه های $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{2}, 1)$ نامساوی به راحتی ثابت می شود.

۱۳۶. ثابت کنید $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ عددی گویاست.

با فرض $A = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ و $B = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ داریم: $A^3 + B^3 = 4$. از طرف دیگر: $AB = -1$. در نتیجه از تساوی $S^3 + 3S - 4 = 0$ داریم: $S = A + B$ و با فرض $A^3 + B^3 = (A + B)((A + B)^2 - 3AB)$ با تجزیه عبارت داریم: $(S - 1)(S^2 + S + 4) = 0$ که نتیجه می دهد $S = 1$. در نتیجه: $A + B = 1$.

۱۳۷. x ، y و z سه عدد حقیقی مختلف هستند. ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{x - y} + \sqrt[3]{y - z} + \sqrt[3]{z - x} \neq 0$$

می دانیم اگر $a + b + c = 0$ ، آن گاه: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (درستی این نتیجه را ثابت کنید و نشان دهید برعکس، اگر $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ آن گاه: $a = b = c$ یا $a + b + c = 0$). براساس برهان خلف، فرض کنید: $\sqrt[3]{x - y} + \sqrt[3]{y - z} + \sqrt[3]{z - x} = 0$.

در نتیجه:

$$0 = x - y + y - z + z - x = \sqrt[3]{(x - y)(y - z)(z - x)}$$

که نتیجه می دهد: $x = y$ یا $y = z$ یا $z = x$ که تناقض است. پس عبارت حکم برابر صفر نیست.

۱۳۸. مکان هندسی نقاطی مانند (x, y) را پیدا کنید که در تساوی $x^3 + y^3 + 3xy = 1$ صدق می کنند.

داریم: $x^3 + y^3 + (-1)^3 = 3xy(-1)$ در نتیجه: $x + y - 1 = 0$ یا $x + y = 1$ یعنی مکان هندسی، یک خط راست و یک نقطه است. در اینجا نیز از نکته مسئله قبل استفاده کردیم.

۱۳۹. برای هر دو عدد حقیقی a و b و هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a + b)^2}{x + y}$$

با ساده کردن نامساوی به نامساوی $(ay - bx)^2 \geq 0$ می رسیم.

۱۴۰. به ازای هر عدد صحیح n ، نشان دهید $n^4 - 22n^2 + 9$ مرکب است.

اگر n مضرب ۳ باشد، آن گاه $n^4 - 22n^2 + 9$ مضرب ۹ و در نتیجه مرکب است. اگر n مضرب ۳ نباشد، n^2 به فرم $3k + 1$ است و در نتیجه $n^4 - 22n^2 + 9$ مضرب ۳ خواهد شد که نشان می دهد مرکب است.

Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem

از جای جای عالم هستی برای این مجله مقاله ارسال می‌کنند. اما شاید بتوان اذعان کرد که مقالات مربوط به موضوعات هندسه در این مجله دارای سبکی متفاوت و مدرن نسبت به مقالات مندرج در سایر مجلات جهان است. علاقه‌مندان به هندسه می‌توانند با مراجعه به آن‌ها، به افزایش دانش خود در زمینه هندسه بپردازند. نحوه ارسال مطالب و مقالات برای این مجله نیز اسلوب ویژه‌ای دارد که هم برای دست‌اندرکاران و گردانندگان مجلات ریاضی کشور (ایران)، و هم برای افرادی که قصد دارند با روش‌های نگارش و ارسال مقاله برای مجلات ریاضی کشور آشنا شوند، می‌تواند مفید باشد. دلیل این موضوع تاحدی به این نکته برمی‌گردد که مجله Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem دو مجله Crux Mathematicorum و Mathematical Mayhem پدید آمده است که هر یک از آن‌ها در گذشته با داشتن خط‌مشی‌های ویژه خود دست به چاپ و انتشار مقالات ریاضی می‌زده‌اند. در واقع، «انجمن ریاضی کانادا» با بررسی وضعیت این دو مجله و شرایط حاکم بر فضای ریاضیاتی موجود در کشور کانادا و نیز تلاش‌های انجمن ریاضی کانادا برای ارائه یک مجله ریاضی ارزنده در عرصه بین‌الملل، دست به تلفیق دو مجله مزبور زد و مجله Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem را به جامعه جهانی عرضه کرد.

در تارنمای این مجله و در قسمت «اطلاعاتی برای مشارکت‌کنندگان و مؤلفان» مشاهده می‌کنیم که مجله ساختار کلاسیک خود، یعنی دو بخش Crux Mathematicorum و Mathematical Mayhem را حفظ کرده است و هر یک از آن‌ها در ساختار کلی مجله دارای نقشی مجزا از هم هستند. بخش Crux Mathematicorum خود به چهار قسمت اصلی زیر با ویژگی‌ها و شرایط مندرج در هر یک از آن‌ها دسته‌بندی می‌شود.

اسم: Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem

تارنما: cms.math.ca/crux/

ناشر: «انجمن ریاضی کانادا»

مکان انتشار: اتاوا در ایالت انتاریو کانادا

زبان: انگلیسی و فرانسه

ISSN: 0705-0384

OCLC: 40397795072002

سال آغاز انتشار: ۱۹۷۸

تعداد چاپ در هر دوره: ۱۰ شماره

نشانی:

Graham P. Wright, Managing Editor
Crux Mathematicorum
Canadian Mathematical Society
577 King Edward
Ottawa, Ontario K1N 6N5

مجله «Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem» را می‌توان یکی از بهترین و ارزنده‌ترین مجله‌های ریاضی جهان نامید. چراکه هم از نظر شمارگان سالانه و هم از نظر ارائه فایل‌های رایگان «پی‌دی‌اف» متناظر با مقالات آن، و هم از نظر تنوع مقالات گنجانده شده در آن، گوی سبقت را از بیشتر مجلات ریاضی جهان ربوده است. ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضی می‌توانند با مراجعه به تارنمای اینترنتی این مجله، فایل «پی‌دی‌اف» متناظر با مقالاتی را که از سال ۱۹۷۸ تا پنج سال قبل از هر تاریخ که به تارنما مراجعه کنند، دریافت دارند. البته افرادی که مایل‌اند شماره‌های جدید این مجله وزین را داشته باشند، می‌توانند با پرداخت حق اشتراک آن از این مهم بهره‌مند شوند.

مقالات گنجانده شده در این مجله کانادایی از تنوع و ساختاری منسجم برخوردار هستند و افراد متفاوتی



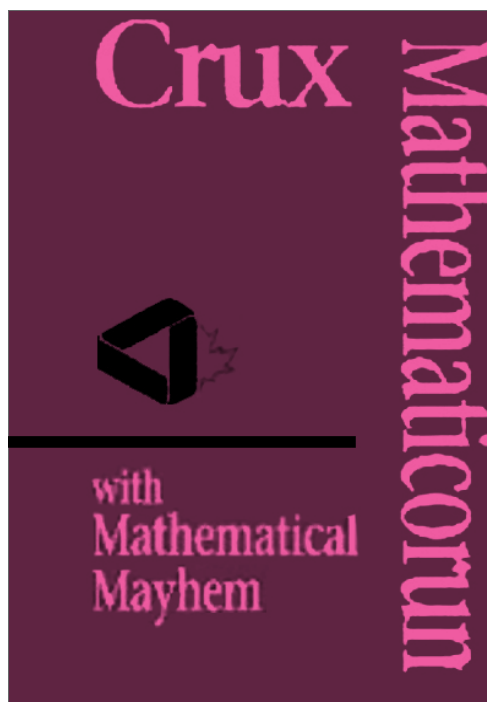
احسان یارمحمدی

مقالات

می‌خواهند ساختار مجله آنان دربرگیرنده پرسش‌ها و مسائل درسی متنوع باشد، و بالاخره ریاضی‌آموزانی که می‌خواهند توانایی ذهنی خود را در رابطه با شکل‌های گوناگون سؤالات و مسائل منطبق با سرفصل درسی‌شان محک بزنند، مفید و مؤثر باشد. البته معلمان و مدرسانی که می‌خواهند سؤالات گنجانده شده در امتحانات

مقالات باید با دقت نگاشته شوند و به‌صورت معقول، کوتاه و دارای توضیحات و تفسیرهای لازم و طبیعی باشند. مؤلفان مقالاتی که مقالات آن‌ها برای چاپ توسط مجله مورد پذیرش قرار گیرد، می‌باید که رضایت خود را برای چاپ و نشر مقاله خود (مقالاتشان) به مجله اعلام کنند و نیز حق چاپ و نشر مقاله (مقالاتشان) را به مجله انتقال دهند. بعد از چاپ و نشر هر مقاله، انجمن ریاضی کانادا به مخاطبان خود اجازه استفاده و در اختیار داشتن مقالات را می‌دهد. خوانندگان و علاقه‌مندان می‌توانند مقالات خود را از طریق دو روش زیر به نشانی کلاسیک مجله یا نشانی الکترونیکی آن بفرستند:

Robert Dawson,
Dept. of Mathematics & Computing Science
St. Mary's University
923 Robie St.
Halifax, NS B3H 3C3
Canada
Or emailed to: crux-articles@cma.math.ca



ریاضی را که از دانش‌آموزان خود به‌عمل آورده‌اند، برای مجله بفرستند و یا طراحان این دسته از سؤالات و پرسش‌ها که می‌خواهند حاصل کار خود را از طریق مجله در اختیار علاقه‌مندان بگذارند، می‌توانند به یکی از دو روش زیر مطالب خود را برای مجله ارسال کنند:

Lily Yen and Mogens Hansen
7255 Hewitt Street
Burnaby, BC
V5A 3M3
Canada
Or emailed to: Crux-skoliad@cms.math.ca

مسائل و راه‌حل‌های کراس^۴

خوانندگان و علاقه‌مندان می‌توانند مسائل پیشنهادی خود را که حداکثر در سطح دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی باشد، به همراه راه‌حل (راه‌حل‌های) آن‌ها به یکی از دو روش زیر برای مجله ارسال دارند:

Shawn Godin, Crux Mathematicorum
Cairine Wilson Secondary School
975 Orleans Blvd.
Orleans, ON KC 2Z5
Canada
Or emailed to: Crux-editors@cms.math.ca

اسکولایده^۵

این قسمت به ارائه نمونه سؤالات و مسائلی اختصاص دارد که در امتحانات مدارس و آزمون‌های ریاضی به‌صورت تشریحی و یا به‌صورت چندگزینیه‌ای در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفته‌اند. به‌ویژه می‌تواند برای معلمان ریاضی که قصد دارند در طراحی سؤالات امتحانات ریاضی از تنوع و دگرگونی نوع سؤالات بهره‌مند شوند، برای دست‌اندرکاران مجلات ریاضی که

بخش المپیاد^۶

این قسمت برای مسائلی که در المپیادهای ریاضی کاربرد دارند، طراحی و تدوین شده است. مخاطبان می‌توانند در این قسمت نمونه مسائل المپیادهای ریاضی کشورهای گوناگون و راه‌حل‌های آن‌ها را در سال‌های

ریاضی ارزنده می‌پردازد. مترجمان چیره‌دست، علاقه‌مند و آشنا به ریاضی می‌توانند با مراجعه به این قسمت به ترجمه آثار فاخر آن دست بزنند و جامعه ریاضیات ایران را از آثار جدید و به روز جهان بهره‌مند سازند.

در پایان پیشنهاد تهیه این مجله و مطالعه یکایک مقالات آن را به جامعه ریاضی ایران شامل دانش‌آموزان، معلمان، مدرسان، اساتید و... عرضه می‌داریم و از مترجمان علاقه‌مند و آشنا به ریاضی که به همکاری در زمینه ترجمه مقالات ریاضی تمایل دارند نیز تقاضا می‌کنیم، با ایجاد هماهنگی‌های لازم و کافی با اعضای هیئت تحریریه و نیز انتخاب مقالات مناسب و متناسب با خط‌مشی‌های مجله ریاضی «برهان دوره دوم متوسطه»، دست به ترجمه مقالاتی از این مجله کانادایی بزنند تا در راستای گسترش فرهنگ ریاضی‌خوانی و استفاده از منابع و مطالب ریاضی کارا از سایر کشورهای جهان، اقدامات ارزنده‌ای را انجام داده باشیم.

* پی‌نوشت‌ها

1. Canadian Mathematical Society
2. ISSN=International Standard Serial Number
3. OCLC=Online Computer Library Center
4. Crux
5. Skoliad
6. Olympiad Corner

متفاوت مشاهده کنند. علاقه‌مندان به ارسال مطلب در این زمینه می‌توانند به یکی از دو روش زیر با این قسمت مجله در ارتباط باشند:

Professor Nicolae Strungaru
Department of Mathematics and Statistics
Grant MacEwan University
10700-104 Avenue
Edmonton, AB T5J 4S2
Canada
Or emailed to: Crux-olympiad@cms.math.ca

بخش Mathematical Mayhem نیز دارای قسمتی است که علاقه‌مندان می‌توانند از طریق آن به یکی از دو روش زیر به ارائه راه‌حل‌های خود برای سؤالات و مسائل این قسمت بپردازند:

Shawn Godin, Crux Mathematicorum
Cairine Wilson Secondary School
975 Orleans Blvd.
Orleans, ON KC 2Z5
Canada
Or emailed to: Crux-editors@cms.math.ca

البته مجله دارای قسمت‌های مفید دیگری نیز هست؛ از جمله قسمت «معرفی کتاب» که به معرفی کتاب‌های



در ریاضیات آن چه مهم است، فکر کردن است!
ریاضیات الفبایی است که خداوند جهان را بر مبنای آن خلق کرد.

گاليله

پرسش‌های پیکارجو!



دوایر $C(0, r)$ و $C'(0', r')$ در نقطه A مماس داخل هستند. از O مماسی بر دایره کوچک‌تر (C') وارد می‌کنیم تا در نقطه C بر دایره مماس شود و دایره C را نیز در نقطه B قطع کند (B و C در یک طرف O هستند). اندازه زاویه BAC کدام است؟

(ج) 60°

(ب) 45°

(الف) 30°

(ه) مقدار این زاویه ثابت نیست.

(د) 50°

جدول زیر، یک جدول عددی کوچک (۴×۴) است که هیچ خانهٔ سیاه شده‌ای ندارد. تمام عناصر جدول عددهای چهار رقمی هستند که از چپ به راست یا از بالا به پایین نوشته می‌شوند. پس از حل کامل جدول، دو عدد چهار رقمی روی قطرهای اصلی و فرعی جدول (از بالا به پایین) به وجود می‌آید که سال تولد و وفات یک ریاضی‌دان به نام ایرانی براساس تقویم میلادی است. نام این ریاضی‌دان رمز جدول ماست. آن را برای ما بفرستید تا جایزه‌ای برایتان ارسال کنیم!



افقی

۱. مربع یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از سی و کوچک‌تر از چهل.
۲. عدد طبیعی که تنها دو عامل اول دارد که یکی از آن‌ها بین ۴۰ و ۵۰ است و دیگری یک رقمی است.
۳. حاصل ضرب دو عدد اول که یکی از آن‌ها یک رقمی و دیگری اندکی بیشتر از عدد مساحت مربعی است که محیط آن ۸۴ واحد است.
۴. صد برابر یک عدد اول.

	۱	۲	۳	۴
۱				
۲				
۳				
۴				

عمودی

۱. در این سال بلز پاسکال، ریاضی‌دان بنام و فیزیک‌دان فرانسوی دیده به جهان گشود.
۲. چهارمین عدد اول بزرگ‌تر از ۵۰۰۰.
۳. عدد مساحت مستطیلی که محیط آن ۲۵۴ واحد و طول آن ۸۷ واحد بیشتر از عرض آن است.
۴. در این سال رنه دکارت، ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی درگذشت.

آموزش ترجمه متون ریاضی

«اگر و فقط اگر»



«قضیه‌های هم‌ارز»

"IF AND ONLY IF" OR "EQUIVALENCE THEOREMS"

Statements including the expression "if and only if" are rather common and very useful in mathematics. If we can show that "A if and only if B", we are proving that A and B are equivalent statements, because either one of them is true (or false) only when the other one is true (or false). The statement "A if and only if B" means that "A is a necessary and sufficient condition for B" and that at the same time "B is a necessary and sufficient condition for A."

Thus to prove that the statement "A if and only if B" is true, we must prove that:

1. If A, then B.

(A is a sufficient condition for B; B is a necessary condition for A.)

2. If B, then A.

(B is a sufficient condition for A; A is a necessary condition for B).

Therefore, the proof of an "if and only if" statement has two parts. We can use any one of the techniques we know to construct each part.

Notice that the statements "If A, then B" and "If B, then A" are converses of each other.

گزاره‌های دارای اصطلاح «اگر و فقط اگر» نسبتاً متداول و در ریاضیات بسیار سودمند هستند. اگر ما بتوانیم نشان دهیم که «A اگر و فقط اگر B» ثابت کرده‌ایم که A و B گزاره‌هایی هم‌ارز هستند، زیرا وقتی یکی از آن‌ها درست (یا نادرست) باشد، دیگری نیز درست (یا نادرست) است. گزاره «A اگر و فقط اگر B» به این معنی است که «A شرط لازم و کافی برای B است» و در عین حال «B شرط لازم و کافی برای A است». بنابراین برای اثبات درستی گزاره «A اگر و فقط اگر B» ما باید ثابت کنیم که:

۱. اگر A آن‌گاه B.

(A یک شرط کافی برای B است؛ B

یک شرط لازم برای A است.)

۲. اگر B آن‌گاه A.

(B یک شرط کافی برای A است؛ A

یک شرط لازم برای B است.)

بنابراین اثبات یک گزاره «اگر و فقط اگر» دارای دو قسمت است. می‌دانیم ما می‌توانیم با به‌کار بردن هر یک از این تکنیک‌ها (روش‌ها) هر قسمت را بسازیم. توجه کنید که گزاره‌های «اگر A، آن‌گاه B» و «اگر B، آن‌گاه A» عکس یکدیگرند.



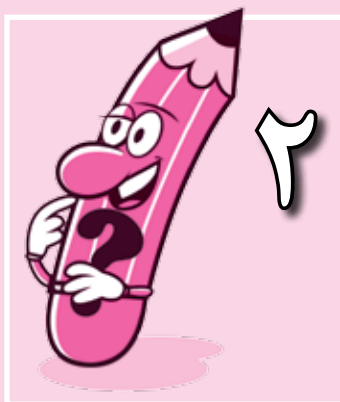
ابهام در نمادگذاری!

اگر $A = (4, 6)$ و $B = [4, 6]$ ، $A \times B$ کدام است؟!

الف) $A \times B = 2 \times 12 = 24$

ب) $A \times B = \{(x, y) \mid 4 < x < 6 \text{ و } 4 \leq y \leq 6\}$

پرسش‌های پیکارجو!



چندجمله‌ای f با ضرایب صحیح مفروض است. می‌دانیم $f(2)$ بر ۵ و $f(5)$ بر ۲ بخش پذیر است. در این صورت $f(7)$ بر کدام بخش پذیر است؟

ج) ۳

ب) ۷

الف) ۱۰

ه) ۸

د) ۴

لغات و اصلاحات جدید

1. گزاره‌ها Statements
2. اصطلاح Expression
3. اگر و فقط اگر If and only if
4. مفید، سودمند Useful
5. هم‌ارز Equivalent
6. لازم Necessary
7. کافی Sufficient
8. شرط Condition
9. شکل دادن، ساختن Construct
10. عکس Converse

ترجمه برای دانش آموز

EXAMPLE 1. A nonzero real number is positive if and only if its reciprocal is positive.

Proof. The two parts of this statement are the simple statements

A: A real number a is positive.

B: The reciprocal of a , denoted as a^{-1} , is positive

Part 1. If A, then B.

(The fact that the number a is positive is sufficient to imply that its reciprocal is positive.) By definition of reciprocal

$$a * a^{-1} = 1.$$

So the number $a * a^{-1}$ is positive.

By the properties of operations of real numbers, the product of two numbers is positive only if the two numbers are either both positive or both negative. Because by hypothesis a is positive, it follows that a^{-1} is positive.

Part 2. If B, Then A.

(The fact that the number a is positive is necessary to imply that its reciprocal is positive.) By definition of reciprocal

$$a * a^{-1} = 1$$

So the number $a * a^{-1}$ is positive.

By the properties of operations of real numbers, the product of two numbers is positive only if the two numbers are either both positive or both negative. Because by hypothesis, a^{-1} is positive, it follows that a is positive.



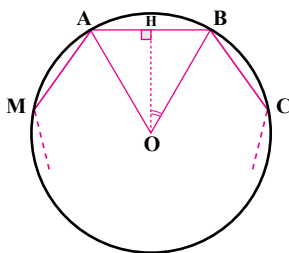
حسین کریمی
دبیر ریاضی شهر تهران

بحثی در باب

مساحت چندضلعی‌های منتظم

در مثلث OBH داریم: $\frac{a}{OH} = \tan \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow \tan \frac{180^\circ}{n} = \frac{BH}{OH}$

$$\Rightarrow OH = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$$



شکل ۲

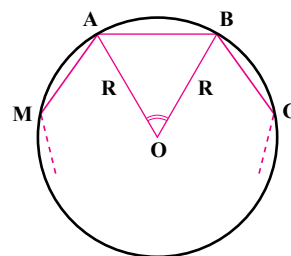
پس مساحت مثلث OAB از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \times OH = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{a^2}{4 \tan \frac{180^\circ}{n}}$$

می‌دانیم مساحت سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ و مساحت چهارضلعی منتظم (مربع) به ضلع a برابر است با: a^2 . اکنون می‌خواهیم برای به‌دست آوردن مساحت n ضلعی منتظم یک رابطه کلی به‌دست آوریم.

فرض کنیم n ضلعی منتظم $ABC...M$ ، به ضلع a ، محاط درون دایره‌ای به مرکز O باشد. پس: $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ (شکل ۱).



شکل ۱

و چون مثلث AOB متساوی‌الساقین است، بنابراین OH هم ارتفاع، هم میانه و هم نیم‌ساز زاویه AOB محسوب می‌شود (شکل ۲). بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} BH &= \frac{a}{2} \\ \angle HOB &= \frac{180^\circ}{n} \end{aligned} \right\}$$

از طرف دیگر، می‌دانیم که در ضلعی منتظم $ABC...M$ ،
 n مثلث یکسان به مانند AOB داریم، پس:

$$S_n = nS_{OAB} \quad \text{مساحت ضلعی منتظم به ضلع } a$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{na^2}{4 \tan \frac{180^\circ}{n}}$$

● **مثال ۱.** مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به‌دست آورید.

$$S_3 = \frac{3a^2}{4 \tan \frac{180^\circ}{3}} = \frac{3a^2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

● **مثال ۲.** مساحت مربع به ضلع a را به‌دست آورید.

$$S_4 = \frac{4a^2}{4 \tan \frac{180^\circ}{4}} = \frac{4a^2}{4 \times 1} = a^2$$

اکنون برای به‌دست آوردن مساحت پنج‌ضلعی منتظم، شش‌ضلعی منتظم، هشت‌ضلعی منتظم و دوازده‌ضلعی منتظم به ضلع a ، به جدول زیر توجه می‌کنیم:

زاویه	$\frac{\pi}{12}$ یا 15°	$\frac{\pi}{8}$ یا $22^\circ 30'$	$\frac{\pi}{6}$ یا 30°	$\frac{\pi}{5}$ یا 36°	$\frac{\pi}{4}$ یا 45°	$\frac{\pi}{3}$ یا 60°
تائزات	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{2} - 1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$	۱	$\sqrt{3}$

◆ **مسئله ۱.** مساحت دوازده‌ضلعی منتظم به ضلع a را به‌دست آورید.

$$S_{12} = \frac{12a^2}{4 \tan 15^\circ} = \frac{12 \times 25}{4(2 - \sqrt{3})} = \frac{75}{2 - \sqrt{3}} = 75(2 + \sqrt{3})$$

◆ **مسئله ۲.** مساحت هشت‌ضلعی منتظم به ضلع a را به‌دست آورید.

$$S_8 = \frac{8a^2}{4 \tan(22^\circ 30')} = \frac{8 \times 16}{4(\sqrt{2} - 1)} = \frac{32}{\sqrt{2} - 1} = 32(\sqrt{2} + 1)$$

◆ **مسئله ۳.** مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a را به‌دست آورید.

$$S_6 = \frac{6a^2}{4 \tan 30^\circ} = \frac{6 \times 9}{4 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{81}{2} \sqrt{3}$$

◆ **مسئله ۴.** مساحت پنج‌ضلعی منتظم به ضلع a را به‌دست آورید.

$$S_5 = \frac{5a^2}{4 \tan 36^\circ} = \frac{5 \times 4}{4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}$$

بدیهی است که هر قدر تعداد اضلاع را در ضلعی منتظم بیشتر کنیم (یعنی n را به سمت ∞ میل دهیم)،
 n ضلعی منتظم به سمت دایره شدن میل خواهد کرد که از اینجا می‌توانیم به کمک ماشین حساب، تقریب‌های خوبی برای عدد π

به‌دست آوریم.

با توجه به شکل ۲ داریم:

$$\sin \hat{HOB} = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow S = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4 \sin^2 \frac{180^\circ}{n}} \quad \text{دایره}$$

حال برای n های بزرگ، مساحت ضلعی منتظم و مساحت دایره را هم‌ارز در نظر می‌گیریم که داریم:

$$S_n \equiv S_{\text{دایره}} \Rightarrow \frac{na^2}{4 \tan \frac{180^\circ}{n}} \equiv \frac{\pi a^2}{4 \sin^2 \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{n \cos \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{180^\circ}{n}} \equiv \frac{\pi}{\sin^2 \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow \pi \equiv n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$$

با توجه به اتحاد « $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ » داریم:

$$\pi \equiv \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$$

و برای مقادیر مختلف n داریم:

$$n = 6 \rightarrow \pi \equiv \frac{6}{2} \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow \pi \equiv 3 / 519.611$$

$$n = 15 \rightarrow \pi \equiv \frac{15}{2} \cdot \sin 24^\circ \Rightarrow \pi \equiv 3 / 507.755$$

$$n = 36 \rightarrow \pi \equiv \frac{36}{2} \cdot \sin 10^\circ \Rightarrow \pi \equiv 3 / 508.611$$

$$n = 180 \rightarrow \pi \equiv \frac{180}{2} \cdot \sin 2^\circ \Rightarrow \pi \equiv 3 / 508.611$$

$$n = 360 \rightarrow \pi \equiv \frac{360}{2} \cdot \sin 1^\circ \Rightarrow \pi \equiv 3 / 508.611$$

$$n = 1000 \rightarrow \pi \equiv \frac{1000}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{1000} \Rightarrow \pi \equiv 3 / 508.611$$

$$n = 10000 \rightarrow \pi \equiv \frac{10000}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{10000} \Rightarrow \pi \equiv 3 / 508.611$$

ابهام در نمادگذاری!

اگر $f = \{(2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$ و $g = \{(2,3), (3,6), (4,5), (5,6)\}$
 $(7,2)$ تابعی روی Z باشند، $f-g$ کدام است؟

الف) $f-g = \{(3,4), (4,5)\}$

ب) $f-g = \{(2,0), (3,-2), (5,0)\}$



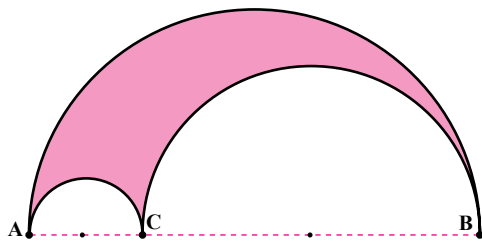
مریم شاه محمدی
دبیر منطقه یک
آموزش و پرورش شهر تهران

ارتباط بین آربلوس و نمایش هندسی اتحادهای جبری

چکیده

اهداف از نگارش مقاله حاضر، طرح و بیان یک موضوع مرتبط با مباحث کتاب‌های درسی ریاضی متوسطه، به عنوان یک پیشنهاد موردی به منظور تعمیق دانسته‌های فراگیرندگان و عینیت بخشیدن به مسائل انتزاعی در آموزش ریاضی است. «آربلوس»^۱ یکی از قدیمی‌ترین و جالب‌ترین اشکال هندسی است که متأسفانه در کتاب‌های درسی در مدارس ایران جایگاهی برای آن منظور نشده است. در مقاله حاضر، آربلوس و برخی از خواص آن معرفی شده است. همچنین، با در نظر گرفتن رویکرد هندسی-کاربردی در تألیف کتاب‌های درسی ریاضی در سال‌های اخیر، سعی شده است با بررسی موضوعی مساحت آربلوس و ارائه روش‌های ترسیمی و محاسباتی ساده در نرم‌افزارهای «geogebra»، «math prof» و «calques 3D» و ارتباط بین آن و اتحادهای جبری به صورت شهودی نمایش داده شود.

کلیدواژه‌ها: آربلوس، مساحت، حجم، اتحاد جبری



شکل ۱. نمایش هندسی یک آربلوس

مقدمه

آربلوس یک کلمه یونانی به معنای چاقوی کفافی است. همچنین، به تیغه چاقویی که خرازان و پینه‌دوزان باستان از آن استفاده می‌کردند، شباهت دارد. آربلوس یک شکل هندسی است که از سه نیم‌دایره ساخته شده است (شکل ۱). یک نیم‌دایره با قطر AB و دو نیم‌دایره کوچک‌تر که در یک نقطه روی قطر دایره بزرگ (C) با یکدیگر مماس بیرون و در راستای قطر AB بر نیم‌دایره بزرگ‌تر مماس درون هستند. مرکز هر سه نیم‌دایره در یک امتداد و مجموع قطرهای دو نیم‌دایره کوچک‌تر با قطر نیم‌دایره بزرگ برابر است. در واقع دو نیم‌دایره کوچک‌تر در نیم‌دایره بزرگ محاط شده‌اند. سطحی که توسط سه نیم‌دایره توصیف شده، محدود شده است، آربلوس نامیده می‌شود [۱].

ارشمیدس^۲، ریاضی‌دان یونانی، اولین کسی بود که خواص ریاضی این کمان‌ها را مطالعه و بررسی کرد. البته خواص آربلوس مورد توجه ریاضی‌دانان مشهوری چون دکارت^۳، فرما^۴، نیوتن^۵ و ابوسعید سجری نیز بوده است.

پیشینه‌ای برای نمایش هندسی اتحادهای جبری

یونانیان باستان، فقط از صورت هندسی مسطحه مفاهیم جبری استفاده می‌کردند. اقلیدس^۶، در کتاب دوم اصول خود، یک تعبیر هندسی از اتحاد مربع دو جمله‌ای: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ و دیگر اتحادهای جبری درجه دوم پیشنهاد می‌کند. ارشمیدس در کتاب «مأخوذات» که نصیرالدین محمد طوسی تحریری بر آن نوشته است، تعبیر هندسی دیگری از اتحاد فوق ارائه می‌دهد. او ثابت می‌کند مکمل نیم‌دایره‌هایی با قطرهای a و b و نیم‌دایره‌ای با قطر (a+b) یا (آربلوس) برابر است با دایره‌ای به قطر $\sqrt{ab}$.

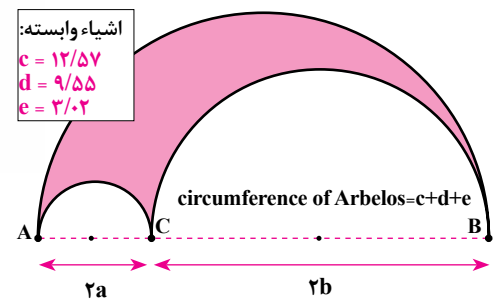
ابوسعید سجری، در کتاب «فی مساحی الاکر



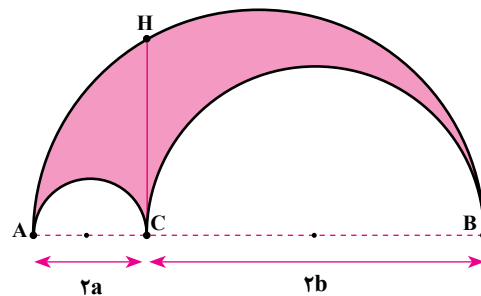
بالا کر»، صورت هندسی مسطحه ارشمیدس و اقلیدس را با در نظر گرفتن آن در فضا تعمیم می‌دهد. او یک تفسیر سه‌بعدی از اتحاد: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ ارائه می‌دهد. بدین صورت که یک مکعب را به دو مکعب و سه متوازی‌السطوح تقسیم می‌کند.

ویژگی‌های آربلوس

آربلوس یک شکل هندسی خودمتشابه است. یکی از ویژگی‌های جالب آربلوس، همسانی محیط آن با محیط یک دایره معین است [۵] (شکل ۲).

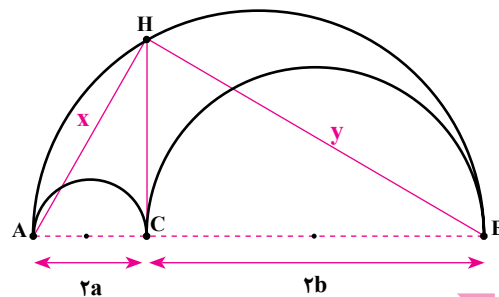


شکل ۲. نمایش محاسبه محیط آربلوس در نرم‌افزار جئوجبرا



شکل ۳. نمایش مماس مشترک داخلی دو نیم‌دایره آربلوس

برهان: از نقطه H به نقاط A و B وصل می‌کنیم (شکل ۴). با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث‌های ACH، BCH و AHB داریم:



شکل ۴. تعیین اندازه مماس مشترک داخلی دو نیم‌دایره آربلوس

- در حالت کلی با فرض $AC=2a$ و $CB=2b$ داریم:
- (۱) طول کمان نیم‌دایره به قطر AC $= \pi a$
 - (۲) طول کمان نیم‌دایره به قطر CB $= \pi b$
 - (۳) طول کمان نیم‌دایره به قطر AB $= \pi(a+b)$
 - (۴) محیط آربلوس $= \pi a + \pi b + \pi(a+b)$
 - (۵) محیط دایره به قطر $2(a+b)$ $= 2\pi(a+b)$

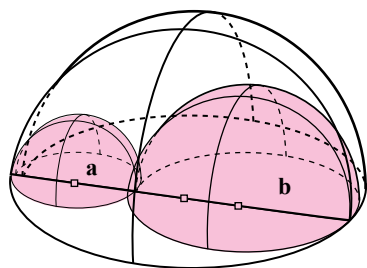
از رابطه‌های فوق لم ۱ نتیجه می‌شود.

لم ۱. محیط یک آربلوس با نیم‌دایره‌های داخلی به شعاع‌های a و b ، با محیط دایره‌ای به شعاع $(a+b)$ برابر است. یکی دیگر از خواص جالب آربلوس، همسانی مساحت آن با مساحت یک دایره معین است.

لم ۲. فرض کنید CH مماس مشترک داخلی دو نیم‌دایره به شعاع‌های a و b و محدود به کمان نیم‌دایره به قطر AB باشد (شکل ۳). در این صورت اندازه طول CH برابر است با: $2\sqrt{ab}$.

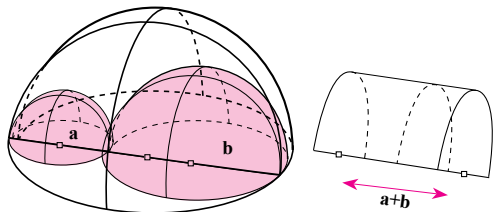
از ترکیب لم ۲ و قضیه ۱، نتیجه زیر حاصل می‌شود:
نتیجه ۱. مساحت یک آربلوس با نیم‌دایره‌های داخلی به شعاع‌های a و b ، با مساحت دایره‌ای به شعاع $\sqrt{ab}$ برابر است.

تعریف ۱. یک نیم‌کره به شعاع $(a+b)$ و دو نیم‌کره به شعاع‌های a و b را که در آن مماس هستند (شکل ۷)، در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که مرکز هر سه در یک امتداد، و مجموع قطرهای دو نیم‌کره کوچک با قطر نیم‌کره بزرگ برابر باشد. فضای هندسی محصور بین دو نیم‌کره کوچک و نیم‌کره بزرگ را «مستدیر کروی آربلوس» می‌نامیم.



شکل ۷. مستدیر کروی آربلوس

قضیه ۲. حجم مستدیر کروی آربلوس با شعاع‌های داخلی a و b ، با نصف حجم استوانه‌ای به ارتفاع $(a+b)$ و شعاع قاعده $\sqrt{ab}$ برابر است (شکل ۸).



شکل ۸. حجم مستدیر کروی آربلوس

برهان: حجم مستدیر کروی آربلوس را با V_1 و حجم استوانه مفروض را با V_2 نشان می‌دهیم.

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi(a+b)^3 - \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{2}{3}\pi b^3 \quad (16)$$

$$= 2\pi ab(a+b)$$

$$V_2 = \pi(2\sqrt{ab})^2(a+b) = 4\pi ab(a+b) \quad (17)$$

با مقایسه رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) حکم قضیه ثابت خواهد شد.

$$(2a)^2 + CH^2 = x^2 \quad (6)$$

$$(2b)^2 + CH^2 = y^2 \quad (7)$$

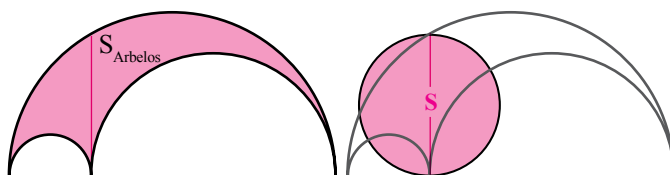
$$x^2 + y^2 = 4(a+b)^2 \quad (8)$$

با جای‌گذاری رابطه‌های (۶) و (۷) در رابطه (۸) داریم:

$$4a^2 + 4b^2 + 2CH^2 = 4a^2 + 4b^2 + 8ab \quad (9)$$

$$\Rightarrow CH^2 = 4ab \Rightarrow CH = 2\sqrt{ab}$$

قضیه ۱. مساحت یک آربلوس (شکل ۵)، همواره با مساحت یک دایره برابر است.



شکل ۵. مساحت یک آربلوس

برهان: با توجه به خاصیت مماس مشترک داخلی دو نیم‌دایره درونی آربلوس و رابطه هندسی قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه (شکل ۶) و انعکاس آربلوس داریم:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad (10)$$

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 \quad (11)$$

$$S_{Arbelos} + A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \quad (12)$$

با ضرب کردن روابط (۱۰) و (۱۱) و (۱۲) در $\frac{\pi}{8}$ داریم:

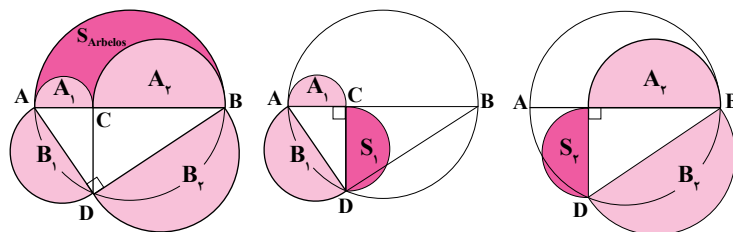
$$B_1 = A_1 + S_1 \quad (13)$$

$$B_2 = A_2 + S_2 \quad (14)$$

با جای‌گذاری روابط (۱۳) و (۱۴) در رابطه (۱۲) خواهیم داشت:

$$S_{Arbelos} + A_1 + A_2 = A_1 + S_1 + A_2 + S_2 \quad (15)$$

$$\Rightarrow S_{Arbelos} = S_1 + S_2 = S$$



شکل ۶. رابطه فیثاغورس در تعیین مساحت نیم‌دایره

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

بی‌شک یکی از عوامل تأثیرگذار بر عملکرد ریاضی فراگیرندگان، توانایی تصویرسازی مسائل دانش هندسی آن‌هاست. لذا ایجاد ارتباط بین مسائل گوناگون ریاضی و بیان آن‌ها در تقویت قوه تصویرسازی ذهنی دانش‌آموزان نقش بسزایی دارد. آربلوس یکی از ابزارهای موجود در زندگی روزمره است (شکل ۱۱) که به دلیل برخورداری از شکل هندسی خاص و ویژگی‌های ساختاری، در تصویرسازی بسیاری از مفاهیم ریاضی کاربرد دارد. همان‌گونه که مطرح شد، آربلوس مفاهیم هندسی چون دایره، مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره، دایره‌های مماس درون، مماس برون، مساحت، حجم و... (عناوین فصل دوم کتاب هندسه سوم ریاضی) را دربرمی‌گیرد. نظر به اینکه علی‌رغم تغییرات کتاب‌های درسی در سال‌های اخیر، در نگارش و محتوای کتاب هندسه ۲، تغییراتی صورت نگرفته است. بازنگری و اشاره به مواردی از این دست در تکمیل مباحثی از کتاب مذکور، پیشنهاد می‌شود.

از طرف دیگر، ارتباط آربلوس با تعبیر هندسی اتحادهای جبری، در جهت تعمیق دانسته‌های دانش‌آموزان (کتاب ریاضی ۱ متوسطه) موضوعی کاربردی و قابل تأمل به نظر می‌رسد.



شکل ۱۱. آربلوس در زندگی روزمره

* پی‌نوشت‌ها

1. Arbelos
2. Archimedes
3. Descartes
4. Fermat
5. Newton
6. Euclid

* منابع

1. Boas, H.P. (2006), Reflections on the Arbelos. The Mathematical Association of America, 236-249.
2. Glanville, D. (1948). Pappus of Alexandria on Architectural Studies. The University of Chicago Press, 197-200.
3. Greenberg, M.J. (1980). Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history. San Francisco: W.H. Freeman.
4. Hood, R.T. (1961). A chain of circles. National Council of Teachers of Mathematics, 134-137.
5. Rouhani, B. "The Arbelos" (2002) Retrieved June 19, 2008, from <http://jwilson.coe.uga.edu>
6. Weisstein, E. W, Arbelos; available at <http://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html>.
7. Welch, M.G. (1949). The Arbelos, Master's thesis, University of Kansas.

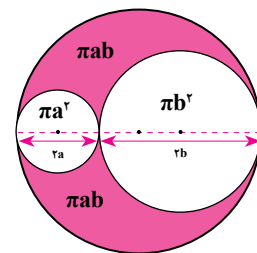
ارتباط بین نمایش هندسی اتحادهای جبری با آربلوس

مساحت دایره‌ای به شعاع $(a+b)$ را با $S_{r=a+b}$ و مساحت دایره‌ها با شعاع‌های a و b را به ترتیب با $S_{r=a}$ و $S_{r=b}$ نشان می‌دهیم (شکل ۹).

$$S_{r=a+b} = S_{r=a} + S_{r=b} + 2S_{\text{Arbelos}} \quad (18)$$

$$\pi(a+b)^2 = \pi a^2 + \pi b^2 + 2\pi ab \quad (19)$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



شکل ۹. ارتباط آربلوس و اتحاد مربع دو جمله

با در نظر گرفتن قضیه ۲، می‌توان یک تعبیر هندسی برای اتحاد مکعب دو جمله‌ای مطرح کرد:

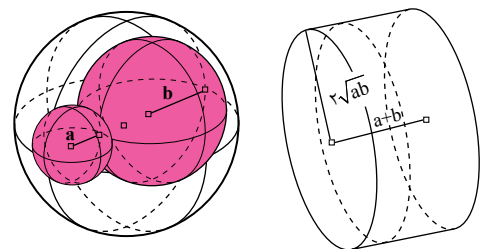
نتیجه ۲. مکمل دو کره به شعاع‌های a و b و کره‌ای به شعاع $(a+b)$ ، یک استوانه به ارتفاع $(a+b)$ و شعاع قاعده $2\sqrt{ab}$ است (شکل ۱۰).

اگر حجم کره‌ای به شعاع $(a+b)$ را با $V_{r=a+b}$ و حجم کره‌هایی با شعاع‌های a و b را به ترتیب با $V_{r=a}$ و $V_{r=b}$ و حجم مخروطی به ارتفاع $(a+b)$ و شعاع قاعده $2\sqrt{ab}$ را با V نشان دهیم، داریم:

$$V_{r=a+b} = V_{r=a} + V_{r=b} + 3V \quad (20)$$

$$\frac{4}{3}\pi(a+b)^3 = \frac{4}{3}\pi a^3 + \frac{4}{3}\pi b^3 + 3\left(\frac{1}{3}\pi(2\sqrt{ab})^2(a+b)\right) \quad (21)$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$



شکل ۱۰. ارتباط آربلوس و اتحاد مکعب دو جمله

نتیجه ۳. مکمل دو کره به شعاع‌های a و b و کره‌ای به شعاع $(a+b)$ ، سه مخروط به ارتفاع $(a+b)$ و شعاع قاعده $2\sqrt{ab}$ است.



مایک کیت

علیرضا پونید
دبیر ریاضی و رایانه
دبیرستان‌های شیراز

عدد کیت

اشاره

در تدریس کتاب ریاضی ۲ فصل اول، دانش‌آموزان با مفهوم «دنباله» آشنا می‌شوند. در اینجا عدد کیت را به آن‌ها معرفی می‌کنیم تا با زیبایی بعضی از دنباله‌ها آشنا شوند و به درس ریاضی علاقه پیدا کنند.

عدد ۱۹۷ را در نظر بگیرید و با استفاده از رقم‌های آن، دنباله اعداد زیر را تشکیل دهید:

۱۹۷ و ۱۰۷ و ۵۷ و ۳۳ و ۱۷ و ۷ و ۹ و ۱

همان‌طور که می‌بینیم، از جمله چهارم به بعد، هر جمله از جمع سه جمله ماقبل خود به‌دست می‌آید و جمله آخر ۱۹۷ است. به اعدادی چون ۱۹۷ اعداد «کیت»^۱ می‌گویند. به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف: عدد n رقمی $N = a_1 a_2 \dots a_n$ را یک عدد کیت گویند، هرگاه دنباله‌ای تشکیل دهیم که:

(الف) جمله اول آن $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشند.

(ب) از جمله $n+1$ -ام به بعد، هر جمله از جمع n جمله قبلی به‌دست آید. آن‌گاه عدد N در دنباله ظاهر شود.

اعداد کیت برای اولین‌بار در سال ۱۹۸۷ توسط ریاضی‌دانی به‌نام مایک کیت^۲ معرفی شدند. در جدول زیر فهرست اعداد کیت ۲ رقمی، ۳ رقمی، ۴ رقمی و ۵ رقمی را آورده‌ایم:

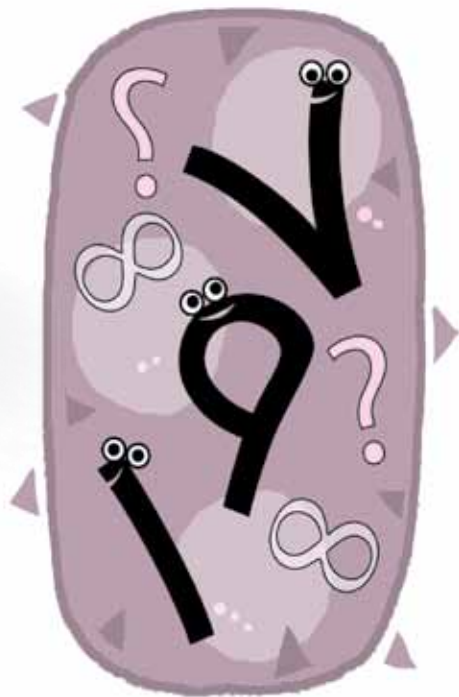
تعداد رقم‌ها	اعداد کیت
۲	۷۵ و ۶۱ و ۴۷ و ۲۸ و ۱۹ و ۱۴
۳	۷۴۲ و ۱۹۷
۴	۷۹۰۹ و ۷۶۴۷ و ۷۳۸۵ و ۴۷۸۸ و ۳۶۸۴ و ۲۵۸۰ و ۲۲۰۸ و ۱۵۳۷ و ۱۱۰۴
۵	۹۳۹۳۳ و ۸۶۹۳۵ و ۶۲۶۶۲ و ۵۵۶۰۴ و ۳۴۴۴۸ و ۳۴۲۸۵ و ۳۱۳۳۱

* پی‌نوشت‌ها

1. Keith

2. Mike Keith

(ریاضی‌دان و مهندس نرم‌افزار آمریکایی - زاده ۱۹۵۵)



جمعاً ۹۴ عدد کیت کوچک‌تر از 10^{39} داریم. عدد ۲۷۸۴۷۶۵۲۵۷۷۹۰۵۷۹۳۴۱۳ کوچک‌ترین عدد کیتی است که در آن تمامی رقم‌های ۰ و ۱ و ۲ و ... و ۹ حداقل یک بار به کار رفته‌اند و در سال ۲۰۰۴ کشف شد. در اینجا چند عدد کیت که اول هستند را می‌آوریم:

۲۴۷۰۳۷۳۰۲۴۷ و ۷۴۵۹۸۹۳۷۳ و ۱۰۸۴۰۵۱ و ۱۹۷ و ۶۱ و ۴۷ و ۱۹

اکنون سؤال‌هایی را مطرح می‌کنیم که هنوز حل نشده باقی مانده‌اند:

۱. آیا بی‌نهایت عدد کیت وجود دارد؟

۲. نکته جالب اینکه عدد کیت ۱۰ رقمی وجود ندارد،

آیا اعداد ۱۰ رقمی تنها این خاصیت را دارند یا اعداد n رقمی دیگری هم وجود دارند؟

دو معمای عددی جالب

معماهای عددی در میان معماهای ریاضی جایگاه ویژه‌ای دارند، چرا که توانایی شما را برای حل معادله‌های گوناگون و محاسبات ریاضی می‌آزمایند. به همین دلیل تصمیم گرفتیم تا در این شماره، شما را به حل دو نمونه بسیار جالب از آن‌ها دعوت کنیم. پاسخ‌ها را در همین شماره ببینید و با راه حل خودتان مقایسه کنید.

معمای دوم

روزی دسته‌ای از کبوتران در پرواز بودند که به دسته‌ای از گنجشک‌ها برخوردند. سردسته کبوتران به دسته گنجشک‌ها نزدیک شد و از سردسته آن‌ها پرسید: شما چندتاییید؟ و گنجشک گفت: ما و ما... و کبوتر صحبت او را قطع کرد و گفت: آهان، همون معمای قدیمی! پس سی‌وشش تایید! گنجشک گفت: نه بابا بذار حرفم را تمام کنم! ما بیشتر از سی‌وشش تاییم. داشتیم می‌گفتم: ما و ما و شما و نصفه‌ای از شما و نصفه‌ای از نصفه شما گر یکی افزون شود، جملگی صدتا شویم!

گنجشک‌ها و کبوترها چندتا بودند؟



* پی‌نوشت‌ها

منظور معمایی بسیار قدیمی است که می‌گوید: ما و ما و نصفه‌ای از ما و نصفه‌ای از نصفه ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صدتا شویم.

ایستگاه دوم:

معمای عددی

معمای اول

از یک ریاضی‌دان پرسیدند: چند سال داری؟ او در جواب گفت: میانگین سن من و همسر و فرزندانمان ۲۵ سال است و دیگر چیزی نمی‌توانم بگویم! از همسر او پرسیدند: شما چند سال داری؟ و او جواب داد: میانگین سن من و فرزندانمان ۲۰ سال است و دیگر چیزی نمی‌توانم بگویم! از یکی از فرزندان پرسیدند: شما چند سال داری؟ و او گفت: میانگین سن ما بچه‌ها ۱۲/۵ سال است و مادرمان ۴۰ سال دارد. ریاضی‌دان چند سال دارد؟



پرسش‌های پیکارجو!



تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{630}x^9 - \frac{1}{21}x^7 + \frac{13}{30}x^5 - \frac{8}{63}x^3 + \frac{32}{35}x$

با برد R_f و دامنه Z مفروض است. کدام گزینه صحیح است؟

- (الف) $R_f = Q$ (ب) $R_f \subset (Q-Z)$ (ج) $R_f = Z$ (د) $R_f \subset Z, R_f \neq Z$
(هـ) $R_f \subset N$



دستگاه‌های عددی

«دستگاه عددی» طریقی برای نوشتن اعداد است. برای مثال، در دستگاه دهدهی روزمره‌مان، اعداد را مثلاً به صورت $434/15$ نمایش می‌دهیم. ارقام واقع در این عدد، یکان، دهگان، صدگان، یک دهم‌ها، یک صدم‌ها، یک هزارم‌ها، و غیره را مشخص می‌کنند، و به «ضرایب» (coefficients) موسوم‌اند.

بنابراین:

$$434/15 = (4 \times 100) + (3 \times 10) + (4 \times 1) + \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{5}{100}\right)$$

این نمایش صرفاً توصیف اختصاری مجموعی از توان‌های ده است، و هر عدد حقیقی می‌تواند به این طریق نوشته شود.

اما مزیت خاصی در مورد دستگاه در «پایه یا مبنای ده» موجود نیست. یک عدد می‌تواند در مبنای هر عدد صحیح مثبت n ، با استفاده از ضرایبی نوشته شود که از 0 تا $n-1$ تغییر می‌کنند. برای مثال، عدد $8\frac{5}{18}$ در مبنای دو یا دودویی می‌تواند به صورت $100/0101$ نوشته شود. ضرایب سمت چپ ممیز نشانگر یک‌ها، دوها، چهارها و هشت‌ها، یعنی توان‌های 2 ‌اند. موارد سمت راست نیم‌ها، ربع‌ها، یک هشتم‌ها و یک شانزدهم‌ها را نشان می‌دهند. اغلب رایانه‌ها از دستگاه دودویی استفاده می‌کنند، زیرا برای کار در این دستگاه الکترونیکی، دو ضریب (0 و 1) آسان‌ترند.

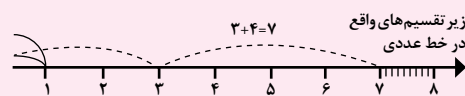
دودویی	دهدهی
۰	۰
۱	۱
۱۰	۲
۱۱	۳
۱۰۰	۱۰
۱۰۱	۱۱
۱۱۰	۱۲

خط عددی

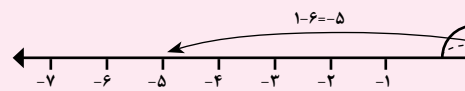
خط عددی مفهومی سودمند برای اندیشیدن در مورد معنی عملیات ریاضی است. خط مزبور خطی افقی با تقسیمات خاصی است که با اعداد درست مثبت و منفی در هر جهت آن از یکدیگر، به درازا کشیده می‌شوند. کل «اعداد درست» (whole numbers) که توسط خط عددی پوشش داده شده‌اند، به عنوان اعداد صحیح شناخته می‌شوند.

جمع یک عدد مثبت، متناظر با حرکت به سمت راست خط عددی، به اندازه فاصله‌ای هم‌ارز با عدد مثبت مفروضمان است. تفريق یک عدد مثبت، متناظر با حرکت به سمت چپ، به اندازه فاصله مثبت داده شده است.

به این ترتیب، یک منهای ده به معنی ۱۰ واحد حرکت کردن به سمت چپ یک است که منهای نه را می‌دهد و ۹- نوشته می‌شود.



بین اعداد صحیح نشان داده شده در شکل، اعداد دیگری، از قبیل نیم‌ها، یک‌سوم‌ها و یک‌چهارم‌ها وجود دارند. این اعداد نسبت‌های ساخته شده با تقسیم هر عدد صحیح بر یک عدد صحیح ناصفر هستند. این‌ها همراه با اعداد طبیعی - صفر و اعداد صحیح مثبت که در واقع نسبت‌های تقسیم شده بر ۱ اند - «اعداد گویا» (rational numbers) را تشکیل می‌دهند. این‌ها با زیرتقسیم‌های ریز تر و ریز تر خط عددی مشخص می‌شوند. ولی آیا اعداد گویا خط عددی مان را کامل می‌کنند؟ آشکار می‌شود که تقریباً جمیع عددهای بین صفر و یک نمی‌توانند به صورت نسبت‌ها نوشته شوند؛ این اعداد به نام «اعداد گنگ» (irrational numbers) معروف‌اند؛ یعنی اعدادی که نمایش دهمی‌شان هیچ‌گاه متوقف نمی‌شود و سرانجام تکرار شونده نیستند. مجموعه کامل اعداد گویا و گنگ با هم به صورت «اعداد حقیقی» (real numbers) شناخته می‌شوند.



خانواده‌های اعداد

اعداد را می‌توان در خانواده‌هایی رده‌بندی کرد که در ویژگی‌های معینی شریک‌اند. به این طریق، راه‌های بسیاری برای قرار دادن اعداد در رده‌بندی‌ها موجودند. در واقع، درست همان‌طور که بی‌نهایت عدد وجود دارد، بی‌نهایت طریق گوناگون موجود است که این اعداد را می‌توان زیر تقسیم و از یکدیگر متمایز کرد. برای مثال، «اعداد طبیعی» (natural numbers) یعنی اعداد صحیحی که اشیاء را در دنیای واقعی با آن‌ها می‌شماریم، تنها یکی از چنین خانواده‌هایی هستند؛ همان‌گونه که «اعداد صحیح» (integers) چنین‌اند، یعنی اعداد درست، از جمله اعداد کمتر از صفر. «اعداد گویا» (rational numbers) خانواده دیگری را تشکیل می‌دهند و به تعریف خانواده‌ای حتی بزرگ‌تر کمک می‌کنند؛ یعنی خانواده اعداد گنگ.

خانواده‌های «اعداد جبری» (algebraic numbers) و «اعداد متعالی» (transcendental numbers) توسط رفتارهای دیگری تعریف شده‌اند، در حالی که اعضای جمیع این خانواده‌های مختلف «اعداد حقیقی» (real numbers) هستند که در مقابل «اعداد موهومی» (imaginary numbers) تعریف شده‌اند.

گفتن اینکه عددی عضو خانواده معینی است، طریق مختصر توصیف ویژگی‌های گوناگون آن است و اینکه چه نوع پرسش‌های ریاضی می‌توان به طریقی سودمند درباره آن مطرح کرد. غالباً خانواده‌های اعداد از تولید توابعی به وجود می‌آیند که چگونگی ساخت دنباله‌ای از اعداد را توصیف می‌کنند. به طریق دیگر، می‌توانیم یک تابع یا قاعده را برای توصیف خانواده‌هایی تشکیل دهیم که به‌طور شهودی آن‌ها را می‌شناسیم.

به عنوان نمونه، ما به‌طور غریزی اعداد زوج را می‌شناسیم، اما آن‌ها چیستند؟ از لحاظ ریاضی می‌توانیم آن‌ها را به صورت جمیع اعداد طبیعی به صورت $2 \times n$ که در آن‌ها n عددی طبیعی است، تعریف کنیم. همچنین، اعداد فرد اعدادی طبیعی به صورت $2n+1$ اند، در حالی که اعداد اول اعدادی بزرگ‌تر از ۱ اند که تنها مقسوم‌علیه‌های آن‌ها ۱ و خودشان هستند.

خانواده‌های دیگری نیز به‌طور طبیعی در ریاضیات رخ می‌دهند. مثلاً در «اعداد فیبوناتچی» (...، ۳۴، ۲۱، ۱۳، ۸، ۵، ۳، ۲، ۱) هر عدد مجموع دو عدد پیشین آن است. این الگو به‌طور طبیعی در زیست‌شناسی و ریاضیات، هر دو رخ می‌دهد. اعداد فیبوناتچی به‌طور تنگاتنگی با نسبت طلایی نیز مرتبط‌اند.

مثال‌های دیگر شامل جدول‌های ضرب‌اند که با ضرب عدد صحیح مثبتی در عدد خاص دیگری ساخته می‌شوند، و مربع‌ها که در آن‌ها هر عدد حاصل ضرب یک عدد طبیعی در خودش است؛ یعنی n ضرب در n یا n^2 ، یا مربع n .

ایستگاه سوم:

لطیفه‌های ریاضی

بود. بی‌مقدمه رو به چوپان کرد و گفت: «آهای آقا، ببخشید این گوسفند رو چند می‌فروشی؟» چوپان گفت: «اونا فروشی نیستن!»

ریاضی‌دان کمی سکوت کرد و بعد گفت: «من می‌تونم بدون شمارش بهت بگم، چند تا گوسفند تو گله‌ات داری. اگر درست گفتم یکیشون مال من! قبوله؟»

چوپان سری به علامت تأیید تکان داد. ریاضی‌دان گفت: «۳۸۷ تا!»

چوپان با تعجب گفت: «درسته! برام دوری از یکی از گوسفندهام خیلی سخته، ولی خب قول دادم و باید به قولم عمل کنم، برو یکی شون رو بردار!»

ریاضی‌دان به سراغ حیوان‌ها رفته و یکی از آن‌ها را برداشت و بر دوش انداخت و آماده رفتن شد که با صدای چوپان مکث کرد. چوپان گفت: «من می‌تونم بگم شغل تو چیه و اگر درست بگم، باید اونو به من برگردونی!»

ریاضی‌دان سری به علامت تأیید تکان داد. چوپان گفت: «تو ریاضی‌دانی!» و ریاضی‌دان با تعجب گفت: «درسته، ولی از کجا فهمیدی؟!»

چوپان گفت: «از اونجا که تعداد گوسفندام رو درست گفتی، ولی اون که روی دوش انداختی، سگمه!»

لطیفه اول

ریاضی‌دانی برای تعطیلات آخر نیم‌سال به یکی از روستاهای خوش آب و هوای اطراف شهر خود رفته بود. روزی از ایام تعطیل برای گردش به تپه‌ها رفت که با چوپانی مواجه شد که مشغول چراندن گوسفندانش



لطیفهٔ دوم



روزی گروهی از ریاضی‌دانان و گروهی از مهندسان برای شرکت در یک سمینار دربارهٔ کاربردهای ریاضیات در مهندسی با قطار به شهری مسافرت می‌کردند. مهندسان هر کدام یک بلیت گرفته بودند، در حالی که ریاضی‌دانان همگی فقط یک بلیت خریده بودند. مهندسان با خنده و استهزا داشتند دربارهٔ سرنوشت آن‌ها موقع ورود مأمور کنترل بلیت با هم می‌گفتند. در همین هنگام یکی از ریاضی‌دان‌ها فریاد زد: «مأمور کنترل بلیت!» و ناگهان همهٔ ریاضی‌دان‌ها به سمت دست‌شویی قطار هجوم بردند و وارد آن شدند و در را بستند!

کمی بعد مأمور کنترل بلیت‌ها وارد سالن شد و از همهٔ مهندسان بلیت خواست و بعد از کنترل، به طرف دست‌شویی رفت و به در ضربه‌هایی زد و گفت: «بلیت لطفاً!» یکی از ریاضی‌دان‌ها آن یک بلیت را از زیر در به او نشان داد! و مأمور از آنجا رفت و چند دقیقه بعد ریاضی‌دان‌ها از دست‌شویی به جای خودشان باز گشتند. بعد از پایان سمینار و موقع بازگشت مهندسان همگی یک بلیت خریدند و ریاضی‌دان‌ها هیچ بلیتی نخریدند! هنگام حرکت قطار، ناگهان یکی از ریاضی‌دان‌ها فریاد زد: «مأمور کنترل بلیت!» و همهٔ مهندسان به سمت دست‌شویی هجوم بردند و در را بستند. بعد یکی از ریاضی‌دان‌ها به طرف دست‌شویی رفت و گفت: «بلیت لطفاً!»

لطیفهٔ سوم

روزی یک ریاضی‌دان، یک فیزیک‌دان و یک مهندس در یک قطار در حال سفر بودند. ناگهان پرنده‌ای سیاه‌رنگ از مقابل پنجرهٔ قطار گذشت. مهندس گفت: «چه جالب! معلوم می‌شه همهٔ پرنده‌های اینجا سیاه‌رنگ هستند!»

فیزیک‌دان گفت: «نه، معلوم می‌شه بعضی از پرنده‌های این شهر سیاه‌رنگ هستند.» و ریاضی‌دان گفت: «نخیر، می‌شود گفت که لااقل یک پرنده در این شهر هست که لااقل یک طرف بدنش سیاه‌رنگ است!»



اشاره

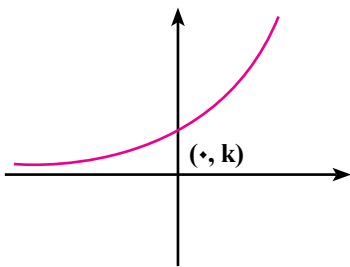
برای ورود به مطلب، ابتدا به معرفی اجمالی تابع نمایی و بیان برخی از ویژگی‌های آن می‌پردازیم و سپس روش تشخیص تابع نمایی را از روی جدول مطرح می‌کنیم و سه روش یافتن ضابطه تابع نمایی به کمک جدول را بیان خواهیم کرد.

تعریف تابع نمایی

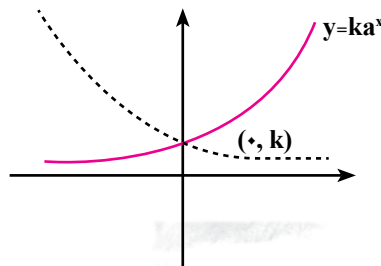
هر تابعی به شکل کلی $y=f(x)=ka^x$ با شرایط $a>0$ و $a\neq 1$ و $k\neq 0$ یک تابع نمایی است.

ویژگی‌های تابع نمایی

۱. با توجه به تعریف تابع نمایی a نمی‌تواند منفی، صفر و یک باشد.
۲. دامنه تابع نمایی $y=ka^x$ مجموعه اعداد حقیقی است.
۳. برد تابع نمایی $y=ka^x$ اگر $k>0$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت، و اگر $k<0$ مجموعه اعداد حقیقی منفی است.
۴. تابع نمایی $y=ka^x$ تابع یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر است.
۵. تابع نمایی $y=ka^x$ همواره از ناحیه‌های اول و دوم، یا از ناحیه‌های سوم و چهارم محورهای مختصات می‌گذرد.
۶. تابع نمایی $y=ka^x$ همواره از نقطه $(0, k)$ می‌گذرد (محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض k قطع می‌کند).
۷. در تابع $y=ka^x$ ($a>1$ ، $k>0$) با افزایش مقادیر x ، مقادیر y نیز افزایش می‌یابند. بنابراین تابع افزایشی است.



۸. در تابع $y=ka^x$ ($0<a<1$ ، $k>0$) با افزایش مقادیر x ، مقادیر y کاهش می‌یابند. بنابراین تابعی کاهشی است.



تشخیص

تابع نمایی با جدول

x	۱	۲	۴	۵
y	۲	۶	۱۸	۵۴

$\xrightarrow{\times 3} \quad \xrightarrow{\times 3} \quad \xrightarrow{\times 3}$

جدول ۳.

حل جدول ۳. با توجه به جدول، با اینکه هر یک از مقادیر y با ضرب در یک عدد ثابت $(+3)$ حاصل می‌شوند، ولی مقادیر x به مقدار ثابتی افزایش نمی‌یابند. پس جدول ۳ تابع نمایی را نمایش نمی‌دهد.

x	۱	۰	-۱	-۲
y	۴	۱	-۲	-۵

جدول ۴.

حل جدول ۴. در جدول ۴ دامنه تغییرات x و y نامنظم است و علاوه بر آن، بعضی مقادیر y ، عددهای منفی هستند. بنابراین جدول ۴ تابع نمایی را نمایش نمی‌دهد.

ب) روش‌های پیدا کردن ضابطه تابع نمایی از روی جدول

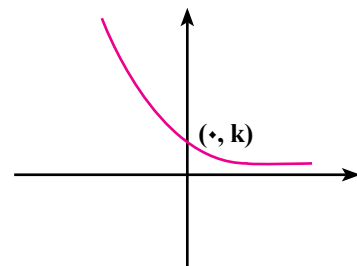
روش اول: قرار دادن مختصات دو نقطه در تابع: در این روش مختصات دو نقطه دلخواه از جدول را در تابع $f(x) = ka^x$ قرار می‌دهیم و سپس با تقسیم کردن جمله درجه بیشتر بر جمله با درجه کمتر، ابتدا مقدار a و سپس مقدار k را به دست می‌آوریم و در ضابطه کلی تابع نمایی قرار می‌دهیم.

● **مثال ۲.** ضابطه تابع مربوط به جدول‌های زیر را به دست آورید.

x	۱	۳	۵
y	-۱۹۲	-۲۴	-۳

جدول ۵.

$$\begin{aligned}
 f(1) &= -192 \Rightarrow f(1) = ka^1 = -192 \\
 f(3) &= -24 \Rightarrow f(3) = ka^3 = -24 \\
 \Rightarrow \frac{f(3)}{f(1)} &= \frac{ka^3}{ka^1} = \frac{-24}{-192} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{8}}
 \end{aligned}$$



الف) روش تشخیص تابع نمایی از روی جدول

می‌دانیم در توابع نمایی $y = ka^x$ ($a > 1$) همواره به ازای افزایش مقدار ثابتی در مقادیر ورودی (متغیر مستقل)، مقادیر خروجی (متغیر وابسته) در عدد ثابت و مثبت غیر یک ضرب می‌شوند. بنابراین، اگر در یک جدول مقادیر x و y از یک رابطه داده شده باشد، چنانچه دامنه تغییرات x به صورت منظم و در یک فاصله معین باشد (دنباله حسابی باشند) و میزان تغییرات مقادیر y بر اثر ضرب در یک عدد ثابت باشد (دنباله هندسی باشند)، داده‌های این جدول می‌توانند بیانگر رفتار یک تابع نمایی باشند.

● **مثال ۱.** مشخص کنید داده‌های مربوط به کدام یک از جداول زیر بیانگر تابع نمایی است.

x	۰	۱	۲	۳
y	۳	۶	۱۲	۲۴

$\xrightarrow{+1} \quad \xrightarrow{+1} \quad \xrightarrow{+1}$
 $\xrightarrow{\times 2} \quad \xrightarrow{\times 2} \quad \xrightarrow{\times 2}$

جدول ۱.

حل جدول ۱. با توجه به جدول، به ازای افزایش هر واحد در مقادیر x (یک واحد)، مقادیر y در یک عدد ثابت $(\times 2)$ ضرب می‌شوند. پس جدول ۱ یک تابع نمایی را مشخص می‌کند.

x	۴	۶	۸	۱۰
y	۵	۹	۱۳	۱۷

جدول ۲.

حل جدول ۲. با توجه به جدول، به ازای افزایش واحدی در مقادیر x ، مقادیر y در هیچ عدد ثابت مثبت غیر یک ضرب نمی‌شوند. پس جدول ۲ یک تابع نمایی را مشخص نمی‌کند.

$$aq^1 = 40 \Rightarrow a \left[\sqrt[1]{\frac{1}{2}} \right]^9 = 40 \Rightarrow a = \frac{40}{\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{9}{10}}} = \frac{40}{\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{9}{10}}}$$

$$t_n = a \cdot q^{n-1} = \frac{40}{\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{9}{10}}} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{10}} \right]^{n-1} = \frac{40}{\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{9}{10}}} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{10}} \right]^{n-1}$$

$$= 40 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n-1}{10} - \frac{9}{10}} = 40 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n-10}{10}} = 40 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{10} - 1}$$

$$= \frac{40}{\left(\frac{1}{2} \right)^1} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{10}} = 80 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{10}} \Rightarrow f(x) = 80 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{10}}$$

روش سوم: استفاده از دستور $(y = k \cdot q^{\frac{x}{d}})$: در این دستور، k ضریب، q قدرنسبت دنباله هندسی و d قدرنسبت دنباله حسابی است (در این روش به کمک یک نقطه دلخواه مقدار k را محاسبه می‌کنیم).

● **مثال ۴.** ضابطه تابع مربوط به جدول ۸ را به دست آورید.

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۱۶	۱۲	۹	۶/۷۵

جدول ۸.

$$x = 20 - 10 = 10 \Rightarrow \text{قدرنسبت دنباله حسابی مقادیر } x$$

$$y = 12 - 16 = -4 \Rightarrow \text{قدرنسبت دنباله هندسی مقادیر } y$$

$$y = k \cdot q^{\frac{x}{d}} \Rightarrow 16 = k \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{10}{4}} = \frac{3}{4} k \Rightarrow k = \frac{16}{\frac{3}{4}} = \frac{64}{3}$$

$$y = k \cdot q^{\frac{x}{d}} \Rightarrow y = \frac{64}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{x}{4}}$$

تمرین: ضابطه تابع مربوط به جدول ۹ را از سه روش فوق به دست آورید.

x	۱	۲	۳
y	۶	۳	$\frac{3}{2}$

جدول ۹.

$$ka = -192 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} k = -192$$

$$\Rightarrow k = \frac{-192}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -192\sqrt{2}$$

$$f(x) = ka^x \Rightarrow f(x) = -192(\sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^x$$

x	۰	۱۰	۲۰
y	۸۰	۴۰	۲۰

جدول ۶.

$$f(0) = 80 \Rightarrow f(0) = ka^0 = 80$$

$$f(10) = 40 \Rightarrow f(10) = ka^{10} = 40$$

$$\Rightarrow \frac{f(10)}{f(0)} = \frac{ka^{10}}{ka^0} = \frac{40}{80} \Rightarrow a^{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt[10]{\frac{1}{2}}$$

$$ka^0 = 80 \Rightarrow k = 80$$

$$f(x) = ka^x \Rightarrow f(x) = 80 \left(\sqrt[10]{\frac{1}{2}} \right)^x$$

روش دوم: استفاده از دنباله هندسی: می‌دانیم که

بعضی از مقادیر یک تابع نمایی، یک دنباله هندسی با

قدرنسبت مثبت و غیر یک و با دامنه N و ضابطه $y = ka^x$

است. زیرا جمله عمومی دنباله هندسی به صورت $t_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ یا

به صورت $t_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$ نوشته می‌شود که همان $y = k \cdot a^x$

با دامنه N است. بنابراین، برای به دست آوردن ضابطه تابع

نمایی از روی دنباله هندسی، کافی است x را به n و $f(x)$

را به t_n تبدیل و سپس نقش n و x را عوض کنیم.

● **مثال ۳.** ضابطه تابع مربوط به جدول ۷ را به دست آورید.

x	۰	۱۰	۲۰
y	۸۰	۴۰	۲۰

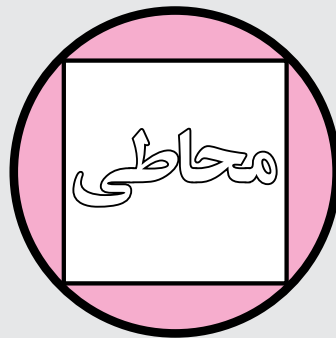
جدول ۷.

$$t_{10} = 40 \Rightarrow t_{10} = aq^9 = 40$$

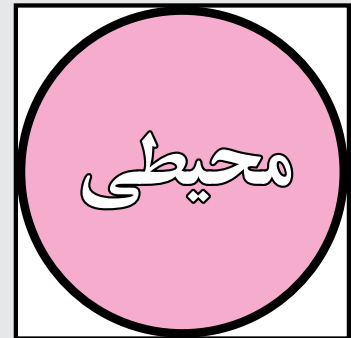
$$t_{20} = 20 \Rightarrow t_{20} = aq^{19} = 20$$

$$\Rightarrow \frac{t_{20}}{t_{10}} = \frac{aq^{19}}{aq^9} = \frac{20}{40} \Rightarrow q^{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \sqrt[10]{\frac{1}{2}}$$

دربارهٔ چهارضلعی‌های



و



بیشتر بدانیم

اشاره

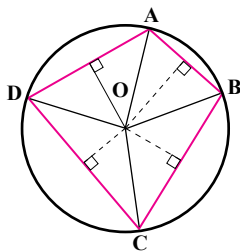
دربارهٔ چهارضلعی‌های محیطی و محاطی در بحث دایره‌ها و در کتاب هندسهٔ ۲ بحث شده است. اما قضایا و بحث‌های تکمیلی آن‌ها که می‌توانند به درک بهتر دانش‌آموزان از این موضوع منجر شوند، آن‌چنان که بایسته است مورد توجه قرار نگرفته‌اند. در اینجا می‌خواهیم به کنکاشی عمیق‌تر در این زمینه بپردازیم.

چهارضلعی‌های محاطی

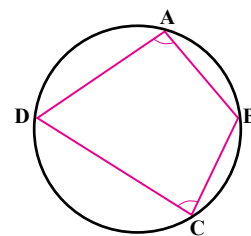
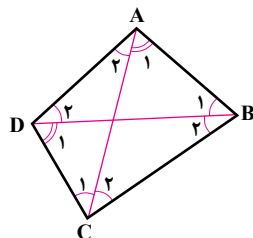
چنانچه می‌دانید، چهارضلعی ABCD را محاطی گوییم، هرگاه از رئوس آن دایره‌ای بگذرد. از کتاب درسی نیز می‌دانیم که یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر، مجموع دو زاویهٔ داخلی روبه‌روی آن 180° باشد:

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \quad (\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ) \Leftrightarrow \text{ABCD محاطی است}$$

در مورد این چهارضلعی قضایای تکمیلی زیر برقرار هستند.



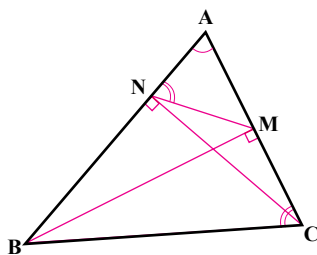
۲. هرگاه در یک چهارضلعی، دو زاویهٔ روبه‌رو به یک ضلع با هم برابر باشند، چهارضلعی، محاطی است و برعکس. یعنی در شکل زیر، اگر $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ (و یا $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ و یا $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ یا $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$) در این صورت ABCD محاطی است و از A و B و C و D دایره‌ای می‌گذرد و برعکس؛ یعنی اگر ABCD محاطی باشد، آن‌گاه $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ (و $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ و...). اثبات قضیهٔ عکس، با توجه به زوایای محاطی روبه‌رو به یک کمان، ساده است، اما برای اثبات قضیهٔ اصلی، از برهان خلف استفاده می‌کنیم.



۱. در هر چهارضلعی محاطی، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه هم‌رس‌اند. نقطهٔ هم‌رسی عمودمنصف‌ها مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی است.

$$OA = OB = OC = OD = R$$

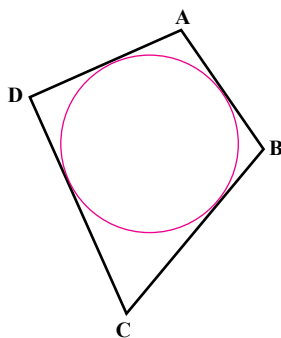
● **مثال ۲.** در مثلث ABC، ارتفاع‌های BM و CN را رسم کرده‌ایم. نشان دهید: $\triangle AMN \sim \triangle ABC$



حل: چون زوایای قائمه M و N هر دو روبه‌رو به BC هستند، پس MNBC محاطی است و زوایای C و MNB مکمل هم هستند. چون $M\hat{N}B$ و $M\hat{N}A$ نیز مکمل هم هستند، پس: $\hat{C} = M\hat{N}A$ و چون زاویه A در دو مثلث ABC و AMN مشترک است، لذا دو مثلث دو زاویه برابر دارند و متشابه‌اند.

چهارضلعی‌های محیطی

چنانچه می‌دانیم، یک چهارضلعی را محیطی گوییم، هرگاه مانند شکل زیر، اضلاع آن بر دایره‌ای مماس باشند و در این صورت، دایره مزبور را دایره محاطی می‌گوییم. از کتاب درسی می‌دانیم، یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر مجموع اضلاع روبه‌روی آن با هم مساوی باشند؛ یعنی $AB+CD=AD+BC$ یا $ABCD \Leftrightarrow$ محیطی.

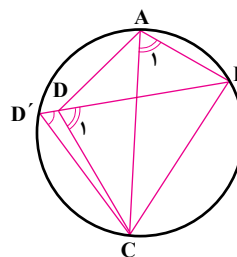


اما قضیه دیگری هم در مورد این چهارضلعی‌ها وجود دارد که به آن اشاره می‌کنیم:
«در هر چهارضلعی محیطی نیم‌سازهای زوایای داخلی چهارضلعی در یک نقطه هم‌رس‌اند و این نقطه، همان مرکز دایره محاطی است.»

$$OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4 = r$$

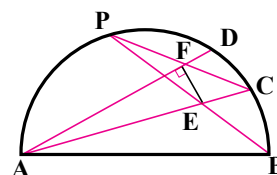
فرض کنیم در شکل داریم: $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$. می‌خواهیم نشان دهیم از A، B، C و D یک دایره می‌گذرد. دایره محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. (چگونه؟) اگر این دایره از D بگذرد که حکم ثابت شده است. اما اگر نگذرد، نقطه D درون، یا بیرون این دایره واقع می‌شود. اگر D درون دایره باشد، مطابق شکل، امتداد BD دایره را در D' قطع می‌کند. D' را به C وصل می‌کنیم. حال با توجه به شکل داریم:

$$\hat{D}' = \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2} \quad \text{و} \quad \hat{D}_1 = \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{D}' = \hat{D}_1$$

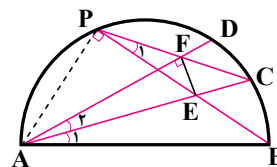


ولی مطابق شکل داریم: $\hat{D}' > \hat{D}_1$ (چرا؟) و این تناقض است. در حالتی هم که نقطه D بیرون دایره بیفتد، نشان دهید به تناقضی مشابه می‌رسیم. پس فرض خلاف باطل است و باید ABCD محاطی باشد. به نمونه‌هایی از کاربردهای این قضیه توجه کنید.

● **مثال ۱.** در شکل زیر AB قطر نیم‌دایره و C و D وسط کمان BD است. اگر P نقطه‌ای دلخواه بر محیط نیم‌دایره باشد، اندازه زاویه AFE را به دست آورید.



حل: طبق فرض: $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ و در نتیجه:



$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (چرا؟) همچنین $\hat{P}_1$ و $\hat{P}_2$ زوایای محاطی روبه‌رو به یک کمان و در نتیجه مساوی‌اند، پس $\hat{P}_1 = \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{P}_2 = \hat{A}_1$ و $\hat{P}_1$ و $\hat{P}_2$ هر دو روبه‌رو به EF هستند، پس طبق قضیه گفته شده، چهارضلعی PFEA محاطی است. در نتیجه: $\hat{A}PE = \hat{A}FE$. (چرا؟) ولی زاویه APE (یا $\hat{A}PB$) در نیم‌دایره، محاطی روبه‌رو به قطر و در نتیجه قائمه است. پس: $\hat{A}FE = 90^\circ$.

الف) نشان دهید:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

و از آنجا نسبت تشابه را بنویسید و نتیجه بگیرید:

$$AD \cdot BC = AC \cdot DE \quad (1)$$

ب) نشان دهید:

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD$$

و از آنجا نسبت تشابه را بنویسید و نتیجه بگیرید:

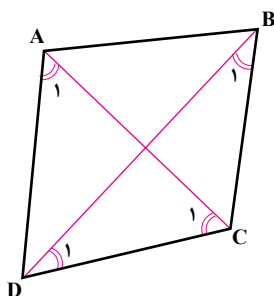
$$AB \cdot CD = AC \cdot BE \quad (2)$$

ج) از جمع کردن طرفین رابطه‌های (1) و (2) ثابت کنید:

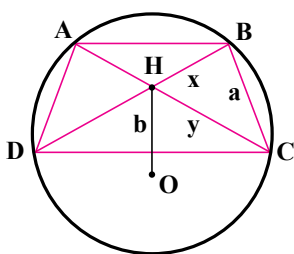
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD \quad (\text{قضیه بطلمیوس})$$

۲. به کمک قضیه بطلمیوس مسائل زیر را حل کنید:

الف) در شکل زیر داریم: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \hat{D}_1$ و $AB = 5$ و $BD = AC = BC + 2$ طول‌های اضلاع و اقطار چهارضلعی را به دست آورید.



ب) در شکل زیر ABCD دوزنقه متساوی الساقین محاط در دایره واحد است. فرض کنید $y > x$ ، در این صورت $y - x$ برابر است با:



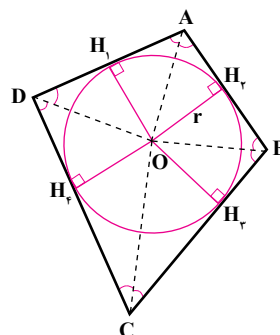
الف) $(ab)^2$ ب) $a\sqrt{b}$ ج) ab
 د) $b\sqrt{a}$ هـ) $\sqrt{ab}$

(مرحله اول پانزدهمین المپیاد ریاضی ایران)

راهنمایی: نشان دهید HBCO محاطی است.

۳. ثابت کنید در هر چهارضلعی محیطی با محیط $2P$ و مساحت

$$S, \text{ شعاع دایره محاطی از دستور } r = \frac{S}{P} \text{ به دست آید.}$$



عکس قضیه فوق نیز برقرار است؛ یعنی:

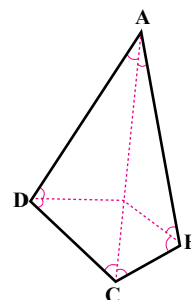
«هر چهارضلعی که در آن نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه هم‌رس باشند، یک چهارضلعی محیطی است و نقطه هم‌رسی نیم‌سازها، مرکز دایره محاطی چهارضلعی است.»

درستی این قضیه و قضیه عکس را به عنوان تمرین اثبات کنید.

● **مثال.** در چهارضلعی ABCD، نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه هم‌رس‌اند. اگر AC و BD اقطار چهارضلعی باشند و $AD = 2CD$ و $AB = 3BC$ و CD چند برابر BC است؟

حل: چون نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه هم‌رس‌اند، پس چهارضلعی محیطی است و در نتیجه:

$$AD + BC = AB + CD$$

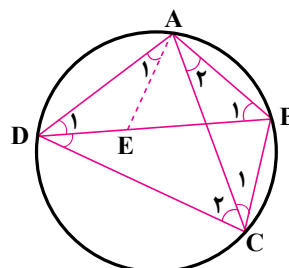


به کمک مفروضات مسئله داریم:

$$2CD + BC = 3BC + CD \Rightarrow CD = 2BC$$

تمرین

۱. در شکل زیر ABCD چهارضلعی محاطی است و زاویه DAE مساوی زاویه CAB جدا شده است.





نمودار رابطه و تشخیص هم‌ارزی

چکیده

رابطه هم‌ارزی R روی یک مجموعه ناتهی مانند $A (R \subseteq A \times A)$ ، رابطه‌ای است که دارای سه خاصیت «بازتابی» (به ازای هر $x \in A$ ، xRx)، «تقارنی» (اگر xRy آن‌گاه yRx) و «تراییبی» (اگر xRy و yRz آن‌گاه xRz) باشد. یک افراز از A ، مجموعه‌ای است که عضوهای آن زیرمجموعه‌های ناتهی از A هستند که اشتراک دو به دو این زیرمجموعه‌ها تهی، و اجتماع آن‌ها A است. هر رابطه هم‌ارزی روی A ، آن را به زیرمجموعه‌هایی افراز می‌کند که این رابطه بین عضوهای هر کدام از آن زیرمجموعه‌ها برقرار است. هر یک از این زیرمجموعه‌ها یک «کلاس هم‌ارزی» نامیده می‌شوند. مجموعه این کلاس‌ها یک افراز از آن مجموعه است.

«یک رابطه روی یک مجموعه هم‌ارزی است، اگر و تنها اگر آن بتواند مجموعه را به کلاس‌های هم‌ارزی افراز کند.»

در این مطالعه با استناد به قضیه دو شرطی فوق به بررسی رابطه هم‌ارزی و معرفی افراز متناظر آن با به تصویر کشیدن کلاس‌های هم‌ارزی پرداخته شده است. بالاخص در صفحه R^2 شهود افرازها نشان می‌دهد که چگونه می‌توان صفحه را با حرکت در کلاس‌های هم‌ارزی جارو کرد. در پایان راهکاری آسان و سریع برای تشخیص هم‌ارزی‌های مطرح شده در کتاب‌های دبیرستانی که روی R^2 و یا بخشی از آن تعریف شده‌اند، ارائه خواهد شد.

روش‌های بررسی هم‌ارزی بودن یک رابطه

احراز سه ویژگی «بازتابی» (انعکاسی)، «تقارنی» و «تراییبی» (تعدی) در یک رابطه، نشان می‌دهد که آن رابطه هم‌ارزی است. بدون بررسی مستقیم سه ویژگی مذکور در کتاب‌های درسی دبیرستان سه روش برای بررسی هم‌ارزی بودن یک رابطه وجود دارد:

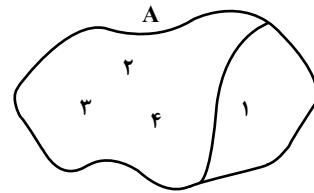
۱. تبدیل رابطه به یک گراف جهت‌دار.
۲. تبدیل رابطه به یک ماتریس مجاورت.
۳. تبدیل رابطه به یک افراز با تشکیل کلاس‌های هم‌ارزی در صورت امکان.

به دو روش اول که تنها در فضاهای گسسته قابل

استفاده‌اند، در کتاب ریاضیات گسسته سال چهارم به‌خوبی پرداخته شده است. آنچه خواهید خواند روش سوم برای تشخیص هم‌ارزی‌ها به‌ویژه در فضای پیوسته R^2 است.

افراز یک مجموعه

زیرمجموعه‌های ناتهی و مجزای A که اجتماع آن‌ها A است، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که آن را یک افراز از آن مجموعه گویند. برای مثال، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آن‌گاه: $P = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ یک افراز دوبخشی از مجموعه A است (شکل ۱).



شکل ۱.

کلاس‌های هم‌ارزی

اگر R یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه ناتهی A باشد، مجموعه $\{x \in A \mid xRa\}$ شامل a را که با نماد $[a]$ نشان می‌دهند، کلاس هم‌ارزی a گویند.

خواص کلاس‌های هم‌ارزی

اگر R یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه ناتهی A باشد:

- به ازای هر $x \in [x]$ ، $x \in A$.
- اگر $y \in [x]$ ، آن‌گاه $x \in [y]$ و $[x] = [y]$.
- به ازای هر $x, y \in A$ ، $[x] = [y]$ یا $[x] \cap [y] = \emptyset$.

هم‌ارزی و افراز

قضیه بنیادی زیر حکم می‌کند که یک رابطه هم‌ارزی بین اعضای یک مجموعه، افرازی طبیعی به مجموعه می‌دهد.

قضیه: فرض کنید P یک افراز دلخواه از مجموعه ناتهی A باشد. اگر رابطه R در A به صورت:

یک مجموعه از عضوهای P مانند S وجود داشته باشد به طوری که $xRy \Leftrightarrow x, y \in S$

تعریف شود، آن‌گاه R یک رابطه هم‌ارزی و افراز P مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی R است.

مثال ۱. اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $P = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ یک افراز دو بخشی از مجموعه A باشد، رابطه هم‌ارزی مربوط به آن را مشخص کنید و همه کلاس‌های هم‌ارزی آن را بنویسید.

حل:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$[1] = \{x \in A, xR1\} = \{1\},$$

$$[2] = \{x \in A, xR2\} = \{2, 3, 4\} = [3] = [4]$$

$$\rightarrow P = \{[1], [2]\}$$

مثال ۲. نشان دهید رابطه $x, a \in Z, xRa \Leftrightarrow 2 \mid x-a$

یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه اعداد صحیح است.

حل: $2 \mid x-a \rightarrow x-a=2k, k \in Z \rightarrow x=2k+a$

با تغییر a روی اعداد صحیح دو کلاس هم‌ارزی روی Z خواهیم داشت. اگر a زوج باشد، x هم زوج است و اگر a فرد باشد، x هم فرد است. لذا رابطه تعریف شده روی Z آن را به مجموعه اعداد فرد و مجموعه اعداد زوج افراز می‌کند:

$$[0] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}, [1] = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\},$$

$$P = \{[0], [1]\}, Z = [0] \cup [1].$$

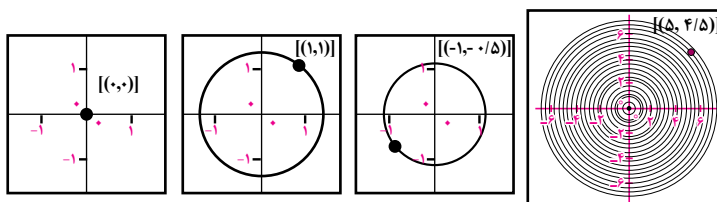
برای تشخیص هم‌ارزی بودن یک رابطه در R^2 ، با توجه به رابطه تنگ‌انگ هم‌ارزی و افراز، می‌توان به قابلیت افراز صفحه توسط آن رابطه با رسم نمودار مربوط به آن پرداخت. اگر یک رابطه روی R^2 یا بخش پیوسته‌ای از آن، یک افراز متشکل از منحنی‌های دایره‌دو مجزا پدید آورد که تمام صفحه را جارو کند، آن رابطه یک رابطه هم‌ارزی است. برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۳. هم‌ارزی بودن رابطه زیر را روی R^2 تحقیق کنید.

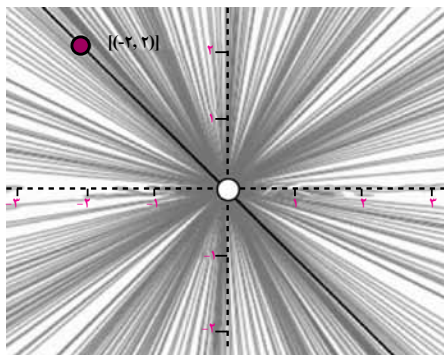
$$(x, y)R(a, b) \Leftrightarrow x^2 - b^2 = a^2 - y^2$$

حل: با مرتب کردن تساوی به طوری که جملاتی که تنها شامل x و y هستند در یک طرف آن، و جملاتی که تنها شامل a و b هستند در طرف دیگر تساوی باشند، داریم:

$x^2 - b^2 = a^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. اگر $a^2 + b^2 = c$ ، آن‌گاه $x^2 + y^2 = c$ ، $c \geq 0$ معادله یک دسته دایره است. این دایره‌ها تمام صفحه را می‌پوشانند، بنابراین R یک رابطه هم‌ارزی است و هر دایره یک کلاس هم‌ارزی از این افراز است (شکل ۲).



شکل ۲. از چپ به راست: کلاس هم‌ارزی $[(0, 0)]$ ، کلاس $[(1, 1)]$ ، کلاس $[(-1, -0.5)]$ و نمایشی از همه کلاس‌ها که تمام صفحه را می‌پوشانند.

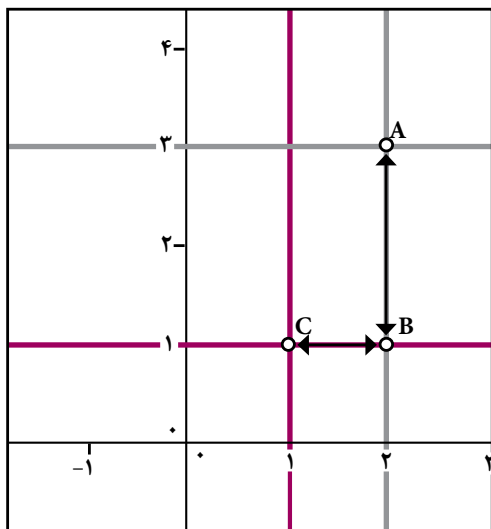


شکل ۴. افراز R روی $R \times (R - \{0\})$

● **مثال ۶.** هم‌ارزی بودن رابطه زیر را روی R^2 بررسی کنید.

$$(x, y)R(a, b) \Leftrightarrow (x-a)(y-b) = 0$$

حل: $y=b$ یا $x=a$ $\rightarrow (x-a)(y-b) = 0$. هر نقطه در صفحه با نقاط دو خط موازی محورهای مختصات که از آن نقطه عبور می‌کند، در رابطه است. این خطوط صلیبی یکدیگر را قطع می‌کنند و در نتیجه یک افراز از صفحه R^2 نیستند (شکل ۵).



شکل ۵. رابطه R خاصیت تراییبی ندارد.

$$A R B, B R C; \text{ARC}$$

● **مثال ۷.** هم‌ارزی بودن رابطه زیر را روی R^2 بررسی کنید.

$$(x, y)R(a, b) \Leftrightarrow xy = ab$$

حل: $xy=ab \rightarrow F(x, y)=xy=F(a, b)$ رابطه R یک رابطه هم‌ارزی است. محورهای مختصات کلاس هم‌ارزی $[(0, 0)]$ است (شکل ۶).

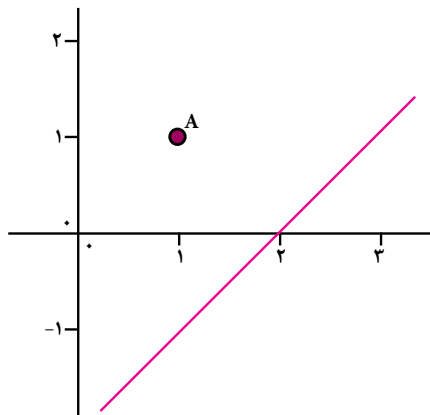
توجه کنید که اگر $F(x, y)=x^2+y^2$ ، آن‌گاه رابطه هم‌ارزی $F(x, y)=F(a, b)$ یک افراز از صفحه R^2 است.

● **مثال ۴.** هم‌ارزی بودن رابطه زیر را روی R^2 تحقیق کنید.

حل:

$$(x, y)R(a, b) \Leftrightarrow x-b = y-a \rightarrow x-b=y+a$$

اگر $F(x, y)=x-y$ ، آن‌گاه از رابطه اخیر نتیجه می‌شود: $F(x, y) \neq F(a, b)$. تنها در حالتی که b مساوی صفر باشد، تساوی برقرار است. هر نقطه دلخواه مانند (a, b) در صفحه با نقاط خط $y=x-b-a$ در رابطه است، ولی خط مذکور از آن نقطه نمی‌گذرد. این مطلب نشان می‌دهد که رابطه خاصیت بازتابی ندارد. نقطه فقط در حالتی که روی محور طول‌ها باشد، روی خط موردنظر قرار می‌گیرد. همچنین، خواص دیگر هم‌ارزی برای رابطه R برقرار نیست (شکل ۳).



شکل ۳. نقطه $A(1, 1)$ با نقاط خط $y=x-2$ در رابطه است، ولی نقطه روی خط قرار ندارد.

● **مثال ۵.** هم‌ارزی بودن رابطه زیر را روی مجموعه $R \times (R - \{0\})$ بررسی کنید.

$$(x, y)R(a, b) \Leftrightarrow xb = ya$$

حل:

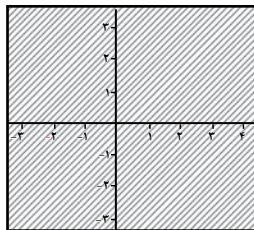
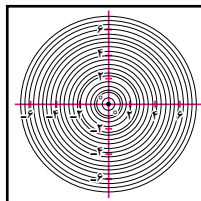
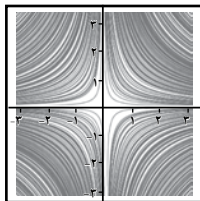
$$xb = ya \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}, y, b \neq 0 \rightarrow F(x, y) = \frac{x}{y} = F(a, b)$$

R یک رابطه هم‌ارزی است. تمام خطوطی که از مبدأ می‌گذرند (غیر از محور طول‌ها) ولی شامل مبدأ نیستند، کلیه کلاس‌های هم‌ارزی را تشکیل می‌دهند. این خطوط اشتراکی ندارند و تمام $R \times (R - \{0\})$ را جaro می‌کنند (شکل ۴).

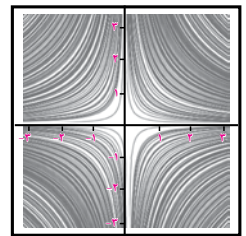
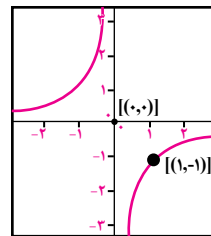
نتیجه‌گیری نهایی: تشخیص هم‌ارزی بودن رابطه در صفحه به روایت شهود

برای تشخیص هم‌ارزی بودن یک رابطه در R^2 می‌توان به قابلیت افراز صفحه با رسم نمودار مربوط به آن پرداخت. برخی از روابط تعریف شده در R^2 به سادگی به معادله $(*) F(x,y)=F(a,b)$ و یا $(**) F(x,y) \neq F(a,b)$ تبدیل می‌شوند. روابطی که در کتاب‌های دبیرستانی مطرح شده‌اند، از این دست روابط هستند. رابطه متناظر $(*)$ یک رابطه هم‌ارزی است، ولی رابطه مربوط به $(**)$ هم‌ارزی نیست.

هر رابطه هم‌ارزی در صفحه را می‌توان به توانایی نقاش زبردستی تشبیه کرد که هربار که قلم‌مو را بر صفحه می‌کشد، یک کلاس را ترسیم می‌کند؛ بدون آنکه هیچ کلاسی قطره رنگی از کلاس دیگر به خود گیرد و به این کار ادامه می‌دهد تا تمام صفحه رنگین شود.

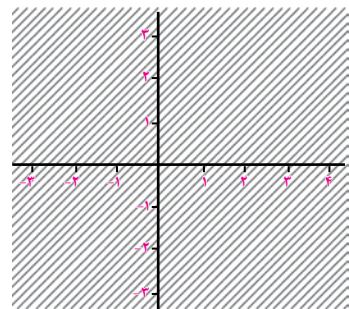


شکل ۹.



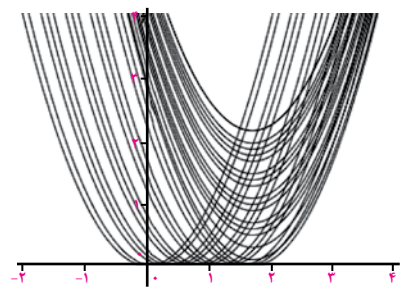
شکل ۶. از چپ به راست: دو کلاس از رابطه R ، تمامی کلاس‌های هم‌ارزی

● **مثال ۸.** هم‌ارزی بودن رابطه زیر را روی R^2 بررسی کنید.
 $(x,y)R(a,b) \Leftrightarrow x+b=y+a$
حل: چون $x+b=y+a \rightarrow x-y=a-b$ یک رابطه هم‌ارزی است و صفحه را به خطوط موازی افراز می‌کند (شکل ۷).



شکل ۷.

● **مثال ۹.** هم‌ارزی بودن رابطه زیر را روی R^2 بررسی کنید.
 $(x,y)R(a,b) \Leftrightarrow y-b=(x-a)^2$
حل: در این مثال نمی‌توان x و y را از a و b جدا کرد و به یک طرف تساوی انتقال داد. رابطه R متضمن انتقال منحنی $y=x^2$ در صفحه است. منحنی‌های حاصل یکدیگر را قطع می‌کنند و لذا R یک رابطه هم‌ارزی نیست (شکل ۸).



شکل ۸. نمایی از برخی از منحنی‌های حاصل از رابطه R .

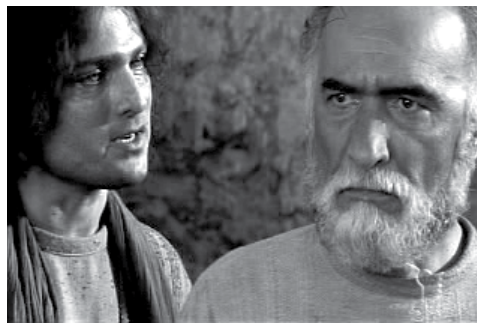
پرسش‌های
پیکارجو!



معادله $2x^2 - 4\sqrt{2}x^{\frac{2}{3}} - 8x^{\frac{4}{3}} + 8x + 16x^{\frac{2}{3}} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟
 الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵



- نام فیلم: شهر آشوب
- کارگردان: بدالله صمدی
- تهیه کننده: محسن علی اکبری
- نویسنده: فریدون دانشمند
- بازیگران: حسین یاری، جعفر دهقان، محمود پاک‌نیت، سام درخشانی، الهام حمیدی، سعید نیک‌پور، محمد صادقی، رویا تیموریان و بهزاد خداویسی
- موسیقی: محمدرضا درویشی
- فیلم‌برداری: حسن پویا
- تدوین: مهرداد خوشبخت
- مدت فیلم: ۹۰ دقیقه
- محصول: ایران
- سال تولید: ۱۳۸۴
- زبان: فارسی



هنرپرور، ادب دوست و دانش مسلک بود و با رفتار و منش خود باعث ایجاد تحولات بزرگ فرهنگی و هنری در عصر بعد از تیمور لنگ شد. بعد از شاه‌رخ شاه فرزندش غیاث‌الدین بایسنقر مشهور به «بایسنقر میرزا» که او نیز مانند پدر و پدربزرگش از حامیان و مشوقان بزرگ هنر، معماری، فرهنگ و دانش بود، فرمانروای تیموریان شد. او یکی از برجسته‌ترین و ممتازترین خوش‌نویسان دوران خود به‌شمار می‌آید.

با مرگ بایسنقر میرزا، برادرش الغ بیگ به حکمرانی تیموریان رسید. الغ بیگ را از عجایب تاریخ بشریت دانسته‌اند. او در حالی که پادشاه یکی از بزرگ‌ترین امپراتوری‌های زمان خود بود، ریاضی‌دانی برجسته، اخترشناسی

سال‌های ۱۳۷۰ تا ۱۵۰۶ میلادی بر قسمت عمده‌ای از آسیای میانه فرمانروایی می‌کردند. این امپراتوری توسط تیمور 'گورکان'، مقلب به «تیمور لنگ» بنیان نهاده شد و نقش مهمی را در اعتلای فرهنگ و دانش در آن دوره از خود بر جای نهاد. تیمور مردی بود که به دانش و هنر علاقه فراوان داشت و همواره به دانشمندان و هنرمندان احترام بسیار می‌گذاشت. این ویژگی‌های او باعث شده بود که وی افراد زیادی از برجسته‌ترین نقاشان، معماران، شاعران، فقها و دانشمندان را در محافل و دربار خود داشته باشد.

بعد از تیمور پسرش معین‌الدین شاه‌رخ تیموری مقلب به «شاه‌رخ شاه» فرمانروای سلسله تیموریان شد. او نیز به‌مانند پدر فردی

موضوع فیلم «شهر آشوب» رساله $\sin 1^\circ$ غیاث‌الدین جمشید کاشانی است که توسط دوست و شاگرد همیشگی وی، معین‌الدین کاشانی حفظ و نگهداری می‌شود. در این بین فرد بد سرشتی وجود دارد که می‌کوشد قتل جمشید کاشانی را به معین‌الدین کاشانی نسبت دهد، رساله $\sin 1^\circ$ را از وی با استفاده از هر روش غیرانسانی برباید و افتخار تألیف این رساله را از آن الغ بیگ سازد. اما از آنجا که تماشای این فیلم نیازمند آگاهی از مواردی درباره‌ی دوران زندگی، دستاوردها و نیز جایگاه علمی جمشید کاشانی نزد جهانیان است، بنابراین نخست به شرح آن‌ها می‌پردازیم و سپس موضوع فیلم را پی‌می‌گیریم.

تیموریان دودمانی ترک تبار بودند که بین

زبردست، و ادب دوست و دانش پروری بی‌بدیل بود. الغ بیگ کتابی با عنوان «زیج^۲ الغ بیگ» تألیف کرد که از آن به عنوان دقیق‌ترین تقویم اسلامی یاد می‌شود. جایگاه علمی او در زمینه ستاره‌شناسی تا این اندازه برجسته است که نام وی را در کره ماه در کنار بزرگ‌ترین دانشمندان علم اخترشناسی قرار داده‌اند.

دوران تولد و زندگانی غیاث‌الدین جمشید کاشانی مقارن با به قدرت رسیدن تیمور لنگ و حکمرانی جانشینان وی تا زمان الغ بیگ بود. هر چند که زمان تولد و کودکی جمشید کاشانی با قتل و غارت امرای تیموری گذشت، اما همان گونه که اشاره کردیم، به دلیل علاقه حاکمان تیموری به دانش و هنر، او توانست به صورت جسته و گریخته به مطالعه و کسب دانش بپردازد و در نهایت به دربار الغ بیگ راه پیدا کند

از مهم‌ترین دستاوردها و نوآوری‌های جمشید کاشانی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱. گسترش و ترویج کسرهای اعشاری به قیاس با کسرهای شصتگانی که در اخترشناسی متداول بود.
۲. محاسبه عدد π . جمشید کاشانی در «الرسالی المَحیطیه» عدد π را با دقتی که تا ۱۵۰ سال پس از وی بدون رقیب ماند، محاسبه کرد.
۳. محاسبه $\sin 1^\circ$. جمشید کاشانی سینوس (جیب) یک درجه را با استفاده از روش‌های خلاقانه‌ای با کمک معادله درجه سوم تا هفده رقم اعشار تعیین کرد، به گونه‌ای که هفده رقم اعشاری به دست آمده با مقداری که امروزه و با استفاده

است.

۵. دسته‌بندی معادلات درجه اول، دوم، سوم و چهارم و نیز حل عددی معادلات درجه چهارم و بالاتر.
۶. ابداع روش‌های کنونی برای پیدا کردن ریشه n -ام عددی دلخواه که سالیان بعد توسط ریاضی‌دان ایتالیایی، پائولو روفینی^۳ (۱۸۲۲-۱۷۶۵) و ریاضی‌دان انگلیسی، ویلیام جورج هورنر^۴ (۱۸۳۷-۱۷۸۶) مجدداً ابداع شد.
۷. نگارش مهم‌ترین کتاب درباره حساب در آن روزگار به نام «مفتاح الحساب».
۸. ساخت یک ابزار رصد برای اجرام آسمانی و محاسبه طول ستارگان به نام «طَبَقُ المَنَاطِق» که جمشید کاشانی درباره چگونگی کار با آن نیز رساله «نُزهی



الْخَدَائِق» را به رشته تحریر درآورد.

۹. تصحیح زیج ایلخانی.

جمشید کاشانی در همه آثارش خود را چنین معرفی کرده است: «کم‌ترین بندگان خداوند (یا نیازمندترین بندگان خدا به رحمت او)، جمشید، پسر مسعود طبیب کاشانی، پسر محمود پسر محمد».

از رایانه‌های پیشرفته به دست می‌آید، یکسان است.

۴. تکمیل و تصحیح روش‌های قدیمی انجام چهار عمل اصلی و ابداع روش‌های جدید برای آن‌ها. در واقع جمشید کاشانی بنیان‌گذار روش‌های کنونی چهار عمل اصلی و به ویژه دو عمل ضرب و تقسیم

و به این واسطه و با استفاده از حمایت‌های مالی و معنوی حکومت و شخص الغ بیگ، به پژوهش و کنکاش در امور مورد علاقه‌اش بپردازد.

جمشید بن مسعود بن طبیب کاشانی، ملقب به غیاث‌الدین جمشید کاشانی که در کشورهای غربی به «الکاشی» معروف است، از زبردست‌ترین حساب‌دانان و آخرین ریاضی‌دان برجسته دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌آید. او اگرچه فیزیک‌دان بود، اما علاقه و اشتیاقش به ریاضیات باعث شد که به شمارشگری ماهر تبدیل شود. به سبب همین اشتیاق، جمشید کاشانی بعدها به دستاوردهای ارزنده‌ای در ریاضیات ناآل آمد و خدمات شایسته‌ای را در اخترشناسی از خود به جای گذاشت.



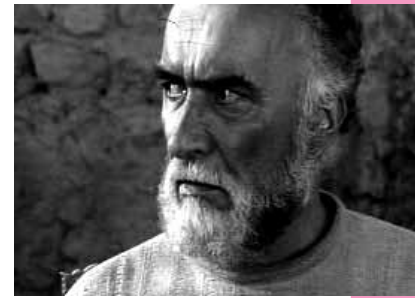
نظر پژوهشگران و بزرگان تاریخ علم درباره غیاث‌الدین جمشید کاشانی به این شرح است:

پاول لوکی ۵ (۱۹۴۹-۱۸۸۴): پژوهشگر برجسته آلمانی که بیش از هر تاریخ‌شناس دیگری در راه شناساندن ارزش آثار ریاضی این دانشمند بزرگ به جهانیان تلاش کرده، درباره آثار جمشید کاشانی چنین گفته است: پس از پژوهش درباره برخی آثار کاشانی که خوش‌بختانه بیشتر آن‌ها در کتابخانه‌های شرق و غرب موجود است، او را ریاضی‌دانی هوشمند، مخترع، نقاد و صاحب افکار عمیق یافتیم. کاشانی از آثار ریاضی‌دانان پیش از خود آگاه و به ویژه در فن محاسبه و به کار بستن روش‌های تقریبی چیره‌دست بود. اگر الرسالة المحيطية او به دست ریاضی‌دانان غربی معاصر وی رسیده بود، از آن پس مردم مغرب زمین از بعضی منازعات

ابداع کرد و روش تکراری را در حساب به‌طور کامل و پیگیر به کار می‌بست. با چیره‌دستی مراحلی را تنظیم می‌کرد که بتواند حداکثر مقدار خطا را پیش‌بینی کند و در هر جا درستی اعمال را بیازماید.

آدولف - آندری پاولوویچ یوشکویچ: پژوهشگر برجسته روسی در کتاب «تاریخ ریاضیات در سده‌های میانی» درباره جمشید کاشانی چنین گفته است: مفتاح‌الحساب کتابی درسی، درباره ریاضیات مقدماتی است که استادانه تألیف شده و مؤلف آنچه را که طبقات مختلف خوانندگان کتاب به آن نیاز داشته‌اند، در نظر گرفته است. این کتاب از حیث فراوانی و گوناگونی موارد، مطالب و روانی بیان تقریباً در میان همه آثار ریاضی سده‌های میانه یگانه است.

رساله $\sin^1$ از شهر سمرقند می‌گردد و به شهر هرات می‌رود تا با بایسنقر میرزا، شاهزاده تیموری - برادر الغ بیگ - ملاقات کند. اما بین راه و هنگام ورود به هرات، اتفاقاتی رخ می‌دهند که زمینه را برای متهم شدن وی از جانب سوباتای به‌عنوان قاتل جمشید کاشانی و سارق رساله $\sin^1$ به‌صورت فزاینده‌ای مهیا می‌سازد. در ادامه معین‌الدین کاشانی توسط سوباتای به شدت مجروح می‌شود و در آستانه مرگ قرار می‌گیرد، اما در نهایت آبتین که دخترش توسط سوباتای به قتل رسیده است و دوست معین‌الدین کاشانی نیز هست، سوباتای را از پای درمی‌آورد و معین‌الدین نجات می‌یابد. بایسنقر میرزا نیز در نامه‌ای به برادر خود الغ بیگ، آنچه را که رخ داده است، بیان می‌کند و بدین‌وسیله معین‌الدین از قتل غیاث‌الدین جمشید کاشانی و نیز سرقت رساله $\sin^1$ تبرئه می‌شود.



البته در این مقاله سعی شد از پرداختن به روایت و جزئیات فیلم اجتناب شود تا علاقه‌مندان هنگام تماشای آن از هیجان و انگیزش کافی برخوردار باشند.

* پی‌نوشت‌ها

۱. تیمور در زبان ازبکی به معنای آهن است.
۲. زیج در اخترشناسی دوران قدیم کاربرد فراوان داشت. در واقع زیج کتابی بود شامل مجموعه‌ای از جداول و اطلاعاتی درباره سیاره‌ها، ستاره‌های مشهور و نیز زمان طلوع و غروب خورشید در روزهای متفاوت سال در یک محل خاص. از جداول زیج برای آگاهی از موقعیت و رصد اجرام آسمانی، تعیین طول روز و شب، تهیه تقویم‌ها، جهت‌یابی و دیگر اهداف اخترشناسی استفاده می‌شد.

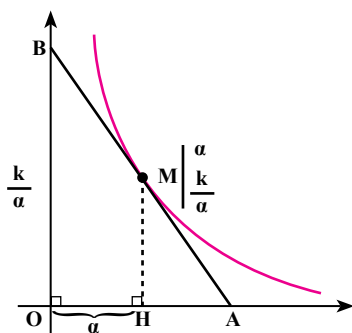
3. Paolo Ruffini
4. William George Horner
5. Paul Luckey
6. Edward Stewart Kennedy
7. Adolph- Andrei Pavlovich Yushkevich

فیلم شهر آشوب با این نوشته آغاز می‌شود: «در سال ۸۳۲ هجری قمری رصدخانه سمرقند به درخواست الغ بیگ، فرزند شاهرخ شاه و حاکم سمرقند، به دست غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان و اخترشناس جهان علم احداث شد. حاسدان و مغرضان او را به قتل رساندند و قتل او را به نزدیک‌ترین دوستش - طیب و خوش‌نویس - معین‌الدین کاشانی نسبت دادند.» موضوع فیلم شهر آشوب درباره دو رساله از غیاث‌الدین جمشید کاشانی است که بعد از مرگ وی توسط دوست و همکارش معین‌الدین کاشانی حفظ و نگهداری می‌شود. معین‌الدین کاشانی از سوی یکی از عمال دربار الغ بیگ به نام **سوباتای**، متهم به قتل جمشید کاشانی می‌شود و برای حفظ جان خود و حراست از

و تألیفات مبتذل درباره اندازه‌گیری دایره (محاسبه عدد π) بی‌نیاز می‌شدند. اگر نظریه واضح و روش علمی وی در مورد شناساندن کسره‌های اعشاری انتشار یافته بود، **فرانسوا وی‌یت، استون و بورگی** ناچار نمی‌شدند که یک قرن و نیم پس از کاشانی نیروی فکری و عملی خود را برای از نو یافتن این کسرها به کار اندازند.

ادوارد استورات کِنِدی: پژوهشگر برجسته آمریکایی درباره جمشید کاشانی چنین گفته است: پیش از هر چیز باید گفت که کاشانی حاسبی زبردست بود و در این فن مهارت شگفت‌انگیزی داشت. شاهد این ادعا آن است که وی با اعداد شصتگانی خالص به آسانی و روانی حساب می‌کرد. او کسره‌های اعشاری را

حل: اگر نقطه $M \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{k}{\alpha} \end{pmatrix}$ روی منحنی $y = \frac{k}{x}$ در نظر گرفته شود و AB در نقطه M بر منحنی مماس باشد، در این صورت داریم:



$$y = \frac{k}{x} \Rightarrow y' = -\frac{k}{x^2} \Rightarrow y'(\alpha) = -\frac{k}{\alpha^2} \Rightarrow m = \frac{-k}{\alpha^2}$$

$$y - \frac{k}{\alpha} = -\frac{k}{\alpha^2}(x - \alpha) \Rightarrow y = -\frac{k}{\alpha^2}x + \frac{2k}{\alpha} \quad \text{معادله خط مماس}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{اگر } y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{k}{\alpha^2}x + \frac{2k}{\alpha} \Rightarrow \frac{k}{\alpha^2}x = \frac{2k}{\alpha} \\ \Rightarrow x = 2\alpha \Rightarrow A \end{array} \right| \begin{array}{l} 2\alpha \\ \cdot \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{اگر } x = 0 \Rightarrow y = \frac{2k}{\alpha} \Rightarrow B \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{2k}{\alpha} \\ \cdot \end{array}$$

$$S_{OAB} = \left| \frac{OA \times OB}{2} \right| = \left| \frac{2\alpha \cdot \frac{2k}{\alpha}}{2} \right| = |2k| = 2|k|$$

خاصیت سوم: در خاصیت دوم، اگر از نقطه M بر منحنی افقی (محور x) عمود کنیم، ثابت می شود: $\frac{OH}{OA} = \frac{MH}{OB} = \frac{1}{2}$

حل: با توجه به شکل خاصیت دوم داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{MH}{OB} = \frac{\frac{k}{\alpha}}{\frac{2k}{\alpha}} = \frac{k\alpha}{2k\alpha} = \frac{1}{2} \\ \frac{OH}{OA} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OH}{OA} = \frac{MH}{OB} = \frac{1}{2}$$

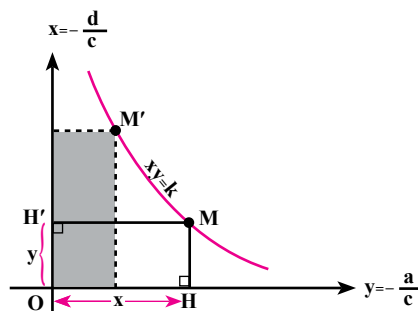
خواصی جالب از

تابع هموگرافیک

می دانیم، هر تابعی به صورت $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن شرایط $a \neq 0$ و $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ برقرار باشد، یک تابع هموگرافیک است. اگر محورهای مختصات را به موازات خودشان به گونه ای انتقال دهیم که روی منحنی باشد (مجانِب قائم و $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی) قرار گیرند، معادله $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به $y = \frac{k}{x}$ یا $xy=k$ تبدیل می شود که در آن داریم: $k = \frac{bc-ad}{c^2}$ و به کمک آن می توان ویژگی های تابع هموگرافیک را به سادگی بررسی کرد.

خاصیت اول: اگر از هر نقطه دلخواه روی تابع هموگرافیک $xy=k$ دو عمود بر منحنی ها رسم کنیم، مساحت مستطیل های حاصل، برابر و مساوی مقدار ثابت $|k|$ است $(k = \frac{bc-ad}{c^2})$.

اثبات: با توجه به شکل زیر، اگر از نقطه M روی نمودار $xy=k$ عمود MH و MH' را بر منحنی ها رسم کنیم، در این صورت مساحت مستطیل MHOH' برابر است با:

$$S_{MHOH'} = |OH \cdot OH'| = |x \cdot y| = |k|$$


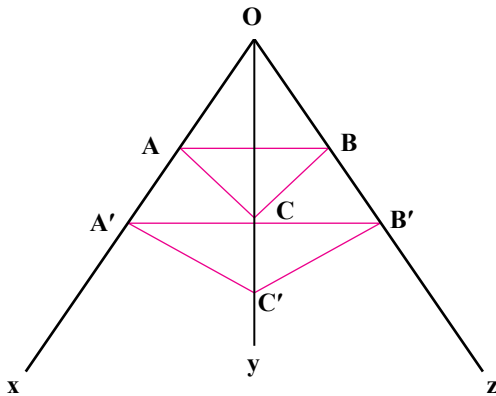
خاصیت دوم: اگر از هر نقطه دلخواه M به طول α روی تابع $xy=k$ مماسی طوری رسم شود که محورهای مختصات (مجانِب ها) را در نقطه های A و B قطع کند، ثابت می شود مساحت مثلث حاصل برابر مقدار ثابت $2|k|$ است.

تشکیل بدهند.

۱

هندسه

۱. در شکل زیر می‌دانیم: $AC \parallel A'C'$ و $BC \parallel B'C'$. ثابت کنید: $AB \parallel A'B'$.



۲. در مثلث ABC، از نقطه M روی BC دو خط به موازات دو ضلع دیگر مثلث رسم می‌کنیم تا AC را در D و AB را در E قطع کند. ثابت کنید:

$$AE.AC + AB.AD = AB.AC$$

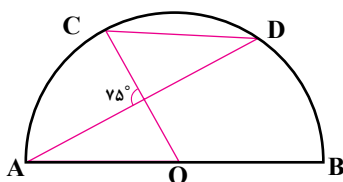
۳. در مثلث ABC از نقطه دلخواه D روی BC خطی موازی میانه AM رسم کرده‌ایم که AC را در E و امتداد AB را در F قطع کرده است. ثابت کنید طول‌های DE و AM و DF جملات متوالی یک دنباله حسابی‌اند.

۲

هندسه

۱. AB و CD دو قطر عمود بر هم در دایره‌ای به شعاع ۵ هستند و CH وترتی از دایره در یک طرف CD است و $CH=8$. اگر K نقطه برخورد CH و AB و بین مرکز دایره و A باشد، طول AK را به دست آورید.

۲. در شکل زیر O مرکز نیم‌دایره و $CD \parallel AB$ اندازه کمان CD را به دست آورید.



۲

ریاضی

۱. نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2^x$ را بکشید و از روی آن، نمودار تابع

$$g \text{ با ضابطه } g(x) = \frac{2^{1+x} - 1}{4} \text{ را رسم کنید.}$$

۲. الف) ثابت کنید:

$$\log_b^a = \frac{\log_m^a}{\log_m^b}$$

ب) ثابت کنید:

$$\frac{\log_a^N}{\log_{ab}^N} = \log_a^b + 1$$

۳. x را طوری به دست آورید که سه عدد $\log_2(2^x - 2)$ ، $\log_2(2^x - 1 + 2)$ و $\log_2(2^x - 3)$ یک دنباله حسابی

مسائل جبر و احتمال

۱. نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را رسم کنید:

الف) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2 \text{ و } x^2 + y^2 \leq 4\}$

ب) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 4 \text{ و } y \geq x^2\}$

۲. رابطه R روی Z به صورت زیر تعریف شده است. ثابت کنید R هم‌ارزی است.

$$x, y \in Z : xRy \Leftrightarrow 3 \mid x-y$$

۳. رابطه R روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده است. شکل کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه را مشخص و $[(1, 1)]$ را رسم کنید.

$$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 + t^2$$

مسائل ریاضیات ۳ تجربی

۱. وجود حد تابع به معادله
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ x^2 + x - 1 & x > 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$
 در نقطه $x_0 = 2$ را بررسی کنید.

۲. حد هر یک از تابع‌ها به معادله‌های $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ و تابع‌های $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ را در $x_0 = 0$ بررسی کنید.

۳. هر یک از حدهای زیر را به دست آورید:

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ که $x^2 + 2 \leq g(x) \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

مسائل ریاضیات گسسته

۱. ابتدا ثابت کنید: $(a, b) = (a, ka \pm b)$ و سپس نشان دهید که اگر $a = bq + r$ ، آن‌گاه: $(a, b) = (b, r)$.

۲. اگر داشته باشیم: $d = (a, b)$ و $[a, b] = c$ ، ثابت کنید: $d = (a+b, c)$.

۳. باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (\sum_{K=1}^{1394} K!)^1 + (\sum_{K=1}^{1394} K!)^2 + (\sum_{K=1}^{1394} K!)^3 + (\sum_{K=1}^{1394} K!)^4$ را بر ۵ بیابید.

۳. طول شعاع دایره محاطی مثلث قائم‌الزاویه‌ای را به دست آورید که مجموع اضلاع زاویه قائمه آن ۴ واحد بزرگ‌تر از طول وتر آن است.

حسابان

۱. ثابت کنید تابع f با ضابطه $f(x) = x + [x]$ وارون‌پذیر است و ضابطه وارون آن را به دست آورید.

۲. زوج یا فرد بودن تابع f با ضابطه $f(x) = \left[\frac{2}{x+1} \right] + \left[\frac{x+1}{1-x} \right]$ را بررسی کنید.

۳. نشان دهید هر تابع f با دامنه اعداد حقیقی که نمودار آن دارای دو محور تقارن موازی محور y ها باشد، متناوب است.

راهنمایی: اگر خط $x=a$ محور تقارن نمودار تابع f باشد، آن‌گاه: $(f(a+x)) = f(a-x)$.

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. مقادیر a و b و c و d را طوری به دست آورید که تابع با ضابطه زیر در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - a[x]}{x-1} & x > 1 \\ c & x = 1 \\ \frac{b + \cos \pi x}{d \sin^2 \pi x} & x < 1 \end{cases}$$

۲. اگر خط راست $y = x-1$ مجانب مایل نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(a-1)x^2 + bx + c}$ باشد، a و b و c را به دست آورید.

۳. ثابت کنید معادله $\sin x = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}{2}$ یک ریشه حقیقی در بازه $(1, 2)$ و یک ریشه حقیقی دیگر در بازه $(2, 3)$ دارد.

کاشانی نامه

(زندگی نامه غیاث الدین جمشید کاشانی)

- مؤلف: ابوالقاسم قربانی با مقدمه بهمن مهری
- ناشر: انتشارات زعیم (به سفارش مؤسسه آموزش عالی غیاث الدین جمشید کاشانی)
- نوبت چاپ: اول، ۱۳۹۰

تفسیر قسمتی از **مفتاح الحساب** کاشانی نوشت. کتاب اول (متأسفانه بعد از مرگش) در ۱۹۵۱ میلادی و کتاب دوم در ۱۹۵۳ میلادی به چاپ رسید.

اینک وصف «رساله وتر و جیب» کاشانی را از زبان لوکی بشنوید: **هانکل** در کتاب **تاریخ ریاضیات** خود شرح می‌دهد که چگونه یک منجم و ریاضی‌دان مسلمان (کاشانی) در قرن پانزدهم میلادی جیب یک درجه را از روی جیب سه درجه با دقت فراوان حساب کرده است، و چگونه معادله درجه سوم مربوط به آن مسئله را تشکیل داده و با روش استادانه‌ای آن را حل کرده است. **هانکل** می‌گوید که این روش زیبای حل معادلات عددی، از حیث دقت و ظرافت دست کمی از روش‌های تقریبی که از زمان **فرانسوا ویت**^۲ به بعد در مغرب زمین متداول شده است، ندارد. بعد از روش استخراج جذر و کعب که در اصل با آن شباهت‌هایی دارد، این نخستین روش محاسبه تقریبی است که در تاریخ ریاضیات بدان برمی‌خوریم. به حق می‌توان این روش را بدیع‌ترین و جالب‌ترین روشی دانست که در همه نوشته‌های (ریاضی) اسلامی وجود دارد. مخترع چنین روش تحسین‌آمیزی یک نفر ایرانی بود که در نیمه اول قرن پانزدهم میلادی در انجمن دانشورانی که نزد **الغبیگ** گرد آمده بودند، می‌زیست و در آثارش خود را **جمشیدین مسعودبن طبیب کاشانی** نامیده است.

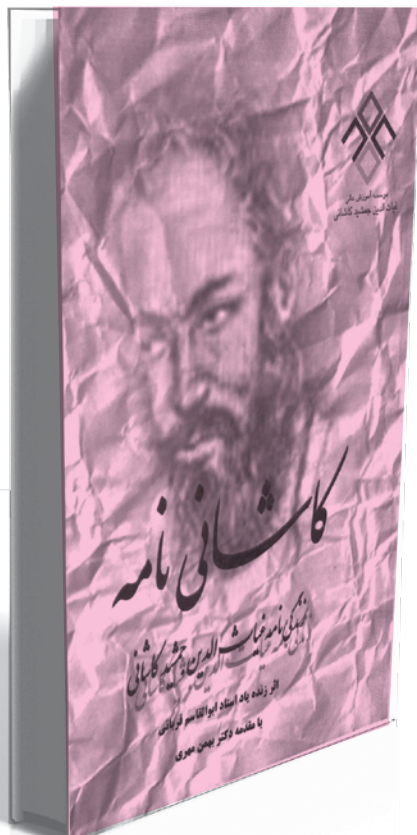
کتاب «کاشانی‌نامه» به قلم زنده‌یاد **ابوالقاسم قربانی** به شرح قسمتی از زندگی و احوال او و نیز تألیفات و آثار به‌جای مانده از این ریاضی‌دان بزرگ ایران پرداخته است. این کتاب دارای شش بخش به شرح زیر است.

- **بخش اول:** آنچه درباره زندگی کاشانی می‌دانیم
- **بخش دوم:** تألیفات کاشانی
- **بخش سوم:** بحثی درباره کتاب «مفتاح الحساب»
- **بخش چهارم:** سیری در «رساله محیطیه»
- **بخش پنجم:** بررسی «رساله وتر و جیب»
- **بخش ششم:** کاشانی نخستین مخترع کسرهای اعشاری

در ادامه به ارائه چند سطر از این کتاب ارزشمند می‌پردازیم و تمامی شما ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان را به مطالعه آن تشویق می‌کنیم:

* در بخش اول (آنچه درباره زندگی کاشانی می‌دانیم) می‌خوانیم:

«... دانشمند خاورشناس و ریاضی‌دان آلمانی، **پاول لوکی**^۱ نخست در سال ۱۹۴۴ میلادی کتابی در شرح و



* پی نوشت.....

1. Paul Luckey
2. Francois Viete
3. Geometric
4. Diagonal
5. Radius

پرسش‌های پیکار جو!



زاویه $\hat{xOy} = 30^\circ$ مفروض است. نقطه دلخواه M را طوری درون این زاویه در نظر می‌گیریم که فاصله آن از O کمتر از ۱۲ سانتی‌متر باشد. احتمال آنکه مجموع فواصل این نقطه از اضلاع زاویه کمتر از ۶ سانتی‌متر باشد، چه قدر است؟

- الف) $\frac{1}{\pi}$ ب) $\frac{2}{\pi}$ ج) $\frac{3}{\pi}$ د) $\frac{1}{2\pi}$ ه) $\frac{9}{4\pi}$

* در بخش سوم (بحثی درباره کتاب مفتاح الحساب) می‌خوانیم:

«... موضوع مقاله چهارم، مفتاح الحساب، اندازه‌گیری ابعاد، سطح و حجم شکل‌های هندسی^۲ است. در این مقاله کاشانی علاقه خود را به فن محاسبه و مهارت خود را در این باب بار دیگر نشان داده و از جمله، سطح هر یک از چندضلعی‌های منتظم مهم و حجم چندوجهی‌های منتظم را، هم در دستگاه شمار شصتگانی و هم در دستگاه دهگانی حساب کرده است...

کاشانی جدول جیب را درجه به درجه (از یک درجه تا نود درجه) و روش به کار بردن آن‌ها و بسیاری جدول‌های مفید دیگر را در این مقاله آورده و جدول ضرب‌های عدد پی (π) را که خود با دقتی که سال‌ها بعد از زمان وی بی‌رقیب ماند، حساب کرده و نتیجه را، هم در دستگاه شصتگانی و هم در دستگاه دهگانی، به اختصار ثبت کرده است...

باب سوم از مقاله چهارم مفتاح الحساب مربوط به چندضلعی‌های منتظم است. کاشانی قطر^۴ دایره محاطی چندضلعی منتظم را قطر اقصی و قطر دایره محیطی آن را قطر اطول چند ضلعی منتظم نامیده است. همچنین، برای محاسبه شعاع^۵ دایره محاطی (r) و شعاع دایره محیطی (R) بر حسب ضلع چندضلعی (a) و تعداد اضلاع آن (n) دستورهایی داده است که با علائم و اصطلاحات کنونی به صورت زیر درمی‌آیند:

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r = \frac{a}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}$$

و برای محاسبه مساحت (S) چندضلعی منتظم از دستور: $\frac{S}{a^2} = \frac{n}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}$ استفاده کرده و مقدار $\frac{n}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}$ را برای پنج ضلعی، شش ضلعی، هفت ضلعی، هشت ضلعی، نه ضلعی، ده ضلعی، دوازده ضلعی، پانزده ضلعی و شانزده ضلعی منتظم، هم در دستگاه شمار شصتگانی و هم با کسرهای اعشاری که خود مبدع آن‌هاست، حساب کرده و در جدول قرار داده است تا برای محاسبه مساحت (S)، مربع طول ضلع (a^2) چندضلعی‌های منتظم را در اعداد مذکور ضرب کنند. ...»



خانه تکانی ریاضیات!

برای سال

۲ ۰ ۱ ۶

اشاره

در رقابت‌های سالانه ریاضی، معمولاً مسائلی طرح می‌شوند که نشانه‌هایی از سال برگزاری مسابقه را به صورت غیرمستقیم در خود دارند، از آنجا که چند روزی بیشتر به آغاز سال نوی میلادی (۲۰۱۶) باقی نمانده است، مسائل زیر با ایده گرفتن از نمونه مسائلی که اغلب در رقابت‌های ریاضی مطرح شده‌اند و با تغییراتی در صورت آن‌ها و با تأکید بر جنبه آموزشی و نزدیکی آن‌ها به سرفصل‌های کتاب‌های درسی انتخاب و با طراحی شده‌اند. این مسائل پاسخ‌دهندگان را آماده می‌کنند تا ضمن تقویت قدرت استدلال و خلاقیت خود، توانایی حل نمونه‌هایی متنوع را به چالش بکشند و با این خانه‌تکانی ریاضیات، برای رقابت‌های ۲۰۱۶ آماده شوند!

این است که همه توان‌ها زوج باشند و برای اینکه عدد صحیح بزرگ‌تر از یک مکعب کامل باشد، باید همه توان‌ها مضرب ۳ باشند. با توجه به تجزیه ۲۰۱۶، لازم است k مضرب ۶ باشد. بزرگ‌ترین عدد مضرب ۶ کوچک‌تر از ۲۰۱۵ عدد ۲۰۱۰ است به این صورت: $۲۰۱۰ = ۶ \times ۳۳۵$.

در دنباله ۱, ۲, ۳, ..., ۲۰۱۴, ۲۰۱۵
۳۳۵ عدد مضرب ۶ هستند. این بیان می‌دارد که ۳۳۵ عدد صحیح از دنباله ۲۰۱۶ تا ۲۰۱۵ هم‌زمان مربع کامل و مکعب کامل هستند. علاوه بر این، عدد یک (جمله اول دنباله صورت مسئله) نیز به وضوح هم مربع کامل و هم مکعب کامل است. بنابراین $۱ + ۳۳۵ = ۳۳۶$ عدد صحیح از دنباله، هم مربع کامل و هم مکعب کامل‌اند.

نمونه ۳. فرض کنیم n عدد صحیح مثبت باشد، n امین عدد مثلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

نمونه ۱. اگر $10^x = (10^{2016} - 25)^2 - (10^{2016} + 25)^2$ ، مقدار x را حساب کنید.

پاسخ:

روش اول: با استفاده از اتحاد $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ و انتخاب $a = 10^{2016}$ و $b = 25$ داریم:

$$4(25)(10^{2016}) = 10^x \Rightarrow 10^{2018} = 10^x \Rightarrow x = 2018$$

روش دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ و انتخاب $a = 10^{2016} + 25$ و $b = 10^{2016} - 25$ داریم:

$$[(10^{2016} + 25) - (10^{2016} - 25)][(10^{2016} + 25) + (10^{2016} - 25)] = 50 \times 2 \times 10^{2016} = 10^{2018}$$

و در نتیجه: $x = 2018$.

نمونه ۲. چه تعداد عدد صحیح در دنباله ۱, ۲, ۳, ..., ۲۰۱۶, ۲۰۱۷ هم مربع کامل و هم مکعب کامل‌اند؟

پاسخ:

از آنجا که: $۲۰۱۶ = ۲^5 \times ۳^2 \times ۷$ ، پس:

$$۲۰۱۶^k = (۲^5 \times ۳^2 \times ۷)^k = ۲^{۵k} \times ۳^{۲k} \times ۷^k$$

لازمه مربع کامل بودن اعداد صحیح بزرگ‌تر از یک

همه زوج اعداد صحیح مثلثی را پیدا کنید که اختلاف آن‌ها از هم ۲۰۱۶ شود.

پاسخ:

جواب‌های مسئله، پاسخ‌های معادله زیرند:

$$\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}m(m+1) = 2016$$

که معادل است با: $n^2 - m^2 + n - m = 2 \times 2016$

$$(n-m)(n+m+1) = 2^6 \times 3^2 \times 7$$

توجه کنیم که: $n+m+1 > n-m$. همچنین یکی از دو عدد $n-m$ و $n+m+1$ زوج و دیگری باید فرد باشد، زیرا حاصل جمع آن‌ها $2n+1$ و عددی فرد است. لذا باید تمام حالاتی را که عدد $2^6 \times 3^2 \times 7$ را می‌توان به صورت ضرب یک عدد فرد در یک عدد زوج نوشت، معین کرد. پنج حالت زیر امکان‌پذیرند:

	$n-m$	$n+m+1$	n	m
۱	۱	۴۰۳۲	۲۰۱۶	۲۰۱۵
۲	۳	۱۳۴۴	۶۷۳	۶۷۰
۳	۷	۵۷۶	۲۹۱	۲۸۴
۴	۹	۴۴۸	۲۲۸	۲۱۹
۵	۲۱	۱۹۲	۱۰۶	۸۵

توجه کنیم، حالت‌های $n-m=63$ و $n+m+1=64$ غیرممکن‌اند، زیرا در این حالت $n=63$ و $m=0$ خواهد شد. بنابراین پنج زوج عدد مثلثی پاسخ این مسئله‌اند که عبارت‌اند از:

$$(T_{2016}, T_{2015}), (T_{673}, T_{670}), (T_{291}, T_{284}), (T_{228}, T_{219}), (T_{106}, T_{85})$$

نمونه ۴. می‌دانیم: $\log_2 \approx 0.301$. معلوم کنید 5^{2016} چند رقمی است؟

پاسخ:

$$\text{از آنجا که: } \log \frac{10}{2} = \log 5$$

$$\log 5 = \log 10 - \log 2 \approx 0.699$$

اما:

$$\log 5^{2016} = 2016 \times \log 5 \approx 2016 \times 0.699 \approx 1409.9/18$$

پس عدد 5^{2016} دارای ۱۴۱۰ رقم است.

نمونه ۵. تابع f برای همه اعداد صحیح مثبت تعریف شده است و داریم:

$$f(1)=2016 \text{ و برای هر } n>1:$$

$$f(1)+f(2)+\dots+f(n)=n^2 f(n)$$

در این صورت مقدار $f(2016)$ را حساب کنید.

پاسخ:

ابتدا توجه کنیم که:

$$f(2) = \frac{1}{2^2-1} f(1)$$

$$f(3) = \frac{1}{3^2-1} (f(1) + f(2)) = \frac{1}{3^2-1} \left[f(1) + \frac{1}{2^2-1} f(1) \right]$$

$$\Rightarrow f(3) = \frac{1}{3^2-1} \times \frac{2^2}{2^2-1} \times f(1)$$

و اگر به همین صورت ادامه دهیم، می‌توان دید:

$$f(4) = \frac{1}{4^2-1} \times \frac{2^2}{3^2-1} \times \frac{3^2}{2^2-1} \times f(1)$$

می‌توان حدس زد:

$$f(n) = \frac{1}{n^2-1} \times \frac{2^2}{3^2-1} \times \frac{3^2}{4^2-1} \times \dots \times \frac{(n-1)^2}{n^2-1} \times f(1)$$

$$f(n) = \frac{1 \times 2}{n(n+1)} \times f(1) \text{ که پس از ساده کردن به}$$

خواهیم رسید. (این حدس را می‌توان با روش استقرای ریاضی ثابت کرد.) در این صورت:

$$f(2016) = \frac{1 \times 2}{2016 \times 2017} \times 2016 = \frac{2}{2017}$$

نمونه ۶. دنباله فیبوناتچی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3)$$

در این صورت ثابت کنید:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_{2015}^2 = F_{2015} \times F_{2016}$$

اثبات:

جملات دنباله به صورت زیر است:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

دیده می‌شود که:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 6 = F_3 \times F_4$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 15 = F_4 \times F_5$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = 40 = F_5 \times F_6$$

به استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$$

و بنابراین حکم ثابت شد.

راهنمای حل مسائل

آمادگی برای آزمون‌های مستمر

۲

ریاضی

۱. با نقطه‌یابی، نمودار تابع‌نمایی $y=2^x$ را رسم کنید و برای رسم نمودار $g(x)$ آن را به صورت زیر تغییر دهید:

$$g(x) = \frac{2^{1+x}}{2^2} - \frac{1}{4} = 2^{x-1} - \frac{1}{4}$$

حال کافی است نمودار f را یک واحد در جهت مثبت محور x ‌ها به جلو و $\frac{1}{4}$ واحد در جهت منفی محور y ‌ها به پایین منتقل کنید. (نمودار با خط $y = -\frac{1}{4}$ مجانب می‌شود.)

۲. الف) $\log_a^b c \Rightarrow a = b^c$

$$\Rightarrow \log_m^a = \log_m^b = c \log_m^b$$

$$\Rightarrow \frac{\log_m^a}{\log_m^b} = c = \log_a^b$$

ب) از نتیجه (الف) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\log_a^N}{\log_{ab}^N} = \frac{\log_a^a}{\log_a^a} = \frac{\log_c^{ab}}{\log_c^a}$$

$$= \frac{\log_c^a + \log_c^b}{\log_c^a} = 1 + \frac{\log_c^b}{\log_c^a} = 1 + \log_a^b$$

۳. با توجه به فرض مسئله، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \log_2(2^{x-3}) + \log_2(2^{x-1}+2) &= 2 \log_2(2^{x-2}) \\ \Rightarrow \log_2(2^{x-3}) + \log_2(2^{x-1}+2) &= \log_2(2^{x-2})^2 \\ \Rightarrow (2^{x-3})(2^{x-1}+2) &= (2^{x-2})^2 \end{aligned}$$

و با فرض $2^{x-1} = t$ داریم:

$$\begin{aligned} (2t-2)(t+2) &= (2t-2)^2 \Rightarrow 2t^2 + 4t - 2t - 4 = 2t^2 - 4t + 4 - 4 \\ &= 4t^2 - 8t + 4 \Rightarrow 2t^2 - 9t + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 81 - 80 = 1 \Rightarrow \\ t &= \frac{9 \pm 1}{4} \Rightarrow t = 2 \text{ یا } t = \frac{5}{2} \Rightarrow 2^{x-1} = 2 \text{ یا } 2^{x-1} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2 \\ &\text{یا } x = \log_2^{\frac{5}{2}} + 1 \end{aligned}$$

۱

هندسه

۱. از قضیه تالس در مثلث‌های $OA'C'$ و $OB'C'$ نتیجه می‌شود:

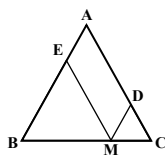
$$AC \parallel A'C' \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OC'} \quad (1)$$

$$BC \parallel B'C' \Rightarrow \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \Rightarrow AB \parallel A'B'$$

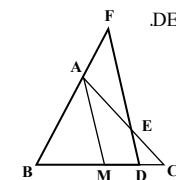
(عکس قضیه تالس در مثلث $OA'B'$)

۲. از قضیه تالس استفاده می‌کنیم:



$$\begin{aligned} ME \parallel AC &\Rightarrow \frac{MC}{BC} = \frac{AE}{AB} \\ MD \parallel AB &\Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{AD}{AC} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{BC}{MB+MC}}{\frac{BC}{BC}} = \frac{AE}{AB} + \frac{AD}{AC} = 1 \Rightarrow AE.AC + AB.AD = AB.AC$$



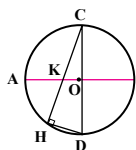
۳. باید نشان دهیم: $DE+DF=2AM$

به این منظور از قضیه تالس و نیز فرض $MB=MC$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{DE}{AM} &= \frac{DC}{MC}, \quad \frac{DF}{AM} = \frac{BD}{MB} \\ \Rightarrow \frac{DE}{AM} + \frac{DF}{AM} &= \frac{DC}{MC} + \frac{BD}{MB} = \frac{DC+BD}{MB} = \frac{BC}{MB} = 2 \\ \Rightarrow DE+DF &= 2AM \end{aligned}$$

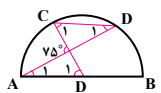
۲

هندسه



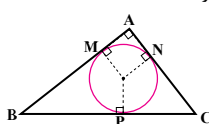
۱. H را به D وصل می‌کنیم. $\widehat{H} = \widehat{CD} = 90^\circ$ و در نتیجه: $\triangle COK \sim \triangle CHD$ و از آنجا:

$$\begin{aligned} \frac{OK}{DH} &= \frac{CO}{CH} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{OK}{DH} \\ DH &= \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \\ \Rightarrow OK &= \frac{15}{4}, \quad AK = OA - OK = 5 - \frac{15}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} CD \parallel AB &\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{A_1} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \widehat{C_1} = \widehat{O_1} = \widehat{AC}, \quad \widehat{O_1} + \widehat{A_1} &= 75^\circ \\ \Rightarrow \widehat{AC} + \frac{\widehat{AC}}{2} &= 75^\circ \Rightarrow \frac{3\widehat{AC}}{2} = 75^\circ, \quad \widehat{AC} = 50^\circ \\ \widehat{BD} = \widehat{A_1} = \widehat{AC} = 50^\circ &\Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ \end{aligned}$$

۳. مطابق شکل، $OM=ON=r$ و $AM=AN$



و $\widehat{N} = \widehat{M} = \widehat{A} = 90^\circ$ در نتیجه $ANOM$ مربع است و $AN = OM$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} CN=CP, \quad BM=BP, \quad AM=AN \\ \Rightarrow BP+CP-CN+BM \Rightarrow BC=AB- \\ AM+AC-AN \Rightarrow AM+AN=AB+AC- \\ BC=4 \Rightarrow 2AN=4 \Rightarrow AN=2 \Rightarrow r=2 \end{aligned}$$

حسابان

۱. نشان می‌دهیم که f یک به یک است:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Rightarrow x_1 + [x_1] = x_2 + [x_2] \\ \Rightarrow [x_1 + [x_1]] - [x_2 + [x_2]] &\Rightarrow [x_1] + [x_1] = [x_2] + [x_2] \end{aligned}$$

(توجه دارید که به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ ، $[x+k] = [x] + k$)

$$\Rightarrow 2[x_1] = 2[x_2] \Rightarrow [x_1] = [x_2] \text{ و } x_1 + [x_1] = x_2 + [x_2]$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ و وارون پذیر است.}$$

و برای یافتن ضابطه وارون f ، در ضابطه آن نقش x و y را عوض می‌کنیم و از دو طرف تساوی حاصل، جزء صحیح می‌گیریم:

$$y = x + [x] \Rightarrow x = y + [y] \Rightarrow [x] = [y + [y]]$$

$$\Rightarrow [x] = 2[y] \Rightarrow [y] = \frac{[x]}{2} \Rightarrow x = y + \frac{[x]}{2} \Rightarrow$$

$$y = x - \frac{1}{2}[x] \Rightarrow f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}[x]$$

۲. $D_f = R - \{1, -1\}$. پس دامنه تابع، متقارن است. حال می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \left[\frac{2}{1-x} \right] + \left[\frac{1-x}{1+x} \right] = \left[\frac{2}{1-x} - 1 \right] + \left[\frac{1-x}{1+x} + 1 \right] \\ &= \left[\frac{1+x}{1-x} \right] + \left[\frac{2}{1+x} \right] = f(x) \Rightarrow f \text{ زوج است.} \end{aligned}$$

۳. فرض می‌کنیم دو خط $x=b$ و $x=a$ ($a>b$) محورهای تقارن منحنی تابع f باشند. بنابراین:

$$1) f(a-x) = f(a+x) \text{ و } 2) f(b-x) = f(b+x)$$

در تساوی اول به جای x ، $a-x$ قرار می‌دهیم:

$$f(a-a+x) = f(a+a-x) \Rightarrow f(x) = f(2a-x)$$

حال در تساوی اخیر به جای x ، $b-x$ قرار می‌دهیم:

$$f(b-x) = f(2a-b+x)$$

اکنون از تساوی (۲) نتیجه می‌شود:

$$f(b+x) = f(2a-b+x)$$

و در این تساوی به جای x ، $b-x$ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = f(x+2a-2b)$$

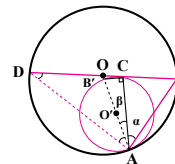
و با توجه به تعریف تابع متناوب، نتیجه می‌شود که f متناوب و دوره تناوب آن $(2a-2b)$ است.

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. چون $x=1$ ریشه کسر تابع f در همسایگی راست f است، پس برای آنکه f در این نقطه پیوسته باشد، باید $x=1$ ریشه صورت کسر هم باشد. بنابراین $a=1$ و از آنجا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - [x]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \end{aligned}$$

پاسخ پرسش‌های پیکار جوا!



۱. مطابق شکل و با رسم
خطوط اضافی خواهیم
داشت:

$\hat{\alpha} = \hat{B}AO - \hat{C}AO' = \hat{B}AO - \hat{\beta}$
 $DO = OA \Rightarrow \hat{D}AO = \hat{O}DA$
 $\Rightarrow \hat{C}OA = \hat{D}AO \Rightarrow \hat{D}AO = \frac{\hat{C}OA}{2} = \frac{\hat{\theta}}{2}$
 $\hat{B}AO = \hat{B}AD - \hat{D}AO = 90^\circ - \frac{\hat{\theta}}{2}$
 $\Rightarrow \hat{\alpha} = 90^\circ - \frac{\hat{\theta}}{2} - \hat{\beta}, \hat{\beta} = 90^\circ - \frac{\hat{A}C}{2} \Rightarrow \hat{\beta} = 90^\circ - \hat{A}C\hat{B}$
 $= 90^\circ - (180^\circ - \hat{A}C\hat{O}) = \hat{A}C\hat{O} - 90^\circ = 180^\circ - \hat{\beta} - \hat{\theta} - 90^\circ$
 $\Rightarrow \hat{\beta} = 90^\circ - \hat{\beta} - \hat{\theta} \Rightarrow 2\hat{\beta} = 90^\circ - \hat{\theta} \Rightarrow \hat{\beta} = 45^\circ - \frac{\hat{\theta}}{2}$
 (گزینه ب) $\Rightarrow \hat{\alpha} = 90^\circ - \frac{\hat{\theta}}{2} - (45^\circ - \frac{\hat{\theta}}{2}) = 45^\circ$
 ۲. با توجه به تعریف تابع چندجمله‌ای و اینکه همواره
 $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$ می‌توانید تحقیق کنید که برای هر تابع
 چندجمله‌ای f ، همواره: $a - b \mid f(a) - f(b)$. بنابراین، با
 توجه به فرض مسئله و رابطه فوق می‌توان نوشت:

$7 - 2 \mid f(7) - f(2) \Rightarrow 5 \mid f(7) - f(2), 5 \mid f(2) \Rightarrow 5 \mid f(7)$
 $7 - 5 \mid f(7) - f(5) \Rightarrow 2 \mid f(7) - f(5), 2 \mid f(5) \Rightarrow 2 \mid f(7)$
 (گزینه الف) $10 \mid f(7)$
 ۳. با مخرج مشترک‌گیری و تجزیه صورت کسر خواهیم
 داشت:
 $f(x) = \frac{x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)(x+4)(x-4)}{630}$

لذا صورت کسر حاصل ضرب ۹ عدد صحیح متوالی و بر
 ۶۳۰ بخش پذیر است (زیرا بر ۲، ۷، ۹ و ۵ بخش پذیر است).
 پس حاصل $f(x)$ همواره عددی صحیح است و در نتیجه:
 $R_1 \subset \mathbb{Z}$ ، ولی: $R_2 \not\subset \mathbb{Z}$ ، زیرا مثلاً: $f(x) \neq 1$ (چرا؟)
 پس پاسخ صحیح گزینه (د) است.

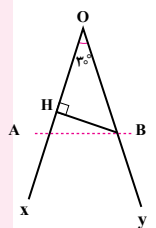
۴. با توجه به صورت معادله و به کمک اتحاد مربع
 دو جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$(x^2 - 8x^{\frac{1}{2}} + 16x^{\frac{1}{4}}) + (x^2 - 4\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + 8x) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4x^{\frac{1}{2}})^2 + (x - 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4x^{\frac{1}{2}} = 0 \\ x - 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} = 4 \\ x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = 8 \end{cases}$$

بنابراین ۸ یا $x=0$ و معادله دو ریشه حقیقی دارد (گزینه
 ب).



۵. با توجه به اینکه OM کوچک‌تر
 از ۱۲ است، لذا مکان هندسی
 M، نقاط درون قطاعی به شعاع
 ۱۲ سانتی‌متر و به مرکز O است
 (قطاع OAB). حال در مثلث
 متساوی‌الساقین (OA=OB=۱۲)
 OAB، می‌دانیم که مجموع فواصل
 هر نقطه روی قاعده AB، از دو ساق
 مثلث، مساوی ارتفاع وارد بر ساق، یعنی BH است (این
 ویژگی در کتاب هندسه ۲ دبیرستان اثبات شده است).
 اما در مثلث قائم‌الزاویه OBH، روبه‌رو به زاویه 30° و
 نصف وتر OB، یعنی مساوی ۶ سانتی‌متر است.
 بنابراین مجموع فواصل هر نقطه روی AB، از دو ساق
 مثلث و یا از ox و oy مساوی ۶cm است و در نتیجه برای
 هر نقطه درون این مثلث، مجموع این فاصله‌ها از ۶cm
 کمتر است. (چرا؟) پس فضای نمونه این پیشامد تصادفی
 مجموعه نقاط درون قطاع OAB و پیشامد مطلوب
 مجموعه نقاط درون مثلث OAB است و بنابراین احتمال
 برابر است با:

$$P(A) = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع OAB}}} = \frac{\frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \sin 30^\circ}{\frac{1}{2} \times 12 \times \pi \times 12} = \frac{3}{\pi}$$

(گزینه ج)

پاسخ معماهای عددی ایستگاه دوم

معمای اول: اگر سن پدر را x و سن مادر را ۴۰ و تعداد
 فرزندان را n و مجموع سن آن‌ها را y در نظر بگیریم، به
 معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{x+40+y}{n+2} = 25, \frac{40+y}{n+1} = 20, \frac{y}{n} = 12/5$$

و از معادله سوم داریم: $y = 12/5 n$ که با جای‌گذاری
 در معادله دوم نتیجه می‌شود: $40 + 12/5 n = 20(n+1)$ و در

نتیجه: $n = 20$ و $7/5 n = 28$ که غیر قابل قبول است!

اما کجای کار اشکال دارد؟ واضح است! ریاضی‌دان، پدر
 خانواده نیست! مادر خانواده است و ۴۰ سال سن دارد! و با
 این فرض همه معادله‌ها سازگار و به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\frac{x+40+y}{n+2} = 25, \frac{x+y}{n+1} = 20, \frac{y}{n} = 12/5$$

از معادله دوم نتیجه می‌شود: $x+y = 20(n+1)$ و با

$$\frac{20(n+1)+60}{n+2} = 25 \Rightarrow \frac{20n+160}{n+2} = 25 \Rightarrow 20n+160 = 25n+50 \Rightarrow 5n = 110 \Rightarrow n = 22$$

$$x = 35 \text{ و } y = 25, n = 22$$

معمای دوم: اگر عدد گنجشک‌ها را x و عدد
 کبوترها را y فرض کنیم، طبق گفته گنجشک داریم:

$$x + x + y + \frac{y}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

$$\frac{9x}{4} + \frac{3y}{2} = 99 \Rightarrow \frac{3x}{4} + \frac{y}{2} = 33 \Rightarrow 3x + 2y = 132$$

$$\Rightarrow x = \frac{132 - 2y}{3} = 44 - \frac{2y}{3}$$

بنابراین y باید مضرب ۳ باشد و چون $x > 36$ ، پس: $y \leq 9$
 و لذا: $y = 6$ یا $y = 9$. اما چون y زوج است، پس: $y = 6$ و $x = 40$.
 یعنی چهل گنجشک و ۶ کبوتر بودند.

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهانه و نه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد کودک

برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی

رشد نوجوان

برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

رشد دانش‌آموز

برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهانه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد نوجوان

برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد نوجوان

برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد نوجوان

برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

رشد نوجوان

برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

مجله‌های بزرگسال عمومی

به صورت ماهانه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد آموزش ابتدایی

رشد مدرسه فردا

مجله‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی
- رشد آموزش هنر
- رشد آموزش مشاور مدرسه
- رشد آموزش تربیت بدنی
- رشد آموزش علوم اجتماعی
- رشد آموزش علوم تاریخی
- رشد آموزش جغرافیا
- رشد آموزش زبان‌های خارجی
- رشد آموزش ریاضی
- رشد آموزش فیزیک
- رشد آموزش شیمی
- رشد آموزش زیست‌شناسی
- رشد آموزش هدایت مدرسه
- رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار
- رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان،
 مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جوین دانشگاه فرهنگیان
 و کارشناسان گروه‌های آموزشی و... تهیه و منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴
 آموزش و پرورش، پلاک ۱۶۶

تلفن و نمابر: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۷۸

وبگاه: www.roshdmag.ir

تاریخ ریاضی ؟

چه فایده‌ای دارد ●



تاریخ ریاضیات چه فایده‌ای دارد؟ تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد که ریاضیات، دانشی زنده و پویاست و بدون اینکه گذشته خود را نفی کند، همیشه به سمت دقت بیشتر و کارایی بیشتر پیش رفته است. تاریخ ریاضیات به ما نشان می‌دهد که دانش ریاضی، بر خلاف آنچه برخی گمان می‌کنند، در درون خود متحجر نشده و با قانون‌های جامد و بی‌تغییر سروکار ندارد. ریاضیات هم، مثل هر دانش دیگری، قانونمند است، تکامل می‌پذیرد، گذشته خود را اصلاح می‌کند و همیشه در تلاش برای «بهتر شدن»، «دقیق‌تر شدن» و «نزدیکی بیشتر با واقعیت‌های جهان خارج» است. ریاضیات دانشی انسانی است، بر خرد آدمی تکیه دارد و در خدمت بشر و جامعه بشری است. به همین مناسبت، تاریخ ریاضیات روحیه انسان‌دوستی و هم‌باری را تقویت می‌کند و نشان می‌دهد که، تلاش اهریمنی نفاق‌افکنان و جنگ‌افروزان، تا چه حد مانع پیشرفت انسان و رسیدن به آرمان‌های متعالی اوست.

تاریخ ریاضیات، ما را با شیوه کار ریاضی‌دانان و انگیزه‌های علمی آن‌ها آشنا می‌کند. ما می‌توانیم به یاری تاریخ ریاضیات، جایی خاص را در دانش جهان بیابیم، که از آن جایگاه به زندگی فکری بشری سروسامان ببخشیم... از همین حالا، که روی نیمکت‌های دیرستان نشسته‌اید، مطالعه خود را در تاریخ ریاضیات بیشتر کنید و برای هر موضوعی و هر مفهومی، هر قضیه‌ای و هر مسئله‌ای، در جست‌وجوی تاریخچه آن باشید.

«زنده‌یاد، استاد پرویز شهریاری»

ریاضیات

در استان کرمان



چونکشت یک چندبر، مفتواو
مرآن حصن را نام کرمان نهاد
(فروسی)



ابوعبدالله محمدبن عیسی ماهانی

استان کویری کرمان در اعتلای دانش ریاضی کشورمان، جایگاهی ژرف دارد. از دیرباز و از اوایل دوران تمدن ایرانی - اسلامی، ریاضی‌دانان و منجمان زیادی از این خطه برخاسته‌اند که یکی از برجسته‌ترین آن‌ها/ابوعبدالله محمدبن عیسی ماهانی، ریاضی‌دان و منجم قرن سوم هجری بوده است. وی در حدود سال ۲۱۰ در ماهان زاده شد. تخصص اصلی وی در هندسه و ریاضیات محض بود و آثار متعددی در این زمینه‌ها دارد که از جمله می‌توان به کتاب «تفسیرالمقاله العاشره من کتاب اقلیدس» اشاره کرد. یکی از کارهای وی تحقیق دربارهٔ معادله درجه سوم به صورت $X^3+CX^2=DX$ است که به معادله ماهانی شهرت دارد. وی همچنین در زمینهٔ مهندسی و ساختن واژه‌ها و اصطلاحات فنی آثاری دارد و در عرصهٔ نجوم کارهای بسیاری انجام داده که از جمله آن‌ها رصد چندین خسوف و کسوف و مقارنهٔ اجرام آسمانی است.

در دوران معاصر نیز ریاضی‌دانان نام‌آوری از استان کرمان برخاسته‌اند که ستارهٔ درخشان این استان، زنده‌یاد پرویز شهبازی، از اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ برهان و از بنیان‌گذاران آن است. دربارهٔ این استاد فرزانه بسیار گفته و نوشته‌اند و ما نیز در این مجله دربارهٔ کارهای ایشان مطالب فراوانی داشته‌ایم.

اما اثرگذاران بسیار دیگری هم در کارنامهٔ ریاضی کرمان وجود دارند که از آن جمله می‌توان به زنده‌یاد دکتر عباس ریاضی کرمانی (که در شمارهٔ ۳ به ایشان اشاره داشتیم) و استاد گران قدر، پروفسور مهدی رجبعلی‌پور (دکترای ریاضی از دانشگاه تورنتو کانادا، استاد ریاضی دانشگاه کرمان - نگارندهٔ مقالات متعدد ریاضی در نشریات معتبر بین‌المللی - چهرهٔ ماندگار و استاد نمونهٔ کشور) اشاره کرد. در حال حاضر فعالیت‌های زیادی در زمینهٔ ترویج ریاضیات در این استان انجام می‌گیرد که فعالیت‌های وسیع خانهٔ ریاضیات کرمان از جملهٔ آن‌هاست. از میان این فعالیت‌ها می‌توان به جشنواره‌های ریاضی، کارگاه‌های پارک، لیگ بازی و اندیشه، مسابقهٔ تورنمنت شهرها، جلسات سرگذشت ریاضیات و کارگاه‌های حل مسئله اشاره کرد. به منظور معرفی خانهٔ ریاضیات کرمان و فعالیت‌های آن گزارشی مشروح در یکی از شماره‌های آینده خواهیم داشت.



استاد پرویز شهبازی



دکتر عباس ریاضی کرمانی



دکتر مهدی رجبعلی‌پور

