بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

دورهٔ بیست‌وچهارم
شمارهٔ پی‌درپی ۸۷
مهر ۱۳۹۴
شمارهٔ ۱
۴۸ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، دکتر ابراهیم ریحانی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور، دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی
و با یاد همکار عزیزمان زنده‌یاد پرویز شهریاری
وبگاه: www.roshdmag.ir
پیام‌نگار: Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله: http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفترمجله: تهران، صندوق‌پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین: ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵
شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه
چاپ: شرکت افست (سهامی‌عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

توضیح دربارهٔ طرح روی جلد:

ریاضیات و هنر: استفاده از ریاضیات در خلق آثار هنری سابقه‌ای دیرینه داشته و بیانگر جلوه‌های زیبای ریاضی نیز می‌باشد.
نقاشی روی جلد از آثار موریس اشر ریاضی‌دان و نقاش معاصر هلندی است که به کمک تبدیل‌های هندسی آثار ماندگاری را خلق کرد. دربارهٔ روش این هنرمند در شماره‌های ۸۳ و ۸۴ مجله قبلاً مطالبی داشته‌ایم.

هر ماه میهمان شماییم!

سلام به همهٔ شما دانش‌آموزان عزیز ایران اسلامی که با سعی و تلاش، و برنامه‌ریزی و توکل به خداوند متعال به کسب علم و معرفت مشغولید. خیلی خوش‌حالیم که قرار است از این به بعد هر ماه میهمان شما باشیم و امیدواریم بتوانیم با مطالب متنوع و آموزندهٔ ریاضی، تاحد امکان درس ریاضی را برای شما جذاب، قابل فهم و کاربردی معرفی کنیم. ان‌شاءالله بتوانیم با کمک گرفتن از معلمان و دبیران دلسوز شما و استفاده از نظرات ارزشمند همهٔ دانش‌آموزان، در این امر مهم موفق باشیم.

مطالبی که شما عزیزان در مجلهٔ ریاضیِ خودتان خواهید خواند، به‌صورت اجمالی از این قرارند:

۱. معماها، سرگرمی‌ها و جدول‌های ریاضی با هدف رشد تفکر و جذب مخاطبان به سمت ریاضی و عمومی کردنِ ریاضیات.
۲. مقاله‌های کمک‌آموزشی با هدف ارتقای دانش ریاضی مخاطبان.
۳. مقاله‌های کمک‌درسی با هدف تکمیل مطالب درسی و پر کردن خلأهای احتمالی (به‌دلیل محدودیت‌های موجود) در کتاب‌های درسی.
۴. اخبار ریاضی ایران و جهان با هدف آشنایی مخاطبان با جدیدترین اتفاقات در جهان ریاضی و آخرین نظریه‌ها و تحولات ریاضی.
۵. مقاله‌هایی دربارهٔ تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، با هدف آشنایی مخاطبان با دستاوردهای ریاضی‌دانان، به‌خصوص ریاضی‌دانان مسلمان و ایرانی در طول تاریخ و پاسخ به پرسش‌های شما.
۶. گزارش‌هایی از مراکز آموزشی و مصاحبه با افراد سرشناس و دانش‌آموزان موفق در حوزهٔ ریاضیات با هدف اطلاع‌رسانی و انتقال تجربه‌های مفید و کاربردی.
۷. برگزاری مسابقه به همراه پاسخ پرسش‌ها و اعطای جوایز نفیس به نفراتی که پاسخ صحیح ارسال کرده‌اند، (از میان پاسخ‌های درستی که برای ما ارسال خواهید کرد)، با هدف ایجاد تفکر و شکوفایی خلاقیت مخاطبان.
۸. طرح مسائلی برای حل، به تفکیک کتاب درسی و پایهٔ تحصیلی، با هدف ارزشیابی مباحث کتاب درسی و آشنایی مخاطبان با انواع سؤال‌های قابل طرح از کتاب‌های درسی به منظور آمادگی برای امتحانات.
۹. آموزش ترجمهٔ متون ریاضی، با هدف آشنایی مخاطبان با متن‌های ریاضی دبیرستانی در کتاب‌های غیرایرانی و اصطلاحات و لغات ریاضی.
۱۰. پاسخ به نامه‌ها و ایمیل‌های رسیده از طرف شما و انعکاس نظرات شما.
۱۱. طرح طنزهای ریاضی با هدف تفریح اندیشمندانه و آشتی مخاطبان با ریاضیات.
۱۲. معرفی سایت‌ها و وبلاگ‌های ریاضی موجود با هدف آشنایی و استفادهٔ مخاطبان از این سایت‌ها و تکمیل اطلاعات خود و به‌کارگیری این اطلاعات.
۱۳. معرفی و نقد کتاب‌های ریاضی و فیلم‌هایی با موضوع ریاضی با هدف آشنایی و استفادهٔ مخاطبان.
۱۴. ارائهٔ مشاوره‌هایی در زمینه‌های گوناگون ریاضی با هدف آشنایی مخاطبان با روش‌های آموزش ریاضی، چگونگی مطالعهٔ درس‌های ریاضی و روش‌های حل مسائل ریاضی.

اعضای هیئت تحریریهٔ «مجله ریاضی برهان» امیدوارند که با کمک شما و دبیران محترم ریاضی‌تان، به همهٔ اهداف مجله دست پیدا کنند تا شما «برهان» را همیشه در کنار خودتان (در کلاس درس و در منزل) احساس کنید و این مجله منبعی مطمئن و قابل دسترس برای رفع همهٔ نیازها و پاسخ به همهٔ پرسش‌های ریاضی شما باشد.

ما بر این باوریم که به یاری خداوند متعال و همراهی و همدلی شما دانش‌آموزان عزیز می‌توانیم در راستای اهداف برنامهٔ درسی ملی و برنامه درسی ریاضی حرکت کنیم و باعث پیشرفت شما در علم ریاضی که آن را «ملکهٔ علوم» نامیده‌اند، شویم. در این صورت است که می‌توانیم به تولید علم در کشور کمک کنیم و موجبات سربلندی ایران عزیزمان را بیش از پیش فراهم سازیم.

«حمیدرضا امیری»

اندروید و ریاضیات

قاسم حسین قنبری،
دبیر ریاضی سمنان
سروش حسین قنبری،
دانش‌آموز کلاس هشتم

مقدمه

همان‌طوری که همهٔ معلم‌ها می‌دانند، با وجود اینکه همراه داشتن تلفن همراه در مدرسه غیرقانونی است، ولی بعضی از دانش‌آموزان گوشی تلفن همراه با خود به مدرسه می‌آورند که این برای مدرسه و خانواده مشکلاتی ایجاد می‌کند. از طرف دیگر، امکانات فوق‌العادهٔ این گوشی‌ها و تبلت‌ها را نمی‌توان نادیده گرفت؛ همان‌طور که علاقه و توانایی دانش‌آموزان در کار کردن با گوشی‌ها چیزی نیست که بتوان نادیده گرفت. لذا باید به دنبال راهی برای حل این مشکل بود. ولی آیا این مشکل به‌سادگی حل می‌شود؟ و مسئله تنها آوردن گوشی به کلاس است؟

تجربهٔ چند سالهٔ نگارنده نشان می‌دهد که مسئلهٔ اصلی چیز دیگری است و آموزش صحیح گام اساسی در از بین بردن مشکلات است.

نرم‌افزارهایی که در این مقاله به معرفی آن‌ها می‌پردازیم، تحت سیستم‌عامل اندروید هستند و در کشور ما بسیار فراگیرند؛ نرم‌افزارهایی مثل ProcalcApp، MathPac و Mathstudio. ابتدا کار را با «Mathstudio» شروع می‌کنیم، زیرا به ریاضیات دبیرستانی نزدیک‌تر است.

این نرم‌افزار بعد از نصب و فراخوانی، قصد آموزش کاربر را دارد که شما می‌توانید آموزش را ادامه دهید یا اینکه انصراف دهید. در صورت ادامه شکلی شبیه شکل ۱ را خواهید داشت.

شکل ۱

در نوار بالای صفحه دستورها نوشته می‌شوند. دستورها دو گروه هستند:

۱. دستورات ترسیمی که با دکمهٔ «Plot» اجرا می‌شوند؛ مثل رسم نمودار $y=x^2$ که در شکل ۱ وجود دارد.

۲. دستورات محاسباتی که با دکمهٔ «Solve» اجرا می‌شوند؛ مثل حل یک معادله یا تجزیهٔ یک چندجمله‌ای.

صفحهٔ کلید این نرم‌افزار کشویی است و در چهار جهت باز می‌شود و هر قسمت آن کارهای ویژه‌ای انجام می‌دهد. در بالای صفحه کلید نوار جداگانه‌ای وجود دارد که در سمت چپ و راست ادامه دارد و کارهای ویرایشی، از جمله Delete، Paste، Copy و

Cut را انجام می‌دهد (شکل ۲).

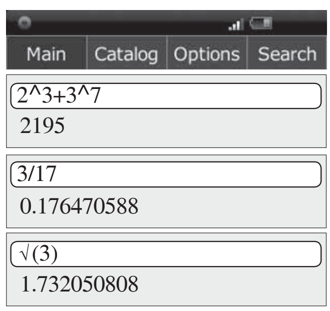
شکل ۲

اعمال ریاضی

جمع و تفریق با همان علائم (+) و (−) تقسیم با (/)، توان با علامت (^) و ضرب با (*) نشان داده می‌شوند.

محاسبات عددی

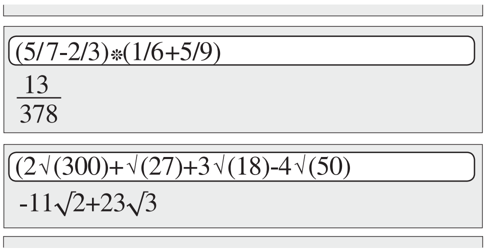
برای محاسبهٔ یک مقدار مثل $۲^{۳}+۳^{۷}$، عبارت را با علائم توان می‌نویسیم و دکمهٔ «solve» را می‌زنیم. در صورتی که در عبارت موردنظر کسر یا رادیکال داشته باشیم، بعد از اولین اجرا عبارت به شکل ریاضی در می‌آید و در بار دوم اجرا به‌صورت اعشاری نمایش داده می‌شود (شکل ۳).



شکل ۳

این ویژگی نرم‌افزار باعث می‌شود که محاسبات اعداد گویا و رادیکالی هم به‌صورت ریاضی و هم به‌صورت اعشاری قابل محاسبه باشد.

مثال: حاصل عبارت $A=(\frac{۵}{۷}-\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۶}+\frac{۵}{۹})$ و $B=۲\sqrt{۳۰۰}+\sqrt{۲۷}+۳\sqrt{۱۸}-۴\sqrt{۵۰}$ را حساب کنید و سپس جواب‌ها را به‌صورت اعشاری بنویسید.

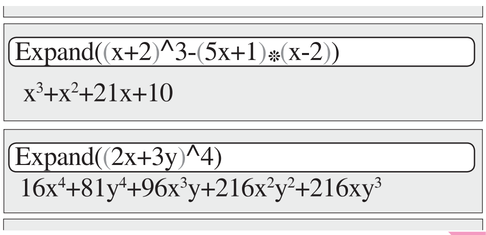


شکل ۴

چند جمله‌ای‌ها

برای محاسبهٔ جمع، تفریق، ضرب و توان چندجمله‌ای‌ها از دستور «Expand(exp)» استفاده می‌کنیم (exp همان عبارت جبری است).

مثال: حاصل عبارت $A=(x+۲)^{۳}-(۵x+۱)(x-۲)$ و $B=(۲x+۳y)^{۴}$ را به‌دست آورید.

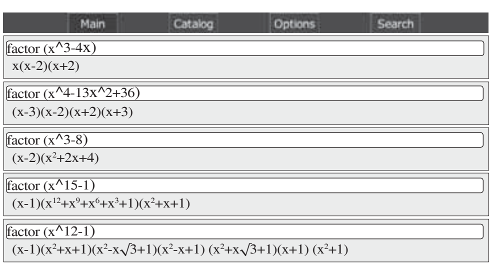


شکل ۵

تجزیه

معمولاً بیشتر دانش‌آموزان در بحث تجزیه به مشکل برمی‌خورند. دستور بسیار سادهٔ «Factor(exp)» عبارت‌های یک متغیره را تجزیه می‌کند.

مثال: این عبارت‌ها را تجزیه کنید: $A=x^{۳}-۴x$، $B=x^{۴}-۱۳x^{۲}+۳۶$، $C=x^{۳}-۸$ و $D=x^{۱۵}-۱$ و $E=x^{۱۲}-۱$.



شکل ۶

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

اگر P(x) و Q(x) دو چندجمله‌ای باشند، خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم با دستور PolyDivide(P(x),Q(x),x)

محاسبه می‌شود.

✦**مثال:** خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x) = x^۳ - ۳x + ۳$ را بر $x - ۲$ حساب کنید.

```
PolyDivide(x^3-3x+3,x-2,x)
[x²+2x+1,5]
PolyDivide(x^4-13x^2+38,x^2-9,x)
[x²-4,2]
```

شکل ۷

دستور «Qoutient(P(x),Q(x))» هم فقط خارج‌قسمت تقسیم را حساب می‌کند.

محاسبهٔ مقدار یک چندجمله‌ای

اگر P(x) یک چندجمله‌ای باشد، برای محاسبهٔ مقدار آن به ازای x=a دستور «Eval(P(x),x,a)» را به‌کار می‌بریم. وقتی چندجمله‌ای دو متغیره باشد، از این دستور به شکل تودرتو استفاده می‌کنیم.

در شکل ۸ مقدار $x^۳-۱۳x^۲+۸$ به ازای x=۳، مقدار $x^۲-۳xy+y^۳$ به ازای y=۳ و x=۳ محاسبه شده و مقدار $x^۲-y^۲+z^۳$ به ازای y=۳ و x=۲ برحسب z به‌دست آمده است.

```
Eval(x^3-13x^2+8,x,3)
-82
Eval(Eval(x^2-3x*y+y^3,x,3),y,3)
9
Eval(Eval(x^2-y^2+z^3,x,2),y,3)
z³-5
```

شکل ۸

عبارت‌های گویا

اگر S(x) عبارتی گویا، شامل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم باشد، «Together(S(x))» حاصل آن را حساب می‌کند. در ضمن این دستور عبارت نهایی را ساده هم می‌کند.

✦**مثال:** حاصل عبارت‌های $A = \frac{x}{x-۱} + \frac{۳}{x-۲}$ و $B = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x-۲}$ را حساب کنید.

همچنین اگر کسری داشته باشیم، می‌توانیم با دستور «Apart(exp)» آن را به کسرهای ساده تجزیه کنیم. در شکل ۹ کسرهای $A = \frac{۱}{x^۲-۴}$ و $B = \frac{۱}{x^۳-۴x}$ به کسرهای ساده تجزیه شده‌اند.

Main | Catalog | Options | Search

```
Together(x/(x-1)+3/(x-2))
```
$$\frac{(x+\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2})(x-\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2})}{(x-2)(x-1)}$$
```
Together(1/x+1/(x-2))
```
$$\frac{2(x-1)}{x(x-2)}$$
```
Apart(1/(x^2-4))
```
$$-\frac{1}{4(x+2)}+\frac{1}{4(x-2)}$$
```
Apart(1/(x^3-4x))
```
$$-\frac{1}{4x}+\frac{1}{8(x-2)}+\frac{1}{8(x+2)}$$

شکل ۹

اعداد طبیعی

اول یا مرکب بودن یک عدد طبیعی یکی از مباحث نظریهٔ اعداد است که در همهٔ دوره‌های تحصیلی مطرح می‌شود. دستور «IsPrime(n)» اول یا مرکب بودن عدد n را با اعداد صفر و یک مشخص می‌کند. در شکل ۱۰ اول یا مرکب بودن اعداد ۲۳۷، ۹۷ و ۱۲۳۴۵۴۳۲۱ بررسی شده است.

```
IsPrime(237)
0
IsPrime(97)
1
IsPrime(123454321)
0
```

شکل ۱۰

برای تعیین مقسوم‌علیه‌های عدد طبیعی n از دستور «Divisors» استفاده می‌شود. همچنین «lcm(m,n)» و «gcd(m,n)» ک.م.م و ب.م.م دو عدد n و m را حساب می‌کنند.

```
Divisors(1048)
[1, 2, 4, 8, 131, 262, 524, 1048
lcm(85, 40)
680
gcd(135, 90)
45
```

شکل ۱۱

در شکل ۱۱ شمارنده‌های عدد ۱۰۴۸، ک.م.م ۸۵ و ۴۰، و همچنین ب.م.م دو عدد ۱۳۵ و ۹۰ محاسبه شده است. اما دستور «nprimes(n)» عدد طبیعی n را به عامل‌های اول تجزیه می‌کند و آن را به‌صورت تجزیه شده می‌نویسد.

```
nPrimes(360)
[1 ، [2 ، 3] ، [3 ، 2] ، [5 ، 1]]

nPrimes(1905750)
[1 ، [2 ، 1] ، [3 ، 2] ، [5 ، 3] ، [7 ، 1] ، [11 ، 2]]
```

شکل ۱۲

همان‌طور که در شکل ۱۲ مشخص است، عدد ۱۹۰۵۷۵۰ به عامل‌های اول تجزیه شده که به‌صورت $1905750=2^{1}\times3^{2}\times5^{3}\times7^{1}\times11^{2}$ است.

غربال اراتستن

شاید فهرست کردن اعداد اول یکی از خسته‌کننده‌ترین کارها در ریاضی باشد که باعث می‌شود زیبایی کار با اعداد اول از بین برود. اما دستور «Prime(n)» این کار را بسیار ساده می‌کند. این دستور از عدد اول شماره یک یعنی ۲، n تا عدد اول متوالی را می‌نویسد. «Prime(n,m)» نیز از عدد اول شمارهٔ m به‌ترتیب n تا عدد اول را می‌نویسد. برای مثال در شکل ۱۳، Prime(۵,۱۱) از عدد اول شمارهٔ ۱۱ که ۳۱ است، پنج عدد اول متوالی یعنی ۳۱ و ۳۷ و ۴۱ و ۴۳ و ۴۷ را می‌نویسد.

```
Main    Catalog    Options    Search
Prime(11)
[2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 ، 31]
Prime(5 ، 11)
[31 ، 37 ، 41 ، 43 ، 47]
Prime(21 ، 5)
[11،13،17،19،23،29،31،37،41،43،47،53،59،61،67،71،73،79،63،89،97]
```

شکل ۱۳

رسم نمودار تابع یک متغیره

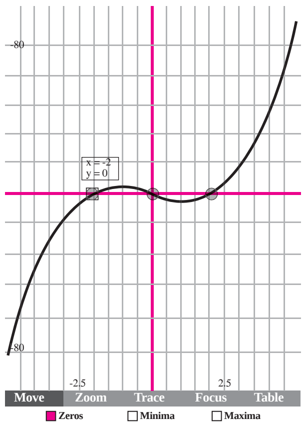
برای رسم نمودار تابع $y=f(x)$ فقط کافی است $f(x)$ را در نوار برنامه‌ها بنویسیم و دکمهٔ «Plot» را اجرا کنیم (شکل ۱). برای داشتن تصویری با کیفیت و بزرگ کافی است روی نمودار دوبار کلیک کنیم. برای مثال در شکل ۱۵ نمودار $y=x^{3}-4x$ رسم شده است.

با بزرگ کردن تصویر در پایین آن نوار شکل ۱۴ ظاهر می‌شود که اطلاعات جالبی در اختیار کاربر قرار می‌دهد.

```
Move    Zoom    Trace    Focus    Table
■ Zeros    □ Minima    □ Maxima
```

شکل ۱۴

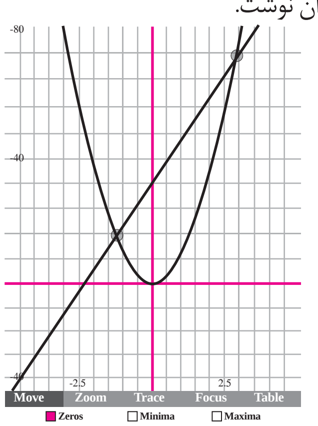
در ردیف اول «Move» برای جابه‌جا کردن تصویر است. با انتخاب «Trace» یک نقطه روی نمودار مشخص می‌شود که مختصات آن کنار نقطه نوشته می‌شود. با حرکت انگشت روی صفحه می‌توان نقطه را جابه‌جا کرد. همچنین «Table» اطلاعات نمودار را در یک جدول نمایش می‌دهد. در ردیف دوم، با انتخاب Zero صفرهای تابع مشخص می‌شوند که در شکل ۱۵ صفرها مشخص شده‌اند. به‌همین روش Min و Max را هم می‌توان مشخص کرد.



شکل ۱۵

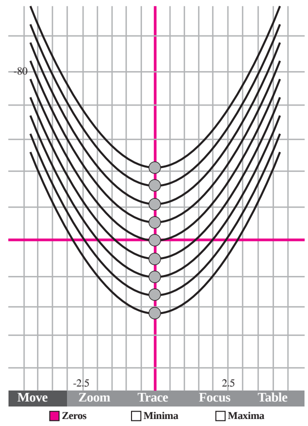
رسم چند نمودار در یک دستگاه

اگر بخواهیم نمودار چند تابع را در یک دستگاه رسم کنیم، ابتدا دکمهٔ «Plot» را می‌زنیم و سپس در پرانتز جلوی آن، توابع را می‌نویسیم. البته آن‌ها را با علامت (،) از هم جدا می‌کنیم. در نمودار ۱۶ نمودار دو تابع $y=x+5$ و $y=x^{2}$ با هم رسم شده‌اند. برنامهٔ این رسم «Plot(x^۲, x+۵)» است که آن را توسط صفحهٔ کلید هم می‌توان نوشت.



شکل ۱۶

در این حالت علاوه بر سایر امکانات، نقاط برخورد دو تابع را نیز می‌توان با انتخاب «Intersections» مشخص کرد. خود نرم‌افزار رنگ‌های متفاوتی را انتخاب می‌کند که این رنگ‌ها قابل تغییر هستند.



شکل ۱۷

در شـکل ۱۷ چندین نمودار با هم در یک دسـتگاه رسم شده است.

✦**تذکر:** این نرم‌افزار و سـایر نرم‌افزارهای مشـابه برای رسم نمودار توابع ناپیوسته مناسب نیستند، با وجود این اطلاعات خوبی به ما می‌دهند. همچنین در نسـخه‌های بالاتر این مشکلات کمتر خواهند شد.

خودآموز Mathstudio

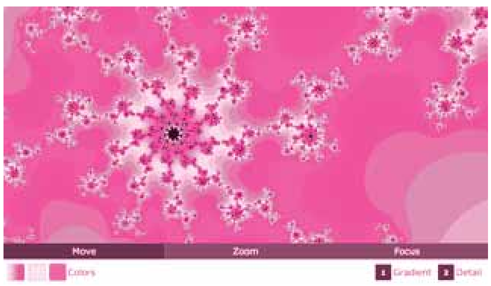
نوار بالای نرم‌افزار از چهار قسـمت تشـکیل شده است:

در قسمت Catalog همهٔ توابع و دستورهای نرم‌افزار موجود و برحسب حروف الفبای انگلیسی مرتب شده‌اند و با کمی اطلاعات در مورد ریاضی به زبان انگلیسی می‌توان به هدف خود دسـت یافت. فرض کنیـم می‌خواهیم در مورد تجزیه در این نرم‌افزار اطلاعاتی به‌دسـت آوریم. به این منظور در قسـمت «catalog» به قسـمت حرف F می‌رویم و کلمهٔ «factor» را می‌یابیم تا با دستور و روش اجرای آن آشنا شویم.

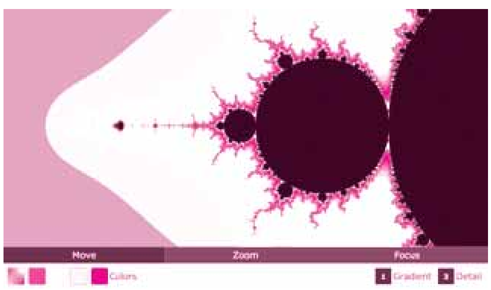
همچنیـن خـود نرم‌افـزار هـم روش کار بـا آن را آمـوزش می‌دهـد. کافـی اسـت بـا زدن کلیـد «Tuchmenu» گوشی یا تبلت، مسیر «More->tutorial» را طی کنیم تـا خود نرم‌افزار به‌صـورت گام‌به‌گام کار آموزش را انجام دهد.

فرکتال و سرگرمی

تصویرهای هندسـهٔ فرکتـال بسـیار خیره‌کننده و جالب هسـتند. نکتـهٔ جالب آن‌ها این اسـت که هر قـدر تصویـر را بزرگ کنیم، شـکل پایـان نمی‌پذیرد. به‌عبـارت دیگر، بی‌نهایت را می‌تـوان لمس و از نزدیک مشـاهده کرد. ایـن نرم‌افـزار تصاویـر فرکتالـی را با کیفیـت بالا رسـم می‌کنـد. در ضمن با بـزرگ کردن تصویـر، نرم‌افـزار دوباره شـکل را بازسـازی می‌کند و مانع از شـطرنجی شدن تصویر می‌شـود. برای مشاهدهٔ ایـن تصاویر صفحهٔ کلید را به طرف بالا می‌کشـیم. در صفحـهٔ اول دکمـهٔ «fractal» و در صفحـهٔ دوم کلید «Julia» این تصاویر را طراحی می‌کنند.



شکل ۱۸ـ از مجموعهٔ julia



شکل ۱۹

در تصویرهای ۱۸ و ۱۹ رنگ‌ها در پایین صفحه قابل تغییر هستند. همچنین، «Gradient» و «Detail» نیز تغییر می‌کنند و دنیایی از شکل‌های زیبا به‌وجود می‌آید.

✦**نکتهٔ پایانی:** این مختصر حاصل کار مشترک بنده و فرزندم **سـروش** است که کارهای بسیار مهمی را در زمینهٔ جسـت‌وجو برای نرم‌افزارها و نصب و راه‌اندازی آن‌ها انجام داد. همچنین با سـؤال‌ها و کنجکاوی‌های خـود بسـیاری از ریزه‌کاری‌هـای نرم‌افـزار را نمایان کرد.

مژگان احقاقی
کارشناس ارشد ریاضی محض
دبیر ریاضی از استان قزوین

حل مسئله به‌روش شرلوک هولمز

کونان دویل، نویسندهٔ مشهور انگلیسی، در یکی از داستان‌های خود به نام ماجراهای **شرلوک هولمز** این مسئله را مطرح کرد: دکتر **هاتسن** و مهمانش، شرلوک هولمز نزدیک پنجرهٔ باغ می‌نشینند. از باغ فریادهای خندهٔ گروه بزرگی از بچه‌ها به گوش می‌رسد. هولمز می‌گوید: «خواهش می‌کنم به من بگویید شما چند بچه دارید؟»

هاتسن پاسخ می‌دهد: «همهٔ آن‌ها بچه‌های من نیستند. آن‌ها بچه‌های چهار خانواده‌اند. تعداد بچه‌های من از همه بیشـــتر اســـت. برادرم بچه‌های کمتری دارد و خواهرم باز هم کمتر. و تعداد بچه‌های عمو از همه کمتر است. آن‌ها به این مناسبت شلوغ می‌کنند که تعدادشان برای دو گروه نه‌نفری کافی نیست. یک تصادف جالب این است که اگر تعداد بچه‌های چهار خانواده را در هم ضرب کنید، شمارهٔ منزل مرا به‌دست می‌آورید که شما آن را می‌دانید.»

هولمز می‌گوید: «من در مدرسه، ریاضیات خوانده‌ام. کوشش می‌کنم تعداد بچه‌های هر خانواده را حساب کنم.»

او بعد از بعضی محاسبه‌ها می‌گوید: «برای حل مسئله باید آگاهی دیگری به من بدهید. آیا عمو یک بچه دارد یا بیشتر؟»

صاحب‌خانه پاسخ او را می‌دهد که ما از چگونگی آن بی‌خبریم. سپس هولمز می‌گوید: «حالا من می‌توانم تعداد بچه‌های هر خانواده را بگویم!»

او جواب درســت را پیدا کرده بود. پرســش مسئله این است: «شــمارهٔ منزل و تعداد بچه‌های هر خانواده چه‌قدر است؟»

حل:

روشن اســت که مهمان، مسـئله را به این ترتیب حل کرده اســت: او می‌دانست که تعداد بچه‌های چهار خانواده روی هم از ۱۸ کمتر است. او شمارهٔ منزل را هم که ما N فرض می‌کنیم، می‌دانست. اگر تعداد بچه‌های چهار خانواده را به‌ترتیب با حرف‌های d، c، b و a نشان دهیم، همهٔ این عددها مثبت و صحیح‌اند و حاصل‌ضرب آن‌ها هم برابر است با N:

$a>b>c>d \quad N=abcd \quad a+b+c+d<۱۸$

مهمان می‌بایســت چهــار عدد متفــاوت را طوری انتخــاب کند که حاصل‌ضرب آن‌هــا برابر N و مجموع آن‌ها کوچک‌تر از ۱۸ شــود. ولی او نتوانســت عددها را پیدا کند و ناچار شد بپرسد که آیا عمو یک بچه دارد یا بیشتر. و بعد از آنکه پاسخ خود را گرفت، توانست جواب مسئله را پیدا کند.

ولی ما برای حل مسـئله در موقعیت دشــوارتری هســتیم، زیرا شــمارهٔ منــزل را نمی‌دانیــم و بنابراین نمی‌توانیم از روش مهمان برای حل مسـئله اسـتفاده کنیم. با این حال، ما هم می‌توانیم مسـئله را به‌سادگی حل کنیم، به شرطی که... به شرطی که کمی فکر کنیم. نخســت به این پرســش پاســخ دهیم: «عمو چند بچه می‌تواند داشته باشد؟»

به‌ســادگی می‌توان فهمید که عمو نمی‌تواند ســه بچه داشــته باشــد. اگر فرض کنیم تعداد بچه‌های عمو d=۳ باشــد، در این صورت مقدار c دســت‌کم ۴، مقدار b دســت‌کم ۵ و مقدار a دست‌کم ۶ می‌شود. در نتیجه تعداد بچه‌ها روی هم دست‌کم باید چنین باشد:

$۶+۵+۴+۳=۱۸$

ولــی می‌دانیم که تعداد بچه‌ها کمتر از ۱۸ اســت، بنابراین عمو یا یک بچه دارد یا دو بچه. جدولی از همهٔ حالت‌های ممکن چهار عدد صحیح تشــکیل می‌دهیم، به‌نحوی که کوچک‌تریــن آن‌ها برابر ۲ و مجموع چهار عدد کمتر از ۱۸ باشــد. روی هم هفت حالت به شــرح جدول ۱ پیدا می‌شود.

جدول ۱

حاصل‌ضرب	مجموع	عددها
۱۲۰	۱۴	۲، ۳، ۴، ۵
۱۴۴	۱۵	۲، ۳، ۴، ۶
۱۶۸	۱۶	۲، ۳، ۴، ۷
۱۹۲	۱۷	۲، ۳، ۴، ۸
۱۸۰	۱۶	۲، ۳، ۵، ۶
۲۱۰	۱۷	۲، ۳، ۵، ۷
۲۴۰	۱۷	۲، ۴، ۵، ۶

به‌همین ترتیب می‌توان با فرض اینکه عمو تنها یک بچه داشته باشد، همهٔ حالت‌هایی از حاصل‌ضرب چهار عدد درست را پیدا کرد به‌نحوی که کوچک‌ترین آن‌ها برابر ۱ و مجموع آن‌ها کمتر از ۱۸ باشد (خودتان این عددها را به‌دست آورید). ولی اگر با دقت به همهٔ شرط‌های مسئله نگاه کنیم، نیازی به این کار نیست. وقتی که هولمز مسئله را حل کرد، متوجه شد برای حل آن لازم است بداند عمو یک بچه دارد یا بیشتر؛ با وجود اینکه می‌دانست شمارهٔ منزل چند است.

روشن است که شمارهٔ منزل عددی بوده که هم با ضرب چهار عددی که کوچک‌ترین آن‌ها برابر است با ۱ و هم با ضرب چهار عددی که کوچک‌ترین آن‌ها برابر است با ۲ به‌دست می‌آید (و ابهام از همین‌جا به‌وجود آمده است). همین وضعیت به ما امکان می‌دهد شمارهٔ منزل را پیدا کنیم. این عدد باید هم در جدول ۱ و هم در جدولی که حاوی حاصل‌ضرب چهار عددی است که با ۱ آغاز می‌شود، مشترک باشد. چون در جدول ۱ کوچک‌ترین عدد برابر است با ۱۲۰، برای تشکیل جدول حاصل‌ضرب‌های چهار عدد مختلف با کوچک‌ترین عامل برابر با ۱، می‌توانیم تنها حالت‌هایی را در نظر بگیریم که حاصل‌ضرب چهار عدد دست‌کم برابر ۱۲۰ باشد و این کار محاسبه را کم می‌کند. حالت‌ها مطابق جدول۲ هستند.

جدول ۲

حاصل‌ضرب	مجموع	عددها
۱۲۰	۱۷	۸، ۵، ۳، ۱
۱۲۶	۱۷	۷، ۶، ۳، ۱
۱۲۰	۱۶	۶، ۵، ۴، ۱
۱۴۰	۱۷	۷، ۵، ۴، ۱

می‌بینیم که تنها عدد مشترک در هر دو گروه، حاصل‌ضرب ۱۲۰ است. روشن است که شمارهٔ منزل چنین است $N=۱۲۰$. حاصل‌ضرب ۱۲۰ در سه حالت پیدا می‌شود:

$۲×۳×۴×۵=۱۲۰ \quad ۱×۳×۵×۸=۱۲۰ \quad ۱×۴×۵×۶=۱۲۰$

مطالعهٔ دقیق شرط‌های مسئله امکان می‌دهد، ادامهٔ مسئله را حل کنیم. مهمان گفته بود اگر بداند عمو یک بچه دارد یا بیشتر می‌تواند مسئله را حل کند. اگر به او گفته شده بود عمو ۱ بچه دارد، نمی‌توانست پاسخ دقیقی درباره تعداد بچه‌ها بدهد. زیرا شمارهٔ منزل ($N=۱۲۰$) در دو حالت به‌دست می‌آمد:

$d=۱, c=۳, b=۵, a=۸ \qquad d=۱, c=۴, b=۵, a=۶$

چون هولمز پاسخ مشخصی داده، حتماً به او گفته شده که تعداد بچه‌های عمو دوتاست. در این صورت، شمارهٔ منزل ($N=۱۲۰$) تنها در یک حالت به‌دست می‌آید: $d=۲, c=۳, b=۴, a=۵$.

مسئله‌ای که در نظر اول گمان می‌رفت به مناسبت عدم کفایت داده‌ها قابل حل نیست، به‌سادگی حل شد. ولی این حل تنها با دقت کامل روی جمله‌به‌جملهٔ صورت مسئله امکان‌پذیر شد، و چنین دقتی برای حل هر مسئله‌ای لازم است.

حمیدرضا امیری

گراف دوستی!

مقدمه

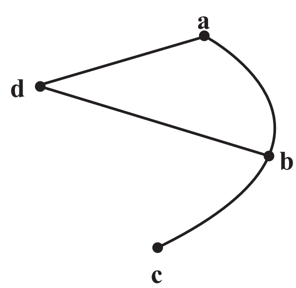
فرض کنید در یک کلاس ۲۵ نفر دانش‌آموز حضور داشته باشند. آیا امکان دارد هر یک از دانش‌آموزان این کلاس دقیقاً با ۳ نفر از هم‌کلاسی‌های خود دوست باشند؟ برای پاسخ به این سؤال و بدون استفاده از قضایای کمکی زحمت زیادی باید کشیده شود و زمان نسبتاً طولانی صرف یافتن پاسخ خواهد شد.

نظریهٔ گراف از جمله شاخه‌های مهم در ریاضیات است که کاربردهای بسیاری در علم ریاضی و سایر علوم دارد. امروزه در شیمی، باستان‌شناسی، و ورزش‌های گروهی و دو نفری مثل شطرنج کاربردهای فراوانی از این شاخهٔ ریاضیات می‌توان مشاهده کرد. حال مسئله‌ای طرح می‌کنیم و سپس با تعاریف مقدماتی از گراف و پس از بحث دربارهٔ تعداد گراف‌ها و شمارش آن‌ها و با استفاده از اولین قضیه در گراف به این مسئله پاسخ خواهیم داد.

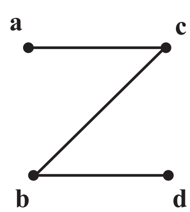
تعریف گراف ساده

برای تعریف یک گراف ساده به دو مجموعه نیاز داریم: یکی مجموعه‌ای ناتهی و متناهی به‌نام «V» که آن را «مجموعهٔ رأس‌ها» می‌نامیم و دیگری مجموعه‌ای به‌نام «E» که آن را «مجموعهٔ یال‌ها» می‌نامیم. هر عضو E زیرمجموعه‌ای دو عضوی از V است. برای مثال، اگر فرض کنیم $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{\{a,b\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\}\}$، برای رسم گراف متناظر با V و E ابتدا به ازای هر عضو V یک نقطه یا رأس در صفحه مشخص می‌کنیم. سپس به ازای هر عضو E یک یال بین آن دو رأس رسم می‌کنیم.

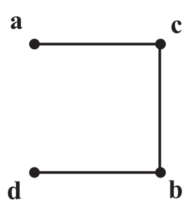
توجه دارید که فاصلهٔ رأس‌ها از یکدیگر و ترتیب قرار گرفتن آن‌ها اهمیت ندارد و در واقع شکل ظاهری گراف‌ها مهم نیست و حتی می‌توان یال‌ها را به‌صورت منحنی نیز رسم کرد.



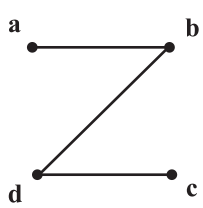
حال این سؤال پیش می‌آید که مثلاً با مجموعهٔ رئوس $V=\{a,b,c,d\}$ چه تعداد گراف ساده می‌توان تعریف کرد؟ برای پاسخ به این سؤال به این نکته توجه داشته باشید که دو گراف که رئوس آن‌ها نام‌گذاری شده است، در صورتی متمایز هستند که مجموعهٔ یال‌های آن‌ها با هم برابر نباشد. در غیر این‌صورت دو گراف، یکسان و یا اصطلاحاً یکریخت هستند. به‌عنوان مثال، در شکل زیر، گراف‌های G_1 و G_2 با هم و G_3 و G_4 نیز با هم یکریخت هستند.



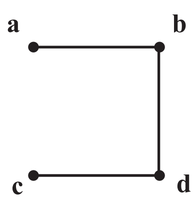
G_1



G_2

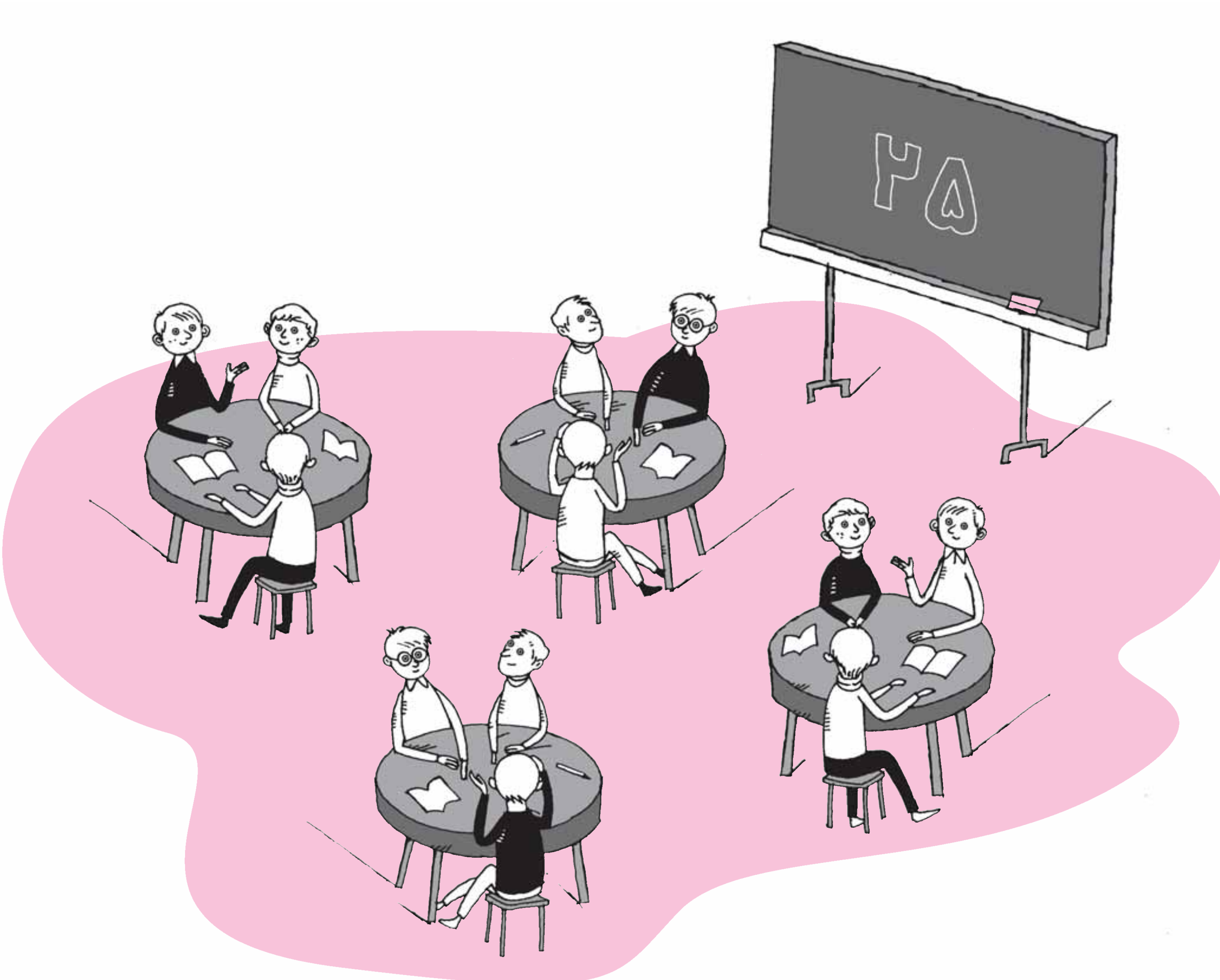


G_3



G_4

اگر رأس‌ها نام‌گذاری نشده باشند، هر چهار گراف، یکریخت هستند.

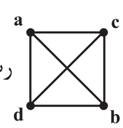


حالا شما جدول زیر را کامل کنید و پس از آن دوباره به سؤال قبل برمی‌گردیم.

V	**{a,b,c,d}**
EG_1	{ac,cb,bd}
EG_2	{ac , ... , ...}
EG_3	{ab , ... , ...}
EG_4	{... , cd , ...}

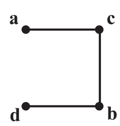
برای رسیدن به پاسخ سؤال، مجموعهٔ همهٔ یال‌های ممکن با مجموعهٔ رئوس $V=\{a,b,c,d\}$، یا به‌عبارت دیگر، همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضویِ V را که

تعدادشان $6=\binom{4}{2}$ است، تشکیل می‌دهیم و نام آن را E_{max} می‌گذاریم؛ یعنی $E_{max}=\{ab,ac,ad,bc,bd,cd\}$.

گراف متناظر با E_{max} به‌صورت 

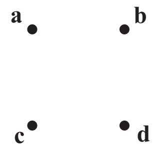
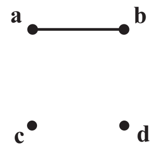
رسم می‌شود.

با کمی دقت مشاهده می‌کنید، هر گرافی که با مجموعهٔ رئوس {a,b,c,d} تعریف شود، با حذف یک یا چند یال از گرافِ متناظر با E_{max} به‌دست می‌آید.

مانند 

که از حذف یال‌های ab، ad و cd به‌دست آمده است. به‌عبارت دیگر، هر زیرمجموعهٔ E_{max} یک گراف ساده با مجموعهٔ رئوسِ V است. تعدادی از زیرمجموعه‌های E_{max} و گراف‌های متناظر با هر یک را در جدول زیر می‌آوریم. شما این جدول را کامل کنید.

نظریهٔ گراف از جمله شاخه‌های مهم در ریاضیات است که کاربردهای بسیاری در علم ریاضی و سایر علوم دارد. امروزه در شیمی، باستان‌شناسی، و ورزش‌های گروهی کاربردهای فراوانی از این شاخهٔ ریاضیات می‌توان مشاهده کرد

مجموعهٔ یال‌ها	$E_۱=\{\ \}$	$E_۲=\{ab\}$	$E_۳=\{ab,cd\}$	$E_۴=\{bc,bd,ad\}...$
گراف				

می‌دانیم که مجموعهٔ ۶ عضویِ E_{max} دارای $۶۴=۲^۶$ زیرمجموعه است و مشاهده کردید که هر زیرمجموعه از این ۶۴ زیرمجموعه یک گراف ساده با مجموعهٔ رئوس V تعریف می‌کند. پس تعداد کل گراف‌های ساده که با مجموعهٔ رئوسِ $V=\{a,b,c,d\}$ می‌توان تعریف کرد، برابر است با $۶۴ = ۲^۶ = ۲^{\binom{۴}{۲}}$. در حالت کلی، اگر تعداد رأس‌ها $|V|=p$ باشد، تعداد کل گراف‌های ساده که با این p رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با عددِ $۲^{\binom{p}{۲}}$.

حال اگر سؤال شود چه تعداد گراف ساده با مجموعهٔ رئوسِ $V=\{a,b,c,d\}$ می‌توان تعریف کرد که همگی آن‌ها دارای یال ab باشند، یا دو رأس a و b در همهٔ آن‌ها مجاور باشند، چه پاسخی می‌دهید؟ درست است. اول یال ab را برای هر یک از زیرمجموعه‌ها انتخاب می‌کنیم. حال اگر از مجموعهٔ ۵ عضویِ $E=\{ac,ad,bc,bd,cd\}$ هر زیرمجموعه‌ای در نظر بگیریم و ab را به آن اضافه کنیم، گرافی تعریف می‌شود که در آن یال ab وجود دارد و تعداد آن‌ها $۳۲ = ۲^{\binom{۴}{۲}-۱}$ است. در حالت کلی، تعداد همهٔ گراف‌های ساده‌ای که با مجموعهٔ رئوس $V=\{V_۱,V_۲,...,V_p\}$ می‌توان نوشت که در همهٔ آن‌ها k یالِ مشخص وجود داشته باشد، از رابطهٔ $۲^{\binom{p}{۲}-k}$ به‌دست می‌آید.

حال برمی‌گردیم به سؤال مربوط به دانش‌آموزان کلاس و دوست بودنِ هر یک از آن‌ها با ۳ نفر از هم‌کلاسی‌های خود. به این منظور به قضیهٔ زیر و نتیجهٔ آن اشاره می‌کنیم:

قضیه: در هر گراف از مرتبهٔ p (دارای p رأس) و اندازهٔ q (دارای q یال)، مجموع درجاتِ رئوس برابر است با دو برابر تعداد یال‌هایِ آن گراف؛ یعنی:

$$\deg V_۱ + \deg V_۲ + ... + \deg V_p = ۲q$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{p} \deg V_i = ۲q$$

نتیجه: در هر گراف از مرتبهٔ p و اندازهٔ q همواره تعداد رأس‌های فرد (رأس‌هایی که درجهٔ آن‌ها فرد است) عددی زوج است.

(این قضیه و نتیجهٔ حاصل از آن در کتاب درسی اثبات شده‌اند.)

به‌عبارت دیگر، براساسِ نتیجهٔ فوق تعداد رأس‌های فرد در یک گراف نمی‌تواند ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا... باشد. برای مثال، آیا می‌توان گرافی با ۲۵ رأس تعریف کرد که درجهٔ هر رأسِ آن ۳ باشد؟ با توجه به توضیح فوق، گرافی که ۲۵ رأس داشته و درجهٔ همهٔ رئوس آن فرد باشد، قابل تعریف نیست. یعنی تعداد رأس‌های فرد (رأس درجهٔ ۳، فرد است) نمی‌تواند فرد باشد. بنابراین اگر هر دانش‌آموز در آن کلاس را یک رأس فرض کنیم و رابطهٔ دوستی بین دو دانش‌آموز را با یک یال نشان دهیم، باید گرافی شاملِ ۲۵ رأس داشته باشیم که هر رأس آن از درجهٔ ۳ (از درجه فرد) باشد و این موضوع طبق نتیجهٔ فوق غیرممکن است. پس پاسخ سؤالِ مذکور منفی است.

همان‌طور که دیدید خیلی کوتاه ولی دقیق به این سؤال پاسخ داده شد. حال شما به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) چه تعداد گراف با مجموعهٔ رئوس $V=\{a,b,c,d,e\}$ می‌توان تعریف کرد که همگی در یال bc مشترک باشند، ولی هیچ‌کدام یال de نداشته باشند؟

ب) چه تعداد گراف با مجموعهٔ رئوس $V=\{a,b,c,d,e\}$ با اندازهٔ ۴ می توان تعریف کرد که در آن‌ها دو رأس b و e مجاور باشند؟

ج) در یک کلاس درس با بیست دانش‌آموز، رابطهٔ دوستی بین دانش‌آموزان را به چند طریق مختلف ممکن است تعریف کرد، اگر بدانیم علی و رضا که دو دانش‌آموز آن کلاس هستند، با هم دوست هستند؟

مردان سرزمین من: پرویز شهریاری

احسان یارمحمدی

* **اسم فیلم:** «مردان سرزمین من: پرویز شهریاری»
* **تهیه‌کننده:** حسین ارسلانی
* **مدت فیلم:** ۱۱ دقیقه
* تهیه شده در گروه علمی، فرهنگی و هنری شبکهٔ خبر سیمای جمهوری اسلامی ایران

فیلم مستند «مردان سرزمین من: **پرویز شهریاری**» به گوشه‌ای از زندگی زنده‌یاد پرویز شهریاری (۱۳۹۱-۱۳۰۵) از زبان ایشان و نیز چند تن از نزدیکان وی می‌پردازد. در این فیلم می‌توانیم صحنه‌هایی از زندگی و دستاوردهای علمی استاد شهریاری، مانند تعدادی از کتاب‌های ترجمه شده توسط وی را مشاهده کنیم. صحنه‌ای نیز به مراسم پنجمین همایش چهره‌های ماندگار که زنده‌یاد شهریاری در آن به‌عنوان چهرهٔ ماندگار رشتهٔ معلمی ریاضی معرفی شده، اختصاص یافته است.

در ادامه به ارائهٔ چند سطر از گفته‌های این استاد فرزانه در فیلم مزبور می‌پردازیم و تمامی شما مخاطبان را به تهیه و تماشای این فیلم مستند تشویق می‌کنیم.

«از دوران نوجوانی علاقه‌مند به کتاب بودم و شروع کردم به کار کتاب، ترجمه کردن و یا تألیف کردن. تا حالا نزدیک به ۳۰۰ کتاب ترجمه و تألیف کرده‌ام. در حدود ۱۰۰۰ مقاله در مجله‌های مختلف نوشته‌ام. از سن ۱۷ سالگی یا بهتر بگویم ۱۸ سالگی کار ترجمه و تألیف را شروع کردم. اولین کتابی که نوشتم، کتاب تاریخی‌ای بود به اسم «جنبش مزدک و مزدکیان» و بعد هم کتاب «تاریخ حساب» را نوشتم و همین‌جور ادامه پیدا کرد تا امروز.

خود من کتاب‌های بسیاری یا ترجمه یا تألیف کرده‌ام، در زمینه‌های مختلف. من جمله در زمینهٔ ادبیات، کتاب‌های بسیاری منتشر کرده‌ام که مجموعاً از نویسندگان برجستهٔ جهان داستان‌هایی را پیدا کردم که فوق‌العاده جالب بوده و ترجمه کرده‌ام.

خیلی نشریه‌ها منتشر کرده‌ام. اولین نشریه‌ای که منتشر کردم، در سن ۱۸ یا ۱۹ سالگی بود. نشریه‌ای بود به اسم «اندیشهٔ ما»، ۱۲ شماره بیشتر منتشر نشد، اما ماهیانه بود. بعد از آن نشریهٔ «سخن علمی» را منتشر کردم که هشت سال منتشر شد. علت تعطیلی‌اش هم این بود که در بهمن‌ماه مرا خواستند. سازمان امنیت مرا خواست. آن موقع بسیاری از روزنامه‌ها و مجله‌ها را سازمان امنیت منتشر می‌کرد. از من هم خواستند که تو هیچ دخالتی در کار نشریه «سخن علمی» نکن، ما آن را منتشر می‌کنیم، ماهی پنج هزار تومان هم به تو می‌دهیم. من گفتم بسیار خوب، اما حالا بهمن‌ماه است. بگذارید تا اسفند، مجله سالیانه‌اش تمام بشود، بعد خیلی خوب. در اسفندماه کاغذی گذاشتم وسط مجله و نوشتم این مجله بعد از این منتشر نخواهد شد. اما بعد از مجلهٔ «سخن علمی»، مجلهٔ «آشتی با ریاضیات» و بعد هم «آشنایی با ریاضیات» را درآوردم که آن‌ها هم ماهیانه بودند و ۷۰ شماره درآمد و در سال ۱۳۷۲ تمام شد. ...»

برای شروع، یک بازی سرگرم‌کننده و خلاق برایتان داریم. این بازی که کمی به بازی معروف «X-O» شباهت دارد، به این صورت انجام می‌گیرد: دو نفر بازیگر به‌ترتیب، عددهای طبیعی فرد (۱ و ۳ و ۵ و...) و زوج (۲ و ۴ و ۶ و...) را در خانه‌های یک جدول قرار می‌دهند. نفر اول با عدد ۱ شروع می‌کند و لذا همهٔ عددهای بعدی‌اش عددهای فرد هستند. نفر دوم هم عددهای زوج را می‌نویسد. تنها یک قانون هم وجود دارد: «هرکس تنها

می‌تواند عدد خود را در یکی از خانه‌های خالی مجاور خانه‌ای که نفر دیگر عدد خود را در آن نوشته، بنویسد» و دو خانه وقتی مجاورند که در یک ضلع مشترک باشند.

بازنده کسی است که وقتی نوبت نوشتنش می‌رسد، هیچ خانهٔ خالی برای نوشتن عددش نداشته باشد. (توجه کنید که این به منزلهٔ پر بودن تمام خانه‌های جدول نیست و این موضوع را در مثال‌هایی که می‌آوریم می‌بینید). برای مثال، فرض کنید دو نفر این بازی را در جدولی ۴×۴ به‌ترتیبی که می‌بینید، انجام داده باشند (خانه‌های با عدد فرد را نفر اول و خانه‌های با عدد زوج را نفر دوم پر کرده است).

چنانچه ملاحظه می‌کنید، اکنون نوبت نفر اول است که عدد ۱۵ را بنویسد، ولی خانهٔ خالی برای این منظور ندارد، پس بازنده است! با اینکه هنوز دو خانهٔ خالی در جدول وجود دارد. یعنی نفر دوم برنده شده است.

۹	۸	۷	۶
۱۰	۱	۲	۵
۱۱	۱۲	۳	۴
۱۴	۱۳		

حالا ببینیم راهبرد برد در این بازی چیست و این یک ایدهٔ ریاضی دارد. برای مثال، اگر نفر دوم عدد ۱۴ را در خانهٔ سمت راست ۱۳ می‌نوشت، چه اتفاقی می‌افتاد؟

بله، با کمی دقت درمی‌یابید که در آن صورت نفر اول برنده می‌شد!

شروع بازی باید چگونه باشد و در ادامه باید چگونه عمل کرد؟ بدیهی است که نفر اول می‌توانست عدد ۱ را در هر یک از ۱۶ خانهٔ جدول قرار دهد. بهترین انتخاب برای او چیست؟ با این انتخاب و این روش که بازنده شد، آیا اشکال از انتخاب اولیهٔ او بود و یا در ادامه دچار اشتباه شد؟ برای پاسخ به این سؤال‌ها، بیایید از حالت‌های ساده‌تر شروع کنیم.

ساده‌ترین حالت، جدول ۱×۲ است. در این حالت واضح است که نفر اول همیشه محکوم به باخت است! (چرا؟) پس به سراغ جدول ۲×۲ برویم. اما باز هم با کمی دقت می‌بینیم که نفر اول همیشه بازنده است! زیرا به‌دلیل تقارن، فرقی نمی‌کند که از کدام خانهٔ جدول شروع کند و مسیر عددگذاری هم صرف‌نظر از اینکه نفر دوم چه خانه‌ای را انتخاب کند، طوری پیش می‌رود که نفر اول نمی‌تواند انتخابی داشته باشد. البته یک موضوع هم روشن است: چون تعداد خانه‌ها زوج است، پس اگر همهٔ خانه‌ها پر شوند (که همیشه این‌طور است)، بدیهی است که نفر دوم آخرین خانه را پر می‌کند و نفر اول می‌بازد. یعنی اگر تعداد خانه‌های جدول فرد باشد و همهٔ خانه‌ها پر شوند، نفر اول برنده می‌شود؛ مانند جدول ۳×۳ زیر:

۱	۲
۴	۳

۱	۲	۳
۸	۹	۴
۷	۶	۵

اما آیا امکان ندارد که در این حالت نفر دوم برنده شود؟ جدول زیر خلاف این موضوع را نشان می‌دهد:

	۲	۱
۴	۳	۸
۵	۶	۷

(دقت می‌کنید که اگر نفر اول عدد ۵ را به‌جای آنکه پایین ۴ بگذارد، بالای آن می‌گذاشت، برنده می‌شد!)

و یا حتی این حالت بسیار ساده‌تر:

(نفر دوم با یک اشتباه سادهٔ نفر اول که ۳ را در سمت چپ ۲ می‌گذارد، برنده می‌شود!)

۴	۱	
۳	۲	

تمرین ۱. نشان دهید در یک جدول ۳×۳ اگر نفر اول عددگذاری را از یکی از گوشه‌ها آغاز کند، همیشه می‌تواند برنده باشد.

تمرین ۲. نشان دهید در یک جدول ۳×۲ همیشه نفر اول بازنده است!

تمرین ۳. نشان دهید در یک جدول ۴×۳، در صورت اشتباه نفر دوم، نفر اول شانس برد دارد و حالت‌هایی از این امر را نشان دهید.

با استفاده از جدول‌های بزرگ‌تر می‌توانید با این بازی لذت‌بخش، حسابی سرگرم شوید. نکتهٔ جالب‌تر آنکه می‌توانید این بازی را سه نفری (یا حتی بیشتر هم) انجام دهید! در این صورت نفر اول مضرب‌های ۳ به اضافهٔ ۱ ($3k+1$)، نفر دوم مضرب‌های ۳ به اضافهٔ ۲ و نفر سوم مضرب‌های ۳ را می‌نویسد. تحلیل راهبردی برد در این حالت‌ها بسیار پیچیده می‌شود. البته باید اضافه کنیم که در این حالت، ابتدا یک نفر بازنده و حذف می‌شود و سپس دو نفر دیگر باید به‌ترتیب در جدول دیگری (یا در خانه‌های خالی همان جدول) بازی کنند تا برندهٔ نهایی مشخص شود.

پرسش‌های پیکارجو!

تعداد چندضلعی‌های منتظمی که اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی آن‌ها عددی طبیعی باشد، چندتاست؟

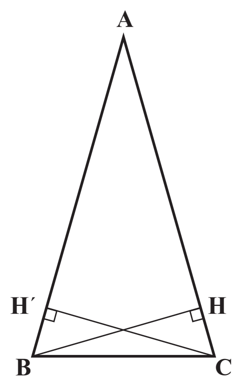
الف) **۱۸** ب) **۱۶** ج) **۲۱** د) **۲۲** هـ) **۲۴**

هوشنگ شرقی

استدلال‌های آسان به‌کمک مساحت‌ها

یکـــی از روش‌های جالـــب برای اســـتدلال و اثبات در هندســـه، اســـتفاده از مفهوم مساحت است و یکی از راهبردهای این روش، راهبرد تعیین مســـاحت از دو راه و معادل قرار دادن آن‌هاســـت. در مقالهٔ حاضر به کمک نمونه‌هـــای زیر این روش را می‌آموزیـــد و در ادامه چند مثال دیگر را که به اتکای مفهوم مساحت به استدلال در هندسه می‌پردازند، ملاحظه می‌کنید.

مثـــال ۱. ثابت کنید هر مثلثی کـــه دو ارتفاع برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

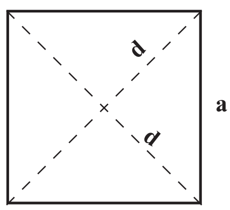


حل: می‌دانیم کـــه در مثلث ABC ارتفاع‌های BH و ´CH برابرنـــد (فـــرض: ´BH=CH و $\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ$) می‌خواهیـــم ثابت کنیـــم: AB=AC. احتمالاً بیشـــتر دانش‌آمـــوزان برای اثبات برابری دو پاره‌خط AB و AC به سراغ استفاده از هم‌نهشتی دو مثلث مناسب می‌روند و البته با این روش مســـئله قابل حل اســـت. اما با توجه به وجود ارتفاع‌ها، به مفهوم مســـاحت نزدیک می‌شویم. بیایید مساحت مثلث ABC را از دو راه به‌دست آوریم و با هم مساوی قرار دهیم:

$$\begin{cases} S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\ldots\times\ldots \\ S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\ldots\times\ldots \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\ldots\times\ldots=\frac{۱}{۲}\ldots\times\ldots$$

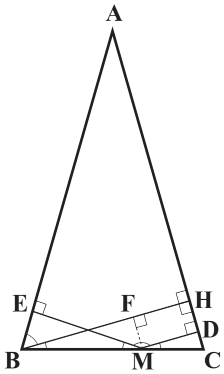
و با توجه به فرض ´BH=CH، نتیجه می‌شود: ... = ... همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این روش استدلال ساده‌تر است.

مثال ۲. بدون اســـتفاده از قضیهٔ فیثاغورس نشـــان دهیـــد که در هر مربع، طـــول قطر، $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع است.



حل: مساحت مربع به ضلع a برابر است با: $S=a^۲$.
امـــا می‌دانیم که مربع نوعی لوزی اســـت که زوایای آن قائمه‌اند. پس به کمک دســـتور مساحت لوزی داریم: $S=\frac{d\times d}{۲}=\frac{d^۲}{۲}$. اکنون با مساوی قرار دادن دو مقدار S، درستی حکم را نتیجه بگیرید.

مثال ۳. ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الســـاقین، مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ دلخواه روی قاعدهٔ مثلث از دو ساق مثلث، مساوی ارتفاع وارد بر ساق است.

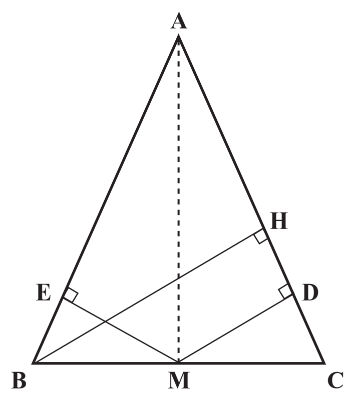


یکی از روش‌های جالب برای استدلال و اثبات در هندسه، استفاده از مفهوم مساحت است و یکی از راهبردهای این روش، راهبرد تعیین مساحت از دو راه و معادل قرار دادن آن‌هاست

حـل: چون ارتفاع‌های وارد بر دو سـاق مثلث با هم مسـاوی‌اند، پس می‌توانیم ارتفاع وارد بـر هر یک از دو سـاق، مثلاً BH را در نظر بگیریم. برای هر نقطهٔ دلخواه M روی قاعدهٔ BC باید ثابت کنیم: MD+ME=BH.

اگـر بخواهیم این مسـئله را به کمک هم‌نهشـتی مثلث‌هـا ثابت کنیم، یک راه این اسـت که از M مطابق شکل، عمود MF را بر BH رسم کنیم. MDHF چه نوع چهارضلعی اسـت؟ MD با کدام پاره‌خط مساوی است؟ پاره‌خط‌های CH و MF چرا موازی‌اند؟ چرا $F\hat{M}B = \hat{C}$ و چـرا $F\hat{M}B = \hat{B}$؟ نشـان دهید مثلث‌هـای FMB و EMB هم‌نهشت‌اند و از آنجا نتیجه بگیرید: ME=FB و سپس درستی حکم را نتیجه بگیرید.

همان‌طـور که می‌بینیـد، این اسـتدلال طولانی و دشوار است و راهبرد مساحت‌های برابر، کار را واقعاً آسان می‌کند. مطابق شکل از A به M وصل می‌کنیم. مساحت مثلث ABC را از دو راه بنویسید:



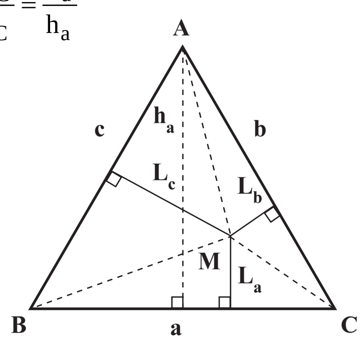
$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times BH \times ... \\ S_{ABC} = S_{AMB} + S_{AMC} = \frac{۱}{۲} ... \times ... + \frac{۱}{۲} ... \times ... \end{cases}$$

حال با مساوی قرار دادن این دو مساحت و با توجه به برابری AC و AB، حکم را ثابت کنید.

مثـال ۴. در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه M را درون مثلث در نظر می‌گیریم. اگر فاصلهٔ این نقطه از سه ضلع مثلـث، L_a، L_b و L_c و ارتفاع‌هـای مثلث نیز h_a، h_b و h_c باشند، ثابت کنید: $\frac{L_a}{h_a} + \frac{L_b}{h_b} + \frac{L_c}{h_c} = ۱$.

حـل: از M بـه سـه رأس مثلث وصـل می‌کنیم. می‌دانیم که اگر دو مثلث قاعده‌های برابری داشته باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها به نسبت ارتفاع‌های آن‌هاست. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{L_a}{h_a}$$



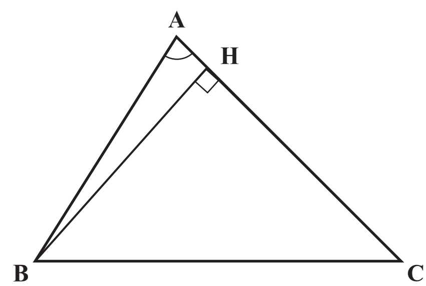
و به‌همین ترتیب: $\frac{L_c}{h_c}=\frac{\dots}{\dots},\frac{L_b}{h_b}=\frac{\dots}{\dots}$

اکنون با جمع‌کردن این سه تساوی با یکدیگر درستی حکم را نشان دهید.

■ تمرین

۱. ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، برابر است با ارتفاع مثلث.

۲. ثابت کنید مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب هر دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین این دو ضلع.

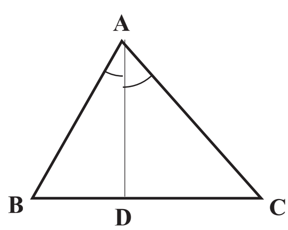


راهنمایی: *در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، sinA را بنویسید و از آنجا BH را به‌دست آورید. سپس به کمک مساحت مثلث از روی ارتفاع BH و قاعدهٔ AC، نتیجه بگیرید:* $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A$. *و به‌همین ترتیب:*

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\dots\times\dots\times\sin B=\frac{1}{2}\dots\times\dots\times\sin C$$

۳. در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ A است. به کمک دستوری که در تمرین ۲ ثابت شد، مساحت مثلث‌های ABC، ADC و ABD را با توجه به رأس A بنویسید. سپس با توجه به اینکه $S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}$ و به کمک دستور مثلثاتی $\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$ ثابت کنید:

$$AD=\frac{2AB.AC.\cos\frac{A}{2}}{AB+AC}$$

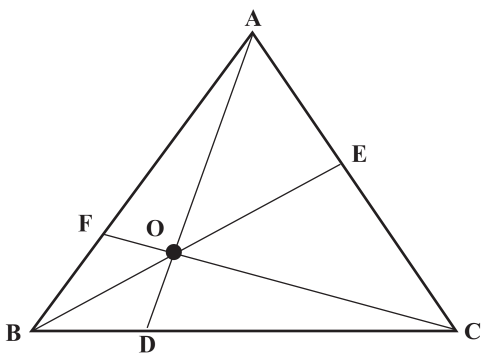


توجه کنید که این دستوری برای محاسبهٔ طول نیمساز یک زاویه در هر مثلث به کمک اندازه‌های اضلاع آن زاویه و اندازهٔ آن زاویه است.

۴. ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر چهارضلعی، در سینوس زاویهٔ بین دو قطر (***راهنمایی:*** *از دستور تمرین ۲ و تجزیهٔ چهارضلعی به چهار مثلث استفاده کنید.*) در حالتی که قطرها بر هم عمود باشند، این دستور به چه صورت درمی‌آید؟

۵. به کمک مسئلهٔ ۳ و نتیجهٔ آن، ثابت کنید هرگاه در مثلث ABC، $\hat{A}=120^\circ$ و AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ باشد، آن‌گاه: $\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

۶. در مثلث ABC سه پاره‌خط دلخواه AD، BE و CF در نقطهٔ O همرس‌اند. مطابق نمونه، جاهای خالی را پر کنید:



$$\frac{BD}{CD}=\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}},\frac{BD}{CD}=\frac{S_{OBD}}{S_{OCD}}$$

$$\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{S_{ABD}-S_{OBD}}{S_{ACD}-S_{OCD}}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$$

$$\frac{CE}{EA}=\frac{\dots}{\dots},\frac{CE}{EA}=\frac{\dots}{\dots}\Rightarrow\frac{CE}{EA}=\frac{\dots-\dots}{\dots-\dots}=\frac{\dots}{\dots}$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{\dots}{\dots},\frac{AF}{FB}=\frac{\dots}{\dots}\Rightarrow\frac{AF}{FB}=\frac{\dots-\dots}{\dots-\dots}=\frac{\dots}{\dots}$$

$$\Rightarrow\frac{BD}{CD}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}\times\frac{\dots}{\dots}\times\frac{\dots}{\dots}=1$$

توجه کنید که رابطهٔ فوق برای هر سه پاره‌خط همرس در مثلث برقرار است و به «قضیهٔ سه‌وا» شهرت دارد. عکس این قضیه هم برقرار است و کاربردهای زیادی هم دارد.

احسان یارمحمدی

لطایف‌الحساب

(رساله‌ای دربارهٔ سرگرمی‌های ریاضی)

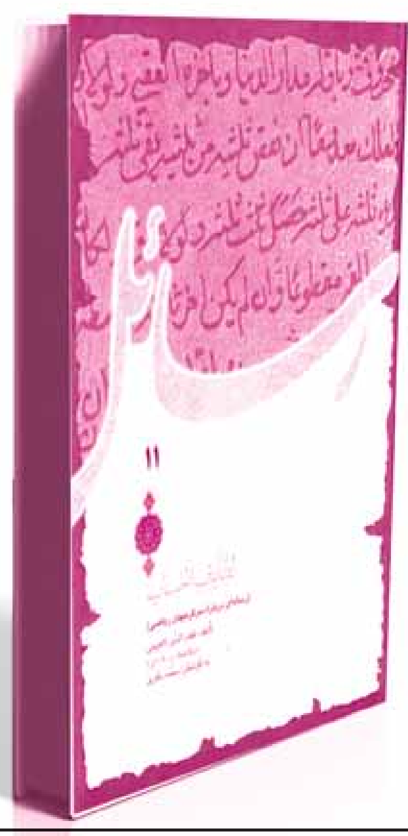
- **مؤلف:** قطب‌الدین لاهیجی
- **تدوین:** محمد باقری
- **ناشر:** مرکز پژوهشی میراث مکتوب (چاپ اول: ۱۳۸۹)

«لطایف‌الحساب» چهار قرن پیش، یعنی در عهد صفویه، به فارسی و همراه با قطعاتی عربی، دربارهٔ سرگرمی‌های ریاضی نوشته شده است. **قطب‌الدین لاهیجی**، فیلسوف، فقیه و دانشمند عهد صفویه، لطایف‌الحساب را در سال ۱۰۲۰ هجری قمری هنگامی که از اصفهان به لاهیجان برگشته بود، نگاشت. لطایف‌الحساب شامل دیباچه، مقدمه، دو مقاله و یک خاتمه است. قطب‌الدین لاهیجی پس از حمد خدا و ثنای رسول، شرح می‌دهد که این کتاب را پس از بازگشت از اصفهان، پایتخت آن روزگار، به زادگاهش لاهیجان، به‌نام **میرزا محمد رضی**، مستوفی دارالسلطنهٔ اصفهان، و دوست او **محمد نصیر**، تألیف کرده است.

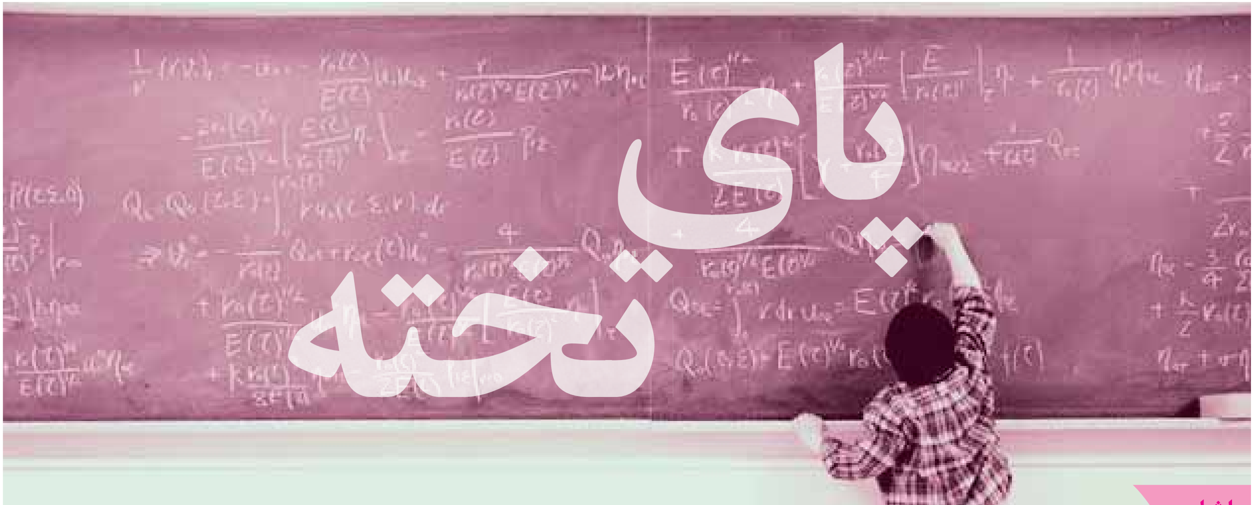
مقدمهٔ کتاب شامل یادآوری برخی اعمال و دستورها و مفهوم‌های حساب است؛ از قبیل تناسب، نسبت تألیفی بین سه عدد، چگونگی یافتن عدد سوم با داشتن دو عدد از سه عدد متناسب، جذر و مجذور، کعب و مکعب و توان‌های بالاتر، اعداد گویا و گنگ، اعداد مسطح و مجسم، اعداد مربع، اعداد زاید و ناقص، عدد مساوی (تام یا کامل)، عدد اصم یا مسدود (عدد اول) و عدد منطق یا مفتوح یا گشاده (عدد غیر اول یا عدد مرکب).

مقالهٔ اول دربارهٔ چگونگی پی‌بردن به این است که چیزی در کدام دست طرف مقابل پنهان شده یا اینکه طرف مقابل چه عددی را در ذهن اختیار کرده است. در واقع مقالهٔ اول کتاب شامل دو باب «خبایا» و «مُضمَرات» است. «خبایا» (جمع خَبی) مسائلی هستند مربوط به معلوم کردن یکی از دو دست که چیزی در آن مخفی شده است. این باب شامل هفت لطیفه است و در بسیاری از موارد، طبق معمول آن دوره، روش حل مسئله به‌صورت شعر نیز بیان شده است. «مُضمَرات» مسائلی هستند دربارهٔ یافتن عددی که کسی در ذهن اختیار کرده، یا رابطه‌ای که عددی برمبنای آن تقسیم شده است. مثلاً اگر عددی را به سه قسمت کنند و به سه نفر بدهند، چه‌طور بدانیم عدد هر کدام چند است.

مقالهٔ دوم دربارهٔ حل مسئله‌های گوناگون حساب و تعیین مجهول‌های عددی به کمک مقادیر عددی معلوم و شامل ۴۳ مسئله است. برای مثال، لطیفهٔ پنجم از این قرار است: دو نفر می‌خواستند با هم غذا بخورند، یکی ۵ قرص نان و دیگری ۳ قرص نان در سفره گذاشت. نفر سومی هم با آنان هم سفره شد که با خود هیچ نانی نداشت، ولی به آن دو ۸ دینار داد تا بین خود تقسیم کنند. مشابه این مسئله در کتاب «سرگرمی‌های ریاضی» نوشتهٔ **یاکوب پرلمان** ـ اهل روسیه که در جریان محاصرهٔ لنینگراد و هنگام کار در کارخانه بر اثر گرسنگی جان سپرد ـ آورده شده است. در آنجا سه نفر شبی در یک کلبهٔ ییلاقی به‌سر می‌برند، یکی از آن‌ها ۵ هیزم و دیگری ۳ هیزم با خود آورده بود تا در بخاری بسوزانند و نفر سومی که هیزم نیاورده بود، ۸ واحد پول می‌پردازد تا آن دو بین خود تقسیم کنند. این شباهت به‌ویژه از لحاظ پیگیری پیوندهای فرهنگ ریاضیات در سرزمین‌های مختلف اهمیت دارد. حل همین مسئلهٔ ۵ نان و ۳ نان در کتاب «الحق المبین» نوشتهٔ **شیخ ذبیح‌الله محلاتی** به نقل از چند منبع قدیمی به حضرت علی(ع) نسبت داده شده است و از داوری‌های مهم آن حضرت به‌شمار آمده است.



دکتر محرم نژاد ایردموسی



پای تخته

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

■ بخش اول: مسئله‌ها

۱۳۱. بدون استفاده از ماشین حساب عدد ۱۵۹۹۹۹ را به عامل‌های اول تجزیه کنید.

۱۳۲. همهٔ مقادیر صحیح n را بیابید، به‌طوری که حاصل $\frac{n^3+8}{n^2-4}$ مقداری صحیح داشته باشد.

۱۳۳. a و b دو عدد حقیقی هستند. اگر $a+b$، a^2+b و $a+b^2$ گویا باشند و $a+b\neq 1$، آن‌گاه ثابت کنید a و b گویا هستند.

۱۳۴. a و b دو عدد حقیقی هستند. اگر a^2+b^2، a^3+b^3 و a^4+b^4 گویا باشند، ثابت کنید a+b و ab گویا هستند.

۱۳۵. برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:
$[2a]+[2b]\ge[a]+[b]+[a+b]$ ($[x]$= جزء صحیح x).

۱۳۶. ثابت کنید $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ عددی گویاست.

۱۳۷. x، y و z سه عدد حقیقی مختلف هستند. ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}\neq 0$$

۱۳۸. مکان هندسی نقاطی مانند (x,y) را پیدا کنید که در تساوی $x^3+y^3+3xy=1$ صدق می‌کنند.

۱۳۹. برای هر دو عدد حقیقی a و b و هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

۱۴۰. به ازای هر عدد صحیح n، نشان دهید n^4-22n^2+9 مرکب است.

■ بخش دوم: راه‌حل‌ها

۷۱. شعاع کوچک‌ترین کره‌ای را بیابید که ۴ کره به شعاع ۱ در آن محاط شوند.

اگر مراکز چهار کره به شعاع ۱ به‌هم وصل کنیم، یک چهاروجهی منتظم با ضلع ۲ سانتی‌متر خواهیم داشت.

شعاع دایرهٔ محیطی این چهاروجهی منتظم را محاسبه و با یک جمع می‌کنیم تا شعاع دایرهٔ خواسته شده به‌دست آید.

۷۲. با فرض $|x|<1$، مطلوب است حاصل عبارت: $S=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)\ldots$.

$$S=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\ldots$$
$$=\frac{1-x^2}{1-x}\times\frac{1-x^4}{1-x^2}\times\frac{1-x^8}{1-x^4}\times\ldots=\frac{1}{1-x}$$

۷۳. بزرگ‌ترین مقدار K را بیابید، به‌طوری که !۱۰۰ بر 24^K بخش‌پذیر باشد.

$24^K=2^{3K}\times3^K$. از طرفی !۱۰۰ در تجزیه به عامل‌های اول بر $2^{97}\times3^{48}$ بخش‌پذیر است. در نتیجه باید $K\le48$ و $3K\le97$ و بیشترین مقدار K برابر است با ۳۲.

۷۴. عدد ۶ رقمی N حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی زوج و متوالی است و می‌دانیم دو رقم اول و آخر آن برابر است با ۲. N را پیدا کنید.

$$200002\le 2K(2K-2)(2K+2)\le 299992$$
$$\Leftrightarrow 200002\le 8(K^3-K)\le 299992$$
$$\Leftrightarrow 25001\le K^3-K\le 37499$$
$$\Rightarrow 30\le K\le 33\Rightarrow N=8(33^3-33)=287232$$

نتیجه‌گیری آخر با امتحان کردن چهار مقدار K به‌دست می‌آید.

۷۵. دایره‌ای به شعاع ۳ از مرکز مربعی به ضلع ۲ می‌گذرد. مطلوب است تفاضل مساحت دو ناحیهٔ S_1 و S_2 به‌طوری که S_1 قسمتی از دایره است که با مربع پوشیده نشده است و S_2 قسمتی از مربع است که با دایره پوشیده نشده است.

اگر مساحت ناحیهٔ مشترک دایره و مربع را S_0 بنامیم، آن‌گاه: $S_1-S_2=(S_1+S_0)-(S_0+S_2)=9\pi-4$

۷۶. حاصل کسر نامتناهی زیر را به‌دست آورید (این کسر را کسر مسلسل می‌نامند).

$$A=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\ldots}}}}$$

با توجه به مقدار A داریم:

$$A=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{A}}=1+\frac{A}{A+2}$$

در نتیجه: $A^2+2A=2A+2$ و یا: $A^2=2$. بنابراین: $A=\sqrt{2}$.

۷۷. مطلوب است بزرگ‌ترین عدد طبیعی N به‌طوری که m^5-5m^3+4m به ازای هر $m\ge5$، بر N بخش‌پذیر باشد.

داریم: $m^5-5m^3+4m=(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)$.
پس این عبارت حاصل‌ضرب پنج عدد متوالی است.

از طرف دیگر، سمت راست عبارت فوق برابر است با: $5!\binom{m+2}{5}$. در نتیجه این عبارت بر !۵ یا ۱۲۰ بخش‌پذیر است. همچنین، N عامل اولی بزرگ‌تر از ۵ ندارد، چون می‌توان پنج عدد متوالی یافت که حاصل‌ضرب آن‌ها بر عدد اول مفروضی بزرگ‌تر از ۵ بخش‌پذیر نباشد. به‌علاوه، توان ۲ در N نمی‌تواند بیشتر از ۳ باشد. چون اگر m فرد باشد، تنها $m-1$ و $m+1$ زوج هستند و حاصل‌ضرب این پنج عدد متوالی مضرب ۸ است و مضرب ۱۶ نیست. به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد توان ۳ و ۵ در N بیشتر از یک نیست. در نتیجه بیشترین مقدار N برابر ۱۲۰ است.

۷۸. معادلهٔ $x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ را حل کنید.

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{(x-\frac{1}{x})-(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$$

در نتیجه با جمع این معادله با معادله اولیه خواهیم داشت:

$$2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+x\Rightarrow x-\frac{1}{x}+1-2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-1\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x-\frac{1}{x}}=1\Rightarrow x-\frac{1}{x}=1$$
$$\Rightarrow x^2-1=x\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

پاسخ $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ غیرقابل قبول است (چرا؟)

۷۹. دنبالهٔ $\{a_i\}$ به‌صورت $a_i=2a_{i-1}+k$ تعریف شده است، به‌طوری که $a_2=5$ و $a_8=257$. جملهٔ پنجم دنباله را به‌دست آورید.

$$a_n+k=2(a_{n-1}+k)\Rightarrow a_n+k=2^{n-2}(a_2+k)$$
$$\Rightarrow a_n=5\times2^{n-2}+k(2^{n-2}-1)$$

اما: $a_8=257$. پس: $257=a_8=5\times64+63k$ که نتیجه می‌دهد: $k=-1$. یعنی: $a_n=2^n+1$. پس: $a_5=33$.

۸۰. کم‌تریــن مقدار طبیعی x را بیابید، به‌طوری که $x^۲+x+۴۱$ اول نباشد.

کمتریــن مقدار طبیعــی x با فــرض مرکب بودن $x^۲+x+۴۱$ برابر اســت با: ۴۰. چون: $۴۱^۲=۴۱+۴۰+۴۰^۲$. از طرف دیگر، حاصل عبارت فوق به ازای همهٔ مقادیر ۰ تا ۳۹ اول اســت! این محاسبات اولین‌بار توسط اویلر در سال ۱۷۷۲ انجام شده است.

۸۱. در یــک نه‌ضلعــی منتظم، همهٔ قطرها را رســم کرده‌ایم. چند مثلث متساوی‌الساقین در شکل حاصل وجود دارد که سه رأس هر یک، سه رأس از نه‌ضلعی مذکور است.

برای شــمارش مثلث‌های متساوی‌الســاقین، ابتدا رأس مشــترک دو ساق را انتخاب می‌کنیم که برای این کار ۹ انتخاب وجود دارد. ســپس دو رأس پای ساق‌ها را انتخــاب می‌کنیم که برای این‌کار ۴ انتخاب وجود دارد. در نتیجه ۴×۹ مثلث متساوی‌الســاقین شمرده می‌شود. اما مثلث‌های متســاوی‌الاضلاع را سه بار شمرده‌ایم. در نتیجه جواب صحیح ۲×۳-۳۶=۳۰ خواهد بود.

۸۲. اشــکان در کشــوی کمد خــود ۱۰ لنگه جوراب آبــی و تعدادی لنگه جوراب ســفید دارد. اگر او بدون نگاه کردن بــه جوراب‌ها بخواهد تعدادی لنگــه جوراب از کشــو خارج کنــد، به‌طوری که قطعاً یک جفت جوراب آبی در میان آن‌ها باشد، باید حداقل m لنگه جوراب از کشو خارج کند و در صورتی که بخواهد بدون نگاه کردن تعدادی لنگه جوراب بردارد، به‌طوری که قطعاً یک جفت جوراب سفید در میان آن‌ها باشد، باید حداقل n لنگه جوراب از کشو خارج کند. می‌دانیم m=۲n. چند لنگه جوراب سفید در کشو وجود دارد؟

فرض کنید تعداد لنگه جوراب‌های سفید k باشد. برای داشتن یک جفت جوراب آبی باید m=k+۲ لنگه و برای داشتن یک جفت جوراب سفید، باید n=۱۲ لنگه از کشو برداریم. چون m=۲n، پس: k+۲=۲×۱۲. در نتیجه: k=۲۲.

۸۳. نقطــهٔ E روی ضلع CD از مربع ABCD واقع اســت. پاره‌خط AE توســط نقاط P، R و T به چهار قســمت مساوی و پاره‌خط EB نیز توسط نقاط Q، S و U به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. اگر طول پاره‌خط PQ برابر ۳ باشد، مساحت چهارضلعی PQUT را به‌دست آورید.

با نوشتن رابطهٔ **تالس** در مثلث AEB خواهیم داشت: $\frac{۳}{۴}=\frac{PQ}{AB}$. در نتیجه: AB=۴. همچنین: $\frac{۱}{۴}=\frac{TU}{AB}$ که نتیجــه می‌دهد: TU=۱. مجدداً اگر از E عمودی بر AB رســم کنیم، ارتفاع چهارضلعی TUQP برابر ۲ به‌دست خواهد آمد. در نتیجه مســاحت PQUT برابر اســت با: $\frac{۱+۳}{۲}\times ۲=۴$.

۸۴. افســانه ۶ کارت دارد که روی هر کدام از آن‌ها یک عدد طبیعی نوشته شده است. او هربار سه کارت را انتخاب می‌کند و سه عدد روی آن سه کارت را با هم جمع می‌کند. بیست عدد حاصل می‌شــود که ده‌تای آن‌ها برابر ۱۶ و ده‌تای دیگر برابر ۱۸ هســتند. کوچک‌تریــن عددی که روی کارت‌ها نوشته شده است چه عددی است؟

فرض کنید شش عدد روی کارت‌ها $a\le b\le c\le d\le e\le f$ باشــند. در نتیجه: a+b+c=۱۶ و d+e+f=۱۸. از این دو نتیجه می‌شــود کــه: c≥۶ و d≤۶. پس: c=d=۶. از d=۶ نتیجه می‌شود: e+f=۱۲ و چون: ۶≤e، پس: e=f=۶. از c=۶ نتیجه می‌شــود: a+b=۱۰. دو حالت برای b وجود دارد یا b=۶ و a=۴ که در شرایط مسئله صدق می‌کنند و یا a=b=۵ که در شــرایط مسئله صدق نمی‌کنند. پس شش عدد روی کارت‌ها عبارت‌اند از: ۶، ۶، ۶، ۶، ۶ و ۴.

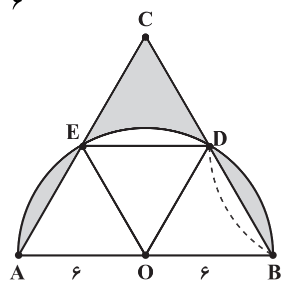
۸۵. اگــر تعــداد اعداد پنج رقمــی که حاصل‌ضرب رقم‌های هر یک برابر ۲۵ است، برابر a و تعداد اعــداد پنج رقمی که حاصل‌ضــرب رقم‌های هر یک برابر ۱۵ است، برابر b باشد، $\frac{a}{b}$ را بیابید.

برای اینکه حاصل‌ضرب پنج رقم برابر ۲۵ باشد، تنها حالت ممکن این اســت که رقم‌ها برابــر ۱، ۱، ۱، ۵ و ۵ باشند که در این صورت $\binom{۵}{۲}=۱۰$ عدد با این ارقام وجود دارند. پس: a=۱۰. اما اگر حاصل‌ضرب ارقام ۱۵ باشد، تنها حالت ممکن برای رقم‌ها این است که رقم‌ها برابر ۱، ۱، ۱، ۳ و ۵ باشند و تعداد اعداد پنج‌رقمی با این ارقام برابر b=۲۰=۵×۴ خواهد بود. در نتیجه: $\frac{a}{b}=\frac{۱}{۲}$.

۸۶. نیم‌دایــره‌ای به قطر AB رســم کنید. همچنین، مثلــث متســاوی‌الاضلاع ABC را طوری رســم کنیــد که نیم‌دایــره را در دو نقطهٔ دیگر به‌جز A و B قطع کند. یک ناحیهٔ مشــترک و ســه ناحیهٔ غیرمشترک ایجاد می‌شوند. مجموع مساحت سه

ناحیهٔ غیرمشترک را بیابید، اگر بدانیم: AB=۱۲.

اگر مساحت ناحیهٔ غیرمشترک خارج نیم‌دایره برابر $S_۱$ و مســاحت دو ناحیهٔ دیگــر را $S_۲$ بنامیم، به‌راحتی از شــکل معلوم می‌شــود که: $S_۱+۲S_۲$ برابر مساحت قطاع OBD خواهد بود که برابر است با: $\frac{۱}{۶}\pi\times ۶^{۲}=۶\pi$.



۸۷. مستطیلی با ابعاد صحیح به مربعات واحد افراز شده اســت. می‌دانیم تعداد مربعات واحدی که مجاور با ضلع‌های مســتطیل هســتند، با تعداد بقیهٔ مربعات برابر اســت. این مستطیل چند در چند است؟

اگر m و n طول و عرض مستطیل باشند، آن‌گاه طبق فرض مســئله داریم: $mn=۲((m-۲)(n-۲))$، که پس از ســاده کردن به تساوی $(m-۴)(n-۴)=۸$ تبدیل می‌شود. در نتیجه: $n-۴=۸$ و $m-۴=۱$ یا: $n-۴=۴$ و $m-۴=۲$. پس مستطیل ۱۲×۵ یا ۸×۶ خواهد بود.

۸۸. عمــل ⊙ روی اعداد مثبت طوری تعریف شــده است که داشته باشیم:

$$(۱)\ (۲x)\odot y=\frac{۱}{۲}+(x\odot y)$$

$$(۲)\ y^{۲}\odot x=x^{۲}\odot y$$

$$(۳)\ ۲\odot ۲=\frac{۳}{۲}$$

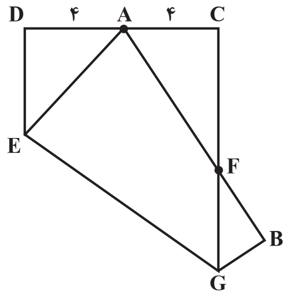
مقدار ۳۲⊙۸ را بیابید.

$$۳۲\odot ۸=۱۶\odot ۸+\frac{۱}{۲}=۸\odot ۸+۱=۴\odot ۸+\frac{۳}{۲}$$

$$=۸^{۲}\odot ۲+\frac{۳}{۲}=۳۲\odot ۲+۲=۱۶\odot ۲+\frac{۵}{۲}$$

$$=۸\odot ۲+۳=۴\odot ۲+\frac{۷}{۲}=۲\odot ۲+۴=۵/۵$$

۸۹. کاغذی مربع شکل به ضلع ۸ سانتی‌متر داریم. اگر کاغذ را تا کنیم و رأس A را روی نقطهٔ وسط پاره‌خط DC قرار دهیم، مثلث کوچکی در رأس B ایجاد می‌شود (شکل). مساحت این مثلث را بیابید.



داریم: $AE+ED=۸$ و $۴^{۲}+DE^{۲}=AE^{۲}$. با حل این دو رابطه در یک دســتگاه، مقادیر $DE=۳$ و $AE=۵$ حاصل می‌شوند. چون مثلث‌های ADE، ACF و GFB متشابه هســتند، با نوشــتن روابط تشــابه مقادیر $CF=\frac{۱۶}{۳}$ و $AF=\frac{۲۰}{۳}$ به‌دست می‌آیند. در نتیجه: $FB=\frac{۴}{۳}$. مجدداً با نوشتن روابط متشــابه داریم: $\frac{۴}{FB}=\frac{۳}{BG}$. در نتیجه: $BG=۱$ و مساحت مثلث FGB برابر $\frac{۲}{۳}$ به‌دست می‌آید.

۹۰. کارتــی بــا شــمارهٔ ۱۲ به تو می‌دهــم. با رعایت ۲ قاعدهٔ زیــر می‌توانی کارت‌هــای دیگری نیز داشته باشی:

۱. اگر کارتی با شمارهٔ a داشتی، می‌توانی کارتی با شمارهٔ ۲a+۱ نیز داشته باشی.

۲. اگر کارتی با شــمارهٔ b داشــته باشــی که a مضرب ۳ باشــد، آن‌گاه مجاز هستی کارتی با شمارهٔ $\frac{b}{۳}$ هم داشته باشی.

الــف. ثابت کن می‌توانی کارتی با شــمارهٔ ۲۹ داشته باشی.

ب. ثابت کن می‌توانی کارتی با شمارهٔ $۲^{۲۰۱۲}-۱$ داشته باشی.

ج. ثابــت کــن نمی‌توانی کارتی با شــمارهٔ ۱۰۰ داشته باشی.

الف) دنبالهٔ ۱۲، ۴، ۹، ۳، ۷، ۱۵، ۳۱، ۶۳، ۲۱، ۴۳، ۸۷ و ۲۹ را در نظر بگیرید.

ب) دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$۱۲,۴,۹,۳,۷=۲^{۳}-۱,۱۵=۲^{۴}-۱,\ ۳۱=۲^{۵}-۱,\ ۶۳=۲^{۶}-۱,\ ...,\ ۲^{۲۰۱۲}-۱$

ج) در اســتفاده از قاعدهٔ ۱، حاصل همیشه عددی فرد است. از طرف دیگر، قاعدهٔ ۲ نیز عامل ۲ را از بین نمی‌برد. در نتیجه تنها در صورتی می‌توانیم به عدد ۱۰۰ برســیم که عدد ابتدایی مضرب ۴ باشد که این‌طور نیست.

سال‌ها پیش از این در شهری دوردست، حاکم شه
برای زنده ماندن می‌داد. قاضی دســتور می‌داد که در ی
کاملاً یکسان وجود داشت به محکوم به مرگ بدهند.
سر می‌کشید. در یکی از دو جام سمی کشنده و در د
با احتمال ۵۰ درصد می‌توانست زنده بماند.

اما در مورد ۱۲ تن از محکومین که به‌نظر می‌رسید
هر دو جام آن‌ها جملاتی نوشته شده بود و قاضی به ب
محکوم می‌توانســت بفهمد که جام شــربت کدام اسـ
باشند. در نتیجه محکوم می‌توانست هیچ‌یک را ننوش
ممکن بود در هر دو جام شربت ریخته باشند که در ای

حالا آنچه را که برای پنج محکوم نخســت اتفاق ا
می‌کنیم تا محکومین را به‌درســتی راهنمایی کنید. م
ببینید

معمای اول

برای محکوم اول دو جام آوردند که روی اولی نوشته شد
و روی دومی نوشته شده بود: «در یکی از این دو جام، شربت
قاضی به محکوم گفت که یکی از این نوشته‌ها درست و

معمای دوم

برای محکوم دوم دو جام آوردند. روی جام اول نوشته ش
«لااقل یکی از این دو جام محتوی شــربت اســت» و رو
«این نوشته‌ها یا هر دو راست و یا هر دو دروغ‌اند.» محکوم با

معمای سوم

برای محکوم سوم نیز به همان ترتیب دو جام آوردند. رو
دیگر شربت است.» روی دومی هم نوشته شده بود: «در جام
محکوم چه تصمیمی می‌تواند بگیرد؟

معمای چهارم

برای محکوم چهارم نیز به همان صورت دو جام آوردند. ر
اســت» و روی دومی هم همین نوشــته وجود داشت و قاضی
جملهٔ روی آن درســت اســت ولی اگر زهر وجود داشته باش
اگر زهر در جام باشد، جملهٔ روی آن درست و اگر شربت در آ

معمای پنجم

برای محکوم پنجم نیز به همان صورت دو جام آوردند و ر
شربت است.» و روی دومی نوشته شده بود: «جام اول شامل
محکوم کدام جام را سر بکشد؟

هر به کسانی که محکوم به مرگ شده بودند، فرصتی
یک سینی دو جام کاملاً مشابه که در آن‌ها دو مایع
محکوم باید یکی از دو جام را انتخاب می‌کرد و آن را
یگری شربتی گوارا وجود داشت! در این حال محکوم

کمتر گناهکار باشند، ارفاق مهم دیگری هم شد: روی
عضی از سؤالات آن‌ها هم پاسخ می‌داد. به این ترتیب
ست! علاوه بر آن، ممکن بود در هر دو جام زهر ریخته
د و تقاضای دو جام دیگر بکند. در حالت ایده‌آل هم
ن صورت محکوم بی‌نهایت خوش‌حال می‌شد!
فتاد، در قالب پنج معما برایتان در این شماره مطرح
اجرای بقیهٔ محکومین را می‌توانید در شماره‌های بعد

ه بود: «در این جام شربت و در جام دیگر زهر وجود دارد»
و در دیگری زهر وجود دارد.»
دیگری نادرست است. محکوم باید کدام جام را بنوشد؟

ده بود:
ی دومی نوشته بود: «زهر در جام دیگر است.» قاضی گفت:
ید کدام جام را سر بکشد؟

ی اولی نوشته شده بود: «یا در این جام زهر است یا در جام
دیگر شربت است.» قاضی همان توضیح معمای دوم را داد.

وی اولی نوشته شده بود: «در هر دو جام شربت ریخته شده
ی توضیح داد که در جام اول، اگر شربت وجود داشته باشد،
د، جملهٔ آن نادرست است. ولی در جام دوم برعکس است و
آن باشد، جملهٔ آن نادرست است. محکوم چه باید بکند؟

وی جام اول نوشته شده بود: «لااقل یکی از دو جام محتوی
ی شربت است.» قاضی همان توضیح معمای چهارم را دارد.

۲
پرسش‌های پیکارجو!

در مربعی به ضلع واحد، حداقل چند نقطه را باید علامت زد تا بتوان حکم کرد که حتماً سه نقطه یافت می‌شوند که درون دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{7}$ جای می‌گیرند؟

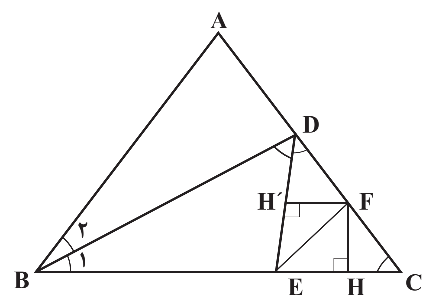
الف) **۱۷** ب) **۲۶** ج) **۵۱** د) **۳۳** هـ) **۷۳**

مسائل برای حل

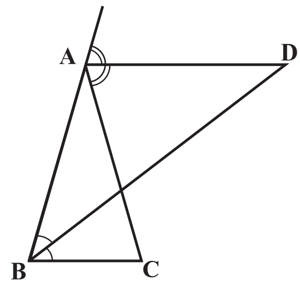
هندسه ۱

۱. مجمـــوع اندازه‌هـــای چنـــد زاویـــه، 100° و مجموع اندازه‌هـــای متمم‌هـــای آن‌ها 350° اســـت. تعداد این زاویه‌ها چندتاست؟

۲. در شـــکل زیـــر، در مثلـــث متساوی‌الســـاقین ABC $(AB=AC)$، BD نیمساز زاویهٔ B، DE نیمساز زاویـــهٔ BDC و EF نیمســـاز زاویهٔ DEC اســـت. از F عمودهای FH و FH' را بر EC و ED رســـم کرده‌ایم. اگر $CH=DH'$، اندازهٔ $\hat{A}$ را به‌دست آورید.



۳. در مثلث ABC نیم‌ساز زاویهٔ داخلی B و نیم‌ساز زاویهٔ خارجی A، یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کرده‌اند. ثابت کنید اگر $AD = AB$ باشـــد، ABC متساوی‌الساقین است.



هندسه ۲

۱. در مثلث ABC، نقطهٔ D واقع بر BC، چنان است که داریم: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$. ثابت کنید AD نیمســـاز زاویهٔ A است.

۲. طول قطرهای AC و BD از متوازی‌الاضلاع ABCD به‌ترتیب مساوی ۶Cm و ۱۲Cm است. اگر M وسط BC، DM=۹Cm، P نقطهٔ برخورد DM و AC، و O مرکز متوازی‌الاضلاع باشد، محیط مثلث ODP را به‌دست آورید.

۳. در مثلث متساوی‌الساقینی که زاویهٔ رأس آن 120° و طول ساق آن $2\sqrt{6}$ است، طول نیم‌ساز زاویهٔ مجاور به ساق را به‌دست آورید.

ریاضی ۲

۱. ثابت کنید هر دنباله‌ای که جملهٔ عمومی آن نسبت به n از درجهٔ اول باشد، یک دنبالهٔ حسابی است.

۲. میانگین حســـابی دو عدد، دو برابر میانگین هندسی آن‌هاست. نسبت دو عدد را به‌دست آورید.

۳. ثابت کنید هیچ دنبالهٔ هندسی وجود ندارد که ۴ و ۶ و ۸ سه جمله از آن باشند.

حسابان

۱. نســـبت مجموع n جملهٔ نخست از دو دنبالهٔ حسابی برابر $\frac{7n+1}{4n+27}$ است. نسبت جملات یازدهم دو دنباله را به‌دست آورید.

۲. روی منحنی تابع f سه نقطهٔ A، B و C به طول‌های

a، b و c مفروض‌اند و می‌دانیم طول‌های این نقاط جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند. ثابت کنید شیب‌های خطوط AB، AC و BC نیز جملات متوالی یک دنباله حسابی‌اند.

۳. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-x-2=0$ باشند، حاصل $\alpha^7+\beta^7$ را به‌دست آورید.

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x، $x\times 0=0$.

۲. ثابت کنید $\log(\sqrt{2}+1)$ عددی گنگ است.

۳. در دنبالهٔ $a_n=\dfrac{(1/01)^n}{n^2+1}$ کوچک‌ترین جمله کدام است؟

ریاضیات عمومی چهارم تجربی

۱. دو تاس آبی و قرمز را با هم می‌ریزیم. پیشامد A را این‌طور تعریف می‌کنیم که مجموع دو تاس ۷ و پیشامد B را این‌طور تعریف می‌کنیم که تاس آبی ۶ بیاید. مستقل یا وابسته بودنِ A و B را بررسی کنید.

۲. در جعبهٔ A_1، ۳ مهره قرمز و ۲ مهرهٔ آبی و در جعبهٔ A_2، ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی و در جعبهٔ A_3، تعداد مهره‌های آبی و قرمز برابر است. یکی از این سه جعبه را به تصادف انتخاب و ۱ مهره از آن خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد این مهره قرمز باشد؟

۳. ۳۰ درصد از دانش‌آموزان یک دبیرستان عینک به چشم می‌زنند. اگر از بین ۲۰ نفر از آن‌ها به تصادف ۷ نفر را انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد همگی عینکی باشند؟

هندسه تحلیلی و جبر خطی

۱. اگر داشته باشیم: $|\vec{a}|=3$، $|\vec{b}|=5$، $|\vec{c}|=7$ و $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$، در این صورت زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

۲. به روش برداری ثابت کنید: اگر وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی محدب را به‌هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک متوازی‌الاضلاع است.

۳. اگر $\alpha=30$ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های به‌ترتیب ۲ و ۳ باشد، حاصل $\left|(3\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}+3\vec{b})\right|$ را بیابید.

ریاضیات ۳ تجربی

۱. سه تاس را با هم می‌ریزیم چه‌قدر احتمال دارد:

الف) اعداد رو شده متمایز باشند.

ب) مجموعِ سه عدد رو شده کمتر از ۱۷ باشد.

۲. عددی به تصادف از بین اعداد طبیعیِ ۱ تا ۵۰۰ انتخاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد عدد طبیعیِ انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد؟

۳. در جعبهٔ A_1، چهار مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی و در جعبهٔ A_2، سه مهرهٔ قرمز و ۱ مهرهٔ آبی وجود دارد. یکی از دو جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم و در جعبهٔ دیگر قرار می‌دهیم. سپس از آن جعبه (جعبه‌ای که ۱ مهره به آن اضافه شده) ۱ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد مهرهٔ دوم آبی باشد؟

جبر و احتمال سوم ریاضی

۱. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$3^1+3^2+3^3+\ldots+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1)$$

۲. با استفاده از اثبات به روش بازگشتی نشان دهید:

$$a^2+b^2+1\geq ab+a+b$$

۳. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید:

$$\frac{n}{n+a}\leq\frac{n+a}{n+2a}\quad(a>0, n\in N)$$

ریاضیات گسسته

۱. نشان دهید در یک کلاس ۲۷ نفری امکان ندارد هر دانش‌آموز دقیقاً با ۵ نفر از هم‌کلاسی‌های خودش دوست باشد.

۲. گراف G دارای ۸ رأس و ۲۵ یال است. این گراف حداکثر و حداقل چند رأس از درجهٔ ۷ می‌تواند داشته باشد؟

۳. گراف G دارای ۷ رأس و ۱۵ یال است. آیا این گراف می‌تواند رأس ایزوله داشته باشد؟ اگر ۱۶ یال داشته باشد چه‌طور؟

آموزشی

حمیدرضا امیری

۶

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

۱. حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم توسط تجزیه

هرگاه یک معادلهٔ درجهٔ دوم به شکل استاندارد $ax^۲+bx+c=۰$ نوشته شود، ممکن است سمت چپ عبارت، به حاصل‌ضربِ دو چندجمله‌ای درجهٔ اول تجزیه شود. بنابراین با استفاده از خاصیت «حاصل‌ضرب صفر» (اگر $ab=۰$، آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$، یا هر دو صفرند ـ توضیح از مترجم)، و مساوی صفر قرار دادن هر عامل، می‌توانیم معادلات خطیِ حاصل را حل کنیم و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌دست آوریم. مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱. معادله‌های زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^۲-۶x=۰$

ب) $۲x^۲=x+۳$

حل: الف) این معادله به شکل استاندارد و در قالب معادلهٔ (۱) است. سمت چپ معادله را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد:

$x^۲+۶x=۰$

$x(x+۶)=۰$

با استفاده از خاصیت حاصل‌ضرب صفر، هر عامل را مساوی صفر قرار می‌دهیم و معادلات درجهٔ اول حاصل

When the left side factors into two linear equations with the same solution, the quadratic equation is said to have a **repeated solution**. We also call this solution a **root of multiplicity 2**, or a **double root**.

ترجمه برای دانش‌آموز

(از اینجا به بعد را شما ترجمه کنید و برای ما ارسال کنید.)

EXAMPLE 2:

Solving a Quadratic Equation by Factoring

Solve the equation: $9x^2-6x+1=0$

Solution

This equation is already in standard form, and the left side can be factored.

$9x^2-6x+1=0$

$(3x-1)(3x-1)=0$

so

$x=\frac{1}{3}$ or $x=\frac{1}{3}$

This equation has only the repeated solution $\frac{1}{3}$. The solution set is $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

New Work PROBLEMS 11 AND 21

The Square Root Method

Suppose that we wish to solve the quadratic equation

$x^2=p$ **(2)**

where $p\geq 0$ is a nonnegative number. We proceed as in the earlier examples.

$x^2-p=0$ Put in standard form.

$(x-\sqrt{p})(x+\sqrt{p})=0$ Factor (over the real numbers).

$x=\sqrt{p}$ or $x=-\sqrt{p}$ Solve.

We have the following result:

If $x^2=p$ and $p\geq 0$, then

$x=\sqrt{p}$ or $x=-\sqrt{p}$. **(3)**

لغات و اصطلاحات مهم

1. Solve حل، حل کردن
2. Quadratic درجهٔ دو
3. Quadratic equation معادلهٔ درجه دوم
4. Factoring تجزیه
5. Specified تخصیص‌یافته
6. Standard form شکل استاندارد
7. First-degree درجهٔ اول
8. Adding اضافه کردن
9. Double root ریشهٔ مضاعف
10. Linear equation معادلهٔ خطی

را حل می‌کنیم:

x+۶=۰ یا x=۰

x=-۶ یا x=۰

مجموعهٔ جواب {۰,-۶} است.

ب) معادلهٔ ۲x^۲=x+۳ را با اضافه کردن -x-۳ به دو طرف در حالت استاندارد قرار می‌دهیم.

۲x^۲=x+۳ ⟵ ۲x^۲-x-۳=۰

حالا سمت چپ معادله را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد:

(۲x-۳)(x+۱)=۰

بنابراین:

۲x-۳=۰ یا x+۱=۰

$x=\frac{۳}{۲}$ یا $x=-۱$

مجموعهٔ جواب $\left\{-۱,\frac{۳}{۲}\right\}$ است.

هرگاه سمت چپ معادله به دو معادلهٔ خطی با جواب‌های یکسان تجزیه شود، می‌گوییم معادلهٔ درجه دوم دارای جواب‌های تکراری است. همچنین این جواب را «ریشهٔ مرتبهٔ ۲»، یا «ریشهٔ مضاعف» می‌نامیم.

1. Solve a Quadratic Equation by Factoring

When a quadratic equation is written in standard from $ax^2+bx+c=0$, it may be possible to factor the expression on the left side into the product of two first-degree polynomials. Then, by using the Zero-Product Property and setting each factor equal to 0, we can solve the resulting linear equations and obtain the solutions of the quadratic equation.

Let's look at an example.

EXAMPLE 1:

Solving a Quadratic Equation by Factoring

Solve the equation:

(a) $x^2+6x=0$ (b) $2x^2=x+3$

Solution

(a) The equation is in the standard form specified in equation (1). The left side may be factored as

$x^2+6x=0$

$x(x+6)=0$ Factor.

Using the Zero-Product Property, we set each factor equal to 0 and then solve the resulting first-degree equations.

$x=0$ or $x+6=0$ Zero-Product Property

$x=0$ or $x=-6$ Solve.

The solution set is $\{0,-6\}$.

(b) We put the equation $2x^2=x+3$ in standard form by adding $-x-3$ to both sides.

$2x^2=x+3$

$2x^2-x-3=0$ Add-x-3to both sides.

The left side may now be factored as

$(2x-3)(x+1)=0$ Factor.

so that

$2x-3=0$ or $x+1=0$ Zero-Product Property

$x=\frac{3}{2}$ $x=-1$ Solve.

The solution set is $\left\{-1,\frac{3}{2}\right\}$.

نگاهی به تاریخ:
نخستین ایرانی که مقاله‌ای در ریاضیات در سطح بین‌المللی نوشت

دکتر فرید قاسملو

ـ یکی از مسائلی که لازم است برای شناخت ماهیت «علم» در جامعه‌مان بیشتر دربارهٔ آن کاوش کنیم، توجه به «سنت علمی» جامعه و کوشش‌هایی است که گذشتگان ما برای ایجاد این سنت علمی به خرج داده‌اند.

همهٔ ما کم‌وبیش چیزهایی دربارهٔ ارکان جامعه شنیده‌ایم. سنت‌های فرهنگی، روابط اجتماعی، آداب همکاری گروهی، ادب عمومی و التزام به اخلاق فردی و اجتماعی، اقتصاد و شئون گوناگون آن مثل قدرت خرید و ارزش برابری پول ملی با ارزهای بین‌المللی، معماری شهری و ساختمان‌های عظیم، برج‌های سر به فلک کشیده و بزرگ‌راه‌های تودرتو، و... همه و همه اجزای کوچکی از ارکان تشکیل‌دهندهٔ جامعه هستند. این در حالی است که تعداد کثیری از این اجزا را می‌توان با پول خریداری کرد.

کافی است ثروت هنگفتی داشته باشید تا با استفاده از آن یک مشاور اقتصادی بین‌المللی استخدام کنید و او به سرعت بزرگ‌ترین ساختمان‌ها، بزرگ‌راه‌ها، پل‌ها و... را در سرزمین شما بسازد.

در مقابل، آنچه که این ثروت به شما نمی‌بخشد، یا به روایت دیگر، آنچه که با این ثروت «نمی‌توانید بخرید»، مجموعهٔ سنن، رفتارها و دانش‌هایی است که طی مرور زمان در جامعه شکل می‌گیرند. به‌عبارت دیگر، اگر در جامعهٔ پویا، زنده و هدفمندی زندگی کنید که در آن اقشار گوناگون مردم (مثل معلمان، هنرمندان و شاعران، پژوهشگران علمی و دانش‌ورزان) علاوه‌بر مسائل زندگی روزمره، «هدفی» نیز در اجتماع برای خود قائل باشند، این افراد می‌کوشند هر کدام بسته به نوع فعالیت خود دستاوردی داشته باشند. معلم، می‌کوشد با تربیت نسلی بهتر از شاگردانِ گذشته، آیندهٔ اجتماع را تضمین کند، هنرمندان و شاعران می‌کوشند با ارائهٔ شعر و آثار هنری، فضای جامعه را تلطیف و عاری از خشونت کنند، و پژوهشگران علمی و صنعتگران نیز با طرح دستاوردهای خود، دانش جامعه را قدمی به جلو ببرند.

حال دقت کنید که اگر در جامعهٔ موردنظر ما، این رفتارها مداومت داشته باشند، من و شما، نسل امروز این جامعه، به هر بخش از ارکان فرهنگ و اجتماع که دقت کنیم و دست بزنیم، نسل‌ها و پشت‌درپشت افرادی را می‌بینیم که هر کدام به‌قدر وسع و توانایی خود در جهت رشد جامعه‌شان کوشیده‌اند.

در حوزهٔ دانش، این کوشش‌های علمی خودبه‌خود به ایجاد «سنت علمی» در جامعه منجر می‌شوند و به‌وجود آمدن سنت علمی در هر یک از شاخه‌های دانش، باعث می‌شود این شاخه و رشتهٔ خاص، با استفاده از این «سنت» کاملاً قدرتمند و پویا به حیات خود ادامه دهد. به‌عبارت دیگر می‌توان گفت، اگر در جامعه‌ای در رشتهٔ خاصی از دانش، صنعت و فرهنگ، این سنت پدید آید، تولید دانش و معرفت در آن رشته (با استفاده از همین سنت) راحت‌تر و سریع‌تر امکان‌پذیر می‌شود و در عین حال، با استفاده از این پشتوانه، امکان نابودی یا بازگشت به عقب در این حوزه‌ها وجود نخواهد داشت.

بحث دربارهٔ علل و امکان وجود این سنت‌ها (در هر رشته‌ای از دانش، و از آن میان ریاضیات) و نیز بحث دربارهٔ فواید این سنت‌های علمی از حوصلهٔ مقالهٔ حاضر خارج است. این نوشته‌ها در مقام مقدمهٔ بحث از آن جهت بود که طرح موضوع کنم که «سنت علمی تألیف مقاله در موضوع ریاضی به‌وسیلهٔ نویسندگان ایرانی در سطح بین‌المللی» (علی‌رغم تعجب احتمالی شما) در کشور ما بیش از یک قرن و نیم سابقه دارد و براساس کوشش‌هایی که مؤلف این سطور تاکنون به خرج داده است، به‌نظر می‌رسد نخستین مقاله‌های بین‌المللی

ریاضی‌دانان ایرانی حدود ۱۵۰ سال پیش منتشر شده است!

براساس همان مقدمه‌ای که طرح کردم، کوشیده‌ام در مقالهٔ حاضر نشان دهم، سنت علمی تولید مقاله در موضوع ریاضی در ایران سابقه‌ای یک‌ونیم قرنی دارد. این سنت علمی، سابقهٔ بسیار خوب و مناسبی برای پژوهشگران عرصهٔ ریاضیات است که با نگاه به گذشته، آینده را هدف بگیرند و با دلگرمی بیشتری به کار و فعالیت‌های علمی خویش (که در نهایت به تولید دانش در قالب کتاب و مقاله منجر خواهد شد) بپردازند.

اصلاً مایل نیستم در این مقاله به چرایی، چگونگی و تحلیل این سنت علمی بپردازم. فقط در مقام یک پژوهشگر کوچک تاریخ علوم در ایران، می‌کوشم گزارشی تاریخی دربارهٔ تولید احتمالاً نخستین مقاله‌های بین‌المللی ریاضی ایران به‌دست دهم. برای درک بهتر ماجرای این کوشش، لازم است نگاهی کوتاه به تاریخ کشورمان در حدود دو قرن گذشته بیفکنیم.

شش سال پس از به قدرت رسیدن **فتحعلی‌شاه قاجار** در سال ۱۲۱۸ قمری/ ۱۸۰۳ میلادی شهر «گنجه» از دامان کشور ایران جدا شد. این حرکت سیاسی سرآغاز مجموعه جنگ‌هایی شد که در تاریخ معاصر ایران به جنگ‌های ایران و روس شهرت دارد. شکست‌های پی‌درپی قشون ایران از قشون روس باعث شد، سیاستمداران ایرانی به دنبال چرایی این شکست‌ها باشند. هم‌زمان با این پرسش‌ها بین ایرانیان، جهان نیز با ورود به قرن نوزدهم دوران پرشتاب تغییر را پشت‌سر می‌گذاشت و عموم ایرانیانی که پا از کشور بیرون می‌گذاشتند، مبهوت این همه تغییر جهانی می‌شدند.

در داخل کشور، کوشش‌های چندی نیز برای اصلاح مملکت، به‌وجود آوردن قشون جدید و منظم و روی هم رفته حرکت برای بازسازی نظام آموزشی کشور شروع شد که می‌توان آغازگر این کوشش‌های اصلاح‌طلبانه را **عباس‌میرزا** (نایب‌السلطنهٔ فتحعلی‌شاه قاجار) دانست. مرگ زودرس عباس‌میرزا این کوشش‌ها را ناتمام گذاشت، تا اینکه حدود ۱۳ سال پس از فوت او، این‌بار صدراعظم **ناصرالدین شاه**، **امیرکبیر**، کوشش‌های اصلاحی دیگر را آغاز کرد.

امیرکبیر به‌ویژه از دوسو تغییر در نظام آموزشی ایران را پی گرفت: یکی، افتتاح دارالفنون (در سال ۱۲۶۸ قمری) و دیگر، اعزام محصل به خارج از کشور (پژوهشگران تاریخ معاصر کشورمان، این گروه‌های اعزامی محصل به خارج را «کاروان معرفت» نامیده‌اند). در میان سومین گروه اعزامی محصل به خارج از کشور در سال ۱۲۷۵ قمری، نوجوانی به فرنگ اعزام شد که محور اصلی مقالهٔ ماست.

نظام‌الدین غفاری کاشانی

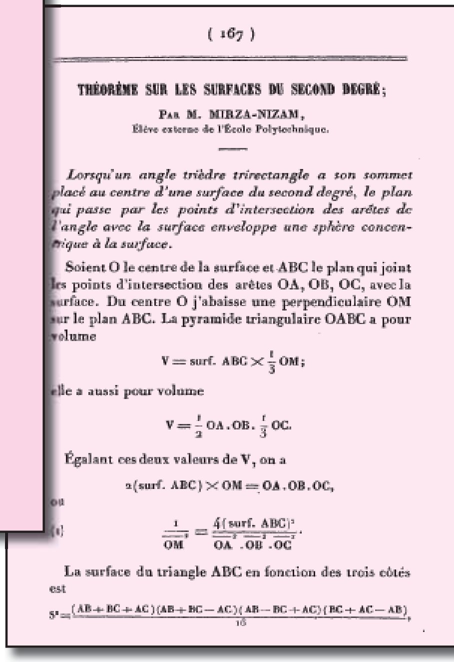
فرد مورد توجه ما **نظام‌الدین غفاری کاشانی**، فرزند **ابراهیم** نام دارد که در حدود سال ۱۲۶۰ قمری در روستای بُرزآباد در حومهٔ کاشان متولد شد. تحصیلات اولیهٔ خود را در دارالفنون (در تهران) پشت‌سر گذاشت و در سن ۱۵ سالگی و در سال ۱۲۷۵ قمری به همراه گروهی از دانش‌آموزان (که روی‌هم رفته ۴۲ نفر بودند) برای ادامهٔ تحصیل و فراگرفتن علوم جدید به اروپا اعزام شد.

امیرکبیر به‌ویژه از دوسو تغییر در نظام آموزشی ایران را پی گرفت: یکی، افتتاح دارالفنون (در سال ۱۲۶۸ قمری) و دیگر، اعزام محصل به خارج از کشور

نظام‌الدین در پاریس در پلی‌تکنیک این شهر به فراگرفتن مجموعهٔ دروسی با محوریت ریاضی و مهندسی مشغول شد. دوره‌های متفاوتی را نیز در رشتهٔ معدن‌شناسی پشت‌سر گذاشت و در مدرسهٔ پلی‌تکنیک حتی شاگرد اول هم شد. حضور نظام‌الدین در فرانسه مجموعاً نه سال طول کشید. البته تمام این دوران مشغول تحصیل نبود و پس از آنکه دروس خود را در ریاضی و معدن‌شناسی پشت‌سر گذاشت، در همان مدرسه پلی‌تکنیک مشغول به تدریس هندسه به دانش‌آموزان شد.

در سال ۱۲۸۴ قمری نظام‌الدین به تهران بازگشت و مسئولیت‌های متعددی پذیرفت. از جمله، در بعضی نقاط کشور مطالعاتی برای ساختن راه انجام داد، برای

صفحه اول مقاله اول کاشانی
که در سال ۱۸۶۴ چاپ شده است.


(167)

THÉORÈME SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. MIRZA-NIZAM,
Élève externe de l'École Polytechnique.

Lorsqu'un angle trièdre trirectangle a son sommet placé au centre d'une surface du second degré, le plan qui passe par les points d'intersection des arêtes de l'angle avec la surface enveloppe une sphère concentrique à la surface.

Soient O le centre de la surface et ABC le plan qui joint les points d'intersection des arêtes OA, OB, OC, avec la surface. Du centre O j'abaisse une perpendiculaire OM sur le plan ABC. La pyramide triangulaire OABC a pour volume

$$V = \text{surf. ABC} \times \frac{1}{3}\,\text{OM};$$

elle a aussi pour volume

$$V = \frac{1}{2}\,\text{OA}.\text{OB}.\frac{1}{3}\,\text{OC}.$$

Égalant ces deux valeurs de V, on a

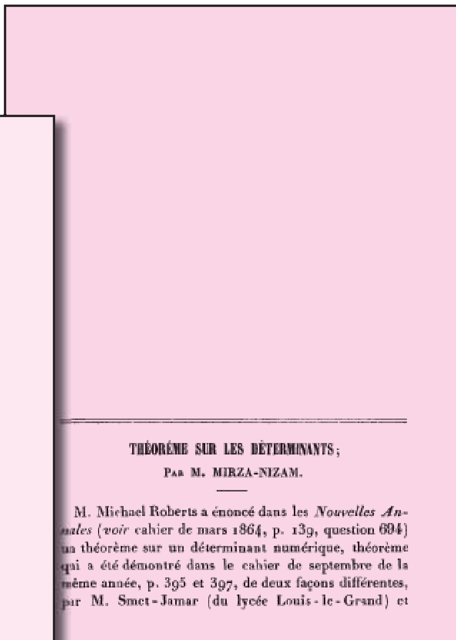
$$2(\text{surf. ABC}) \times \text{OM} = \text{OA}.\text{OB}.\text{OC},$$

ou

$$(1) \qquad \frac{1}{\overline{\text{OM}}^2} = \frac{4(\text{surf. ABC})^2}{\overline{\text{OA}}^2.\overline{\text{OB}}^2.\overline{\text{OC}}^2}.$$

La surface du triangle ABC en fonction des trois côtés est

$$S^2 = \frac{(\text{AB}+\text{BC}+\text{AC})(\text{AB}+\text{BC}-\text{AC})(\text{AB}-\text{BC}+\text{AC})(\text{BC}+\text{AC}-\text{AB})}{16},$$



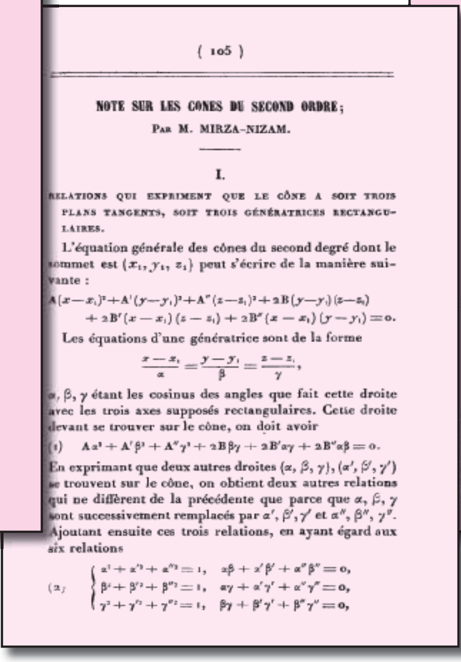
THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS;

PAR M. MIRZA-NIZAM.

M. Michael Roberts a énoncé dans les *Nouvelles Annales* (*voir* cahier de mars 1864, p. 139, question 694) un théorème sur un déterminant numérique, théorème qui a été démontré dans le cahier de septembre de la même année, p. 395 et 397, de deux façons différentes, par M. Smet-Jamar (du lycée Louis-le-Grand) et

صفحه اول مقاله دوم کاشانی که در سال
۱۸۶۵ چاپ شده است.

صفحه اول مقاله سوم کاشانی است که در
سال ۱۸۶۶ چاپ شده است.


(105)

NOTE SUR LES CONES DU SECOND ORDRE;

PAR M. MIRZA-NIZAM.

I.

RELATIONS QUI EXPRIMENT QUE LE CÔNE A SOIT TROIS PLANS TANGENTS, SOIT TROIS GÉNÉRATRICES RECTANGULAIRES.

L'équation générale des cônes du second degré dont le sommet est (x_1, y_1, z_1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$A(x-x_1)^2 + A'(y-y_1)^2 + A''(z-z_1)^2 + 2B(y-y_1)(z-z_1) + 2B'(x-x_1)(z-z_1) + 2B''(x-x_1)(y-y_1) = 0.$$

Les équations d'une génératrice sont de la forme

$$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma},$$

α, β, γ étant les cosinus des angles que fait cette droite avec les trois axes supposés rectangulaires. Cette droite devant se trouver sur le cône, on doit avoir

$$(1) \qquad A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta = 0.$$

En exprimant que deux autres droites (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ se trouvent sur le cône, on obtient deux autres relations qui ne diffèrent de la précédente que parce que α, β, γ sont successivement remplacés par α', β', γ' et $\alpha'', \beta'', \gamma''$. Ajoutant ensuite ces trois relations, en ayant égard aux six relations

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, \end{cases}$$

ایجـاد چند معدن در حومهٔ کاشـان به کوشـش‌هایی دسـت زد، به مقام وزارت رسید و نیز چندبار به همراه **مظفرالدین‌شـاه قاجار** و در مقام آجودان مخصوص او به اروپا سفر کرد. پس از بازگشت به ایران ابتدا به او لقب «مهندس مخصوص»، و سپس لقب «مهندس‌الممالک» داده شـد. نظام‌الدین طی سفرهایش به اروپا از مقامات اروپایی نشان‌ها و مدال‌های متعددی گرفت. او در نهایت در سـال ۱۲۹۴ شمسی/ ۱۳۳۴ قمری/ ۱۹۱۵ میلادی از دنیا رفت.

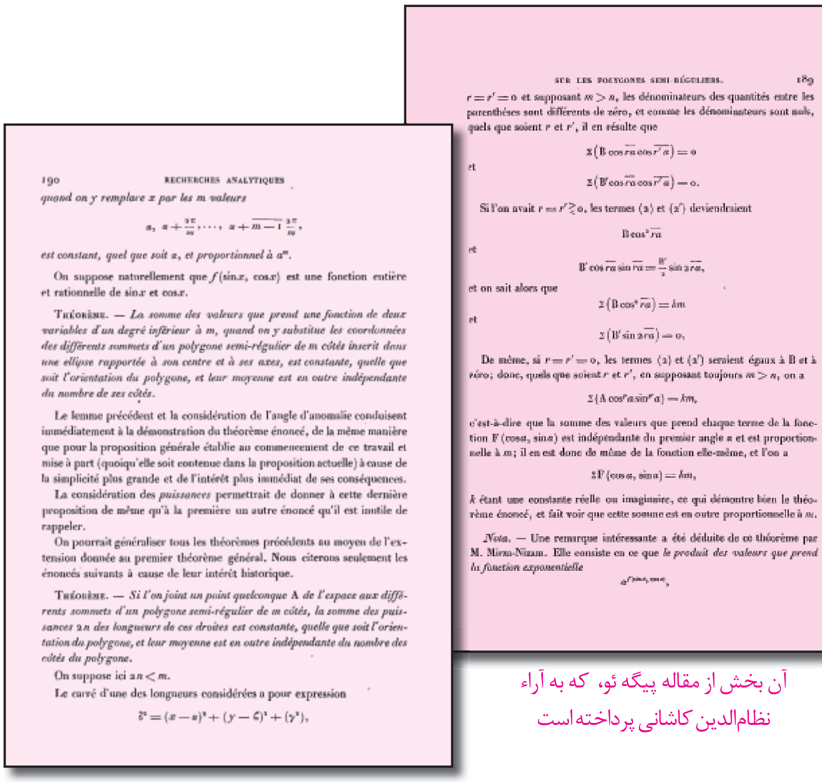
بسیاری از کسـانی که در آثار عموماً تاریخی خود از نظام‌الدین غفاری کاشـانی یـاد کرده‌اند، به وجوهی از کارهای علمی او اشـاره کرده‌اند که برای رسـیدن به شـناختی از تاریخ ریاضیات در ایران مهم هسـتند. از جمله اینکه او مجموعهٔ وسیعی کتاب دربارهٔ شاخه‌های گوناگون ریاضیات تألیف کرده است؛ از جمله، کتاب‌هایی در هندسـه تحلیلی، مثلثات، جبر و مقابله، و هندسـهٔ پیشـرفته. همچنین اشـاره کرده‌اند که او نقش بسیار مهمی در تدوین مجموعه وسـیعی از واژگان تخصصی ریاضی در ایران دورهٔ قاجار به‌عهده داشته است. اگرچه به‌علت آنکه به‌جز یک کتاب که کتابی درسـی در حوزهٔ ریاضی اسـت، بقیهٔ آثار او به چاپ نرسیده‌اند و چه بسا بسیاری از آن‌ها مفقود شـده باشند، هنوز نمی‌توان به جایگاه اصلی او در توسعهٔ دانش ریاضی به زبان فارسی و در دورهٔ قاجار پی برد.

امـا در مقابـل، آنچه که دربـارهٔ نظام‌الدین غفاری به‌جـای مانده و رابط زندگـی او و موضوع مقالهٔ حاضر اسـت، چند مقاله‌ای اسـت کـه او در دوران اقامت در پاریس و تدریس در پلی‌تکنیک به زبان فرانسـه تألیف و چاپ کرده اسـت. این را می‌دانیم که او طی سال‌های ۱۲۸۳-۱۲۸۱ قمری/ ۱۸۶۶-۱۸۶۴ میلادی سه عنوان مقاله به چاپ رسانده است.

مقالـهٔ نخسـت او در دو صفحه در سـال ۱۸۶۴ و دربارهٔ «معادلات درجهٔ دوم» تألیف شـده اسـت. مقالهٔ دوم در پنج صفحه در سـال ۱۸۶۵ منتشر شد و دربارهٔ «دترمینان» است. و مقالهٔ سوم را در ۱۴ صفحه در سال ۱۸۶۶ نوشت که باز هم دربارهٔ معادلات درجه دوم است.

ایـن مقـالات، در مجله‌ای به‌عنـوان «اخبار جدید ریاضیات»[1] به چاپ رسـیده‌اند. مجلهٔ مزبور سالی یک شماره منتشر می‌شده و گزارش‌ها و دستاوردهای علمی مـدارس پلی‌تکنیک و مدارس علوم طبیعی را به اطلاع همگان می‌رسانده اسـت. جالب است که بدانیم، مجله علی‌رغم وقفه‌هایی در انتشـار (بیشترین وقفه، تعطیلی انتشـار آن بین سـال‌های ۱۹۱۰ تا ۱۹۲۲ به‌مدت ۱۲ سـال بوده اسـت)، طی دوران ۱۸۴۲ تا ۱۹۲۷ منتشر می‌شده است. بر این اساس، می‌توان گفت خود مجله‌ای که میـرزا نظام‌الدین مقـالات خـود را در آن به چاپ می‌رسانده است، بخشی از سنت انتشار مجله‌های علمی در اروپا به‌شمار می‌آید.

جالب‌تر آن اسـت که بدانیـم، داده‌های نظام‌الدین همـان موقع در اروپا مورد توجه نیز قرار گرفته اسـت.



SUR LES POLYGONES SEMI-RÉGULIERS. 189

$r = r' = 0$ et supposant $m > n$, les dénominateurs des quantités entre les parenthèses sont différents de zéro, et comme les dénominateurs sont nuls, quels que soient r et r', il en résulte que

$$\Sigma\left(\mathrm{B}\cos\overline{ra}\cos\overline{r'a}\right) = 0$$

et

$$\Sigma\left(\mathrm{B}'\cos\overline{ra}\cos\overline{r'a}\right) = 0.$$

Si l'on avait $r = r' \gtrless 0$, les termes (2) et (2') deviendraient

$$\mathrm{B}\cos^2\overline{ra}$$

et

$$\mathrm{B}'\cos\overline{ra}\sin\overline{ra} = \frac{\mathrm{B}'}{2}\sin 2\overline{ra},$$

et on sait alors que

$$\Sigma\left(\mathrm{B}\cos^2\overline{ra}\right) = km$$

et

$$\Sigma\left(\mathrm{B}'\sin 2\overline{ra}\right) = 0,$$

De même, si $r = r' = 0$, les termes (2) et (2') seraient égaux à B et à zéro; donc, quels que soient r et r', en supposant toujours $m > n$, on a

$$\Sigma\left(\mathrm{A}\cos^r a \sin^{r'} a\right) = km,$$

c'est-à-dire que la somme des valeurs que prend chaque terme de la fonction F(cos$a$, sin$a$) est indépendante du premier angle a et est proportionnelle à m; il en est donc de même de la fonction elle-même, et l'on a

$$\Sigma \mathrm{F}(\cos a, \sin a) = km,$$

k étant une constante réelle ou imaginaire, ce qui démontre bien le théorème énoncé, et fait voir que cette somme est en outre proportionnelle à m.

Nota. — Une remarque intéressante a été déduite de ce théorème par M. Mirza-Nizam. Elle consiste en ce que *le produit des valeurs que prend la fonction exponentielle*

$$a^{f(\sin x, \cos x)},$$

190 RECHERCHES ANALYTIQUES

quand on y remplace x par les m valeurs

$$\alpha,\ \alpha + \frac{2\pi}{m},\ \dots,\ \alpha + \overline{m-1}\,\frac{2\pi}{m},$$

est constant, quel que soit α, et proportionnel à a^m.

On suppose naturellement que $f(\sin x, \cos x)$ est une fonction entière et rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$.

Théorème. — *La somme des valeurs que prend une fonction de deux variables d'un degré inférieur à m, quand on y substitue les coordonnées des différents sommets d'un polygone semi-régulier de m côtés inscrit dans une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, est constante, quelle que soit l'orientation du polygone, et leur moyenne est en outre indépendante du nombre de ses côtés.*

Le lemme précédent et la considération de l'angle d'anomalie conduisent immédiatement à la démonstration du théorème énoncé, de la même manière que pour la proposition générale établie au commencement de ce travail et mise à part (quoiqu'elle soit contenue dans la proposition actuelle) à cause de la simplicité plus grande et de l'intérêt plus immédiat de ses conséquences.

La considération des *puissances* permettrait de donner à cette dernière proposition de même qu'à la première un autre énoncé qu'il est inutile de rappeler.

On pourrait généraliser tous les théorèmes précédents au moyen de l'extension donnée au premier théorème général. Nous citerons seulement les énoncés suivants à cause de leur intérêt historique.

Théorème. — *Si l'on joint un point quelconque A de l'espace aux différents sommets d'un polygone semi-régulier de m côtés, la somme des puissances $2n$ des longueurs de ces droites est constante, quelle que soit l'orientation du polygone, et leur moyenne est en outre indépendante du nombre des côtés du polygone.*

On suppose ici $2n < m$.

Le carré d'une des longueurs considérées a pour expression

$$\delta^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\zeta)^2 + (\gamma^2),$$

آن بخش از مقاله پیگه ئو، که به آراء نظام‌الدین کاشانی پرداخته است

هنگامی که نظام‌الدین مقالهٔ دوم خود را منتشر می‌کرد، یک ریاضی‌دان فرانسوی در یک مجلهٔ دیگر چاپ پاریس به‌نام «مجلهٔ دانشکده سلطنتی پلی‌تکنیک»[2] به آرای نظام‌الدین اشاره کرده است. این نویسندهٔ فرانسوی که **هنری پیگه‌ئو**[3] نام داشت، در مقاله‌ای که دربارهٔ چندضلعی‌های منتظم نوشته و آن را در سال ۱۸۶۵ منتشر کرده، به نوشته‌های نظام‌الدین اشاره کرده است. بنابر نظام اطلاع‌رسانی امروزه، می‌توانیم بگوییم مقاله‌های نظام‌الدین ارجاع نیز داشته است!

در هر صورت، مؤلف این سطور هنوز مقاله‌ای بین‌المللی که توسط یک ایرانی دربارهٔ ریاضیات نوشته شده باشد، نیافته است. بنابراین، می‌توان گفت نوشته‌های نظام‌الدین غفاری کاشانی احتمالاً نخستین مقالات ریاضی هستند که به‌وسیلهٔ ایرانیان در خارج از فضای ایران و در دورانی که جهان دوران پرآشوب و شتاب نوگرایی را می‌گذرانید، به چاپ رسیده‌اند.

شاید این پرسش به ذهن ما برسد: «اینکه یک ایرانی در دوران حضور و تدریس در اروپا چند مقاله به زبان فرانسه و دربارهٔ مفاهیم ریاضی منتشر کرده است، چه ربطی به دانش ریاضیات در ایران دارد؟»

در مقام پاسخ به این پرسش احتمالی باید گفت: نمی‌توان تاریخ را تا این حد ساده کرد. این موضوع که بیش از ۱۵۰ سال پیش گروهی از ایران به قصد علم‌آموزی به اروپا سفر کرده‌اند، یکی از این افراد در اروپا تدریس می‌کرده و مقالاتی نیز به زبان فرانسه در حوزهٔ ریاضیات تألیف کرده و در اروپا به چاپ رسانده است، و این موضوع که او پس از بازگشت به ایران نیز همچنان به ریاضیات پرداخته است، همه و همه از جمله مسائلی هستند که هریک جنبهٔ خاصی از تاریخ ریاضیات را در دوران معاصر خود در ایران پوشش می‌دهند. در کنار همهٔ این‌ها باید به موضوع نقش مقالات نظام‌الدین کاشانی در آغازین گام ایجاد سنت علمی مقاله‌نویسی ایرانیان در فضای بین‌المللی نیز توجه کرد.

پرسش‌های پیکارجو!

از بین اعداد طبیعی ۱۳۹۵,...,۱,۲، چند سه‌تایی می‌توان انتخاب کرد که با هم یک دنبالهٔ حسابی صعودی تشکیل بدهند؟

الف) $۱۳۹۵^۲$ ب) $۱۳۹۴^۲$ ج) $\left(\frac{۱۳۹۴}{۲}\right)^۲$

د) $\left(\frac{۱۳۹۶}{۲}\right)^۲$ هـ) $\frac{۱۳۹۵^۲-۱}{۲}$

پی‌نوشت‌ها

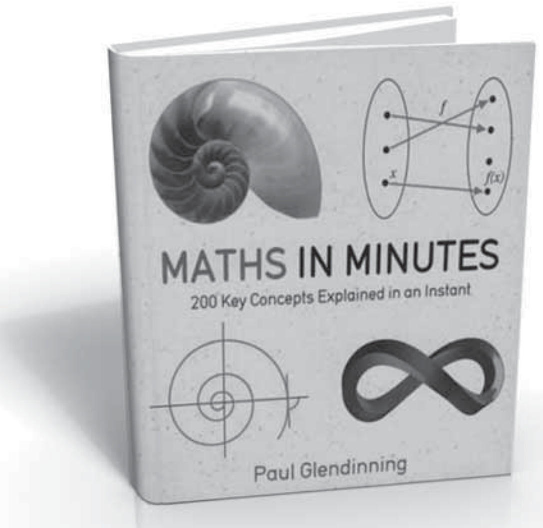
1. Nouvelles annals de mathématiques
2. journal de L'école impériale polytechnique
3. Pigeon

منابع

۱. سرمد، غلامعلی (۱۳۷۲). اعزام محصل به خارج از کشور (در دورهٔ قاجاریه). تهران.
۲. غفاری، ابراهیم (۱۳۵۳). تاریخچه و شجرهٔ خاندان غفاری کاشانی، فرهنگ ایران زمین. (ج ۲۰). تهران.
۳. یغمایی، اقبال (۱۳۴۶). «میرزا نظام‌الدین مهندس‌الممالک، وزیر علوم». ماهنامهٔ آموزش‌وپرورش. سال ۳۷. شمارهٔ ۷ و ۸.
۴. محبوبی اردکانی، حسین (۱۳۶۵). تاریخ مؤسسات تمدنی جدید در ایران. تهران.

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضاَ یاسی‌پور

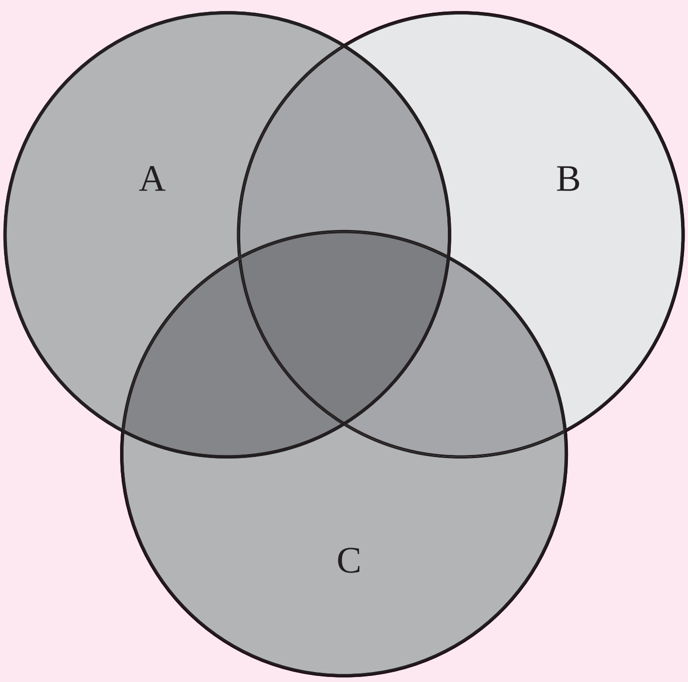
ریاضیات در چند دقیقه



معرفی مجموعه‌ها

یـک مجموعه صرفـاً گردایه‌ای از *اشیاسـت*. اشیای داخل یک مجموعه به‌عنوان «*اعضا*»[1]ی آن شناخته می‌شوند. مفهوم مجموعه مفهومی بسیار نیرومند است، و مجموعه‌ها بلوک‌های ساختمانی اساسی ریاضیات و حتی اساسی‌تر از اعدادند.

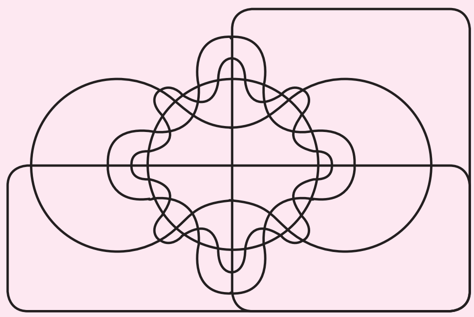
هر مجموعه دارای تعدادی متناهی یا نامتناهی عضو اســت و معمولاً با قــرار دادن اعضای آن در آکــولاد، یعنی {}، توصیف می‌شــوند. ترتیبی که طبــق آن اعضای مجموعه نوشــته می‌شــوند، در تعیین مجموعه دارای اهمیت نیست. همچنین، در صورتی که عضوی تکرار شود، تأثیری در مجموعه ندارد. مجموعه‌ها را می‌توان از مجموعه‌های دیگر نیز ساخت، گرچه باید در توصیفشان احتیاط بسیار به‌کار برد. اعضای مجموعه می‌توانند هر چیزی، از اعداد تا مردم تا ســیارات، یــا آمیخته‌ای از جمیع این سه مورد باشند؛ گرچه اعضای آن در کاربردها معمولاً مرتبط با هم‌اند.



نمودارهای ون

نمودارهای «ون»[2] نمودارهای شـهودی ساده‌ای هسـتند که به‌گونه‌ای وسیع در توصیف روابط بین مجموعه‌ها به‌کار می‌روند. در ساده‌ترین صورت برای نمایش هر مجموعه یک قرص یا سطح دایره به‌کار می‌رود، و اشتراک‌های قرص‌ها، اشتراک‌های مجموعه‌ها را نمایش می‌دهند. استفاده از چنین نمودارهایی برای نمایش روابط بین گزاره‌های فلسفی مختلف یا مجموعه‌های متفاوت، به سال‌ها قبل برمی‌گردد. اما این کار توسـط **جان‌ون**[3]، منطق‌دان و فیلسـوف بریتانیایی، در سال ۱۸۸۰ فرمول‌بندی شد. خود ون به آن‌ها در ارجاع به نوع مشابهی نمودار که توسط **لئونهارد اویلر**[4]، ریاضی‌دان سوئیسی، در قرن هجدهم توسعه یافت، به‌عنوان «*دایره‌های اویلری*»[5] اشاره می‌کرد.

در مورد سه مجموعه، طریقی کلاسیک برای نشـان‌دادن جمیع رابطه‌های ممکن موجود اسـت (که تصویـر آن را در بخش معرفی مجموعه‌هـا می‌بینید). اما در مورد بیش از سـه مجموعه، ترتیب اشـتراک‌ها به‌سرعت بسیار پیچیده‌تر می‌شود. نمودار شـکل مقابل رهیافتـی به اتصال شـش مجموعهٔ متفاوت را نشان می‌دهد.



یک راه‌حل ممکن برای نمایش شش مجموعه در یک نمودار ون

* **پی‌نوشت‌ها**

1. elements
2. venn
3. John Venn
4. Leonhard Euler
5. Eulerian circles
6. intersection
7. union
8. empty set
9. subset
10. complement
11. relative complement

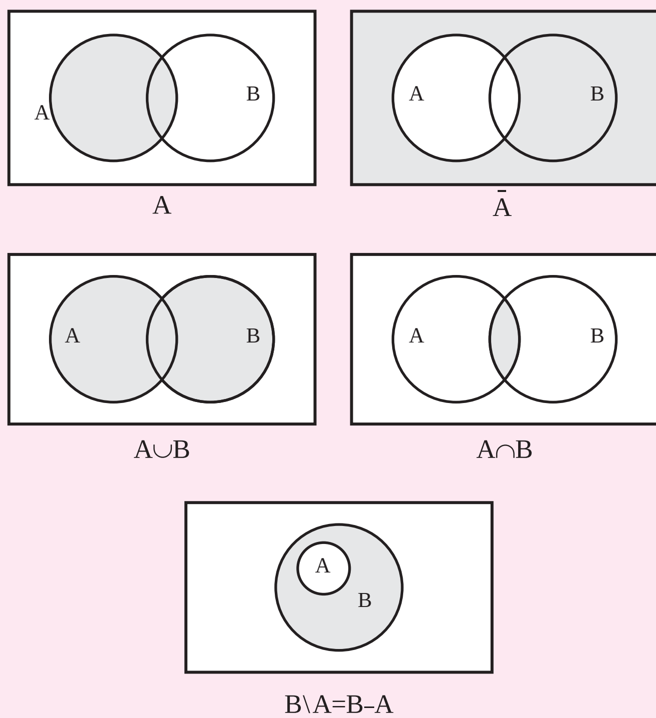
ترکیب مجموعه‌ها

با معلـوم بودن هـر دو مجموعـه، می‌توانیم عمل‌های گوناگونی برای ایجاد مجموعه‌های جدید انجام دهیم.

«*اشـتراک*»[6] دو مجموعـهٔ X و Y، که به‌صورت X∩Y نوشـته می‌شـود، مجموعهٔ جمیع اعضایی اسـت که در دو مجموعـهٔ X و Y مشـترک‌اند، در حالی‌کـه «اجتماع»[7] که به‌صورت X∪Y نوشـته می‌شـود، مجموعهٔ جمیع اعضایی است که دست‌کم در یکی از مجموعه‌های X و Y وجود دارند.

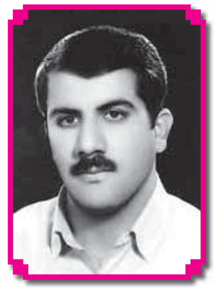
«مجموعهٔ *تهی*»[8] که با {} یا ∅ نمایش داده می‌شـود، مجموعه‌ای است که شامل هیچ عضوی نیست. زیرمجموعهٔ[9] مجموعهٔ X، مجموعه‌ای است که همهٔ اعضایش در X واقع‌اند. این مجموعه می‌تواند شامل بعضی یا تمام اعضای X باشد، و مجموعهٔ تهی نیز زیرمجموعهٔ ممکن هر مجموعهٔ دیگر است.

«متمـم»[10] Y، که به‌عنـوان «Y´» (نه Y) نیز معروف است و «$\bar{Y}$» نوشته می‌شود، مجموعهٔ اعضایی است که در Y قرار ندارند. اگر Y زیرمجموعه‌ای از X باشـد، آن‌گاه «متمم نسـبی»[11] Y که «X\Y» نوشـته می‌شود، مجموعهٔ اعضای واقع در X اسـت که در Y نیسـتند، و به این موضوع اغلب به‌عنوان «X−Y» اشاره می‌شود..



نمودارهای سادهٔ ون برای بعضی از اعمال مجموعه‌ای اساسی

معرفی خانهٔ ریاضیات زنجان



مرتضی بیات
عضو هیئت علمی خانهٔ ریاضیات زنجان
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان

ایدهٔ وجودی «خانه‌های ریاضیات» از تعریف سادهٔ آموزش که عبارت است از فرایندی که موجب گسترش دانش، ایجاد مهارت، ایجاد علاقه و انگیزه برای تحصیل، شکوفایی خلاقیت و رشد اجتماعی می‌شود، نشئت گرفته است. دغدغهٔ تشکیل مراکزی که بتوان در آن موجبات تمامی موارد فوق را محقق کرد، زمینه‌های پیدایش خانهٔ ریاضیات را در سطح کشور فراهم ساخت؛ چرا که امروزه تربیت انسان‌های مبتکر و خلاق یکی از اهداف مهم نظام‌های آموزشی دنیا محسوب می‌شود. اما این در حالی است که در نظام کنونی آموزش کشور، روش‌های قدیمی آموزشی، دانش‌آموزان را تنها به انباشتن اطلاعات ترغیب می‌کنند و از درگیر شدن و خودآموزی در فرایند آموزش و یادگیری علمی بازمی‌دارند و فرصت محدودی را برای ایجاد روحیهٔ کار گروهی در دانش‌آموزان فراهم می‌آورند. از طرف دیگر، با توجه به اینکه ریاضیات ابزار قدرتمندی برای پرورش خلاقیت و رشد فکری است و هرکس که می‌خواهد درست بیندیشد و بهتر فکر کند، ناگزیر است که با ریاضیات آشنا شود، آموزش این علم به خودی خود از درجهٔ اهمیت و حساسیت ویژه‌ای برخوردار است.

همان‌طور که می‌دانیم، مدرسه‌ها و دانشگاه‌های شهر معمولاً درگیر مسائل روزمرهٔ خود هستند و انتظار نمی‌رود که بتوانند تأثیری جدی بر آگاهی مردم داشته باشند. اما خانه‌های ریاضی نقش کلیدی و طبیعی دارند و سبب می‌شوند، مردم ریاضیات را بفهمند و ستایش کنند. یکی از اهداف خانهٔ ریاضیات این است که به ترس بی‌موردی که از ریاضیات بین جوانان هست، توجه کند و راهی بیابد تا بفهماند، آنچه ترسناک است، ریاضیات به‌خودی خود نیست، بلکه امتحانات است. آن‌ها باید بدانند که حتی بسیاری از بزرگان ریاضی نیز معمولاً نمی‌توانند به مسائل ریاضی خارج از حوزهٔ تخصص خود به راحتی بپردازند. اگر ما هم بخواهیم در این زمینه‌ها امتحان بدهیم، ما هم می‌ترسیم و مضطرب می‌شویم.

بیشتر دانش‌آموزان دبیرستان و بیشتر معلمان تصور می‌کنند که ریاضی‌دان طراز اول کسی است که بتواند در کسری از ثانیه ریشهٔ دوم هر عدد حقیقی مثبتی را بیابد، تجزیهٔ هر عدد صحیح بزرگی را بیان کند و هر مسئله‌ای در هندسه، حساب یا هر شاخهٔ دیگر ریاضی را بدون هیچ مقدمه‌ای حل کند. معلمان فکر می‌کنند که ریاضی‌دان، ریاضی‌دان به‌دنیا آمده، نه اینکه به‌عنوان ریاضی‌دان تربیت شده است، پس هیچ‌وقت در ریاضی قوی نخواهند شد. دانش‌آموزان همین ایدهٔ اشتباه و همچنین ترسشان را از ریاضیات در مدارس کسب می‌کنند و معلمان بی‌تجربه و آن‌ها که آموزش لازم را ندیده‌اند هم ترس و کج‌فهمی‌شان را به دانش‌آموزان انتقال می‌دهند. بنابراین خانه‌های ریاضی باید به این معلمان کمک کنند تا آگاهی خود را از ریاضی به اندازه‌ای که برای شغلشان لازم است، بالا ببرند. با توجه به موارد فوق، همهٔ این عوامل دست‌به‌دست هم دادند و موجب شکل‌گیری خانه‌های ریاضی در سطح کشور شدند.

در تاریخ ۵ آبان ۱۳۸۳ با تشکیل جلسه‌ای با حضور آقای دکتر **ثبوتی** (مؤسس و رئیس سابق دانشگاه علوم پایهٔ زنجان) و جمعی از استادان ریاضی دانشگاه‌های زنجان، استاندار و رؤسای شهرداری و ارشاد اسلامی، نسبت به تشکیل و تجهیز اولیهٔ خانهٔ ریاضیات زنجان همت گماشتند.

نمای بالای خانهٔ ریاضیات زنجان. مقطع بیضی حاصل از برخورد یک استوانه با یک صفحه است

خانــهٔ ریاضیات زنجان ابتدا در محل قدیمی دانشــگاه علوم پایــهٔ زنجان در ســه کلاس شــروع به‌کار کرد. مدیریت این خانه را آقای **هوشنگ اوصانلو**، یکی از دبیران باسابقه و علاقه‌مند ریاضــی به‌عهده گرفتند و تاکنون این سمت را حفظ کرده‌اند. بعد از چند سال با تکمیل ســاختمان اصلی خانــهٔ ریاضیات زنجــان واقع در ضلع جنوبی دانشــگاه علوم پایهٔ کنونی که در ابعاد وســیع‌تر نســبت به محل قبلی است، این مرکز به فعالیت خود در شکل گسترده‌تری ادامه می‌دهد. بخش‌های داخلی این ساختمان متشکل از کلاس‌های درس، کارگاه رایانه، اتاق بازی و ریاضی، اتاق فکــر و تحقیق، آمفی تئاتر برای ســخنرانی و گردهمایی‌هــا و نیــز کتابخانــهٔ مجهز به کتاب‌های جدید و قدیمی و مجلات ریاضی اســت. لازم به ذکر است که اکثر کتاب‌های این کتابخانه از طرف دوست‌داران ریاضی به این محل اهدا شده‌اند.

خانــهٔ ریاضیات زنجان بــرای انجام امور آموزشی، با تشکیل گروه‌های کاری متفاوت اجرایی و علمی به فعالیت‌های خود به شرح زیر پرداخته است:

۱. برگزاری منظم سمینارهای ماهانه که توسط استادان و دبیران علاقه‌مند به ریاضــی ارائه می‌شــود. در ضمن بعد از ســمینار، جلســهٔ حل مسئله برای استفادهٔ حضار برپاست.

۲. دعوت از اســتادان برجستهٔ ریاضی از دانشگاه‌های خارج از کشور به منظور سخنرانی برای دانش‌آموزان و معلمان ریاضی. هدف اصلی این سخنرانی‌ها، جذب دانش‌آموزان و دانشــجویان به حوزه‌های زندهٔ ریاضی و ایجاد علاقه و خودباوری بین آن‌هاست.

۳. برگزاری مســابقهٔ بین‌المللی ریاضی، مســابقهٔ بین‌المللی کانگورو و جشن ریاضــی بین دانش‌آمــوزان دوره‌های گوناگــون تحصیلــی. برگــزاری این مســابقات بیش از المپیاد بین‌المللی ریاضــی روی آمــوزش ریاضــی دانش‌آموزان تأثیر دارد، زیرا برخلاف المپیــاد ریاضــی، ایــن رقابت‌هــا به دانش‌آموزان زیادی از نقاط گوناگون کشور فرصت می‌دهد، با دانش‌آموزان دیگر رقابت کنند و به تجربهٔ فرهنگی خوبی دست یابند، بی‌آنکه به خارج از کشور سفر کرده باشند.

۴. برگزاری کلاس‌های آمادگی المپیاد ریاضی.

۵. برگــزاری کلاس‌هــای آمادگی برای جشــنوارهٔ خوارزمی. در این کلاس‌ها موضوعــات ریاضی در ســطح فکری دانش‌آمــوزان ارائــه می‌شــوند و قسمت‌های متفاوت یک تحقیق برای انجام به دانش‌آموزان داده می‌شود تا آن‌هــا با تکمیل این قســمت‌ها برای ارائــه در جشــنواره آمادگــی لازم را کسب کنند.

۶. برگــزاری کارســوق ریاضــی بــرای دانش‌آمــوزان بــا موضوع‌هایی که در کتاب‌های درسی وجود ندارند.

۷. برگزاری روز عــدد پی و روز ریاضی (سال روز تولد **حکیم عمر خیام**).

۸. برگزاری کارگاه بازی و ریاضی برای دانش‌آموزان و همکاران دورهٔ ابتدایی.

۹. برگــزاری کارگاه اریگامی (تا ـ کاغذ) برای اســتفادهٔ دانش‌آموزان توســط دکتر **مورالیز**.

۱۰. برگزاری نمایشگاه بازی‌های فکری و اسباب‌بازی ریاضی.

۱۱. برگزاری نمایشــگاه دست‌سازه‌های ریاضی برای دانش‌آموزان و معلمان.

۱۲. برگزاری کارگاه ساخت و تولید ابزار ریاضی برای دانش‌آموزان و معلمان.

۱۳. برگــزاری دوره‌هــای ضمن‌خدمت برای همــکاران در دوره‌های متفاوت تحصیلی با کیفیت مطلوب.

۱۴. انتشــار مجلهٔ ریاضی برای استفادهٔ معلمان و دانش‌آموزان.

۱۵. شرکت در کنفرانس آموزش ریاضی بــه منظور ارائــهٔ فعالیت‌هایــی برای معلمــان و دانش‌آموزان اســتان‌های دیگر.

سخنرانی آقای دکتر میلز در زمینهٔ امید به زندگی در خانهٔ ریاضیات زنجان

۱۶. دعوت از همکاران خانه‌های ریاضی در سطح کشور به منظور انتقال تجربیات به معلمان و دانش‌آموزان.

برای رؤیت فعالیت‌های خانه ریاضی زنجان به منزلگاه «www.zmh.empath.ir» مراجعه فرمایید. در ادامه چند مسئله را از بخش طرح مسئلهٔ سمینارهای ماهانه که توسط آقای **مهدی مفیدی** هدایت می‌شود، در اینجا می‌آوریم:

مسئلهٔ ۱. کدامیک از اعداد $\sqrt[3]{۶۰}$ و $۲+\sqrt[3]{۷}$ بزرگ‌تر هستند؟

کافی است نامساوی زیر را ثابت کنیم:

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\le\sqrt[3]{۴(x+y)},$$

که با در نظر گرفتن $x=۸$ و $y=۷$ حکم به‌دست می‌آید. برای اثبات نامساوی بالا قرار می‌دهیم:

$x=a^۳$ و $y=b^۳$ و لذا داریم:

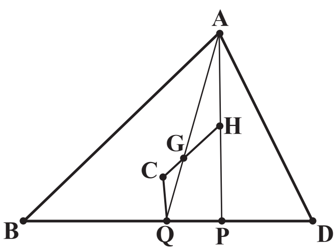
$$a+b\le\sqrt[3]{۴(a^۳+b^۳)},$$

اگر طرفین نامساوی را به توان ۳ برسانیم و ساده کنیم، با فرض آنکه a و b مثبت هستند، با ساده کردن، نامساوی بدیهی $(a-b)^۲\ge۰$ حاصل می‌شود.

مسئلهٔ ۲. ثابت کنید نقطه‌های هم‌رسی عمودمنصف‌ها، میانه‌ها و ارتفاع‌ها در یک مثلث، هم‌راستا هستند.

حل: فرض کنیم C نقطهٔ هم‌رسی عمودمنصف‌ها و G نقطهٔ هم‌رسی میانه‌ها باشد. CG را تا نقطهٔ H طوری امتداد می‌دهیم که GH=۲CG. حال کافی است نشان دهیم H نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌ها است. پاره‌خط AH ضلع BD را در P قطع می‌کند. از آنجایی که داریم:

$$QG=\frac{۱}{۲}GA,\ \frac{QG}{GA}=\frac{CG}{GH}$$



بنابراین AH موازی QC است. اما CQ بر BD عمود است و در نتیجه AP یک ارتفاع مثلث است. به طریق مشابه DH نیز بر AB عمود است. بنابراین H نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌ها است.

پرسش‌های پیکارجو!

۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲(۲^{۵۷}+۱)$ بر $۲^{۲۹}+۲^{۱۵}+۱$ کدام است؟

الف) **۱** ب) **۲** ج) **صفر** د) **۳** هـ) $۲^{۱۵}$

لطیفهٔ اول

روزی یـک اسـتاد ریاضـی، خسـته از تدریـس در حال بازگشـت به منـزل بود و احساس گرسنگی شدیدی هم آزارش می‌داد. با عبور از کنار یک کافه قنادی که شیرینی‌ها و کیک‌ها به طرز هوس‌انگیزی پشت ویترین آن چیده شـده بودند، بی‌اختیار وارد قنادی شـد و یک کیک گرد و بزرگ سـفارش داد تا همان‌جا آن را بخورد. پیشـخدمت گفت: «ببخشـید، کیک را هشت قسـمت کنم یا شش قسمت؟»

استاد گفت: «شش قسمت کنید، چون فکر نمی‌کنم بتوانم هشت قسمت را بخورم!»

بعد از آنکه اسـتاد همهٔ کیک را با اشتها خورد، از همان پیشخدمت پرسید: «ببخشید آیـا ممکن اسـت دسـتور تهیـهٔ این کیک خوش‌مزه را بگویید؟»

پیشـخدمت گفت: «کاری ندارد. در یک ظرف مخصوص، $\frac{1}{3}$ حجم آب، $\frac{1}{3}$ حجم کره و خامه، و $\frac{2}{3}$ حجم شیر و آب می‌ریزیم و... .»

استاد حرفش را قطع کرد و گفت: «ولی این‌ها که روی هم می‌شوند $\frac{4}{3}$ حجم!»

و پیشـخدمت گفت: «خب برای همین است که کیک‌های ما این‌قدر بزرگ هستند!»

لطیفهٔ دوم

روزی یک مهندس و دوسـتش که پروفسـور ریاضی بود، در حال بحث برای حل یک مسـئلهٔ مورد نیاز مهندس برای طراحی یک قطعهٔ ظریف بودند. اسـتاد ریاضی گفت: «ببین، برای حل این مسئله ما باید یک معادلهٔ خاص را در فضایی ۱۳ بعدی حل کنیم.»

مهنـدس با تعجب گفت: «فضای ۱۳ بعـدی؟! چه‌طور می‌توانی با آن کار کنی؟»

و اسـتاد گفت: «کاری ندارد، من مسئله را در حالت کلی و در یک فضای n بعدی حل می‌کنم و بعد n را مساوی ۱۳ قرار می‌دهم!»

لطیفهٔ سوم

● روزی دو نفر سوار بر بالن در آسمان پرواز می‌کردند که ناگهان ابری عظیم جلویشان سبز شد. به داخل ابر رفتند و مسیر خود را گم کردند. وقتی از ابر بیرون آمدند، بالای قلهٔ کوهی بودند و از بالا مردی را دیدند که روی قله نشسته و در حال فکر کردن است. یکی از آن‌ها به مرد گفت: «هِی آقا ما الان کجا هستیم؟»

مـرد جوابی نداد و دوباره ابر آمـد و آن‌ها را در خود فرو برد. مدتی گذشـت و آن‌ها از ابر بیرون آمدند و دوباره همان مرد را در حال تفکر دیدند. باز از او پرسیدند: «آقا، ما الان کجا هستیم؟»

مرد سرش را بلند کرد و گفت: «شما در بالن هستید!»

یکی از دو بالن‌سـوار به دیگری گفت: «شـرط می‌بنـدم این مرد ریاضی‌دان است!»

دیگری پرسـید: چرا؟ و او گفت: «به سه دلیل: اولاً خیلی فکر کرد تا جواب بدهد، ثانیاً سـاده‌ترین جواب ممکن را داد، ثالثاً اصلاً به کاربرد جوابی که داد فکر نکرد!»

میرشهرام صدر

ضرب داخلی و نامساوی «کُشی»!

ضرب داخلی بردارها در R^3 و کاربردهای آن

اشاره

در این مقاله به ارائهٔ تعریف ضرب داخلی و مفهوم آن می‌پردازیم، سپس خواص ضرب داخلی را شرح می‌دهیم. در ادامه به کاربرد ضرب داخلی در حل مسائل هندسی خواهیم پرداخت.

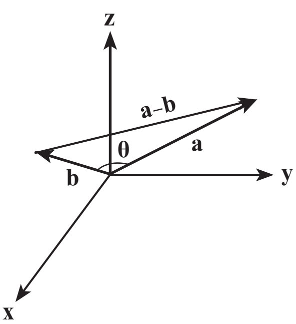
نماد «.» را برای اولین‌بار *گوتفرید ویلهلم فون لایب نیتس*[1] (۱۷۱۶-۱۶۴۶م)، فیلسوف، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان آلمانی، برای ضرب داخلی بین دو بردار به‌کار برد. او حساب دیفرانسیل و انتگرال را هم‌زمان ولی کاملاً مستقل از ایزاک نیوتن[2] به‌دست آورد و از علامت‌هایی که وی در این محاسبات به‌کار برد، مانند $\frac{dy}{dx}$ هنوز هم استفاده می‌شود. در حدود ۱۷۱۲ نزاع بین‌المللی بر سر ادعاهای رقابت‌آمیز «مخترع حساب دیفرانسیل و انتگرال بودن» بین او و نیوتن درگرفت و رفتار لایب‌نیتس در این برخوردها جوانمردانه بود.

تعریف ضرب داخلی

فرض کنیم $a = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $b = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ دو بردار باشند. حاصل‌ضرب داخلی این دو بردار عددی حقیقی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

چنانچه زاویهٔ بین دو بردار a و b را θ در نظر بگیریم، در این صورت می‌توان رابطهٔ بین حاصل‌ضرب داخلی دو بردار و زاویهٔ بین آن‌ها را بررسی کرد (شکل ۱).



شکل ۱

بنابر رابطهٔ کسینوس‌ها در مثلث داریم:

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta \qquad (1)$$

اکنون با توجه به مختصات دو بردار a و b می‌توان نوشت:

$$a - b = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j} + (a_3 - b_3)\mathbf{k}$$

و بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}|a-b|^2 &= (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2\\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\\ &\quad -2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \qquad (2)\end{aligned}$$

و چون $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ و $|b|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$، با جای‌گزینی این روابط و (۲) در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$-2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = -2|a||b|\cos\theta$$

در نتیجه داریم:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |a||b|\cos\theta$$

پس ضرب داخلی دو بردار را می‌توان به‌صورت زیر هم‌تعریف کرد:

$$a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |a||b|\cos\theta$$

واضح است که هرگاه $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد، در این صورت داریم: $a.b = 0$.

تعبیر هندسی ضرب داخلی دو بردار

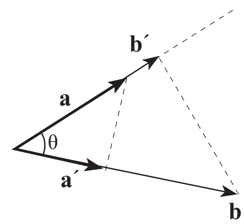
براساس رابطهٔ $a.b = |a||b|\cos\theta$ می‌توان نوشت:

$$a.b = |b|(|a|\cos\theta)$$

با توجه به شکل ۲ ملاحظه می‌کنید که مقدار $|a|\cos\theta$ برابر با اندازهٔ تصویر قائم بردار a روی b است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$a.b = |a'||b| = |b'||a| \qquad (3)$$

یعنی حاصل‌ضرب داخلی دو بردار a و b برابر با حاصل‌ضرب اندازهٔ یکی از بردارها در اندازهٔ تصویر قائم بردار دیگر روی همان بردار است



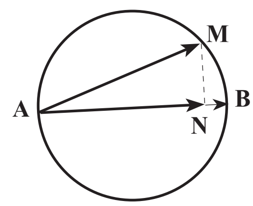
$$\begin{cases} |a'| = |a|\cos\theta \\ |b'| = |b|\cos\theta \end{cases}$$

شکل ۲

مسئلهٔ ۱. نقاط A و B در صفحه مفروض‌اند. اگر $|\overrightarrow{AB}| = ۴$، در این صورت چند نقطه مانند M روی محیط دایره‌ای به قطر AB وجود دارد، به‌طوری که: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = ۱۵$.

حل: فرض کنیم M نقطه‌ای روی محیط دایره‌ای به قطر AB باشد، به‌طوری که: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = ۱۵$ (شکل ۳). با توجه به تعبیر هندسی ضرب داخلی داریم:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AN}| \quad \text{(طبق رابطهٔ ۳)}$$



شکل ۳

از طرف دیگر، چون $\overrightarrow{AN}$ در امتداد $\overrightarrow{AB}$ است، پس: $\overrightarrow{AN} = r\overrightarrow{AB}$ به‌طوری‌که $۰<r<۱$، در نتیجه:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AB}||r\overrightarrow{AB}| = r|\overrightarrow{AB}|^{۲}$$

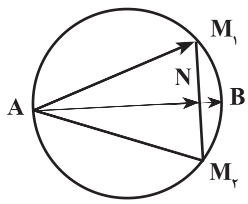
و از آنجا که: $|\overrightarrow{AB}| = ۴$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = ۱۵$، خواهیم داشت:

$$r|\overrightarrow{AB}|^{۲} = ۱۵ \Rightarrow ۱۶r = ۱۵ \Rightarrow r = \frac{۱۵}{۱۶}$$

پس:

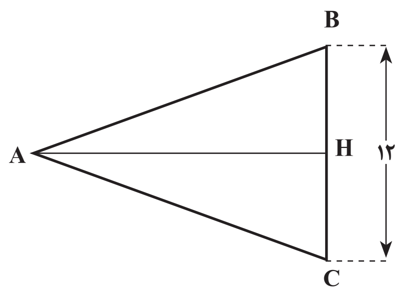
$$\overrightarrow{AN} = r\overrightarrow{AB} = \frac{۱۵}{۱۶}\overrightarrow{AB}$$

در نتیجه دو نقطه مطابق شکل ۴ روی دایره‌ای به قطر AB قرار دارند، به‌طوری که: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM_{۱,۲}} = ۱۵$.



شکل ۴

تمرین ۱. مثلث متساوی‌الساقین ABC (شکل ۵) را در نظر بگیرید. چند نقطه مانند M روی محیط این مثلث وجود دارد به‌طوری که: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AH} = ۶۴$.



شکل ۵

پاسخ: مسئله بی‌شمار جواب دارد که همگی آن‌ها نقاط روی ضلع BC هستند. (چرا؟)

خاصیت‌های ضرب داخلی

فرض کنید a، b و c بردارهایی در $R^{۳}$ هستند و r عددی حقیقی باشد. در این صورت داریم:

الف) $a.a = |a|^{۲} \geq ۰$

ب) $a.a = ۰ \Rightarrow a = ۰$

ج) $a.b = b.a$

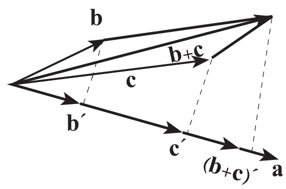
د) $a.(b+c) = a.b + a.c$

هـ) $-|a||b| \leq a.b \leq |a||b|$

و) $(ra).b = a.(rb) = r(a.b)$

اثبات: با توجه به تعریف ضرب داخلی، درستی خاصیت‌ها واضح است ولی در اینجا قسمت‌های «د» و «هـ» را ثابت می‌کنیم.

اثبات د: با توجه به شکل ۵ واضح است که تصویر مجموع دو بردار b و c روی بردار a برابر با مجموع تصویرهای b و c روی a است، یعنی:



$$(b+c)' = b' + c'$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} a.(a+b) &= |a||(b+c)'| \\ &= |a|(|b'|+|c'|) \\ &= |a||b'|+|a||c'| = a.b + a.c \end{aligned}$$

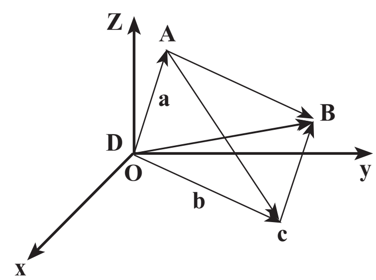
اثبات هـ: فرض کنیم زاویهٔ بین دو بردار a و b برابر با θ باشد، در این صورت:

$$\begin{aligned} -۱ \le \cos\theta \le ۱ &\Rightarrow -|a||b| \le |a||b|\cos\theta \le |a||b| \\ &\Rightarrow -|a||b| \le a.b \le |a||b| \end{aligned}$$

مسئلهٔ ۲. با استفاده از بردارها ثابت کنید: در یک متوازی‌الاضلاع، مجموع مربع‌های طول‌های دو قطر، برابر با مجموع مربع‌های طول اضلاع است.

حل: متوازی‌الاضلاع ABCD را چنان در نظر می‌گیریم که D بر مبدأ مختصات منطبق باشد (شکل ۶).

با توجه به شکل واضح است که:



$$DB = |a+b|$$
$$CA = |a-b|$$

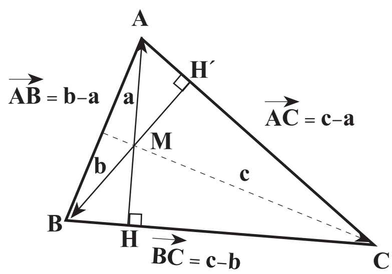
شکل۶

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} DB^۲ + CA^۲ &= |a+b|^۲ + |a-b|^۲ \\ &= (a+b).(a+b) + (a-b).(a-b) \\ &= |a|^۲ + |b|^۲ + ۲a.b + |a|^۲ + |b|^۲ - ۲a.b \\ \Rightarrow DB^۲ + CA^۲ &= |a|^۲ + |b|^۲ + |a|^۲ + |b|^۲ \\ &= DA^۲ + AB^۲ + BC^۲ + DC^۲ \end{aligned}$$

مسئلهٔ ۳. با استفاده از بردارها ثابت کنید که ارتفاع‌های هر مثلث همرس‌اند.

حل: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و محل برخورد دو ارتفاع AH و ´BH را M می‌نامیم (شکل ۷).



شکل ۷

اکنون از M به C وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم که: $\overrightarrow{MC} = c$، $\overrightarrow{MB} = b$ و $\overrightarrow{MA} = a$. در این صورت چون AH بر BC عمود است، پس: $a.(c-b) = ۰$

$$\Rightarrow a.c - a.b = ۰ \Rightarrow a.c = a.b \qquad (۴)$$

از طرف دیگر، ´BH بر AC عمود است، پس:

$$b.(c-a) = ۰$$
$$\Rightarrow b.c = a.b \qquad (۵)$$

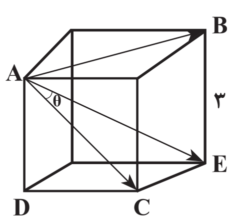
با توجه به رابطه‌های (۴) و (۵) داریم:

$$\begin{aligned} b.c = a.c &\Rightarrow b.c - a.c = ۰ \\ &\Rightarrow (b-a).c = ۰ \end{aligned}$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که c بر $\overrightarrow{AB}$ عمود است، در نتیجه MC ارتفاع وارد بر AB است و از نقطهٔ M نیز می‌گذرد.

مسئلهٔ ۴. در مکعب شکل زیر با اندازه یال ۳، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$



شکل ۸

حل:

$$I=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AE}})$$

$$=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta \qquad (۶)$$

چون AC قطر وجه مکعب است، پس: $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{۲}\times ۳$. همچنین AE قطر مکعب اســت، پس: $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{۳}\times ۳$. اما در $\overset{\Delta}{ACE}$ با توجه به رابطهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$|\overrightarrow{CE}|^۲=|AC|^۲+|AE|^۲-۲|AC||AE|\cos\theta$$
$$\Rightarrow ۹=۱۸+۲۷-۲(۳\sqrt{۲})(۳\sqrt{۳})\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{۲}{\sqrt{۶}}$$

با توجه به رابطهٔ (۶) داریم:

$$I=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta$$
$$=۳\sqrt{۲}\times ۳\sqrt{۳}\times\frac{۲}{\sqrt{۶}}=۱۸$$

نامساوی کُشی

فرض کنیم a و b دو بردار باشــند، به‌طوری که زاویهٔ بین آن‌ها θ باشد. در این صورت همواره داریم:

$$|a.b|\le|a||b| \qquad \text{(نامساوی کُشی}^۳\text{)}$$

اثبات: با اســتفاده از استدلال بازگشتی، درستی این نامساوی را ثابت می‌کنیم:

$$|a.b|\le|a||b|\Leftrightarrow|a||b|\cos\theta\le|a||b|\Leftrightarrow\cos\theta\le ۱$$

فــرض کنیــم: $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$. در ایــن صورت با جای‌گزینــی مختصات بردارهای a و b در نامساوی کشــی، درســتی نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$|a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳|\le\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}\times\sqrt{b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲} \qquad (۷)$$

چون نامساوی (۷) برای دو بردار دلخواه a و b برقرار است، بنابراین با جای‌گزینی $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(۱,۱,۱)$ در نامســاوی (۷) درســتی نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$|a_۱+a_۲+a_۳|\le\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}\times\sqrt{۱^۲+۱^۲+۱^۲}$$
$$\Rightarrow(\frac{a_۱+a_۲+a_۳}{۳})^۲\le\frac{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}{۳} \qquad (۸)$$

مســئلهٔ ۵. اگــر x، y و z ســه عــدد حقیقی باشــند کــه در رابطهٔ $-z+۲y+z=۳\sqrt{۲}$ صــدق کنند، در این صــورت مینی‌مم عبارت $x^۲+y^۲+z^۲$ چه‌قدر است؟

حل: فــرض کنیــم: $a=(x,y,z)$ و $b=(-۱,۲,۱)$. در این صورت با توجه بــه رابطــهٔ $-z+۲y+z=۳\sqrt{۲}$ داریــم: $a.b=۳\sqrt{۲}$. اکنون مختصات بردارهای a و b را در نامساوی (۷) قرار می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$|-x+۲y+z|\le\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\times\sqrt{۱+۴+۱}$$
$$\Rightarrow(۳\sqrt{۲})^۲\le(x^۲+y^۲+z^۲)\times ۶$$
$$\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲\ge ۳\Rightarrow\min(x^۲+y^۲+z^۲)=۳$$

تمریــن ۲. اگــر x، y و z ســه عــدد حقیقی باشــند، ثابــت کنید: $x^۲+y^۲+z^۲\ge|xy+yz+xz|$.

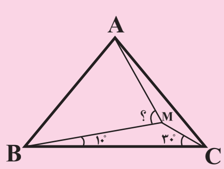
راهنمایــی: فرض کنید: $a=(x,y,z)$ و $b=(y,z,x)$ و از نامســاوی کشی استفاده کنید.

پی‌نوشت‌ها

1. Gottfried Wilhelm Leibniz
2. Isaac Newton
3. Augustin-Louis Cauchy

۵ پرسش‌های پیکارجو!

در شکل مقابل، مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است (AB=AC)، $\hat{A}=۸۰^\circ$ و نقطهٔ M طوری واقع است کــه $M\hat{C}B=۳۰^\circ$ و $M\hat{B}C=۱۰^\circ$. $A\hat{M}B$ چنــد درجــه اســت؟



الف) ۵۰° ب) ۷۰° ج) ۷۵° د) ۶۰° هـ) ۸۰°

دنباله
تقریبات اعشاری

مراد کریمی شهماروندی
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شهرستان شهرکرد

برای ورود به بحث ابتدا با دو دنبالهٔ دیگر به‌نام‌های «دنبالهٔ خارج‌قسمت‌ها» و «دنبالهٔ تفاضلات» آشنایی پیدا کنیم.

الف) دنبالهٔ خارج‌قسمت‌ها

برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$، اگر عدد a را بر عدد b تقسیم کنیم، خارج‌قسمت در مرحلهٔ اول $۰/a_1$، در مرحلهٔ دوم $۰/a_1a_2$، در مرحلهٔ سوم $۰/a_1a_2a_3$ و در مرحلهٔ nام $۰/a_1a_2...a_n$ به‌دست می‌آید. اگر این خارج‌قسمت‌ها را پشت‌سرهم بنویسیم، دنباله‌ای به‌دست می‌آید که به دنبالهٔ خارج‌قسمت‌ها معروف است. البته باید توجه داشت که قبل از انجام تقسیم، در صورت امکان کسر را ساده کرد تا تقسیم راحت‌تر انجام شود.

مثال ۱. عدد ۴ را بر عدد ۹ تقسیم کنید و خارج‌قسمت‌های آن را به‌دست آورید. سپس خارج‌قسمت‌ها را به‌صورت یک دنباله بنویسید.

$$\begin{array}{r|l} ۴/۰ & ۹ \\ \underline{۳۶} & ۰/۴۴۴ ... \rightarrow \\ ۴ & \\ \vdots & \\ \downarrow & \end{array}$$

دنباله خارج قسمت‌ها : ۰/۴، ۰/۴۴، ۰/۴۴۴، ۰/۴۴۴۴ و ...

ب) دنبالهٔ تفاضلات

در حالت کلی جملهٔ عمومی یک دنباله می‌تواند شکل‌های مختلفی داشته باشد. برخی دنباله‌ها به‌گونه‌ای هستند که اگر به جملات آن‌ها نگاه کنیم، متوجه می‌شویم که این جملات به عدد خاصی نزدیک می‌شوند. حال اگر دنبالهٔ خارج‌قسمت‌ها را به‌ترتیب از عدد گویای معین $\frac{a}{b}$ کم کنیم، یک دنبالهٔ هندسی به‌دست می‌آید که جملات آن به سرعت به صفر نزدیک می‌شوند. به این دنباله، «دنبالهٔ تفاضلات» گویند.

نتیجهٔ ۱. اگر جملات دنبالهٔ تفاضلات عدد معین $\frac{a}{b}$ به صفر نزدیک شوند، جملات دنبالهٔ خارج‌قسمت‌ها به خود عدد $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شوند.

مثال ۲. در تقسیم عدد ۱ بر ۳ دنبالهٔ تفاضلات را به‌دست آورید و نتیجهٔ به‌دست آمده را بیان کنید.

دنبالهٔ خارج قسمت‌ها: ۰/۳، ۰/۳۳، ۰/۳۳۳، ۰/۳۳۳۳ و ...

$$\begin{array}{r|l} ۱/۰ & ۳ \\ \underline{-۹} & ۰/۳۳۳ ... \rightarrow \\ ۱ & \\ \vdots & \\ \downarrow & \end{array}$$

$$\frac{۱}{۳}-۰/۳=\frac{۱}{۳}-\frac{۳}{۱۰}=\frac{۱۰-۹}{۳۰}=\frac{۱}{۳۰}$$

$$\frac{۱}{۳}-۰/۳۳=\frac{۱}{۳}-\frac{۳۳}{۱۰۰}=\frac{۱۰۰-۹۹}{۳۰۰}=\frac{۱}{۳۰۰}$$

$$\frac{۱}{۳}-۰/۳۳۳=\frac{۱}{۳}-\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}=\frac{۱۰۰۰-۹۹۹}{۳۰۰۰}=\frac{۱}{۳۰۰۰}$$

$$\frac{۱}{۳}-۰/۳۳۳۳=\frac{۱}{۳}-\frac{۳۳۳۳}{۱۰۰۰۰}=\frac{۱۰۰۰۰-۹۹۹۹}{۳۰۰۰۰}=\frac{۱}{۳۰۰۰۰}$$

دنبالهٔ تفاضلات : $\frac{۱}{۳۰}$، $\frac{۱}{۳۰۰}$، $\frac{۱}{۳۰۰۰}$، $\frac{۱}{۳۰۰۰۰}$ و ...

$\Rightarrow$ دنبالهٔ تفاضلات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۱۰}$ است.

نتیجهٔ ۲. همان‌طور که مشاهده می‌شود، جملات دنباله تفاضل‌ها به صفر نزدیک می‌شوند، پس جملات خود دنباله به $\frac{۱}{۳}$ نزدیک می‌شوند.

ج) دنبالهٔ تقریبات اعشاری

تاکنون برای دنباله‌ها عدد خاصی پیدا می‌کردیم که دنباله به آن عدد نزدیک می‌شد. حال می‌خواهیم عکس این کار را به‌صورت یک قانون (تعریف) بیان کنیم. «برای هر عدد حقیقی مثبت x می‌توان دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به x نزدیک شوند. جملهٔ nام این دنباله یک عدد اعشاری با n رقم اعشار است و هر جملهٔ آن با اضافه‌شدن یک رقم اعشار به جملهٔ قبلی به‌دست می‌آید. این دنباله را دنبالهٔ تقریبات اعشاری x و جملهٔ nام آن را «تقریب اعشاری x با n رقم اعشار» می‌نامند.

۱۰ نکتهٔ موجود در تعریف دنبالهٔ تقریبات اعشاری از این قرارند:

۱. تمام اعداد حقیقی مثبت دنبالهٔ تقریبات اعشاری دارند.

۲. جملات دنبالهٔ تقریبات اعشاری یک عدد به خود آن عدد در حال نزدیک شدن هستند.

۳. جملهٔ nام این دنباله یک عدد اعشاری n رقمی است.

۴. هر جملهٔ آن با اضافه شدن یک رقم اعشار به جملهٔ قبلی به‌دست می‌آید.

۵. همهٔ جملات دنبالهٔ تقریبات اعشاری باید اعشاری باشند.

۶. جملهٔ nام آن را تقریب اعشاری x با n رقم اعشار می‌نامند.

۷. جملهٔ اول تقریبات اعشاری حتماً باید دارای یک رقم اعشار باشد.

۸. دنبالهٔ تقریبات اعشاری همان دنبالهٔ خارج‌قسمت‌هاست.

۹. در دنبالهٔ تقریبات اعشاری وقتی رقم اول اعشار a_1 باشد، در تمام جملات بعدی دنباله، رقم اول اعشار a_1 می‌ماند، وقتی رقم دوم اعشار a_2 است، در تمام جملات بعدی دنباله نیز رقم دوم اعشار a_2 است و...

۱۰. نمایش کلی هر دنبالهٔ تقریبات اعشاری به‌صورت زیر است:

$x_1=0/a_1$ ، $x_2=0/a_1a_2$ ، $x_3=0/a_1a_2a_3$ ، ... ، $x_n=0/a_1a_2...a_n$ و ...

مثال ۳. کدام‌یک از دنباله‌های زیر می‌توانند بیانگر دنبالهٔ تقریبات اعشاری یک عدد حقیقی باشند؟ چرا؟

الف) ۰/۶۶، ۰/۶۶۶، ۰/۶۶۶۶ و ...

(دنبالهٔ تقریبات نیست، زیرا جملهٔ اول باید فقط یک رقم اعشار داشته‌باشد.)

ب) ۱/۵، ۱/۵۴، ۱/۵۴۵ و ...

(دنبالهٔ تقریبات اعشاری است چون همهٔ شرایط تعریف را دارد.)

ج) ۰/۷، ۰/۷۷۷، ۰/۷۷۷۷ و ...

(دنبالهٔ تقریبات نیست، زیرا در جملات دوم به بعد تعداد ارقام اعشاری بیش از مرتبه است.)

د) ۰/۷، $\frac{\sqrt{2}}{2}$، ۰/۷۰۳، ...

(دنبالهٔ تقریبات نیست، زیرا جملهٔ دوم اعشاری نیست.)

مثال ۴. دنبالهٔ تقریبات اعشاری اعداد زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{3}{7} \Rightarrow$ **حل:** ۰/۴، ۰/۴۲، ۰/۴۲۸، ۰/۴۲۸۵ و ...

ب) $2 \Rightarrow$ **حل:** ۱/۹، ۱/۹۹، ۱/۹۹۹، ۱/۹۹۹۹ و ...

ج) $\frac{11}{6} \Rightarrow$ **حل:** ۱/۸، ۱/۸۳، ۱/۸۳۳، ۱/۸۳۳۳۳ و ...

ر) دنبالهٔ تقریبات اعداد اعشاری گنگ

برای یافتن دنبالهٔ تقریبات اعشاری اعداد گنگ به کمک ماشین‌حساب یا جذر گرفتن به روش‌های معمولی می‌توان اقدام کرد.

مثال ۵. دنبالهٔ تقریبات اعشاری اعداد گنگ زیر را به کمک ماشین‌حساب بنویسید.

۱) $\sqrt{2} \Rightarrow$ ۱/۴، ۱/۴۱، ۱/۴۱۴، ۱/۴۱۴۲ و ...

۲) $\sqrt{3} \Rightarrow$ ۱/۷، ۱/۷۳، ۱/۷۳۲، ۱/۷۳۲۰ و ...

۳) $\sqrt{5} \Rightarrow$ ۲/۲، ۲/۲۳، ۲/۲۳۶، ۲/۲۳۶۰ و ...

۴) $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

۲×(۱/۴، ۱/۴۱، ۱/۴۱۴ و ...) = ۲/۸، ۲/۸۲، ۲/۸۲۸ و ...

۵) π (عدد پی) $\Rightarrow$ ۳/۱، ۳/۱۴، ۳/۱۴۱، ۳/۱۴۱۵ و ...

۶) e (عدد نپر) $\Rightarrow$ ۲/۷، ۲/۷۱، ۲/۷۱۸، ۲/۷۱۸۲ و ...

محاسبهٔ اعداد دارای توان‌های گنگ به کمک دنبالهٔ تقریبات اعشاری

برای یافتن مقدار اعداد توان‌دار، وقتی توان عدد گویا نباشد، راه اصلی آن است که تقریب‌های اعشاری توان را به‌دست آوریم و مقدار تقریبی هر جمله را بنویسیم تا به مقدار واقعی نزدیک شویم.

مثال ۶. مقدار تقریبی نزدیک به $3^{\sqrt{2}}$ چه‌قدر است؟ از آنجا که دنبالهٔ تقریبات اعشاری $\sqrt{2}$ دنباله‌ای به‌صورت

۱/۴، ۱/۴۱، ۱/۴۱۴، ۱/۴۱۴۲ و ...

است، هر یک از مقدارهای

$3^{1/4}$، $3^{1/41}$، $3^{1/414}$، $3^{1/4142}$ و ...

مقدار تقریبی برای $3^{\sqrt{2}}$ هستند.

توجه: روش دیگری هم برای به‌دست آوردن دنبالهٔ تقریبات اعشاری هر عدد حقیقی (گویا یا گنگ) وجود دارد که در قالب یک فعالیت در صفحهٔ ۱۵ کتاب ریاضی دوم دبیرستان آمده است. با عنایت به اینکه این روش که به روش بزرگ‌نمایی معروف است، به‌طور مفصل در مجلهٔ برهان شمارهٔ ۸۵، بهار ۱۳۹۲ معرفی شده است، علاقه‌مندان می‌توانند به این شماره از مجله مراجعه کنند.

راهنمای حل مسائل

آمادگی برای آزمون‌های مستمر

هندسهٔ ۱

۱. زاویه‌ها را $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ و متمم‌های آن‌ها را $90-\alpha_1, 90-\alpha_2, ..., 90-\alpha_n$ بنامید و از فرض‌های مسئله استفاده کنید (جواب: n=۵).

۲. با توجه به ویژگی نیم‌ساز (هر نقطه روی نیم‌ساز زاویه، از دو ضلع آن به یک فاصله است)، $FH=FH'$ و مثلث‌های EFH و EFH' هم‌نهشت‌اند و $EH=EH'$.

پس: $EC=ED$ و: $E\hat{D}B=\hat{C}=E\hat{D}C$

و چون $\hat{B}_1=\hat{B}_2$، با فرض $\hat{C}=\alpha$ نتیجه می‌شود: $\hat{B}=\alpha$ و $\hat{A}+\hat{B}_2=B\hat{D}C=2\alpha$

در نتیجه: $\hat{A}=2\alpha-\frac{\alpha}{2}=\frac{3\alpha}{2}$ و با توجه به $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ نتیجه می‌شود: $\alpha=\frac{360}{7}$ و $\hat{A}=\frac{540}{7}$.

۳. مثلث ADB متساوی‌الساقین است و لذا: $A\hat{D}B=A\hat{B}D$. چون BD نیم‌ساز است، پس: $A\hat{B}D=A\hat{D}B=D\hat{B}C$ و در نتیجه: $AD \| BC$ و...

هندسهٔ ۲

۱. مثلث‌های ADB و ADC در رأس A دارای ارتفاع مشترک هستند و در نتیجه نسبت مساحت‌های آن‌ها $\frac{BD}{CD}$ است. بنابراین: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB}{AC}$. حال از D دو عمود بر AB و AC رسم کنید و از آنجا به حکم برسید.

۲. در مثلث BDC، P مرکز ثقل مثلث است. از ویژگی این نقطه استفاده کنید و طول‌های OP و DP را بیابید.

۳. در مثلث ABC، $\hat{A}=120^\circ$ و: $AB=AC=2\sqrt{6}$. نیم‌ساز $\hat{B}$، AC را در D قطع می‌کند. طول BC را با رسم ارتفاع رأس A و به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آورید. سپس طول BD را به کمک قضیهٔ نیم‌سازها محاسبه کنید و در مثلث ABD، با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها طول BD را به‌دست آورید.

ریاضی ۲

۱. با فرض $a_n=kn+h$، نشان دهید که مقدار a_n-a_{n-1} ثابتی است.

۲.

$$\frac{a+b}{2}=2\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=4ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2-14ab=0\Rightarrow\frac{a^2+b^2-14ab}{b^2}=0$$

$$\Rightarrow(\frac{a}{b})^2-14(\frac{a}{b})+1=0$$

از حل معادلهٔ درجهٔ دوم بالا مقدار $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

۳. فرض کنیم دنبالهٔ هندسی باشد که جملات mام، nام و pام آن ۴ و ۶ و ۸ باشند:

$$\begin{cases}a_m=aq^{m-1}=4\\a_n=aq^{n-1}=6\\a_p=aq^{p-1}=8\end{cases}$$

از تقسیم دوبه‌دوی روابط بالا خواهیم داشت:

$$q^{m-n}=\frac{2}{3},q^{n-p}=\frac{3}{4}\Rightarrow q=(\frac{2}{3})^{\frac{1}{m-n}},q=(\frac{3}{4})^{\frac{1}{n-p}}$$

$$\Rightarrow(\frac{2}{3})^{\frac{1}{m-n}}=(\frac{3}{4})^{\frac{1}{n-p}}\Rightarrow(\frac{2}{3})^{n-p}=(\frac{3}{4})^{m-n}$$

$$\Rightarrow\frac{2^{n-p}}{3^{n-p}}=\frac{3^{m-n}}{2^{2m-2n}}\Rightarrow 2^{2m-n-p}=3^{m-p}$$

و این برابری امکان‌پذیر نیست. (چرا؟)

حسابان

۱.

$$\frac{S_n}{S'_n}=\frac{\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}{\frac{n}{2}[2a'+(n-1)d']}=\frac{2a+(n-1)d}{2a'+(n-1)d'}=\frac{7n+1}{4n+27}$$

در تساوی فوق n=۲۱ قرار دهید و نتیجه را به‌دست آورید.

۲. سه نقطه را $A\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$، $B\left|\begin{matrix}b\\f(b)\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}c\\f(c)\end{matrix}\right.$ در نظر بگیرید. حال با فرض a+c=۲b، نشان دهید:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad و \quad \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \quad و \quad \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

جملاتی از یک دنبالهٔ حسابی‌اند؛ یعنی:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=2\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

۳.

$$2x^2-x-2=0 \quad \alpha+\beta=S=\frac{1}{2},\alpha\beta=P=-1$$

$$\alpha^7+\beta^7=(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^3\beta^3(\alpha+\beta)$$

با محاسبهٔ مقادیر $\alpha^4+\beta^4$ و $\alpha^3+\beta^3$ راه‌حل را کامل کنید.

دیفرانسیل و انتگرال

۱.

$$1=1+0\Rightarrow x.1=x(1+0)\Rightarrow x=x+x\times0$$

$$\Rightarrow x+(-x)=(-x)+x+x\times0\Rightarrow0=0+x\times0\Rightarrow x\times0=0$$

۲. برهان خلف: فرض کنیم $\log(\sqrt{2}+1)$ عددی گویا باشد. با توجه به مثبت بودن این عدد می‌توان نوشت:

$$\log(\sqrt{2}+1)=\frac{p}{q},\ \ p,q\in N$$

بنابراین: $\sqrt{2}+1=10^{\frac{p}{q}}$ و از آنجا: $(\sqrt{2}+1)^q=10^p$.

این تساوی ممکن نیست، زیرا 10^p عددی طبیعی و $(\sqrt{2}+1)^q$ عددی گنگ است. (چرا؟ با توجه به بسط دوجمله‌ای خیام، پاسخ را توجیه کنید.)

۳. این دنباله ابتدا نزولی و سپس صعودی است، پس باید نقطهٔ مینی‌مم آن را بیابیم؛ یعنی جایی که در آن جملات شروع به صعود می‌کنند؛ یعنی:

$$a_{n+1}>a_n\Rightarrow\frac{(1/01)^{n+1}}{(n+1)^2+1}>\frac{(1/01)^n}{n^2+1}$$

$$\Rightarrow\frac{1/01}{n^2+2n+2}>\frac{1}{n^2+1}$$

$$\Rightarrow(1/01)n^2+1/01>n^2+2n+2$$

$$\Rightarrow0/01n^2-2n-0/99>0\Rightarrow n^2-200n-99>0$$

$$\Rightarrow(n-100)^2>10099\Rightarrow n-100>\sqrt{10099}$$

$$\Rightarrow n>100+\sqrt{10099}$$

پس: min(n)=۲۰۱ و کوچک‌ترین جملهٔ این دنباله، جملهٔ دویست‌ویکم است.

ریاضیات عمومی

۱. از رابطهٔ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ برای تشخیص مستقل بودن استفاده کنید (جواب: مستقل هستند).

۲. از نمودار درختی یا قانون احتمال کل استفاده کنید (جواب: $\frac{1}{3}\times(\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2})$).

۳. از فرمول توزیع دوجمله‌ای استفاده کنید (جواب: $\binom{20}{7}\times(\frac{3}{10})^7\times(\frac{7}{10})^{13}$).

هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

۱. کافی است دو طرف تساوی فرض، یعنی $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ را به توان ۲ برسانید و a.b را بیابید. (جواب: $\frac{\pi}{3}$).

۲. اگر چهارضلعی را ABCD و ۴ نقطهٔ وسط اضلاع را M، N، P و Q بنامیم و قطر AC را رسم کنیم، کافی است ثابت کنیم: $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{QP}$.

۳. از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب خارجی نسبت به جمع استفاده کنید (جواب: ۱۵).

ریاضیات ۳ تجربی

۱. الف) حالت‌های متمایز برای سه تاس ۴×۵×۶ است (جواب: $\frac{۵}{۹}$).

ب) به کمک پیشامد متمم حل کنید (جواب: $\frac{۱}{۵۴}$).

۲. مجموعهٔ A را اعداد بخش‌پذیر بر ۳ و مجموعهٔ B را اعداد بخش‌پذیر بر ۵ تعریف کنید و $P(A-B)$ را به‌دست آورید (جواب: $\frac{۱۳۳}{۵۰۰}$).

۳. از نمودار درختی کمک بگیرید (جواب: $(\frac{۹}{۲۸}+\frac{۸}{۳۰})\times\frac{۱}{۲}$).

جبر و احتمال

۱. به طرفین فرض استقرا عدد $۳^{k+۱}$ را اضافه کنید.

۲. در دو طرف نابرابری عدد ۲ را ضرب کنید و آن را به‌صورت مجموع مربعات دو سه‌جمله‌ای بنویسید.

۳. اگر نامساوی برقرار نباشد (فرض خلف) پس باید: $\frac{n+a}{n+۲a} > \frac{n}{n+a}$. این نامساوی را ساده کنید و به تناقض برسید.

ریاضیات گسسته

۱. دانش‌آموزان را رأس‌های یک گراف و رابطهٔ دوستی بین دو نفر را یال بین آن‌ها تعریف کنید.

۲. کافی است از گراف $k_۸$، سه یال حذف کنید که عمل حذف سه یال به صورت‌های متفاوتی انجام‌پذیر است (جواب: حداقل ۲ رأس و حداکثر ۴ رأس).

۳. با ۶ رأس یک گراف کامل تشکیل دهید و... .

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی (ایستگاه دوم)

معمای اول: اگر نوشتهٔ اول درست باشد، لاجرم نوشتهٔ دوم هم درست خواهد بود. در نتیجه هر دو نوشته درست هستند و این خلاف گفتهٔ قاضی است. پس باید نوشتهٔ اول نادرست باشد و در نتیجه در آن جام، زهر و در جام دوم شربت باشد و محکوم باید جام دوم را بنوشد.

معمای دوم: اگر هر دو نوشته درست باشند، پس لااقل یکی از دو جام حاوی شربت است و زهر در جام اول و در نتیجه شربت در جام دوم است. اما اگر هر دو نوشته نادرست باشند، یعنی نوشتهٔ اولی نادرست است و در نتیجه «هیچ‌یک از دو جام محتوی شربت نیست» و یا هر دو محتوی زهر هستند. ولی نادرستی نوشتهٔ دوم می‌رساند که «زهر در جام دیگر نیست» و این دو متناقض‌اند. پس فقط ممکن است هر دو جمله درست باشند و لذا باز هم شربت در جام دوم است.

معمای سوم: باز هم به همان صورت استدلال می‌کنیم. اگر هر دو جمله درست باشند، از اولی برمی‌آید که در جام اول زهر است و یا در جام دوم شربت است (یعنی یکی از این دو جمله درست است و شاید هر دو). از دومی هم برمی‌آید که در جام اول شربت است. بنابراین برای درستی جملهٔ اول، لازم است در جام دوم شربت باشد (چون قسمت اول آن نادرست است). پس به‌طور خلاصه، اگر هر دو جمله درست باشند، نتیجه می‌گیریم که در هر دو جام شربت وجود دارد. اما اگر هر دو جمله نادرست باشند چه‌طور؟

از نادرستی جملهٔ اول برمی‌آید که «نه در این جام زهر است و نه در جام دیگر شربت» که معادل است با آنکه: «در جام اول شربت است و در جام دوم زهر». نادرستی جملهٔ دوم هم می‌رساند که «در جام دیگر شربت نیست»، یعنی در جام اول زهر وجود دارد و می‌بینیم که بین دو نتیجهٔ فوق تناقض وجود دارد. بنابراین فقط ممکن است هر دو جمله درست باشند و لذا در هر دو جام شربت وجود دارد و چه چیزی از این بهتر!

معمای چهارم: چون دو جمله یکسان هستند، پس ممکن نیست که یکی درست و دیگری نادرست باشد، لذا یا هر دو درست و یا هر دو نادرست هستند. اگر هر دو جمله درست باشند، یعنی واقعاً در هر دو جام شربت وجود دارد. اما اگر در جام دوم شربت باشد، جملهٔ روی آن نادرست است. یعنی در هر دو جام شربت وجود ندارد و این ایجاد تناقض می‌کند. پس باید هر دو جمله نادرست باشند و در نتیجه در جام دوم شربت و در جام اول زهر باشد.

معمای پنجم: اگر جملهٔ دوم درست باشد، ناگزیر جملهٔ اول هم درست است و این یعنی در جام اول شربت و در دومی زهر وجود دارد. اما اگر جملهٔ دوم نادرست باشد، نتیجه می‌شود که در جام اول زهر است و در نتیجه جملهٔ روی آن نادرست است و این ایجاد تناقض می‌کند. پس جملهٔ دوم درست است و شربت در جام اول است.

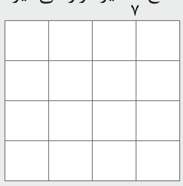
پاسخ پرسش‌های پیکارجو!

۱. هر زاویهٔ یک nضلعی منتظم از دستور $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$ به‌دست می‌آید. برای آنکه این حاصل، عددی طبیعی باشد، دو حالت ممکن است:

الف) $n|۱۸۰$ و چون $۵\times۳^۲\times۲^۲=۱۸۰$، پس تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت این عدد را می‌شماریم. می‌دانیم که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عددی که به‌صورت $P_۱^{\alpha_۱}P_۲^{\alpha_۲}...P_k^{\alpha_k}$ تجزیه شده باشد، برابر است با: $(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)...(\alpha_k+۱)$.
بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های ۱۸۰، مساوی $۱۸=(۱+۱)(۲+۱)(۲+۱)$ است.

ب) از آنجا که n و n-۲ از لحاظ زوجیت یکسان هستند، پس اگر n زوج باشد، n-۲ هم زوج است و لذا یک حالت دیگر هم ممکن است و آن این حالت است که n مضرب ۸ از عددهای فرد مقسوم‌علیه ۱۸۰ باشد؛ یعنی ۸×۱، ۸×۳، ۸×۳^۲، ۸×۵، $۸\times۳\times۵$ و $۸\times۳^۲\times۵$. بنابراین در مجموع ۲۴ مقدار برای n به‌دست می‌آید که با آن‌ها، $\frac{(n-۲)۱۸۰}{n}$ عددی طبیعی است. اما دو مقدار n=۱,۲ قابل قبول نیستند، پس تعداد ۲۲ مقدار برای n وجود دارد (گزینهٔ د).

۲. اگر مطابق شکل، اضلاع مربع را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنیم و نقاط تقسیم را به‌هم وصل کنیم، ۱۶ مربع کوچک به ضلع $\frac{۱}{۴}$ و قطر $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ پدید می‌آید و $\frac{۲}{۷}>\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ($\frac{۲}{۷}$ طول قطر دایره به شعاع $\frac{۱}{۷}$ است). اما اگر هر ضلع را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنیم، ضلع مربع‌های کوچک، $\frac{۱}{۵}$ و قطر آن‌ها $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$ خواهد بود و: $\frac{۲}{۷}<\frac{\sqrt{۲}}{۵}$. پس در این صورت اگر ۵۱ نقطه درون مربع اصلی انتخاب کنیم، حتماً می‌توانیم بگوییم لااقل سه نقطه درون یک مربع قرار می‌گیرند و لذا این سه نقطه درون دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۷}$ نیز قرار می‌گیرند (گزینهٔ ج).



۳. اگر اعداد انتخابی را a، b و c فرض کنیم، ۲b=a+c. یعنی a+c زوج است و در نتیجه a و c هر دو فرد یا هر دو زوج‌اند. پس باید ۲ عدد از بین اعداد زوج یا دو عدد از بین اعداد فرد ۱ تا ۱۳۹۵ انتخاب کنیم.

بنابراین تعداد راه‌ها برابر است با:

$$\binom{۶۹۸}{۲}+\binom{۶۹۷}{۲}=\frac{۶۹۸\times۶۹۷}{۲}+\frac{۶۹۷\times۶۹۶}{۲}$$
$$=\frac{۶۹۷}{۲}(۶۹۶+۶۹۸)=\frac{۶۹۷}{۲}\times۱۳۹۴=(\frac{۱۳۹۴}{۲})^۲$$ (گزینهٔ ج)

۴.
$$۲(۲^{۵۷}+۱)=۲^{۵۸}+۲=(۲^{۲۹}+۱)^۲-۱-۲^{۳۰}+۲$$
$$=(۲^{۲۹}+۱)^۲-۲^{۳۰}+۱=(۲^{۲۹}+۱+۲^{۱۵})(۲^{۲۹}+۱-۲^{۱۵})+۱$$

بنابراین، باقی‌مانده تقسیم یک است (گزینهٔ الف).

۵. ارتفاع AH و محل برخورد آن با امتداد CM را مشخص می‌کنیم، با توجه به ویژگی‌های مثلث‌های متساوی‌الساقین، اندازه‌های زاویه‌ها را روی شکل مشخص می‌کنیم. اکنون در شکل، مثلث‌های ABD و MBD به حالت «زض‌ز» هم‌نهشت‌اند، بنابراین:

$$AB=BM\Rightarrow \angle BAM=\angle AMB=\frac{۱۸۰-۴۰}{۲}=۷۰^\circ$$ (گزینهٔ ب)