



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

۱۲۰ آموزش و پرورش رشد

دوره سی و دوم، شماره ۴، تابستان ۱۳۹۴، ۶۴ صفحه، ۱۱۰۰۰ ریال

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

پيامک: ۰۳۰۰۰۸۹۹۵۰۳ www.roshdmag.ir

ISSN: 1606-9226

$$[x]$$

$$[2x^2 - 2x - 1]$$

$$[x]$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3} = \frac{\pi^3}{6} - \ln^3(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \ln^4(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^5} = \frac{\pi^5}{252} - \ln^5(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} - \ln^6(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^7} = \frac{\pi^7}{4725} - \ln^7(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^8} = \frac{\pi^8}{1680} - \ln^8(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^9} = \frac{\pi^9}{12096} - \ln^9(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{6720} - \ln^{10}(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{11}} = \frac{\pi^{11}}{32256} - \ln^{11}(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{12}} = \frac{\pi^{12}}{166320} - \ln^{12}(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{13}} = \frac{\pi^{13}}{812800} - \ln^{13}(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{14}} = \frac{\pi^{14}}{4032000} - \ln^{14}(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{15}} = \frac{\pi^{15}}{20160000} - \ln^{15}(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{16}} = \frac{\pi^{16}}{100800000} - \ln^{16}(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{17}} = \frac{\pi^{17}}{504000000} - \ln^{17}(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{18}} = \frac{\pi^{18}}{2520000000} - \ln^{18}(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{19}} = \frac{\pi^{19}}{12600000000} - \ln^{19}(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{20}} = \frac{\pi^{20}}{63000000000} - \ln^{20}(1-x)$$

آرامش را به مدرسه بازگردانیم! «کنکور» تنها یک واژه است!

آموزش رهیافت های حل مسئله

دنیای که آخر نشده است!



۱۲۰

رشد آموزش ریاضه

دوره سی و دوم، شماره ۴، تابستان ۱۳۹۴

فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

زهرا گویا	۲	سخن سردبیر: آرامش را به مدرسه بازگردانیم! «کنکور» تنها یک واژه است!
ملیحه دهقان نیری، زهرا گویا	۴	درک دانش آموزان پایه اول متوسطه (نهم) از مفهوم تساوی در حل معادلات درجه اول
بهناز ساویزی	۱۶	آموزش رهیافت های حل مسئله
پاتریسیوجی، هربست، مترجم: حسین غفاری	۲۲	رایج شدن یک فرهنگ اثبات در هندسه مدرسه ای
میرزا جلیلی	۳۰	گروه های آموزشی چه می کنند؟
میرزا جلیلی	۳۳	دنیا که آخر نشده است!
نرگس عصارزادگان	۳۶	ریاضیات و فرهنگ
آذر کریمان	۴۴	کنترل از دیدگاه شونفیلد
مطهره سامانی، سپیده ملائی	۴۷	گزارشی از یک کلاس درس
محمدحسام قاسمی	۵۱	فعالیت هدف دار و بستر معنادار؛ دو مفهوم کلیدی ریاضی دوره ابتدایی
صمدشعبانی فر	۵۷	مقدمه ای بر «چرایی بدفهمی های دانش آموزان»
مترجم: معصومه عرب پور	۵۸	صفر به توان صفر چیست؟
توسط زهرا گویا	۶۲	معرفی کتاب: آموزش ریاضیات در دبستان
	۶۳	نامه های رسیده

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۵۵ ● تلفن: ۹-۱۱۶۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴) ● شماره: ۸۳۰-۱۴۷۸ ● وبگاه: www.roshdmag.ir ● پیام نگار: riyazi@roshdmag.ir ● پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵-۳ ● تلفن پیام گیر نشریات رشد: ۸۳۲۰۱۴۸۲ ● کد مدیرمسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۴ ● کد امور مشترکین: ۱۱۴ ● نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۶۸۹۵/۱۱۱ ● تلفن امور مشترکین: ۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۳۳۶۶۵۵ ● چاپ: شرکت افست (سهامی عام) ● شماره گان: ۶۵۰۰

مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. ● شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود ● برای ترجمه مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستنده مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه مقاله را به مترجم دیگری بدهد. ● در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود. ● بی نوشت ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره صفحه مورد استفاده باشد. ● چکیده ای از اثر و مقاله ارسال شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
- در مقاله های تحقیقی یا توصیفی، واژه های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. ● همچنین: ● مجله در پذیرش، رد و ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است. ● مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. ● مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی شود.

آرامش را به مدرسه بازگردانیم!

«کنکور» تنها یک واژه است!

سال‌هاست که زندگی مدرسه‌ای ما، تحت تأثیر پدیده‌ای منحصر به فرد به نام «کنکور» قرار گرفته است، کنکوری که به گفته زنده‌یاد پرویز شهریاری «دانش مملکت را ویران می‌کند». کنکوری که آن آموزشگر بزرگ از آن با نگرانی سخن می‌راند، پدیده‌ای است که همچنان، آموزش عمومی و آموزش عالی را به نوعی، در سیطره خود گرفته به طوری که مراکزی که وظیفه راهبری آینده‌سازان جامعه و بعد، آماده کردنشان برای تولید علم و خدمت به همان جامعه را دارند، مستقیم یا غیرمستقیم، از این پدیده آسیب دیده و می‌بینند. اکثر افراد جامعه نیز از کنکور می‌نالند و آن را باعث و بانی بیشتر مصائب جریان یاددهی - یادگیری می‌دانند. ولی «پارادوکس» یا «باطل‌نمای» عجیب این است که اجماع نانوشته‌ای به وجود آمده که انگار، برای در امان ماندن از این غول دست‌ساز، ساده‌ترین راه این است که از یک سو بیشتر و بیشتر تغذیه‌اش کنیم و عرصه را برایش آماده‌تر سازیم و از سوی دیگر، بیشتر و بیشتر نسبت به آن نفرت ایجاد کنیم و هم‌زمان به آن متوسل شویم! خلاصه، هم برانیم و هم بخوانیمش! پارادوکس اینجاست که عامل هر ناکامی را کنکور ببینیم و برای عبور از سد آن، همگی تلاش کنیم و بهایش دهیم و به بهانه‌اش گرفتار شویم و مسیر آموزش جامعه را وارونه کنیم!

بدین سبب، لازم است برای سازماندهی این اوضاع و کنترل احساس نیازهای کادری که نه فقط در والدین و دانش‌آموزان، بلکه گاهی در مسئولان و تصمیم‌گیرندگان هم ایجاد شده، زمینه‌ای برای هم‌اندیشی فراهم کنیم. در غیر این صورت، بازار عظیم و بی‌قواره و غیرقابل کنترلی که به نام «کنکور» و به کام بسیاری، در تمام سطوح ایجاد شده، با استفاده از حساسیت‌های والدین و مسئولان، یکه تاز میدان می‌شود و مرتب هم نوید موفقیت، اما به «شَرطِها و شُرُوطِها» می‌دهد! طبیعی است تصور کنیم که شرط اول، پیدا کردن شانس حضور و بهره‌مندی از برنامه‌ها و منابع این مراکز و مؤسسات و ناشران به اصطلاح آموزشی «معتبر» و اکثراً «تضمینی»، برای قبول شدن در رشته‌های دلخواه داوطلبان است و ادامه این مسیر هوشیارانه را هم که مبتنی بر نیازهای احساسی جامعه است، بیش و کم می‌شناسیم. اما سؤال اصلی این است که «چرا چنین شد؟» و از کی، همه آماده باش ایستادند و این چنین، عنان و اختیار را به فرمان سرنوشتی سپردند که بشر رقمش زده بود نه تقدیر!

یکی از اتفاقات پیش‌بینی نشده‌ای که تقریباً در دو دهه اخیر در ایران رخ داده است، استفاده از ابزاری به نام «آزمون»، برای جدا کردن هر سَره‌ای از ناسره است. این اتفاق، آن چنان سریع روی داد و به قدری سودآور بود که برای قبولاندن آن به جامعه، مدارس خاص و مسئولان آموزشی، از هیچ تلاشی فرو گذاشته نشد. یکی از آن تلاش‌ها که عامدانه یا از سر ناآگاهی صورت گرفت، استفاده از عنوان «کنکور» بود؛ کلمه‌ای که تنها در پایان سال خروج از آموزش مدرسه‌ای، یعنی دیپلم، معنا دارد و از آغاز برگزاری کنکور دانشگاه‌ها در دهه ۴۰، هدفش تسهیل تصمیم‌گیری دانشگاه‌ها برای انتخاب دانشجو از بین داوطلبان بوده است. اما «کنکور»، تبدیل به اسم عامی برای تمام «آزمون»‌ها شد! آزمون‌هایی که آرامش مدرسه را به هم زد و مدرسه را از توجه به کارکرد اصلی خود که جامعه‌پذیر کردن افراد و پرورش شهروندانی مستقل، تصمیم‌گیرنده، خلاق و نقاد و قانون‌پذیر بود، بازداشت و خطر تبدیل «مدرسه به عنوان خود زندگی» را به «مدرسه؛ آموزشگاهی برای کنکور»، جدی‌تر نمود.

اما گمان نکنیم که این اتفاق، بومی است و حاصل خلاقیت‌های وطنی! لازم است بدانیم که در مجموعه کشورهای جنوب شرقی آسیا، تأکید بر «تست و تست‌زنی»، قدمتی دیرینه دارد. چنین تبی از دو دهه گذشته

نیز در ایالات متحده، توسط هواداران «استانداردهای برنامه درسی اصلی^۱» که یک روز هم در کلاس درس، ریاضی تدریس نکرده بودند، بالا گرفته است. در ابتدا در آمریکا، بعضی‌ها صادقانه، از تصور به نظم کشیدن مدرسه و برنامه و پاسخگو کردن همه دست‌اندرکاران آموزش مدرسه‌ای نسبت به موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان، از این سوغات سنگاپور- بدون در نظر گرفتن تفاوت همه‌جانبه شرایط بومی در دو کشور- استقبال کردند. آن‌ها همچنین، به دلیل امکانی که این برنامه، برای کنترل معلمان فراهم می‌نمود، به‌طور ضمنی از آن حمایت کردند، غافل از آنکه وقتی برنامه از «نیستان» خود «ببریده» شود، در جای دیگر، احتمال خشکیده شدنش زیاد است، زیرا «بوم‌شناسی» دیگری دارد، چه، شرایط «زیست‌محیطی» هر کجا، ویژه و منحصر به همان جاست. با وجود این، در آمریکا، به نصایح متخصصان تعلیم و تربیت گوش ندادند و بیشترین صدمه را به اعتمادبه‌نفس و عزت نفس معلمان وارد کردند و سَکینه و طمأنینه را از مدرسه زدودند که نتیجه آن، اغتشاشی است که در سالیان اخیر در آموزش مدرسه‌ای آمریکا به‌وجود آمده است و فعلاً هم کسی را یارای جلوگیری از آن نیست. از یک طرف بنیادهایی مانند «بیل گیتس^۲» اختیاردار آموزش شده‌اند و از طرف دیگر، ناشرانی که دلسوزانه! معلمان را برای اجرای «برنامه اصلی^۳» آماده می‌کنند. والدین هم برای ثبت‌نام در کلاس‌های بعد از مدرسه «کیومون^۴» به سبک ژاپنی که هدفش افزایش «سرعت^۵» و «دقت^۶» در دانش‌آموزان است، به صف ایستاده‌اند، و رسانه‌ها نیز با تولید فیلم‌های خوش‌ساختی مانند «بازگشت سوپرمن^۷» که تمثیلی برای مدارس «چارتری^۸» است، قند در دل‌ها، اشک در چشمان و بغض در گلوها ایجاد کرده‌اند و خلاصه در این آشفته بازار- هم در آمریکا و هم در ایران- از طریق ایجاد اضطراب در خانواده‌ها، برندگان اصلی ماجرا، صاحبان سرمایه هستند و بازندگان واقعی، دانش‌آموزان و معلمان شریف و زحمتکش؛ با این تفاوت عمده که در نهایت، دانشگاه‌های آمریکایی به جای جذب آمریکاییان آزمون داده متقاضی ورود به آموزش عالی کم‌توان، از بهترین‌های چین و هند و ایران و سراسر دنیا برای ورود به دانشگاه، دانشجو می‌پذیرند، اما صندلی‌های خود را حراج نمی‌کنند و همیشه، آن‌ها را برای بهترین‌ها نگه می‌دارند. این دانشجویان، همگی دارای نمره «آزمون‌های استاندارد» مانند GRE و GMATH هستند و در هر کجای این کره خاکی، می‌توانند این آزمون‌ها را بدهند. در صورتی که در ایران، داوطلبان ورود به دانشگاه، با این همه هزینه‌ای که می‌کنند و این همه زحمتی که می‌کشند، بعضی سال‌ها، به‌دلیل این که «حدنصاب» نمره وجود ندارد، با پایین‌ترین کیفیت وارد دانشگاه شده و به سرعت در آموزش عالی، دچار سرخوردگی می‌شوند.

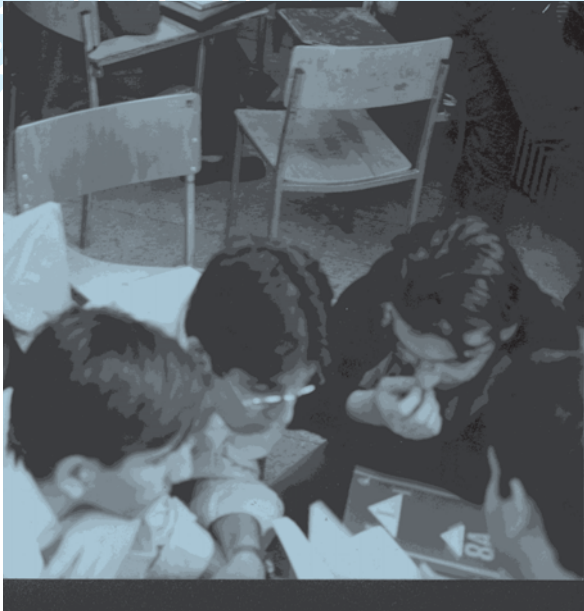
در هر صورت، هدف این نوشته، فقط طرح یک مسئله مهم و فراگیر در جامعه ایران بود. تجربه کشورهای دیگر، اگر با نقد بی‌غرضانه مورد بررسی قرار گیرد، کمک می‌کند تا از مشابهت‌هایشان بیاموزیم و آموخته‌ها را دوباره نیازماییم. همچنین، دقت کنیم که «آزمون»، معادل «کنکور» نیست. در ایران، «کنکور» به خودی خود، به اصطلاح، یک «پَرند» شده است و مشتریان دوآتشفه خود را دارد. زمین و زمان هم در خدمتش هستند. از کودک پیش‌دبستانی گرفته تا مسئولان رده بالا، از خانواده‌های کم‌سواد تا والدین متخصص، خلاصه همه و همه، با پدیده‌ای به‌نام «کنکور» آشنایند و نسبت به آن واکنش نشان می‌دهند. اما وای به روزی که آسیب‌دیدگان از «کنکور»، خود جزو تسهیل‌کنندگان و تقویت‌کنندگان آن باشند و با این نگرانی که نمی‌توان این واقعیت عریان را نادیده گرفت، یا به‌دنبال وضع قانون برای از بین بردن آن باشند و یا به‌کمند گیسویش گرفتار آیند و خودشان، برایش هزینه نمایند. اتفاقی که سال‌هاست واقع شده و آرامش و قرار را از خانواده‌ها ربوده و مسئولان را به حرکت‌های انفعالی سوق داده است. شاید، و تنها شاید، لازم باشد از زاویه جدیدی به این پدیده مهم که پر از خیر و شر است، بنگریم و این پیش‌فرض را در نظر داشته باشیم که «کنکور» و «آزمون»، یکی نیستند و زندگی مدرسه، نباید تحت‌تأثیر «کنکور» که برای سال خروج از مدرسه طراحی شده است، دچار ناآرامی گردد و کارکرد اصلی خود را فراموش کند.

پی‌نوشت‌ها

1. Core Curriculum Standards
2. Bill Gates Foundation
3. Core Curriculum
4. Kumon Schools
5. Speed
6. Accuracy
7. The Return of Superman
8. Charter Schools



درک دانش آموزان پایه اول متوسطه (نهم) از مفهوم تساوی در حل معادلات درجه اول



ملیحه دهقان نیری، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی باقرشهر، شهرستان‌های استان تهران
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

دانش آموزان بسیار مبتکرند. وقتی با مسئله‌ای مواجه می‌شوند که نمی‌دانند چگونه آن را حل کنند، الگوریتم‌هایی ابداع می‌کنند و آن‌ها را برای حل مسئله به کار می‌برند، هر چند اغلب این الگوریتم‌ها به پاسخ‌های نادرست منتهی می‌شوند. مثلاً در فرایند یادگیری عمل تفریق، اکثر دانش آموزان، اشتباه معروف «کوچک‌تر را از بزرگ‌تر کم کن» را مرتکب می‌شوند (بن‌زیو، ۱۹۹۶). ریاضی یکی از مهم‌ترین موضوع‌های درسی در مدارس، در جوامع کنونی است، اما تدریس مؤثر و مطلوب آن بسیار مشکل است. می‌دانیم که ریاضی علمی انتزاعی است، بنابراین به محض اینکه ارتباط خود را با دنیای واقعی، که دانش آموزان می‌شناسند، از دست می‌دهد، برای بسیاری از آن‌ها بی‌معنی می‌شود. به همین دلیل است که در سراسر دنیا، دانش آموزان در درس‌های ریاضی خود افت دارند و حتی بسیاری از بزرگسالان نیز آن را درک نمی‌کنند. هم‌چنین، بسیاری از معلم‌ها نیز درک ریاضی را مشکل می‌دانند (بیشاب،

۱۹۹۸). برای مثال، یکی از مفاهیم مشکل‌آفرین در شروع یادگیری جبر، درک علامت تساوی است. به گفته غلام‌آزاد (۱۳۸۰)، دانش آموزان عموماً قبل از آنکه وارد آموزش رسمی جبر شوند، شروع به حل معادلات ساده می‌کنند. اما تجربه آن‌ها از علامت تساوی در حساب، که در واقع برای آن‌ها به معنای «دنبال جواب بودن» است، ممکن است در درک آن‌ها از معادله و عبارت‌ها اثر بگذارد. آن‌ها عموماً علامت تساوی را به‌عنوان علامت «جواب را بنویس» در نظر می‌گیرند، به جای آنکه این علامت، مفهوم هم‌ارزی دو عبارت را برایشان تداعی کند. در نتیجه، به این دلیل که معادله یکی از مفاهیم اولیه و اساسی جبر است که دانش آموزان از آن برای ایجاد مدل‌ها و حل مسائل ریاضی استفاده می‌کنند، بسیاری از محققان، در زمینه

حل معادلات درجه اول، بدفهمی‌هایی را شناسایی کرده‌اند و اکثراً بر بدفهمی‌های دانش‌آموزان نسبت به علامت تساوی تأکید نموده‌اند. از نظر کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳)، درک محدود دانش‌آموزان از معنی علامت تساوی، یکی از موانع اصلی در یادگیری جبر است.

کلیدواژه‌ها: حل معادله، علامت تساوی، ریاضی پایه اول متوسطه، معادله درجه اول

کاربرد و تفسیرهای علامت تساوی

برای نشان دادن روابط ریاضی، از علامت‌های > (بزرگ‌تر از) و < (کوچک‌تر از) و \geq (بزرگ‌تر یا مساوی) و \leq (کوچک‌تر یا مساوی)، استفاده می‌شود، اما میزان به‌کارگیری علامت تساوی (=) در تمام شاخه‌های ریاضی، بیش از همه است و بر وجود یک رابطه تعادلی دلالت می‌کند. علامت تساوی، به‌عنوان یک نماد رابطه‌ای، به روش‌های مختلفی نمایش داده می‌شود. مثلاً گاهی اوقات، از آن برای نشان دادن یک اتحاد استفاده می‌شود، مثل $(a+b)(a+b) = (a+b)^2$. گاهی برای تعریف یک تابع به‌کار برده می‌شود، مثل $f(x) = 2x + 3$. زمانی دیگر، به همراه جای خالی استفاده می‌شود و به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی تفسیر می‌شود یا به‌عنوان نمادی که پیامش این است که «جواب را پیدا کن» $(3+4 = \text{---})$.

این در حالی است که سینز-لودلوا و والگاموث^۲ (۱۹۹۸) نیز به این نکته اشاره دارند که دانش‌آموزان، الزاماً انتخابی برای تعریف و تعیین نمادهایی که به‌کار می‌برند ندارند و در این صورت، تنها قراردادهای را می‌پذیرند. برای مثال، قبول علامت تساوی یا استفاده از آن، به این معنی نیست که آن‌ها از نظر ریاضی آن را فهمیده‌اند.

معانی تساوی و علامت تساوی

بسیاری از محققان، بر تمایز مهم بین دو معنی عملیاتی و رابطه‌ای برای تساوی تأکید دارند (کی‌پرن، ۱۹۸۱؛ وینتر، ۱۹۸۲؛ وُلترز، ۱۹۹۱؛ فیلولی و همکاران، ۲۰۰۳؛ نوث و همکاران، ۲۰۰۶). کی‌پرن (۱۹۸۱) دریافت که دانش‌آموزان دوره ابتدایی علامت تساوی را به‌عنوان نمادی می‌بینند که مسئله و پاسخ مسئله را از هم جدا می‌کند. از نظر وی، فقط تغییر معانی از عملیاتی به رابطه‌ای، قانون قراردادی «جملات

هر دو طرف معادله را بخوان» را توجیه می‌کند. پریدیگر^۳ (۲۰۱۰) نیز معتقد است که آموزش حساب دوره ابتدایی با تمرکز بر تساوی‌های نامتقارن مثل $1 = 3 - 2$ ، بر معنای عملیاتی علامت تساوی تأکید دارند. در نتیجه، کاربرد متقارن و رابطه‌ای علامت تساوی در جبر دوره اول متوسطه، با مشکل مواجه می‌شود که به‌عنوان نمونه، می‌توان به عباراتی مانند: $7 \times 4 + 7 \times 2 = 7 \times 24$ یا معادلات جبری مانند $6 + x = x^2$ اشاره نمود.

در نتیجه، بسیاری از محققان آموزش ریاضی در مورد مشکلات توسعه معنای رابطه‌ای، در ارتباط با علامت تساوی برای تسهیل گذر دانش‌آموزان از حساب به جبر، پیشنهاد کرده‌اند که کاربرد رابطه‌ای و متقارن علامت تساوی نیز، در برنامه درسی ریاضی دوره ابتدایی وارد شود (کی‌پرن، ۱۹۸۱؛ وینتر، ۱۹۸۲؛ ولترز، ۱۹۹۱؛ تیس، ۲۰۰۵).

پریدیگر (۲۰۱۰)، به نقل از میل، ۱۹۹۳ و کورتس و همکاران، (۱۹۹۰) بیان می‌کند که فرایند یادگیری جبر، تحت تأثیر معنای رابطه‌ای است و علامت تساوی، معناها و تفسیرهای متفاوتی دارد که مهم‌ترین آن‌ها در شش مورد زیر، آورده شده است:

۱. معنای عملیاتی: عملیات برابر است با جواب: $3 - 2 = 1$ ؛ معنای رابطه‌ای: $92 - 10^2 = 19$ ؛
۲. ب- تعادل رسمی که جملات معادل را توصیف می‌کند: $(x + 3)(x - 2) = x^2 + x - 6$ ؛
۲. ج- معادله شرطی که مجهول‌ها را مشخص می‌کند: معادله $6 + x = x^2$ را حل کنید.
۲. د- پارامترهای زمینه‌ای در فرمول؛ مانند فرمول مساحت دایره ($A = \pi r^2$) یا مثلث قائم‌الزاویه با وتر c و اضلاع a و b ، که در $a^2 + b^2 = c^2$ صدق می‌کنند؛
۳. تعیین یا توصیف: $m = \frac{\pi}{4}(a+b)$ یا $y = 2x + 52$

دسته اول؛ معنای عملیاتی برای کاربرد غیرمتقارن مورد استفاده قرار می‌گیرد: «عملیات برابر است با جواب» (مکنیل^۷ و همکاران، ۲۰۰۶). این دسته اغلب برای حساب دوره ابتدایی توضیح داده می‌شود. هم‌چنین در ریاضیات پایه‌های بالاتر مثل حسابان هنگام مشتق‌گیری از تابع چندجمله‌ای به‌کار می‌رود و برای مثال نوشته می‌شود: $f'(x) = (3x^2)' = 6x$.

بسیاری از محققان آموزش ریاضی در مورد مشکلات توسعه معنای رابطه‌ای، در ارتباط با علامت تساوی برای تسهیل گذر دانش‌آموزان از حساب به جبر، پیشنهاد کرده‌اند که کاربرد رابطه‌ای و متقارن علامت تساوی نیز، در برنامه درسی ریاضی دوره ابتدایی وارد شود

دارند. به دست آوردن این درک، ارتباطات بین حساب و جبر را بیشتر می‌کند. برای مثال، وقتی یک دانش‌آموز مسئله $1 + (8-1) = (10-8)$ را حل می‌کند درگیر حساب است و در ضمن در حال یادگیری مهارت‌های فکری ضروری برای درگیر شدن در جبر، به‌ویژه خاصیت شرکت‌پذیری در اعداد صحیح، است.

بعد از آشنایی با این نوع رابطه، مسائل مشکل مانند: $c + (b-a) = (b-c) + a$ برای دانش‌آموزان دشوار نیست. اما اگر فکر کنند که علامت مساوی به این معنی است که باید عملیاتی اجرا شود، برایشان دشوار خواهد بود. بفهمند که وقتی مقداری مثل c از یک طرف معادله کم می‌شود، از طرف دیگر نیز همان مقدار کاهش می‌یابد (اگسوز، ۲۰۰۱). در این شرایط، تنها روشی که آن‌ها می‌توانند درگیر آن شوند، «به‌خاطر سپردن یک سری قوانین برای حل معادلات است». به‌دلیل اینکه چنین قوانینی با درک ناقص همراهند، دانش‌آموزان قادر نیستند به‌درستی آن‌ها را به‌خاطر بیاورند و به‌راحتی از آن‌ها استفاده کنند (فاکتر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹). دلیل دیگری که دانش‌آموزان به این درک نیاز دارند، این است که بتوانند روابط بیان‌شده توسط جملات عددی را ببینند. برای مثال، وقتی یک دانش‌آموز جمله عددی $1 + 7 + 7 + 7 + 7 = 8 + 7$ را می‌بیند و می‌گوید «من به‌خاطر نمی‌آورم که ۷ به علاوه ۸ چند می‌شود، اما می‌دانم که ۷ به اضافه ۷ می‌شود ۱۴ و سپس یکی به آن اضافه می‌کنم و حاصل ۱۵ می‌شود»، او یک رابطه خیلی مهم یعنی ویژگی شرکت‌پذیری را شرح می‌دهد که این ویژگی در حساب، یک اصل است (فاکتر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹).

بعد از گسترش توانایی بیان روابط، دانش‌آموزان باید بتوانند همان اصول ریاضی را برای حل مسائل دشوارتر مثل $18 - 45 = 45 - 18$ به‌کار ببرند، یعنی با بیان آن به‌صورت $2 + 20 - 45 = 45 - 18$ (فاکتر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹) یا $a - b$ را به‌شکل $2 - a - b = a - b$ در بیاورند. هم‌چنین، اگسوز (۲۰۰۱) عقیده دارد که درک تساوی به‌عنوان یک رابطه، فرصتی عالی فراهم می‌کند تا در حل معادلات، جملات قرینه به‌سادگی حذف شوند (ساده شوند).

بدهمی‌های علامت تساوی

براساس یافته‌های تحقیقی متعدد (سینز - لودلو و والگاموث، ۱۹۹۸؛ بر، ارلوانگر و نیکولز، ۱۹۸۰؛

دسته دوم، معنای رابطه‌های متمرکز بر کاربرد متقارن علامت تساوی است. این دسته، خود شامل چهار زیردسته است، که هر یک متفاوت از دیگری است. پریدیگر (۲۰۱۰) از کی‌پرن (۱۹۸۱) کلمه عبارت حسابی را قرض می‌گیرد (زیردسته ۲. آ). کی‌پرن (۱۹۸۱) این کلمه را برای ارتباط با دانش‌آموزان ابداع کرد که بتوانند تساوی‌های حسابی متقارن را از آن‌هایی که شامل متغیرهاست تشخیص دهند.

تعادل رسمی (زیردسته ۲. ب) به تعادل جملات جبری شامل متغیرها اشاره می‌کند: $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ که برای تمام مقادیر x صدق می‌کند. این تعادل رسمی، بسته به تفسیر متغیرهای شامل آن، می‌تواند به روش‌های متفاوت تفسیر شود.

در کلاس درس جبر، مهم است که تعادل رسمی، با تفاسیر متفاوتی که دارد، از معادلات شرطی برای تشخیص مجهول‌ها متمایز شود. اگرچه، معادله $x^2 - x + 6 = (x-2)(x+3)$ به‌طور نمادین شبیه $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ است، اما ویژگی کاملاً متفاوتی دارد که برای تمام x ها به‌کار نمی‌رود. به‌علاوه، مجهول‌های خاصی را مشخص می‌کند و با حل معادله، یک عدد می‌تواند به‌عنوان مجهول مشخص شود.

در زیردسته (۲. د)، پارامترهای زمینه‌ای در

فرمول که در یک طرف تساوی قرار دارند، فرمولی مثل فرمول مساحت دایره یا معادله فیثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$ که عبارات اصلی هستند، اما از طرف دیگر آن‌ها برای تمام a و b ها مثل تعادل‌های رسمی $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ به‌کار نمی‌روند. آن‌ها فقط در زمینه‌های خاص اصلی هستند؛ برای مثال، به‌کار بردن a و b برای طول‌های مثلث قائم‌الزاویه.

کورتس^۸ و همکاران (۱۹۹۰) معرفی **دسته سومی را به نام تعیین یا توصیف**، پیشنهاد کردند که در آن، پارامترها تشریح نمی‌شوند بلکه مثل تعاریف بیان می‌شوند. تفاوت آن با پارامتر زمینه‌ای این است که به تشخیص بین تعاریف و پیش‌فرض‌ها کمک می‌کند. در مجموع، تفاسیر بسیار متنوعی از علامت تساوی وجود دارد.

درک تساوی به‌عنوان یک رابطه

دانش‌آموزان باید بفهمند که تساوی رابطه‌ای است که بیان می‌کند دو عبارت ریاضی ارزش یکسان

فاکتر، لوی و کارپنتر، ۱۹۹۹)، دانش‌آموزان، از سال اول تا ششم ابتدایی، درباره معنای علامت تساوی بدفهمی‌های جدی دارند، ولی این بدفهمی‌ها هنگامی که دانش‌آموزان فعالیت‌های حسابی را انجام می‌دهند، معمولاً مورد توجه قرار نمی‌گیرند؛ زیرا در این فعالیت‌ها، رابطه بین دو طرف تساوی مورد نظر نیست و فقط یک عدد در سمت راست این علامت ظاهر می‌شود. بدین سبب، هنگامی که دانش‌آموزان با انواع دیگر جملات و به‌ویژه عبارات جبری مواجه می‌شوند، موقع استفاده از علامت تساوی، با مشکلات جدی مواجه می‌شوند. آن‌ها تلاش می‌کنند قوانین و درک خودشان از علامت تساوی را به کار ببرند، مثل اینکه گاهی اوقات، جواب‌ها را محاسبه می‌کنند و گاهی در جست‌وجوی روابط هستند، گاهی اوقات به دو طرف تساوی توجه می‌کنند و گاهی فقط به یک طرف توجه دارند (مولینا، آمبروس و کاسترو، ۲۰۰۴)

کارا، شلیمن و بریزولا (۲۰۰۰) نقل شده در مولینا، آمبروس و کاسترو، ۲۰۰۴) مطرح می‌کنند که آموزش‌های مقدماتی دانش‌آموزان در ریاضی، یکی از دلایل اصلی مشکلات آن‌ها در یادگیری جبر است. در مطالعات پر، ارلوانگر و نیکولز (۱۹۸۰) با کودکان شش تا دوازده ساله، مشاهده شد که دانش‌آموزان نه فقط علامت تساوی را به‌عنوان محرکی برای یک پاسخ می‌بینند و می‌فهمند، بلکه در مورد عباراتی که باید نوشته شوند نیز ایده‌هایی قطعی دارند و این نوع نگاه به علامت تساوی، باعث ایجاد بدفهمی‌های جدی بعدی در آن‌ها می‌شود.

کارپنتر، فرانک و لوی (۱۹۹۹) نیز در تحقیقات خود به بدفهمی‌های زیر اشاره کردند:

۱. تفسیر علامت تساوی به‌عنوان یک فرمان برای به‌دست‌آوردن و پاسخ دادن. با این فرض که عملیات باید در طرف چپ تساوی انجام شود و بلافاصله پاسخ آن در طرف راست تساوی قرار گیرد. برای مثال، برخی دانش‌آموزان به معادله $8+4=---$ پاسخ ۱۲ دادند.

۲. عملیات تمام اعداد با هم. برای مثال، پاسخ ۱۷ را برای معادله $8+4=---$ نوشتند.

هم‌چنین، متیوز و همکاران (۲۰۱۲) به دو مشکلی که ممکن است دانش‌آموزان در زمان حل معادله با آن مواجه شوند، اشاره کردند:

۱. با اینکه کاربرد متغیر و جای خالی از نظر منطقی

یکسان است، دانش‌آموزان، معادلاتی را که در آن‌ها به جای متغیر، جای خالی به کار رفته است راحت‌تر حل می‌کنند؛

۲. دانش‌آموزان، معادلاتی را که در یک طرف علامت تساوی عملیات دارد، نسبت به معادله‌ای که در دو طرف علامت تساوی عملیات حسابی دارد، راحت‌تر حل می‌کنند.

درک دانش‌آموزان از علامت تساوی

تحقیقات نشان می‌دهد که برای بسیاری از دانش‌آموزان دوره ابتدایی علامت تساوی یعنی به‌طور خودکار پاسخ را بنویس (پر و همکاران، ۱۹۸۰؛ کارپنتر و همکاران، ۲۰۰۳؛ دمنوتی و ولایسیس، ۱۹۹۹؛ فاکتر و همکاران، ۱۹۹۹؛ هرسکوویچ و کی‌پرن، ۱۹۸۰؛ لوبینسکی و آتو، ۲۰۰۲؛ سینز-لودلو و والگاموت، ۱۹۹۸؛ استیسی و مک‌گریگور، ۱۹۹۷- نقل شده در اسپین و ستی، ۲۰۰۶). از این گذشته، پر و همکاران (۱۹۸۰) و کی‌پرن (۱۹۸۱) با دانش‌آموزان شش و هفت ساله کار کردند و فهمیدند که اکثر آن‌ها علامت تساوی را فقط وقتی قبول می‌کنند که در مقابل جمع و تفریق باشد. بنابراین یک عبارت شبیه $2+4=---$ برای آن‌ها مفهومی ندارد و بیان کردند که علامت تساوی در مکان اشتباهی قرار دارد.

فاکتر و لوی و کارپنتر (۱۹۹۹) نیز تحقیق مشابهی انجام دادند. آن‌ها به دانش‌آموزان پایه اول تا ششم، عبارت $5+---=8+4$ را دادند و از آن‌ها خواستند تا جای خالی را پر کنند. اکثر دانش‌آموزان تمایل داشتند پاسخ سمت چپ را محاسبه کنند و در مقابل علامت تساوی، آن را بنویسند.

افزون بر این، پر و همکاران (۱۹۸۰) و کی‌پرن (۱۹۸۱) بدفهمی دانش‌آموزان از مفهوم علامت تساوی را به روشی که به آن‌ها تدریس می‌شود، نسبت دادند. آن‌ها بحث کردند که درک دانش‌آموزان از علامت تساوی یعنی «خروجی مورد انتظار از آموزش‌هایی که بچه‌ها دریافت کرده‌اند». استیسی و مک‌گریگور (۱۹۹۷) و کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳) هم بحث کردند که استفاده از ماشین حساب به تقویت این ایده کمک می‌کند که علامت تساوی به‌عنوان یک فرمان، یک محاسبه را انجام می‌دهد، زیرا این همان کاری است که با فشردن دکمه تساوی، ماشین حساب انجام می‌دهد.

دمنوتی و ولایسیس (۱۹۹۹) نقل شده در اسپین و ستی، ۲۰۰۶) اشاره کردند که برخی از بدفهمی‌های

داشت و صرفاً یک کار تحقیقاتی است و نوشتن نام و نام خانوادگی‌شان ضرورتی ندارد. لازم به ذکر است که مدت زمان در نظر گرفته‌شده برای پاسخگویی به سؤالات، پانزده دقیقه بود. ابزار جمع‌آوری داده‌ها در این پژوهش، چند مسئله بود که قبل از اجرای اصلی، چند بار اجرای آزمایشی شد تا مشکلات احتمالی آن برطرف و اعتبار ابزار در رابطه با هدف تحقیق روشن شود.

نتایج

در این قسمت، به تحلیل نتایج آزمون اصلی، به تفکیک هر سؤال، می‌پردازیم.

سؤال ۱. در جاهای خالی عدد مناسب

بنویسید.

بخش‌های مختلف سؤال ۱، به نوعی حل معادله درجه اول بدون استفاده از متغیرها بود تا میزان درک دانش‌آموزان از نماد تساوی، قبل از اینکه وارد قوانین حل معادله شوند، مشخص شود.

الف. ۳- = ۱۴ × ۳

به این سؤال حدود ۶۶ درصد (۲۹ نفر) دانش‌آموزان پاسخ درست دادند و عدد ۴۵ را در جای خالی قرار دادند. حدود ۳۴ درصد (۱۵ نفر) نیز به این سؤال پاسخ‌های متفاوت دادند.

حدود ۷ درصد (۳ نفر) دانش‌آموزان عدد ۴۲ را به‌عنوان پاسخ در جای خالی نوشتند، که به‌نظر می‌رسد بدون در نظر گرفتن عدد بعد از جای خالی حاصل عملیات قبل از تساوی را به‌دست آوردند و یادداشت کردند. این دسته از دانش‌آموزان علامت تساوی را «نمادی برای انجام دادن چیزی» می‌بینند.

حدود ۷ درصد (۳ نفر)، عدد ۴۸ را در جای خالی قرار دادند، که به‌نظر می‌رسد بر اثر اشتباه محاسباتی این اتفاق رخ داده است.

حدود ۷ درصد (۳ نفر)، عدد ۳۹ را در جای خالی قرار دادند. این دانش‌آموزان تشخیص داده بودند که دو طرف تساوی باید با هم برابر باشد اما بدون در نظر گرفتن علامت تفریق بعد از جای خالی، عدد ۳۹ را به‌عنوان پاسخ نوشته و درحقیقت ۳۹ را با ۳ جمع کرده بودند.

عبارت 14×3 را نیز حدود ۷ درصد (۳ نفر) از دانش‌آموزان در جای خالی قرار دادند، به‌نظر می‌رسد برای این دانش‌آموزان علامت تساوی نمادی برای جابه‌جایی اعداد است.

استیسی و مک‌گریگور (۱۹۹۷)
و کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳)
هم بحث کردند که استفاده از ماشین حساب به تقویت این ایده کمک می‌کند که علامت تساوی به‌عنوان یک فرمان، یک محاسبه را انجام می‌دهد، زیرا این همان کاری است که با فشردن دکمه تساوی، ماشین حساب انجام می‌دهد

دانش‌آموزان درباره علامت تساوی به‌دلیل استفاده از استعاره‌ها در بیان چرایی یک موضوع است، به‌عنوان مثال، $a+3$ بیشتر از این نمی‌تواند ساده شود.

یک اشتباه جبری معمول دانش‌آموزان این است که می‌خواهند $a+3$ را بیشتر ساده کنند و آن را به عبارتی مانند $3a$ یا a^3 تبدیل سازند. در این مورد دانش‌آموزان کاملاً تحت تأثیر تفسیر خودشان از علامت تساوی، به‌عنوان یک نماد برای انجام دادن چیزی، هستند.

فاکسر و همکاران (۱۹۹۹) بحث کردند که «به‌محض اینکه نمادها برای نمایش عملیات روی اعداد معرفی می‌شوند، معلمان باید درباره فهم دانش‌آموزان از تساوی نگران باشند».

کارپنتر و همکاران (۲۰۰۳) نیز مطرح می‌کنند که از به‌کار بردن علامت تساوی به روش‌هایی که رابطه تساوی بین اعداد را نشان نمی‌دهد دوری کنید. مثال‌های چنین نمایش‌های اشتباه از علامت تساوی عبارت‌اند از: لیست‌های سنی (مثل جان = ۸ و مارکی = ۹) یا مشخصه‌های عددی افراد یا چیزها یا استفاده از علامت تساوی در معرفی تعداد اشیاء در یک مجموعه یا مقایسه دو عکس (کارپنتر، ۲۰۰۳)

پژوهش حاضر

در پژوهشی که در این مقاله معرفی می‌شود، نویسنده اول، پس از معرفی خود و توضیح سؤالات، از دانش‌آموزان یک کلاس پایه نهم درخواست کرد که، در صورت تمایل، با دقت و حوصله کافی به سؤالاتی در مورد چگونگی درک آن‌ها از علامت تساوی، پاسخ دهند. در این کار آن‌هایی که مایل به پاسخ دادن به سؤالات نبودند، می‌توانستند از کلاس خارج شوند. ضمناً به دانش‌آموزان این اطمینان نیز داده شد که نمره آزمون، هیچ تأثیری بر نمره ریاضی آن‌ها نخواهد

$$ب. ۹ - \dots = ۵ - ۹$$

۷۰ درصد (۳۱ نفر) دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح و ۳۰ درصد (۱۳ نفر) پاسخ نادرست دادند؛ اعداد ۴ و ۵ را در جای خالی قرار دادند.

۱۴ درصد (۶ نفر) دانش‌آموزان عدد ۴ را بعد از علامت تساوی نوشتند. این‌ها، طبق نظر مولینا و آمبروس و کاسترو (۲۰۰۴) نماد تساوی را فرمانی برای انجام عملیات دیده بودند.

۱۶ درصد (۷ نفر) دانش‌آموزان عدد ۵ را در جای خالی نوشتند. اینان، طبق نظر اسپین و ستتی (۲۰۰۶) به بیش تعمیمی خاصیت جابه‌جایی تمایل دارند.

$$ج. ۲۷ + ۳۱ = \dots + ۲۴$$

به این سؤال، حدود ۹۰ درصد (۴۰ نفر) پاسخ درست و ۵ درصد (۲ نفر) پاسخ نادرست (عدد ۵۸) دادند؛ ۵ درصد (۲ نفر) نیز پاسخی به این سؤال ندادند. از دو نفری که عدد ۵۸ را به‌عنوان پاسخ نوشته بودند، یک نفر به تمامی بخش‌های سؤال ۱ پاسخ نادرست داده بود و بلافاصله عملیات قبل از علامت تساوی را انجام داده بود.

$$د. ۱۰۰ \div ۵ = \dots + ۵$$

۹۳ درصد (۴۱ نفر) دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست دادند و ۷ درصد (۳ نفر) عدد ۲۰ را در جای خالی قرار دادند.

$$ه. ۱۳ - \dots = \frac{۱۶۹}{۱۳}$$

در مجموع، ۷۳ درصد (۳۲ نفر) به این سؤال پاسخ درست و ۲۳ درصد (۱۰ نفر) پاسخ نادرست دادند. ۴ درصد (۲ نفر) نیز به کلی پاسخ ندادند.

از بین ده نفری که به این سؤال پاسخ نادرست دادند، پنج نفر عدد ۲۶، دو نفر عدد ۱۶۹، دو نفر عدد ۱۲ و در کمال تعجب یک نفر حاصل $\frac{۱۶۹}{۱۳}$ را $\frac{۵}{۳۰}$ به‌دست آورده بود و در کنار سؤال، یادداشت کرده بود که دو طرف تساوی باید با هم برابر باشد و در جای خالی عدد $\frac{۱۸}{۳۰}$ را قرار داده بود.

نتایج به‌دست‌آمده از سؤال ۱

با توجه به مراحل تکامل درک علامت تساوی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) به آن اشاره کردند، نتایجی که از این تحقیق به‌دست آمد، مشخص کرد که

دانش‌آموزان به مراحل اول و دوم درک دست‌یافته‌اند، یعنی علامت تساوی را محرکی برای پاسخ می‌دانند و به‌عنوان فرمانی برای اجرای عملیات درک می‌کنند، همچنین ویژگی تقارنی (از چپ به راست و از راست به چپ) این نماد را تشخیص می‌دهند، اما هنوز به مرحله بیان تعادل، که باعث درک کامل مفهوم تساوی می‌شود، دست نیافته‌اند.

در حقیقت، علامت تساوی را نمادی برای اجرای عملیات و یافتن یک پاسخ برای آن می‌بینند و بنا به عقیده پر و همکاران (۱۹۸۰) این علامت را نمادی برای انجام دادن چیزی می‌بینند.

به‌عنوان مثال، در قسمت الف سؤال ۱، دانش‌آموزانی که عدد ۴۲ را در جای خالی نوشتند نشان دادند که تنها به مرحله اول درک تساوی رسیده‌اند، یعنی علامت تساوی را محرکی برای پاسخ می‌دانند.

دانش‌آموزانی که عدد ۳۹ را به‌جای پاسخ نوشتند، مرحله دوم درک یعنی ویژگی تقارنی علامت تساوی را فهمیده‌اند و می‌توانند به این علامت از چپ به راست و از راست به چپ نگاه کنند، اما هنوز به مرحله بیان تعادل نرسیده‌اند.

آن دسته از دانش‌آموزان که $۱۴ \times$ را در جای خالی نوشتند، مطابق با نظر اسپین و ستتی (۲۰۰۶) با توجه به خاصیت جابه‌جایی که قبلاً در مورد ضرب یاد گرفته‌اند، به بیش تعمیمی این خاصیت تمایل پیدا می‌کنند.

دانش‌آموزانی که پاسخ‌های نادرستی به قسمت ب سؤال ۱ دادند، به دو دسته تقسیم می‌شوند:

دسته اول، دانش‌آموزانی که عدد ۴ را در جای خالی قرار دادند. این دانش‌آموزان حاصل عبارت $۵ - ۹$ را به‌دست آوردند و به عملیات بعد از جای خالی توجهی نشان ندادند؛ که طبق نظر پریدیگر (۲۰۱۰) فقط معنی عملیاتی علامت تساوی، یعنی کاربرد غیرمقارن آن را درک کرده‌اند.

دسته دوم، کسانی بودند که عدد ۵ را به‌عنوان پاسخ نوشتند. آن‌ها کاربرد مقارن علامت تساوی را می‌دانند اما به‌خاطر عدم وجود تفکر رابطه‌ای مرتبط، آن را به خاصیت جابه‌جایی در تفریق گسترش می‌دهند.

نتایج به‌دست‌آمده از قسمت ج و د نیز مشابه قسمت‌های الف و ب است.

در قسمت ه حدود ده نفر عدد ۲۶ را در جای خالی قرار دادند. به‌نظر می‌رسد این دانش‌آموزان

راست قرار بگیرد، به همین دلیل نوشتیم ۹ منهای ۵ مساوی است با ۵ منهای ۹.

همان طور که از مصاحبه‌ها مشخص است، این دو دانش آموز هر کدام درک خاصی از علامت تساوی ندارند. دانش آموز ۱ مانند حساب دوره ابتدایی علامت تساوی را نمادی برای رسیدن به جواب می‌داند و به عملیاتی که بعد از جای خالی قرار گرفته است، توجهی نشان نمی‌دهد.

دانش آموز ۲ نیز به بیش تعمیمی خاصیت جابه‌جایی تمایل دارد و چون می‌داند علامت تساوی ویژگی تقارنی دارد از این خاصیت برای پاسخ به این سؤال استفاده می‌کند.

با توجه به نتایجی که به دست آمد، به نظر می‌رسد پیشنهاد محققان، مبنی بر آموزش زود هنگام جبر یعنی از دوران ابتدایی پیشنهاد منطقی‌ای باشد.

بنابراین به دلیل این که علامت تساوی پل ارتباطی بین حساب و جبر است، توجه ویژه به یادگیری کامل این مفهوم در دوران ابتدایی توصیه می‌شود.

سؤال ۲. عبارت ریاضی زیر درست است یا نادرست؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$$۵+۹=۱۴ \div ۲=۷ \times ۳=۲۱$$

حدود ۶۳ درصد (۲۸ نفر) دانش آموزان به این سؤال پاسخ درست و حدود ۳۴ درصد (۱۵ نفر) پاسخ نادرست دادند. ۳ درصد (۱ نفر) نیز پاسخ ندادند.

از بین پاسخ‌های متفاوتی که به این سؤال داده شده است، دو پاسخ، نظر پژوهشگر را بیشتر به خود جلب کرد:

۱. درست است؛ چون ابتدا ضرب یا تقسیم هر کدام را، که از سمت چپ اولویت دارد، باید انجام داد، سپس جمع را؛

۲. درست است؛ چون هر کدام از عبارت‌ها ضربی از ۷ هستند.

این پاسخ‌ها در واقع تأیید گفته آیزنر (۲۰۰۰) است که می‌گوید: «دانش آموزان، هم بیشتر و هم کمتر از آنچه که به آن‌ها تدریس می‌شود، می‌آموزند».

فهم علامت تساوی به‌عنوان یک نماد تک‌جهتی کاملاً مرتبط با درک آن به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی است. هر دو مفهوم به‌دنبال محاسبه کمیت طرف چپ علامت تساوی هستند (اسپین و ستی، ۲۰۰۶).

درک کرده بودند که دو طرف علامت تساوی باید به تعادل برسد، اما بررسی این پاسخ نشان داد که ممکن است دانش آموزان به‌طور ضمنی مفهومی را درک کنند در حالی که قادر نیستند آن مفهوم را در فرایند حل مسائل مرتبط به کار برند.

همچنین نتایج به‌دست آمده با نتایج تحقیقی که اسپین و ستی (۲۰۰۶) بر روی دانش آموزان پایه هشتم و نهم انجام دادند، سازگار است. به این معنی که با بزرگ‌تر شدن دانش آموزان از نظر سنی و بالارفتن پایه تحصیلی آن‌ها، درکشان از علامت تساوی به‌طور کامل اصلاح نمی‌شود و هنوز این نماد را علامتی برای رسیدن به جواب می‌دانند.

به نظر می‌رسد این بدفهمی، از جمله، ریشه در آموزش پیشین دانش آموزان دارد، زیرا به گفته پریدیگر (۲۰۱۰) آموزش حساب دوره ابتدایی با تمرکز بر تساوی‌های نامتقارن مثل $۱=۳-۶ \div ۲۴$ به معنی عملیاتی علامت تساوی تأکید می‌کند و در نتیجه، کاربرد متقارن و رابط‌های علامت تساوی در جبر دوره راهنمایی و دبیرستان با مشکل مواجه می‌شود.

کارپنتر، فرانک و لوی (۲۰۰۳) نیز با تحقیقی که بر روی دانش آموزان پایه اول تا ششم انجام دادند، به این نتیجه رسیدند که حتی با بالارفتن پایه تحصیلی دانش آموزان، باز هم در حل سؤال $۵+ = ۴+۸$ با مشکل مواجه می‌شوند و عدد ۱۲ یا ۱۷ را در جای خالی قرار می‌دهند.

برای انجام بهتر تجزیه و تحلیل داده‌ها و آگاهی از چگونگی و چرایی درک دانش آموزان از علامت تساوی، مصاحبه‌ای با دو نفر از دانش آموزان که به سؤال ۱ پاسخ اشتباه دادند، صورت گرفت:

پژوهشگر: چرا در قسمت د عدد ۲۰ را قرار دادی؟
دانش آموز ۱: چون ۱۰۰ تقسیم بر ۵ می‌شود ۲۰.
پژوهشگر: به نظر تو علامت تساوی به چه معنی است؟

دانش آموز ۱: علامت تساوی مثل این می‌ماند که دو چیز را جمع کنی و در نهایت جواب را بنویسی یا دو چیز را از هم کم کنی و بعد از علامت تساوی جوابش را بنویسی. تساوی، برابر بودن را نشان می‌دهد.

پژوهشگر: در سؤال ۱، قسمت ب، عدد ۵ را قرار دادی. توضیح بده که چطور به این عدد رسیدی.

دانش آموز ۲: چون سؤال می‌گوید ۹ منهای ۵ برابر است با یک چیزی منهای ۹. من گفتم، چون برابری پس همان چیزی که در طرف چپ است باید در طرف

برای مثال، بر و همکاران (۱۹۸۰) و کی پرن (۱۹۸۱) دریافتند که دانش‌آموزان از پذیرش این که عبارت ریاضی $2+4=$ از نظر ریاضی صحیح است، خودداری می‌کنند و اظهار می‌کنند که علامت تساوی در مکان اشتباهی قرار دارد. از نظر این دانش‌آموزان فقط وقتی این عبارت ریاضی صحیح است که به شکل $2+4=$ نوشته شود و بتوان این عبارت را از چپ به راست خواند.

همچنین مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) بیان کردند که دانش‌آموزان وقتی با جملات عددی ناآشنا مواجه می‌شوند، که متفاوت از شکل قراردادی $a \pm b=c$ هستند، در تفسیر علامت تساوی به‌عنوان نماد تعادلی با مشکل روبه‌رو می‌شوند.

پژوهشگر برای اینکه از چگونگی و چرایی پاسخ به این سؤال آگاه شود، از یکی از دانش‌آموزان در مورد نحوه پاسخگویی به این سؤال مصاحبه به‌عمل آورد: پژوهشگر: تو در سؤال ۲ بیان کردی که این عبارت، صحیح است. چطور به این نتیجه رسیدی؟

دانش‌آموز: این عبارت، از نظر ریاضی درست است. چون $5+9$ برابر است با 14 و 14 تقسیم بر 2 برابر است با $7,7$ هم ضرب در 3 می‌شود، 21 . که جواب آن هم درست است.

بعد از گفت‌وگو با این دانش‌آموز، برای پژوهشگر مشخص شد که نحوه آموزش گذشته دانش‌آموزان در حساب می‌تواند یکی از دلایل این اشتباه باشد. به‌همین دلیل است که استانداردهای انجمن ملی معلمان ریاضی (NCTM، ۲۰۰۰) پیشنهاد می‌کند که تفکر جبری باید در اوایل دوره ابتدایی گسترش یابد.

با توجه به مراحل درک تساوی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) در نظر گرفته‌اند، به‌نظر می‌رسد دانش‌آموزان به مرحله اول درک یعنی محرکی برای پاسخ دست یافته‌اند.

در مورد این سؤال حتی به ویژگی تقارنی علامت تساوی (مرحله دوم درک) نیز توجه نکرده‌اند. همین موضوع نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در محاسبات می‌توانند به‌خوبی عمل کنند اما درک ناقص آن‌ها از تساوی باعث می‌شود که این عبارت را از نظر ریاضی درست بدانند.

نتایجی که از تجزیه و تحلیل این سؤال به‌دست آمد، با نتایجی که اسپین و ستتی (۲۰۰۶) به‌دست آوردند، سازگار است. به این معنی که هنوز در پایه اول متوسطه (نهم) دانش‌آموزانی هستند

که درک کاملی از علامت تساوی ندارند و به این علامت به‌صورت نمادی تک‌جهتی نگاه می‌کنند و به این موضوع توجه نمی‌کنند که علامت تساوی باید یک رابطه تعادلی را نشان دهد، بنابراین عدد 14 نمی‌تواند با 21 برابر باشد.

سؤال ۳. در یک ظرف میوه ۵ عدد سیب قرار دارد. اگر یک سیب دیگر به سیب‌ها اضافه شود، تعداد سیب‌های ظرف، ۶ تا می‌شود. اگر باز هم دو سیب دیگر در ظرف گذاشته شود، تعداد سیب‌های داخل ظرف میوه چندتا می‌شود؟ با نوشتن راه‌حل توضیح دهید.

این سؤال در ابتدا، برای دانش‌آموزان، ساده به‌نظر می‌رسید و آن‌ها بلافاصله جواب را اعلام می‌کردند، اما زمانی که از آن‌ها خواسته شد که راه‌حل ساده آن را بنویسند، ۲۷ درصد (۱۲ نفر) آن‌ها پاسخ را به‌صورت $5+1=6+2=8$ نوشتند که به عقیده اسپین و ستتی (۲۰۰۶) این دسته از دانش‌آموزان علامت تساوی را نمادی تک‌جهتی می‌بینند، یعنی نمادی که از چپ به راست برای آن‌ها معنی دارد.

برای پژوهشگر جالب بود که هشت نفر از دانش‌آموزانی که به سؤال ۲ پاسخ نادرست دادند، راه حل سؤال ۳ را درست نوشتند و پنج نفر از آن‌ها که به سؤال ۲ پاسخ صحیح دادند برای سؤال ۳ پاسخ $5+1=6+2=8$ را نوشته بودند. شش نفر هم هر دو سؤال ۲ و ۳ را اشتباه جواب دادند.

در مجموع، ۶۸ درصد (۳۰ نفر) به این سؤال پاسخ درست و ۲۷ درصد (۱۲ نفر) پاسخ نادرست دادند؛ ۵ درصد (۲ نفر) نیز به‌کلی پاسخ ندادند.

برای اینکه پژوهشگر در مورد نحوه تفکر دانش‌آموزان راجع به این سؤال آگاه شود، با یکی از دانش‌آموزان که به این سؤال پاسخ نادرست داده بود مصاحبه‌ای انجام داد.

پژوهشگر: می‌توانی در مورد راه‌حلی که نوشته‌ای، توضیحی بدهی؟

دانش‌آموز: در ابتدا به ۵ سیب خود، ۱ سیب دیگر اضافه می‌کنیم تا تعداد سیب‌ها به ۶ برسد. اگر باز هم ۲ سیب دیگر به مجموع سیب‌های خود اضافه کنیم، حاصل ما به ۸ می‌رسد.

این‌خطا در نمادگذاری، ناشی از ترجمه عبارت کلامی به جمله ریاضی است (لیون، ۲۰۰۳، نقل شده در اسپین و ستتی، ۲۰۰۶)

کی پرن (۱۹۸۱) دریافت که دانش‌آموزان دوره ابتدایی علامت تساوی را به‌عنوان نمادی می‌بینند که مسئله و پاسخ مسئله را از هم جدا می‌کند. از نظر وی، فقط تغییر معانی از عملیاتی به رابطه‌ای، قانون قراردادی «جملات هر دو طرف معادله را بخوان» را توجیه می‌کند

است، به این معنی که دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به این سؤال نشان دادند که علامت تساوی را نه تنها به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی می‌بینند، بلکه آن را به‌عنوان نمادی تک‌جهتی تفسیر می‌کنند.

سؤال ۴. معادله زیر را حل کنید. هر مرحله از راه حل خود را بنویسید و بیان کنید در هر مرحله، چه کاری انجام داده‌اید.

$$4x+4 = 4x+1$$

این سؤال برای روشن شدن این موضوع طراحی شد که آیا دانش‌آموزان، با توجه به تصویری که از مفهوم تساوی دارند به این نتیجه می‌رسند که معادله جواب ندارد؟ و یا اینکه براساس رویه‌هایی که برای حل معادله یاد گرفته‌اند، معادله را حل می‌کنند و به جواب می‌رسند.

تنها حدود ۳۸ درصد (۱۷ نفر) به این سؤال پاسخ درست دادند، که البته بعد از انجام دادن رویه‌های حل معادله (معلوم و مجهول کردن) به عبارت $x = 0$ رسیدند و در نهایت به این نتیجه رسیدند که معادله جواب ندارد.

حدود ۵۷ درصد (۲۵ نفر) معادله را حل کردند و به پاسخ نادرست $x = -3$ رسیدند و حدود ۵ درصد (۲ نفر) به این سؤال پاسخی ندادند.

به‌نظر می‌رسد، حفظ کردن قوانین بدون دلیل آن‌قدر در ذهن دانش‌آموزان رسوخ کرده‌است که حتی دانش‌آموزانی که به سوالات قبلی پاسخ درست دادند، نتوانستند به این سؤال پاسخ صحیح دهند.

در مجموع، ۲۰ درصد (۹ نفر) دانش‌آموزان به تمامی سوالات پاسخ صحیح دادند و بقیه آن‌ها حداقل یک پاسخ نادرست در آزمون داشتند.

تحقیقات متعدد نشان می‌دهد که تفسیر دانش‌آموزان از علامت تساوی به‌عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی یا نمادی تک‌جهتی، ناشی از روش آموزشی سال‌های قبل است (پر و همکاران، ۱۹۸۰؛ فرودنتال، ۱۹۸۳؛ کی‌پرن، ۱۹۸۰؛ استیسی و مک‌گریگور، ۱۹۹۷؛ کارپنتر و همکاران، ۲۰۰۳- نقل شده در اسپین و ستی، ۲۰۰۶).

در پایه‌های بالاتر تحصیلی، این تصور همچنان باقی می‌ماند و حتی از طریق آموزش دستورالعمل‌ها در جبر تقویت می‌شود: آموزش قوانین (بدون دلیل) برای کار با عبارات جبری منجر به درک محدود می‌شود. برای مثال، پژوهشگر، از یکی از دانش‌آموزانی که به این سؤال

توضیح شفاهی این دانش‌آموز صحیح اما ترجمه‌اش به جمله ریاضی نوشتاری نادرست است. شلیمن، کاراهر، بریزولا و جونز (۱۹۹۸) و فاکتر و همکاران (۱۹۹۹) نیز مشاهده کردند که دانش‌آموزان زمانی که درگیر زمینه‌های فیزیکی واقعی یا مسائل کلامی شفاهی می‌شوند، درک صحیحی از تساوی نشان می‌دهند.

در مورد سؤال ۳، به‌نظر می‌رسد دانش‌آموزان علامت تساوی را برای بیان تعادل بین دو عبارت به کار نمی‌برند، بلکه از آن به‌عنوان یک دستور برای محاسبه مقدار عبارت قبلی استفاده می‌کنند.

در واقع، نتیجه‌ای که از این سؤال به‌دست آمد، تأییدی بر گفته آسکیو و ویلیام (۱۹۹۵- نقل شده در لی، ۲۰۰۶) است که می‌گویند: «به‌نظر می‌رسد، آموزش به روشی که مانع ایجاد هر نوع بدفهمی در دانش‌آموزان شود، ممکن نیست. ما باید بپذیریم که دانش‌آموزان برخی تعمیم‌ها را که صحیح نیستند می‌سازند. بسیاری از این بدفهمی‌ها پنهان می‌ماند تا اینکه معلم با تلاش‌های ویژه‌ای آن‌ها را آشکار کند.»

شاید به‌همین دلیل است که یکی از نگرانی‌های اصلی معلمان ریاضی، اصلاح یادگیری و درک دانش‌آموزان است (هال، ۴). تحلیل خطا می‌تواند ابزار مفیدی در این فرایند باشد. همان‌طور که لاینوویچ (۱۹۹۳، نقل شده در هال، ۴) بیان می‌کند «خطاهای کودک در واقع، مراحل طبیعی یادگیری هستند».

نتیجه به‌دست آمده از این سؤال، مشخص کرد که با توجه به معانی متفاوتی که پدیدگیر (۲۰۱۰) برای علامت تساوی در نظر گرفته‌است، معنی عملیاتی این نماد باز هم بیشتر مورد توجه دانش‌آموزان است و به‌جز تعداد کمی از آن‌ها، به این علامت به‌عنوان یک رابطه تعادلی نگاه نمی‌کنند.

همچنین، با توجه به مراحل درکی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) برای علامت تساوی در نظر گرفته‌اند، مشخص می‌شود که، با اینکه دانش‌آموزان می‌توانند به‌طور شفاهی به جواب درست برسند، اما به‌دلیل اینکه به مرحله سوم درک تساوی، یعنی بیان تعادلی، نرسیده‌اند، قادر نیستند علامت تساوی را به‌درستی تفسیر کنند.

نتایجی که از تحلیل این سؤال به‌دست آمد، با نتایج تحقیق اسپین و ستی (۲۰۰۶) سازگار

پاسخ نادرست داده بود، مصاحبه به عمل آورد:
پژوهشگر: توضیح بده این معادله را چگونه حل کردی؟

دانش آموز: ابتدا باید تمام جملات مشابه را به یک طرف منتقل کنیم، بنابراین تمام اعداد را به یک طرف و تمام x ها را به طرف دیگر می‌گیریم، سپس جملات متشابه را با هم می‌گیریم. یک $4x$ در این طرف داریم، برای آوردن $4x$ دیگر از طرف دیگر باید علامت آن را عوض کنیم، که در اینجا علامتش منفی می‌شود، یعنی $4x-4x$.

عدد ۴ هم باید در کنار عدد ۱ قرار بگیرد، پس آن هم منفی می‌شود. یعنی بعد از معلوم مجهول کردن، معادله را حل می‌کنیم.

پاسخ دانش آموز به این سؤال نشان می‌دهد، که درک او از علامت تساوی، ابزاری است.

هیچ یک از دانش آموزان، روش حل خود را طوری توضیح نداد که به نقش مهم علامت تساوی در معادله اشاره کند. هیچ یک حتی توضیح نداد که وقتی یک کمیت به طرف دیگر برده می‌شود، چگونه علامتش تغییر می‌کند، یا اضافه کردن مقادیر یکسان به دو طرف معادله، برای برابر نگه داشتن دو طرف، ضروری است. آن‌ها فقط «قوانین بدون دلیل» را می‌دانند. (اسکمپ، ۱۹۷۶- نقل شده در اسپین وستتی، ۲۰۰۶)

اولیویر (۱۹۹۶) نیز بحث می‌کند که «یادگیری جدید نادرست، اساساً نتیجه یادگیری درست گذشته است».

البته نمونه‌های بسیاری وجود دارد که با تفسیر علامت تساوی به عنوان نمادی برای انجام دادن چیزی یا نمادی تک‌جهتی، پاسخ صحیح را فراهم می‌آورد.

کی‌پرن (۱۹۸۱) نیز مشاهده کرد که حتی دانش‌آموزانی که یک روش آموزشی مناسب را دریافت کرده‌اند، که در آن روش بر علامت تساوی به عنوان یک رابطه تأکید می‌شود، هنوز نمی‌توانند مفهوم صحیح علامت تساوی را بپذیرند. چنین بدفهمی‌هایی در دبیرستان و دانشگاه نیز وجود دارد. (کلمنت، ۱۹۸۲- به نقل از لی، ۲۰۰۶)

پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال، تأییدی بر یافته‌های مک‌نیل و آلی بالی (۲۰۰۵) است، که می‌گویند: درجه پیوستگی دانش‌آموزان به الگوی عملیاتی علامت تساوی اساساً مرتبط است با اینکه چگونه آن‌ها یک روش صحیح را برای حل معادلات تولید می‌کنند.

در مورد سؤال ۴، دانش‌آموزان با استفاده از معنی رابطه‌ای علامت تساوی و بدون اینکه معادله را حل کنند، می‌توانستند از دو طرف معادله دو جمله یکسان $4x$ را حذف کنند و به این نتیجه برسند که معادله جواب ندارد. در حالی که چون قوانین معادله را بدون دلیل یاد گرفته‌اند، ابتدا معادله را حل می‌کنند و سپس بیان می‌کنند که معادله غلط است و جواب ندارد. نتایج به دست آمده با نتایج تحقیقات پیشین سازگار است، به این معنی که:

اسپین وستتی (۲۰۰۶) مطرح کردند که دانش‌آموزان نتوانستند، معادله را، بدون استفاده از قوانین حل آن، حل کنند و به معنی رابطه‌ای علامت تساوی توجهی نشان ندادند.

متیوز و همکاران (۲۰۱۲) نیز بیان کردند که، دانش‌آموزان، معادلاتی را که در یک طرف علامت تساوی عملیات دارد، نسبت به معادله‌ای که در دو طرف علامت تساوی عملیات حسابی دارد، راحت‌تر حل می‌کنند.

با تفسیری که پریدیگر (۲۰۱۰) از علامت تساوی دارد، در این سؤال دانش‌آموزان به معنی عملیاتی علامت تساوی توجه دارند.

با توجه به مراحل تکامل درکی که مولینا و آمبروس (۲۰۰۸) از علامت تساوی بیان کرده‌اند، نتیجه تحلیل این سؤال نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در زمان حل معادله به مرحله اول و دوم درک رسیده‌اند اما به این نکته توجه ندارند که معادله به نوعی بیان یک رابطه تعادلی است.

برخی از محققان برای یادگیری بهتر معادله ایده استفاده از ترازوی متعادل را پیشنهاد می‌کنند، که بازنمایی یک رابطه معادل بین دو کمیت است. اما اسپین وستتی (۲۰۰۶) عقیده دارند که چگونه می‌توان با استفاده از ترازوی متعادل $\sin 30^\circ = 0.5$ یا $\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ را نشان داد. یا حتی این موضوع، مشکل‌تر می‌شود، وقتی که موضوع بحث وارد جبر می‌شود.

بحث و نتیجه گیری

تجزیه و تحلیل داده‌های تحقیق نشان داد که اکثر دانش‌آموزان ابزارهای لازم را برای حل معادله، که همان قوانین حل معادله است، در اختیار دارند. اما به دلیل اینکه درک درستی از علامت تساوی ندارند قادر نیستند با کمک گرفتن از معنی رابطه‌ای علامت

برخی از فعالیت‌های آموزشی که می‌توانند به یادگیری بهتر مفهوم تساوی کمک کنند، عبارت‌اند از:

۱. روش جایگزینی: استیسی و مک‌گریگور (۱۹۹۹) پیشنهاد کردند که دانش‌آموزان باید تشویق شوند به روش جایگزینی، جواب‌هایشان را بنویسند. برای مثال، به جای $۸+۷=۱۵$ ، بنویسند $۸+۷=۶+۹$ ، $۸+۷=۳\times ۵$. این فعالیت نه تنها منجر به درک تساوی می‌شود، بلکه به دانش‌آموزان می‌فهماند که هر عدد ترکیبی از اعداد دیگر است.

۲. عبارت‌های صحیح/ غلط: به این معنی که از دانش‌آموزان خواسته شود، درستی یا نادرستی عبارت‌هایی مانند، $۲۷+۱۴=۴۱$ ، $۱۵\div ۳=۵\times ۲$ ، $۱۴-۹=۵-۲$ را مشخص کنند. این فعالیت، به معلم فرصتی می‌دهد تا بدفهمی‌های دانش‌آموزان مانند «بعد از نماد تساوی، جواب می‌آید» را ببیند.

پی‌نوشت‌ها

1. Saenz-Ludlow
2. Walgamuth
3. Prediger
4. Winter
5. Wolters
6. Theis
7. McNeil
8. Cortes

منابع

1. Ben-zeev, T. (1996). **When erroneous mathematical thinking is just as "correct"**: the oxymoron of rational errors. IN R. J. Sternberg & T. Ben-zeev (Eds). *The Nature of Mathematical Thinking*, (55-79). LEA Publishers.
2. Carpenter, T. P. , Franke, M. L. , & Levi, L. (2003). **Thinking mathematically**: integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth: Heinemann.
3. Falkner, K. & Levi, L. & Carpenter, Th. (1999). **Children's understanding of equality: A foundation for Algebra**. Teaching children mathematics. (pp 232-236).
4. Foster, D. (2007). **Making Meaning in Algebra Examining Students' Understandings**

تساوی به حل معادله پیردازند.

در واقع، بیشترین تفسیری که دانش‌آموزان از علامت تساوی دارند، این است که آن را نمادی برای **انجام دادن چیزی** یا **یافتن یک پاسخ** می‌دانند. از این نظر، علامت تساوی ابزاری برای نوشتن جواب است.

مفهوم دیگری که در این مطالعه مشخص شد، درک علامت تساوی به‌عنوان نمادی **تک‌جهتی** بود، که این نوع درک در سؤال‌های ۲ و ۳ مشخص شد. یعنی این نماد برای اکثر دانش‌آموزان از چپ به راست معنی دارد.

دانش‌آموزان پایه اول متوسطه (نهم) در مورد مفهوم علامت تساوی با بدفهمی‌های زیر مواجه هستند.

۱. به علامت تساوی به‌عنوان نمادی برای اجرای یک عملیات نگاه می‌کنند و به عملیات بعد از جای خالی توجهی ندارند؛

۲. به بیش‌تعمیمی خاصیت جابه‌جایی تمایل دارند؛

۳. علامت تساوی را نمادی تک‌جهتی می‌بینند، که عملیات را از چپ به راست اجرا می‌کند؛

۴. بدفهمی دیگری که مشخص شد، در مورد ترجمه یک مسئله کلامی به زبان ریاضی بود. یعنی دانش‌آموزان به‌طور شفاهی قادرند راه‌حل مسئله را بیان کنند، اما هنگامی که از آن‌ها خواسته می‌شود، راه‌حل را به زبان ریاضی بنویسند، علامت تساوی را برای ارتباط و اتصال بین مراحل حل سؤال به‌کار می‌برند. علی‌رغم اینکه در ابتدا، دانش‌آموزان به ساده بودن سؤال اشاره کردند، اما ۲۷ درصد (۱۲ نفر) آن‌ها راه‌حل را به صورت $۸=۲+۶+۱=۵$ نوشتند.

۵. بیشترین اشتباه در حل معادله، این است که دانش‌آموزان معادله و نماد تساوی را به منزله یک نماد برای انجام چند عملیات ریاضی و ساده کردن می‌بینند و با دیدن آن بدون حتی لحظه‌ای درنگ، از اطلاعاتشان در مورد نوع معادله کمک گرفته و شروع به حل می‌کنند و حل معادله را مستلزم طی یک سری مراحل می‌دانند و در میان راه‌حل خود، به مفهوم آنچه می‌نویسند، کمتر توجه دارند و فقط سعی می‌کنند از یک مرحله، مرحله دیگری را نتیجه بگیرند (برهمند، ۱۳۸۶). این نوع اشتباه در بررسی سؤال ۴ مشخص شد.

15. Prediger, S. (2010). **How to develop mathematics for teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign.** J Math Teacher Edu, Vol. 13, (pp. 73–93). Published online: 27August 2009, Springer Science+Business Media B. V. 2009.
16. Sáenz-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). **Third graders' interpretation of equality and the equal symbol.** Educational Studies in Mathematics, Vol. 35, (pp. 153-187).
17. Skemp, R. R. (1989). **Mathematics in the primary school.** London: Rutledge.

۱۸. آیزنر، البوت دلبلیو. (۲۰۰۵). **آنان که گذشته را نادیده می‌گیرند...** ترجمه: سپیده چمن‌آرا و زهرا گویا (۱۳۸۱). مجله رشد آموزش ریاضی. سال ۱۹، شماره (۶۹)، صص ۴ تا ۱۸. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۹. برهمند، علی. (۱۳۸۶). **فهم دانش‌آموزان از معادله درجه اول.** رساله منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشکده علوم ریاضی.

۲۰. بن زیو، تالیا. (۱۹۹۶). **منشأ خطاهای دانش‌آموزان.** ترجمه: سپیده چمن‌آرا (۱۳۹۰). مجله رشد آموزش ریاضی. سال ۲۹، شماره (۱۰۶)، صص ۱۱ تا ۱۶. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲۱. بیشاب، آلن - جی. (۱۹۹۸). **آموزش ریاضی و فرهنگ.** ترجمه: روح‌الله جهانی‌پور و زهرا گویا (۱۳۷۶). مجله رشد آموزش ریاضی. سال ۱۲، شماره (۵۰)، صص ۳ تا ۱۱. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲۲. چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۸۳). **تدریس ریاضی: انتقال مفاهیم یا کمک به کشف آن‌ها؟!.** مجله رشد آموزش ریاضی. سال ۲۱، شماره (۷۸)، صص ۷ تا ۱۲. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲۳. چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۸۴). **آشنایی با روش‌های تدریس ریاضی مبتنی بر دیدگاه ساخت و سازگرای.** مجله رشد آموزش ریاضی. سال ۲۳، شماره (۸۱)، صص ۲۱ تا ۳۱. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲۴. حاجی‌بابایی، جواد. (۱۳۷۵). **در باب برنامه درسی ریاضیات دبیرستان.** مجله رشد آموزش ریاضی. سال ۱۲، شماره (۴۶)، صص ۲ تا ۶. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲۵. حسام، عبدالله. (۱۳۸۳). **شهود، ریاضیات و آموزش.** مجله رشد آموزش ریاضی. سال ۲۱، شماره (۷۸)، صص ۱۳ تا ۲۲. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

and Misconceptions. Assessing Mathematical Proficiency

MSRI Publications, Volume 53, 2007,(pp. 163-176).

5. Griffin, P. & Hirst, Sh. & et al. (1989). **Project Mathematics update: preparing to teach equations.** In centre for Mathematics Education, The open university.

6. Hall, R. (). **An Analysis of Errors Made in the Solution of Simple Linear Equations.** (pp. 7-8).

7. Knuth, E. , & Stephens, A. , & McNeil, N. , & Alibali, M. (2006). **Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations.** Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 37, No. 4, (pp. 297-312).

8. LI, X. (2006). **Cognitive Analysis of Students' Errors and Misconceptions in Variables, Equations, and Functions.** Submitted to the Office of Graduate Studies of Texas A&M University in partial fulfillment of the requirements for the degree of DOCTOR OF PHILOSOPHY. (pp. 33-36).

9. Lloyd, M. G. & Pitts Bannister, R. V. (2010). **Secondary School Mathematics Curriculum Materials as Tools for Teachers' Learning.** In B. J. Reys; & R. E. Reys; & R. Rubenstein (Eds.), Mathematics Curriculum: Issues, Trends, and Future Directions: Seventy-second Yearbook, (pp. 327-331). Reston,VA, NCTM.

10. Matthews, P. , & Rittle-Johnson, B. , & McEldoon, K. , & Taylor, R. (2012). **Measure for Measure: What Combining Diverse Measures Reveals About Children's Understanding of the Equal Sign as an Indicator of Mathematical Equality.** Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 43, No. 3, (pp. 220-254).

11. Molina, M. , Ambrose, R. & Castro, E. (2004). **In the transition from arithmetic to algebra: misconceptions of the equal sign.** Presented at the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, July 14-18, 2004.

12. Molina, M. & Ambrose, R. (2006). **Fostering Relational Thinking While Negotiating the Meaning of the Equal Sign.** Teaching Children Mathematics Vol. 13, No. 2, (pp. 111-117).

13. Molina, M. & Ambrose, R. (2008). **From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking.** Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 30, No. 1, (pp. 61-80).

14. Oksuz, C. (2001). **Children's understanding of equality and the equal symbol.** In Adnan Menderes university.

آموزش رهیافت‌های حل مسئله

بهناز ساویزی

دکترای آموزش ریاضی و دبیر ریاضی منطقه ۱ تهران
مقاله ارائه شده در سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی

چکیده

از موفق‌ترین‌ها در عرصه آموزش ریاضی مدرسه‌ای می‌باشند. (برون، ۲۰۱۳) (دبلیو، ۲۰۱۲) (کار، مترجم: غلام‌آزاد). رویکردهای مختلفی برای حضور «حل مسئله» در برنامه درسی ریاضی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به آموزش حل مسئله، آموزش ریاضی به‌منظور حل مسئله و آموزش از طریق حل مسئله اشاره نمود. این سه رویکرد با سه مقطع تاریخی در آموزش، یعنی دوره تدریس محور^۲ در اوایل قرن بیستم، دوره ساخت‌وسازگرایی و محوریت فعالیت دانش‌آموز از اواخر قرن بیستم تاکنون مطابقت دارد. آموزش رهیافت‌های حل مسئله در عصر طلایی خود، یعنی اواسط قرن بیستم، مصادف بود با دوره علاقه‌مندی متخصصان هوش مصنوعی به اینکه ماشین‌ها بتوانند مسئله حل کنند، بنابراین استخراج المان‌ها و رهیافت‌های کلی حل مسئله، مستقل از محتوا و نوع مسئله و به‌عنوان استراتژی‌های قابل تعمیم مورد توجه بود. (پرکینس و سالمون، ۱۹۸۹) در تحقیقات اخیر آموزش از طریق حل مسئله را بیش از رویکردهای دیگر مورد تأکید قرار می‌دهند (کای و لیستر، ۲۰۱۰)، (تاپالین، مترجم: فروزبخش، فیروزه، ۱۳۹۲). آموزش حل مسئله به‌معنای آموزش استراتژی‌ها و رهیافت‌هایی است که منجر به ایجاد مهارت حل مسئله ریاضی در دانش‌آموز می‌گردد.

این نوشتار، مروری بر نظریات و نتایج تحقیقات مختلف در زمینه آموزش رهیافت‌های حل مسئله است. هدف مقاله رد یا تأیید آموزش رهیافت‌ها نیست بلکه هدف آن بررسی موضوع از زوایای مختلف و تأمل عمیق‌تر بر چرایی و چگونگی آموزش رهیافت‌هاست. البته در تهیه این نوشتار فصل اول کتاب ریاضی هفتم مورد نظر بوده و نظر نویسنده در مورد این فصل با توجه به تحقیقات و نظریات موجود در زمینه آموزش رهیافت‌ها بیان شده است.

کلیدواژه‌ها: رهیافت، حل مسئله، آموزش

مقدمه

حل مسئله از ارکان مهم آموزش ریاضیات است. بیانیه عمل NCTM در آغاز دهه هشتاد میلادی، حل مسئله را هسته اصلی آموزش ریاضیات معرفی نمود. در بخشی از این بیانیه آمده بود: «... تلاش برای آموزش تمام مهارت‌ها و محتوای ریاضیات، پیش از [آموزش] حل مسئله کارایی چندانی ندارد... مشکل [دانش‌آموزان] در محاسبات نباید مانعی برای یادگیری راهبردهای حل مسئله باشد...» (کلاین، ۲۰۰۳). حل مسئله یکی از پنج استاندارد فرایند NCTM، یکی از استانداردهای هشت‌گانه CCSS^۱، محور اصلی برنامه درسی ریاضیات در سنگاپور و یکی از موضوعات مورد تأکید برنامه درسی چین است. (دو کشور اخیر

رہیافت چیست؟

پولیا (۱۹۴۵) از شناخته شده ترین افرادی است که فرایند حل مسئله را به شکلی نظام مند فرموله و تبیین کرد (پولیا ۱۹۴۵). وی فرایند حل مسئله را در چهار گام کلی فهم مسئله، طرح نقشه، اجرای نقشه و بازگشت به عقب (به پس نگریستن) مدل سازی نمود. البته برای هر گام استراتژی هایی نیز مطرح می شد. جان دیویی^۴ (۱۹۳۳) و کرولیک^۵ و رادنیک^۶ (۱۹۸۰) نیز به نوبه خود مدل هایی برای حل مسئله ارائه داده اند که در جدول ۱ آورده شده است (کارسون ۲۰۰۷).

پولیا رهیافتها را همان راهبردهایی معرفی می کند که ریاضی دانان و مسئله حل کن های ماهر برای حل مسائل ریاضی از آن ها بهره می برند (پولیا ۱۹۴۵). شونفیلد رهیافت های حل مسئله را راهبردهایی می داند که به دانش آموز کمک می کنند تا صورت مسئله را بفهمد و حل کند (شونفیلد ۱۹۸۵).

برونر (۱۹۶۰) رهیافتها را روشها و راهبردهایی برای آسان تر شدن حل مسئله تعریف می کند (سیو، ۲۰۰۵).

گام های حل مسئله	جان دیویی (۱۹۳۳)	جرج پولیا (۱۹۴۵)	کرولیک و رادنیک (۱۹۸۸)
با مسئله مواجه شدن	درک مسئله	خواندن	
تشخیص و تعریف مسئله	طرح نقشه	جستوجو کردن	
فهرست کردن راه حل های ممکن	اجرای نقشه	انتخاب استراتژی	
حدس زدن روابط و نتیجه راه حل ها	بازپس نگریستن (به عقب بازگشتن)	حل کردن	
آزمون نتیجه		مرور و توسعه حل	

دیدگاه های مختلف در رابطه با تدریس رهیافت های حل مسئله

پولیا اولین ارائه کننده رهیافت های حل مسئله است؛ با وجود این هیچ گاه ادعایی نکرد که می توان این رهیافتها را آموزش داد (پولیا ۱۹۴۵ در شونفیلد ۱۹۸۳). شونفیلد (۲۰۱۲) بیان می کند: «پولیا رهیافتها را شرح داد، من فهمیدم و از آن ها استفاده کردم! در آن وقت تأسف می خوردم که چرا پیش تر آن ها را آموزش ندیده بودم. درسی که گرفتم این بود که وقتی افراد می خواهند راهبردهای کتاب پولیا را آموزش دهند دانش آموزان استفاده مؤثر از

آن ها را یاد نمی گیرند. اگرچه این ناامیدکننده بود ولی آموزش ریاضی را با چالشی مفید و جدید مواجه ساخت...» (شونفیلد ۲۰۱۲). شونفیلد نتایج تحقیقات تجربی (آزمایشگاهی) چند ساله خود در حل مسئله، چگونگی حل مسئله متخصصان و نوآموزان و عناصر حل مسئله را در کتاب «حل مسئله ریاضی» جمع بندی کرد (شونفیلد ۱۹۸۵). وی معتقد است آموزش تعداد محدودی رهیافت حل مسئله تحت شرایطی معلوم و کنترل شده می تواند منجر به بهبود حل مسئله در تازه کاران شود ولی به دلیل پیچیدگی استفاده از رهیافتها در عمل این موضوع قابل تعمیم به کل نیست. (شونفیلد ۱۹۸۳)

لستر^۷ (۲۰۱۰) بیان می کند که هیچ یک از تحقیقات انجام شده تقویت مهارت حل مسئله در دانش آموزان را از طریق یک برنامه درسی که شامل آموزش مفاهیم و رویه ها، طرح مسئله و آموزش رهیافت های حل مسئله باشد به طور قطعی تأیید نمی کند (لستر ۲۰۱۰). از این رو امروزه تحقیقات کمتری درباره این موضوع انجام می شود (لستر ۲۰۱۰). لستر معتقد است اگر انتظار داریم دانش آموزان مسئله حل کن های ماهری شوند ناچاریم نگرشمان در موضوع حل مسئله را بدین گونه تغییر دهیم که «مسئله عاملی خارجی و تزریقی در برنامه درسی ریاضی نیست که برای آموزش حل آن ناگزیر از تدریس رهیافتها و استراتژیها باشیم. بلکه برنامه درسی ریاضی تلفیقی از مسئله و حل مسئله است. آموزش، از طریق حل مسئله و مفاهیم، از دل حل مسئله بیرون کشیده شده و آموخته می شود» (لستر ۲۰۱۰). البته هر نوع تمرین و تکلیفی «مسئله» محسوب نمی شود. مسائل مفید برای برنامه درسی ده ویژگی دارند که لاپان^۸ و فیلیپس^۹ (۱۹۹۸) آن ها را بیان کرده اند که از این میان چهار ویژگی برای مسائل کلاس درس ضروری است. این چهار ویژگی عبارتند از:

۱. مسئله باید حاوی ریاضیات مهم و مفید باشد؛
۲. حل مسئله مطرح شده باید نیازمند تفکر سطح بالا باشد.
۳. مسئله باید در رشد مفهومی دانش آموز نقش داشته باشد.
۴. مسئله باید طوری باشد تا معلم به میزان یادگیری مفاهیم و دشواری های دانش آموزان طی

حل آن نظارت و کنترل داشته باشد (لاپان و فیلیپس ۱۹۹۸ به نقل از لستر ۲۰۱۰).

در آموزش از طریق حل مسئله دانش آموز آزاد است هر نوع رویکردی را که مایل است انتخاب کند، هر نوع دانشی را که می‌داند فراخواند و نظرات خود را به هر شیوه‌ای که با آن راحت‌تر است ارزیابی نماید (لستر ۲۰۱۰). دانش آموز طی چالش برای حل مسئله، شرح و ارزیابی اندیشه خود و نیز همکلاسی‌هایش، موفق می‌شود اندیشه خود را سازماندهی کند و صاحب «دانش» خود باشد (لمپرت ۱۹۹۰ به نقل از لستر ۲۰۱۰).

کارسون^{۱۰} (۲۰۰۷) موضع مخالفی در قبال تئوری آموزش مهارت حل مسئله اتخاذ می‌کند (کارسون ۲۰۰۷). محوریت حل مسئله در استانداردهای نوین برنامه درسی ریاضی به شکل ضمنی بدین معناست که ریاضت و استراتژی‌های حل مسئله مقدم بر تسلط بر مفاهیم و دانش‌ها هستند (مراجعه کنید به بخشی از بیانیه عمل NCTM که در مقدمه آورده شده است). کارسون بیان می‌کند که تئوری حل مسئله، ریاضت‌های بی‌محتوا^{۱۱} را مقدم بر دانش محتوایی و مفهومی می‌داند (کارسون ۲۰۰۷). وی مهارت حل مسئله را بدون دانش محتوایی و مفهومی لازم و اولیه ممکن نمی‌داند. تناقض موجود در ادبیات تحقیقات حل مسئله آنجا آشکار می‌گردد که طرفداران آموزش از طریق حل مسئله و آموزش حل مسئله، رویکرد خود را ضد محتوا - محور بودن برنامه درسی معرفی می‌کنند و از سوی دیگر حل مسئله را مستلزم داشتن دانش محتوایی و مفهومی قبلی می‌دانند. کارسون معتقد است این تناقض خود «مشکل یا مسئله حل مسئله است» و نتیجه می‌گیرد که «تسلط بر دانش مفهومی و محتوایی» مقدم بر «مهارت حل مسئله» است و این دو با هم ملازمه دارند. کارسون بیان می‌کند ریاضت‌های حل مسئله پولیا و دیویی، به روشنی معلوم نمی‌کنند تا چه حد مستقل از محتوای دانشی می‌توانند کارایی داشته باشند. ریاضت‌های حل مسئله «خالی از محتوا» از نظر کارسون خود دارای مسئله‌اند، زیرا دانش و تفکر را دو حوزه و مقوله جدا از هم می‌دانند. حل مسئله به‌طور طبیعی منجر به کشف الگوریتم‌ها و ریاضت‌های حل مسئله می‌شود و باید دانش آموز را در جهتی سوق داد که بتواند معلومات و دانش لازم را بیاموزد، به‌خوبی آن‌ها را فراخواند و در حل مسئله از آن بهره‌گیرد. (کارسون ۲۰۰۷)

در سیلابس آموزش ریاضی سنگاپور ۱۳ ریاضت حل مسئله معرفی شده است ولی به هیچ‌یک از آن‌ها در متن کتاب‌های درسی اشاره مستقیمی نشده است (سیو ۲۰۰۵). سیو این سیزده ریاضت را در سه دسته کلی: ریاضت‌های بیان^{۱۲} مسئله، ریاضت‌های ساده‌سازی^{۱۳} و ریاضت‌های مسیر^{۱۴} تقسیم‌بندی می‌کند. وی معتقد به آموزش جداگانه و به اصطلاح از بالا به پایین ریاضت‌هاست ولی همه ریاضت‌ها را به هر طریق دلخواه قابل تدریس نمی‌داند. تدریس یک ریاضت و سپس مطرح نمودن مسئله مرتبط با همان ریاضت، از نظر سیو، کارایی چندانی ندارد زیرا ریاضت‌ها هر یک به‌طور جدا از هم تدریس شده و ارتباط بین ریاضت‌ها و ایده اصلی مستتر در آن‌ها آشکار نمی‌شود (سیو ۲۰۰۵).

کدام ریاضت‌ها و چگونه؟

شونفیلد برای تدریس و به‌کارگیری ریاضت‌ها پاسخگویی به تعدادی پرسش را ضروری می‌داند: «پیش‌زمینه و معلومات قبلی دانش‌آموزان چقدر باشد تا بتوان به آن‌ها استراتژی‌های حل مسئله را آموزش داد؟ علاوه بر استراتژی‌های شخصی حل مسئله به چه چیزهای دیگری نیازمندیم؟ تدریس و استفاده از استراتژی کلی مانند تعیین اهداف جزئی‌تر به چه طریق و تا چه حد ممکن است؟» (آموزش مهارت‌های حل مسئله شونفیلد). به بیان شونفیلد دشواری‌ها و نکات مهمی در رابطه با آموزش ریاضت‌ها وجود دارد: اول اینکه ریاضت‌ها بسیار پیچیده‌تر از آن هستند که در نگاه اول و در بیان‌شان به‌نظر می‌رسند. دوم تدریس ریاضت‌ها تنها به شرط اینکه به تعداد کم و محدود و تحت شرایط کاملاً کنترل شده باشند منجر به ایجاد تغییر در مهارت حل مسئله دانش‌آموز می‌گردد و این موضوع در حالت کلی تعمیم‌پذیر نیست و سوم اینکه دانش‌تن تنها استراتژی‌های حل مسئله کافی نیست. فرد باید بداند کدام ریاضت را چه زمان به‌کار گیرد. (شونفیلد ۱۹۸۳). شونفیلد در رابطه با پیچیدگی استفاده از ریاضت‌ها مثال‌هایی می‌زند. برای مثال یکی از ریاضت‌های معروف و سرانگشتی «استفاده از مسئله ساده‌تر» است. در همه موارد زیر استفاده از این ریاضت کارساز است.

۱. اگر a, b, c, d اعداد بین صفر و یک باشند ثابت کنید:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > 1-a-b-c-d$$

۲. حاصل جمع زیر را بیابید.

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$$

۳. ثابت کنید اگر $a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+ad$

$$a=b=c=d$$

برای مسئله اول یک فرد تازه کار ممکن است پراختها را در هم ضرب کند و عملیات را ادامه دهد. در حالی که مسئله حل کن ماهر با کاهش تعداد متغیرها و ساده تر کردن مسئله آغاز می کند. در مورد مسئله ۲، مسئله ساده تر عبارت از محاسبه چند جمله اول سری است. گاهی دیدن متغیر طبیعی (n) می تواند یادآور مسئله استقرای و آزمودن چند جمله اول باشد. در حالی که در مسئله «ثابت کنید $1-2^n$ به ازای اعداد طبیعی عددی اول است» فرد با تجربه سراغ اثبات به کمک برهان خلف می رود و مسئله حل کن تازه کار به احتمال زیاد شروع به امتحان کردن اعداد مختلف و محاسبه عدد می نماید. در مسئله سوم، مسئله ساده تر (با متغیر کمتر) به دو شکل به ذهن دانش آموز می رسد (شونفیلد ۱۹۸۵):

$$a^2+b^2=ab \quad \text{الف. آن گاه } a=b$$

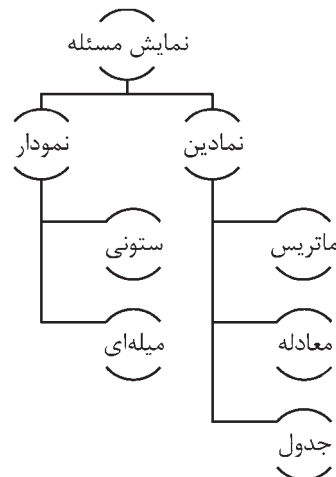
$$a^2+b^2=ab+ba \quad \text{ب. آن گاه } a=b$$

در دو مسئله اول رهیافت «مسئله ساده تر» به شکل متفاوتی به کار رفته است. در اولی به شکل کاهش تعداد متغیرها و در دومی به شکل محاسبه چند جمله اول. در مسئله سوم مسئله ساده تر با کاهش تعداد متغیرها حاصل می شود ولی این کاهش منجر به دو نوع مسئله ساده تر می گردد. شونفیلد بیان می کند به کارگیری رهیافت های به ظاهر ساده برای تازه کارها اغلب کاری پیچیده است. وی معتقد است آموزش رهیافت های حل مسئله تنها زمانی مفید است که تعداد رهیافت ها کم باشند، در رابطه با تعداد محدودی مسئله مستقیماً بیان شده باشند و به صورت گام به گام و دوره ای یادآوری و تشریح گردند (شونفیلد ۱۹۸۳). به علاوه، شونفیلد آموزش رهیافت های کلی مانند «یافتن مسئله مشابه» یا «تعیین اهداف جزئی تر مسئله» را مفید نمی داند؛ در عوض شکستن رهیافت های کلی را به رهیافت های جزئی تر کارآمد می داند (شونفیلد ۱۹۸۵ ص ۹۵).

برخلاف شونفیلد که تدریس رهیافت های جزئی تر به جای تدریس رهیافت های کلی حل مسئله را پیشنهاد می دهد، سیو تدریس از بالا به پایین^{۱۵} و سلسله مراتبی رهیافت ها را مفید می داند. برای مثال وی رهیافت «تمودار رسم کن» را زیرشاخه رهیافت

کلی «تمایش مسئله» دانسته و رهیافت «هیستوگرام رسم کن» را زیرشاخه آن دو دیگر معرفی می کند. وی بیان می کند که دانش آموز ابتدا باید ایده رهیافت کلی «بیان یا نمایش مسئله» را درک کند و سپس به مرحله «تمودار رسم کن» و بعد از آن به «هیستوگرام رسم کن» برسد که این کار مستلزم تمرین گام به گام و آهسته است. وی نظر خود را وام دار نظر برونر (۱۹۶۰) مینی بر تدریس اولیه ساختارهای کلی می داند (سیو ۲۰۰۵). با این حال سیو در مثالی که ارائه می دهد سناریوی حل مسئله را از فعالیت های شخصی و گروهی دانش آموزان، بحث روی نتایج کار ایشان، معرفی رهیافت های کلی تر براساس نتایج کار دانش آموزان و سپس بیان رهیافت های جزئی تر ترسیم می کند (و نه بالعکس یعنی معرفی رهیافت پیش از شروع به حل مسئله) (سیو ۲۰۰۵).

دانلوپ^{۱۶} (۱۹۸۸) به نقل از ماسر^{۱۷} و شونسکی^{۱۸} (۱۹۸۰) پنج رهیافت حل مسئله را مناسب تر از باقی رهیافت ها در دوره دبیرستان معرفی می کند. این پنج رهیافت عبارتند از: آزمون و خطا، الگویابی، ساده سازی مسئله، یافتن مسئله مشابه و به عقب نگرستن. دانلوپ طی تحقیق تجربی (آزمایشگاهی) که انجام داد به این نتیجه رسید که اولاً تعداد رهیافت هایی که آموزش داده می شود باید کم باشد (دو یا سه رهیافت) و دوم اینکه دانش آموزان منطق استفاده از یک رهیافت را در نمی یابند مگر آنکه به خوبی شرح داده شود و نحوه استفاده از آن در مسائل متعدد و مرتبطی که زمینه کاربرد آن رهیافت را دارند بیان شده باشد. به علاوه وی تأکید می کند دانش آموز باید به اندازه کافی وقت داشته باشد تا روی حل مسئله و استفاده از رهیافت ها کار کند (دانلوپ ۱۹۸۸).





در مطالعه انجام شده روی ۷۲ معلم ابتدایی آمریکایی، برون دریافت که آن‌ها تمام رهیافت‌های حل مسئله پیشنهاد شده توسط استانداردهایی مانند NCTM و CCSS را در کلاس‌های درس خود به کار نمی‌گیرند، بلکه بیشتر از دو رهیافت «رسم شکل» و «بیرون کشیدن اطلاعات کلیدی مسئله» استفاده می‌کنند (برون ۲۰۱۳).

بررسی آموزش رهیافت‌های حل مسئله در کتاب ریاضی هفتم

نویسنده در مورد حل مسئله با رویکرد اخیر، یعنی آموزش از طریق حل مسئله، موافقت بیشتری دارد. آنچه تاکنون مورد تأیید قطعی بوده تنها تحقیقات تجربی محققان در شرایط و محیط‌های کاملاً کنترل شده بوده است. با این حال برای آموزش رهیافت‌های حل مسئله، مطابق با آنچه تاکنون گفته شد، پیشنهادهایی ارائه می‌گردد. مرور نتایج تحقیقات انجام شده نشان می‌دهد که در آموزش رهیافت‌های حل مسئله نکاتی حائز اهمیت هستند؛ از جمله: زمان، تعداد رهیافت‌های مورد تدریس، نوع رهیافت‌ها، نحوه بیان و ارائه رهیافت‌ها و میزان اثربخشی تدریس رهیافت‌ها.

با توجه به آنچه گفته شد فصل اول کتاب ریاضی هفتم که به‌طور مستقل به ارائه رهیافت‌های حل مسئله اختصاص یافته است مورد بررسی اجمالی قرار می‌گیرد. در این فصل هشت راهبرد هر یک در کادری جداگانه و در ابتدای یک قسمت مطرح می‌شود. پس از ارائه هر راهبرد چند مسئله در همان رابطه مطرح شده است. اولین مسئله با توضیحات و راهنمایی‌های مؤلفان کتاب همراه است. در انتهای فصل بخشی به نام «مرور راهبردها» آورده شده است. به‌نظر نویسنده راهبردهایی مانند رسم شکل، حذف موارد نامطلوب یا الگویابی، که برای معلمان آشناتر است، برای تدریس مناسب‌اند (به‌ویژه که در سال‌های گذشته به آن‌ها اشاره شده است).

راهبردهای «زیر مسئله» و «تبدیل به مسائل ساده‌تر» و «راهبرد روش‌های نمادین» نیاز به زمان و کار بیشتری دارند. سه مسئله مطرح شده در بخش «راهبرد مسئله ساده‌تر» با یکدیگر ارتباطی ندارند و این راهبرد کلی در مورد هر یک به شیوه‌ای جداگانه عمل نموده است. برای مثال، در مورد مسئله اول، راهبرد حل مسئله به یک راهبرد محاسباتی ساده، یا همان محاسبه تقریبی، تقلیل یافته است. مسائل ۲ و ۳ با بحث استقرار

مرتبطاند که در حوزه‌های حساب و هندسه مطرح شده‌اند. ممکن است دانش‌آموز نحوه به‌کارگیری رهیافت در این سه مسئله را بفهمد ولی در مسیر برگشت، یعنی به‌کارگیری رهیافت در مسائلی نو و با ساختار متفاوت، جای شک باقی است. در مورد رهیافت «روش‌های نمادین» دو مسئله مطرح شده است که اساساً با مقدمه و آغاز جبر مرتبط است. به‌نظر نویسنده این راهبرد به‌طور طبیعی در ورود به مرحله پیش - جبر و جبر مدنظر قرار گرفته و بدون برچسب راهبرد حل مسئله تدریس می‌شود. لذا مطرح کردن آن در قالب یک راهبرد نمی‌تواند تأثیر چندانی در حل مسئله دانش‌آموزان داشته باشد.

تأکید و بیان مستقیم راهبردهای کلی مانند «زیرمسئله» فرصت دانش‌آموز برای چالش با مسئله را کم‌رنگ می‌کند و نیز کمی مبهم است. اگر دانش‌آموز بداند دقیقاً از کجا مسئله را، به اصطلاح، بشکند و به مسائل کوچک‌تر تبدیل نماید خود مهارت بزرگی است. این راهبرد کلی برای دانش‌آموزی که برای آغاز به حل مسئله دچار مشکل است شاید چندان کارساز نباشد. این‌گونه راهبردها (و به‌طور کل هر راهبردی) بهتر است با راهنمایی معلم توسط خود دانش‌آموز و طی کلنجار رفتن با مسئله کشف و بیان شوند. تعریف مسئله عبارت از مواجه شدن با موقعیتی است که توسط راه‌های معمول، روش‌ها و الگوریتم‌های از پیش‌شناخته شده به آسانی قابل حل نباشد. چالش دانش‌آموز با یک مسئله جدید، هر چند زمان‌بر باشد، ارزشمند است و موجب کشف استراتژی‌ها، راهکارها و مفاهیم نو توسط خود او می‌گردد که ماندگاری و اثربخشی بیشتری دارد.

به هر حال سنجش میزان اثربخشی رهیافت‌های مطرح شده در کتاب هفتم در بهبود حل مسئله دانش‌آموزان نیازمند تحقیق و بررسی بیشتر است و نویسنده این مقاله تنها با توجه به تحقیقات انجام یافته پیشین و تجربه معلمی نظرات خود را بیان می‌کند.

جمع‌بندی

نظرات راجع به حل مسئله و رهیافت‌های حل مسئله را می‌توان به ۳ دسته زیر تقسیم کرد:
۱. آموزش رهیافت‌های به‌اصطلاح مستقل یا خالی از محتوا منجر به بهبود حل مسئله دانش‌آموز می‌گردد.

4. John Dewy
5. Krulik
6. Rudnick
7. Lester
8. Lapan
9. Philips
10. Carson
11. Content- less heuristics
12. representation
13. simplification
14. pathway
15. Top-down
16. Dunlop
17. Musser
18. shaughnesy

منابع

1. Bruun, F. (2013). Elementary Teachers' Perspectives of Mathematics Problem Solving Strategies. *The mathematics educator*.
2. Cai, J., & Lester, F. (2010). *Why is Teaching with problem solving important to student learning?* NCTM.
3. Carson, J. (2007). A problem with problem solving: Teaching Thinking Without teaching Knowledge. *Mathematics Educator*.
4. Dunlop, J. (1988). An Investigation of the Effects of Compressed Heuristics Instruction Problem Solving in Mathematics. Unpublished Masters' Thesis University of North Florida.
5. Klein, D. (2003). a Brief History of American K-12 mathematics education. *Mathematical cognition*.
6. Perkins, D., & Salomon, G. (1989). Are cognitive skills Context-bounded? *Educational Reseacher*.
7. Shoenfeld, A. (1983). Teaching Problem solving skills. In *Learning to think mathematically*.
8. Shoenfeld, A. (1985). *Mathematics Problem solving*. Academic Press.
9. Shoenfeld, A. (2012). How we Think: A Theory of Human Decision-making , with a Focus on Teaching. *ICME12*.
10. Siew, T. (2005). *Top-Down approach to Teaching Problem Solving Heuristics in Mathematics*. NIE.
11. W, B. (2012). *School- Based Curriculum Development in China*. Netherlands Institute for Curriculum Development.
12. Wilson, J., Fernande, M., & Hadaway, N. (1993). Mathematical Problem solving. In *Research Ideas for the Classroom*. NCTM.
۱۳. پولیا، ج، *چگونه مسئله حل کنیم* ۱۹۴۵ مترجم: آرام، ا.
۱۴. تاپالین، م *ریاضیات از طریق حل مسئله*. مترجم: فروزبخش، فیروزه. (۱۳۹۲). مجله رشد آموزش ریاضی.
۱۵. کار، بریندرجیت، *آموزش ریاضیات در سنگاپور*، ۱۳۹۱، مترجم غلام آزاد، سهیلا، مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۱۱۰

۲. آموزش رهیافت‌های حل مسئله تنها تحت شرایط خاص و کنترل شده در بعضی مواقع منجر به بهبود حل مسئله می‌گردد.

۳. آموزش رهیافت‌ها به‌تنهایی تأثیری در حل مسئله ندارد بلکه دانش محتوایی و مفهومی مقدم است و برای حل مسئله کافی است.

این نظرات را می‌توان روی یک طیف از - صد در صد مؤثر بودن آموزش اولیه رهیافت - تا - کاملاً بی‌فایده بودن آموزش رهیافت‌های حل مسئله - قرار داد. آموزش رهیافت‌های حل مسئله می‌تواند به بهبود حل مسئله و باز شدن افق دید دانش‌آموز منجر شود، به شرط آنکه در این کار دقت و احتیاط لازم به‌عمل آید و شرایط مهیا باشد. ویلسون و همکاران هشدار می‌دهند تأکید بر استراتژی‌های حل مسئله نباید ما را به سمتی سوق دهد تا به‌دنبال آن باشیم که «به چه چیزی بیندیشیم» زیرا هدف از راهبردهای حل مسئله به گفته خود پولیا «چگونه بیندیشیم» است. (ویلسون، فرناند و هُدوی، ۱۹۹۳)

لازم نیست در این نوع آموزش تعداد زیادی رهیافت در یک دوره زمانی محدود تدریس شود. می‌توان تعداد راهبردها را به همان‌هایی محدود کرد که نتایج تحقیقات کارایی آن‌ها را بیشتر به اثبات رسانده‌اند و زمان بیشتری صرف کار روی همین تعداد محدود نمود. در ضمن همان‌گونه که شونفیلد مطرح نموده می‌توان یک رهیافت را با چندین مسئله مرتبط با هم و به شکل گام‌به‌گام و آهسته و با شرح جزئیات تدریس نمود. (در کار شونفیلد از رهیافت ساده کردن مسئله به شکل کاهش تعداد متغیر به دفعات استفاده می‌شود و سرانجام در پس - آزمون نیز مسئله‌ای قابل حل با همین رهیافت مطرح می‌شود). (شونفیلد ۱۹۸۵).

در انتها یک پرسش را مطرح می‌کنیم: اگر مسئله‌ای مطرح شود که هیچ‌یک از رهیافت‌های شناخته شده پیشین برای حل آن کاربردی نداشته باشند کدام گروه در حل مسئله موفق‌ترند: آن‌هایی که پیش از این رهیافت‌های حل مسئله را آموخته و سپس مسائل‌شان را حل کرده‌اند یا آن‌هایی که رهیافت‌ها را نیاموخته و لذا برای حل مسائل‌شان در گذشته درگیر چالش‌های بیشتری شده‌اند؟

پی‌نوشت‌ها

1. Common core state standard initiative
2. instructionism
3. Information processing



رئیس شدن یک فرهنگ اثبات در هندسه مدرسه‌ای؟

تکامل اثبات‌دوستی در اوایل قرن بیستم

(بخش دوم)

پاتریسیو جی، هرست
ترجمه: حسین غفاری
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده بخش اول

همراه با اصلاحات دهه ۱۸۹۰، و در زمانی که هندسه به‌عنوان جایی برای دانش‌آموزان جهت یادگیری «هنر اثبات کردن»، در نظر گرفته شد؛ در آمریکا انتظار از دانش‌آموزان دبیرستانی برای اثبات حکم‌های هندسی، تبدیل به یک هنجار شد. در واکنش به مطالبه اصلاحات، در حرفه معلمی فرهنگی شکل گرفت که طی آن از دانش‌آموزان خواسته می‌شد که «اثبات» تولید کنند و آن را در «قالب دوستونی» به‌صورت گزاره‌هایی همراه با دلیل درستی هر گزاره بنویسند. در قسمت اول این مقاله گزارشی از زمانی که هندسه به‌عنوان یک موضوع درسی مطرح شد تا وقتی که اثبات به مرکز و محور درس هندسه تبدیل شد، عرضه گردید. همچنین با استفاده از توجیهات تاریخی توضیح داده می‌شود که چگونه قالب اثبات دوستونی این امر را امکان‌پذیر ساخت که معلمان بتوانند ادعا کنند اثبات کردن را به دانش‌آموزان یاد می‌دهند و در عین حال دانش‌آموزان بتوانند نشان دهند فعالیت‌های آن‌ها شامل اثبات کردن می‌شود. در ادامه آشکار می‌شود که ماهیت هندسه مدرسه‌ای، تحت تأثیر اصرار بر یاددهی اثبات، به چه چیزی تبدیل شده است.

کلیدواژه‌ها: اثبات، هندسه، هندسه مدرسه‌ای

که دانش‌آموزان روی تمرین‌ها کار کنند و با موفقیت آن‌ها را اثبات کنند. کتاب‌های درسی هندسه آن زمان نشان می‌دهند که نویسندگان هنگام ایجاد تعادل بین حکم‌های بنیادین و تمرین‌ها، با پرسش‌های مشکل‌فراوانی مواجه بودند. اینکه چه حکم‌هایی باید بنیادین در نظر گرفته شوند؟ با چه ترتیبی باید در کتاب آورده شوند؟ نحوه «اکتشاف» اثبات آن‌ها چگونه باید در کتاب شرح داده شود؟ تنوع بسیاری در نحوه ارائه این حکم‌های بنیادین در کتاب‌های درسی هندسه، از اوایل قرن، قابل مشاهده است (اسمیت، ۱۹۰۹؛ شولتز و سون‌اوک، ۱۹۱۳؛ شبیلی، ۱۹۳۲). با توسل به شیوه‌های مختلف، نویسندگان سعی داشتند که با حفظ تعادل بین یکپارچگی موضوع هندسه ارائه شده و سودمند بودن آن، در دانش‌آموزان توانایی انجام تمرین‌ها را ایجاد کرده و آن‌ها را در این راه حمایت کنند. آن‌ها همچنین تلاش کردند که تعداد حکم‌های بنیادین را کم، و تعداد تمرین‌ها را زیاد کنند.

تغییرات در مسائلی که باید اثبات می‌شدند و گزاره‌هایی که می‌شد به‌عنوان اصل در نظر گرفت

کمیته ۱۸۹۹ با توسل به ملاحظات پداگوژیکی پیشنهاد کرد که شیوه ارائه اصول تغییر کند. این کمیته توصیه کرد که معرفی اصولی که «تقریباً بدیهی» هستند به مراحل بعد موقوف (نایتینگل و

مطالبی که باید نحوه اثبات کردن را به دانش‌آموزان یاد می‌دادند

متفاوت بودن حکم‌های بنیادی و تمرین‌ها، نقش مهمی در امکان‌پذیر ساختن تدریس هنر اثبات کردن، ایفا کرد. حکم‌های بنیادین هم موضوع درس را بسط و گسترش دادند و هم ابزاری برای دانش‌آموزان جهت انجام اثبات، فراهم ساختند، اما بسیار ضروری بود

همکاران، ۱۸۹۹، ص ۱۴۲)، و حکم‌های بدیهی مانند «تمام زاویه‌های قائمه با هم برابرند» حذف شوند. در همان زمان، ریاضی‌دانان پیشرفت‌های مهمی در زمینهٔ ارائهٔ هندسهٔ اقلیدسی براساس اصولی یکپارچه، کرده بودند. مثلاً نکاتی را که اقلیدس بدون هیچ توضیحی مفروض گرفته بود، به‌عنوان اصل در نظر گرفتند (برای نمونه هیلبرت^۱، ۱۸۹۹/۱۹۷۱). البته این امر با توصیه‌های رایج آن دورهٔ ایالات متحده دربارهٔ روش تدریس هندسه، هم‌سو نبود. کمیتهٔ پانزده، جهت تصمیم‌گیری در این باره، توصیهٔ ریاضیاتی مبنی بر «کم‌ترین فرض‌های ممکن» را در برابر ملاحظات پداگوژیکی که بیان می‌داشت «چنین فهرستی برای دانش‌آموزان قابل فهم نیست»، مورد بررسی و ارزیابی قرار داد (اسلات و همکاران، ۱۹۱۲، ص ۸۱). اصولی که آن‌ها انتخاب کردند بین ملاحظات ریاضیاتی و ملاحظات دربارهٔ یادگیرنده‌ها، تعادل برقرار کرد:

مبنایی که باید در نظر گرفته شود این است که ترتیب منطقی حفظ شود و اثبات رسمی حکم‌هایی که برای رعایت چنین ترتیبی ضروری هستند، ارائه شود. این شیوه با اصول آموزشی مربوط به سازگاری موضوع با ذهن یادگیرنده، همخوانی دارد (اسلات و همکاران، ۱۹۱۲، ص ۸۱).

همچنین شولتز (۱۹۱۲) ابراز داشت که پیشرفت در بنیان نهادن هندسه بر مبنای اصول، بر هندسهٔ درسی تأثیر گذاشت، چرا که در نظر گرفتن اصولی را غیر از اصول اقلیدس برای تدریس هندسه توجیه کرده بود:

هنگام گردآوری اصول، تلاش برای دستیابی به فهرستی جامع و کامل ضروری نیست. یک گزاره را می‌توان به‌عنوان یک اصل در نظر گرفت حتی اگر بتوان آن را از اصول دیگر نتیجه گرفت؛ و اگر لازم شد گزاره‌ای به‌عنوان اصل در نظر گرفته شود می‌توان حتی دلیل همه فهمی^۲ برای آن ارائه کرد.

به‌طور مشابه، جورج کارسون^۳ پیشنهاد کرد که تمام ویژگی‌هایی که «می‌توان به دانش‌آموزان القا کرد که بدون اندازه‌گیری عددی قبول کنند»، در قالب مفروضات ارائه شوند (کارسون، ۱۹۱۳، ص ۹۸). این امکان که اصل‌های پیشنهادی قابل انتخاب بودند بسیار راهگشا بود. تأکید کمیتهٔ ده نفره بر

استفاده از هندسه به‌عنوان زمینه‌ای برای یادگیری اثبات، به متداول شدن یک تصور ویژه دربارهٔ اثبات در هندسه کمک کرده بود که قبلاً و در دورهٔ کارهای اصیل، به شکل بالقوه‌ای وجود داشت. طبق این تصور، وجود و خواص اشیاء هندسی، مستقل از اینکه اثبات شده باشند، حقایقی مفروض بودند. پشتوانهٔ چنین تصویری، وجود اثبات‌هایی هستند که درستی آن خواص را نشان می‌دهند که می‌توان با بیان کردن شرایط نظری آن‌ها، خواص مذکور را به‌عنوان حقایقی درست در نظر گرفت. در نتیجهٔ چنین حرکتی، زیاد یا کم بودن تعداد اصول تفاوت چندانی نداشت چراکه تمام آن‌ها حقایقی پذیرفته شده بودند؛ و این نکته باعث کاهش تعداد حکم‌های بنیادینی بود که دانش‌آموزان باید چگونگی اثبات آن‌ها را می‌دانستند. حکم‌های بنیادینی که باید اثبات شوند، آن‌هایی بودند که یا نقشی اساسی در توسعهٔ موضوع درس داشتند و یا روش‌های اثبات کردن را نشان می‌دادند؛ نه آن‌هایی که بسیار بدیهی بودند و می‌شد آن‌ها را به‌عنوان اصل در نظر گرفت. کاهش در تعداد حکم‌های بنیادین، اجازه می‌داد که دانش‌آموزان بیشتر وقت کلاس را صرف تولید اثبات برای تمرین‌ها کنند. همچنین وجود فهرستی طولانی از حکم‌هایی که به‌عنوان اصل در نظر گرفته شدند، به دانش‌آموزان این اجازه را می‌داد که از نتایج آن‌ها استفاده کنند، بدون اینکه بدانند آن نتایج به چه دلیل درست هستند. بنابراین، از هر فرضی می‌توانستند به‌عنوان دلیل، در اثبات یک حکم استفاده کنند، چراکه آن را درست فرض کرده‌اند و مطرح کردن این پرسش که آیا این حکم با استفاده از حکم‌های دیگر قابل اثبات هست یا نه، ضروری نخواهد بود. در آخر، این حقیقت که هندسهٔ ملموس (شامل نحوهٔ کشیدن اشیای هندسی)، قبل از هندسهٔ اثباتی تدریس می‌شود، پرسش‌های مربوط به وجود اشیاء هندسی را از میان خواهد برد. از این جهت مهم است که توجه شود که در دههٔ اول قرن، کتاب‌های درسی هندسه شروع به ارائهٔ بخش مقدمهٔ مفصلی (که معمولاً برای تعریف بعضی از اشیاء هندسی و بیان چند اصل، استفاده می‌شد) کردند که شامل عناصر هندسهٔ ملموس (به‌ویژه ترسیم‌ها) بود. از این‌رو، حتی اگر دانش‌آموزی هندسهٔ ملموس را قبلاً در دورهٔ ابتدایی ندیده بود، در هندسهٔ دبیرستان، در دو بخش با هندسه مواجه می‌شد. در بخش اول با حقایق هندسی و در بخش دوم با سازماندهی منطقی

این انتظار از معلمان و کتاب‌های درسی وجود داشت که اثبات مسائل بنیادین را به صورت گزاره‌هایی همراه با دلایلشان ارائه کنند: اثبات باید به گونه‌ای ارائه شود که یک «مبتدی» هم متوجه شود که اثبات و بحث مورد نظر چگونه سرهم شده است

آن‌ها، همان‌طور که کمیته ده نفره پیشنهاد کرده بود.

تغییرات در نشانه‌گذاری و چگونگی ارائه شکل‌ها

نوآوری‌هایی که در نشانه‌گذاری و زبان استفاده می‌شد در جهت حمایت اثبات دانش‌آموزی بودند. این عقیده که اثبات از «مراحل موجزی» تشکیل شده است (بمن و اسمیت، ۱۸۹۹، ص ۲۰)، دانش‌آموزان را از مواجهه با بحث‌های غیرضروری دور می‌کرد. با این وجود، برای اینکه این اتفاق بیفتد، باید زبانی که در دسترس بود، اجازه این خلاصه‌نویسی را می‌داد. بنابراین، نوشتن اثبات‌ها با نمادهای انعطاف‌پذیرتر، متداول شد (برای مثال، نشان دادن زاویه با نمادهای مختلف). همچنین، بیان خلاصه حکم‌های خاصی، رایج گردید (برای نمونه، قضیه‌ای که تساوی دو مثلث به حالت دو زاویه و ضلع بین را تضمین می‌کرد، به‌طور خلاصه «ز ض ز» نامیده می‌شد). این‌طور به‌نظر می‌رسید که چنین خلاصه‌نویسی‌هایی دانش‌آموزان را کمک می‌کرد که هنگام نوشتن اثبات، به قضیه‌های قبلی دسترسی مستقیم داشته باشند. تمام این تغییرات به دانش‌آموزان کمک کرد که این باور را که اثبات از گزاره‌ها و دلایلشان تشکیل شده، به‌طور مؤثری به‌کار ببندند. تنوع نمادها و تعدد واژگان تخصصی، به‌عنوان محافظی در برابر خطر تبدیل شدن فعالیت تولید اثبات به جست‌وجو برای یافتن راهی متعارف برای نوشتن گزاره‌ها و دلایلشان، عمل می‌کرد. در عوض، در دسترس بودن سریع و مستقیم حکم‌هایی که می‌توانستند به‌عنوان دلیل استفاده شوند، باعث می‌شد که بتوان از آن‌ها به‌عنوان رهیافت‌هایی برای یافتن گزاره‌های مورد نیاز برای اثبات، استفاده کرد.

موضوع دیگری که دانش‌آموزان را در امر اثبات حمایت می‌کرد، نحوه ارائه شکل‌ها بود. نیوکمب و همکاران (۱۸۹۳) توصیه کرده بودند که دانش‌آموزان

پای تخته‌سیاه، با استفاده از شکل، تمرین‌ها را به‌صورت شفاهی انجام دهند. یانگ و همکاران (۱۸۹۹) نیز بیان کرده بودند که معلمان باید به دانش‌آموزان «تمرین‌های زیادی بدهند که روابط را در یک شکل ببینند» (ص ۱۴۲).

برای اینکه دانش‌آموزان راحت‌تر بتوانند شکل‌ها را بررسی کنند، شولتز (۱۹۱۲) «روش‌های گرافیکی برای نمایش حقایق هندسی» را تهیه کرد که طرحی بود در جهت «از میان برداشتن مشکلات بیرونی» برای «دانش‌آموزانی که می‌توانند به‌صورت منطقی استدلال کنند»، اما «بعضی از قسمت‌های اثبات را فراموش می‌کنند و در نتیجه قادر به ادامه دادن اثبات نیستند» (ص ۱۱۰). شولتز همانند تعدادی از پیشینیان، از شماره‌های کوچکی برای نشان دادن زاویه‌هایی که در اثبات مؤثرند، استفاده می‌کرد. همچنین، او پیشنهاد کرد که زاویه‌های قائمه با رسم مربع کوچکی، و زاویه‌های مساوی با رسم تعداد کمان‌های برابری داخل آن‌ها، مشخص شوند. نمادهای دیگری نیز برای نشان دادن خط‌های موازی و پاره‌خط‌های برابر، طراحی شدند. این «روش‌های گرافیکی» فقط برای نشان دادن فرض‌های مسئله نبود، بلکه برای تجزیه و تحلیل کردن فرض‌هایی بود که در صورت مسئله وجود داشت. برای مثال، به‌جای گفتن «یک مثلث متساوی‌الساقین را در نظر بگیرید»، مثلثی رسم می‌شد که روی هر یک از دو ضلع برابرش یک خط کوچک، و داخل هر یک از دو زاویه برابرش دو کمان کوچک کشیده شده بود. در واقع هدف از این کار نشان دادن این موضوع بود که آن فرض‌ها در اثبات استفاده می‌شوند.

قالب اثبات دوستونی: ثبات بخشیدن به درس هندسه

بخش‌های ۳ تا ۶ به شرح تکامل یک فرهنگ اثبات دانش‌آموزی اختصاص یافت. فرهنگی که همزمان با تلاش حرفه‌معلمی و نویسندگان کتاب‌ها برای برآورده کردن این انتظار که درس هندسه باید به دانش‌آموزان هنر اثبات کردن را یاد دهد، توسعه یافت. تکاملی که در دوره تمرین اتفاق افتاد، شامل تغییراتی در درس هندسه بود که بعضی از آن‌ها در جهتی متفاوت از تغییرات دوره کارهای اصیل بود. این باور که تمام دانش‌آموزان باید بتوانند اثبات را یاد بگیرند، تمرین کنند و در انجام آن موفق باشند

اما از همه آن‌ها انتظار نرود که دانش جدید تولید کنند، از عواقب تغییر کارهای اصیل به تمرین‌ها بود. جهت باز کردن فضای کار بر روی تمرین‌ها و حمایت مؤثر از آن، تعداد «حکم‌های بنیادین» درس هندسه کاهش یافت؛ حکم‌هایی که دانش‌آموزان باید اثبات آن‌ها را یاد می‌گرفتند تا هم روش اثبات کردن را بفهمند و هم بدانند که از چه چیزهایی در انجام اثبات می‌توانند استفاده کنند. در این بخش از آن روایت تاریخی استفاده می‌کنم تا بتوانم تفسیری درباره نقش قالب دوستونی در گسترش آن فرهنگ، ارائه دهم. قصد دارم این فرضیه را مطرح کنم که قالب اثبات دوستونی، از طریق یکی کردن اثبات ارائه شده در کتاب با اثبات خواسته شده از دانش‌آموز، به برنامه درسی هندسه ثبات بخشید. در زیر بخش بعدی، این فرضیه را شرح خواهم داد.

تفاوت‌ها و شباهت‌های مسائل بنیادین و تمرین‌ها

دو اصطلاح «مسائل بنیادین» و «تمرین‌ها» به دو دسته از حکم‌هایی که باید اثبات می‌شدند اشاره داشتند. مدعی هستم که کارکرد متفاوتی که به هر کدام از این دو دسته اختصاص یافته بود، باعث ایجاد فاصله بین اثبات دانش‌آموز و اثبات معلم (و یا کتاب) می‌شد. برای مثال، در حالی که اثبات حکم‌های بدیهی در متن درس دیده نمی‌شد، تمرین‌ها شامل مسائلی بودند که اثبات ساده‌ای داشتند و فقط با دیدن شکل آن‌ها، اجزای اصلی اثبات مشخص می‌شد. همچنین، در حالی که مسائل بنیادین از این جهت اهمیت داشتند که اجزای اصلی درس بودند و به این دلیل انتخاب شده بودند که در اثبات حکم‌های دیگر به کار آیند، معیار اصلی انتخاب تمرین‌ها فراهم کردن فرصت تمرین اثبات کردن برای دانش‌آموزان و موفقیت در آن بود و جذاب بودن آن‌ها و همچنین داشتن ارتباط منطقی با یکدیگر، اهمیتی نداشت.

به هر حال، هر دو نوع از حکم‌ها، صرف‌نظر از محتوایشان، ابزارهایی برای حمایت از مشخصه جدید درس، یعنی تمرکز بر اثبات دانش‌آموزی بود. در واقع، دانش‌آموزانی که برای تمام گزاره‌هایی که اثبات می‌کردند، باید دلیل می‌آوردند، نیاز به نتایجی قدرتمند داشتند که مسائل بنیادین برایشان فراهم می‌کرد. هرچه اثبات مسائل بنیادین قاطع‌تر و قانع‌کننده‌تر بود، دانش‌آموزان «زنجیره استدلال‌هایی

را که به کشف و پدیدار شدن اثبات منجر می‌شدند» (یانگ، ۱۹۰۶، ص ۲۶۱)، بهتر می‌دیدند. بنابراین، اثبات مسائل بنیادین، روشن می‌ساخت که چرا اثبات‌های ریاضی ضروری هستند و نشان می‌دادند که چه نوع استدلال‌هایی در اثبات استفاده می‌شوند. ارائه آن اثبات‌ها برای معلمان هندسه امری ضروری بود. چنین کاری فقط برای نشان دادن درستی آن مسائل نبود، بلکه مجوزی بود که طبق آن معلمان می‌توانستند ادعا کنند که در کلاس درس، هنر اثبات را به‌طور واقعی، تدریس می‌کنند. با این وجود، برای اطمینان از اینکه دانش‌آموزان واقعاً چنین هنر اثباتی را یاد گرفته‌اند، لازم بود که دانش‌آموزان در تولید اثبات موفق عمل کنند. وجود تمرین‌ها در این جهت بود که دانش‌آموزان را کمک کند که با انجام بحث‌های ساده‌تری، بدون اینکه موفقیتشان مشروط به یافتن ایده اثبات باشد، جنبه‌های رسمی اثبات را تمرین کنند. بنابراین، اگرچه هویت درس هندسه براساس وابستگی متقابل بین تمرین‌ها و مسائل بنیادین شکل گرفت، اما شرط بقای آن، با فاصله گرفتن تمرین‌ها از مسائل بنیادین حاصل شد. همزمانی بین آن وابستگی و فاصله، موقعیتی مشکل‌آفرین ایجاد کرد. در بخش بعد توضیح خواهم داد که چرا چنین وضعیتی مشکل‌آفرین بود.

اشاره داشتن مسائل بنیادین و تمرین‌ها به یک موضوع مشترک

با نمایان شدن فاصله بین تمرین‌ها و مسائل بنیادین، مشکلی که ایجاد می‌شد این بود که چه‌طور دو فعالیت متفاوت را مانند اثبات مسائل بنیادین و حل کردن تمرین‌ها، به یک موضوع مشترک در یادگیری، یعنی «هنر اثبات کردن» ارتباط دهند؟ تمرین‌ها به لحاظ محتوایی بسیار متفاوت از مسائل بنیادین بودند. در حالی که مسائل بنیادین اغلب قضیه‌هایی مهم در هندسه بودند و در اثبات مسائل بعدی استفاده می‌شدند، اما تمرین‌هایی بدیهی یا نتیجه واضحی از یک حکم دیگر بودند و در فعالیت‌های دیگر استفاده‌ای نداشتند. اثبات مسائل بنیادین از نظر ریاضی باید به‌ترتیب انجام می‌شد، چراکه آن‌ها از لحاظ ریاضی به یکدیگر مرتبط بودند. اما اثبات حکم‌هایی که به‌عنوان تمرین مطرح شده بودند، خیلی خسته‌کننده بود و حتی از نظر کسانی که متعصبانه اصرار به اثبات همه

به‌همراه دلیلش معادل این است که شرایطی که آن گزاره را به اثبات مرتبط می‌کند، شرح داده شود. اگر معلم مسئول باشد که چنان رهیافت‌هایی را به اشتراک بگذارد، می‌تواند دانش‌آموزان را قادر سازد تا اثبات مسائل بنیادین را کشف کنند. معلم با بحثی مشابه قادر است دانش‌آموزان را به سمت ارائه اثبات‌های رسمی، که در قالب دوستونی تجسم یافته است، سوق دهد - معلم می‌تواند وانمود کند که اثبات انجام شده توسط دانش‌آموزان تا وقتی که دلیل تمام گزاره‌ها بیان نشده باشد، قابل فهم نخواهد بود. بنابراین از یک‌سو، معلم باید از قالب اثبات دوستونی برای توضیح/اثبات به دانش‌آموزان (در جهت کمک به فهم بهتر) استفاده کند؛ و از سوی دیگر، دانش‌آموزان نیز باید قالب دوستونی را برای توضیح/اثبات به معلم (در جهت نشان دادن کار خود) به کار ببرند.

فرهنگ اثبات دوستونی در برآورده کردن توصیه‌هایی که دربارهٔ درس هندسه انجام شده بود موفق عمل کرد، اما این موفقیت رایگان به‌دست نیامد. در واقع جنبهٔ منطقی اثبات بسیار پررنگ شد و در عوض نقش اثبات در ساختن دانش از بین رفت. پرسش‌هایی در مورد مرتبط بودن و میزان سختی حکم‌های اثبات شده، و همچنین دربارهٔ میزان موفقیت و قابل استفاده بودن نظریه‌های مطرح شده، در حاشیه ماندند. رخ دادن این اتفاق به این خاطر نبود که چنین موضوع‌هایی طرفدار نداشتند (دیویی، ۴، ۱۹۰۳؛ مور، ۵، ۱۹۰۲؛ اسمیت، ۱۹۰۹)، بلکه شاید به این دلیل بود که در عمل، سازگار کردن چنان موضوعاتی با این الزام که در درس هندسه باید به همهٔ دانش‌آموزان هنر اثبات کردن تدریس شود، مشکل بود.

نتیجه‌گیری: از تاریخ اثبات در هندسه، چه می‌توانیم یاد بگیریم؟

واقعیت‌های تاریخی در مورد اینکه چگونه درس هندسه در دبیرستان، الزام تدریس هنر اثبات کردن را پذیرفت، شباهت‌هایی مهم و قابل تأمل را در مورد تأکیدهای اخیر بر وجود اثبات در آموزش ریاضی، خاطرنشان می‌سازد. یاد می‌گیریم که گنجاندن اثبات دانش‌آموزی به‌عنوان عضو دستوری^۶ در برنامهٔ درسی، شامل فعالیت‌های مهمی است که طبیعتی نظام‌مند دارند. بسیاری از جنبه‌های برنامهٔ درسی هندسه درگیر پاسخ‌گویی به خواستهٔ کمیتهٔ ده نفره

چیز دارند، آن تمرین‌ها به اثبات نیازی نداشتند. برای قابل مقایسه نگه‌داشتن تمرین‌ها و مسائل بنیادین، باید اقدامی در مورد دستورالعمل‌های آموزشی صورت می‌گرفت، که این اقدام تزلزل و ناپایداری در موضوع مورد مطالعه را پدید آورد.

برای حل آن مشکل، اثبات به‌عنوان یک هدف و فعالیت در مبحث هندسه، باید که ورای تصور سنتی از آن، که فرایندی برای نشان دادن درستی یک حکم بود (لژاندر، ۱۸۴۱، ص ۳)، توسعه یابد. تفاوت‌های بین مسائل بنیادین و تمرین‌ها باید کم‌رنگ شود و با به خدمت گرفتن هر دوی آن‌ها اهداف کلاس هندسهٔ دبیرستان، برآورده شود. به محض اینکه مسائل بنیادین و تمرین‌ها نمونه‌هایی از یک گونه در نظر گرفته شوند، می‌توان مسائل بنیادین را مقدمه‌ای برای تمرین‌ها دانست و در آن صورت تمرین‌ها را هم می‌توان معیاری معتبر برای ارزیابی میزان فهم دانش‌آموزان از مسائل بنیادین دانست. قالب اثبات دوستونی می‌تواند آن کار را انجام دهد، البته به این قیمت که اثبات را وسیله‌ای برای تدریس و یادگیری موضوعی بدانیم که بخش عمدهٔ آن در قالب یک کار منطقی انجام می‌گیرد تا در یک محتوای هندسی. حرکت از این قاعدهٔ ضمنی که اثبات به‌صورت کامل بیان شود (برای نمونه، ونت‌ورث، ۱۸۸۸)، به سمت توصیف کردن اثبات (برای نمونه، بمن و اسمیت، ۱۸۹۹) و سرانجام، بیان آن در قالب دوستونی (برای نمونه، شولتز و سون‌اوک، ۱۹۱۳)، بر روی تثبیت درس هندسه تأثیر داشته است. این کار باعث شد که در نظر دانش‌آموزان شباهت‌های دو کار متفاوت اثبات تمرین‌ها و اثبات حکم‌های بنیادین پررنگ‌تر گردد و آن شباهت‌ها را بهتر و ساده‌تر تشخیص دهند.

تأکید زیاد بر جنبه‌های رسمی اثبات، اجازهٔ نوعی داد و ستد را بین معلم و دانش‌آموزان هنگام اثبات مسائل بنیادین و تمرین‌ها می‌داد. این موضوع پذیرفته شده بود که خوانندگان پخته و بالغ برای درک یک اثبات نیاز ندارند که دلیل تمام گزاره‌ها را ببینند. در هر صورت، این انتظار از معلمان و کتاب‌های درسی وجود داشت که اثبات مسائل بنیادین را به‌صورت گزاره‌هایی همراه با دلایلشان ارائه کنند: اثبات باید به‌گونه‌ای ارائه شود که یک «مبتدی» هم متوجه شود که اثبات و بحث مورد نظر چگونه سرهم شده است (یانگ، ۱۹۰۶، ص ۲۶۲).

نظر یانگ این‌طور بود که ارائه دادن هر گزاره

معلم می‌تواند وانمود کند که اثبات انجام شده توسط دانش‌آموزان تا وقتی که دلیل تمام گزاره‌ها بیان نشده باشد، قابل فهم نخواهد بود. بنابراین از یک‌سو، معلم باید از قالب اثبات دوستونی برای توضیح اثبات به دانش‌آموزان (در جهت کمک به فهم بهتر) استفاده کند؛ و از سوی دیگر، دانش‌آموزان نیز باید قالب دوستونی را برای توضیح اثبات به معلم (در جهت نشان دادن کار خود) به کار ببرند

این باور که تمام دانش آموزان باید بتوانند اثبات را یاد بگیرند، تمرین کنند و در انجام آن موفق باشند اما از همه آن‌ها انتظار نرود که دانش جدید تولید کنند، از عواقب تغییر کارهای اصیل به تمرین‌ها بود

توجه به موضوع توسعه دانش درباره ایده‌های ریاضی ویژه و یافتن نتایجی جالب در مورد آن ایده‌ها، باشد. از لاکاتوش (۱۹۷۶، ۱۹۷۸) یاد می‌گیریم که اثبات ریاضی یک فرایند منطقی کلی نیست، بلکه ابزاری روشمند و بنیادی جهت توسعه و شکل دادن مفاهیم است تا بدانیم که کدام یک از قضیه‌ها می‌تواند درست باشد و چرا؟ اگر نقش ارزشمند اثبات به‌عنوان ابزاری برای خلق دانش، شایسته جایگاهی در کلاس‌های درسی باشد - که فکر می‌کنم همین‌طور باشد - لازم است نسبت به این تصور بدگمان باشیم که اثبات چیزی مستقل از زمینه فعالیت ریاضی است که در آنجا استفاده می‌شود. اثبات و انجام آن، بسته به پرسشی که مطرح می‌شود و دانش و ابزاری که در دسترس افرادی است که قصد حل آن پرسش را دارند، ممکن است متفاوت به‌نظر برسد. ضروری بودن وجود اثبات در آموزش ریاضی، فقط به این دلیل نیست که فرایندی ارزشمند برای درگیر کردن دانش‌آموزان است (مانند توسعه ظرفیت دانش‌آموزان در استدلال‌های ریاضی)، بلکه این دلیل که یکی از جنبه‌های ضروری در ساختن دانش است، بسیار مهم‌تر است. این مطالعه تاریخی درباره تحول و توسعه اثبات در آموزش آمریکا، پیشنهاد می‌کند که در نظر گرفتن اثبات به‌عنوان یک شی مجزای مورد مطالعه، دانش‌آموزان را در استفاده از اثبات به‌عنوان ابزاری برای دانستن، توانا تر نمی‌سازد؛ بلکه تمرین برای اثبات کردن را از تمرین برای دانستن جدای می‌کند.

منصفانه نیست که تحول و تکامل فرهنگ اثبات دوستونی را با معیارهای امروزی قضاوت کنیم. به همان اندازه غیرمنصفانه است که تأکید دوباره بر حضور اثبات در آموزش را به‌عنوان توجیهی جهت اصرار بر آموزش و یادگیری «هنر اثبات کردن» بدانیم. اصول و استانداردها (شورای معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰) عناصری را فراهم کرد که بتوان کلاسی را تصور کرد که در آن همکاری فعالانه دانش‌آموزان در تولید ادعاهایی در دانش با این مسئولیت همراه شود که در مورد منطقی بودن آن

بودند. به‌ویژه اینکه تغییرات در نقش دانش‌آموزان به‌عنوان یادگیرنده‌ها، هم بر تغییرات ماهیت موضوع مورد مطالعه تأثیر گذاشت و هم از آن تأثیر پذیرفت. همچنین برای اینکه اثبات دانش‌آموزی امکان‌پذیر شود، نظامی از منابع باید برای آن‌ها فراهم می‌شد تا اثبات‌ها را با موفقیت انجام دهند. تجمیع تمام آن عناصر، یک درس هندسه پایدار را با این جهت‌گیری که دانش‌آموزان هنر اثبات کردن را یاد بگیرند، تولید کرد و این امر در قالب دوستونی تجسم یافت. به هر حال، این پایداری هزینه‌ای در پی داشت - که عبارت بود از جدا سازی اثبات کردن از ساختن دانش. در حالی که تلاش‌های چشم‌گیری در جهت تغییر دادن نقش اثبات در هندسه مدرسه‌ای در قرن بیستم اتفاق افتاده بود (برای نمونه، فاست، ۱۹۳۸)، تقلیل اثبات به جنبه منطقی و رسمی آن، طی قریب به یک قرن اخیر تداوم داشته است. نظر یکی از دانشجوهای خودم در دوره کارشناسی، کم و بیش چنین موضوعی را بیان می‌کند: «ما در مدرسه عمل اثبات را انجام می‌دادیم، اما چیزی را اثبات نمی‌کردیم.»

وقتی به توصیه‌های حاضر مبنی بر اینکه دانش‌آموزان باید در طول سال‌های تحصیل خود مشغول اثبات کردن در تمام موضوعات باشند (شورای معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰) فکر می‌کنیم، باید آن درس‌هایی را که از تاریخ گرفته‌ایم در نظر داشته باشیم. نخست اینکه، توصیه‌های دستوری لزوماً قابلیت اجرا ندارند و برای اجرای آن‌ها باید یک‌سری فعالیت‌ها انجام شود که عمدتاً ماهیتی نظام‌مند دارند. جهت تبدیل شدن اثبات به یک عنصر مهم و اصلی در ریاضی مدرسه‌ای، باید اقداماتی نیز در مورد بسیاری از عناصر دیگر انجام پذیرد. باید ببینیم که آیا نگاه ما در مورد اثبات با درک ما از دانش‌آموز به‌عنوان یادگیرنده و موضوع‌های ریاضی مورد مطالعه، جایی که آن یادگیری قرار است اتفاق بیفتد، همبستگی دارد؟ به‌علاوه، چه نوع از منابع و قواعدی جهت قادر ساختن دانش‌آموزان برای انجام اثبات لازم است؟ چنان اثباتی که سزاوار جایگاهی در دروس مدرسه‌ای باشد و در ضمن با اهدافی که ما برای یادگیری دانش‌آموزان طی فعالیت‌های کلاسی در درس ریاضی در نظر داریم، همبستگی داشته باشد.

درس دوم این است که اگر می‌خواهیم در مورد مشغول شدن دانش‌آموزان به امر اثبات صحبت کنیم، خطرناک خواهد بود که چنین بحث و صحبتی بدون

Mathematics Education Program at Teachers College, Unpublished doctoral dissertation. Columbia University Teachers College.

10. Eliot, C. et al.: 1969, 'Report of the Committee of Ten to the National Education Association', in National Education Association, *Report of the Committee on secondary school studies*, Arno Press, New York, pp. 3-5. (Original work published 1893)

11. Eliot, C.: 1905, 'The fundamental assumptions in the report of the Committee of Ten (1893)', *Educational Review* 30, 325-343.

12. Fawcett, H.: 1938, *The Nature of Proof - The National Council of Teachers of Mathematics Thirteenth Yearbook*, Bureau of Publications of Teachers College, Columbia University, New York.

13. Greenleaf, B.: 1858, *Elements of Geometry with Practical Applications to Mensuration*, Robert Davis, Boston.

14. Halsted, G.: 1893, 'The old and the new geometry', *Educational Review* 6, 144-157.

15. Harris, W.T.: 1894, 'The committee of ten on secondary schools', *Educational Review* 7, 1-10.

16. Hilbert, D.: 1971, *Foundations of Geometry*, L. Unger, Trans., P. Bernays, Rev.. Open Court, La Salle, IL. (Original work published in German in 1899)

17. Hill, F.: 1895, 'The educational value of mathematics', *Educational Review* 9, 349-358.

18. Howson, G.: 1982, *A History of Mathematics Education in England*, Cambridge University Press, Cambridge.

19. Jones, P.: 1944, 'Early American geometry', *The Mathematics Teacher* 37, 3-11.

20. Kilpatrick, J.: 1992, 'A history of research in mathematics education', in D. Grouws (ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, pp. 3-38.

21. Kliebard, H.: 1986, *The Struggle for the American Curriculum 1893-1958*, Routledge and Kegan Paul, Boston.

22. Kline, M.: 1965, 'View of the new math', in E. Moise, A. Calandra, R. Davis, M. Kline and H. Bacon (eds.), *Five Views of the "New Math"*, (Council for Basic Education, Washington, DC, pp. 13-16.

23. Krug, E.: 1964, *The Shaping of the American High School*, Harper and Row, New York.

24. Lakatos, I.: 1976, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, J. Worrall and E. Zahar (eds.), Cambridge University Press, Cambridge.

25. Lakatos, I.: 1978, 'A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?' in J. Worrall and G. Currie (eds.), *Imre Lakatos. Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*,

ادعاها بحث انجام شود. در نتیجه لازم است که ابزارهایی را برای اثبات و استدلال استاندارد مهیا کنیم که وقتی از دانش‌آموزان خواسته می‌شود استدلال یا اثباتی ارائه کنند، بین محتوا و قالب، تعادل برقرار گردد. پرسش مهم و حیاتی این نیست که آیا استدلال‌های دانش‌آموزان در قالبی ارائه شده‌اند که مورد تأیید منطق‌دان‌ها باشد، بلکه این نکته مهم است که آیا دانش‌آموزان با اشیاء ریاضی که جامعهٔ مطلعین^۷ می‌خواهند دربارهٔ آن‌ها بیشتر بدانند، سازگار شده‌اند یا نه.

پی‌نوشت‌ها

1. Hilbert
2. Common Sense
3. George Carson
4. Dewey
5. Moore
6. Normative
7. Community of Knowers

منابع

1. Baker, J.: 1969, 'Minority report to the national council of education', in National Education Association, *Report of the Committee on secondary school studies*, Arno Press, New York, pp. 56-59. (Original work published 1893)
2. Ball, D.L. and Bass, H.: 2000, 'Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom', in D. Phillips (ed.), *Constructivism in Education: Yearbook of the National Society for the Study of Education*, University of Chicago Press, Chicago, pp. 193-224.
3. Beman, W. and Smith, D.E.: 1899, *New Plane and Solid Geometry*, Ginn, Boston.
4. Carson, G.: 1913, *Essays on Mathematical Education*, Ginn, London.
5. Chauvenet, W.: 1870, *A Treatise on Elementary Geometry with Appendices containing a Collection of Exercises for Students and an Introduction to Modern Geometry*, Lippincot, Philadelphia.
6. Chauvenet, W.: 1898, *Treatise on Elementary Geometry*, W. Byerly (ed.), Lippincot, Philadelphia. (Original work published 1887)
7. Davies, C.: 1850, *The Logic and Utility of Mathematics, with the Best Methods of Instruction Explained and Illustrated*, Barnes, New York.
8. Dewey, J.: 1903, 'The psychological and the logical in teaching geometry', *Educational Review* 25, 387-399.
9. Donoghue, E.: 1987, *The Origins of a Professional*

40. Schultze, A.: 1912, *The Teaching of Mathematics in Secondary Schools*, MacMillan, New York.
41. Schultze, A. and Sevenoak, F.: 1901, *Plane and Solid Geometry*, MacMillan, New York.
42. Schultze, A. and Sevenoak, F.: 1913, *Plane Geometry*, A. Schultze, (rev.), MacMillan, New York.
43. Shibli, J.: 1932, *Recent Developments in the Teaching of Geometry*, Author, State College, PA.
44. Shutts, G.: 1892, 'Old and new methods in geometry', *Educational Review* 3, 264–266.
45. Simson, R.: 1756, *The Elements of Euclid, viz. the First Six Books together with the Eleventh and Twelfth. In this edition, the Errors, by which Theon, or others, have long ago vitiated these Books, are corrected, and some of Euclid's Demonstrations are Restored*, Foulis, Glasgow.
46. Sizer, T.: 1964, *Secondary Schools at the Turn of the Century*, Yale University Press, New Haven.
47. Slaughter, H. et al.: 1912, 'Final report of the National Committee of Fifteen on geometry syllabus', *The Mathematics Teacher* 5, 46–131.
48. Smith, D.E.: 1911, *The Teaching of Geometry*, Ginn, Boston.
49. Smith, E.R.: 1909, *Plane Geometry Developed by the Syllabus Method*, American Book Co, New York.
50. Stanic, G.M.A.: 1983, *Why Teach Mathematics? A Historical Study of the Justification Question*, Unpublished doctoral dissertation. University of Wisconsin, Madison.
51. Stanic, G.M.A.: 1987, 'Mathematics education in the United States at the beginning of the twentieth century', in T. Popkewitz (ed.), *The Formation of School Subjects: The Struggle for Creating an American Institution*, Falmer, New York, pp. 145–175.
52. Wells, W.: 1887, *The Elements of Geometry*, Leach, Shewell, and Sanborn, Boston.
53. Wells, W.: 1908, *New Plane and Solid Geometry*, Heath, Boston.
54. Wentworth, G.: 1878, *Elements of Geometry*, Ginn and Heath, Boston.
55. Wentworth, G.: 1888, *A Text-Book of Geometry*, Ginn, Boston.
56. Wentworth, G.: 1899, *Plane and Solid Geometry*, Ginn, Boston.
57. Young, J.W.A. et al.: 1899, 'Report of the Committee of the Chicago section of the American Mathematical Society', in National Education Association, *Report of Committee on College Entrance Requirements – July, 1899*, NEA, Chicago, pp. 135–149.
58. Young, J.W.A.: 1906, *The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School*, Longmans, Green, and Co, New York.
- Cambridge University Press, Cambridge, Vol. 2, pp. 24–42.
(Original work published in 1967)
26. Legendre, A.-M.: 1819, *Elements of Geometry*, J. Farrar (ed. and trans.), Hilliard and Metcalf, Cambridge, New England.
27. Legendre, A.-M.: 1841, *Elements of Geometry*, J. Farrar (ed. and trans.), Hilliard Gray, Boston.
28. Legendre, A.-M.: 1848, *Elements of Geometry and Trigonometry*, D. Brewster (trans.), C. Davies (rev. and ed.), Barnes, New York.
29. Moore, E.H.: 1926, 'On the foundations of mathematics', in C. Austin, H. English, W. Betz, W. Eells and F. Touton (eds.), *A General Survey of Progress in the Last Twenty-Five Years: First Yearbook*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, DC, pp. 32–57. (Original speech delivered in 1902)
30. NCTM: 2000, *Principles and Standards for School Mathematics*, Author, Reston, VA.
31. Newcomb, S. et al.: 1893, 'Reports of the conferences: Mathematics', in National Education Association, *Report of the Committee on secondary school studies*, Arno Press, New York, pp. 104–116. (Original work published 1893)
32. Nightingale, A. et al.: 1899, 'Report of the Committee on College entrance requirements', in National Education Association, *Report of Committee on College Entrance Requirements – July, 1899*, NEA, Chicago, pp. 5–49.
33. Playfair, J.: 1860, *Elements of Geometry; Containing the First Six Books of Euclid, with a Supplement on the Quadrature of the Circle, and the Geometry of Solids. To which are Added Elements of Plane and Spherical Trigonometry*, Collins and Hannay, New York. (Original work published 1795)
34. Poincaré, H.: 1899, 'La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement', *L'Enseignement Mathématique* 1, 157–162.
35. Quast, W.G.: 1968, *Geometry in the High Schools of the United States: An Historical Analysis from 1890 to 1966*, Unpublished doctoral dissertation. Rutgers – The State University of New Jersey, New Brunswick.
36. Rav, Y.: 1999, 'Why do we prove theorems?' *Philosophia Mathematica* 7, 5–41.
37. Ravitch, D.: 2000, *Left Back: A Century of Failed School Reforms*, Simon and Shuster, New York.
38. Richards, E.: 1892, 'Old and new methods in elementary geometry', *Educational Review* 3, 31–39.
39. Schoenfeld, A.: 1987, 'On having and using geometrical knowledge', in J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 225–264.



گروه‌های آموزشی چه‌می‌کنند؟

لازم است در آموزش ریاضی بیشتر از فکر استفاده شود تا حافظه

میرزا جلیلی

کلیدواژه‌ها: تدریس ریاضی، فکر کردن، حفظ کردن

خانم معلم گفت: موضوع را در شورای معلمان مدرسه مطرح کردم دیدم همه آن‌ها با همین مشکل مواجه‌اند! در شورا از رئیس مدرسه خواستم که در این زمینه چاره‌ای بیاندیشد و از راهنمایان تعلیماتی کمک بگیرد، پیشنهاد دادم که برای معلمان دوره‌های بازآموزی گذاشته شود تا در آن دوره‌ها به معلمان آموزش بدهند که به بچه‌ها یاد دهند در فرا گرفتن ریاضیات، برخلاف درس‌های تاریخ و جغرافیا، از مغز و فکر خود استفاده کنند و در حل مسائل بیندیشند، مفروضات مسئله و خواسته‌های آن را از هم تشخیص دهند و سعی کنند با استفاده از مفروضات داده شده مجهول خواسته شده را پیدا کنند.

در آن سال این موضوع در منطقه هم انعکاس پیدا کرد و رئیس منطقه اذعان کرد که فرزند خودش نیز به همین درد مبتلاست و در حل مسائل ریاضی عاجز است در حالی که سایر درس‌های او ۲۰ می‌شود. فعالیت‌هایی در این زمینه آغاز شد که نسبتاً نتیجه‌بخش بود.

سؤال: شما در تدریس خود از کدام روش استفاده می‌کنید؟ فکر کردن یا حفظ کردن؟

وقتی فکر کردن و اندیشیدن عملی می‌شود که معلم دانش‌آموزان را در درس خود شرکت دهد و سعی کند جواب سؤالات را با راهنمایی‌های لازم، خود دانش‌آموزان پیدا کنند و کشف نمایند؛ به عبارت دیگر، تا سؤالی را مطرح می‌کند خودش بلافاصله پاسخ ندهد و بچه‌ها را در یافتن پاسخ به کار گیرد یعنی از روش مشارکتی در

خانم آموزگاری تعریف می‌کرد که دانش‌آموزان اصرار داشتند من سؤالات امتحان را از مسائل کتابشان بدهم. در اوایل خدمت من به حرف آن‌ها گوش می‌دادم و مسائل امتحانی را عین مسائل کتاب می‌دادم و در عمل مشاهده می‌کردم که نمره اکثر دانش‌آموزان بالاتر از ۱۶ است و نمرات یک رقمی خیلی کم داریم.

در یک امتحان تصمیم گرفتم که پیشنهاد کلاس را نادیده گرفته مسائل را خارج از کتاب طرح نمایم، مسائلی که در آن‌ها تنها جای اعداد جابه‌جا شده یا جملات تغییر کرده بود، مثلاً به جای آنکه بگویم اختلاف دو عدد a است نوشتیم تفاضل دو عدد a است پس از تصحیح اوراق، دیدم سطح نمرات خیلی خیلی پایین آمده و نمرات زیر ۱۰ فراوان است!

به فکر فرو رفتم و در پی چاره برآمدم، ابتدا علت را از خود دانش‌آموزان پرسیدم؛ آن‌ها تنها جواب می‌دادند خانم سؤالات مشکل بود! بعداً موضوع را با رئیس مدرسه در میان گذاشتم او پاسخ داد که معلمان کلاس‌های سوم، چهارم و پنجم بیشتر سؤالات امتحان را عین مسائل کتاب انتخاب می‌کنند (که البته این مسائل قبلاً به‌وسیله معلم در کلاس حل شده است) و بچه‌ها حل این مسائل را از بر می‌کنند و در امتحان می‌نویسند و هیچ عادت نکرده‌اند که در ریاضی از مغز و فکر خود استفاده کنند یا جملات مسئله را در ذهن خود تجزیه و تحلیل نمایند و معنا و مفهوم مطلب را درک کنند که در مسئله چه مفروضاتی داده شده و چه چیز از آن‌ها خواسته شده است.

کلاس استفاده کند.

معلم دیگری تعریف می کرد که در کلاس دوم دبستان تدریس می کردم و می دیدم که بچه ها مسائل داده شده را در دفتر خود درست حل کرده اند اما وقتی آن ها را پای تخته فرا می خوانم که حل کنند درمی مانند. پس از پرس و جو، یکی از دانش آموزان گفت خانم این ها را مادرم حل کرده است! و این یک تذکر بسیار مهمی برای والدین است که اگر فرزندانشان سؤالی مطرح کردند آن ها فوری جواب ندهند یا مسئله را حل نکنند، چه فرزند از همان کودکی عادت به داشتن حل آماده می کند و هیچ گاه فکر خود را به کار نمی اندازد و این نحوه اندیشیدن تا پایان تحصیلات متوسطه ادامه پیدا می کند.

وقتی فرزندی از مادر یا پدر یا برادر بزرگ تر خود سؤال می کند یا کمک می گیرد، آن ها باید قدم به قدم او را راهنمایی کنند تا خودش جواب سؤال را بیابد و به این روش صحیح آموزش ریاضی که او همیشه باید فکر کند و مغزش را به کار اندازد عادت کند تا در کلاس های بالاتر دچار دردسر و مشکل نشود.

در همین زمینه باز دبیری روایت می کرد که دانش آموزی را پای تخته سیاه خواندم تا مسئله ای را حل کند و دفترش را هم برای استفاده کردن من، همراه بی آورد. او ابتدا دفترش را به من داد و بعد پای تخته رفت. دفتر را برگ زدم و نگاه کردم همه مسائل را صحیح حل کرده است. از دانش آموزان خواستم تمرین ۷ را حل کند (تا ۶ قبلاً حل شده بود) او هرچه زور زد نتوانست حل کند. گفتم تمرین شماره ۵ را که همین الان دوست شما حل کرد حل کن! باز نتوانست از او سؤال کردم که این تمرینات که در دفترت درست حل شده است! پس چرا نمی توانی حل کنی؟ او ساکت ماند، یکی از همکلاسی هایش گفت: آقا من علت را بگویم؟ گفتم بگو. گفت آقا حمید آخر هر سال و بعد از امتحانات دفتر پاکنویس شده مسائل دوستش را می گیرد و در طول سال تحصیلی از این دفتر استفاده می کند و حل مسائل را عیناً در دفتر جدید پاکنویس می کند ولی یاد نمی گیرد؛ یعنی از مغز و فکر خود استفاده نمی کند.

دانش آموزی که به هر شکل، بدین ترتیب بالا می آید، در امتحانات رقابتی، مثل کنکور سخت درمی افتد؛ چه می بیند هرچه زحمت می کشد موفق نمی شود! علتش این است که خیلی از سؤالات کنکور فکری است و اگر دانش آموز فکر خود را به کار نیاندازد و فقط به دنبال قوانین

کلاسیک حفظ شده برود عقب می افتد؛ مثلاً در مورد معادله:

$$(2x+1)^2 + (x-2)^2 = -(x-1)^2$$

کدام درست است؟

الف: $x = -\frac{5}{2}$

ب: $x = \frac{5}{2}$

ج: ریشه ندارد؟

د. X منفی است

دانش آموزی که با حافظه کار کرده فوری دست به کار شده پرانتزها را به توان ۲ می رساند، و یک سه جمله ای درجه ۲ به دست می آورد و سپس این معادله درجه ۲ را طبق فرمول حل می کند و این راه اگرچه درست هم باشد وقت گیر است و مسلماً طراح سؤال این راه مورد نظرش نبوده است.

ولی دانش آموزی که با فکر و مغز خود کار می کند فوری پرانتز طرف راست را به طرف چپ می برد و می نویسد:

$$(2x+1)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 = 0$$

و می گوید مجموع سه عبارت مثبت برابر صفر شده است و این وقتی روی می دهد که هر کدام از پرانتزها صفر باشد؛ لذا می نویسد

$$2x+1=0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x-2=0 \rightarrow x = 2$$

$$x-1=0 \rightarrow x = +1$$

و لذا مجموع آن ها برابر می شود:

$$-\frac{1}{2} + 2 + 1 = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

و گزینه «ب» درست است

یا در مورد سؤال، اگر a و b مثبت باشند $\sqrt{\frac{a}{-b}}$ جواب دارد؟

شاگردی که با فکر کار کرده فوری می نویسد:

$$\sqrt{\frac{a}{-b}} = \sqrt{-\frac{a}{b}}$$

و $\sqrt{-\frac{a}{b}}$ یک عدد منفی است و دارای ریشه زوج نیست

و یا هر گاه، | | نماد قدر مطلق و [] نماد کوچک‌ترین جزء صحیح باشد کدام یک از تساوی‌های زیر درست است؟

الف - $|-a| = -|a|$

ب - $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

ج - $[-a] = -[a]$

د - $\sqrt{-a} = -\sqrt{a}$

شاگردی که با فکر کار می‌کند بدون دست به کار شدن عملیات روی جواب‌های الف، ب و ج فوری می‌گوید جواب «د» درست است اما کسی که با حافظه کار می‌کند می‌خواهد یکی یکی تساوی‌های را حل کند و این وقت زیادی از او می‌گیرد.

و یا این سؤال: آیا تساوی $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3}$ همیشه درست است؟

اگر دانش‌آموزی فکر نکند فوری جواب مثبت می‌دهد، زیرا، تصور می‌کند که می‌تواند همیشه فرجه رادیکال و توان عدد زیر رادیکال را بر یک عدد (در صورت امکان) تقسیم کند ولی اگر فکر خود را به کار بیاندازد؛ متوجه می‌شود که در $\sqrt[3]{a^3}$ ، a چه مثبت باشد چه منفی، چون بر توان زوج می‌رسد مثبت می‌شود و ریشه زوج آن بامعناست.

اما اگر a منفی باشد پس از تقسیم فرجه و توان بر دو به رادیکال $\sqrt[3]{a^3}$ می‌رسیم که اگر a از اول منفی فرض شود، $\sqrt[3]{a^3}$ جواب ندارد.

دبیری تعریف می‌کرد پس از تدریس نامعادلات گنگ از کلاس خواستم که فوری جواب دهند آیا نامعادله $(x-1)^2 < -2x+5$

جواب دارد یا نه؟ همه دانش‌آموزان کاغذ و قلم برداشتند و طرف راست را به توان ۲ رساندند و عدد ۵ را نیز به طرف راست نامساوی بردند و طبق قانون تعیین علامت سه جمله‌ای عمل کردند اما فقط یکی دو نفر فوری جواب دادند نامعادله جواب ندارد؛ زیرا، طرف راست آن همیشه منفی است و عدد مثبت ۵ نمی‌تواند کوچک‌تر از یک عدد منفی باشد.

پدری تعریف می‌کرد که فرزندش در سال اول راهنمایی در ریاضیات سخت مشکل داشت و از معلمش

شکایت می‌کرد که همیشه سؤالات مشکل و خارج از کتاب می‌دهد و من نمی‌توانم حل کنم! می‌گفت نه تنها من بلکه بیشتر بچه‌های کلاس نمره بد می‌گیرند؛ لذا اصرار داشت که دیگر سر کلاس ریاضی شرکت نکند یا مدرسه‌اش را عوض نماید! بالاخره پس از مشورت با دوستان و صاحب‌نظران و تحقیق فراوان یکی از آشنایان یک دبیر ریاضی راهنمایی را که نحوه فکر کردن را یاد می‌داد به ما معرفی کرد، این دبیر خصوصی ظرف ۵ یا ۶ ماه با برگشتن به کتاب‌های ابتدایی و شیوه یاد گرفتن مطالب آن به‌طور صحیح و منطقی، توانست نحوه تفکر این بچه و نظرش را جمع به یادگیری ریاضی را زیر و رو کند و او را، قبل از اینکه قلم روی کاغذ ببرد، به فکر کردن وا دارد و این اندیشه که ریاضی را عده خاصی یاد می‌گیرند نه همه دانش‌آموزان از سرش بیرون نماید.

امروزه مسلم و ثابت شده است که همه دانش‌آموزان استعداد یادگیری ریاضی را دارند به شرطی که از اول با یادگیری آن به‌طور درست برخورد کنند. البته وظیفه مسئولین آموزش و پرورش نیز هست که معلمین را مرتب در دوره‌های بازآموزی شرکت دهند و پیوسته یادآورشان شوند که به بچه‌ها نحوه استفاده از مغز و فکر خود در ریاضی را یاد دهند نه بدین طریق که مطالب را طوطی‌وار مثل تاریخ و جغرافیا به ذهن بسپارند.

نتیجه

والدینی که انتظار دارند ریاضی بچه‌هایشان در کلاس‌های بالا خوب باشد و در کنکور سؤالات را صحیح و سریع پاسخ دهند؛ لازم است از همان کلاس اول ابتدایی و شروع کار، نحوه فکر کردن و اندیشیدن و از مغز استفاده کردن را به او یاد دهند و اگر در درس به او کمک می‌دهند در جواب سؤالات ولی، او را با پرسش و جواب راهنمایی کنند که خودش جواب سؤال را پیدا و کشف نماید و از پاسخ فوری دادن و یا راه‌حل مسئله را بلافاصله در اختیارش گذاشتن خودداری کنند چه با این کار به او از نظر یادگیری علمی لطمه وارد می‌سازند.

البته تشویق و امتیاز دادن به بچه‌ها از طرف والدین، می‌تواند در یادگیری آن‌ها مؤثر واقع شود و یا در مدرسه ایجاد رقابت بین کلاس‌های شعبه‌های مختلف و همچنین دانش‌آموزان یک کلاس در پیشرفت دانش‌آموزان بی‌تأثیر نیست.

دنیا که آخر شد است!

پای صحبت دانش آموزان داوطلب ورود به
دانشگاهها (کنکوری‌ها)

میرزا جلیلی

بیشکسوت ریاضی و عضو هیئت تحریریه مجله

کلیدواژه‌ها: آموزش ریاضی، کنکور، تست

دست داده‌ام؛ از همه بدتر این که دوستان و خویشانم تصور می‌کنند که من کودن، تنبل و سهل‌انگار بوده‌ام که نتوانسته‌ام رتبهٔ بهتری در کنکور به‌دست آورم؛ حالا شما می‌گویید من چکار باید بکنم؟ حتماً باید دنبال کار و کسبی بروم!؟

من پس از استماع حرف‌های این نوجوان، در حالی که برای او ناراحت شده بودم، شروع به تسلی و دلداری وی کردم و دو سه مثال از خویشان دیگر که در سال‌های قبل با چنین مشکلی برخورد کرده و دلسرده نشده بودند و در سال‌های بعد موفق شده و وارد دانشگاه شده بودند ذکر کردم و به او گفتم که زندگی مجموعه‌ای از موفقیت‌ها و شکست‌هاست و معمولاً بعد از هر شکست یک موفقیت در پیش است. باید تحمل و صبر داشته باشید.

صبر و ظفر هر دو دوستان قدیم‌اند

بر اثر صبر نوبت ظفر آید

گفتم شما روحیه خود را حفظ کنید و آرام بگیرید

و گر نه ممکن است مریض شوید!

گفتم دنیا که آخر نشده است! شما جوان هستید و هنوز خیلی فرصت دارید! پس از آن نام مدرسه و دبیران ریاضی او را پرسیدم. ضمن نام بردن آن‌ها متوجه شدم که اتفاقاً یکی از این دبیران از معلمان نسبتاً قدیمی و

در امتحان ورودی دانشگاه‌ها برای سال تحصیلی ۹۴-۹۳، رتبهٔ فرزند یکی از خویشانم ۵۰۰۰ اعلام شده بود. این دانش‌آموز پس از اطلاع از رتبهٔ خود، عصبی شده و در نگرانی شدید به سر می‌برد و دیگر حوصلهٔ هیچ کاری نداشت، چه، اطمینان داشت که او با این رتبه در هیچ‌یک از دانشگاه‌های دولتی در رشتهٔ مهندسی مورد نظرش قبول نخواهد شد. پدرش گفت که یک کلمه حرف با او نمی‌توان زد، چون داد و فریاد راه می‌اندازد و به زمین و زمان بد می‌گوید. این نوجوان را که کاملاً روحیه‌اش را از دست داده و خود را باخته بود پیش من فرستادند تا با استفاده از تجربیات و نفوذ کلامم، از نظر روانی او را تسلی داده راهنمایی کنم و به آینده امیدوارش سازم شاید قدری آرام بگیرد. در ملاقات با من، او می‌گفت که تمام جزوات و کتاب‌های کنکور را در طول سال تحصیلی خوانده است، در کلاس‌های کنکور معروف شهر شرکت کرده است، هزاران نکته از سؤالات کنکوری را یادداشت و مطالعه کرده و هزاران تست حل کرده است، یک سال تمام شبانه‌روز، در ایام تعطیل و غیرتعطیل، درس خوانده و متحمل زحمت و کم‌خوابی شده است به امید اینکه به هدف خود برسد و رتبه‌اش در کنکور زیر ۵۰۰ شود. می‌گفت اکنون با رتبه ۵۰۰۰ کجا می‌توانم بروم؟! امید به زندگی را از

زیادی در این زمینه صرف نمی کنند تازه اگر هم متوجه مشکل کار بشوند؛ حجم کار و محدودیت زمانی به آنان اجازه پرداختن به مطالب گذشته را نمی دهد. تنها با یک اشاره مختصر به آن‌ها، درس خود را ادامه می دهد.» وی اضافه کرد: «خود دانش آموز هم به علت وجود دروس متعدد و پر حجم و تشویش و دلپره کنکور قدری شتاب زده شده بیشتر وقت خود را در این سال‌ها صرف مطالعه جزوات کنکور و یادداشت کردن نکته‌های کنکوری که در کلاس‌های مربوطه مطرح می گردد، می کند در نتیجه او در یادگیری ریاضی مسیر طبیعی آموزش را طی نمی نماید، به عبارت دیگر، او هنوز ابزار کار برای یادگیری مفاهیم پیشرفته در دست نداشته که باب مطالب پیشرفته و مسائل کنکور بر وی گشوده می شود.» اکنون براساس آنچه آن دوست دبیر من گفت مطالب را ادامه می دهیم.

راستی! شما فکر می کنید چند درصد از دانش آموزان پیش دانشگاهی قادرند محاسبات مقدماتی زیر را درست انجام دهند.

$$-\sqrt{-x}, -\sqrt{-x^2}, \sqrt{-x^2} \\ -|x|, -|-x|, |-x^2|, \sqrt{|x|}$$

- $[\sqrt{-2x}]$ ، $[x^2]$ ، $[-2x]$ ، $[|x|]$ (نماد [] برای کوچک ترین جزء صحیح به کار رفته است)

$$[|x|], [2x^2 - 2x - 1]$$

$$\text{- برد تابع حقیقی با ضابطه } f(x) = \frac{|-x|}{\sqrt{1-|x|}}$$

کدام است؟

- هرگاه \vec{a} و \vec{b} دو بردار موازی باشند حاصل

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

کدام است؟

در حالی که وقتی به سوالات کنکور نظر می افکنید می بینید بیشتر سوالات در همین مایه‌ها طرح شده و

با من آشناست. از این پسر خواستم شماره تلفن مرا به آن دبیر بدهد تا با من تماس بگیرد؛ چه واقعاً خودم هم علاقمند شدم تا از شرایط موجود و حاکم بر کنکورها در حال حاضر اطلاعاتی کسب کنم و این اطلاعات را در اختیار والدین این دانش آموز و دیگران قرار بدهم و جواب قانع کننده‌ای هم برای امثال این پسر پیدا کنم و از علت شکست آن‌ها، از نظر علمی، آگاه شوم.

می دانستم آن دبیر موفق بیش از ۲۰ سال در صحنه‌های آموزشی کشور و در مدارس مختلف شهرستان‌ها و تهران مشغول فعالیت بوده و ناظر و شاهد پیاده شدن چند نظام آموزشی در کشور بوده است. همچنین بر گذر هزاران دانش آموز از دبیرستان به دانشگاه نظارت و مطالعه داشته است.

او در تماس تلفنی با من چنین مطرح کرد که «من در سال‌های اخیر بر قبولی دانش آموزانم در کنکور دقت کرده‌ام و در این زمینه مطالعه و تحقیق نموده‌ام و نتایج حاصل از این تحقیقات و بررسی‌ها را با نتیجه قبولی دانش آموزان زمان تحصیل خودم که همین مسیر را پیموده بودند مقایسه نموده‌ام و به نتایج قابل ملاحظه‌ای رسیده‌ام.» سپس اضافه کرد: «این یافته‌ها را در سمینارهای آموزشی کشور، با سایر همکاران دبیر در میان گذاشته‌ام و آن‌ها نظرم را کاملاً تأیید کرده‌اند. می گفت: «از نظر علمی من متوجه شده‌ام که مشکل کار این قبیل دانش آموزان (نظیر دانش آموز خویش شما) در کجاست، و چگونه می توان به این قبیل دانش آموزان کمک کرد و به احساسات پاک و زاینده آن‌ها پاسخ قانع کننده‌ای داد. اما این یافته‌ها: بیشتر دانش آموزان در کلاس‌های اول و دوم دبیرستان، بعضی از مطالب کلیدی و پایه‌ای ریاضی را با دقت‌های محاسباتی، که لازمه ادامه کارهای بعدی آن‌ها در کلاس‌های سوم و چهارم است، خوب پخته نمی کنند، یعنی این مطالب برای آن‌ها کاملاً جا نمی افتد و با این ضعف و نارسایی به کلاس‌های بالا و پیش دانشگاهی می‌رسند. دبیرانی هم که در سال‌های آخر دبیرستان مشغول تدریس‌اند، معمولاً درس خود را بر این مبنا قرار می دهند که دانش آموزان این مطالب پایه و اساسی را در کلاس‌های قبل یاد گرفته‌اند، لذا آن‌ها نیز وقت



نیاز به دانستن مفاهیم و محاسبات مقدماتی دارد، مثلاً:

$$f(x) = \frac{[x]}{\sqrt{x-|x|}} \quad \text{محاسبه حد تابع:}$$
$$x \rightarrow 0^+$$

- یا پیوستگی تابع حقیقی $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-|x|}}$ در بازه $(-1, 1)$ ، (بازه باز است)

- یا مشتق پذیری تابع $y = ||x| - 1|$ در بازه $[-1, 0]$ (بازه بسته است)

- یا تابع: $y = \begin{cases} [2x] & |x| < 2 \\ x+1 & x \geq 2 \end{cases}$ ، چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

که پاسخ صحیح دادن به آن‌ها نیاز به تسلط بر محاسبات کلیدی و مفاهیم نخستین دارد؛ نتیجه:

- دانش‌آموزان برای بالا بردن درصد پاسخ‌های صحیح ریاضی و در نتیجه موفق شدن در کنکور نیاز به دانستن و تسلط بر مفاهیم اولیه و پایه‌ای و محاسبات ظریف ریاضی در سال‌های اول و دوم دبیرستان دارند. - در تألیف کتب ریاضی سال‌های اول و دوم به مراحل و اصول آموزش ریاضی که شامل مفهوم، تکنیک محاسبه، رسیدن به سرعت و مهارت در آن‌ها و کاربرد است باید توجه کامل شود.

- در هر جلسه درس وقتی یک مفهوم کلیدی مطرح می‌شود آن مفهوم به‌وسیلهٔ دبیر کاملاً پخته توجیه و تشریح شده و با طرح مثال‌های مختلف طرز محاسبات ظریف ریاضی یاد داده شود.

- با توجه به جو موجود آموزشی و گرایش خارق‌العاده دانش‌آموزان به تست، در کتاب‌های اول و دوم علاوه بر مثال‌های فراوان، «تست‌های هدف‌داری» نیز آورده شود؛ این تست‌ها باید طوری انتخاب شوند که بتوان فکر پشت هر تست نیز تشخیص داده شود و وسیلهٔ دبیر توجیه گردد که مثلاً تست‌های شماره ... تست موقعیتی است و اصلاً نیاز به محاسبه ندارد، تست‌های شماره ... توجیه مفهوم با استفاده از تصویر و شکل است و نیاز به محاسبه

ندارد، تست‌های شماره ... محاسباتی است و نیاز به دقت در محاسبه دارد و ...

خلاصه انتخاب صحیح تست‌های کتاب به‌منظور تأمین دو هدف مهم آموزشی باشد:

الف. سرعت در به یاد آوردن مفاهیم اولیه؛

ب. سرعت در اعمال و محاسبات ظریف ریاضی؛ اگر مفاهیم و محاسبات ظریف هر بخش کاملاً توجیه شده باشد و مطالب تدریس شده کاملاً به‌وسیلهٔ دانش‌آموزان درک شده باشد، تست‌ها نه تنها خواننده را خسته نمی‌کند بلکه او را برای مطالعه بیشتر تشویق و آماده می‌سازد.

امروز متخصصین آموزش ریاضی چون **برونر، گاتیه، کروتسکی و شونفیلد** که بعضی از آن‌ها از پیروان **پولیا** هستند معتقدند که در آموزش ریاضی توجه به مفاهیم کلیدی و رعایت ترتیب در یاد دادن آن‌ها از جمله ضروریات یادگیری است. شونفیلد معتقد است که برای تسلط بر یک مفهوم ریاضی، لازم است آن را با دیدگاه‌های مختلف مورد بررسی و مطالعه قرار داد، مثلاً در یادگیری بردار باید به تعریف عمومی، هندسی، جبری و محاسباتی آن توجه کرد.

متأسفانه کتاب‌های جنبی که در ایران بدون تجزیه و تحلیل مفاهیم کلیدی و پایه‌ای مربوط به هر قسمت از درس منتشر می‌شود، ارزش آموزشی ندارند. کتاب‌های جنبی باید تأکید بر مفاهیم اولیه و محاسبات ظریف ریاضی را در سرلوحه هدف‌های خود قرار دهند؛ متأسفانه کمتر کتاب جنبی را در بازار می‌بینید که با دقت وارد جزئیات مفاهیم و محاسبات شده و مطالب را از نظر علمی موشکافی کرده باشد.

کتاب‌های جنبی باید برای کسانی که در مفاهیم پایه ضعیف هستند نوشته شود و به‌منزلهٔ عینک طبی باشد که شخص با دید ضعیف، به کار می‌برد تا تصاویر را روشن‌تر و بهتر و هر چیز را به جای خود ببیند.

کتاب‌های جنبی فعلی بیشتر روی «تست زدن» و قوانین و نکته‌های مربوط به آن بحث می‌کنند و تأکید بر این دارند که هرچه دانش‌آموز بیشتر تست بزند موفقیت وی در کنکور بیشتر خواهد بود و حال آنکه در عمل، مثل پسر خویشاوند ما، این طرز کار جواب نمی‌دهد و رتبه کنکور به جای ۵۰۰ به ۵۰۰۰ می‌رسد.

کتاب‌های جنبی باید برای کسانی که در مفاهیم پایه ضعیف هستند نوشته شود و به‌منزلهٔ عینک طبی باشد که شخص با دید ضعیف، به کار می‌برد تا تصاویر را روشن‌تر و بهتر و هر چیز را به جای خود ببیند

ریاضیات و فرهنگ

بخش پایانی

دو ژورنال بین‌المللی آموزش ریاضی برای یادگیری ریاضیات^۵ و مطالعات آموزشی در ریاضیات^۶، با انتشار رساله‌ای که بی‌شاپ ویرایش کرده بود منتشر شد. نویسندگان، مبنای مهمی را برای نوشته‌های بعدی درباره فرهنگ و ریاضیات پی‌ریزی کردند و دامنه گوناگونی از پژوهش‌ها را بنا نهادند.

وقتی ریاضیات قومی در سال ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ به عنوان حوزه‌ای از مطالعات در آموزش ریاضی پیشنهاد شد خیلی چیزها جدید و ناآشنا به نظر می‌رسید. ایده جست‌وجوی ریاضیات در فرهنگ‌های دیگر و استفاده از این یافته‌ها در یک کلاس درس عادی ممکن است برای بیشتر معلمان غیرعادی باشد، منتهای مراتب، می‌تواند به‌عنوان یک موضوع ممکن برای غنی‌سازی مواد درسی به کار رود. در بخش‌های بسیاری از جهان، آموزش ریاضی بر اساس الگوی محتوا، ساختار، و الگوریتم‌های اروپایی بود. برنامه درسی و تجربه آموزشی موسوم به برنامه «ریاضیات جدید» در ۱۹۶۰ رشد یافت، اما الگوها بیشتر با مرکزیت الگوهای اروپایی و بعد آمریکایی باقی ماند که در دهه‌های قبلی تبیین شده بودند.

دی آمبروسو در سخنرانی خود با عنوان «مبنای اجتماعی-سیاسی آموزش ریاضیات» در پنجمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی (دی آمبروسو، ۱۹۸۴) بعضی مطالب جالب توجه را ارائه داد. به عقیده

اشاره

در بخش نخست این نوشته، تعاریف مربوط به ریاضیات قومی و تأثیرات متقابل ریاضیات قومی و عوامل اجتماعی و فرهنگی بیان شد. در این بخش، از دیدگاه برنامه درسی، نگاهی به موضوع ریاضیات و فرهنگ داریم، همچنین روش قوم‌نگاری که برای انجام پژوهش‌های ریاضیات قومی ضروری است به تفصیل بیان می‌شود.

کلیدواژه‌ها: ریاضیات قومی، ریاضیات، فرهنگ، برنامه درسی

بخش سوم: برنامه درسی

در سه دهه گذشته، نیروهای آموزشی، فرهنگی و سیاسی، ریاضیات را با توجه به فرهنگ به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار داده‌اند. بنابراین، مطالعات شامل ریاضیات و فرهنگ، در روش‌شناسی آموزشی و به‌ویژه برنامه آموزش معلمان بسیار اساسی و مهم است.

در طول سی سال گذشته، نویسندگانی چون ولوس گردیس^۱ از موزامبیک، مرشا اشرا^۲ از ایالات متحده، و آلن بی شاپ^۳ از انگلستان، به تحقیقاتی فرهنگی در زمینه ریاضیات و محققان ریاضی دست زدند. (بارتون^۴، ۱۹۹۶). بیشتر کارهای آن‌ها ابتدا در

وی تحقیق روی مسائل اجتماعی و فرهنگی در آموزش ریاضیات تا آن زمان بیشتر از چند مسئله راجع به تبعیض جنسیتی یا مطالعات تطبیقی مشابه انجام نشده بود. این احساس مشترک وجود داشت که ریاضیات، ریاضیات است، چون معمولاً ریاضیات به معنای محض ریاضیات اروپایی در نظر گرفته می‌شد. مسائل جامعه‌شناختی در مورد کاربرد ریاضیات وجود دارد، البته گاهی به‌نظر می‌رسد آموزش ریاضی و محتوای مدرسه‌ای ثابت و تهی از فرهنگ هستند. به‌نظر می‌رسد تاریخ و فرهنگ ریاضیات، به‌عنوان حاشیه‌های غیر ضروری برای غنی‌سازی مواد درسی به شمار می‌روند. به هر حال، در بسیاری از کشورها که مدرسه رفتن یک امر تجملی برای خانواده‌های بزرگان به شمار می‌رفت، آموزش رفته‌رفته به‌عنوان حقیقتی برای همه به‌کار رفت، بنابراین آوردن دامنه گسترده‌تری از دانش‌آموزان در کلاس درس موضوع مهمی بود. پس خیلی مهم بود که مطمئن شویم محتوای برنامه درسی ریاضی مسائل فرهنگی مربوط به همه اقشار مردم را منعکس می‌کند.

برنامه‌های ضمن خدمت معلمان می‌تواند شامل مباحث فرهنگی باشد. اخیراً معلوم شده است که فرهنگ می‌تواند احساس دانش‌آموز برای مشارکت در بحث‌های کلاسی، سؤال‌های آغازگر، به‌یادآوری حقایق، جست‌وجوی روش‌های درک مبدعانه، و بسیاری از جنبه‌های دیگر آموزش در کلاس درس را افزایش دهد. بد تعبیر کردن نشانه‌های فرهنگی می‌تواند به عدم درک فرایندهای یادگیری یا اشتباه دانش‌آموزان توسط معلم و پاسخ طبیعی برای بی‌میلی به یادگیری منجر شود. از این رو، NCTM (۱۹۹۱، ص. ۲۵)، کلید آموزش موفقیت‌آمیز را آگاهی معلمان از ادراکات، علایق، و تجربیات دانش‌آموزان و دانستن روش‌های موجود برای یادگیری ریاضیات توسط دانش‌آموزان بیان کرده است. دو مورد از فرایندهای ریاضی شرح داده شده در استانداردهای NCTM (۱۹۸۹ و ۲۰۰۰) عبارت است از ارتباط^۷ و اتصال^۸. این دو مورد به ریاضیات قومی مربوط می‌شود:

ارتباط به این معناست که دانش‌آموزان افکار خود را بیان کرده و ایده‌های خود را با دیگران مبادله کنند. سند اصول و استانداردهای NCTM (۲۰۰۰) بیان می‌کند که برنامه‌ها باید دانش‌آموزان را قادر سازند تا «تفکر ریاضی خود را به‌طور شفاف با همکلاسی‌های خود، معلمان، و دیگران ارتباط دهند». معلم باید مشارکت

همه را تشویق کند و به ارزش مشارکت هر کس در فرایند یادگیری تأکید ورزد. دانش‌آموزان باید با بررسی ایده‌های خود در مسیر یادگیری قرار بگیرند، بنابراین باید جوی از اطمینان وجود داشته باشد و دانش‌آموزان برای بیان ایده‌های خود احساس آزادی داشته باشند (NCTM ۲۰۰۰، ص. ۶۰). ایده‌های دانش‌آموزان ممکن است به چالش کشیده شود و بدون نگرش کردن دفاع شود، و وقتی همه درباره مفاهیم به توافق رسیدند و آن‌ها را درک کردند می‌تواند به قالب درآید.

«اتصال» فرایند دیگر استاندارد NCTM است که بیشتر به ریاضیات قومی مربوط می‌شود. «اتصال» به‌معنای یافتن ارتباط‌هایی درون ریاضیات، بین ریاضیات و دیگر موضوع‌ها، و در ریاضیات به‌عنوان بخشی از تجربیات روزانه یادگیرنده‌هاست. چنانچه شرلی^۹ (۱۹۹۵) و مسینگلا^{۱۰} (۱۹۹۵) بیان داشته‌اند، ریاضیات قومی کلیدی برای یافتن اتصالات- درون ریاضیات در بین گروه‌های فرهنگی است که دو یا چندین حوزه را برای تحقق نیازهای گروه‌ها، در موضوع‌های دیگری چون هنر، جغرافی، اقتصاد و ... با هم در می‌آمیزد.

دانش‌آموزان نیاز دارند که بتوانند ریاضیات را در بافت‌هایی بیرون مدرسه تشخیص دهند و به‌کار ببرند (NCTM ۲۰۰۰، ص. ۶۴). بحث اتصال، میراث فرهنگی- مذهبی، هنر، منسوجات، موسیقی یا جشنواره‌های مربوط به آن‌ها را در بر می‌گیرد. هم‌چنین، ممکن است به مطالعات ریاضی اقتصاد و بازرگانی زندگی روزمره سنتی، آمارهای ارتباط‌های اجتماعی جدید، یا سیاست‌های مسائل بین‌المللی مربوط شود. سازنده گرایی^{۱۱} آموزشی یک نظریه غالب در دو دهه گذشته بوده است. «یجاد اتصال» مرحله‌ای است که برای بسیاری از اسناد برنامه درسی ریاضی مشترک است. این مرحله می‌تواند با توجه به موارد زیر صورت پذیرد:

- دنیای روزمره دانش‌آموزان،

- دانش قبلی دانش‌آموزان،

- بافت‌های آشنای درون و بیرون مدرسه،

- عناوین دیگر درون مدرسه،

- موضوع‌های دیگر درسی، و

- گذشته و شاید آینده.

مفهوم ایجاد اتصالات عبارت است از ساختن «شمای دانش»، یا نقشه‌های ذهنی، که به این ترتیب پیوندهایی بین اجزای دانش ساخته می‌شود

و در این حوزه ارتباط بین اجزا به اندازه خود اجزا مهم است.

بنابراین ایده دیگری که برای ضرورت بررسی رابطه ریاضیات و فرهنگ وجود دارد «ایجاد اتصالات» با دانش قبلی، با دنیای دانش‌آموزان، و با افراد جهان است. دیدگاهی که ساختن اتصالات را با موضوع‌های دیگر درسی در برمی‌گیرد، نیز می‌تواند به‌عنوان توجیهی برای یک برنامه درسی کل‌نگر استفاده شود. به هر حال، با داشتن یک توجیه مبتنی بر تئوری دو سؤال زیر باقی می‌ماند:

- ما درباره ریاضیات درون هر فرهنگی چگونه فکر می‌کنیم؟ و،
- آیا ریاضیات قومی در حال رسیدن به نقطه مطلوب است؟

در نوشته‌های نویسندگانی چون گیلگن^{۱۲} (۱۹۸۲)، بیلنکی^{۱۳} (۱۹۸۶)، کلینچی^{۱۴}، گلدبرگر^{۱۵} و تاروله^{۱۶} (۱۹۸۶) عبارت «ایجاد اتصالات» به‌عنوان دانش متصل شده، دانش مجزا شده یا متمایز نامیده شده است. برای مثال، آن‌ها دانش متمایز را در مقایسه روش‌های فکر کردن مردان و زنان در قیاس با همدیگر مشاهده می‌کنند. شواهد قابل ملاحظه‌ای وجود دارد که تنها برای جامعه سفید (در فرهنگ‌های آمریکایی و اروپایی) نتیجه‌گیری‌هایی داشته است، اما در تجربه‌های دیگر شواهدی از تفکر متصل شده درون بسیاری از فرهنگ‌های غیرغربی و بومی وجود دارد.

با همه موارد مذکور، بدیهی است که ریاضیات قومی کانونی برای فرایند یادگیری و روش‌شناسی آموزشی است. نیاز است که برنامه‌های آموزش ریاضی قبل از خدمت برای معلمان تهیه شود. معلمان باید دانش‌آموزان را با تاریخ ریاضیات در فرهنگ و کشور خود آشنا کنند.

بارتون (۱۹۹۶) پس از تجزیه و تحلیل نوشته‌های دی آمبروسو، گردیس، اشرف و دیگران، بیان کرد که بحث درباره ریاضیات قومی درباره ریاضیات یا آموزش ریاضی است. وی در هر دسته، چهار حوزه از نوشته‌ها را مشخص کرد.

نوشته‌ها درباره ریاضیات قومی ریاضیات

۱. ماهیت فرهنگی ریاضیات
۲. تفکر ریاضی در فرهنگ‌های دیگر

۳. تاریخ فرهنگی ریاضیات

۴. سیاست‌های ریاضی

آموزش ریاضی

۱. یادگیری ریاضیات در فرهنگ‌های دیگر
۲. شناخت موقعیتی شامل زبان و دوزبانگی
۳. تأثیرات اجتماعی آموزش ریاضی
۴. ارتباط‌های بین ریاضیات و آموزش ریاضی

او تعریف دیگری از ریاضیات قومی، که سعی در پوشش همه حوزه‌ها دارد، پیشنهاد داد: ریاضیات قومی برنامه تحقیق از روش‌هایی است که گروه‌های فرهنگی مختلف درباره مفاهیم و تجربیات مربوط به ریاضی فهمیده‌اند، و به‌طور مفصل بحث و استفاده کرده‌اند (ص ۲۱۴).

بر طبق نظر بارتون، تعریف فوق بر این موارد دلالت دارد: (الف) ریاضیات قومی یک مطالعه صرفاً ریاضی نیست، و بیشتر شبیه به مردم‌شناسی یا تاریخ است؛ (ب) خود تعریف وابسته به شخصی است که آن را بیان می‌کند، و از لحاظ فرهنگی خاص است؛ (ج) تجربه‌ای که شرح می‌دهد از لحاظ فرهنگی خاص است؛ و (د) ریاضیات قومی به چند صورت به نسبی‌گرایی در ریاضیات دلالت دارد (ص ۲۱۵). هم‌چنین، بارتون چارچوبی برای تحقیق روی فرهنگ و ریاضیات، فراهم کرد.

ایده مهمی که وجود دارد این است: ریاضیات قومی چیزی بیشتر از یک زاویه بیگانه برای غنی‌سازی کلاس درس ریاضی است. از یک دیدگاه ریاضیات قومی برای توضیح این مطلب که ریاضیات و ارزش‌های ریاضی مخصوص غرب نیست و حتی مشارکت‌های همگان برای پیشرفت‌های پیوسته آن لازم است بسیار ضروری است. ریاضیات قومی برای آماده‌سازی معلمان جهت اطمینان از این که پیام‌های فرهنگی به نسل‌های جدید منتقل می‌شود اساسی است. معلمان جدید باید با ذهن باز و آماده این نگرش را به کلاس‌های خود نشان دهند. نخستین ضرورت بررسی رابطه ریاضیات و فرهنگ بر یک تفکر ساده درباره آموزش یعنی «باز به شروع از جایی که یادگیرنده قرار دارد» مبتنی است. به عبارت دیگر این فرض وجود دارد که دانش‌آموز با ریاضیات برآمده از درون فرهنگ خود نسبت به ریاضیات بیرون از فرهنگ بیشتر آشناست. ضرورت دیگر «شروع با علایق دانش‌آموزان» است و بنابراین شاید بتوان فرض کرد که دانش‌آموزان احتمالاً بیشتر به این موضوع

فرهنگ می‌تواند احساس دانش‌آموز برای مشارکت در بحث‌های کلاسی، سؤال‌های آغازگر، به یادآوری حقایق، جست‌وجوی روش‌های درک مبدعانه، و بسیاری از جنبه‌های دیگر آموزش در کلاس درس را افزایش دهد. بد تعبیر کردن نشانه‌های فرهنگی می‌تواند به عدم درک فرایندهای یادگیری یا اشتباه دانش‌آموزان توسط معلم و پاسخ طبیعی برای بی‌میلی به یادگیری منجر شود

علاقه‌مندند که دیگران در فرهنگ خود چگونه عمل می‌کنند. سومین مورد این است که، «ریاضیات به یک صورت بشری نیاز دارد» و این اعتقاد وجود دارد که به کارگیری ایده‌ها در ریاضیات با توجه به تاریخ و محیط گروه‌های فرهنگی دانش‌آموزان به پیوندهای مهم‌تری با ساخته‌های دست بشر مثل هنر، معماری و ... منتهی می‌شود.

حال این پرسش به وجود می‌آید که آیا موضوعها یا فعالیت‌های مربوط به رابطه ریاضیات و فرهنگ باید با توجه به ریاضیات سنتی غربی در نظر گرفته شود، یا به‌عنوان حوزه‌ای برای غنی‌سازی مواد درسی؟ دو پاسخ به این سؤال داده می‌شود. اول اینکه برای تعریف دوباره ریاضیات متناسب با گروه‌های فرهنگی مورد نظر می‌توان عناوین و فعالیت‌ها را، هم با توجه به فرهنگ سنتی غربی و هم با غنی‌سازی مواد درسی بررسی کرد. پیشنهاد دوم با توجه به این حقیقت در نظر گرفته می‌شود که فرهنگ ممکن است تمایل به دستیابی به جامعه غربی داشته باشد، روش‌های غربی را برای پیشرفت دلخواه ببیند، و ریاضیات خودش را کافی نبیند.

قدم بعدی در چنین بحثی احتمالاً سؤالی به‌دنبال دارد: ریاضیات فرهنگ مورد نظر چه نوع ریاضیاتی است؟ می‌توان این‌گونه نتیجه‌گیری کرد که ریاضیات، بخشی از یک تقسیم‌بندی غربی از دانش است که در فرهنگ‌های دیگر به همان شکل غربی رخ نمی‌دهد. در عوض، با فرض این که ریاضیات قومی به‌عنوان روشی در ریاضیات مدرسه‌ای و برای غنی‌سازی مواد درسی مناسب است، می‌توان دو یا چند انتخاب دیگر را در نظر گرفت. یکی در نظر گرفتن شش فعالیت بی‌شاپ (۱۹۸۸) - شمارش، اندازه‌گیری، جایگذاری، طراحی، بازی کردن و توضیح دادن - است که به‌عنوان پیش‌نیاز آموزش دیده می‌شود و استفاده از این موارد برای معرفی ریاضیات به مدارس ابتدایی مناسب است و البته برای نقطه آغاز در دبیرستان در ریاضیات غربی کافی نیست. انتخاب دیگر، تمرکز روی یک برنامه درسی کل‌نگر است که به موضوع‌های جزئی تقسیم نمی‌شود. با توجه به مطالب فوق سه دغدغه اصلی برای ما به وجود می‌آید:

- چه عناصری از دانش در هر فرهنگی ممکن است به ریاضیات مربوط شود؟

- آیا افراد همه فرهنگ‌ها به یک روش یاد می‌گیرند و مدرسه‌سازی غربی برای همه افراد مناسب‌ترین است؟

- آیا ما باید دانش را به موضوع‌های مختلف جدا کنیم، و اگر نه، چه روشی برای سازماندهی برنامه درسی مناسب‌ترین است؟

اولین دغدغه با این سؤال که به‌نظر می‌رسد افراد فرهنگ‌های خاص باید در نظر بگیرند بیان می‌شود: چه عناصری از دانش در هر فرهنگی ممکن است به‌عنوان دانش ریاضی منظور شود. پاسخ این سؤال نباید توسط افرادی که در ریاضیات غربی غرق شده‌اند معین شود. یعنی درست نیست که بگوییم ما نقشی برای ایفا کردن نداریم. ما می‌توانیم تصمیمات موجود را حمایت کنیم. ما می‌توانیم مطمئن باشیم که اسناد برنامه درسی غالب، فضایی را برای شمول عناوین دیگر اجازه می‌دهند، و اینکه می‌توانیم جو فرهنگی را به رسمیت بشناسیم.

دغدغه دیگر با این سؤال بیان می‌شود که آیا افراد همه فرهنگ‌ها به یک روش یاد می‌گیرند، آیا مدرسه‌سازی غربی برای ما مناسب‌ترین است، آیا باید دانش ریاضی را از موضوع‌های گوناگون دیگر جدا کنیم، و چه راهی برای سازماندهی برنامه درسی مناسب است. این پرسش‌ها نیاز به آنچه ما آموزش قومی می‌نامیم را نشان می‌دهد.

اگر تمایلی به ساختن اتصال‌ها بر مبنای پیش‌زمینه‌های یادگیرندگان داریم، ضروری است به ریاضیات نگاهی داشته باشیم. لازم است مسائل مربوط به زبان، شناخت دیدگاه‌های مختلف تاریخی، و فوریت علم - قومی و تکنولوژی قومی بررسی شود. بیشترین حمایت باید برای شکل‌گیری آموزش قومی در نظر گرفته شود. در این ایده وسیع‌تر تفکر درباره مفروضات ساخته شده درون فرهنگ‌ها ضروری به‌نظر می‌رسد. ما نیاز داریم که تأثیر باورها، زبان، و استعاره‌های به‌کار رفته در زبان را، که به تعیین الگوها کمک می‌کند بشناسیم و نیاز داریم از روش‌هایی که مردم برای دانستن استفاده می‌کنند، از روش‌های سنتی و فرهنگی گرفته تا روش‌هایی که در حال حاضر در یادگیری مدرسه‌ای رخ می‌دهد، و آنچه افراد در فرهنگ‌ها به آن‌ها ارزش می‌نهند آگاه باشیم.

این کار یک مرور اساسی بر آموزش را می‌طلبد که ما به‌عنوان آموزشگران ریاضی نیاز داریم در آن شرکت داشته باشیم و به‌دلیل آنکه بحث ما ریاضیات قومی است به آن پردازیم. از آنجا که ممکن است این مرور را ساده انگاریم، مهم است که دیدگاه‌های غالب در غرب را مرور کنیم. هم‌چنین، بررسی آموزش با توجه به تنوع فرهنگی، و همه کاربردهای عمیق آن، به ما

که وقتی اقدامات و تصمیمات بتواند روی جهت آموزش ریاضی تأثیر داشته باشد در حال پیشرفت هستیم، اما آیا ما برای برخاستن و ادامه دادن آماده هستیم؟

بخش چهارم: قوم‌نگاری

قوم‌نگاری عبارت است از هنر و علمی که برای توصیف یک گروه یا فرهنگ استفاده می‌شود (فترمن^{۱۹}، ۱۹۹۸). مطابق با نظر آنگروسینو^{۲۰} (۲۰۰۷)، تحقیق قوم‌گراییانه برای الگوهای قابل پیشگویی در تجربیات زیسته بشر توسط مشاهده و شرکت دقیق در زندگی‌های افراد تحت مطالعه به کار می‌رود. قوم‌نگاری ممکن است شامل غوطه‌ور شدن محقق در زندگی روزبه‌روز یا فرهنگ افراد تحت مطالعه باشد. قوم‌نگاری به‌عنوان یک روش، ویژگی‌های معین متمایزی دارد (آنگروسینو، ۲۰۰۷). ابتدا، در یک مجموعه طبیعی زندگی واقعی افراد جمع‌آوری می‌شود. دوم، شخصی است؛ چون محقق هم به‌عنوان مشاهده‌گر و هم مشارکت‌کننده در زندگی افراد تحت مطالعه وارد می‌شود. هم‌چنین در قوم‌نگاری، داده‌ها به روش‌های گوناگون برای مثلثی‌سازی داده‌ها در یک دوره زمانی مبسوط جمع‌آوری می‌شود. فرایند استقرایی کل‌نگر و تعهدات طولانی مدت نیاز است. در نهایت، قوم‌نگاری، محاوره‌ای است؛ چون نتایج و تفسیرها می‌تواند از طریق قوم‌نگاری پیشنهاد شود یا توسط افراد تحت مطالعه منعکس شود.

فعالیت‌هایی کلی وجود دارد که نیاز است قبل از شروع انجام شود (راپرا^{۲۱} و شپیرا^{۲۲}، ۲۰۰۰). نخست، محقق باید سؤالات تحقیق خود را تعیین کند. صحبت با دیگران درباره پروژه تحقیق و مشورت با منابع مختلف می‌تواند مفید باشد. دوم، محقق نیاز دارد ارزیابی کند که چه‌قدر درباره موضوع می‌داند. سوم، محقق به افراد آگاه در زمینه مطالعه نیاز دارد. در آخر، نیاز است که زمان و منابع ارزیابی شود.

سینگلتون و استریتز^{۲۳} (۲۰۰۵) مراحل زیر را در زمینه تحقیق قوم‌نگاری معین کرده‌اند:

- گردآوری و ثبت اطلاعات: گاهی ثبت و گردآوری داده‌ها در یک زمان می‌تواند دشوار باشد. انواع اطلاعاتی که باید به‌عنوان یادداشت ثبت شود چیست؟ اگر نتوان به‌طور کامل اطلاعات را ثبت کرد، چه باید کرد؟ همیشه یک دفتر یادداشت

فرصتی برای ارزیابی دوباره گرایش‌های اجتماعی غرب، جامعه‌ای که برای فرزندانمان نیاز داریم، و نوع آموزشی که ممکن است برای پیشرفت به ما کمک کند می‌دهد. البته در چنین شرایطی به‌زعم برخی صاحب‌نظران مثل پستمن^{۱۷} و وینگارتنر^{۱۸} (۱۹۷۱) آموزش به‌عنوان یک فعالیت واژگونه (خرابکارانه) در نظر گرفته شده است.

با چنین مروری باید نگاهی به اهداف آموزش و جامعه داشت. به شیوه سنتی، اهداف ما به‌طور آکادمیک یا به‌طور تجربی جهت‌دهی شده‌اند. اخیراً اهداف اجتماعی‌تر و شخصی‌تری اضافه شده‌اند، و خیلی جدیدتر برخی پیوندها با رشد اقتصادی افزوده شده‌اند. پس از اینکه اهداف کلی در نظر گرفته شد ما باید درباره اینکه چگونه برای موضوعاتی چون ریاضیات با توجه به یادگیری، یاددهی، ارزیابی، برنامه درسی و توسعه منابع عمل کنیم تصمیم بگیریم.

انتظار می‌رود بیشتر افراد فکر کنند که این چالش‌ها خیلی پیچیده‌اند. در هر صورت اگر ما، به‌عنوان آموزش‌گران، پایه‌ای را بنا نکنیم، مسائل جاری جامعه ادامه می‌یابد. مسائل گوناگون زندگی گاهی به شکل هزینه‌های زندگی، مالیات‌ها و سیستم‌های اجتماعی دیده می‌شود.

دغدغه دیگری که وجود دارد با این سؤال‌ها مطرح می‌شود که چه عناصری از دانش فرهنگ‌های دانش‌آموزان در کلاس‌های درس، ریاضی در نظر گرفته می‌شود یا به‌منظور آشنایی با موضوع‌ها یا غنی‌سازی به‌کار می‌رود؟ چگونه می‌توان دریافت که استفاده از این عناصر در تدریس می‌تواند مناسب باشد؟ چه کسی از این فرهنگ‌ها می‌تواند در ایجاد این تصمیم‌ها یاری رساند؟

چگونه می‌توان دریافت‌هایی از دانش‌آموزان با توجه به فرهنگ و علائقشان داشت؟ چگونه می‌توان دریافت‌هایی درباره چگونگی یادگیری افراد این فرهنگ‌ها داشت؟ چه کسانی از این فرهنگ‌ها ممکن است ما را برای یافتن این موارد یاری رسانند؟ و چگونه ممکن است این ایده‌ها را در کلاس درس به‌کار برد؟

آیا می‌توان اجزا، یا کل برنامه درسی کنونی (ریاضیات و موضوع‌های دیگر) را آموزش داد به‌گونه‌ای که بهتر دانش را تلفیق کند و به دانش‌آموزان کمک کند تا اتصالات بیشتری بسازند؟

بسیاری از ما به ریاضیات و فرهنگ علاقه‌مندیم، اما چه‌قدر با آن فاصله داریم؟ این اعتقاد وجود دارد

ریاضیات قومی، که سعی در پوشش همه حوزه‌ها دارد، پیشنهاد داد: ریاضیات قومی برنامه تحقیق از روش‌هایی است که گروه‌های فرهنگی مختلف درباره مفاهیم و تجربیات مربوط به ریاضی فهمیده‌اند، و به‌طور مفصل بحث و استفاده کرده‌اند

برای خلاصه‌نویسی نیاز است. گاهی راه‌حل دیگری جز انتظار و ثبت مشاهده بعد از ترک محل وجود ندارد. تجهیزاتی مثل ضبط‌صوت، دوربین و غیره لازم است. مطابق با نظر سینگلتون و استریتز (۲۰۰۵)، یادداشت‌های زمینه‌ای یا دفاتر (حساب‌های) توصیفی مفصل هر مشاهده، در یک دوره زمانی باید عناصر زیر را شامل شود:

- توصیف احساس: هدف ثبت دقیق مشاهدات روزانه است. همچنین باید از تجزیه و تحلیل افراد یا رخدادها پرهیز شود.

- اپیزودهای فراموش شده: به اپیزودهای قبلی فراموش شده که محقق در محیط به یاد می‌آورد، اشاره دارد.

- ایده‌ها و یادداشت‌هایی برای استفاده‌های بعدی: به جابه‌جایی سریع و آنی ایده‌های مربوط به تجزیه و تحلیل داده‌ها، جمع‌آوری داده‌ها، تفکر و تعمق درباره ارتباط‌ها و غیره اشاره دارد. این‌ها یادداشت‌هایی هستند که محقق برای خودش می‌نویسد، برای مثال، طرح‌هایی برای مشاهدات آینده، چیزهای خاص یا افراد خاص برای جست‌وجوهای بعدی.

- عقاید و احساسات شخصی: به ثبت اطلاعات با توجه به واکنش موضوعی نسبت به زمینه مورد مطالعه اشاره دارد که برای اشتباهاتی که روی مشاهدات محقق سایه افکننده راه‌حل‌هایی فراهم می‌کند.

- یادداشت‌های متدولوژیک: به همه ایده‌های مربوط به روش‌های به کار رفته برای انجام تحقیق اشاره دارد، برای مثال، هر مشکلی که در گردآوری داده‌ها به وجود می‌آید، هر اشتباهی که توسط روش‌های جمع‌آوری داده‌ها رخ می‌دهد یا هر تغییری که در چگونگی ثبت اطلاعات توسط محقق ایجاد می‌شود.

در روش قوم‌نگاری از فنون مختلف پژوهش، از جمله مشاهده طبیعی و مصاحبه، استفاده می‌شود (سیف، ۱۳۸۹). آنگروسینو معتقد است سه روش برای جمع‌آوری داده‌ها در قوم‌نگاری وجود دارد: مشاهده، مصاحبه و تحقیق بایگانی شده (۲۰۰۷).

- مشاهده: مشاهده، مشارکتی منحصر به فرد است که از مشارکت محقق در زندگی افراد تحت مطالعه، در ضمن حفظ فاصله حرفه‌ای تشکیل شده است (فترمن، ۱۹۹۸). مطابق با نظر آنگروسینو (۲۰۰۷)، مشاهده عبارت است از عمل درک فعالیت‌ها و ارتباط‌های افراد در زمینه مورد نظر.

- مصاحبه: مصاحبه، فرایند هدایت یک مکالمه برای گردآوری اطلاعات است (آنگروسینو، ۲۰۰۷).

- تحقیق آرشیوی: یعنی تجزیه و تحلیل مواد موجود که برای تحقیق، خدمات یا اهداف اداری و یا غیر اداری دیگر ذخیره شده‌اند (آنگروسینو، ۲۰۰۷). در این بخش، یک سؤال پیش می‌آید. چگونه کیفیت تحقیق قوم‌نگارانه را کنترل کنیم. سه مسئله وجود دارد که وقتی محقق کیفیت را در تحقیق زمینه‌ای یا قوم‌نگارانه کنترل می‌کند باید در نظر بگیرد: واکنش‌پذیری^{۲۴}، روایی^{۲۵} و پایایی^{۲۶}.

واکنش‌پذیری: واکنش‌پذیری درجه‌ای است که شخصیت فرد به‌عنوان محقق روی رفتارهای دیگران تأثیر می‌گذارد زیرا آن‌ها می‌دانند که در یک تحقیق شرکت دارند و ممکن است به این منجر شود که تحت این مطالعه به‌گونه متفاوتی برخورد کنند (نیومن^{۲۷}، ۲۰۰۳). محقق ممکن است محبوب یا نفاق‌افکن شروع کند، و یا خود را با زندگی‌های دیگران آشنا کند که ممکن است تأثیر واکنش‌پذیری را کاهش دهد.

پایایی: پایایی در تحقیق زمینه‌ای، به این سؤال که آیا محقق می‌تواند داده‌هایی را که از لحاظ داخلی و خارجی ثابت و معتبر هستند جمع‌آوری کند؟ پاسخ می‌دهد (نیومن، ۲۰۰۳). وقتی محقق در طول زمان و در بافت‌های اجتماعی مختلف رفتارهایی را که ثابت هستند ثبت می‌کند داده‌ها از لحاظ درونی ثابت هستند. ثبوت خارجی می‌تواند با تشخیص یا بررسی مقطعی داده‌ها با منابع دیگر توسط محقق به‌دست آید. تحقیقات قوم‌نگارانه به آنچه دیگران به آن‌ها می‌گویند متکی هستند بنابراین، اعتبار منابع اطلاعاتی مورد استفاده برای ارزیابی مورد نیاز است. اطلاعات به اشتراک گذاشته شده می‌تواند به‌صورت خبر نادرست، تجاها، دروغ و از قلم‌افتادگی باشد (نیومن، ۲۰۰۳). پایایی در تحقیق زمینه‌ای متکی به بینش محقق، آگاهی، سؤالات و جست‌وجو در رفتارها و رخدادها از زوایا و چشم‌اندازهای مختلف است (نیومن، ۲۰۰۳).

روایی: روایی در تحقیق زمینه‌ای، اطمینان از توانایی محقق برای گردآوری و تجزیه و تحلیل دقیق داده‌ها، بازنمایی زندگی‌ها یا فرهنگ تحت مطالعه است (نیومن، ۲۰۰۳). روایی می‌تواند به روش‌های زیر بررسی شود. روایی اکولوژیک درجه‌ای برای جمع‌آوری داده‌ها و توصیف توسط محقق

● مرتب کردن الگوها: گام بعدی مرتب کردن یا گروه‌بندی برچسب‌های توصیفی درون مجموعه‌های کوچکتر است. محقق می‌تواند موضوع‌ها را از دسته‌بندی‌ها و ارتباط‌های ممکن بین اطلاعات گسترش دهد.

● تعیین خارج از رده‌ها: ممکن است موارد، موقعیت‌ها، رخدادها یا تنظیماتی که نمی‌تواند با باقی‌مانده یافته‌ها برازش شود تشخیص داده شود. این موارد باید به‌عنوان گام‌های متفاوتی در فرایند تحقیق که توسعه یافته در ذهن حفظ شود.

● تعمیم سازه‌ها و تئوری‌ها: الگوها یا یافته‌های متصل شده به‌منظور ایجاد حس توانمندی و گردآوری داده‌های پیچیده به تئوری‌هایی مربوط می‌شوند. ادبیات موجود نیز بررسی می‌شود.

● یادآوری با اظهارات انعکاسی (تفکری): یادداشت‌های فرد بینش‌ها یا ایده‌هایی هستند که یک شخص می‌تواند درباره داده‌ها داشته باشد. آن‌ها در حالی نوشته می‌شوند که محقق می‌داند هر چیزی شفاف‌سازی یا آزمون بیشتر نیاز دارد. هم‌چنین به محقق برای حفظ خط سیر اصلی مفروضات، ارببی‌ها و انتخاب‌ها در کل فرایند تحقیق کمک می‌کند.

پی‌نوشت‌ها

1. Paulus Gerdes
2. Mercia Ascher
3. Alan J Bishop
4. Barton
5. For the learning of Mathematics
6. Educational Studies in Mathematics
7. Communication
8. Connection
9. Shirley
10. Masingila
11. Constructivivism
12. Gilligan
13. Belenky
14. Clinchy
15. Goldberger
16. Tarule
17. postman
18. Weingartner
19. Fetterman
20. Angrosino
21. Roper
22. Shapira
23. Singleton & Straits
24. Reactivity
25. Validity
26. Reliability
27. Neuman
28. Pragmatic Validity
29. Transferability

است که دنیای تحت مطالعه را بازتاب می‌دهد (نیومن، ۲۰۰۳). تاریخ طبیعی یک توصیف کامل و فاش‌سازی فعالیت‌های محقق، مفروضات، و رویه‌هایی برای ارزیابی است. اگر مطالعه پذیرفته شود یا برای دیگران درون یا بیرون موضوع معتبر باشد، از لحاظ تاریخ طبیعی روایی دارد (نیومن، ۲۰۰۳). هم‌چنین برای بررسی روایی اعضای تحت مطالعه می‌توان دیدگاه‌های آن‌ها را به دقت بررسی کرد (نیومن، ۲۰۰۳). به‌علاوه، باید عملکرد داخلی وجود داشته باشد یعنی محقق به‌عنوان یک غیر عضو از گروه یا فرهنگ تحت مطالعه برای تعامل مؤثر به‌عنوان یک عضو وارد شود (نیومن، ۲۰۰۳). در نهایت، مطالعه باید روایی عملی^{۲۸} و انتقال‌پذیری^{۲۹} داشته باشد روایی عملی یعنی درجه‌بندی نتایج و جمع‌بندی‌های مطالعه مربوط به خود مطالعه شود (آنگروسینو، ۲۰۰۷).

شیوه‌های تحلیل اطلاعات در قوم‌نگاری

تجزیه و تحلیل و تفسیر داده‌ها در قوم‌نگاری می‌تواند مورد چالش قرار گیرد (راپر و شپیرا، ۲۰۰۰). ابتدا، نیاز است بفهمید مواد شما چیست. فرایند، فهمیدن عبارت است از استنتاج آنچه در ابتدا از داده‌ها می‌فهمید به جای آغاز با ایده‌هایی که از قبل به آن‌ها معتقد بوده‌اید (راپر و شپیرا). هم‌چنین، تجزیه و تحلیل داده‌ها باید از همان آغاز گردآوری داده‌ها شروع شود به‌طوری که محقق بتواند موضوع‌های اضافی را کشف کند و تصمیم بگیرد که آیا برای بررسی بیشتر آن را ادامه دهد یا نه. راپر و شپیرا راهبردهایی برای تجزیه و تحلیل قوم‌نگارانه بیان داشته‌اند:

● کدگذاری برچسب‌های توصیفی: چون مواد گردآوری شده به‌صورت کلمات نوشته شده‌اند، کلمات ابتدا باید به‌صورت طبقات معنادار یا برچسب‌های توصیفی گروه‌بندی شوند، سپس برای مقایسه سازماندهی و مقابله شوند و الگوها تشخیص داده شوند. قبل از اینکه یک فرد فرایند کدگذاری را آغاز کند، ممکن است برای دسته‌بندی دامنه‌های مبنایی فرمولی یافت شود که می‌توان به این وسیله دامنه وسیعی از پدیده‌ها را برای مثال به‌صورت تنظیمات، انواع فعالیت، رخدادها، ارتباط‌ها و ساختار اجتماعی، دیدگاه‌های عمومی، راهبردها، فرایندها، عبارات مهم و تکرار شده دسته‌بندی کرد.

Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

18. Carey, D. A. (1992). The patchwork quilt: A context for problem solving. *Arithmetic Teacher*, 40(4), 199-203.

19. Carraher, T. N., Carraher, D., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, 3, 21-29.

20. D'Ambrosio, U. (1984). The intercultural transmission of mathematical knowledge: Effects on mathematical education. Campinas: UNICAMP.

21. Nasir, Na'ilah Suad; Hand, Victoria; Taylor Edd V. (2008). Culture and Mathematics in School: Boundaries Between "Cultural" and "Domain" Knowledge in the Mathematics Classroom and Beyond. Available from <http://rre.sagepub.com/content/32/1/187>.

22. D'Ambrosio Ubiratan, (2001). What is ethnomathematics, and how can it help children in schools? *Teaching Children Mathematics*; Reston. Volume 7. Issue 6. P. 308.

23. Bishop, A. J. (1997, August). The relationship between mathematics education and culture. Opening address delivered at the Iranian Mathematics Education Conference in Kermanshah, Iran.

24. Zaslavsky, Claudia. (1988). Integrating Mathematics with the study of cultural Traditions. Paper presented at the ICME6. Budapest, Hungary. Available from ERIC.

25. Rahul Mitra (2010). Doing Ethnography, Being an Ethnographer: The Autoethnographic Research Process and I. *Journal of Research Practice*, Volume 6, Issue 1.

26. Bush, William S. (2002). Culture and Mathematics: An Overview of the Literature with a view to Rular Contexts, Working Paper. Ohio university, Athens. Available from ERIC.

27. Sangasubana, Nisaratana. (2011). How to Conduct Ethnographic Research. The Qualitative Report Volume 16 Number 2 March 2011 567-573 <http://www.nova.edu/ssss/QR/QR16-2/sangasubanat.pdf>

28. Favilli, Franco. ETHNOMATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION. Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education Copenhagen.

29. Frederick Leung; Kyungmee Park; Yoshinori Shimizu; Binyan Xu. (2012). MATHEMATICS EDUCATION IN EAST ASIA. ICME12. Plenary Activities6. Korea.

منابع

۱. سماور، لاری. ای پرورتر، ریچارد. استفانی لیزا (۱۳۷۹). **ارتباط بین فرهنگ‌ها**. مترجمان: کیانی، غلامرضا و میرحسینی، سید اکبر. چاپ اول. انتشارات باز. تهران.
۲. سیف، علی‌اکبر (۱۳۸۹). **روان‌شناسی یادگیری و آموزش**. ویرایش ششم. چاپ چهل و هفتم. نشر دوران.
۳. گال، مردیت. بورگ، والت. گال، جویس. **روش‌های تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روان‌شناسی**، ترجمه احمدرضا نصر و همکاران (۱۳۸۲). تهران مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی و سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت). چاپ اول. جلد ۱ و ۲.
۴. گويا، زهرا (۱۳۸۹). «سنت آموزش ریاضی در دوران طلایی ایرانی/ اسلامی»، فصل‌نامه مطالعات برنامه درسی ایران. سال پنجم، شماره ۱۷: ص ۱۲۶.
۵. فتحي واجارگاه، کوروش. **اصول برنامه‌ریزی درسی**، انتشارات ایران زمین. ۱۳۸۸.
۶. قورچیان، نادرقلی و دیگران. **سیمای روند تحولات برنامه درسی**. مؤسسه پژوهش و برنامه‌ریزی آموزش عالی. ۱۳۷۴.

7. Bishop, Alan (2010): *Mathematics Education: Major Themes in education*. Routledge Publication.

8. Barton, B. (1996). Making sense of ethnomathematics: Ethnomathematics is making sense. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 201-233.

9. Ascher, M. (1991). *Ethnomathematics: A multicultural view of mathematical ideas*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing.

10. Bishop, A. J. (1983). Research on the social context of mathematics

11. education. Wlough, UK: NFER-Nelson.

12. Bishop, A. J. (1988a). *Mathematics enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrescht, Netherlands: Kluwer.

13. Bishop, A. J. (1988b). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 179-191.

14. Bishop, A. J. (1990). Western mathematics: The secret weapon of cultural imperialism. *Race and Class*, 32(2), 51-65.

15. Bishop, A. J. (1994). Cultural conflicts in mathematics education: Developing a research agenda. *For the Learning of Mathematics*, 14(2), 15-18.

16. Bradley, C. (1984). Issues in mathematics education for Native Americans and directions for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(2), 96-106.

17. Campbell, P. F., & Silver, E. A. (1999). Teaching and learning mathematics in poor communities.



کنترل از دیدگاه شونفیلد

آذر کرمان

کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی دبیرستان های قم

چکیده

در این مقاله ضمن معرفی مفهوم کنترل از دیدگاه شونفیلد و ارتباط آن با فراشناخت، به جایگاه این مفهوم در کلاس درس و ضرورت توجه به آن از دیدگاه برخی آموزشگران ریاضی می پردازیم. همچنین روش شونفیلد را، در استفاده از گروه های کوچک برای تدریس به شیوه حل مسئله در کلاس درس، مورد بررسی قرار می دهیم. ضمناً نگارنده روش خود در کلاس درس را مطرح می کند و در پایان با تکیه بر دیدگاه شونفیلد، برخی از آموزشگران ریاضی و تدریس خود در کلاس درس پیشنهادهایی ارائه می دهد.

کلیدواژه ها: کنترل، فراشناخت، حل مسئله

مقدمه

- همه را بلد بودم ولی به جواب نرسید،
- هر کار کردم به نتیجه ای که شما خواستید نرسیدم،
حل شد ولی برای رسیدن به جواب دو صفحه نوشتم.
این ها جملاتی است که معمولاً بعد از هر امتحان یا در موقع حل تمرین از دانش آموزان می شنویم. در بسیاری از مواقع متوجه می شویم دانش آموز همه اطلاعات لازم برای حل مسئله را داشته و همه را در برگه خود آورده است اما روش چینش آن ها را نمی دانسته و نهایتاً به جواب نرسیده، و یا اینکه از راهی بسیار طولانی که نیازی به آن نبوده مسئله را حل کرده است. بر این اساس، به دنبال یافتن راه حلی برای این مشکل، به شرح و تبیین مفهومی که شونفیلد آن را «کنترل» می نامد می پردازیم.

مفهوم کنترل

شونفیلد با مطالعه توسعه حل مسئله در دانش آموزان از عامل حساس و مؤثری در مهارت آن ها، که او آن را «استراتژی کنترل» نامیده است آگاه شد. در تجزیه و تحلیل

شونفیلد، استراتژی های کنترل با تصمیمات اجرایی ارتباط دارد، مانند تولید فعالیت های متنوع، ارزیابی راه حل، ارزیابی آنچه احتمالاً قادر به انجام آن هستید، بررسی رهیافت هایی که به کار می برید، ارزیابی آنچه برای توسعه راه حل می سازید، و نظایر آن. [۱]

شونفیلد (۱۹۸۵) متأثر از الگوی چهار مرحله ای حل مسئله پولیا (۱۹۴۵) به بررسی عوامل تأثیرگذار بر حل مسئله ریاضی پرداخت. از دیدگاه او، این عوامل شامل منابع دانشی، رهیافت های حل مسئله ریاضی، کنترل و نظام باوری مسئله حل کن هستند. بررسی نتایج مقدماتی، نقش این عوامل و به خصوص، نقش کنترل را به عنوان یک عامل تعیین کننده، برجسته کرد.

همان طور که شونفیلد اشاره می کند، کنترل به معنای انتخاب و به کارگیری منابع و استراتژی های مناسبی است که به حل مسئله کمک می کند. از جمله توانایی های کنترلی، می توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. طرح کلی حل مسئله؛

۲. بازنگری و تصمیم گیری؛

۳. دانش فراشناختی هوشیارانه.

تحقیقات انجام شده در زمینه حل مسئله ریاضی، نشان می دهد که آگاهی فرد از دانسته های خود در زمینه ریاضی و نحوه استفاده از آن ها در موقعیت مناسب، همچنین بازبینی فرد از عملکرد خود در ضمن حل مسئله و بعد از آن (توانایی های فراشناختی)، بر میزان موفقیت او در حل مسئله ریاضی تأثیر مستقیمی دارد (صمدی، ۸۰-۱۳۷۹). [۲]

ضرورت توجه به مفهوم کنترل

با افزایش توانایی های کنترلی، مسئله حل کن می تواند بیشترین منابع خود را به کار گیرد تا مسائل مشکل را، با کارایی بیشتری حل کند؛ زیرا در صورت عدم توانایی های

کنترلی، ممکن است منابع دانشی او به هدر روند یا مورد استفاده قرار نگیرند.

به گفته گویا (۱۳۷۷) نکته مهم در حل مسئله آن است که شخص درباره چگونگی و زمان استفاده از آنچه می‌داند تصمیم بگیرد. توانایی استفاده نکردن از یک استراتژی حل مسئله پس از آزمایش آن و انتخاب یک استراتژی مناسب‌تر دیگر، ارزشیابی موقعیت و تجزیه و تحلیل فرایند انجام شده جهت شروع بعدی، لازمه حل مسئله هستند که همگی از نوع فراشناخت می‌باشند. [۴]

توانایی‌های کنترلی، آن قدر در موفقیت مسئله حل کن مؤثر است که امکان دارد شخص، در عین حال که به تمام مفاهیم و روش‌های حل آن تسلط دارد، چون توانایی‌های کنترلی را نمی‌شناسد، در حل مسئله باز هم شکست بخورد و به نتیجه مطلوب نرسد (شونفیلد، ۱۹۸۵).

گرچه دانش آموزان می‌توانند به دانش یا مهارت‌هایی برای تفسیر یک مسئله مجهز شوند، اما ناکارا بودن ساختار کنترل می‌تواند مانع اصلی آن‌ها در طول تلاش‌هایی که برای حل مسئله می‌کنند باشد. (کارلسون ۱۹۹۹) کارلسون توضیح می‌دهد که قطع نظر از زمینه غنی دانشی دانش آموزان، ناکارایی تصمیمات کنترلی اغلب نشان می‌دهد که دانش ریاضی آن‌ها قابل دسترس نیست، و عموماً از استراتژی‌های حل مسئله نمی‌توانند استفاده کنند. به گفته لین (۱۹۹۴) فعالیت فراشناختی درونی، یک یادگیرنده کلیدی را برای موفقیت فراگیری تحت موقعیت‌های کنترلی یادگیرنده آماده می‌کند. [۲]

روش شونفیلد

از نظر دانش آموزان یادگیری ریاضی، معمولاً به معنی یادگیری مجموعه‌ای از عملیات و روش‌های ریاضی است. شونفیلد برای بررسی استراتژی‌های کنترلی و بهبود آن روشی را ارائه کرد. روش او تدریس برای انجام ریاضی است که نه فقط شامل به کارگیری شیوه‌های حل مسئله است بلکه شامل استدلال، مدیریت مسئله‌ها و استفاده از رهیافت‌ها و استراتژی کنترل می‌باشد.

تدریس شونفیلد شامل به کارگیری عناصر مدل‌سازی، آماده‌سازی، اسلوب‌بندی، حذف در فعالیت‌های گوناگون در نظر گرفته شده برای برجسته کردن مفاهیم مختلف مراحل شناختی و ساختار دانشی لازم برای مهارت است. برای مثال، او در معرفی رهیافت‌های جدید، مسائلی را برای مدل‌سازی مطرح می‌کند. به عبارت دیگر او فرایند تفکر را نمایش می‌دهد (رهیافت‌ها و استراتژی کنترل). روش او حل مسائل ویژه، اما با تمرکز دانش آموزان بر استفاده و مدیریت ویژه رهیافت‌هاست. او از دانش آموزان می‌خواهد مسائل کلاسی را با استفاده از

رهیافت‌ها حل کنند و خود در طی این کار به عنوان یک مدیر عمل کرده، و رهیافت‌ها و تکنیک‌های حل را از دانش آموزان می‌خواهد، در ضمن اینکه آن‌ها استراتژی‌های کنترل گوناگون را مدل‌سازی می‌کنند تا بهترین نتیجه را کسب کنند. این تقسیم کار چندین عامل دارد. اولاً، با طرح چند فعالیت متوالی روند حل مسئله را برای دانش آموزان تغییر داده و مسیر را برایشان مشخص می‌کند. ثانیاً، به طور عمده، او مراحل حل مسئله را با همان ترتیب در نظر گرفت ولی مرکزیت را از کاربرد رهیافت‌ها به استفاده از استراتژی‌های کنترل در مدیریت رهیافت‌ها تغییر داد. [۱]

شونفیلد، در جلساتی، دانش آموزان را در گروه‌های کوچک برای حل مسئله شرکت داد. در طول جلسات، او همچون یک «مشاور» برای اطمینان یافتن از اینکه گروه‌ها با شیوه‌ای منطقی جریان را دنبال می‌کنند، بر کارشان فعالانه نظارت داشت. او از آن‌ها سه سؤال را می‌پرسید: الف. چه کاری انجام می‌دهید، ب. چرا این کار را می‌کنید، ج. این روش چگونه در موفقیت برای حل مسئله به شما کمک می‌کند؟ پرسیدن این سؤالات به دو صورت به آن‌ها در رسیدن به هدف کمک می‌کند: اول، دانش آموزان را به بازتاب روی فعالیت‌هایشان تشویق می‌کند، به این ترتیب که پیشرفت خود ارزشیابی عمومی و مهارت‌های تشخیصی آن‌ها را توسعه می‌دهد، دوم، آن‌ها را تشویق می‌کند که به طور روشن دلایل خود را بیان و از انتخاب خودشان، همچنان که در استراتژی کنترل تمرین کردند، حمایت کنند. [۱]

شونفیلد (۱۹۸۳) با استفاده از دلایل متعددی از گروه‌های کوچک دفاع می‌کند. اول، این روش فرصتی را در اختیار معلم قرار می‌دهد تا در هنگامی که دانش آموزان به طور نیمه مستقل حل مسئله را به کار می‌گیرند آن‌ها را هدایت کند؛ او نمی‌تواند به طور مستقیم حل مسئله و تمرین کلاسی آن‌ها را هدایت کند. دوم، ضرورتاً تصمیم گروهی از بین شیوه‌های مختلف حل، و در بین بحث و استدلال، با انجام مراحل کنترل ناشی می‌شود. همچنین این بحث‌ها مهارت‌های فراشناختی را توسعه می‌دهد. سوم، دانش آموزان در مدرسه فرصت کمی برای همکاری با هم دارند؛ گروه‌های حل مسئله به آن‌ها اجازه می‌دهد که با همکاری در حل مسئله، همکاری در جهان واقعی را تجربه کنند. چهارم، دانش آموزان اغلب به توانایی‌های خودشان اطمینان ندارند، مخصوصاً اگر با مسئله مشکل پیدا کنند. مشاهده دیگر دانش آموزان تا حدی این عدم اطمینان آن‌ها را می‌کاهد، آن‌ها متوجه می‌شوند که این مشکلات تنها برای فهم و درک آن‌ها از مسائل نیست، پس با همکاری با دیگران باور نسبت به خودشان را بیشتر می‌کنند. [۱]

به گفته گویا (۱۳۷۷) «در چنین روش تدریسی، مسئله‌ها را باید با دقت زیادی انتخاب کرد که علاوه بر کشش

**توانایی‌های
کنترلی، آن قدر در
موفقیت مسئله حل
کن مؤثر است که
امکان دارد شخص، در
عین حال که به تمام
مفاهیم و روش‌های
حل آن تسلط دارد،
چون توانایی‌های
کنترلی را نمی‌شناسد،
در حل مسئله باز هم
شکست بخورد و به
نتیجه مطلوب نرسد**

و جذابیت، به فراگیرندگان فرصت پیدا کردن ارتباط بین ایده‌ها و مفاهیم ریاضی را بدهد تا آن‌ها بتوانند از یک مفهوم به مفهوم دیگری برسند» [۴]

تجربه‌نگارنده

روشی که من در کلاس (البته به‌طور بسیار محدود) استفاده کردم با الهام از الگوی شونفیلد و تحقیق گویا (۱۳۷۷) به‌صورت حل مسئله گروهی بود، که به‌علت محدودیت زمانی، در جلسات کم باید تعداد سؤالات زیادی را مطرح می‌کردم؛ پس سؤالاتی که به هر گروه اختصاص داده می‌شد متفاوت بود تا دانش‌آموزان ضمن ارزیابی گروهی سؤالات، نمونه سؤال‌های زیادی را بررسی کنند و پاسخ دهند. سؤالات در عین سادگی، دیدگاه گسترده‌تری نسبت به بحث داشت، به عبارتی باز پاسخ بود و اجازه بحث و بررسی را به دانش‌آموزان می‌داد و از روش‌های مختلف قابل حل بود. در زمان حل مسائل توسط دانش‌آموزان به گروه‌ها سر زدم و ضمن قرار گرفتن در گروه‌های مختلف به‌عنوان یکی از اعضایشان عملکرد آن‌ها را تحت نظر داشتم. دانش‌آموزان در گروه‌ها بسیار فعال بودند به‌طوری که دانش‌آموزان ضعیف سعی داشتند به هیچ وجه از دوستانشان عقب نباشند و در تمام مراحل شرکت کنند. به تبع آن، من نیز در چنین شرایطی بهتر می‌توانستم علت بدفهمی‌ها یا ضعف بعضی از دانش‌آموزان را متوجه شوم؛ ضمن اینکه با روش‌های یادگیری و تفکر آن‌ها آشنا می‌شدم.

پیشنهاد و نتیجه‌گیری

پیشنهادهایی که ضمن بررسی کلاس به نظر نگارنده رسید به شرح زیر است:

۱. لازم است امکان اجرای کلاس‌های حل مسئله گروهی در مدارس فراهم شود، حتی در برنامه درسی گنجانده شود و مدیران مدارس همکاری لازم را در این زمینه با معلمان داشته باشند.

۲. چنان‌که صمدی (۱۳۸۰) بیان می‌کند دانش‌آموزان در حل مسئله به‌گونه‌ای برخورد می‌نمودند که گویی مسئله تنها یک راه حل صحیح دارد و این نحوه برخورد را به‌طور ضمنی از اطرافیان خود خصوصاً آموزگاران خود کسب کرده بودند. [۵] استفاده از سؤالاتی که راه‌حل‌های متنوع می‌طلبند و امکان طرح آن‌ها در کلاس و بحث و بررسی آن‌ها توسط دانش‌آموزان.

۳. بهتر است نمونه چنین سؤالاتی در کتاب‌های درسی درج شود و حتی راه حل بعضی ارائه گردد و از دانش‌آموزان بخواهیم درباره آن‌ها قضاوت کنند.

۴. همان‌طور که شونفیلد می‌گوید مطرح کردن

استراتژی‌هایی که توسط مسئله حل‌کن‌های خبره استفاده می‌گردد در کلاس و ارائه نمونه‌هایی از آن‌ها، که توسط دانش‌آموزان حل شود، لازم است.

۵. به گفته گویا، بحث همگانی و کار در گروه‌های کوچک لازم و ملزوم یکدیگرند و کارایی یکی در نبود دیگری کاهش می‌یابد [۳] در صورت امکان از یک دانش‌آموز بخواهیم افکارش را بروز دهد، بلند فکر کند، تا دانش‌آموزان دیگر به بررسی آن بپردازند.

۶. به بچه‌ها بیاموزیم با دید جامع‌تری به مسائل نگاه کنند. برای این کار باید از نمونه سؤال‌های جامع‌تری استفاده کنیم، یعنی سؤالی که فقط مطلب اخیر را در برنگرفته باشد بلکه بعضی مطالب قبلی را نیز در بر بگیرد.

۷. در پایان، چنان‌که گویا اشاره می‌کند، انعطاف‌پذیری و قابلیت تغییر معلم، لازمه افزایش تأثیر این روش تأثیر است. از همه مهم‌تر، تعامل بین معلم و فراگیرندگان از مؤلفه‌های اساسی است. [۴]

و به گفته بس، زمان آن رسیده است که استادان ریاضی نقش خود را به‌عنوان آموزشگران [ریاضی] بازبینی کنند. هنوز استادان ریاضی دانشگاهی - که به‌طور خاص، دست کم نیمی از عمر حرفه‌ای خود را صرف تدریس کرده‌اند - به‌عنوان آموزشگران [ریاضی]، به جز مدل‌های ایفای نقش مربی‌هایشان، هیچ آماده‌سازی یا توسعه حرفه‌ای ندیده‌اند. [۶] لازم است معلمان ما بیش از پیش به‌دنبال یادگیری و استفاده روش‌های نوین آموزشی باشند و آموزش‌های مناسب ضمن خدمت و پیش از خدمت نیز به آن‌ها داده شود. همچنین امکان استفاده از این آموزش‌ها در مدارس ایجاد گردد.

منبع

- Allan Collins, John Seely Brown, and Ann Holum. Cognitive Apprenticeship: Making Thinking Visible
- Asmamaw Yimer-Nerida F. Ellerton Cognitive and Metacognitive Aspects of Mathematical Problem Solving: An Emerging Model
- گویا، زهرا؛ رفیع پور، ابوالفضل. چرا عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در تیمز منحصربه‌فرد بود؟ مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۷۵. صص ۱۱۵ تا ۱۲۱. دفتر انتشارات کمک آموزشی. (۱۳۸۳)
- گویا، زهرا. نقش فرانشاخت در یادگیری حل مسئله ریاضی. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۵۳. صص ۱۱۳ تا ۱۱۸. دفتر انتشارات کمک آموزشی. (۱۳۷۷)
- صمدی، معصومه. نقش دانش فرانشاخت در حل مسئله ریاضی دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۶۱. صص ۱۱ تا ۱۷. دفتر انتشارات کمک آموزشی. (۱۳۸۰)
- بس، هیمین (۱۹۹۷). ریاضی‌دان‌ها به‌عنوان آموزشگران ریاضی. ترجمه نرگس مرتاضی مهربانی. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۹۸. صص ۱۲ تا ۱۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی. (۱۳۸۸)



گزارش از یک کلاس درس

مطهره سامانی و سپیده ملائی، دانشجویان رشته ریاضی
دانشگاه شهید بهشتی
استاد راهنما: دکتر زهرا گویا

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

آغاز

مدرسه‌ای که برای این گزارش انتخاب کردیم، یک دبیرستان نمونه‌دولتی دخترانه واقع در ناحیه ... تهران بود. علاقمندان ورود به این مدرسه، باید در آزمون ورودی ویژه مدارس نمونه پذیرفته شوند و در هر سال، تنها صد نفر اول آزمون اجازه ورود به این مدرسه را می‌یابند.

هنگامی که به مدرسه رسیدیم، ساعت ۸ صبح بود. از قرار معلوم در آن روز دانش‌آموزان آزمون کنکور آزمایشی داشتند. معاون مدرسه به محض رسیدنمان، ضمن استقبال فراوان، از ما خواهش کرد سر جلسه آزمون برویم، زیرا با کمبود مراقب مواجه شده بودند. ما هم این وظیفه خطیر را پذیرفتیم و پس از سه ساعت سر پا ایستادن در جلسه، بالاخره به دفتر معلمان راه یافتیم، آن‌گاه به

همگانی دانش‌آموزان و رقابت زیاد میان آن‌ها برای پاسخ دادن به سؤالات معلم بود.

شروع کلاس

مبحث درس، در جلسه‌ای که ما در کلاس حضور داشتیم، مجموعه‌ها بود. ابتدا معلم کلاس را با نام خدا آغاز کرد، سپس به رفع اشکال سؤال‌های امتحانی که جلسه قبل گرفته بود، پرداخت. او از دانش‌آموزان خواست تا از روی سؤالاتی که جواب اشتباه داده‌اند یا جواب ندادند، دو بار همراه با پاسخ صحیح بنویسند. معلم سؤال‌ها را می‌خواند و همه دانش‌آموزان با صدای بلند، پاسخ می‌دادند. او به بچه‌ها تأکید می‌کرد که «مشابه همه سؤالات، قبلاً حل شده و شما باید از راه حل‌های مشابه استفاده می‌کردید. در غیر این صورت، بی‌جهت نمره از دست داده‌اید». سپس این مسئله امتحان را پای تخته حل کردند:

مسئله: فرض کنید مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ باشد. A چند زیرمجموعه دارد به طوری که هر یک حداقل یک عدد صحیح زوج داشته باشند؟

معلم توضیح داد که اگر واژه حداقل در سؤالی به کار رفته باشد، باید این‌گونه عمل کنیم: «حالت نامطلوب - کل حالات = حالت مطلوب» و از دانش‌آموزان خواست که در صورت متوجه نشدن مطلب حتماً پرسند، در غیر این صورت در امتحان ضرر می‌کنند و بعد ادامه داد که «پس در این سؤال، کل حالات 2^{50} است و حالت نامطلوب زمانی رخ می‌دهد که در تمام زیرمجموعه‌ها، همه اعضا فرد باشند. یعنی همه زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 3, 5, \dots, 49\}$ که برابر با 2^{25} است. حال داریم $2^{50} - 2^{25}$ = حالت مطلوب» و تأکید کرد که «از روی تابلو کپی نکنید و سؤالات خود را الآن بپرسید!» یکی از دانش‌آموزان از معلم خواست دوباره توضیح دهد و او پس از توضیح مجدد، پرسید «همه فهمیدند؟» و همه با صدای بلند گفتند «بله!» معلم گفت «این سؤالی بود که بی‌جهت، ۲ نمره را از دست داده‌اید!»

بعضی دیگر هم در امتحان، نوشته بودند $-\frac{1}{9} = 3^{-2}$. معلم گفت «اشتباه است! فلاسفه اشتباه نوشتند!» و همه دانش‌آموزان خندیدند! وی با



پیشنهاد خانم مدیر، به یک کلاس پایه اول برای تهیه گزارش رفتیم.

پایه اول، دارای دو جلسه کلاس ریاضی اصلی و یک جلسه ریاضی تکمیلی در هفته بود. البته این دو کلاس توسط دو معلم که مستقل از هم کار می‌کردند تشکیل می‌شد. از آنجا که مطالب کلاس ریاضی اصلی به کتاب نزدیک‌تر بود، آن را برای مشاهده انتخاب کردیم.

پس از انجام هماهنگی‌های لازم با معلم، وارد کلاس شدیم. فوراً برپا دادند. معلم ما را معرفی و به گوشه سمت چپ کلاس هدایت‌مان کرد. جمعیت کلاس ۳۲ نفر بود و دانش‌آموزان در ۳ ردیف، روی نیمکت‌های دو نفری نشسته بودند. آن‌طور که معلم می‌گفت، روش تدریسش به این صورت بود که در ابتدای سال تحصیلی، یک سری کامل پلی‌کپی جزوه دست‌نویس خود را به دانش‌آموزان داده بود و در هر جلسه مشخص می‌کردند که در جلسه بعد کدام صفحات را می‌خواهد تدریس کند. بنابراین از دانش‌آموزان می‌خواست تا آن صفحات را پیش‌خوانی و در حد توانشان، تمرین‌ها و مثال‌ها را حل کنند.

یکی دیگر از فعالیت‌هایی که در این کلاس انجام می‌شد، این بود که قبل از شروع هر جلسه، یکی از دانش‌آموزان، داوطلبانه پاسخ تعداد محدودی از تمرین‌های کتاب را که از قبل توسط معلم تعیین شده بود، پای تخته می‌نوشت. چیزی که بیش از پیش توجه ما را در این کلاس جلب کرد، مشارکت



گفت «آفرین! بسیار هوشمندانه بود. البته اگر از راه قبلی هم بنویسید، نمره می‌گیرید».

ادامه درس

معلم درس را این‌گونه ادامه داد که: تعریف $A \cup B$ چه بود؟ x هایی که عضو A یا عضو B باشند و تأکید کرد که به لفظ «یا» دقت کنند. سپس از دانش‌آموزان پرسید که $A \cap B$ چه بود؟ پاسخ دادند: « x هایی که هم عضو A و هم عضو B باشند».

بعد به تعریف $A - B$ پرداخت. گفت عضوهایی از A که در B نباشند. از آن‌ها پرسید که $B - A$ چه می‌شود؟ همه پاسخ را گفتند. معلم افزود که «در تفاضل مجموعه‌ها نیز، مانند اعداد، ترتیب مهم است. یعنی همان‌طور که $7 - 5 \neq 5 - 7$ است، $B - A \neq A - B$ است». سپس برای دانش‌آموزان تعریف ریاضی تفاضل را نوشت و از آن‌ها خواست که به **نمودارهای ون** داخل پلی‌کیپی خود نگاه کنند.

دانش‌آموزان از نمودار دریافتند که آن تکه از A که به B تعلق ندارد، همان تعریف $A - B$ است. آن‌گاه معلم از آن‌ها خواست که $B - A$ را در شکل هاشور بزنند. بعد به سراغ تک‌تک دانش‌آموزان رفت تا شکل‌هایشان را بررسی کند. آن‌ها کمی در $B - A = \emptyset$ اشکال داشتند که

دیدن خنده آن‌ها گفت: «نخندید! چشم‌ها را باز کنید و صورت مسئله را ببینید!» و بالاخره، آخرین مسئله که از آن امتحان حل کردند، این بود:

مسئله: اگر $M = \{3^x : x \in Z\}$ و $A = \{9^x : x \in Z\}$ را داشته باشیم، متمم A را با **علائم ریاضی مشخص کنید.**

معلم به دانش‌آموزان گفت که « A و M را با اعضایشان مشخص کنید. سپس شکل بکشید تا اشتباه نکنید» و با حل این مسئله، رفع اشکال سؤالات امتحانی تمام شد.

سپس، معلم به بررسی پاسخ دو تمرین کتاب، از بخش مجموعه‌ها که قبل از شروع کلاس روی تخته نوشته شده بود، پرداخت. بعضی از دانش‌آموزان با صدای بلند گفتند که «صورت مسئله اشتباه است!» و معلم خطاب به آن‌ها گفت «کی می‌خواهین درست شین!» و بعد شروع به نوشتن صورت درست تمرین، همراه با جواب نمود و دانش‌آموزان هم، کم و بیش، وی را همراهی می‌کردند. در حل تمرین دوم، جواب درست بود، اما معلم از آن‌ها خواست **راه حل هوشمندانه‌ای** ارائه دهند. بعد از کمی همه‌مه، یک نفر ایده داد که «از راه دمورگان حل کنیم». معلم هم

تهی است!» سپس دو نفر را پای تخته آورد تا تمرین ۱ و ۲ را حل کنند (از پلی کیپی پیوست) که آن‌ها نیز به درستی حل کردند و بعد از آن قضیه ۱ را اثبات کردند.

قبل از اثبات، معلم از دانش‌آموزان پرسید که آن را به چه روشی اثبات کنیم؟ آن‌ها یک صدا پاسخ دادند «عضوگیری!» و قضیه به آسانی اثبات شد! سپس معلم به سراغ خواص تفاضل رفت و از دانش‌آموزان خواست که یک‌به‌یک، پای تخته بیایند و خواص را اثبات کنند. برای اثبات خاصیت (ب)، معلم یکی از دانش‌آموزانی را که نسبت به بقیه ضعیف‌تر بود (به گفته ایشان) پای تخته آورد. دانش‌آموز در اثبات به مشکل برخورد. معلم از او خواست دقیق به سؤال نگاه کند و شکل بکشد، اما باز هم نتوانست. معلم سر او داد زد که «تا شب هم که شده می‌ایستی تا این مسئله را حل کنی!».

دست آخر، دانش‌آموز با راهنمایی همکلاسی‌هایش موفق شد مسئله را حل کند. معلم گفت «خب این کاری داشت؟!» (با لحنی کنایه‌آمیز که دانش‌آموزان با خنده و شوخی، به آن خاتمه دادند).

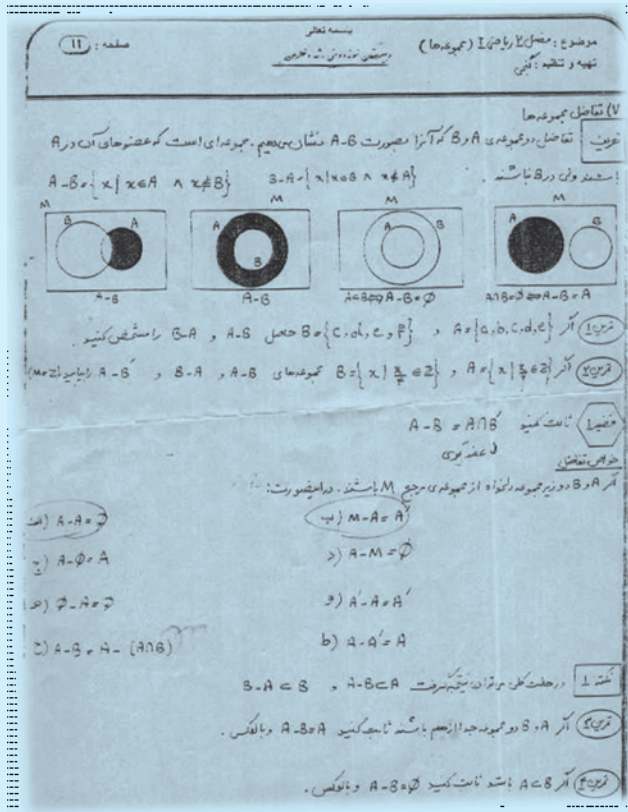
چیزی که معلم بسیار بر آن تأکید داشت، این بود که دانش‌آموزان موقع اثبات، روی مساوی‌ها یا فلش‌ها بنویسند که از چه قضیه یا خاصیتی استفاده کرده‌اند.

او برای تکلیف منزل، به آن‌ها گفت که پلی کیپی خود و کلاس دیگر را حل کنند و از روی قضیه‌ها و تمرین‌ها، دو بار بنویسند.

پایان مشاهده

طی صحبتی که بعد از کلاس با معلم داشتیم، وی اشاره کرد که «سطح کتاب بسیار پایین است. به‌خصوص در تألیف‌های جدید، کاهش مطالب بیشتر به چشم می‌خورد. اگر سطح کنکور این‌قدر پایین بود، ما از کتاب استفاده می‌کردیم، اما با این وضعیت، نمی‌توانیم به کتاب اکتفا کنیم».

البته او در تدریس، از کتاب درسی استفاده نمی‌کرد، و تنها برای تعداد محدودی از تمرین‌ها، به کتاب رجوع می‌نمود. آخرین سؤال ما این بود که «آیا به دنبال روش‌های بهتر تدریس هستید؟» و پاسخ این بود که «هر لحظه به این موضوع فکر می‌کنم و از روش‌های بهتر و کارآمدتر، بسیار استقبال خواهم کرد».



معلم توضیح داد اشکالشان کجاست و پرسید «اگر A زیرمجموعه B باشد، $A-B$ چه می‌شود؟» دانش‌آموزان پاسخ دادند «تهی». معلم افزود «اگر یک مجموعه از دیگری کوچک‌تر باشد، همیشه اشتراکشان، مجموعه کوچکتر می‌شود» و از دانش‌آموزان خواست این نکته را ۲۰ بار تکرار کنند و ۴۰ بار بنویسند (البته به شوخی) و سؤال کرد:

چه رابطه‌ای بین $A-B$ و $B-A$ است؟

یک دانش‌آموز: برعکس هم هستند؟! معلم: نه! اشتباه است.

دانش‌آموز دیگر: متمم هم هستند؟ معلم: باز هم اشتباه است!

یک نفر دیگر: اشتراکشان تهی است! معلم: چرا؟

همان نفر: سکوت! (او دلیل را نمی‌دانست!)

معلم: از A قسمت مشترک را برداشته‌ایم، از B نیز همین‌طور. پس اشتراکی بین آن‌ها نمی‌ماند. بنابراین اشتراکشان تهی است.

معلم از دانش‌آموزان خواست این جمله را دائم با خود تکرار کنند که «ویروس اشتراک،

فعالیت هدف‌دار بستر معنادار

دومفهوم کلیدی ریاضی دوره ابتدایی

مترجم: محمد حسام قاسمی

کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

کلیدواژه‌ها: کمتر موفق (ضعیف)، بازی به‌عنوان یک بستر برای یادگیری ریاضی، حل مسئله، استفاده و به‌کارگیری ریاضی، خانه به‌عنوان بستری برای سواد عددی، بستر معنی‌دار، فعالیت هدف‌دار

معرفی مفهوم

منظور از «فعالیت‌های هدف‌دار»^۱ در ریاضیات دوره ابتدایی، آن دسته از فعالیت‌هایی است که از نگاه معلم و دانش‌آموز دارای هدف باشد و دانش‌آموز هدف‌مند بودن آن را به‌خوبی حس کند. این فعالیت‌ها باید برای به‌تحرك واداشتن دانش‌آموزان و درگیر کردن آن‌ها با خود به اندازه کافی غنی باشند و به‌گونه‌ای طراحی شوند که تعهد و التزام لازم را در دانش‌آموزان، برای انجام و تکمیل آن‌ها، به‌وجود آورند.

بحث و توضیح

معلمان دوره ابتدایی، از انتخاب یا اجرای یک فعالیت در کلاس ریاضی خود، اهداف خاصی چون توسعه یادگیری، تقویت یادگیری، سنجش یادگیری و رشد و توسعه انواع مختلف تفکر در ریاضی را دنبال می‌کنند. آن‌ها باید این اهداف را با دانش‌آموزان نیز در میان گذارند تا آن‌ها نیز بدانند که واقعاً با چه منظور و هدفی از آن‌ها خواسته شده است که فعالیت‌ها را انجام دهند.

روشن بودن هدف در انجام یک فعالیت می‌تواند، در دستیابی به آن هدف، هم یاری‌گر دانش‌آموزان و هم تسهیل‌کننده کار معلم باشد. برخی از معلمان در

هنگام طراحی یک فعالیت یا یک تجربه ریاضی برای دانش‌آموزانشان، همه جوانب آن را بررسی می‌کنند تا مطمئن شوند که از دیدگاه دانش‌آموزان این فعالیت بی‌ارزش نیست و هدفمندی آن را درک می‌کنند.

بیش از یک دهه پیش آینلی و پرات^۲ (۲۰۰۲) بیان کردند که نگاهی نو به رویکرد ساخت‌وساز‌گرایی در حال شکل‌گیری است (برای مثال، هارل و پیپرت^۳، ۱۹۹۱) و برخی از تحقیقات نیز در جست‌وجوی نظامی معتبر در یادگیری ریاضیات هستند (برای مثال، نانز و همکاران، ۱۹۹۳؛ شلیمن^۴، ۱۹۹۵) و در همه این تحقیقات، اجزای حیاتی در تدریس ریاضی، مثل چالش و ارتباط، به هدفمند بودن فعالیت‌های یادگیرندگان وابسته شده است. برخی از جمله‌های مهم این محققان عبارتند از «هدفمندی برای یادگیرنده در محیط کلاس درس را از اجزای کلیدی طراحی کارهای آموزشی می‌دانیم» و «آکار هدف‌دار عبارت است از آنچه که برای یادگیرنده یک خروجی معنی‌دار داشته باشد، چه آن خروجی یک محصول واقعی باشد چه محصولی مجازی، یا راه‌حلی برای یک مسئله جذاب» (آینلی و پرات، ۲۰۰۲: ۲۰).

لیو و ونگر^۵ (۱۹۹۱)، تفاوت‌های یادگیری معمولی در کلاس و «یادگیری در موقعیت» را مورد بررسی قرار

داده‌اند. منظور آن‌ها از «یادگیری در موقعیت» این است که به جای آنکه در محیط کلاس درس به صورت خیالی و مجازی در مورد یک واقعیت تدریس شود، یادگیری دقیقاً در فضای همان موقعیت و به صورت واقعی و در حین لمس آن موقعیت اتفاق بیفتد. لیو و ونگر در تحقیقات خود، پنج موقعیت یا شغل مختلف از جمله مامایی، خیاطی و قصابی را به منظور تحلیل این نوع یادگیری انتخاب کردند. آن‌ها مشاهده کردند که در همه موقعیت‌های مورد مطالعه، یادگیرندگان به تدریج دانش و مهارت کسب کرده و از یک مبتدی و نوآموز به یک خبره در آن کار تبدیل می‌شوند. مطالعه آن‌ها بیشتر بر روی ریاضیات روزمره‌ای متمرکز بود که در این مشاغل مورد استفاده قرار می‌گرفت. آن‌ها متوجه شدند که نوآموزان، برخی از محاسبات و مفاهیم ریاضی را که قبلاً در کلاس درس به سختی می‌توانستند بفهمند، اکنون به راحتی می‌فهمند. تفاوت اصلی یادگیری در کلاس و یادگیری در موقعیت (در این مورد کارآموزی) آن است که برخلاف یادگیری معمولی در کلاس، در یادگیری موقعیتی، محصول خروجی دقیقاً همان ریاضیاتی است که مردم در زندگی واقعی خود با آن سروکار دارند و آن را به کار می‌گیرند. یادگیری در موقعیت به این دلیل حائز اهمیت است که هدف‌دار است و در حین آن، یک هدف مشخص و واقعی برای یادگیری وجود دارد. علاوه بر آن در این نوع یادگیری، فرصت‌هایی برای بروز اشتباه و تصحیح آن به وجود می‌آید که کمتر در بستر کلاس درس شاهد آن هستیم.

شاید برای بسیاری از دانش‌آموزان دبستانی، تنها خوش‌رویی، مهربانی و تدریس جذاب معلمشان، هدف و عاملی کافی برای تحرک و پویایی و انجام بهتر فعالیت‌های ریاضی باشد. برای برخی دیگر از دانش‌آموزان، کنجکاوی و تمایل طبیعی و ذاتی آن‌ها برای فهمیدن و کشف الگوها و روابط، یک هدف و انگیزه برای تحرک آن‌ها در ریاضیات است و این موضوعی است که در تحقیق‌ها، مسائل و معماهای جذاب ریاضی نمود بیشتری دارد. با وجود این، قاطبه دانش‌آموزان، وقتی با کار یا فعالیتی در ریاضی درگیرند، به دنبال یافتن نوعی ارتباط بین آن فعالیت و زندگی‌شان هستند، یعنی به طور خلاصه، به دنبال هدف از انجام آن فعالیت هستند.

هایلاک (۱۹۹۱: ۸۸-۱۸۴) به چهار نوع ارتباط ریاضی اشاره می‌کند که می‌توانند دلایلی برای هدفمندی فعالیت‌های ریاضی باشند و معلمان ریاضی می‌توانند فعالیت‌های خود را به استناد یکی از این ارتباطات طراحی و اجرا کنند. اولین نوع ارتباط، که اتفاقاً در هدفمندی‌سازی و ایجاد انگیزه برای دانش‌آموزان دارای کمترین تأثیر است، «ارتباط بلندمدت»^۷ نام دارد. در این نوع ارتباط، معلم یک

فعالیت را فقط به دلیل پیش‌نیاز بودن آن و نه برای نیازهای کوتاه‌مدت، بلکه برای نیازهایی که در آینده و در دوره‌ای بلندمدت مانند دوره متوسطه و یا محیط کار احساس می‌شود طراحی و اجرا می‌کند. نوع دیگر ارتباط «ارتباط نیابتی»^۸ نام دارد که در آن، معلم، فعالیت‌ها و مسائلی از زندگی واقعی را در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهد؛ اما با این ویژگی که این مسائل در حقیقت مسئله دیگران هستند تا مسئله دانش‌آموز؛ به این صورت که گرچه این مسائل به موقعیت‌ها و مشاغلی واقعی پرداخته‌اند اما دانش‌آموز با آن موقعیت‌ها احساس بیگانگی می‌کند و باید به نیابت از افراد عنوان شده درون مسائل، آن‌ها را حل کند که این خود تا حدودی می‌تواند باعث کاهش انگیزه و هدفمندی این نوع فعالیت برای دانش‌آموزان شود. هدف سوم از طراحی یک فعالیت، «ارتباط مصنوعی»^۹ است. در این نوع ارتباط، گاهی معلم به ناچار احتیاج دارد که به منظور جلب توجه و ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان نسبت به یک موضوع ریاضی، فوراً از طرف خود یک ارتباط یا هدف ساختگی مصنوعی طرح و عنوان کند. مانند اینکه مجبور باشد دائماً از زمینه‌هایی که بچه‌ها به آن‌ها علاقه‌مندند مثل بازی فوتبال یا جدول برنامه‌های تلویزیون و... که ممکن است حتی همخوانی چندانی با آن موضوع ریاضی نداشته باشد، فعالیتی طرح کند تا شاید به‌طور موقت بتواند در آن‌ها انگیزه ایجاد کرده و آن موضوع را هدف‌دار جلوه دهد. البته مصنوعی بودن این مثال‌ها باعث می‌شود که آن‌ها مسئله‌های اصیلی نباشند و لذا کم‌کم برخی از بچه‌ها دلسرد می‌شوند. به گفته آینلی و همکارانش (۲۰۰۵)، شواهد زیادی در دست است که نشان می‌دهد برخی از فعالیت‌های طراحی شده بر بستر دنیای واقعی در رسیدن به مقاصدشان با شکست روبه‌رو می‌شوند و از دید دانش‌آموز از هدفمندی کمی برخوردارند. هایلاک، چهارمین نوع ارتباط را «ارتباط بی‌واسطه و اصیل»^{۱۰} می‌نامد که از مهم‌ترین ابزارها برای به حداکثر رساندن هدفمندی فعالیت‌های ریاضی به‌شمار می‌رود، به‌خصوص در مورد دانش‌آموزان ضعیف و کمتر موفق. در این نوع رابطه، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که به کمک ریاضی، به نتایجی دست یابند که خود می‌توانند همان لحظه آن را دیده و لمس کنند و از نزدیک با محصولات آن فعالیت ارتباط برقرار سازند. او از این نوع ارتباط، با عنوان «استفاده از ریاضیات برای اتفاق افتادن چیزها»^{۱۱} نیز نام می‌برد و به ذکر مثال‌هایی می‌پردازد که در آن‌ها، دانش‌آموزان در هنگام مواجهه با فعالیت‌هایی از این نوع (ارتباط بی‌واسطه و اصیل)، دارای بهترین عملکرد بوده‌اند.

آینلی و پرات (۲۰۰۲: ۳-۲۲) به پژوهش بر روی تفاوت عملکرد دانش‌آموزان در فعالیت‌های مبتنی بر رایانه

(بسته‌های کمک‌آموزشی چندرسانه‌ای) با فعالیت‌های معمول کلاسی که از جانب معلمان طراحی و اجرا می‌شوند پرداخته و به این نتیجه رسیده‌اند که دانش‌آموزان در فعالیت‌های رایانه‌ای عملکرد بهتری دارند. آن‌ها سه دلیل را برای این نتیجه عنوان می‌کنند. اول اینکه این نوع فعالیت‌ها [مبتنی بر رایانه] دارای خروجی مشخص و آشکار برای دانش‌آموزان است. دوم اینکه می‌توان به کمک آن‌ها، برای دیگر بچه‌ها نیز چیزهایی ساخت، و دلیل سوم نیز آن است که این نوع فعالیت‌ها، فرصت‌هایی برای تصمیم‌گیری معنی‌دار در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهند.

هایلاک (۱۹۹۱: ۷۰-۶۷) در هنگام کار بر روی موضوع «فعالیت‌های هدف‌دار در بسته‌های معنی‌دار»^{۱۲} به‌عنوان عاملی مهم در به‌تحریک واداشتن دانش‌آموزان کمتر موفق، شش دسته کار هدفمند را که می‌تواند دانش‌آموزان را در هنگام استفاده از ریاضی درگیر خود سازد و آن‌ها را با خود همراه کند، پیشنهاد می‌کند، این شش دسته عبارت‌اند از:

- حل یک مسئله واقعی^{۱۳}
- برنامه‌ریزی یک رویداد^{۱۴}
- طراحی کردن و ساختن^{۱۵}
- شبیه‌سازی رایانه‌ای^{۱۶}
- نقش - بازی^{۱۷}
- بازی‌ها و مسابقات^{۱۸}

البته دسته‌های فوق برای هدفمند ساختن و پویاسازی فعالیت‌های دانش‌آموزان در همه پایه‌ها به‌صورت یکسان مناسب نیستند. مثلاً دانش‌آموزان بزرگ‌تر ترسی از انجام نقش - بازی‌ها ندارند در حالی که دانش‌آموزان کوچک‌تر ممکن است به اندازه کافی با مهارت‌های اجتماعی در اجرای بازی‌ها در قالب گروه‌های کوچک آشنایی نداشته باشند و لذا این بازی‌ها آن‌طور که باید مفید واقع نشود. اما همه دانش‌آموزان دوره ابتدایی، صرف‌نظر از اینکه در چه پایه‌ای در حال تحصیل هستند، می‌توانند از طریق سه دسته اول از فعالیت‌های عنوان شده برانگیخته شوند. هایلاک (۱۹۹۱: ۹-۱۸۸) همچنین توصیه‌هایی به معلمان دارد که باید معلمان، در حین طراحی یک فعالیت، به آن‌ها توجه کنند تا آن فعالیت دارای بیشترین سطح هدفمندی باشد و بتواند بیشترین سهم را در پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان داشته باشد. نکات مورد توجه هایلاک عبارتند از:

- موقعیت‌هایی را که در آن‌ها دانش‌آموزان می‌توانند به‌طور واقعی برای حل مسئله خودشان فعالیت کنند شناسایی کنید؛
- به آن‌ها یاد بدهید مسئولیت طراحی و انجام یک کار را خودشان به عهده بگیرند؛

● به آن‌ها کمک کنید تا بتوانند، با دید باز، مراحل استفاده از مهارت‌های ریاضی را که در اختیار دارند برای رسیدن به هدف موردنظر پیش کنند؛

● فرصت‌هایی را تحت قالب فعالیت‌های بی‌واسطه و اصیل برای کسب مهارت‌های جدید توسط خود دانش‌آموزان، برایشان فراهم کنید؛

● تضمین کنید که در پایان یک فعالیت ریاضی حتماً چیزی عینی برای آن‌ها اتفاق می‌افتد؛

● ضمن محصور قرار دادن ارتباط بی‌واسطه و اصیل بین ریاضی و هدف و سود حاصل از آن در یک فعالیت، با دانش‌آموزان به‌طور صریح در مورد ریاضیاتی که برای رسیدن به محصول استفاده شده است بحث کنید.

مثال‌های عملی

در ادامه برای سه دسته اول از فعالیت‌هایی که هایلاک به آن‌ها اشاره کرد نمونه‌ای عملی ارائه می‌کنیم. این مثال‌ها دارای سطح بالایی از هدفمندی هستند و موجب به‌وجود آمدن حس تعهد و مسئولیت در دانش‌آموزان می‌شوند. همچنین این فعالیت‌ها می‌توانند دامنه وسیعی از دانش و مهارت‌های ریاضی را در بر گیرند.

حل یک مسئله واقعی

می‌توان در یک کلاس معمولی از گروه سنی ۱۰ و ۱۱ ساله، درباره چگونگی تغییر چیدمان وسایل کلاس یک مسئله واقعی طراحی کرد. مثلاً می‌توانیم از دانش‌آموزان بخواهیم در مورد اینکه چگونه می‌توان به بهترین شکل وسایل محیط کلاس را تغییر داد تصمیم‌گیری کنند تا شرایط لازم برای انجام بیشتر فعالیت‌های گوناگونی که معلم قصد دارد در کلاس انجام دهد مهیا شود. این پروژه، دانش‌آموزان را با کارهایی چون، استفاده از چهار عمل اصلی در محاسبات، استفاده از ماشین‌حساب‌ها، اندازه‌گیری طول، طراحی در مقیاس‌های متفاوت، مفهوم محیط و مساحت و برخی مفاهیم فضایی، درصدها، عامل‌ها، گردآوری داده‌ها و سازماندهی، نمایش هندسی و تفسیر آن‌ها درگیر می‌کند.

طراحی یک رویداد

می‌توان از تعدادی دانش‌آموز ضعیف و کمتر موفق ۸ تا ۹ ساله خواست که مسئولیت طراحی، برنامه‌ریزی و اجرای مسابقات فوتبال مدرسه و همه مسائل مربوط به آن را قبول کنند. آن‌ها باید به کمک معلم خود سعی کنند همه جزئیات این رویداد را در مدرسه شناسایی و آن‌ها را در طراحی برنامه مسابقات لحاظ کنند. این پروژه نیز مباحثی مانند استفاده و به‌کارگیری عمل جمع، تفریق و ضرب،

تفاوت اصلی یادگیری در کلاس و یادگیری در موقعیت (در این مورد کارآموزی) آن است که برخلاف یادگیری معمولی در کلاس، در یادگیری موقعیتی، محصول خروجی دقیقاً همان ریاضیاتی است که مردم در زندگی واقعی خود با آن سروکار دارند و آن را به کار می‌گیرند. یادگیری در موقعیت به این دلیل حائز اهمیت است که هدف‌دار است و در حین آن، یک هدف مشخص و واقعی برای یادگیری وجود دارد

برنامه‌ریزی زمانی، جدول‌بندی، مهارت‌های فضایی، مرتب کردن رویدادها و ثبت آن‌ها، خرید، کار با نسبت‌های ساده، اندازه‌گیری حجم مایعات، محاسبات مالی و کنترل بودجه را شامل می‌شود.

طراحی کردن و ساختن

قرار است به دانش‌آموزان ۹ تا ۱۰ ساله مهارت اندازه‌گیری طول با واحد سانتی‌متر و میلی‌متر را آموزش دهیم. موضوع فعالیت موردنظر، طراحی و ساخت یک جعبه برای بسته‌بندی ۳۰ عدد ماشین حساب یکسان است. قبل از شروع کار، دانش‌آموزان متعهد می‌شوند که بهترین جعبه را برای این کار به معلم تحویل دهند. آن‌ها در حین انجام این فعالیت با برخی از مفاهیم مهم ریاضی سروکار دارند که مهم‌تر از این مفاهیم، تعهد آن‌ها به ارائه کار به‌نحو احسن و هدف‌دار بودن این فعالیت است. این پروژه شامل مفاهیمی چون: اندازه‌گیری دقیق در حد سانتی‌متر و میلی‌متر، استفاده از مکعب‌ها و مفهوم زاویه قائمه، برخی مفاهیم فضایی خاص، محیط، مساحت، حجم، تخمین زدن و تأثیر خطای اندازه‌گیری بر محصول نهایی را در بر می‌گیرد.

مطالعه بیشتر

تاکر (۲۰۰۵) سعی در معرفی و ارائه مثال‌هایی از نقش-بازی‌ها دارد که برای کودکان کم‌سن و سال بسیار مناسب است و فرصت‌هایی را نیز برای یادگیری و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی به شکلی هدف‌دار برای آن‌ها ایجاد می‌کند. همچنین نوشته‌ای تحت عنوان «فعالیت‌های هدف‌دار در بسترهای معنی‌دار» از هایلک (۱۹۹۱)، از منابع اصلی به‌کار گرفته شده در این بخش است. لیو (۱۹۸۸)، در راستای «یادگیری در موقعیت»، ریاضی فراگرفته شده در مدرسه را با ریاضی فراگرفته شده در محل کار مقایسه می‌کند. اتکینسون^۱ (۱۹۹۲) مجموعه کامل و مفیدی از فعالیت‌های هدف‌دار برای دانش‌آموزان پایه‌های پایین‌تر دوره ابتدایی را جمع‌آوری کرده است.

بستر معنادار معرفی مفهوم

بستر معنادار^۲ به آن دسته از تجربه‌های روزمره دانش‌آموزان گفته می‌شود که در آن‌ها زمینه‌هایی از ریاضیات وجود دارد و یا می‌توان ریاضی را با آن‌ها عجین ساخت. چنین تجاربی تشکیل یک بستر یا محتوای معنادار برای ریاضی می‌دهند که به توسعه و کاربرد ریاضی دانش‌آموزان در کارهای چالش‌برانگیز کمک می‌کند. بستر

معنادار هم برای معناسازی از مفاهیم ریاضی و هم برای درگیر کردن فعالانه دانش‌آموزان با موقعیت‌های واقعی از ریاضی بسیار مفید است. معیارهای اصلی که باید رعایت شوند تا یک بستر، برای دانش‌آموزان، بستری معنادار باشد آن است که دانش‌آموزان توجه باشند که چنین کاری واقعاً برای چیست. دانش‌آموزان وقتی با یک مسئله روبه‌رو می‌شوند باید بتوانند به راحتی راه‌حل آن را شناسایی کنند؛ بدانند که چه هنگام با یک چالش روبه‌رو می‌شوند و قدر معیارهای مهمی را که با بستر معنی‌دار در ارتباط‌اند بدانند.

توضیح و بحث

معلم‌ان برای آنکه بتوانند به دانش‌آموزان خود در یادگیری معنادار ریاضی کمک کنند، باید به‌جای آنکه به دنبال گسترش یادگیری طوطی‌وار در قالب روش‌ها و قاعده‌های مرسوم باشند، بیشتر به دنبال درک تجربه‌های مختلف دانش‌آموزان در اثر ارتباط با آن‌ها باشند تا بتوانند فرصت‌های بیشتری را برای تعبیه ریاضی در بسترهای معنادار فراهم کنند.

بسترهای معنادار به این دلیل که باعث ارتقا و افزایش یادگیری معنادار می‌شوند، در توسعه آموزش و کاربرد کردن دانش و مهارت‌های ریاضی مهم هستند. در این زمینه، همان ساختاری که در برنامه‌های تدریس مبتنی بر استراتژی ملی سواد عددی (DFEE, 1999b) مدنظر قرار می‌گرفت، امروزه در چارچوب ملی بازبینی شده (DFES, 2006a) نیز تکرار و تداوم یافته است. برای مثال، این سیاست که باید مسائل و مهارت‌های عددی انتزاعی متناسب با «زندگی واقعی»^۱ توسعه یابند از جمله این سیاست‌هاست. این چنین سیاست‌هایی موجب شده‌اند که ناخواسته ایده‌هایی در اذهان معلمان مدارس ابتدایی تقویت شود؛ مثلاً این ایده که باید همه ریاضی را در ارتباط با زندگی واقعی آموزش داد و این بهترین راه برای یادگیری مؤثرتر ریاضی است. اما متأسفانه این ایده و سیاست به‌تنهایی پاسخ‌گوی رویکرد مبتنی بر بسترهای معنادار نبوده و کافی نیست. در ایده مبتنی بر «زندگی واقعی»، ابتدا مهارت‌های ریاضی، خارج از بستر واقعی خود، آموزش داده می‌شوند و سپس کاربردهای آن‌ها در موقعیت‌های زندگی واقعی و مسائل عملی به دانش‌آموز آموزش داده می‌شود که این متناسب با خواسته و انتظارات ما در این بخش از بستر معنادار نیست؛ زیرا لزوماً یادگیری یک فرایند جهت‌دار از تجزیه به‌سوی عینیت نیست، بلکه به‌طور طبیعی دارای فرایندی عکس این است. اگر مفاهیم و مهارت‌های ریاضی در یک بستر معنادار معرفی و آموزش داده شوند، احتمال آنکه دانش‌آموزان بتوانند معناسازی

بهتری از آن مفاهیم و مهارت‌ها داشته باشند افزایش می‌یابد. وایت‌برید^{۳۳} (۱۹۹۵: ۳۹) پیشنهاد می‌کند که به‌منظور کمک به دانش‌آموزان کم‌سن و سال در گذار از ریاضیات غیررسمی موجود در بستر خانه به سمت ریاضیات رسمی کلاس درس، بهتر است معلمان در هنگام آموزش مفاهیم و مهارت‌ها، «از مسائل واقعی آغاز کنند تا بچه‌ها با فرایندهای ریاضی نهفته در بسترهای معنادار متنوع آشنا شوند».

هایلاک (۱۹۹۱: ۷۰-۶۵) شرح می‌دهد که چگونه دانش‌آموزان کمترموفق می‌توانند از ریاضیاتی که در راستای «فعالیت‌های هدفدار در بسترهای معنادار»^{۳۳} تدریس می‌شوند بهره ببرند. او نمونه‌هایی را ارائه می‌کند که در آن‌ها به‌طوری غیرمنتظره کارایی و تعهد این‌گونه دانش‌آموزان، در هنگام کار بر روی تکالیف هدفدار و معنادار افزایش یافته است. او به یک دانش‌آموز ۹ ساله اشاره می‌کند که بعد از حل یک مسئله چالش‌برانگیز، درباره تعداد بطری‌های آب مورد نیاز یک تورنومنت فوتبال، به یک دیدگاه مهم دست پیدا می‌کند و آن اینکه «پس می‌توانیم از جمع کردن برای حل این مسئله استفاده کنیم، من همیشه با خودم فکر می‌کردم که چرا باید جمع کردن را یاد بگیریم؟! حال فهمیدم برای استفاده در این جور جاها خوب است». محققان دیگری همچون دونالدسون (۱۹۸۶)، هیوگس (۱۹۸۶) و نانس و همکارانش (۱۹۹۳) نیز گزارش‌ها و نمونه‌های مشابهی در مورد درک و فهم بهتر دانش‌آموزان در رده سنی دوره ابتدایی، وقتی که مفاهیم در قالب یک بستر معنادار تدریس می‌شوند، ارائه می‌کنند. بسیاری از پاسخ‌ها و ایده‌های دانش‌آموزان پس از استفاده از این رویکرد، جالب و غافلگیرکننده بود و نشان از افزایش درک آن‌ها از مفاهیم و مهارت‌های ریاضی داشت.

یکی از بسترهای معنادار بدیهی که ریاضیات را می‌توان در قالب آن گنجانده، زندگی روزمره دانش‌آموزان در مدرسه، کلاس درس و زمین‌های بازی مدرسه است. زندگی در مدرسه شامل جنبه‌هایی از سازماندهی امور مدرسه، کلاس، جدول‌های زمانی، معلمان و دانش‌آموزان است. همچنین بستر مدرسه می‌تواند شامل امور طبیعی کلاس درس، منابع، مطالعه کتاب‌ها، گروه‌بندی دانش‌آموزان، فهرست اسامی، حضور و غیاب، چیدمان اشیاء کلاس، جمع‌آوری پول، سازماندهی رویدادها و فعالیت‌ها و غیره باشد. در زمین بازی نیز دانش‌آموزان درگیر با فضا، ابزار و امکانات مختلف هستند که این‌ها می‌توانند بسترهایی بالقوه برای افزایش معناداری در یاددهی و به‌کارگیری ریاضیات باشند. در قالب این بسترهاست که دانش‌آموزان یاد می‌گیرند

چگونه شمارش کنند، چه چیزهایی مهم‌تر است، چه چیزهایی مسئله است و چه چیزی راه‌حل. البته بسترهای معنادار به این موارد محدود نمی‌شوند. دیگر بسترهای معناداری که می‌توان از آن‌ها بهره برد عبارتند از زندگی روزمره دانش‌آموزان در خانه، برنامه‌های روزهای تعطیل و پایان هفته، مسافرت، ورزش، پس‌انداز پول، آشپزی، خرید، رایانه و سرگرمی (مانند سینما، تلویزیون، DVDها و...). معلمان می‌توانند از این موارد به‌عنوان بستری برای تعبیه ریاضی در آن‌ها استفاده کنند تا دانش‌آموزان با احتمال بیشتری ریاضی را به‌صورت معنادار فرا گیرند.

بخشی از زندگی کودکان را بازی‌ها تشکیل می‌دهند و این موضوع دارای اهمیت بسیاری است. کودکان زمان زیادی را صرف لذت بردن از بازی‌های تخیلی، بازی‌های ساخت یافته و بازی‌های بدون ساخت می‌کنند که هر کدام از این بازی‌ها می‌تواند فراهم‌کننده یک بستر معنادار برای یادگیری و به‌کارگیری ریاضیات باشد. حتی بازی‌ها و معماهایی که در آن‌ها به‌طور محض به ریاضی پرداخته شده است نیز می‌توانند دارای سطحی از معناداری باشند، زیرا همگی بازی هستند و بچه‌ها به‌خوبی می‌دانند که بازی‌ها درباره چه چیزی هستند و آن‌ها باید چه کار کنند تا در بازی برنده باشند.

مثال‌های عملی

در ادامه، چهار مثال عملی درباره استفاده مؤثر از بسترهای معنادار در تدریس ریاضی آورده شده است.

گروه‌بندی دانش‌آموزان در یک درس PE^{۳۴}

قصد داریم به یک کلاس ۲۸ نفره در رده سنی ۹ تا ۱۰ ساله، محاسبات مربوط به یافتن باقی‌مانده تقسیم‌ها و گرد کردن پاسخ به بالا یا پایین را آموزش دهیم. معلم ایده‌های ریاضی خود را در بستر یک درس PE در سالن مدرسه به اجرا می‌گذارد. جایی که دانش‌آموزان در گروه‌های ۴ نفره، ۵ نفره، ۷ نفره و ۶ نفره برای فعالیت‌های مختلف قرار می‌گیرند. عبارت‌های مربوط به عملیات تقسیم دانش‌آموزان در گروه‌های مذکور را کتباً از دانش‌آموزان دریافت و پس از ثبت نتایج آن‌ها را برای بحث به کلاس درس ریاضی آورد.

شمارش کردن و ثبت کردن مجموعه‌هایی از

دانش‌آموزان

بچه‌های یک کلاس متشکل از کودکان ۴ تا ۵ ساله یاد می‌گیرند که چگونه اعداد از ۱ تا ۳۰ را بشمارند، ثبت کنند و بخوانند. این آموزش را می‌توان در قالب یک بستر

معلمان برای آنکه بتوانند به دانش‌آموزان خود در یادگیری معنادار ریاضی کمک کنند، باید به جای آنکه به دنبال گسترش یادگیری طوطی‌وار در قالب روش‌ها و قاعده‌های مرسوم باشند، بیشتر به دنبال درک تجربه‌های مختلف دانش‌آموزان در اثر ارتباط با آن‌ها باشند تا بتوانند فرصت‌های بیشتری را برای تعبیه ریاضی در بسترهای معنادار فراهم کنند

انجام این کار، حوزه وسیعی از دانش و مهارت ریاضی را به صورت مسائل واقعی و مرتبط در بستری معنادار به کار می‌برند.

مطالعه بیشتر

اتکینسون (۱۹۹۲) مثال‌های متنوعی از موقعیت‌هایی که معلمان می‌توانند ریاضی را برای دانش‌آموزان خود در بسترهایی معنادار گنجانده و آموزش دهند ارائه می‌کند. مثلاً بازی‌ها، جشن تولدها، آشپزی، خرید کردن، برنامه‌ریزی یک پیک‌نیک، ورزش و ساخت یک فضای سبز نمونه‌هایی از این موقعیت‌ها هستند. همچنین بورتون (۱۹۹۴) منبعی جالب و مرتبط با این موضوع است. نیکول و کرسپو^{۲۸} (۲۰۰۵) این دیدگاه را که بسترهای معنادار در یادگیری ریاضی باید از موقعیت‌های واقعی سرچشمه بگیرند به چالش کشیده و معتقدند که «آموزشگران لازم است به کارهای معنادار اما خیالی نیز توجه داشته باشند». آن‌ها پیشنهاد می‌کنند که معلمان از مسئله‌های تخیلی و درگیرکننده که لزوماً واقعی نیستند نیز به‌عنوان بسترهای معنی‌دار استقبال کنند.

پی‌نوشت‌ها

1. Purposeful Activity
 2. Ainely and Pratt
 3. Harel and Papert
 4. Schliemann
 5. Lave and Wenger
 6. Situated learning
 7. Long term relevance
 8. Vicarious relevance
 9. Artificial relevance
 10. Immediate and genuine relevance
 11. Using mathematics to make things happen
 12. Purposeful activities in meaningful contexts
 13. Solving a real problem
 14. Planning an event
 15. Design and construction
 16. Computer simulation
 17. Role play
 18. Games and competitions
 19. Atkinson
 20. Meaningful context
 21. Real life
 22. Whitebread
 23. Purposeful activities meaningful contexts
 24. Physical Education
- نوعی از آموزش که با فعالیت‌های فیزیکی، بازی، تحرک و موسیقی همراه است.
25. Mathematics Trail
 26. University of Edinburgh
 27. Royal Mile
 28. Nicol and Crespo

ساده اما معنادار آموزش داد. مثلاً هر روز یکی از بچه‌ها مأمور شمارش و حضور و غیاب شود؛ یعنی تعداد بچه‌ها را بشمارد و تعداد غایبین را مشخص کند. همچنین می‌تواند تعداد بچه‌هایی که ناهار خود را از خانه به مدرسه می‌آورند (با بلند کردن دستشان) یا تعداد بچه‌هایی که از ناهار مدرسه استفاده می‌کنند (با بلند کردن دستشان) بشمارد. هر بچه، در پایان کار خود، نتایج به‌دست آمده را به کلاس گزارش می‌دهد و مربی اعداد را بر روی یک نمودار ثبت می‌کند.

تریل ریاضی

یک تریل ریاضی^{۲۵} حول حیات مدرسه یا یک قطعه زمین محلی می‌تواند فرصت‌هایی را برای انجام فعالیت‌های ریاضی در بستری معنادار فراهم کند. گروه‌هایی از دانش‌آموزان تریل را دنبال می‌کنند، دستورالعمل‌ها و پرسش‌ها را از روی دفترچه راهنمای تریل می‌خوانند. پرسش‌ها می‌تواند در مورد کارهای عددی همچون شمارش کردن، تخمین زدن و محاسبه کردن بر روی تعداد آجرها، پنجره‌ها، تجهیزات موجود در زمین بازی، درختان و غیره باشد. همچنین کار اندازه‌گیری نیز می‌تواند به صورت تخمین فاصله‌ها، مساحت‌ها و غیره باشد. یافتن اشکال دوبعدی و سه‌بعدی در اطراف زمین بازی، ساختمان‌های مجاور، پنجره‌ها و نمای ساختمان‌ها نیز می‌تواند گزینه‌هایی برای پرسش‌های تریل‌های ریاضی باشد. به‌علاوه، این دانش‌آموزان می‌توانند برای کامل کردن هر کدام از فعالیت‌ها، زمان مشخصی را تعیین کرده و در هنگام انجام تریل این زمان را ثبت کنند. فعالیت‌ها نیز می‌تواند شامل حل مسئله یا گردآوری داده‌ها برای استفاده در کلاس باشد. برخی از مؤسسات در زمینه طراحی و عرضه تریل‌های ریاضی فعال‌اند و آن‌ها را برای استفاده عموم منتشر می‌کنند. برای مثال می‌توان به تریل‌های ریاضی دانشگاه ادینبورگ^{۲۶} به همراه رویال مایل^{۲۷} (موجود در وبسایت www.maths.ed.ac.uk/pg/trail.pdf) اشاره کرد.

برنامه‌ریزی برای یک اردوی کلاسی

مسئولیت طراحی و برنامه‌ریزی یک اردوی کلاسی برای بازدید از قلعه تاریخی شهر به دانش‌آموزان ۱۰ تا ۱۱ ساله سپرده می‌شود. این اردو مربوط به پروژه درس تاریخ آن‌هاست. بچه‌ها میان خود گروه‌هایی را برای طراحی و انجام وظایفی مشخص از اردو تعیین می‌کنند. مثلاً هر گروه می‌تواند یکی از کارهای تنظیم جدول زمانی، برنامه‌های جانبی و تفریحی، مدیریت هزینه‌ها، مدیریت ایاب و ذهاب و حضور و غیاب را به عهده بگیرد. آن‌ها با



مقدمه‌ای بر «چرایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان» به‌عنوان واحد درسی دانش‌جو معلمان و تحصیلات تکمیلی آموزش ریاضی

صمد شعبانی‌فر
دکترای آموزش ریاضی

دانش‌آموزان چرا در یادگیری ریاضی مشکل دارند؟ چرا در یادگیری ریاضی دچار بدفهمی می‌شوند؟ چرا به‌صورت سیستماتیک خطا می‌کنند و به آن اصرار می‌ورزند؟ چرا معلمان هر کاری انجام می‌دهند این نوع خطاهای دانش‌آموزان از بین نمی‌رود؟ اگر از بین بردن این خطاها امکان‌پذیر است، چرا ما عاجز از این کاریم و موفق نمی‌شویم؟ مقصر اصلی کیست؟ و...

این سؤال‌ها و سؤال‌های مشابه آن‌ها را آموزش‌گران حرفه‌ای ریاضی، یعنی دبیران و آموزگاران ریاضی، در هر کارگاه آموزشی و در هر جمع خصوصی خود از خود و دیگران می‌پرسند و ذهنشان همواره درگیر آن‌هاست. این سؤالات علاقه بسیاری از محققان و متخصصان آموزش ریاضی کشورهای مختلف را به خود جلب کرده و در این راستا نه تنها تحقیقات زیادی انجام شده بلکه برنامه‌ریزان، با استناد به همین تحقیقات باعث تغییر در برنامه درسی دانش‌جو معلمان ریاضی شده‌اند.

ناگفته نماند که در کشور ما نیز، از زمانی که تحصیلات تکمیلی رشته آموزش ریاضی در معدودی از دانشگاه‌ها دایر شد، این موضوع عنوان پایان‌نامه‌های دانشجویی قرار گرفت و در بعضی از مباحث ریاضی نیز مورد بررسی واقع شد. اما هنوز سؤال اساسی این است که آیا این اقدامات در این راستا کافی بوده است؟ آیا این اقدامات در جهت آگاهی دبیران ریاضی و آموزگاران دوره ابتدایی، که ذی‌نفعان اصلی این مسئله می‌باشند، مؤثر بوده است؟ آیا می‌توان بدون مسلح کردن کسی او را به مبارزه فرستاد؟ آیا این انتظار بی‌جایی نیست؟ آیا زمان آن نرسیده است که حداقل در راستای تحول بنیادین در آموزش و پرورش در برنامه درسی دانش‌جو معلمان ریاضی و تحصیلات تکمیلی آموزش ریاضی تجدید نظر شود و درسی مبنی بر این موضوع، یعنی «چرایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان» به واحدهای درسی اضافه گردد؟ آیا کمبود منابع و همین مشکل وظیفه ما متخصصان آموزش ریاضی را دو چندان نمی‌کند که با یکدیگر همفکری کرده و مبادرت به تهیه کتاب و منبعی در این مورد کنیم و آن را در اختیار جامعه آموزشی قرار دهیم تا حداقل بتوان از خسارات نبود چنین موضوع درسی در برنامه درسی دانش‌جو معلمان کاست؟ به امید آنکه این موضوع مورد توجه مسئولان امر قرار گیرد.



صفر به توان صفر چیست؟

میشل هوپر، فردریک ریکی

مترجم: معصومه عرب پور

مدرس دانشگاه فرهنگیان؛ پردیس شهید باهنر کرمان

مقدمه

وقتی در کتاب‌های حسابان بیان می‌شود که 0^0 یک صورت مبهم است، معنایش این است که دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ وجود دارند، به گونه‌ای که $f(x)$ و $g(x)$ هر دو به سمت صفر میل می‌کنند و باید حد $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{g(x)}$ محاسبه شود. اما اگر 0^0 تنها یک عدد باشد چه می‌شود؟ در چنین حالتی، ما بحث می‌کنیم که مقدار آن، برخلاف آن‌چه که اغلب کتاب‌های درسی می‌گویند، کاملاً خوش - تعریف است. در حقیقت، $0^0 = 1$

کلیدواژه‌ها: صورت‌های مبهم، رفع ابهام

کتاب‌های جبر در عصر حاضر

یک کتاب درسی ریاضیات دبیرستانی را بردارید خواهید دید که در آن، صفر به توان صفر (0^0) به‌عنوان یک صورت مبهم بیان شده است. برای مثال، متن زیر از یک کتاب درسی ریاضی که در یکی از نواحی نیویورک تدریس می‌شود، آورده شده است [۶]:

قاعده تقسیم توان‌ها را با پایه‌های مساوی، یادآوری می‌کنیم:

$$x^a \div x^b = x^{(a-b)} \quad (x \neq 0)$$

اگر نیازی به این که $a > b$ نباشد، آن‌گاه a با b مساوی است. وقتی $a = b$:

$$x^a \div x^b = x^a \div x^a = x^{(a-a)} = x^0$$

اما

$$x^a \div x^a = 1$$

بنابراین، به‌منظور با معنی بودن x^0 باید تعریف زیر را بیان کنیم:

$$x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$$

از آنجا که تعریف $x^0 = 1$ براساس تقسیم بنا شده و تقسیم بر صفر ممکن نیست، باید فرض کنیم $x \neq 0$. در واقع عبارت صفر به توان صفر یکی از صورت‌های مبهم در ریاضی است و غیر ممکن است که یک مقدار را به یک عبارت مبهم نسبت داد.

صورت‌های مبهم

در کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، این مسئله معمولاً تحت عنوان «قاعده هویتال» مطرح می‌شود. فرض کنید دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داده شده‌اند، به طوری که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. وقتی بخواهیم حد تابع $[f(x)]^{g(x)}$ را در a به‌دست بیاوریم، می‌گوییم این یک صورت مبهم از نوع 0^0 است و حد می‌تواند مقادیر

گوناگونی از f و g را به خود بگیرد. در این حالت، این سؤال پیش می‌آید که: آیا می‌توان بین 0° به‌عنوان صورت مبهم و 0° به‌عنوان یک عدد فرق گذاشت؟

رفتار 0° چند صد سال است که مورد بحث بوده است. دونالد نوث [۷] اشاره می‌کند که یک ایتالیایی به نام گولیگلیمو لیبری در سال ۱۸۳۰ چندین مقاله درباره 0° و خواص آن منتشر کرد. با این حال، اویلر در کتاب «اصول جبر» خود [۴] در سال (۱۷۷۰)، که سال‌ها قبل از لیبری به چاپ رسیده بود، چنین نوشت:

چون در این سری، توان‌های هر جمله از ضرب جمله قبلی در a تولید می‌شود، که توان را، یک واحد افزایش می‌دهد، پس هرگاه جمله‌ای داده شود، می‌توان با تقسیم بر a ، جمله قبلی را به‌دست آورد. زیرا این کار، توان را یک واحد کاهش می‌دهد. این روند نشان می‌دهد که جمله قبل از a^1 باید $\frac{a}{a}$ یا همان ۱ باشد، و اگر به همین ترتیب، با توجه به توان‌ها، ادامه دهیم، فوراً نتیجه می‌گیریم که جمله‌ای که قبل از جمله اول است، a^0 است و به این خاصیت قابل توجه برسیم که a^0 همیشه برابر با ۱ است. با وجود این عدد a ممکن است مقادیر بزرگ یا کوچکی را به خود بگیرد؛ حتی زمانی که a هیچ باشد، می‌توان گفت که a^0 برابر با ۱ است.

مطالبی بیشتر در باره اویلر:

اویلر در سال ۱۷۴۸ در کتابی با عنوان «مقدمه‌ای بر آنالیز بی‌نهایت» [۵] می‌نویسد، « a^0 را یک تابع نمایی در نظر بگیرید که در آن، a عددی ثابت و z یک متغیر است». اگر $z=0$ ، آن‌گاه داریم $a^0=1$. اگر $a=0$ ، در مقدار a^z پرش بزرگی برمی‌داریم وقتی مقدار z مثبت است، $a^z=0$. اگر $z=0$ آن‌گاه داریم $a^0=1$.

اویلر لگاریتم y را به‌عنوان مقدار تابع z تعریف می‌کند به‌طوری که $a^z=y$ او می‌نویسد که می‌دانیم ۱ که مبنای لگاریتم، باید عددی صحیح و بزرگ‌تر از ۱ باشد و بدین ترتیب، از ارجاع قبلی خود به احتمال مسئله‌دار بودن 0° ، اجتناب می‌کند.

جورج بارون

تعریف توان، اغلب با بی‌دقتی انجام شده است. جورج بارون تقریباً سی سال قبل از اولین مقاله لیبری، مقاله‌ای با عنوان «یک بحث کوتاه درباره‌ی واژه توان در حساب و جبر» [۱] در مجله *Mathematical correspondent* (۱۸۰۴) منتشر کرد که با این تعریف آغاز می‌شد: «توان‌های هر عدد، عبارت است از ضرب‌های متوالی که از یک عدد شروع شده و به‌طور مستمر، آن عدد در خودش ضرب می‌شود».

به‌عنوان مثال، او نوشته بود که $1 \times 5 = 5$ که اولین توان ۵ است و $1 \times 5 \times 5 = 25$ که دومین توان ۵ است و همین‌طور تا آخر. به همین روش توان‌های هر عدد x را می‌توان به‌صورت x^1 و x^2 و ... نشان داد که $x^1 = 1 \times x$ و $x^2 = x \times x$ که بدین ترتیب ادامه می‌یابد.

بارون پس از بیان چند نتیجه، اظهار می‌داشت که «آیا تعریف مشابهی ما را به یک راه حل دقیق و قابل درک برای آنچه که توان هیچ‌ام (توان صفر) اعداد نامیده شده، راهنمایی نمی‌کند؟» و برای پاسخ به سؤال خود، برای تقسیم توان‌ها قاعده‌هایی را آدرس می‌دهد، و در همان حال، یک نتیجه متفاوت را نیز به‌دست می‌آورد.

اگر توان اول x با جواب x خلاصه شده باشد، به کمک معنای تقسیم داریم توان تبدیل به هیچ خواهد شد، ولی ۱ باقی خواهد ماند: $[(1 \times x)/(x)] = [x^1/(x)] = 1$ ، یعنی $x^0 = 1$ ، که در اینجا، x نشان‌دهنده هر عدد دلخواهی است. اما از آنجا که عدد x در اینجا محدود نشده، در نتیجه توان هیچ‌ام هر عدد، برابر ۱ است.

در آن مقاله، بارون نوشته‌های ویلیام امرسون (۱۷۸۰) [۳] و جارد منیفلد (۱۸۰۲) [۹] را درباره «هیچ» تأیید کرد و بحث‌های آن دو را یک پله جلوتر برده و ادعا نمود که عدد x می‌تواند هر عدد بزرگ یا کوچکی باشد. وی می‌نویسد: «به‌دنبال تعریف کاربردی ما، برای مقدار بی‌نهایت کوچک، فرض کنیم x هر مقدار کسری را نشان دهد. به عبارت دیگر، x هر مقداری از اعداد را نشان دهد (جزئی از واحد اندازه‌گیری آن). در این صورت تعریف می‌کنیم $x^1 = 1 \times x$.

حال فرض کنید این ضرب در x خلاصه شده باشد و به دلایل پیشرفته‌تری که قبلاً آوردیم، داریم: $x^0 = 1$. چون در

اینجا x یک مقدار کسری بدون هیچ محدودیتی از مقادیر خیلی کوچک است، بنابراین فرض کنید x با کاهش تدریجی از مقدار کنونی خود، از بین اعداد خیلی کوچک عبور کند تا این که x به هیچ برسد. واضح است که در طول این کاهش یا نزول x° ، x همواره مساوی یک واحد ثابت است و دقیقاً در لحظه‌ای که x به هیچ چیز تبدیل شود، x° یا 0° نیز برابر یک است.»

البته بارون، هیچ اشاره‌ای به صورت مبهم عبارت نمی‌کند و مقاله خود را با توضیح زیر، به پایان می‌رساند: همچنین چون به ازای هر مقدار x داریم $x^\circ = 1$ ، در نتیجه لگاریتم ۱ در هر مبنایی، برابر ۰ است.

گوگلیمو لیبری و کوشی آگوستین

با توجه به مقاله نوٹ لیبری (۱۸۳۳) [۸] تحت عنوان «تولید چندین ریز موج در آب‌های ریاضیات، هنگامی که چیزی ریشه‌ای به‌نظر می‌رسد چرا که بحث دربارهٔ اینکه آیا 0° تعریف شده است؟ ایجاد می‌شود». اکثر ریاضیدانان حاضر توافق دارند که $0^\circ = 1$ با اینکه آگوستین لوئیس کوشی در کتاب خود با عنوان دورهٔ آنالیز (۱۸۲۱) [۲]، 0° را در جدولی از صورت‌های تعریف نشده آورده است.

بدیهی است که استدلال لیبری قانع‌کننده نبود. بنابراین آگوست موبیوس به دفاع از خود برآمد. موبیوس سعی کرد به وسیلهٔ اثبات فرضی از $0^\circ = 1$ ، از خود دفاع کند. (در اصل اثباتی از اینکه $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$) پس از این مجادله‌ها، این سؤال برای سایر ریاضیدانان پیش آمد که «آیا زمانی که کارهای جمع‌آوری شدهٔ موبیوس منتشر شود، این سابقهٔ تاریخی به آرامی حذف خواهد شد؟». نوٹ در جواب می‌نویسد: «نه، نه، ده هزار بار نه!» و بیان می‌کند که «بحث با این نتیجه پایان می‌یابد که 0° ، باید تعریف نشده باشد.» شاید اگر کوشی مفهوم 0° را به‌عنوان یک صورت حدی تعریف نشده توسعه می‌داد، آن‌گاه مقدار حد $[f(x)]^{g(x)}$ مبهم است، هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ هر کدام جداگانه به صفر نزدیک شوند. نوٹ در مقاله خود با عنوان «مقدار 0° به مرتب راحت‌تر از $0+0$ است»، ما را به یاد قضیهٔ دو جمله‌ای می‌اندازد:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

اگر این قضیه برای هر دو عدد صحیح، که حداقل یکی از آن دو نامنفی است برقرار باشد، آن‌گاه ریاضیدان‌ها باید باور داشته باشند که $0^\circ = 1$ ، می‌توان $x=0$ و $y=1$ را در رابطه فوق قرار داد. سمت چپ به ۱ و سمت راست به 0° می‌رسیم.

مثال‌ها: در سال ۱۹۷۰، **هربرت واون** [۱۰] برای به رسمیت شناختن $0^\circ = 1$ به استدلال پرداخت. برای این

منظور او سه مثال زیر را تهیه کرد:

مثال ۱: در تصاعد هندسی نامتناهی زیر:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

برای هر x که $|x| < 1$ ،

اگر $x=0$ آن‌گاه $|x|=0 < 1$ که نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0^{n-1} = \frac{1}{1-0} = 1$$

مجموع نامتناهی به‌صورت $1 = 0^0 + 0^1 + 0^2 + \dots$ باز می‌شود. به گفتهٔ واون، اگر 0° تعریف شده نیست، این مجموع بی‌معناست. علاوه بر آن اگر $1 \neq 0^\circ$ آن‌گاه این مجموع غلط است.

مثال ۲: این مثال از مجموع نامتناهی e^x ناشی می‌شود که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x, x$$

هر کس قبول دارد که $e^0 = 1$ ، اگر قرار دهیم $x=0$ مجموع بالا به صورت زیر در می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^{n-1}}{(n-1)!} = e^0$$

مجموع می تواند به صورت زیر باز شود:

$$\frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \dots = \frac{0^0}{0!} + 0 + 0 + \dots = 0^0$$

طرف راست مجموع e^0 است که مساوی ۱ است. پس $0^0 = 1$.

مثال ۳: سومین مثال واون برگرفته از عدد اصلی یک مجموعه از نگاشت‌هاست. به توان رساندن یک عدد اصلی در نظریه مجموعه‌ها به صورت زیر تعریف شده است:

a^b ، عدد اصلی مجموعه نگاشت‌هایی از یک مجموعه b عضوی به یک مجموعه a عضوی است. برای مثال $2^3 = 8$. زیرا هشت نگاشت از مجموعه $\{x, y, z\}$ به مجموعه $\{a, b\}$ وجود دارد، به منظور محاسبه 0^0 تعداد نگاشت‌ها از مجموعه تهی به خودش را تعیین می کنیم. دقیقاً یک چنین نگاشتی وجود دارد که مجموعه تک عضوی تهی است. واون نوشته است «بنابراین تا آنجا که به اعداد اصلی مربوط است، $0^0 = 1$ ».

چه وقت یک ریاضیدان ممکن است بخواهد صفر به توان صفر چیزی شود که مبهم نباشد؟ اگر برای مثال، تابع $f(x, y) = x^y$ را مطرح کنیم، مبدأ مختصات یک نقطه ناپیوستگی تابع است، صرف نظر از اینکه چه مقداری را به 0^0 نسبت دهیم. تابع x^y نمی تواند در $x=y=0$ پیوسته باشد، چون حد x^y در امتداد خط $x=0$ برابر 0 است. اما حد x^y در امتداد خط $y=0$ برابر 1 است، نه صفر. برای سازگاری و سودمندی، یک انتخاب طبیعی باید به صورت تعریف $0^0 = 1$ باشد.

نتیجه گیری

ما به این روش تدریس (پداگوژی) ارجح می نهیم که «ابتدا به دانش آموزان بگوییم چه می خواهیم بگوییم. بعد آن را بگوییم، بالاخره به آن‌ها بگوییم چه گفتیم» و با اشاره به این روش، مبحث خود را جمع بندی می کنیم. اگر شما با حد کار می کنید، آن گاه 0^0 یک صورت مبهم است. اما اگر با جبر معمولی سر و کار دارید، آن گاه $0^0 = 1$.

مراجع

7. Donald Knuth, "Two Notes on Notation," The American Mathematical Monthly, Volume 99, Number 5, May 1992, pages 403 - 422. This is available in JSTOR.
 8. Guillaume Libri, "Mèmoire sur les fonctions discontinues," Journal für die reine und angewandte Mathematik, 10 (1833), pages 303 - 316.
 9. Jared Mansfield, Essays, mathematical and physical: containing new theories and illustrations of some very important and difficult subjects of the sciences, W. W. Morse, New Haven, 1802. Title page and pages 12-17, including first five pages of the essay "Of Nothing and Infinity,".
 10. Herbert E. Vaughan, "The Expression of 0⁰," The Mathematics Teacher, Volume 63, February 1970, page 111.
- Michael Huber and V. Frederick Rickey, "What is 0⁰? - Conclusion and Bibliography," Loci (July 2012) - See more at: <http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/what-is-00-conclusion-and-bibliography#sthash.Cylge1Ba.dpuf>

1. George Baron, "A short Disquisition, concerning the Definition, of the word Power, in Arithmetic and Algebra," The Mathematical Correspondent (1804), pages 59 - 66.
2. Augustin-Louis Cauchy, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (1821). In his Oeuvres Complètes, series 2, volume 3.
3. William Emerson, A treatise of algebra, in two books, 2nd edition, J. Nourse, London, 1780. Title page and pages 208-213, including the problem "To explain the several properties of (0) nothing, and infinity,"
4. Leonhard Euler, Elements of Algebra, translated by Rev. John Hewlett, Springer-Verlag, New York, 1984, pages 50 - 51.
5. Leonhard Euler, Introduction to Analysis of the Infinite, translated by John D. Blanton, Springer-Verlag, New York, 1988, pages 75 - 76.
6. E. Keenan, A. X. Gantert, and I. Dressler, Mathematics B, Amsco School Publications, Inc., New York, 2002.

آموزش ریاضیات در دبستان



معرفی کننده: زهرا گویا



روبین پورگنسن و شلی دال
مترجم: دکتر امیرحسین آشنا
ناشر: بینش نو
تلفن: ۲۲۸۹۱۳۱۵

کتاب «آموزش ریاضیات در دبستان» اثر روبین پورگنسن و شلی دال، با ترجمه دکتر امیرحسین آشنا، در سال ۱۳۹۳، در انتشارات بینش نو، به چاپ رسیده است. امیرحسین آشنا، دکترای آموزش ریاضی خود را در با راهنمایی می‌چپ سم، استاد تمام آموزش ریاضی دانشگاه ساینس مالزی گرفته است. این ترجمه، از روی ویرایش دوم کتاب، که در سال ۲۰۱۱ چاپ شده، انجام شده با این توضیح که مترجم، اخلاق علمی را رعایت کرده و با وجود اینکه ایران عضو قانون کی‌رایت نیست، اما از مؤلفان و ناشر این کتاب، برای ترجمه، اجازه رسمی گرفته است. امیدواریم این سنت نیکو در جامعه علمی ایران ساری و جاری شود. نویسندگان کتاب، هر دو در استرالیا، به تحقیق و تدریس و تولید در رشته آموزش ریاضی مشغول‌اند، و مخاطب اصلی کتاب آن‌ها دانشجو معلمان دوره ابتدایی، آموزگاران و آموزشگران، معلمان ریاضی هستند.

کتاب، دارای ۱۵ فصل است و در پایان هر فصل منابعی برای مطالعات بیشتر معرفی شده است. آموزشگران ریاضی بزرگی درباره این کتاب نظر داده‌اند که در زیر از نظرات بعضی از آن‌ها، برای معرفی کتاب استفاده می‌شود. تاکنون کتب متعددی با عناوین مشابه با این کتاب در کشورهای مختلف به طبع رسیده است. و این موضوع سؤال زیر را برمی‌انگیزد: آیا این یکی با آن‌های دیگر فرقی دارد؟ این کتاب با کتب دیگر متفاوت است. هر یک از مؤلفین، پژوهشگری شناخته شده در آموزش ریاضی با سابقه

فعالیت در کنار معلمان ریاضی در مدارس هستند. آن‌ها هم محققان آموزش ریاضی هستند و هم معلمان آموزش ریاضی. این کتاب دیدگاهی ممتاز و بی‌همتا بر اینکه چگونه مطالعه و تمرین می‌تواند و باید در بحث آموزش ریاضی در مدارس دخیل باشد فراهم می‌کند. پیام اصلی کتاب یعنی کیفیت فقط در مدارس به دست می‌آید که در آن‌ها به مساوات توجه می‌شود، باید توسط تمام متصدیان آموزش شناخته و درک شود.

پروفسور کلیمنتس، استاد دانشگاه ایالتی ایلینویز آمریکا

معلمان مقطع ابتدایی برای بهبود دانش و شیوه تفکر ریاضی خودشان به منظور برنامه‌ریزی برای یادگیری دانش‌آموزان خود در قرن بیست و یکم و وسعت پژوهش در جهان، نیاز به پشتیبانی دارند و این کتاب برای تمام این اهداف مناسب است. فراتر از آن، این کتاب این کار را با مکالمه با معلم و نه تحمیل آن به او انجام می‌دهد. با توضیحات شفاف، مثال‌های فراوان و منابع متعدد، مطالعه این کتاب باید برای تمام معلمان و آموزشگران ریاضیات پایه الزامی باشد.

استیو لمران، استاد آموزش ریاضی دانشگاه ساوث‌بنک، لندن، بریتانیا
این کتاب مهم و جدید پر از

ایده‌های خوب برای معلمان ریاضی در تمام مقاطع است. این کتاب به بررسی بسیاری از مسائل مهم در آموزش ریاضیات امروزی پرداخته و برای ارائه راه‌حل‌های عملی از تحقیق و مطالعه سود می‌جوید. مطالعه این کتاب برای معلمان ریاضی در سراسر جهان الزامی است.

جو بولز، استاد آموزش ریاضی دانشگاه استنفورد، آمریکا

خوشحال‌کننده است که متنی دست‌ورعملی وجود دارد که در آن این موضوع که آموزش ریاضیات در مدارس ابتدایی هم درباره دانش‌آموزان است و هم درباره یادگیری ریاضی، توسط آن شناخته شده است. این کتاب در متوجه نمودن

معلمان به رفتارهای خاصی که در یادگیری دانش‌آموزان تأثیر دارد بسیار مفید است. دست و پنجه نرم کردن با تنوع در تفکر دانش‌آموزان، شناخت تفاوت‌های بین ریاضیات خانه و مدرسه، استفاده از موقعیت‌ها برای به‌کارگیری فناوری، و شناخت چالش‌هایی که دانش‌آموزان در یادگیری زبان ریاضی با آن‌ها روبه‌رو خواهند شد. این مباحثات با اشارات مکرر به یافته‌های مطالعاتی مربوط، احساس صلاحیت و انرژی می‌دهند. این کتاب فقط بر نقش حرفه تکیه ندارد و این تنها نقشی بوده است که در گذشته بر آن تکیه می‌شده است.

گراهام ا. جونز، استاد بازنشسته دانشگاه گریفیت، استرالیا، و دانشگاه ایلینویز، آمریکا.

نامه‌های رسیده



با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت ماهنامه و نه شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی)

رشد نوجوانان (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی)

رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی)

مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول)

رشد جوان (برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم)

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

◆ رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد تکنولوژی آموزشی

◆ رشد مدرسه فردا ◆ رشد مدیریت مدرسه ◆ رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی

(به صورت فصلنامه و چهارشماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

◆ رشد برهان آموزش متوسطه اول (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه اول)
◆ رشد برهان آموزش متوسطه دوم (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه دوم)
◆ رشد آموزش قرآن ◆ رشد آموزش معارف اسلامی ◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد آموزش مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش تربیت بدنی ◆ رشد آموزش علوم اجتماعی ◆ رشد آموزش تاریخ ◆ رشد آموزش جغرافیا ◆ رشد آموزش زبان ◆ رشد آموزش ریاضی ◆ رشد آموزش فیزیک
◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش زیست‌شناسی ◆ رشد آموزش زمین‌شناسی
◆ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار دانش ◆ رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شود.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.

◆ تلفن و نمابر: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۷۸

مجله رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌ها، روایت معلمان، دیدگاه‌ها، نقد و بررسی کتاب از سوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شد. تا پایان دی ۱۳۹۳، نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، به دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم!

- ◆ مهری طاهری، از نیشابور؛
- ◆ ندا بوداگی، از قائمشهر؛
- ◆ لاله محمودی، از کرمان؛
- ◆ سیدقهرمان طاهریان، از اصفهان؛
- ◆ حمید مسگرانی، از تهران؛
- ◆ نیر ساری‌خانی، از تهران؛
- ◆ زهرا خاتمی، از زنجان؛
- ◆ مرتضی بیات، از زنجان؛
- ◆ رضا یادگارزاده، از همدان؛
- ◆ قاسم حسین‌قنبری، از سمنان؛
- ◆ یوسف کریمی، از کاشان؛
- ◆ آرزو بشیر، از کرج؛
- ◆ فرشته زینی‌وند، از تهران؛
- ◆ معصومه شهیدی، از زنجان؛
- ◆ خورشید علیزاده گرجی، از ساری؛
- ◆ عادل آخکندی، از دیواندره؛
- ◆ سید امیرحسین بطحائی، از زنجان؛
- ◆ عباسعلی اسکندری، از شاهرود.

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications & Teaching Technology Office

120 Roshd
Mathematics
Education Journal

رشد

آموزش ریاضی

vol.32 no.4 2015 ISSN:1606-9226

2. Editors' note: by: Z. Gooya

4. Grade 9 Students' Understanding of the Concept of Equal Sign
by: M. D. Nayeri & Z. Gooya

16. Teaching Problem Solving Heuristics
by: B. Savizi

22. Establishing a Custom of Proving in School Geometry (part II)
Trans. by: H. Ghafari

30. Teaching Problem Solving Heuristics
by: M. Jalili

33. It's not The End of the World!
by: M. Jalili

36. Mathematics and Culture: (Part II)
by: N. Assarzagdegan

44. Shoenfield's View on Control in Problem Solving
by: A. Karamian

47. Teacher's Narrative: A Report from A Teaching Class
by: M. Samani & S. Molaei

51. Purposeful Activity and Meaningful Context Two Key Concepts in Elementary Mathematics
by: M. H. Ghasemi

57. An Introduction to Students' Misconceptions
by: S. Shabanifar

58. What is 0^0 ?
Trans. by: M. Arabpour

62. Book Review: Teaching Mathematics in Primary Schools
by: R. Jorgensen & S. Dole,
Reviewer: Z. Gooya

63. Letters

Managing Editor: Mohammad Naseri
Editor: Zahra Gooya
Executive Director: Pari Hajikhani
Editorial Board:
Sayyed Hasan Alamolhodaei, Esmail Babolian,
Mohammad Reza Fadaie, Soheila Gholamazad,
Mirza Jalili, Mehdi Radjabalipour, Mani Rezaie,
Shiva Zamani, Bijan Zangeneh.
Graphic Designer: Mehdi Karimkhani
www.roshdmag.ir
e-mail: riyazi@roshdmag.ir
P. O. Box: Tehran 15875 - 6585



برگ اشتراک مجله‌های رشد

نحوه اشتراک:

شما می‌توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگهدارید).

◆ نام مجلات درخواستی:

.....
.....
.....

◆ نام و نام خانوادگی:

.....

◆ تاریخ تولد:
◆ میزان تحصیلات:

◆ تلفن:

◆ نشانی کامل پستی:

استان: شهرستان: خیابان:

شماره فیش بانکی: مبلغ پرداختی:

پلاک: شماره پستی:

◆ اگر قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

.....

امضا:

- ◆ نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۶۵۹۵/۱۱۱
- ◆ وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir
- ◆ اشتراک مجله: ۱۴-۱۳۹۷۳۳۹۷۱۳/۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۶۶۵۶-۲۱

- ◆ هزینه اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال
- ◆ هزینه اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال