

رشد

ریاضی

فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

دوره بیست و چهارم
شماره پیدرپی ۸۶
تابستان ۱۳۹۴
شماره ۴
۶۴ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

حرف اول / مطالعه اثر بخش: تعادل در کمیت و کیفیت / حمیدرضا امیری ۲

آموزشی / اعداد عجیب و خانواده هایشان! / مروارید جعفری ۳

نامساوی اویلر / محمد طبعی ۱۸

پای تخته / محرم نژاد ایردموسی ۲۰

دسته بندی داده های پیوسته در آمار توصیفی / رضا زینی وند ۲۴

مختصات قطبی / لیلا افتخاری ۲۸

استفاده از مثال های نقض در آموزش ریاضی دوره متوسطه / هیثم دیناروند ۳۵

اثبات ترکیبیاتی / مرتضی بیات - زهرا خاتمی ۳۸

یافتن مساحت مثلث با داشتن مختصات رئوس آن / مهدی میرزافام ۴۰

راز کارت های سن و سال / روح الله حسینی ۴۶

یک اثبات ساده برای دستورهای محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ / هوشنگ شرقی ۵۳

به دست آوردن مجموع جملات با استفاده از روابط بازگشتی / بهرام دستوریان ۵۶

کاربرد انتگرال در محاسبه احتمال در فضای پیوسته / آسیه رضائی گرجی ۶۰

ریاضیات در سینمای جهان / معلمی را دوست دارم! / احسان یارمحمدی ۶

آموزش ترجمه متون ریاضی / مجموعه های عددی / حمیدرضا امیری ۸

گفت و گو / تدریس و معلمی لذت بخش است (پای صحبت استاد پیشکسوت ریاضی و آمار، دکتر عین الله پاشا) /

ارغوان غلامی - هوشنگ شرقی ۱۰

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی / ایستگاه اول: جدول واژه های ریاضی / مریم حیدری ۱۹

ایستگاه دوم: معماهایی از سرزمین ایران باستان! / باز هم مزداییان و اهریمنیان! ۲۷

ایستگاه سوم: لطیفه های ریاضی ۵۰

پاسخ ایستگاه های اندیشه و ادب ریاضی ۶۳

تاریخچه مجلات ریاضی ایران / رشد آموزش ریاضی شماره های ۲۹ تا ۳۰ / غلامرضا یاسی پور ۴۲

معرفی کتاب / هوش مصنوعی / غلامرضا یاسی پور ۵۲

مجلات ریاضی جهان / اسم مجله: Parabola Mathematics Magazine / احسان یارمحمدی ۵۴

بازتاب / پاسخ به نامه ها و پیام نگارها ۵۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:
○ نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه)
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
○ طرح مسائلی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

● مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ● مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
● مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
● مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیر مسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خرده غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری،
محمد هاشم رستمی،
دکتر ابراهیم ریحانی،
احمد قندهاری،
میرشهرام صدر،
هوشنگ شرقی،
سید محمد رضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی پور،
دکتر محرم نژاد ایردموسی
و با یاد همکار عزیزمان زنده یاد پرویز شهریار
وبگاه: www.roshdmag.ir

پیام نگار:

Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

نشانی وبلاگ مجله:

http://weblog.roshdmag.ir/borhanmotevasete2

پیام گیر نشریات رشد: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲

پیامک: ۰۲۱ - ۸۹۹۵۰۶

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی:

۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۵۸۶۲

تلفن امور مشترکین: ۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۶

۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۵

شمارگان: ۹۷۰۰ نسخه

چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

* تذکر مهم:

نشانی پیام نگار سابق مجله

(Borhanm@roshdmag.ir)

از این به بعد معتبر نیست.

لطفاً مقاله ها و سایر پیام های خود را

به این نشانی ارسال کنید:

Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

مطالعه اثر بخش: تعادل در کمیت و کیفیت



شما به طور متوسط در هر هفته چند ساعت درس می‌خوانید؟ منظورم ساعت‌هایی است که خارج از مدرسه به مطالعه می‌پردازید. ۲۰ ساعت، ۳۰ ساعت یا بیشتر از ۳۰ ساعت درس می‌خوانید؟ حتماً می‌دانید که این تعداد ساعت «کمیت» مطالعه شما را نشان می‌دهد، اما اینکه چگونه درس می‌خوانید و آیا هنگام درس خواندن تمرکز کافی دارید، «کیفیت» درس خواندن شما را مشخص می‌کند.

مطالعه و درس خواندن در صورتی ثمربخش است که کمیت و کیفیت با هم در تعادل باشند. اگر شما زمان زیادی را صرف درس خواندن کنید، ولی هواس جمع و تمرکز کافی نداشته باشید، و یا اینکه تمرکز داشته باشید، ولی وقت کافی برای درس خواندن صرف نکنید، در هر دو صورت نتیجه مطلوبی به دست نمی‌آورید. رسیدن به این تعادل، یعنی درس خواندن با تمرکز و به مقدار کافی، به چندین عامل بستگی دارد؛ شناخت دقیق و کافی از خودتان، از ماهیت و ساقطار درس‌ها و کتاب‌های درسی‌تان و وضوح و شفافیت در هدف‌هایتان از مهم‌ترین این عوامل به شمار می‌روند.

شما وقتی نسبت به خود و ماهیت درس‌هایتان معرفت کافی داشته باشید، به راحتی برای اوقات مطالعه و چگونگی آن، برنامه‌ریزی می‌کنید. مثلاً بعضی‌ها درس‌های عمومی را با نوشتن و بعضی با بلند خواندن متن‌ها بهتر یاد می‌گیرند. بعضی‌ها صبح زود آمادگی بیشتری برای یادگیری دارند و بعضی دیگر، بعد از ظهرها بهتر می‌آموزند.

روش شما، لزوماً برای یادگیری مطالب درسی بهتر از روش دوستان نیست و روش او هم از روش شما بهتر نیست. هر دو روش، خوب و مناسب‌اند، زیرا هر کدام از شما با توجه به شناختی که از خود دارید آن روش را انتخاب کرده‌اید. البته شما می‌توانید با استفاده از تجربیات دیگران و روش‌هایی که مورد استفاده قرار می‌دهند و شاید با تلفیق آن‌ها، به روشی مناسب‌تر برای خود دست پیدا کنید. اهداف واضح و شفاف به این روش‌ها و استفاده از آن‌ها سمت و جهت می‌دهند و باعث انگیزه بیشتر و استمرار در به کارگیری آن‌ها می‌شوند. موفق باشید.

سرذریع

اعداد عجیب و خانواددهایشان!



مروارید جعفری*

چکیده

این مقاله عدد عجیب و ویژگی‌های آن را معرفی کرده و سپس چند عدد دیگر با تقریباً همین ویژگی‌ها را ارائه داده است که نشان می‌دهد عدد عجیب منحصر به فرد نیست. در ادامه روشی را برای ساختن یا در واقع شناختن عدد عجیب و اعداد عجیب مشابه با آن، به طور کامل توضیح می‌دهد که با وجود اینکه اثبات نمی‌کند، ولی خواننده این احساس را پیدا می‌کند که تمام اعداد عجیب را از این راه می‌توان به دست آورد و به خاطر سپرد.

کلیدواژه‌ها: عدد عجیب، جایگشت دایره‌ای، دوره تناوب، سرگرمی، ریاضی

مقدمه

فراگیری علوم گوناگون، جدا از اینکه لازمه بهتر زیستن است، همواره دارای زیبایی‌هایی است که جویندگان علم را دچار چنان لذتی می‌کند که از همه لذات دیگر دست می‌کشند و شیفته و مفتون تعلیم و تعلم می‌شوند. در این بین لذت درک زیبایی‌های ریاضی در ورای مادیات عمیق‌تر و جذاب‌تر است و به خاطر استحکام و حقیقت ذاتی آن، ماندگاری بیشتری دارد.

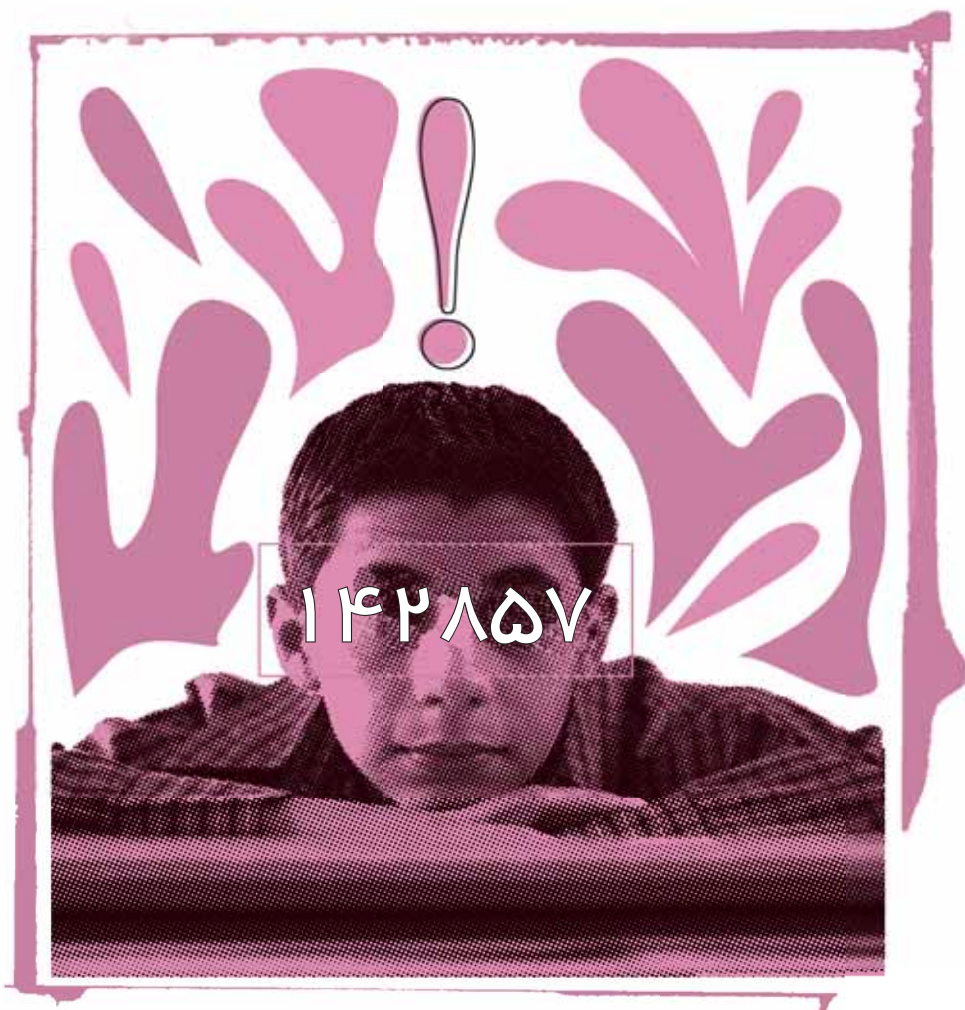
ریاضی شانه‌ای بر زلف پریشان عالم است؛ نه اینکه زلف عالم، پریشان است! نه، بلکه

ریاضیات، آنچه را که ما پریشان می‌بینیم به گونه‌ای جلوه می‌دهد تا نظم جاری در آن و زیبایی آن را بهتر ببینیم و پریشان حالی خود را در لذت درک نظام هستی غرق کنیم. تنها ابزار برای بارز و آشکار کردن این زیبایی‌ها، اعداد و ارقام ریاضی است که ابزاری غیرمادی و در عین حال واقعی و در همه جا موجود است.

یک عدد عجیب!

چندی پیش، یکی از استادان دانشگاه آتن، پایتخت یونان، عددی را کشف کرد که ویژگی‌های عجیبی دارد. آن عدد

۱۴۲۸۵۷ است. اگر این عدد را در دو ضرب کنیم، حاصل ۲۸۵۷۱۴ می‌شود. اگر آن را در سه ضرب کنیم، حاصل ۴۲۸۵۷۱ می‌شود. اگر آن را در چهار ضرب کنیم، حاصل ۵۷۱۴۲۸ می‌شود. اگر آن را در پنج ضرب کنیم، حاصل ۷۱۴۲۸۵ می‌شود. اگر آن را در شش ضرب کنیم، حاصل ۸۵۷۱۴۲ می‌شود. اگر آن را در هفت ضرب کنیم، حاصل ۹۹۹۹۹۹ می‌شود. می‌بینیم که حاصل ضرب این عدد عجیب در ۲، جایگشت دایره‌ای از ارقام همین عدد است



آیا عدد عجیب منحصر به فرد است؟

اگر بخواهیم این سؤال را جواب بدهیم، یکی از راه‌های این است که این خصوصیت را در مورد تمامی اعداد بررسی کنیم؛ که بدیهی است کاری دشوار و در عین حال غیر عملی است. حال برای نمونه، عدد ۰۷۶۹۲۳ را که همراه با صفر، شش رقمی است، بررسی می‌کنیم و آن را در اعداد ۱ تا ۱۳ ضرب می‌کنیم و حاصل را به دست می‌آوریم:

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۲ = ۱۵۳۸۴۶$$

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۳ = ۲۳۰۷۶۹$$

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۴ = ۳۰۷۶۹۲$$

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۵ = ۳۸۴۶۱۵$$

که با دومین رقم آن عدد از لحاظ بزرگی شروع می‌شود.

حاصل ضرب همین عدد در ۳، جایگشت دایره‌ای از ارقام عدد است که با سومین رقم همین عدد از لحاظ بزرگی شروع می‌شود.

همین رویه ادامه دارد تا عدد ۶، تعداد ارقام عدد عجیب - که حاصل آن باز هم جایگشت دایره‌ای از ارقام عدد عجیب است که با ششمین رقم آن عدد از لحاظ بزرگی شروع می‌شود. شگفت‌آور اینکه وقتی به عدد ۷ می‌رسیم، اگرچه بار دیگر «جایگشت دایره‌ای» تکرار نمی‌شود ولی باز هم حاصل، عدد ۹۹۹۹۹۹ است که عددی چشم‌گیر است!

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۶ = ۴۶۱۵۳۸$$

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۷ = ۵۳۸۴۶۱$$

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۸ = ۶۱۵۳۸۴$$

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۹ = ۶۹۲۳۰۷$$

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۱۰ = ۷۶۹۲۳۰$$

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۱۱ = ۸۴۶۱۵۳$$

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۱۲ = ۹۲۳۰۷۶$$

$$۰۷۶۹۲۳ \times ۱۳ = ۹۹۹۹۹۹$$

دقت روی حاصل ضرب‌ها نشان می‌دهد که ضرب عدد ۰۷۶۹۲۳ در ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۱۱ جایگشت دایره‌ای از ارقام عدد ۱۵۳۸۴۶ است که خود دو برابر عدد ۰۷۶۹۲۳ است و حاصل ضرب آن عدد در اعداد ۱، ۳، ۴، ۹ و ۱۰، جایگشت دایره‌ای از ارقام خود عدد ۰۷۶۹۲۳ است. حاصل ضرب آن در عدد ۱۳ هم

عدد ۹۹۹۹۹۹ را نتیجه می‌دهد که به این دلایل ما را به یاد ویژگی‌های عدد عجیب می‌اندازد.

عدد عجیب دیگر

عدد پیشنهادی بعدی، عدد ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ همراه با صفر قبل از آن است که حاصل ضرب آن در اعداد از یک تا هفده این نتایج را باعث می‌شود:

$$\begin{aligned} ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۲ &= ۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۳ &= ۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۴ &= ۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۵ &= ۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۶ &= ۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۷ &= ۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۸ &= ۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۹ &= ۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۱۰ &= ۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۱۱ &= ۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۱۲ &= ۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۱۳ &= ۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۱۴ &= ۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۱۵ &= ۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۱۶ &= ۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲ \\ ۰.۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ \times ۱۷ &= ۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹ \end{aligned}$$

این عدد واقعاً تمام ویژگی‌های عدد عجیب را دارد، پس عدد عجیب، منحصر به فرد نیست. ولی حتماً برایتان این سؤال پیش می‌آید که چگونه این عدد بزرگ با این ویژگی‌های ظریف کشف شده و آیا باز اعداد دیگری از این نوع وجود دارند یا خیر.

روش پیدا کردن اعداد عجیب

گفتیم که استفاده از روش آزمون و خطا در اینجا بسیار دشوار و نیز غیر عملی است. بنابراین باید دنبال روشی علمی برای جست‌وجوی اعداد عجیب باشیم. مطلبی که شاید برای خواننده جالب باشد، ارتباط عدد عجیب با تساوی یا اتحاد را با استفاده از روش تبدیل کسر اعشاری متناوب ساده به کسر متعارفی می‌توان به دست آورد. تکرار عدد ۹ در حاصل ضرب عدد عجیب در عدد ۷، و تکرار عدد ۹ بعد از ممیز در عدد سمت راست این اتحاد، تساوی‌های زیر را یکی پس از دیگری به ذهن متبادر می‌کند:

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۷ = ۹۹۹۹۹۹$$

برای هر دو عدد شش رقمی موجود در دو طرف این تساوی، ممیز با دوره تناوب در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} ۰/۱۴۲۸۵۷ \times ۷ &= ۰/۹۹۹۹۹۹ \\ ۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷... \times ۷ &= ۰/۹۹۹... \end{aligned}$$

اگر از تساوی $۱ = ۰/۹۹۹۰۰۰$ استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷... \times ۷ = ۱$$

دو طرف معادله را بر هفت تقسیم می‌کنیم:

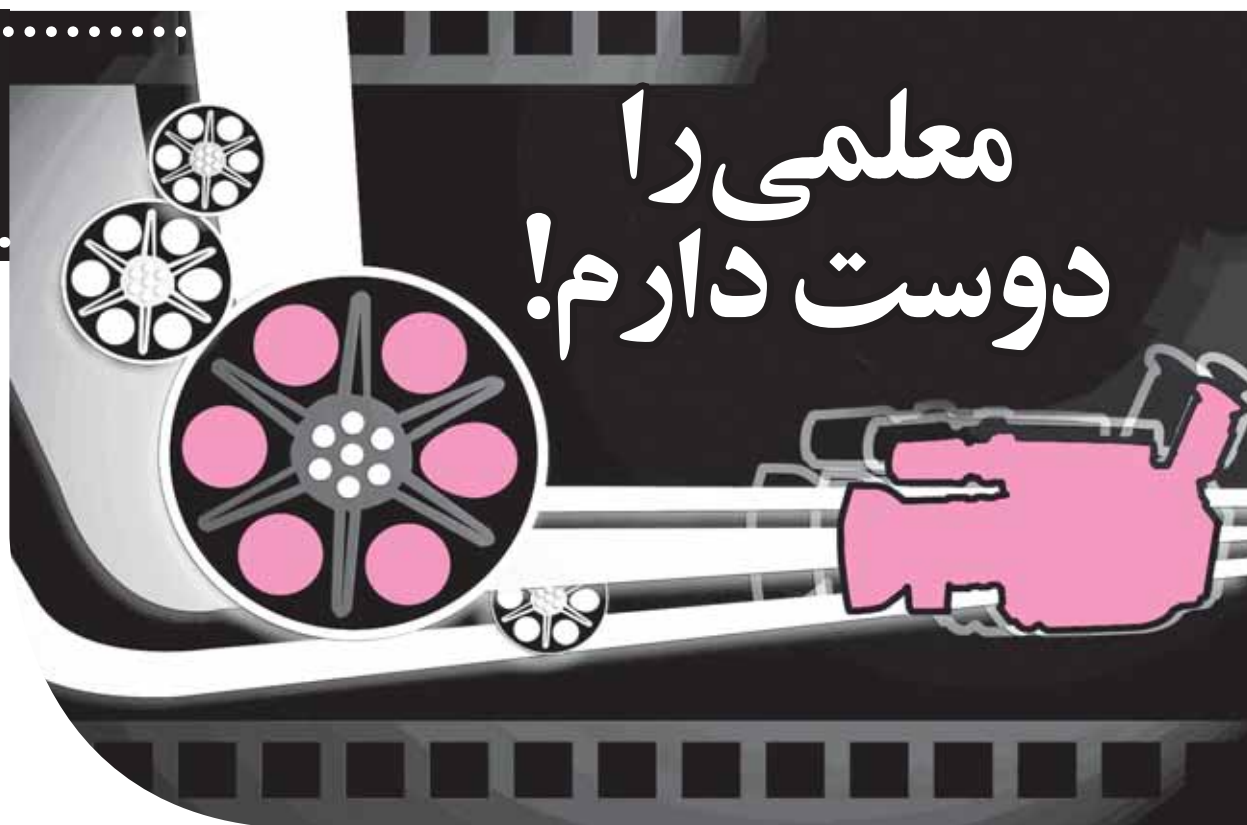
$$۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷... = \frac{1}{7}$$

یعنی عدد عجیب در واقع دوره تناوب در کوچک‌ترین نمایش اعشاری یک‌هفتم است. قطعاً برای شما نیز جالب و هیجان‌انگیز بود. حالا اگر علاقه‌مند هستید می‌توانید دوره تناوب نمایش اعشاری معکوس ۱۳، ۱۷ و... را حساب کنید. خواهید دید که جواب همان دو عددی هستند که قبلاً در اینجا معرفی کرده‌ایم.

اگر دوره تناوب نمایش اعشاری معکوس اعداد ۱۹، ۲۳ و دیگر اعداد اول را به دست آورید. با کمال تعجب خواهید دید که بسیاری از آن‌ها ویژگی عدد عجیب را دارند و تعداد اعداد عجیبی که می‌توانید بسازید، بسیار زیاد می‌شود. اکنون که به روش ساخت اعداد عجیب به صورت انبوه دست یافته‌اید، در صورت فراموش کردن عدد عجیب به راحتی می‌توانید با تقسیم یک بر هفت آن را به خاطر بیاورید. به این نکته هم اشاره کنم که شاید معکوس اعداد دیگری که اول نیستند نیز ویژگی‌های عدد عجیب را داشته باشد. برای مثال می‌توانید تحقیق کنید، اگر معکوس عدد ۱۴ را در ۲ یا ۳ یا... تا ۱۴ ضرب کنید، آیا باز هم دوره تناوب همان ارقام عدد عجیب را خواهد داشت یا خیر. اگر ارقام دوره تناوب معکوس ۱۴ را در اعداد از یک تا ۱۴ ضرب کنیم چه طور؟

* منابع
۱. نیک‌صالحی، کامی (۱۳۹۲).
عدد عجیب.

2. www.niksalehi.com/
goonagoon/archives/061200
morvaridjaafary40@yahoo.com



معلمی را دوست دارم!

- اسم فیلم: معلمی را دوست دارم
- نویسنده و کارگردان: منوچهر مشیری
- تهیه کننده و محقق: عصمت شاکری
- تدوین: میترا کارآگاه
- موسیقی: سعید انصاری
- گوینده متن: هوشنگ آزادی‌ور
- سال تولید: ۱۳۸۲
- مدت فیلم: ۳۲ دقیقه
- تهیه شده در گروه دانش شبکه یک
- سیمای جمهوری اسلامی ایران

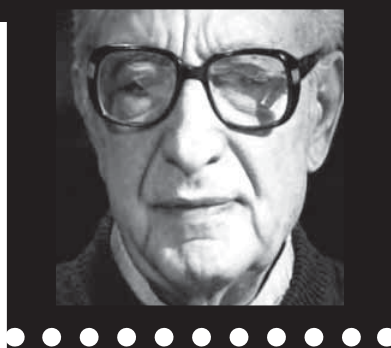
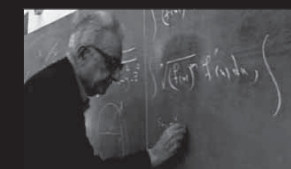
پرویز شهریاری (۱۳۰۵-۱۳۹۱) معلم، مؤلف و مترجمی توانمند بود که عمری را در خدمت اعتلای دانش و فرهنگ ایران گذراند. او پایه‌گذار آموزش نوین ریاضی در ایران بود. شهریاری طی ۶۰ سال فعالیتش در کسوت معلم، مؤلف و مترجم، چهره‌ای تازه به آموزش ریاضی ایران بخشید و آن را از دایره نخبگان خارج کرد و به میان مردم آورد. او بود که با تألیف

و ترجمه بیش از ۲۰۰ جلد کتاب و حدود ۱۰۰۰ مقاله، سردبیری چندین مجله مانند «سخن علمی و فنی»، «چیستا»، «دانش و مردم»، «آشتی با ریاضیات» و «آشنایی با ریاضیات» در راستای عمومی کردن دانش در ایران گام‌هایی ارزنده برداشت. علاوه بر این‌ها، با تأسیس «گروه فرهنگی خوارزمی» و «گروه فرهنگی مرجان» که هریک از آن‌ها شامل چندین دبستان و دبیرستان دخترانه و پسرانه بودند و در زمان خود از نظر سطح علمی و آموزشی اعتبار زیادی داشتند، به آموزش و پرورش چندین نسل از فرزندان این مملکت پرداخت. پرویز شهریاری در خانواده‌ای تهی دست اما آکنده از لطف و صفا به دنیا آمد و رشد یافت. او با تلاش و کوشش بی‌نظیرش نام نیکو و آوازه‌ای بی‌بدیل یافت و آن را برای همیشه بین ایرانیان به یادگار گذاشت. شخصیتی داشت چند بعدی و به معنای تام کلمه انسان. فردی بود عاشق معلمی و در تمام عمر به این حرفه و شاگردانش عشق ورزید، تا

جایی که خود وی می‌گوید:

- «من معلمی را دوست دارم. آن قدر دوست دارم که گمان می‌کنم، هیچ حرفه دیگری نمی‌تواند از نظر شایستگی با آن برابری کند.
- معلمان خوب عاشقانی هستند که روح و جان خود را فدای عشق خود می‌کنند.
- من به جوان‌ها اعتقاد دارم و باید اعتراف کنم که هم از کلاس‌هایم و هم از دانش‌آموزانم خیلی چیزها آموخته‌ام. در واقع معلمی یک جریان دوطرفه است. اگر معلم به کار خودش عشق داشته باشد، هم یاد می‌دهد و هم یاد می‌گیرد و من همیشه به کار معلمی عشق می‌ورزیده‌ام.

با این مقدمه که از متن فیلم «معلمی را دوست دارم» برداشته شده، باید متوجه شده باشید که این فیلم مستند درباره زنده‌یاد پرویز شهریاری، چهره ماندگار آموزش ریاضی ایران است. فیلم با صحنه‌ای شروع می‌شود که استاد شهریاری را در حرکت به سوی شهر



آن‌ها را برعهده داشته است، چنین می‌گوید: «تا حالا چهار کتاب من و یک مجله‌ام، مجلهٔ «دانش و مردم»، لوح تقدیر گرفته‌اند. این نتیجهٔ زحمات من است. ولی در حقیقت خیلی بیش از آنچه که من انتظار دارم، در مورد من رعایت می‌شود. آنچه که انجام داده‌ام مقداری ترجمه یا تألیف است؛ کتاب‌هایی از کتاب‌های دبیرستانی، راهنمایی و دبستان گرفته تا کتاب‌های متفرقه که به‌خاطر مجموعهٔ ریاضی کشور می‌خوانم. علاوه بر آن، کتاب‌هایی هم در زمینهٔ ادبیات و داستان ترجمه کرده‌ام. بخشی از این کتاب‌ها لوح تقدیر گرفته‌اند که احتمالاً آن‌ها را می‌بینید. به‌جز لوح تقدیر کتاب‌ها، مقداری هم لوح تقدیر بابت کارهایی که کرده‌ام، گرفته‌ام. یا مثلاً در «دانشگاه کرمان» دکترای افتخاری به من دادند. بابت کارهایی که کردم همه جا روی کتاب‌های ریاضی من تکیه می‌شد. قریب به دویست و خرده‌ای کتاب نوشته‌ام و در حدود هزار مقاله.» به این دلیل که شما دوست‌داران زنده‌یاد پرویز شهریاری و علاقه‌مندان به ریاضیات، خود صحنه‌ها و گفته‌های ارزشمند دیگر این مستند را پیگیری کنید، از ارائهٔ آن‌ها در این مقاله خودداری می‌کنیم و شما را به تهیهٔ این فیلم و مشاهدهٔ آن تشویق می‌نماییم.

* ehsan_yarmohammadi@yahoo.com

ده سال مبلغی می‌دادند و در آن مدت فقط لباس و غذا به بچه می‌دادند. من خیلی از این کار راضی بودم، برای اینکه حداقل مطمئن بودم که غذایی خواهم داشت. ولی مادرم مخالفت می‌کرد و گفت من تا زنده هستم نمی‌گذارم. بچه‌هایم باید درس بخوانند.

خسرو باقری، مترجم و مدرس دانشگاه، دربارهٔ آثار ترجمه‌ای ایشان در این فیلم چنین می‌گوید: «یکی از بزرگ‌ترین بخش‌های فعالیت ایشان در زمینهٔ ترجمه است. نزدیک به ۱۲۰ اثر ترجمه کرده‌اند و ما که در دنیای ترجمه به سر می‌بریم، می‌دانیم این چه معنی ژرف و عمیقی دارد و بیانگر چه کوشش و پایداری عظیمی است. آثار ترجمه‌ای ایشان چندین بخش را شامل می‌شود که از جملهٔ آن‌ها تاریخ ریاضیات و کتاب‌هایی در مورد خود ریاضیات است و کتاب‌هایی به زبان ساده برای جوانان مطرح کرده‌اند. در واقع آثار ایشان، از نظری‌ترین آثار ریاضی تا کاربردی‌ترین آثار ریاضی را در برمی‌گیرد...»

استاد شهریاری، خود، دربارهٔ کتاب‌هایی که تألیف یا ترجمه کرده و مجلاتی که سردبیری



بابل به‌منظور شرکت در مراسم بزرگداشتی که برای ایشان با همکاری «دانشگاه مازندران»، «انجمن ریاضی ایران» و «خانهٔ ریاضی بنیاد علمی حریری» تدارک دیده شده بود نشان می‌دهد. در صحنهٔ پایانی آن هم، تعدادی از دانش‌آموزان «دبیرستان فیروز بهرام»، مدرسه‌ای که استاد شهریاری سالیان طولانی در آن تدریس داشت- به‌منظور ارج نهادن به مقام والا و کارهای برجستهٔ استاد دسته گلی به ایشان تقدیم می‌کنند.

این فیلم آکنده از لحظات تحسین‌برانگیز از زندگی زنده‌یاد شهریاری و پندآموز برای مخاطبان است و جایگاه قدرت اراده و پایداری را در لحظات سخت و پیچیدهٔ زندگی وی هویدا می‌سازد.

زنده‌یاد پرویز شهریاری در این مستند دربارهٔ دوران کودکی و نوجوانی خود چنین می‌گوید: «کودکی من خیلی سخت گذشت. پدرم در ۴۶ سالگی، بعد از عمری که در روستا کار می‌کرد، در اولین کارخانهٔ ریسندگی که خورشید نام داشت، مشغول کار شد. اما بعد از یک سال و نیم دچار بیماری شد و با داروی اشتباهی که به او دادند، فوت کرد. از آن به بعد مادر، من و برادرانم و خواهرم به فکر افتادیم که به نوعی زندگی را اداره کنیم. انواع کارها را کردیم. من از بنایی گرفته تا کوزه‌گری و کارهای دیگر را به سختی انجام دادم. دوازده سالم بود، کلاس ششم ابتدایی بودم. کسانی که از شش دبستان فارغ‌التحصیل می‌شدند، معمولاً صاحبان سرمایه می‌آمدند سراغ خانوادهٔ آن‌ها و می‌گفتند این بچه را ما اجیر می‌کنیم، برای پنج سال یا ده سال. در پایان پنج سال یا



مجموعه‌های عددی

یک رابطه دوتایی R از مجموعه A به مجموعه B، زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است. اگر $(a,b) \in R$ باشد می‌نویسیم: aRb و می‌خوانیم (می‌گوییم): a رابطه دارد با b؛ و اگر a رابطه نداشته باشد با b، می‌نویسیم: $a \not R b$. در حالتی هم که $A=B$ ، می‌گوییم R یک **رابطه دوتایی** روی A است.

مجموعه {برای بعضی از $a \in A | (a,b) \in R, b \in B$ } **دامنه R** نامیده می‌شود.
مجموعه {برای بعضی از $b \in B | (a,b) \in R, a \in A$ } **بُرد R** نامیده می‌شود.

مثال ۱۸.۵

الف. فرض کنیم $A=\{۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$. رابطه R را به صورت aRb اگر و فقط اگر a می‌شمارد b را تعریف می‌کنیم. R، دامنه R و بُرد R را بیابید.

ب. فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$. رابطه R را به صورت aRb اگر و فقط اگر $a \leq b$ تعریف می‌کنیم. R، دامنه R و بُرد R را بیابید.

حل:

الف. $R=\{(۲,۴),(۲,۶),(۳,۳),(۳,۶),(۴,۴)\}$ و $\text{Dom}(R)=\{۲,۳,۴\}$ و $\text{Range}(R)=\{۳,۴,۶\}$

ب.

■ $\text{Range}(R)=A$ و $\text{Dom}(R)=A$ و $R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۴)\}$

تابع حالت خاصی از یک رابطه است. یک تابع از A به B، که با $f:A \rightarrow B$ نشان داده می‌شود، رابطه‌ای است از A به B به طوری که برای هر $x \in A$ یک $y \in B$ منحصر به فرد (یکتا) وجود داشته باشد، به قسمی که: $(x,y) \in f$. عضو y را تصویر x می‌نامیم و می‌نویسیم: $y=f(x)$. مجموعه A **دامنه f** و مجموعه همه تصاویرهای توسط f را «بُرد f» می‌نامیم. توابع با جزئیات بیشتر در بخش ۲۰ مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

مثال ۱۸.۶

الف. نشان دهید که رابطه $f=\{(۱,a),(۲,b),(۳,a)\}$ تابعی است تعریف شده از $A=\{۱,۲,۳\}$ به $B=\{a,b,c\}$. بُرد این تابع را بیابید.

ب. نشان دهید که رابطه $f=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),(۱,b)\}$ تابعی تعریف شده از $A=\{۱,۲,۳\}$ به $B=\{a,b,c\}$ نیست.

حل:

الف. توجه دارید که هر عضو A دقیقاً یک تصویر دارد. بنابراین، f یک تابع است با دامنه A و بُرد $\text{Range}(f)=\{a,b\}$.

ب. رابطه f یک تابع تعریف نمی‌کند (تعریف یک تابع را ندارد)، زیرا عضو ۱ دو تصویر دارد، یعنی a و b.

واژه‌ها و اصطلاحات مهم

1. Binary relation رابطه دوتایی	7. Function تابع	13. Detail جزئیات
2. Domain دامنه	8. Special case حالت خاص	14. Section بخش
3. Range بُرد	9. Such that به‌طوری‌که	15. Let فرض می‌کنیم
4. Subset زیرمجموعه	10. Element (عنصر) عضو	16. Divides عاد می‌کند
5. Example مثال	11. Image تصویر	17. Exactly دقیقاً
6. If, and only if اگر، و فقط اگر	12. Unique (یکتا) منحصر به‌فرد	

A binary relation R from a set A to a set B is a subset of $A \times B$. If $(a, b) \in R$ we write aRb and we say that a is related to b . If a is not related to b we write $a \not R b$. In case $A = B$ we call R a **binary relation** on A .

The set

$$\text{Dom}(R) = \{a \in A \mid (a, b) \in R \text{ for some } b \in B\}$$

is called the **domain** of R . The set

$$\text{Range}(R) = \{b \in B \mid (a, b) \in R \text{ for some } a \in A\}$$

is called the **range** of R .

Example 18.5

a. Let $A = \{2, 3, 4\}$ and $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Define the relation R by aRb if and only if a divides b . Find, R , $\text{Dom}(R)$, $\text{Range}(R)$.

b. Let $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Define the relation R by aRb if and only if $a \leq b$. Find, R , $\text{Dom}(R)$, $\text{Range}(R)$.

Solution.

a. $R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$, $\text{Dom}(R) = \{2, 3, 4\}$, and $\text{Range}(R) = \{3, 4, 6\}$.

b. $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$, $\text{Dom}(R) = A$, $\text{Range}(R) = A$. ■

A function is a special case of a relation. A function from A to B , denoted by $f: A \rightarrow B$, is a relation from A to B such that for every $x \in A$ there is a unique $y \in B$ such that $(x, y) \in f$. The element y is called the **image** of x and we write $y = f(x)$. The set A is called the **domain** of f and the set of all images of f is called the **range** of f . Functions will be discussed in more detail in Section 20.

Example 18.6

a. Show that the relation

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$$

defines a function from $A = \{1, 2, 3\}$ to $B = \{a, b, c\}$. Find its range.

b. Show that relation $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (1, b)\}$ does not define a function from $A = \{1, 2, 3\}$ to $B = \{a, b, c\}$.

Solution.

a. Note that each element of A has exactly one image. Hence, f is a function with domain A and range $\text{Range}(f) = \{a, b\}$.

b. The relation f does not define a function since the element 1 has two images, namely a and b . ■

* h66amiri@yahoo.com

تدریس و معلمی لذت بخش است

پای صحبت استاد پیشکسوت ریاضی و آمار
دکتر عین الله پاشا

اشاره

اعضای هیئت تحریریه مجله، در اردیبهشت ماه سال گذشته، مصاحبه‌ای نسبتاً طولانی با دکتر عین الله پاشا، استاد پیشکسوت آمار و احتمال دانشگاه‌های کشور و مؤلف ده‌ها جلد کتاب در زمینه آمار و ریاضیات، داشتند. قسمت اول این مصاحبه که به دوران کودکی و نوجوانی استاد، تا ورود به دانشگاه اختصاص داشت را در شماره ویژه بهار ۹۴ ملاحظه نمودید. اینک به ادامه این گفت‌وگوی شیرین و خواندنی توجه نمایید.

هم به‌خاطر سرعت زیاد جریمه‌ات می‌کنم نه به‌خاطر عبور از چراغ قرمز! (خنده حاضران).

● **امیری:** سؤال بعدی من از استاد این است که آیا در احتمال، ۵۰ درصد و یا همان $\frac{1}{2}$ ، و آیا صفر و یک وجود دارد؟ یا این‌ها حد‌ها هستند؟

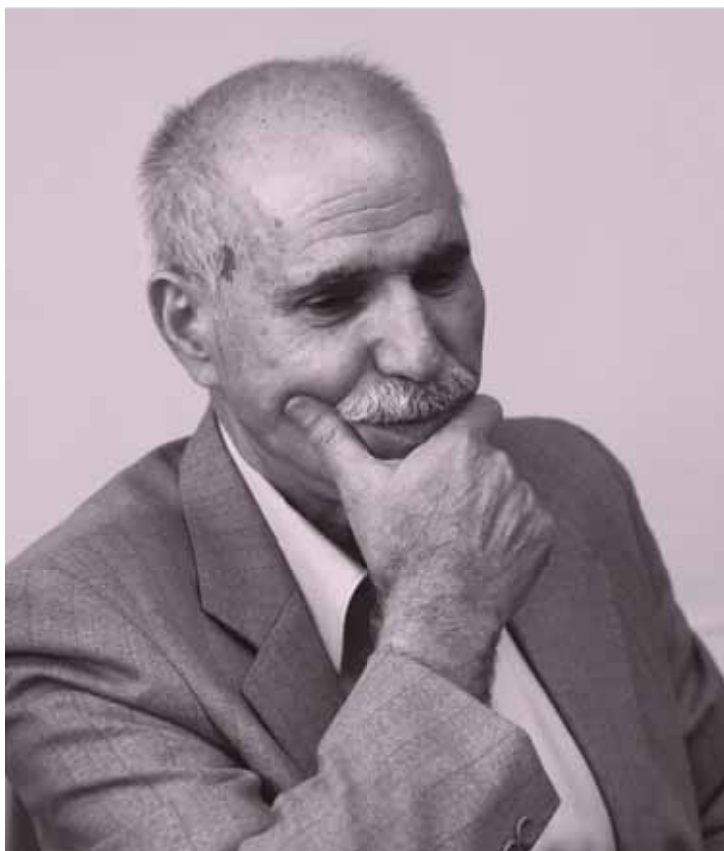
● **پاشا:** در بحث احتمال هم که قبلاً صحبتش را کردیم، برای اندازه‌گیری شانس یا وقوع یک حادثه، نسبت می‌گیریم. بنابراین برای مثال، در انداختن چندبار سکه در نصف پرتاب‌ها شیر بیاید، هیچ ضمانتی وجود ندارد. اما وقتی که مدلتش را به‌صورت ریاضی درست می‌کنیم، می‌توانیم $\frac{1}{2}$ را بشناسیم و قبول کنیم.

یک نکته‌ای را هم بگویم: همیشه در کلاس‌هایم وقتی می‌پرسم یک مسئله ساده احتمال بگویند. دانشجو جواب می‌دهد: یک سکه می‌اندازیم، احتمال اینکه شیر بیاید چه قدر است؟ خوب این غلط است. باید بگوییم «اگر سکه‌ای را بیندازیم». این کلمه «اگر» را باید بگویند. هر مسئله احتمالی باید با این کلمه اگر شروع شود.

● **شرقی:** اجازه بدهید برای استراحت لطیفه‌ای بگویم. می‌گویند یک روز استاد آماری در حال رانندگی بود. به هر چهارراهی که می‌رسید، به‌سرعت آن را رد می‌کرد؛ دوستش می‌پرسد: چرا این‌طوری رانندگی می‌کنی؟ خطرناک است. و استاد آمار در جواب می‌گوید: آمار نشان داده است که اکثراً تصادف‌ها در چهارراه‌ها اتفاق می‌افتند. یعنی احتمال وقوع تصادف در چهارراه‌ها از همه‌جا بیشتر است. پس من با سرعت چهارراه را رد می‌کنم. (خنده حاضران).

● **پاشا:** بیشتر مردم در تخت‌خواب می‌میرند. پس تخت‌خواب، برای خوابیدن جای خطرناکی است! (خنده).

● **یاسی‌پور:** شبیه این لطیفه را در مورد استاد فیزیکی هم می‌گویند که از چراغ قرمزها رد می‌شد. پرسیدند: چرا؟ جواب داد: چون من سرعتم نزدیک سرعت نور است، قرمز را سبز می‌بینم. افسر هم در جوابش می‌گوید: پس من



پاشا: در احتمال هم «اصول» موثق هستند. احتمالی که نسبت می‌دهیم، باید چنان باشد که در این اصول صدق کند. هر چیزی که در این اصول صدق کند، احتمال است. البته برای مثال، فرض کنید که اصول هندسه را که گذاشتند، این‌ها با شهود مطابقت دارند. یعنی حرف عجیب و غریبی زده نمی‌شود. ما انتظاری که از دو خط موازی داریم، در اصل مربوط به آن گنجانده می‌شود. اصول احتمال هم همین‌طور است. یعنی از همین شهود گرفته شده است و آن را براساس اصول و تعریف، مجردش کرده‌اند.

امیری: آیا این درست است که علم احتمال در میان شاخه‌های ریاضی علمی است که بیش از همه به آنالیز ریاضی نیاز دارد؟

پاشا: وقتی بحث‌های اصول موضوعی احتمال، مثل «اصول کولموگروف» را می‌بینیم، بله ماهیت آنالیزی یا آنالیز حقیقی دارند. اگر به تاریخ احتمال

اگر من سکه‌ای را انداختم، احتمال آمدن شیر چه قدر است؟ بعد از اینکه سکه را انداختند که نمی‌پرسند احتمال آمدن شیر چه قدر است. چون وقتی دیگر سکه را انداختم یا شیر آمده یا نیامده است، دیگر احتمالی وجود ندارد. در واقع وقتی ما از احتمال حرف می‌زنیم، با چیزی سروکار داریم که هنوز انجام نشده است. به محض اینکه انجام شد، دیگر با احتمال سروکار ندارد و می‌رود در حیطة آمار.

الان می‌گوییم اگر این سکه را ببندازیم، احتمال آمدن شیر $\frac{1}{2}$ است. اما ممکن است تا ده بار هم که این سکه را ببندازیم، شیر بیاید و اصلاً خط نیاید. چون وارد عمل شده‌ایم و داستان عملی با آنچه که قبلاً به صورت نظری گفته‌ایم، متفاوت است. ما احتمال را می‌خواهیم برای برنامه‌ریزی و آمار را می‌خواهیم برای ساختن مدل.

یاسی پور: سؤال آخر من این است که آیا برای همه اشیا احتمال وجود دارد؟
پاشا: بله، برای همه پیشامدها وجود دارد. اما برای اشیا، منظورتان دقیقاً چیست؟

یاسی پور: ببینید؛ در فیزیک اصلی داریم به نام «اصل عدم قطعیت» که به «اصل هایزنبرگ» معروف است. این اصل می‌گوید در دنیای فیزیک عدم قطعیت وجود دارد. حالا سؤال این است که در احتمال چگونه است؟

پاشا: اگر اشیایی که با آن‌ها سروکار داریم، اعضای فضای نمونه‌ای باشند، برایشان احتمال را تعریف می‌کنیم. اما اگر چیزی به غیر از این باشد، احتمال نداریم. اگر ما بتوانیم این‌ها را به چارچوب خودمان بیاوریم، می‌توانیم احتمال را به آن‌ها نسبت بدهیم.

یاسی پور: این تعریف است یا یک قرارداد؟ چون ما در هندسه تعریف و قرارداد را متفاوت از هم می‌دانیم. شما تعریف مثلث یا مربع را قرارداد نمی‌گیرید. این‌ها تعریف‌اند و باید شناساندشان.



شرقی

نگاه کنیم، مسئله امتیازها که در تاریخ احتمال (واسط قرن پانزدهم) مطرح می‌شود، این است که دو نفر دارند بازی می‌کنند. یکی «a» ریال سرمایه گذاشته است و یکی «b» ریال. می‌گویند هرکس زودتر مثلاً به امتیاز ۲۰ برسد، همه پول را می‌برد. وسط بازی یکی امتیازش ۱۶ است و آن یکی ۱۲. بازی را متوقف می‌کنند. این پول چه‌طور باید تقسیم شود؟ این اولین مسئله احتمال است که حدود ۵۰۰ سال پیش در احتمال مطرح شد.

● **امیری:** هیچ ردپایی از بحث احتمال در ریاضیات دورهٔ ایرانی و اسلامی وجود ندارد؟
پاشا: من ندیدم. شاید چون دنبال این موضوع نبودم. شاید آقای یاسی‌پور در این مورد بیشتر بدانند.

● **یاسی‌پور:** البته همهٔ آثار دانشمندان ما به درستی مورد بررسی قرار نگرفته به‌عنوان نمونه، **خواجه نصیرالدین طوسی** ۴۲ اثر ریاضی دارد که ما فقط یکی دوتایش را دیده‌ایم. یک‌بار من از دکتر مهدی حائری که استاد مسلم فلسفهٔ اسلامی بودند، پرسیدم آیا در دورهٔ اسلامی کتابی در حد کتاب «اساس الاقتباس» **خواجه نصیر** موجود است یا نه؟ ایشان گفت: علاوه بر اینکه این کتاب بسیار منحصر به فرد است، در آن نکاتی از فلسفهٔ منطق وجود دارد که برای معاصران هم قابل بیان است.

● **امیری:** منظورم این است که مثلاً ما مفهوم حد را به غرب نسبت می‌دهیم و می‌گوییم ریاضی‌دانان غربی به مفهوم حد رسیدند و آن را گسترش دادند. در صورتی که کسی مثل **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** عدد پی را محاسبه می‌کند و تقریب می‌زند و... خب این خودش ردپایی از حد است. منظور من هم از ردپا همین است.

● **پاشا:** از آنجا که موضوع شانس با احتمال ارتباط دارد، از دیدگاه فلسفی خیلی مورد توجه نبوده است. البته بحث امتیازها ناتمام ماند، ولی از زمان **فرانسویس بیکن** بود که این دیدگاه کمی مورد توجه واقع شد. قبل از آن بر این عقیده بوده‌اند که اگر ما به شانس متوسل می‌شویم، به‌خاطر

نداشتن اطلاعات کافی است و اگر همه‌چیز را بدانیم، نیازی نیست که برایش احتمال در نظر بگیریم.

البته قبلاً هم گفته‌ام که اولین جایی که استقرا به کار رفت، در آن داستان **لقمان حکیم** است که کسی از او پرسید تا شهر چه قدر راه هست و او هم جواب داد راه برو؛ و این نمونهٔ خوبی از کاربرد استقراست. قیاس هم داستان شیطان است که خدا به او گفت: سجده کن. اما شیطان گفت: من از آتشم و آدم از خاک، پس چون آتش از خاک بالاتر است، من هم از آدم بالاتر هستم و سجده نمی‌کنم. در این داستان هم به‌نوعی قیاس وجود دارد، چرا که با چیدن مقدماتی، نتیجهٔ نهایی را به‌دست می‌آورد.

● **شرقی:** این یک نوع استنتاج منطقی است. قیاس به معنی تمثیل نیست. در واقع قیاس به مفهوم استنتاج است.

● **یاسی‌پور:** در منطق قدیم سه نوع استنتاج وجود داشت: اول قیاس، یعنی از کل به جزء رسیدن. دوم استقرا، یعنی از چند جزء یک فرمول کلی پیدا کردن، و سوم هم تمثیل که یعنی از امری جزئی به امری جزئی دیگر رسیدن. معمولاً هم اغلب زندگی ما تمثیل است.

● **امیری:** البته امروزه در کتاب جبر و احتمال، استدلال تمثیلی و استدلال قیاسی یکی در نظر گرفته شده است.

● **پاشا:** اگر بخواهیم مسامحه کنیم، ردپایی از قیاس در این داستان دیده می‌شود. مسئلهٔ امتیازهایی را که مطرح کردم، به‌خاطر دارید؟ اگر از کسی که ریاضی خوانده باشد بپرسید، می‌گوید باید کل این پول را به نسبت ۱۲ و ۱۶، یعنی امتیازها تقسیم کنیم. ۹۰ سال طول کشید تا ریاضی‌دانانی مثل **کاردانو** و **تارتاگلیا** آمدند و گفتند این راه حل درست نیست. چرا درست نیست؟ برای اینکه شما چیزی را نادیده گرفته‌اید. صورت مسئله ذکر می‌کند که این‌ها دارند بازی عادلانه می‌کنند، شما عادلانه بودن را کجا دیدید؟ از کجا می‌دانید نتیجهٔ نهایی بازی چه می‌شود؟ شاید آنکه امتیاز ۱۶ آورده در این امتیاز بماند و

اولین جایی که
استقرا به کار رفت،
در آن داستان
لقمان حکیم است
که کسی از او
پرسید:
تا شهر چه قدر راه
است.
او جواب داد:
راه برو!



یاسی پور

و از توی حل المسائل جوابش را می نوشت و از همه جا بی خبر برای من می آورد. این طور می شد که جواب مسئله را می فهمیدم؛ اما بعد از کلی کلنجار رفتن با صورت مسئله. در واقع منظورم این است که دانش آموز اصلاً نباید جلوی یک مسئله بی کار بنشیند و نگاهش کند. باید با آن تا جایی که می تواند سروکله بزند. الان متأسفانه بچه های ما اگر مسئله را بتوانند حل کنند که هیچ. اما اگر نتوانند، دیگر نمی دانند که چه کار باید بکنند.

● **شرقی:** شما یک دوره با دانش آموزان المپیادی بوده اید. آن ها چه طور بودند؟

● **پاشا:** بله، به من گفتند هفت جلسه با این دانش آموزها که گمان می کنم اولین دوره بود، کار کنم. همه جمع شدیم در باشگاه استقلال که آن موقع مسئولش مرحوم **حجاریان** بود. قرار شد که من با آن ها مسائل آنالیز ترکیبی را کار کنم. از دو ماه قبل شب ها تا ساعت دو و سه نیمه شب بیدار می ماندم و مسئله ها را پیدا و حل می کردم. بعضی از این مسائل هم واقعاً سخت بودند. تا اینکه ۳۵ مسئله از کتاب های متفاوت انتخاب و آماده کردم. وقتی به کلاس رفتم، ابتدا مقدمه ای گفتم و بعد شروع کردم به نوشتن مسئله. هنوز صورت مسئله را بیان نکرده بودم، این ها جوابش را می گفتند. همین طور ادامه دادند تا جواب هر ۳۵ مسئله را گفتند.

کلاس که تمام شد رفتم به مرحوم حجاریان گفتم بعد از ظهر کلاس دارم و نمی دانم چه کار کنم. دو ماه کار کردم، این ها دو ساعته همه اش را خوردند (خنده). خلاصه قرار را بر این گذاشتیم که مسائل کتاب ها را کپی کنم تا بچه ها حل کنند و بیايند درباره حل مسئله ها توضیح بدهند. آنجا بود که فهمیدم این ها اصلاً جور دیگری به مسئله نگاه می کنند. یادم می آید سؤالی بود که باید ثابت می کردیم، کسری که داده شده عدد طبیعی نیست (صورت و مخرج شامل عبارت هایی بر حسب $n!$ و این قبیل عبارات بود). من هم فکر می کردم این مسئله را با راه حل معلوم و مرسوم باید حل کنیم (یعنی کسر را ساده کنیم). یکی از

دیگری برنده نهایی شود و از همین نقطه شروع کردند به پیدا کردن راه حل و از همین جا بود که بحث احتمال مطرح شد. وقتی من این مسئله را خواندم به این نتیجه رسیدم که می توانم بگویم احتمال عبارت است از ریاضیات به علاوه نوعی قضاوت. چرا قضاوت، چون این کلمه عادلانه را ریاضیات نمی فهمد. این ما هستیم که در حل مسئله باید قضاوت کنیم که راه حل ما، عادلانه بودن را دربر گرفته است یا خیر.

● **غلامی:** سؤالی که همیشه ذهن مرا درگیر می کند، شیوه برخورد دانش آموزان ما با درس ریاضی است. در واقع اکثر بچه های ما، با اینکه اصل یک مبحث ریاضی را می فهمند، اما عمدتاً با مشکل ابتدایی محاسبات در تمرین ها مواجه می شوند. البته این مشکل در بسیاری از درس های دیگر هم مانند فیزیک و شیمی گریبانگیرشان می شود. به نظر شما چرا پایه ریاضیات در دانش آموزان ما آن طور که باید قوی نیست و در محاسبات ضعف دارند؟

● **پاشا:** احتمالاً همکارهای من به دلیل اینکه با دانش آموزان وقت بیشتری را می گذرانند، می توانند به شما پاسخ شفاف تری بدهند. اما شخصاً فکر می کنم که دانش آموزان ما در وهله اول از درس خواندن لذت نمی برند. در واقع با شوق درس نمی خوانند. البته اینکه چرا درس ها برای بچه ها لذت بخش نیست دلایل دیگری هم دارد که خودش بحث جداگانه ای را می طلبد. از طرف دیگر، دانش آموزان برای درس خواندن آن طور که باید وقت نمی گذارند. یادم می آید که یکی از هم کلاسی هایم یک کتاب حل المسائل هندسه داشت. من کتاب را از او قرض گرفتم و شبانه تمام صورت مسئله ها را نوشتم. صبح کتاب را با چشم های خواب آلود پس دادم (آن وقت ها پلی کپی، زیراکس، رایانه، ایمیل، دانلود و این حرف ها نبود!) و شروع می کردم به حل تمرین ها. تمام توانم را برای حل مسئله ها می گذاشتم. وقتی می دیدم مسئله ای سخت است و دیگر نمی توانم حلش کنم، می رفتم سراغ هم کلاسی ام و به او می گفتم من یک مسئله خوب دارم. می خواهی به تو بدهم تا حل کنی؟ او هم مسئله را می گرفت

فکر می کنم که
دانش آموزان ما
در وهله اول از
درس خواندن
لذت نمی برند. در
واقع با شوق درس
نمی خوانند



**دانش آموز اصلاً
نباید جلوی یک
مسئله بی کار
بنشیند و نگاهی
کند. باید با آن تا
جایی که می تواند
سروکله بزند**

همین دانش آموزان گفت: این واضح است که عدد طبیعی نیست و دلیلش را هم توضیح داد که بعد از ضرب، توان صورت می شود ۱۵ و توان مخرج می شود ۱۷. پس اگر ساده شود، هیچ «عامل n» در صورت نمی ماند و در نتیجه نمی تواند عدد طبیعی شود. من با خودم فکر کردم که چه قدر قشنگ این مسئله را دید و حل کرد.

چنین چیزی در مدرسه به نظر شعبده بازی می آید، ولی ما باید طوری بچه ها را بار بیاوریم که این طور به مسئله ها نگاه کنند و باید بتوانند محاسبات دستی شان را هم به خوبی انجام دهند. کاری که گاوس برای جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ کرد. یک خاطره هم بگویم. در آمریکا یک هم اتاقی داشتم. دماسنج های آمریکا از نوع فارنهایت بود و وقتی ما می خواستیم به سانتی گراد تبدیلش کنیم او از ماشین حساب کمک می گرفت، اما من با دست حساب می کردم. نتیجه این بود که من سریع تر به جواب می رسیدم. یعنی با استفاده از فرمول تبدیل فارنهایت به سانتی گراد، به سرعت تا او بیاید از ماشین حساب کمک بگیرد، کار را تمام می کردم. یعنی دست هایم روان بودند. آن وقت ها قالب بسیاری از محاسبات در ذهنمان بود و می توانستیم به سرعت آن ها را انجام دهیم.

چنین چیزی در مدرسه به نظر شعبده بازی می آید، ولی ما باید طوری بچه ها را بار بیاوریم که این طور به مسئله ها نگاه کنند و باید بتوانند محاسبات دستی شان را هم به خوبی انجام دهند. کاری که گاوس برای جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ کرد. یک خاطره هم بگویم. در آمریکا یک هم اتاقی داشتم. دماسنج های آمریکا از نوع فارنهایت بود و وقتی ما می خواستیم به سانتی گراد تبدیلش کنیم او از ماشین حساب کمک می گرفت، اما من با دست حساب می کردم. نتیجه این بود که من سریع تر به جواب می رسیدم. یعنی با استفاده از فرمول تبدیل فارنهایت به سانتی گراد، به سرعت تا او بیاید از ماشین حساب کمک بگیرد، کار را تمام می کردم. یعنی دست هایم روان بودند. آن وقت ها قالب بسیاری از محاسبات در ذهنمان بود و می توانستیم به سرعت آن ها را انجام دهیم.

● شرقی: خب اگر موافق باشید، به دانشگاه و استادانتان همچون مرحوم مصاحب اشاره کنیم.
پاشا: البته اجازه بدهید، قبل از آن اشاره ای هم به

● شرقی: خب اگر موافق باشید، به دانشگاه و استادانتان همچون مرحوم مصاحب اشاره کنیم.
پاشا: البته اجازه بدهید، قبل از آن اشاره ای هم به



**حدود ۷۰ نفر
برای آزمون
ورود به مؤسسه
ریاضیات دکتر
مصاحب داوطلب
بودند که هفت
نفر قبول شدند
و من یکی از آنها
بودم**

(طالقانی فعلی) به «مؤسسه ریاضیات» که تحت مسئولیت دکتر مصاحب اداره می‌شد و دفترچه‌ای را گرفته‌اند. یکی از دوستان گفت من این دفترچه را نمی‌خواهم، اگر می‌خواهی بگیر. من هم آن را گرفتم و به خانه بردم. مطالعه کردم و دیدم بد نیست بروم و در آزمون دکتر مصاحب که در اردیبهشت ماه برگزار می‌شد، شرکت کنم، شاید فوق لیسانس را آنجا بخوانم.

اردیبهشت ۱۳۵۰ من برای امتحان به آنجا رفتم و اولین بار مرحوم دکتر مصاحب را دیدم. حدود ۷۰ نفر برای آزمون آمده بودند که در نهایت ۱۰ نفر از جمع آن‌ها پذیرفته شدند و در آزمون دیگری، سه نفر دیگر هم حذف شدند و هفت نفر، که من هم یکی از آن‌ها بودم، قبول شدیم و دوره فوق لیسانس را از اول مهر شروع کردیم. آن موقع دکتر مصاحب در حال تألیف کتاب معروف سه جلدی «تئوری مقدماتی اعداد» بود و ما آن را به عنوان واحد درسی خواندیم. در خاتمه دوره فقط سه نفر فارغ التحصیل شدیم: من و آقای دکتر آدینه محمد نارنجانی...

● **شرقی:** مترجم کتاب معروف تئوری اعداد مرکز نشر دانشگاهی؟

پاشا: بله، و یک نفر به نام **حاج جعفر** که با ما به آمریکا آمد و دیگر برنگشت. یک خاطره هم بگویم: در پایان سال اول، دکتر مصاحب برای عید ۳۰ مسئله از همان کتاب به ما داد که حل کنیم.

صفحه طی دو ساعت و نیم همه‌اش را می‌گفتم! در سال دوم دانشگاه که بودم، یک‌بار پسر همسایه‌مان گفت: «عین‌الله‌خان! من چند تا سؤال دارم، بیایم ازت بپرسم؟» گفتم بیا. بحث فیزیک بود. آنجایی را که او مشکل داشت من قبلاً رفتم از کتاب فیزیک خودم که تنوی زیرزمین بود، برداشتم و خواندم. این مشکل او را که مربوط به دو صفحه کتاب بود، دو ساعت تمام مجبور شدم مطالعه کنم تا بتوانم به او یاد بدهم، در حالی که قبلاً کل کتاب را در دو ساعت بیان می‌کردم! اینجا بود که به مفهوم واقعی آموزش پی بردم و فهمیدم که این دو سال دانشگاه روی رفتار من تأثیر گذاشته است.

خلاصه چهار سال دانشگاه ما گذشت و سال آخر بودیم که با دکتر **للهی** درس «توپولوژی» داشتیم (ایشان شاگرد اول دوره لیسانس شده و با بورس تحصیلی به فرانسه رفته بود و بعدها در تألیف کتاب‌های درسی هم همکاری داشت). ایشان استاد بسیار خوبی بود و تکالیف خوبی هم به ما می‌داد که من همه را مرتب انجام می‌دادم. اواخر دوره لیسانس بود که دانشگاه به علت اعتصاب تعطیل بود، زمستان هم بود و من در خانه بودم. یک روز با خودم گفتم بروم ببینم دانشگاه چه خبر است. رفتم کوی دانشگاه و به دوستانم سری زدم. از دوستانم پرسیدم حالا که دانشگاه تعطیل شده، چه می‌کنید؟ یکی از آن‌ها تعریف کرد که رفته‌اند در خیابان تخت جمشید



امیری

را می‌گذارید ریاضی‌دان، مصاحب ریاضی‌دان نبود!« نظر شما چیست؟ آیا ایشان را ریاضی‌دان می‌دانستید؟ من کسی را ریاضی‌دان می‌دانم که علم ریاضی تولید کرده باشد.

پاشا: می‌خواهم بگویم که ایشان را بالاتر از ریاضی‌دان می‌دانم. همان‌طور که در مورد مرحوم غیور گفتم، ایشان را جامع‌الاطراف می‌دانم.

● **یاسی‌پور:** من پیش آقای دکتر شفيعی کدکني بودم. او گفت: من آدمی به باسوادی مصاحب ندیدم. فلسفه اسلامی را پیش آقای آشتیانی خوانده بود و آدم بسیار برجسته‌ای بود.

● **امیری:** توی بحث ریاضی چه‌طور؟ مثلاً مقالات ایشان و...

پاشا: ایشان یک مقاله داشت که در مجله سلطنتی انگلیس چاپ شد. مقاله دیگری نداشت، ولی در ایران کارهای بزرگی کرد. یعنی راه را برای ریاضی خواندن خیلی‌ها باز کرد.

● **یاسی‌پور:** منطق ریاضی را هم برای نخستین بار معرفی کرد.

● **امیری:** این کتاب تئوری اعداد، مطالبش بیشتر از خودش بود، یا جمع‌آوری شده بود؟

بعد از تعطیلات که برگشتیم، مصاحب از من پرسید: چند تا مسئله حل کردی؟ گفتم: ۱۶ تا. حاج جعفر گفت ۸ تا و نارنجانی گفت: هر سی مسئله را حل کردم! مصاحب حسابی تعجب کرد و بعد از آن دیگر نارنجانی شد نورچشمی مصاحب و حتی در مقدمه کتاب تئوری اعدادش هم از او اسم برده است. البته نارنجانی در تئوری اعداد واقعاً خبره و استاد بود. بعد رفت خارج و تئوری اعداد هم خواند و بعد منتقل شد به مشهد و الان هم بازنشسته شده است.

● **شرقی:** قدری هم از خلیات و خصوصیات دکتر مصاحب بگویید.

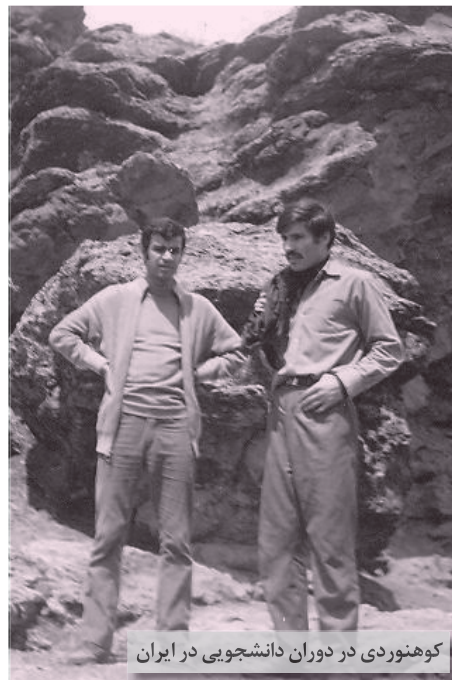
پاشا: من تا به حال دو مقاله در مورد مرحوم مصاحب نوشته‌ام. یکی در «کنفرانس بزرگداشت مصاحب و آنالیز»، و دیگری دو سال پیش در مجله «مهرنامه» به مناسبت سی‌امین سال درگذشت ایشان.

● **امیری:** ما در مجله برهان در شماره بهار ۹۲ در صفحه ۲ جلد، زندگی‌نامه مختصری از ایشان به‌عنوان ریاضی‌دان معاصر داشتیم. یک نفر که اسم نمی‌برم، به من گفت: «چرا اسم بعضی‌ها

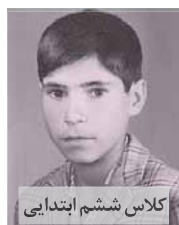
دکتر مصاحب را بالاتر از ریاضی‌دان می‌دانم، ایشان جامع‌الاطراف بودند



شرکت‌کنندگان در کنفرانس آمار ایران به ترتیب از راست به چپ، آقایان: دکتر محمدزاده - دکتر پاشا - دکتر نور بلوچی - دکتر فقیه‌ی



کوه‌نوردی در دوران دانشجویی در ایران



کلاس ششم ابتدایی



دوره دانشجویی در دانشگاه ایالتی میشیگان



در نگارش کتاب‌های درسی پیدا شده است. از این تفاوت‌ها چه قدر اطلاع دارید؟

پاشا: چیزهایی شنیده‌ام، خب باید عوض می‌شد. در دنیایی که این همه تغییرات در آن اتفاق افتاده، حرف ۲۰ ساله کهنه است. به قول مولوی: «چون که با کودک سروکار تفتاد، پس زبان کودکی باید گشاد» باید زبانمان را با بچه‌های این دوره و زمانه مطابق کنیم.

در انتهای مصاحبه، اشاره‌ای هم به دورهٔ دکترا و بعد از آن بکنم. بعد از پایان تحصیلات در مؤسسهٔ ریاضیات، در «دانشگاه تربیت معلم» که الان خوارزمی شده و قبلاً دانشسرای عالی و قبل از آن دارالمعلمین مرکزی بود و سه سال دیگر به صدمین سال تأسیس آن می‌رسیم، استخدام شدم. همین‌جا به سؤالی که آقای یاسی‌پور پرسیدند و اینکه چه‌طور شد که با آن همه علاقه به هندسه، از رشتهٔ آمار و احتمال سر درآوردم، جواب بدهم. آمدن من به مؤسسه همان‌طور که دیدید، امری کاملاً تصادفی بود. بعد از اینکه تحصیل در مؤسسهٔ ریاضی تمام شد، بعد از سه چهار سال که استخدام بودم و درس می‌دادم، بورسی به من دادند که بروم خارج و ادامهٔ تحصیل بدهم. قرار بود بروم هندسهٔ دیفرانسیل بخوانم (می‌بینید که هندسه را رها نکرده بودم)، اما به ما گفتند: استاد آمار نداریم و یکی باید برود و آمار بخواند. من از سه‌جا پذیرش خواسته بودم: دانشگاه میشیگان رشتهٔ آمار، دانشگاهی دیگر برای هندسه و جای دیگر برای توپولوژی. جواب دانشگاه میشیگان زودتر آمد و در آن دانشگاه مشغول شدم.

بعد از انقلاب فرهنگی برگشتم و به کار تدریس رشتهٔ آمار و احتمال در دانشگاه تربیت معلم و دیگر دانشگاه‌ها مشغول شدم، تا حالا که با کمال رضایت به کار معلمی و تدریس می‌پردازم.

شرقی: و حتماً هم از زندگی و کارتان راضی هستید؟

پاشا: البته، خب این کارها لذت‌بخش است.

شرقی: از اینکه به ما وقت دادید، کمال تشکر را از شما داریم.

پاشا: بیشتر جمع‌آوری بود. هم تئوری اعداد و هم آنالیز، بیشتر جمع‌آوری بود. اما من باید موضوعی را یادآوری کنم. الان این‌طور شایع شده که هر کسی هنوز لیسانس هم نگرفته است، پنج شش مقاله دارد. آن وقت‌ها این حرف‌ها نبود. افراد کمی دنبال چاپ مقاله و کتاب بودند. دیگر اینکه ایشان برای خدمت به ایران آمد، در حالی که اگر آنجا می‌ماند، به حدی یک فوق‌ریاضی‌دان می‌رسید.

شرقی: دکتر مصاحب اولین کارهای ریاضی‌اش را به صورت کتاب و مجله در ۱۸ سالگی نوشت. تعریف ریاضی‌دان چیست؟ به نظر من ریاضی‌دان کسی است که برای پیشرفت یکی از شاخه‌های ریاضی قدمی برداشته باشد، ریاضیات شغلش نباشد، بلکه خودش را وقف ریاضیات کرده باشد. با این تعریف من معتقدم مرحوم پرویز شهریاری حتماً ریاضی‌دان بوده است. زیرا به پیشرفت یکی از شاخه‌های ریاضی، یعنی تاریخ ریاضیات کمک کرد و علاوه بر آن، در توسعهٔ آموزش ریاضی کشورمان هم نقش جدی داشت؛ اگرچه تحصیلات خیلی بالایی هم در رشتهٔ ریاضی نداشت. حالا کسی مثل مصاحب که جای خود دارد که تحصیلات عالی‌ه هم داشت و استاد دانشگاه هم بود.

پاشا: من با این برجسب زدن‌ها کاملاً مخالفم، مصاحب خودش بود و کارهای بزرگی کرد. دربارهٔ خلق و خویش هم بگویم که ما بعدها فهمیدیم چه آدم مهربانی بوده است. سختگیری‌هایی هم که می‌کرد، به خاطر خودمان بود و اینکه می‌خواست ما را تربیت کند. وقتی من از آمریکا به ایران آمدم، رفتم پیش ایشان. ما وقتی دانشجوی‌شان بودیم، خیلی از ایشان ترس و وحشت داشتیم. اما آن روز خیلی خوب از من پذیرایی کرد و دستور داد برایم جای آوردند. بعداً که برایشان به مناسبت عید نوروز کارت تبریک فرستادم، برایم نامه‌ای نوشت و در آنجا مرا با عنوان «نورچشم عزیزم، عین‌الله پاشا» خطاب کرد. آن وقت بود که فهمیدم، ایشان در عین سخت‌گیری، چه قلب رئوف و مهربانی داشته است.

امیری: به عنوان آخرین سؤال، شما خودتان از مؤلفان کتاب‌های درسی بوده‌اید. اخیراً تفاوت‌هایی

بعد از انقلاب
فرهنگی، به کشور
برگشتم و به
تدریس آمار
و احتمال در
دانشگاه‌ها
مشغول شدم و
با کمال رضایت
به کار معلمی و
تدریس می‌پردازم

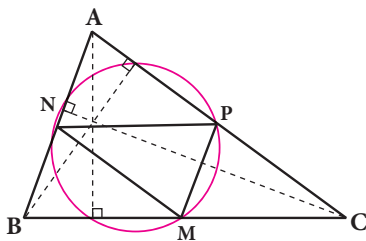
نامساوی اویلر

اشاره

لئونارد اویلر^۱، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان برجسته سوئیسی، در سال ۱۷۶۷ قضیه‌ای را در هندسه منتشر کرد که اکنون به رابطه اویلر مشهور است ($OI^2 = R^2 - 2Rr$). از این رابطه می‌توان به نامساوی $R \geq 2r$ پی برد که در آن شعاع دایره محیطی و شعاع دایره محاطی است. از آن به بعد اثبات‌ها و تعمیم‌های متفاوتی برای این نامساوی در مجلات ریاضی دنیا منتشر شد. ما نیز در این مقاله سعی داریم اثباتی ساده و مقدماتی برای این نامساوی مطرح کنیم.

اکنون قصد داریم با استفاده از این قضیه، نامساوی اویلر را ثابت کنیم.

نامساوی اویلر: در هر مثلث، با شعاع دایره محیطی R و شعاع دایره محاطی داخلی r داریم: $R \geq 2r$.



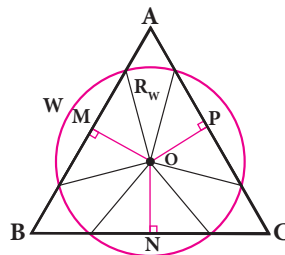
اثبات: فرض کنید P و N, M اواسط اضلاع BC و AB و AC باشند. روشن است که دو مثلث MNP و ABC با نسبت تشابه $\frac{1}{4}$ با هم متشابه‌اند. پس شعاع دایره محیطی MNP نصف شعاع دایره محیطی ABC است.

از طرف دیگر، دایره محیطی MNP با هر سه ضلع مثلث متقاطع است (این دایره از پای ارتفاعات مثلث نیز می‌گذرد). در نتیجه، بنابر قضیه قبل می‌توان گفت:

$$\frac{R}{2} = R_{MNP} \geq r \Rightarrow R \geq 2r$$

و حالت تساوی تنها زمانی رخ می‌دهد که پای ارتفاعات و اواسط اضلاع برهم منطبق باشند. یا به عبارت دیگر، مثلث، متساوی‌الاضلاع باشد.

قضیه: دایره W با شعاع R_W با هر سه ضلع مثلث ABC متقاطع است. آن‌گاه داریم: $R_W \geq r$ (شعاع دایره محاطی مثلث است).



اثبات: از O (مرکز دایره W) بر اضلاع BC, AB و AC عمودهای OM, ON و OP را وارد می‌کنیم. از آنجا که در مثلث قائم‌الزاویه وتر بزرگ‌ترین ضلع است، پس: $OM \leq R_W, ON \leq R_W$ و $OP \leq R_W$. از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} \text{مساحت } \triangle ABC &= \text{مساحت } \triangle AOB + \text{مساحت } \triangle BOC + \text{مساحت } \triangle AOC \\ &= \frac{OM \times AB}{2} + \frac{ON \times BC}{2} + \frac{OP \times AC}{2} \end{aligned}$$

همچنین با توجه به نامساوی‌های گفته شده داریم:

$$\frac{OM \times AB}{2} + \frac{ON \times BC}{2} + \frac{OP \times AC}{2} \leq R_W \left(\frac{AB + AC + BC}{2} \right)$$

در نتیجه:

$$S \leq R_W \cdot P$$

$$\Rightarrow \frac{S}{P} \leq R_W \Rightarrow r \leq R_W$$

$$(P \text{ نصف محیط مثلث است و می‌دانیم که: } r = \frac{S}{P})$$



محمد طبیعی*
دانش‌آموز سال چهارم
رشته ریاضی
دبیرستان علامه طباطبائی تهران

*بی‌نوشت‌ها.....

1. Leonhard Euler
 $r = \frac{S}{P}$ اثبات فرمول

در کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه»، ترجمه زنده‌یاد مصطفی از انتشارات مدرسه آمده است.

* htabee@gmail.com

در این شماره هم مانند یکی از شماره‌های سال گذشته، از جدول‌های ارسالی همکاران محترم استفاده کرده‌ایم. ما از این موضوع استقبال می‌کنیم و همین‌جا از شما دبیران و دانش‌آموزان عزیز می‌خواهیم که به کمک ما بشتابید و برای غنای بیشتر ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی، سرگرمی‌ها، جدول‌ها، بازی‌های ریاضی و یا لطیفه‌هایتان را برای ما بفرستید. اگر این آثار از کارهای خودتان باشد، چه بهتر و بسیار مایه مسرت است؛ ولی ترجمه‌هایتان را هم با ذکر منبع می‌توانید برایمان ارسال کنید. به یقین سپاس‌گزارتان خواهیم بود.

ایستگاه اول: جدول واژه‌های ریاضی



۱. اتحاد شادا! - خطی که با احتیاط از کنار منحنی رد می‌شود!

۲. مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب - مستقل نیست

۳. زاویه‌ای که سینوس و کسینوس آن مثبت است - مساوی نیست.

۴. انتخابی از اشیاء که در آن ترتیب مهم نیست - جمله چندم دنباله حسابی ... ۹۸، -۱۰۰، برابر ۳۸ است؟

۵. توان دوم هر عدد را ... آن عدد می‌گویند - سطح تشکیل دهنده یک شکل را گویند.

۶. کنج و گوشه - یکی از ریشه‌های معادله $۲x^2 - ۷x - ۴ = ۰$.

۷. اگر دو عبارت جبری به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، مقدار یکسانی داشته باشند، عبارت حاصل از تساوی این دو را ... می‌نامند - خطی که با خط دیگر تشکیل زاویه قائمه می‌دهد.

۸. شکل تابع درجه دوم - یکی از چهار عمل اصلی.

۸	۷									۶	۵	
												۱
												۲
												۳
												۴



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در فصل نامه برهان است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از فصل نامه، تعدادی مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان مجله را به چالش می‌طلبد. همچنین، از خوانندگان مجله دعوت می‌کنیم که مسائل خود را برای انعکاس در مجله برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل خود را همراه با حل آن‌ها بفرستید. شما می‌توانید مسائل و راه حل‌های خود را از طریق پستی (به آدرس فصل نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طبقه دوم سریع تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل نامه درج و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا خواهد شد.

همچنین می‌توانید با مراجعه به وبلاگ مجله - که نشانی آن در صفحه فهرست مجله آمده است - به مسائل شماره‌های آینده دسترسی پیدا کنید.

بخش اول:

مسئله‌ها

۱۲۴. a و b دو عدد طبیعی‌اند، به طوری که $a^2 + b^2$ بر

۲۱ بخش پذیر است. ثابت کنید $a^2 + b^2$ بر ۴۱

بخش پذیر است.

۱۲۵. یازده دانش آموز در اردویی تابستانی، پنج گروه

پژوهشی تشکیل داده‌اند. ثابت کنید که می‌توان

دو دانش آموز مانند A و B طوری پیدا کرد که هر

گروه پژوهشی که شامل دانش آموز A باشد، شامل

دانش آموز B هم باشد.

۱۲۶. طول تکه سیمی ۱۲۰ سانتی متر است. آیا

می‌توان با استفاده از آن (بدون بریدن) اسکلت

مکعبی را ساخت که طول هر یالش ۱۰

سانتی متر باشد؟

۱۲۱. ثابت کنید معادله $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$

در مجموعه اعداد طبیعی فرد، جواب ندارد.

۱۲۲. آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را پشت سرهم طوری چید

که تعداد عددهای میان ۱ و ۲، میان ۲ و ۳، ... و

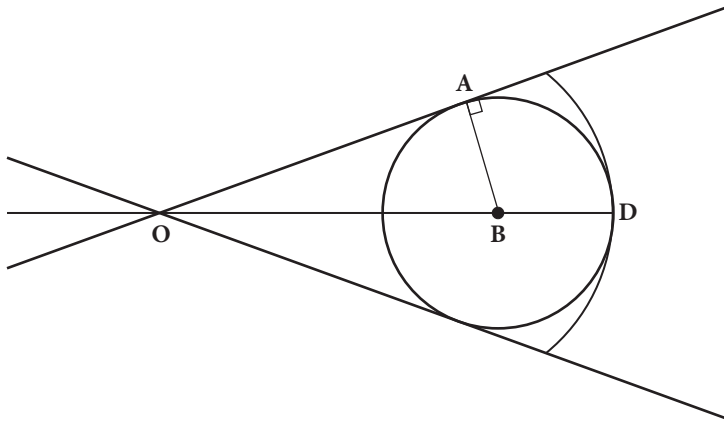
میان ۸ و ۹، عددی فرد باشد؟

۱۲۳. ثابت کنید عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که

جملات دنباله حسابی $a+b, a+2b, \dots, a+nb$

همگی مرکب باشند. a و b دو عدد طبیعی ثابت‌اند.

است با: $OC = OB + BD = 1 + \frac{1}{\sin 15^\circ}$



شکل ۱

۶۳. با فرض $0 \leq x \leq y \leq 1$ ، مطلوب است کمترین مقدار ماکزیمم سه عدد زیر:

$$xy, 1-x-y+xy, x+y-2xy$$

راه حل ارائه شده توسط محمد طبعی از تهران:
داریم:

$$(1-2x)(1-2y) = xy + (1-x-y+xy) - (x+y-2xy)$$

در نتیجه اگر یکی از دو عدد x و y از $\frac{1}{2}$ کمتر یا مساوی با آن و دیگری از $\frac{1}{2}$ بیشتر یا مساوی با آن باشد، آن گاه داریم:

$$xy + (1-x-y+xy) \leq x+y-2xy \Rightarrow \frac{1}{4} \leq x+y-2xy$$

در این حالت کمترین مقدار ماکزیمم برابر $\frac{1}{4}$ است.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که x و y هر دو از $\frac{1}{4}$ کمتر یا هر دو بیشتر از $\frac{1}{4}$ باشند. سه عدد داده شده به صورت

$$xy, (1-x)(1-y) \text{ و } x(1-y)+y(1-x) \text{ هستند. پس بدون}$$

از دست دادن کلیت مسئله می توان فرض کرد x و y هر دو از $\frac{1}{4}$ بیشترند و: $xy > (1-x)(1-y)$. پس ماکزیمم، بین دو عدد xy و $x+y-2xy$ خواهد بود.

با ثابت گرفتن y و تغییر دادن x ، تغییرات دو تابع

$$f(x) = xy \text{ و } g(x) = x+y-2xy \text{ را در بازه } \left[\frac{1}{4}, 1\right] \text{ بررسی}$$

می کنیم. به راحتی دیده می شود اگر $M > x$ ، آن گاه:

۱۲۷. ثابت کنید هر پنج ضلعی محدب، سه قطر دارد که می توان با آن ها یک مثلث رسم کرد.

۱۲۸. دو بازیکن به نوبت اسب هایی را روی خانه های صفحه شطرنج می گذارند که هیچ یک از آن ها دیگری را تهدید نکنند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می بازد. چه کسی راهبرد برد دارد؟
۱۲۹. فرض کنید n ، عددی طبیعی و بزرگ تر از ۵ است. ثابت کنید هر مربع را می توان فقط با برش های افقی و عمودی، به n مربع تقسیم کرد.

۱۳۰. در جدولی از m سطر و n ستون، خانه محل برخورد سطر f ام و ستون g ام را علامت گذاشته ایم. چند تا از مستطیل هایی که از خانه های این جدول تشکیل شده اند، این خانه علامت دار را دربردارند؟

بخش دوم:

راه حل ها

۶۱. تابع f مفروض است، به طوری که به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داریم: $f(x+y) = f(x)f(y)$. اگر $f(2) = 5$ ، مطلوب است مقدار $f(n)$ بر حسب n برای $n \in \mathbb{Z}$.
قرار دهید $y = 0$ و $x = 2$. داریم: $f(2) = f(0)f(2)$.
در نتیجه: $f(0) = 1$. سپس قرار دهید $x = y = 1$. داریم: $5 = f(2) = (f(1))^2$ یا $f(1) = \sqrt{5}$ یا $f(1) = -\sqrt{5}$.
به روش استقرا می توان ثابت کرد برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $f(n) = (f(1))^n$ و $f(-n) = (f(1))^{-n}$. در نتیجه دو جواب برای f وجود دارد: $f(n) = (\sqrt{5})^n$ و $f(n) = (-\sqrt{5})^n$.

۶۲. دو قطر از دایره C را رسم کرده ایم، به طوری که این دو قطر با هم زاویه 30° درجه می سازند. اگر دایره ای به شعاع ۱ طوری رسم شده باشد که به دو قطر مذکور و دایره C مماس باشد، شعاع دایره C حداکثر چه قدر است؟

زاویه $\angle AOB$ پانزده درجه است و $AB = 1$. در نتیجه: $OB = \frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{1}{\sin 15^\circ}$. بنابراین شعاع دایره C برابر

$$g(M) < g(x) \text{ و } f(M) > f(x)$$

می‌کنند و می‌توانند طول‌های اضلاع یک مثلث باشند.

از طرفی داریم: $t(x) = g(x) - f(x) = x + y - 3xy$

$$t(1) = 1 - 2y < 0 \text{ و } t\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} + y - \frac{3}{y}y = \frac{1}{y} - \frac{y}{y} > 0$$

لذا $t(x)$ ریشه‌ای بین $\frac{1}{y}$ و 1 دارد. پس $\frac{1}{y} < M \leq 1$

موجود است، به‌طوری‌که: $f(M) = g(M)$. به‌راحتی

می‌توان نشان داد کمترین مقدار ماکزیمم در M

اتفاق می‌افتد که در این حالت داریم: $M = \frac{y}{3y-1}$ و

$$g(M) = f(M) = \frac{y^2}{3y-1}$$

از طرف دیگر:

$$(3y-2)^2 \geq 0 \Rightarrow 9y^2 + 4 - 12y \geq 0$$

$$\Rightarrow 9y^2 \geq 4(3y-1) \Rightarrow \frac{y^2}{3y-1} \geq \frac{4}{9}$$

در نتیجه کمترین مقدار ماکزیمم برابر است با $\frac{4}{9}$ که به ازای $x = y = \frac{2}{3}$ اتفاق می‌افتد.

■ نکته: در محاسبه r_1, r_2 و r دستور محاسبه شعاع دایره محاطی هر مثلث، یعنی $r = \frac{S}{P}$ مورد استفاده قرار گرفته است. در این دستور S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث است.

۶۵. مجموعه $X = \{1, 2, \dots, n\}$ چند زیرمجموعه k عضوی دارد که شامل عدد k نباشد؟

اگر k مقداری ثابت باشد باید از $k, X - \{k\}$ عضو انتخاب کنیم. پس $\binom{n-1}{k}$ انتخاب وجود دارد. اگر k بتواند هر مقداری باشد، آن‌گاه پاسخ $N = 2^{n-1}$ یا $N = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-1}$ خواهد بود.

۶۶. نشان دهید $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ عددی گویا است.

با فرض $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ دو طرف تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم. داریم:

$$A^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3A\sqrt[3]{4-5} \\ \text{در نتیجه: } A^3 + 3A - 4 = 0. \text{ بنابراین باید: } (A-1)(A^2 + A + 4) = 0. \\ \text{چون معادله فقط یک ریشه دارد، در نتیجه: } A = 1.$$

راه حل دوم (از هوشنگ شرقی):

$$2 + \sqrt{5} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3, 2 - \sqrt{5} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \\ \Rightarrow \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

۶۴. فرض کنید r شعاع دایره محاطی مثلث ABC

و D نقطه‌ای روی ضلع BC باشد. اگر r_1 و r_2

به ترتیب برابر شعاع دایره محاطی مثلث‌های

ABC و ACD باشند، ثابت کنید r, r_1 و r_2

می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند.

$$AB + AD + BD < AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow \frac{2S_{ABD}}{AB + AD + BD} > \frac{2S_{ABD}}{AB + AC + BC}$$

$$AC + AD + CD < AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow \frac{2S_{ACD}}{AC + AD + CD} > \frac{2S_{ACD}}{AB + AC + BC}$$

در نتیجه:

$$r_1 + r_2 > \frac{2(S_{ABD} + S_{ACD})}{AB + AC + BC} = \frac{2S_{ABC}}{AB + AC + BC} = r$$

بنابراین، r_1, r_2 و r در نابرابری‌های مثلثی صدق

۶۷. مطلوب است ریشه‌های معادله

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 2x - 1) + 24 = 0$$

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 2x - 1) + 24$$

$$= (x+1)(x+2)(x-3)(x-4)(x^2 - 2x - 1) + 24$$

$$= (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x - 1) + 24$$

$$= (a-3)(a-8)(a-1) + 24 = a(a-5)(a-7)$$

که در آن: $a = x^2 - 2x$. در نتیجه به سه معادله
 $x^2 - 2x = 0$, $x^2 - 2x = 5$ و $x^2 - 2x = 7$ می‌رسیم. به راحتی
 مشخص می‌شود که ریشه‌های معادله عبارت‌اند از:
 0 , 2 , $1 \pm \sqrt{6}$ و $1 \pm \sqrt{8}$.

۶۸. علی تعدادی برگه کاغذ دارد و تعداد کاغذها

عددی بین ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ است. او سعی می‌کند
 برگه‌ها را به دسته‌های ۲ تایی تقسیم کند.
 در نهایت یک برگه اضافه می‌آید. در تقسیم
 برگه‌ها به دسته‌های ۳ تایی، به دسته‌های
 ۴ تایی، ... به دسته‌های ۸ تایی نیز همین اتفاق
 تکرار می‌شود (یک برگه اضافه می‌ماند). علی
 چند برگه کاغذ دارد؟

اگر n تعداد برگه‌ها باشد، آن‌گاه بر ۱- n ، ۲، ۳، ...
 ۸ بخش‌پذیر است. در نتیجه باید ۱- n بر کوچک‌ترین
 مضرب مشترک آن‌ها بخش‌پذیر باشد. در نتیجه باید
 ۱- n مضرب ۸۴۰ باشد. تنها عدد ممکن $n = 2 * 840 + 1$
 است. پس: $n = 1681$.

۶۹. $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۴ است

به طوری که $f(-3) = -9$, $f(2) = -4$, $f(-1) = -1$ و

$$f(4) = -16 \text{ مطلوب است مقدار } f(1).$$

تابع $g(x) = f(x) + x^2$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$g(2) = f(2) + 4 = 0 \text{ و } g(-3) = f(-3) + 9 = 0$$

$$g(4) = f(4) + 16 = 0 \text{ و } g(-1) = f(-1) + (-1)^2 = 0$$

در نتیجه چندجمله‌ای درجه چهارم g بر $(x+1)$ ،
 $(x-2)$ ، $(x+3)$ و $(x-4)$ بخش‌پذیر است. در نتیجه:

$$g(x) = k(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$$

بنابراین: $f(x) = k(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) - x^2$. پس:
 $f(1) = 24k - 1$

۷۰. مربع‌های ABKL، BCMN، CAOP روی

اضلاع مثلث ABC و خارج مثلث بنا شده‌اند.
 پاره‌خط‌های KL، MN و OP را امتداد می‌دهیم
 تا مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود. اگر ABC مثلثی
 متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ باشد، مساحت
 مثلث $A'B'C'$ را به دست آورید.

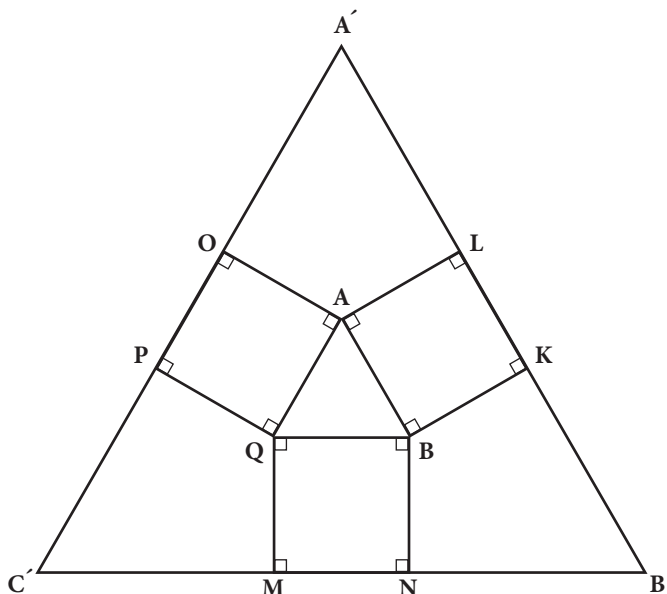
چون اضلاع $A'B'C'$ با اضلاع ABC موازی هستند،
 پس دو مثلث متشابه‌اند و $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع
 است. از طرف دیگر، شش مثلث قائم‌الزاویه به حالت وتر
 و یک ضلع با هم هم‌نهشت خواهند شد (چرا؟) و زوایای
 داخلی هر کدام 30° و 60° خواهد شد. در نتیجه:

$$A'L = KB' = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

یعنی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ برابر
 است با $2 + 4\sqrt{3}$ و مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (2 + 4\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (52 + 16\sqrt{3})$$

$$= 13\sqrt{3} + 12$$



شکل ۲

دسته‌بندی داده‌های پیوسته در آمار توصیفی

(درس آمار و مدل سازی دوره دوم متوسطه)

مقدمه

یکی از بخش‌های علم آمار، آمار توصیفی است که کتاب «آمار و مدل سازی» به آن پرداخته است. آمار توصیفی شامل روش‌های جمع‌آوری و خلاصه کردن داده‌هاست و یکی از راه‌های خلاصه کردن داده‌های متغیر تصادفی پیوسته، دسته‌بندی (طبقه‌بندی) آن‌هاست. دسته‌بندی داده‌ها در کتاب‌های آمار به روش‌هایی متفاوت مطرح شده است، ولی هدف همه آن‌ها کم کردن حجم داده‌ها برای راحت توصیف کردن موضوع یا موضوعات مورد مطالعه است. در این مقاله سعی شده روشی را که کتاب درسی آمار و مدل سازی برای دسته‌بندی داده‌ها مطرح کرده است، با روش‌های کتاب‌های دیگر آماری تلفیق کنیم و روشی ساده و راحت برای دانش‌آموزان و دانشجویان مطرح سازیم.



رضا زینی‌وند
دبیر دبیرستان‌های
استان ایلام - دره‌شهر

کلیدواژه‌ها: داده‌های آماری، دسته‌بندی

۲. مشخص کردن تعداد دسته‌ها

تعداد دسته‌ها را می‌توان به‌طور اختیاری با توجه به تعداد داده‌ها بین ۵ تا ۲۰ دسته تعیین کرد. همچنین می‌توان تعداد دسته‌ها را نیز با استفاده از فرمول‌هایی به‌صورت زیر محاسبه کرد (این دستورهای پیشنهادی بوده و دقیق نمی‌باشند و تنها می‌توانند نقطه شروعی مناسب را برای دسته‌بندی به‌دست دهند):

الف. محاسبه تعداد دسته‌ها با فرمول $k = [\sqrt{n}] + 1$ که در آن k تعداد دسته‌ها، n تعداد داده‌ها و نماد $[\]$ جزء صحیح است. در مثال ۱ تعداد دسته‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$k = [\sqrt{30}] + 1 = [5.477...] + 1 = 6$$

مراحل دسته‌بندی داده‌ها

مراحل دسته‌بندی داده‌ها را با یک مثال مطرح می‌کنیم.

مثال ۱. داده‌های زیر مربوط به نمرات پایانی اول درس آمار و مدل سازی یک کلاس ۳۰ نفره است:

۱۳/۷۵	۷/۵۰	۱۵/۲۵	۱۶	۸/۵۰	۱۴/۲۵	۱۶	۱۲	۱۲/۷۵	۱۴/۵۰
۱۲/۵۰	۶/۲۵	۱۲/۵۰	۱۹	۱۷/۲۵	۱۳/۷۵	۱۸	۱۴	۱۵/۵۰	۱۸
۱۴	۷/۵۰	۱۲	۱۶/۵۰	۱۷	۱۳/۲۵	۱۶	۱۵/۵۰	۱۴	۱۵

۱. محاسبه دامنه تغییرات داده‌ها

حداکثر اختلاف داده‌ها را دامنه تغییرات گوئیم که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R = b - a = 19 - 6/25 = 12/25$$

که در آن b بزرگ‌ترین و a کوچک‌ترین داده است.



ب. محاسبه تعداد دسته‌ها (k) به‌طوری‌که کوچک‌ترین عدد صحیح باشد که در رابطه $n \leq 2^k$ صدق کند. در مثال ۱ این مقدار برای $n=30$ برابر ۵ است، چون داریم: $2^4 < 30 < 2^5$. در مثال ۱ تعداد دسته‌ها را ۵ در نظر می‌گیریم. هرچند برای تعیین تعداد دسته هیچ‌گونه روش دقیق ریاضی وجود ندارد، ولی فرمول‌های فوق می‌توانند به مشخص کردن تعداد دسته‌ها کمک کنند.

۳. تعیین طول دسته‌ها

طول دسته‌ها همان‌طوری که در کتاب درسی آمار و مدل‌سازی آمده است، از تفاضل کران‌های پایین (کران‌های بالا) یا تفاضل نماینده (مرکز) متوالی دسته‌ها به‌دست می‌آید.

برای تعیین طول دسته از رابطه $c = \frac{R}{k}$ می‌توان استفاده کرد. در محاسبه طول دسته ممکن است مقدار آن عددی صحیح و مثبت نباشد که با توجه به دقت ثبت داده‌ها (تعداد ارقام اعشاری داده‌ها) مقدار طول دسته (c) را به عدد بالاتر با همان دقت ثبت داده‌ها گرد می‌کنیم. در مثال ۱ داریم:

$$c = \frac{12/75}{5} = 2/55 \approx 2/56$$

۴. تعیین کران‌های دسته‌ها

برای تعیین کران‌های دسته‌ها، ابتدا کران پایین دسته اول را به این صورت محاسبه می‌کنیم که مقدار طول دسته به‌دست آمده در بخش قبلی را در تعداد دسته‌ها ضرب می‌کنیم و آن را R' می‌نامیم. با

محاسبه نصف تفاضل $R'-R$ مقداری به دست می آید که در محاسبه کران‌ها از آن استفاده می‌کنیم. در مثال ۱ داریم:

$$\frac{R'-R}{2} = \frac{2/56 \times 5 - 12/55}{2} = 0.025$$

حال مقدار به دست آمده را از کوچک‌ترین داده کم می‌کنیم تا کران پایین دسته اول مشخص شود. در مثال ۱ داریم:

کران پایین دسته اول:

$$6/25 - 0.025 = 6/225$$

حال با اضافه کردن مقدار طول دسته (c) به کران پایین دسته اول، کران پایین دسته دوم مشخص می‌شود. به همین ترتیب کران پایین دسته‌های بعدی نیز مشخص می‌شود. در مثال ۱ داریم:

کران پایین دسته دوم:

$$6/225 + 2/56 = 8/785$$

کران پایین دسته سوم:

$$8/785 + 2/56 = 11/345$$

کران پایین دسته چهارم:

$$11/345 + 2/56 = 13/905$$

کران پایین دسته پنجم:

$$13/905 + 2/56 = 16/465$$

بعد از تعیین کران‌های پایین دسته‌ها، برای تعیین کران بالای دسته‌ها می‌توان با اضافه کردن طول دسته به کران‌های پایین، کران‌های بالا را مشخص کرد. در مثال ۱ کران‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

کران بالای دسته اول =

کران پایین دسته اول + طول دسته:

$$6/225 + 2/56 = 8/785$$

کران بالای دسته دوم =

کران پایین دسته دوم + طول دسته:

$$8/785 + 2/56 = 11/345$$

کران بالای دسته سوم =

کران پایین دسته سوم + طول دسته:

$$11/345 + 2/56 = 13/905$$

کران بالای دسته چهارم =

کران پایین دسته چهارم + طول دسته:

$$13/905 + 2/56 = 16/465$$

کران بالای دسته پنجم =

کران پایین دسته پنجم + طول دسته:

$$16/465 + 2/56 = 19/025$$

در آخر با مقایسه کران بالای دسته آخر و بزرگ‌ترین داده، صحت دسته‌بندی داده‌ها را بررسی می‌کنیم. در این مقایسه نباید کران بالای دسته آخر کمتر از بزرگ‌ترین داده باشد. همان‌طور که معلوم است، کران بالای هر دسته با کران پایین دسته بعدی برابر است که نشان‌دهنده پیوستگی داده‌هاست.

نتیجه‌گیری

از مزایای این روش دسته‌بندی، نسبت به روش کتاب درسی آمار و مدل‌سازی، یکی این است که دقت ثبت کران‌های دسته‌ها (تعداد ارقام اعشاری) یک رقم بیشتر از داده‌هاست. این وضعیت در تعیین فراوانی دسته‌ها مشکل شمارش داده‌ای را برای دو دسته رفع می‌کند. به عبارت دیگر، برای مشخص کردن فراوانی مطلق دسته‌ها، این قرارداد که «کران‌های پایین دسته‌ها در صورت امکان برای دسته‌ها شمرده شوند و کران‌های بالای دسته‌ها به جز دسته آخر شمرده نشوند» لازم نیست. مزیت دیگر این روش آن است که بین کران پایین دسته اول و کران بالای دسته آخر به ترتیب نسبت به کوچک‌ترین داده و بزرگ‌ترین داده تعادل مقداری به وجود می‌آید.

* منابع

۱. بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ پاشا، عین‌الله؛ رستگار، آرش (۱۳۹۰). آمار و مدل‌سازی (چاپ جدید). شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۲. نیکوکار، مسعود و عزیززاده، بهمن (۱۳۸۶). آمار و احتمالات کاربردی. انتشارات آزاده، تهران. چاپ سیزدهم.
۳. روغنی شهرکی، قهرمان (۱۳۸۸). آمار و احتمالات کاربردی. انتشارات مبنای خرد. تهران. چاپ اول.
۴. آذر، عادل و مؤمنی، منصور (۱۳۸۴). آمار و کاربرد آن در مدیریت (ج ۱). انتشارات سمت. تهران. چاپ یازدهم.
۵. جمشیدی، خدیجه (۱۳۸۶). آمار و کاربرد آن در مدیریت. انتشارات رادنگار. تهران. چاپ سیزدهم.

اگر شماره قبل برهان (شماره بهار) را خوانده باشید، با مزداییان و اهریمنیان آشنایی دارید. آن‌ها در عصر باستان در جزیره‌ای می‌زیستند و دو دسته بودند: مزداییان که همیشه راست می‌گفتند و اهریمنیان که همیشه دروغ می‌گفتند. اعضای یک خانواده، همگی از یک دسته بودند. حالا به چند معمای دیگر از مردم این جزیره عجیب توجه کنید:

ایستگاه دوم: باز هم مزداییان و اهریمنیان!



از سه نفر A، B و C است. آن سه نفر این جملات را در محضر قاضی گفتند:
A گفت: اسب متعلق به C است.
B گفت: من مالک اسب نیستم.
C گفت: لااقل دو نفر از ما اهریمنی هستند

از این سخنان قاضی نتوانست تشخیص دهد که چه کسی مالک اسب است. پس گفت: «حالا فقط یکی از شما بگوید که کدام یک از شما سه نفر واقعاً مالک اسب است!» در اینجا C نام یکی از سه نفرشان را گفت. آن گاه قاضی نتوانست بفهمد که صاحب اسب کیست. مالک واقعی اسب چه کسی بود؟

دادگاه قاضی خطاب به جمشید گفت: «آیا تو اسب را دزدیده‌ای؟» و جمشید گفت: «نه من این کار را نکرده‌ام.» سپس قاضی خطاب به مهراب گفت: «آیا شما دو نفر از یک دسته‌اید؟» و او پاسخ داد بله و یا پاسخ داد خیر. بعد از آن قاضی نتوانست یکی از این دو نفر را محکوم کند. کدام یک از دو نفر محکوم شدند و چرا؟ آیا بدون اطلاع از پاسخی که مهراب داد، قاضی می‌توانست این نتیجه را بگیرد.

● **معمای پنجم:** با مشخص شدن دزد اسب و مجازات شدن وی، یک معمای دیگر مطرح شد تا معلوم شود که اسب متعلق به یکی

● **معمای اول:** یک روز مردی را از این شهر، به اتهام دزدیدن یک اسب، پیش قاضی شهر (که یادتان هست، خودش مزدایی بود) بردند. اما متهم بی‌گناه بود و دزد نبود. او نتوانست با گفتن یک جمله به قاضی بی‌گناهی‌اش را ثابت کند. البته معلوم نیست که جمله‌اش درست بود یا نادرست، ولی با گفتن آن جمله، قاضی متقاعد شد که او دزد نیست؛ گرچه نتوانست بفهمد که او مزدایی یا اهریمنی است. آن جمله چه بود؟

● **معمای دوم:** در ادامه ماجرا، چون اسب پیدا نشد، مرد دیگری را به همین اتهام به دادگاه بردند. در دادگاه او جمله‌ای گفت که نه تنها قاضی نتیجه گرفت که او بی‌گناه است، بلکه نتیجه گرفت که مزدایی هم هست. آن چه جمله‌ای بود؟

● **معمای سوم:** نفر سومی به دادگاه احضار شد! در دادگاه او نیز جمله‌ای گفت که از آنجا قاضی نتیجه گرفت که او یک اهریمنی ولی بی‌گناه است! آن جمله چه بود؟

● **معمای چهارم:** در دادگاه بعد، دو نفر به دادگاه احضار شدند: جمشید و مهراب. در



فصل مختصات قطبی

مقدمه

از آنجا که در کتاب‌های دوره متوسطه به دستگاه مختصات قطبی پرداخته نشده و ضمن اینکه حل بسیاری از انتگرال‌ها و رسم بسیاری از منحنی‌ها در مختصات دکارتی کاری بسیار وقت‌گیر و گاه نشدنی است، مقاله حاضر به منظور افزایش آگاهی‌های دانش‌آموزان از دستگاه مختصات قطبی نگارش یافته است.

البته من این مقاله را با اطلاع از اینکه مقاله‌ای با همین عنوان در سال ۸۹ در مجله برهان به چاپ رسیده، نوشته‌ام و سعی کرده‌ام که از منظر متفاوت به دستگاه مختصات قطبی بپردازم و طیف وسیعی از منحنی‌ها را معرفی و مورد بررسی قرار دهم؛ کاری که در مقاله قبلی کمتر مورد توجه قرار گرفته بود.

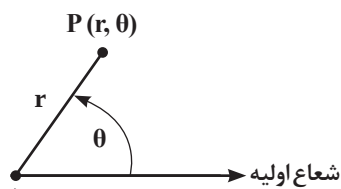
مقاله حاضر حاوی معرفی دستگاه مختصات قطبی، چگونگی نمایش نقاط در این دستگاه، معادله مقاطع مخروطی، دایره، خط و یک سری منحنی‌های خاص در این دستگاه و آشنایی با نحوه رسم آن‌هاست.

کلیدواژه‌ها: مختصات قطبی، شعاع جهت‌دار، زاویه جهت‌دار، دلگون، لیماسون، لیمینسکات، مقاطع مخروطی، گل رز n برگ

ایجاد دستگاه مختصات قطبی کنونی انجامیده، توسط
ابوریحان بیرونی انجام شده است.

تعریف:

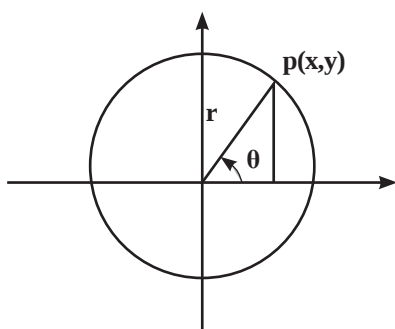
برای تعریف مختصات قطبی ابتدا مبدأ O و شعاع اولیه r را طبق شکل ۱ تعریف می‌کنیم.



شکل ۱

اکنون به هر نقطه P می‌توان مختصات قطبی (r, θ) را نسبت داد که در آن عدد اول یعنی r ، فاصله جهت‌دار

یکی از ابداعات نیوتن (۱۷۲۶-۱۶۴۲ م) که آن را در حدود سال ۱۶۷۱ ارائه داد، ولی تا ۱۷۳۶ یعنی پس از مرگش، منتشر نشد، دستگاه‌های مختصات جدید است. از جمله این دستگاه‌ها دستگاه مختصات قطبی است که نقاط را با فاصله و جهت‌پرگاری از یک نقطه ثابت مشخص می‌کند. یکی از بهترین کاربردهای دستگاه مختصات قطبی در حل انتگرال‌هایی است که حل آن‌ها در دستگاه دکارتی دشوار به نظر می‌رسد. در این‌گونه شرایط با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان انتگرال را در مختصات قطبی حل کرد و به جواب رسید. همچنین، مختصات قطبی از این نظر اهمیت دارند که همه مقاطع مخروطی برحسب آن‌ها با معادله واحدی بیان می‌شوند. معادله‌های قطبی مقاطع مخروطی در فیزیک و نجوم بسیار مهم‌اند و در مطالعه حرکت سیارات و اثبات سه قانون کپلر ظاهر می‌شوند. جالب است بدانیم اولین استفاده‌های مشابه که به

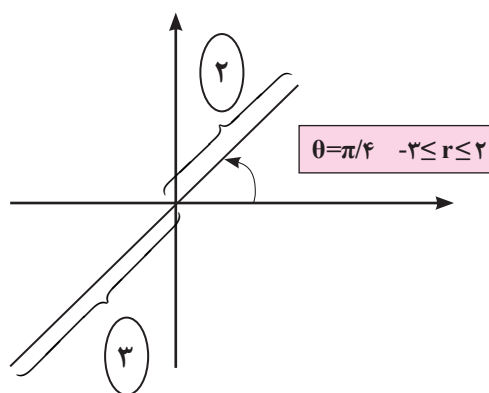


شکل ۳

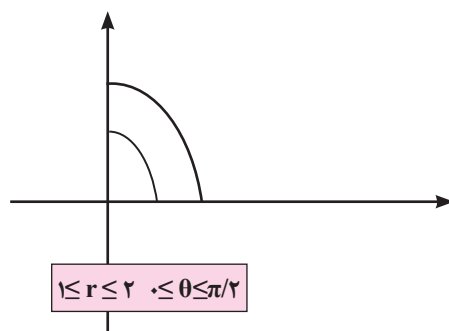
برای یافتن معادلات دکارتی هم ارز معادلات قطبی و بر عکس از یک یا چند جانشانی معادلات بالا استفاده می کنیم. مثلاً:

$$\begin{array}{|c|} \hline xy=4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline r^2\cos\theta\sin\theta=4 \\ \hline \end{array}$$

نمودارهای زیر مجموعه نقاطی را نشان می دهند که مختصات قطبی شان در معادلات و نامعادلات داده شده صدق می کنند:



شکل ۴



شکل ۵

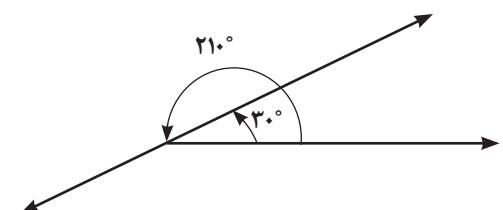
از 0 تا p است و عدد دوم، یعنی θ ، زاویه جهت دار از شعاع اولیه نسبت به پاره خط op است.

مفهوم زاویه جهت دار

همانند مثلثات، اندازه زاویه θ وقتی خلاف جهت عقربه های ساعت در نظر گرفته شود، مثبت و وقتی در جهت عقربه های ساعت سنجیده شود، منفی است.

مفهوم فاصله جهت دار

گاه می خواهیم r منفی باشد. مثلاً نقطه $(2, 210^\circ)$ که بر شعاع $\theta = 210^\circ$ دو واحد تا 0 فاصله دارد. به این نقطه این طور می توان رسید که در 0 بایستیم، و ابتدا 210° درجه خلاف جهت عقربه های ساعت بگردیم و سپس روی شعاع گذرا از این زاویه دو واحد جلو برویم. اما به روش دیگری هم می توان به این زاویه رسید. می توان با دوران 30° شعاع اولیه در جهت عقربه های ساعت و رفتن دو واحد به عقب هم به این نقطه رسید. در نتیجه می گوئیم این نقطه به مختصات قطبی $\theta = 30^\circ$ و $r = -2$ نیز وجود دارد.



شکل ۲

$$P(r, \theta) = p(-2, 30^\circ)$$

پس یک نقطه در مختصات قطبی به چند طریق قابل نمایش است. تمام نمایش های زیر مربوط به نقطه $(2, 30^\circ)$ است.

$$(2, 30^\circ) \quad (2, 330^\circ) \quad (-2, 150^\circ) \quad (-2, 210^\circ)$$

استفاده هم زمان از مختصات قطبی و دکارتی

مختصات دکارتی و مختصات قطبی با معادلات زیر هم مربوط می شوند:

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 = r^2 & x = r\cos\theta \\ y/x = \tan\theta & y = r\sin\theta \end{array}$$

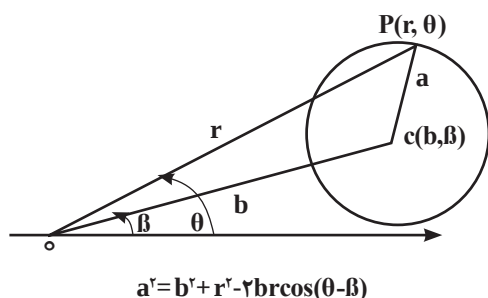
همچنین می‌توان بعضی از انواع تقارن را به آسانی تشخیص داد و در رسم منحنی‌ها از آن‌ها استفاده کرد:

- اگر تعویض r با $-r$ یا θ با $\theta + \pi$ در معادله تغییر ایجاد نکند، نسبت به مبدأ متقارن است.
- اگر تعویض θ با $-\theta$ یا (r, θ) با $(-r, \pi - \theta)$ در معادله آن را تغییر ندهد، نسبت به محور x متقارن است.
- اگر تعویض θ با $\pi - \theta$ یا (r, θ) با $(-r, -\theta)$ در معادله آن را تغییر ندهد، نسبت به محور y متقارن است.

دایره‌ها در مختصات قطبی

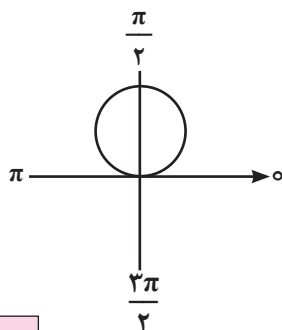
معادله $r = a$, $a \neq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ معادله قطبی یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع a است.

معادله دایره به شعاع a و مرکز (a, β) : فرض کنیم $p(a, \beta)$ نقطه دلخواهی بر دایره باشد. مثلث ocp را در نظر می‌گیریم و رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

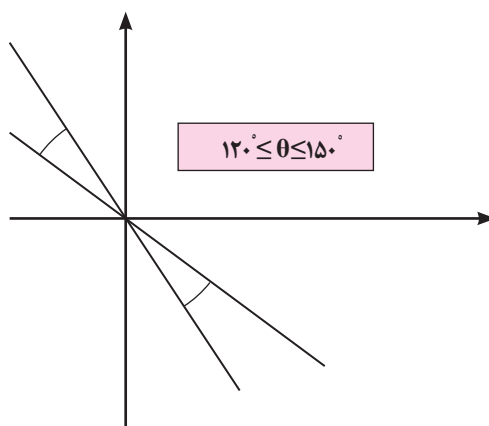


شکل ۸

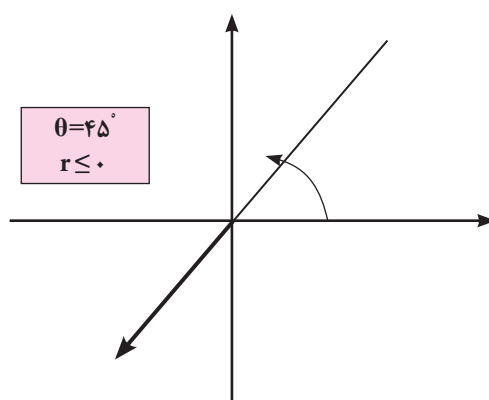
هرگاه دایره از مبدأ بگذرد، آن‌گاه $b = a$ و معادله، شکل ساده‌تر $r = 2a \cos(\theta - \beta)$ را به خود می‌گیرد. اگر $\beta = 0$ معادله $r = 2a \cos \theta$ را خواهیم داشت و اگر $\beta = 90^\circ$ ، معادله به صورت $r = 2a \sin \theta$ خواهد بود.



شکل ۹



شکل ۶



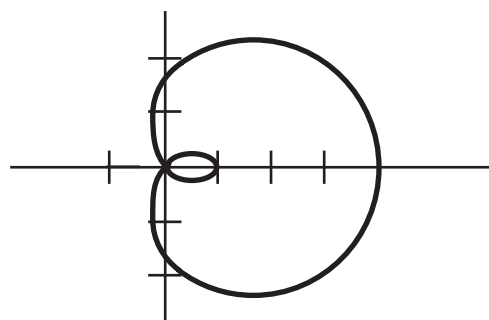
شکل ۷

معادله $r = 0$ و هر θ مبدأ را نشان می‌دهد. معادله $\theta = a$ که در آن θ مقداری است ثابت و r جمیع مقادیر حقیقی را دارد، معادله خط ماز بر مبدأ است که با شعاع اولیه (که از آن سنجیده می‌شود) زاویه a می‌سازد.

نمودار معادلات قطبی

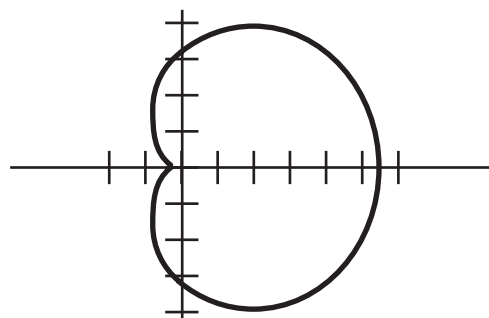
نمودار $F(r, \theta) = 0$ از تمام نقاطی تشکیل شده که در معادله صدق می‌کنند. این معادله، غالباً r را به صورت صریح بر حسب θ به صورت $r = f(\theta)$ بیان می‌کند. با جانشانی مقادیر θ و محاسبه مقادیر نظیر r می‌توانیم هر تعداد نقطه را که بخواهیم به دست آوریم. به خصوص استفاده از نقاطی که با آن‌ها r ماکزیمم و مینیمم می‌شود و همچنین یافتن θ هایی که منحنی به ازای آن‌ها از مبدأ می‌گذرد، در رسم منحنی بسیار کمک کننده است.

در بعضی کتاب‌ها و مقالات به جای کلمه لیماسون از کلمه حلزونی استفاده می‌کنند. در حالت خاص $a=b$ ، یک دلگون خواهیم داشت (قبلاً در مورد دلگون‌ها توضیح داده شد). در شکل زیر حالت‌های متفاوت یک لیماسون نمایش داده شده است.



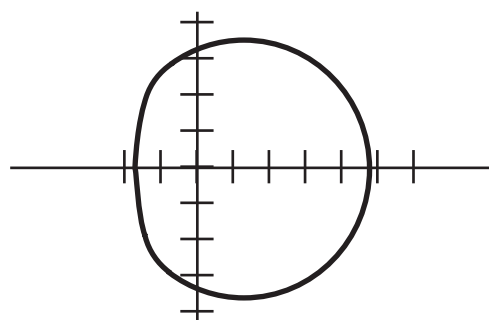
$b < a$
looped

شکل ۱۳



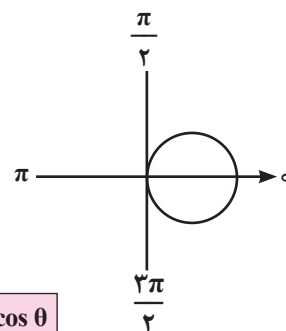
$a < b < 2a$
dimpled

شکل ۱۴



$2a \leq b$
convex

شکل ۱۵

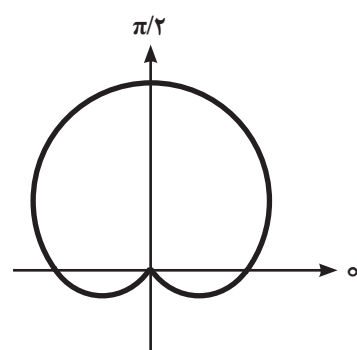


$$r = 2a \cos \theta$$

شکل ۱۰

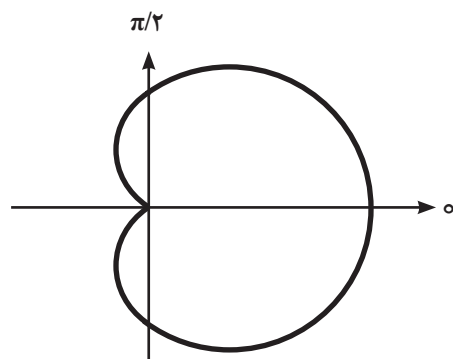
منحنی‌های خاص
دلگون‌ها:

$$r = a(1 + \sin \theta)$$



شکل ۱۱

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

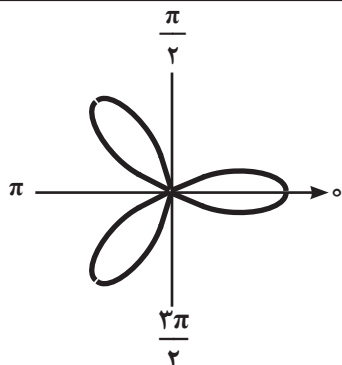


شکل ۱۲

لیماسون‌ها: لیماسون اسمی فرانسوی و قدیمی برای حلزون است.

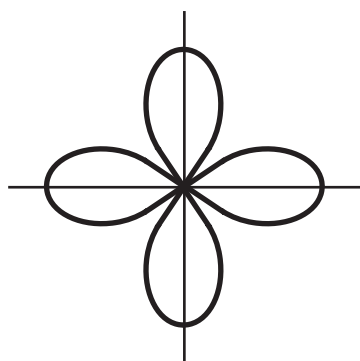
$$r = b + a \cos \theta$$

رِز ۳ برگ $r = a \cos 3\theta$



شکل ۱۹

رِز ۴ برگ $r = a \cos 2\theta$



شکل ۲۰

اگر $r = a \cos n\theta$ و $r = a \sin n\theta$ رزهایی هستند که اگر n فرد باشد، گل رز دارای n برگ و اگر n زوج باشد، گل رز دارای $2n$ برگ خواهد بود. حتماً وسوسه رسم این منحنی‌ها را در ذهن دارید. بیایید دلگون زیر را رسم کنیم:

$$r = a(1 - \cos \theta)$$

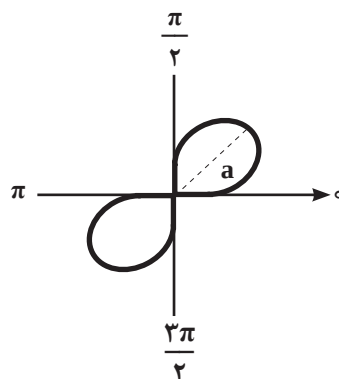
چون تعویض θ با $-\theta$ معادله را تغییر نمی‌دهد، لذا منحنی نسبت به محور X متقارن است. همچنین از اینکه $1 \leq \cos \theta \leq -1$ ، معلوم می‌شود که r بین 0 و $2a$ تغییر می‌کند.

مقدار مینی‌مم در $R=0$ در $\theta=0$ و مقدار ماکزیمم $r=2a$ در $\theta=\pi$ رخ می‌دهد. به علاوه، وقتی θ از 0 تا π تغییر می‌کند، $\cos \theta$ از 1 تا -1 کاهش می‌یابد. لذا $1 - \cos \theta$ از 0 تا 2 افزایش می‌یابد.

یعنی وقتی بردار شعاعی op از $\theta=0$ تا $\theta=\pi$ نوسان

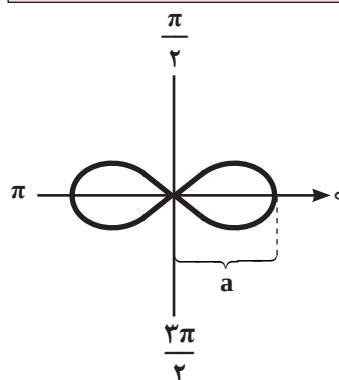
منحنی‌های $r = b + a \sin \theta$ لیماسون قائم هستند. **لمینسکات‌ها:**

لمینسکات $r^2 = a \sin 2\theta$ $a > 0$



شکل ۱۶

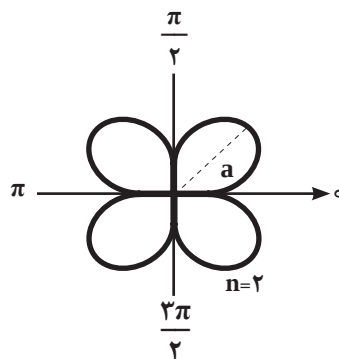
لمینسکات افقی یا رز برگ $r^2 = a \cos 2\theta$ $a > 0$



شکل ۱۷

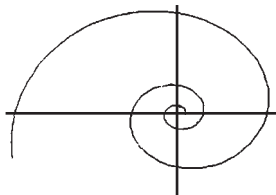
گل‌ها

رِز ۴ برگ $r = a \sin 2\theta$



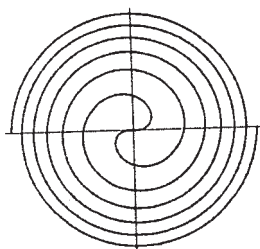
شکل ۱۸

مارپیچ لگاریتمی: معادله کلی این دسته از منحنی‌ها به صورت $r = e^{n\theta}$ است.



شکل ۲۳

مارپیچ فرما: معادله این دسته از منحنی‌ها به صورت $r^2 = n\theta$ است.

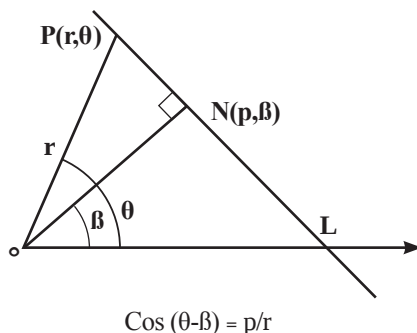


شکل ۲۴

البته مارپیچ‌های دیگری هم وجود دارند که ما در اینجا به ذکر همین سه مورد اکتفا می‌کنیم.

خطوط

به‌طور کلی معادله هر خط در مختصات قطبی به صورت $r \cos(\theta - \beta) = p$ است که با توجه به شکل ۲۵ رابطه‌ای بدیهی است. فرض کنیم p نقطه‌ای بر خط L باشد، رابطه زیر را می‌توان از مثلث قائم‌الزاویه ONP به‌دست آورد:



شکل ۲۵

می‌کند، r از 0 تا $2a$ افزایش خواهد یافت. ما جداولی از مقادیر تشکیل می‌دهیم و نقاط نظیر را رسم می‌کنیم. حال یک منحنی هموار از آن نقاط می‌گذرانیم، طوری که r با افزایش θ صعود کند؛ زیرا:

$$dr/d\theta = a \sin \theta$$

به ازای $0 < \theta < \pi$ مثبت است. سپس از تقارن منحنی استفاده می‌کنیم و منعکس این قسمت را نسبت به محور X به‌دست می‌آوریم. نتیجه شکلی است که به دلیل شباهت با قلب، دلگون نامیده می‌شود.

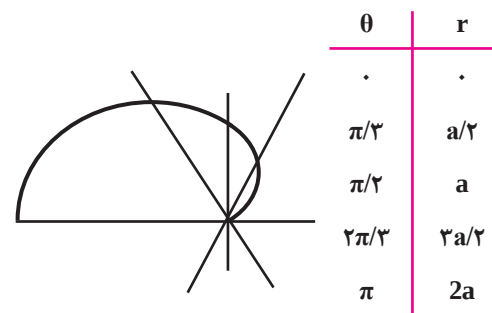
شیب دلگون در مبدأ را می‌توان به این صورت بررسی کرد: فرض می‌کنیم p نقطه‌ای بر منحنی در ربع اول است و p در امتداد منحنی به O نزدیک می‌شود. در این صورت وقتی $p \rightarrow O$ شیب $p \rightarrow O$ ($\tan \theta$) به شیب O در O نزدیک می‌شود.

چون وقتی $\theta \rightarrow 0$ و $p \rightarrow 0$ آن‌گاه:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \tan \theta = 0$$

$$\theta \rightarrow 0$$

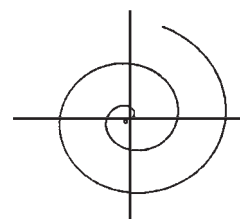
یعنی شیب مماس بر منحنی در مبدأ صفر است.



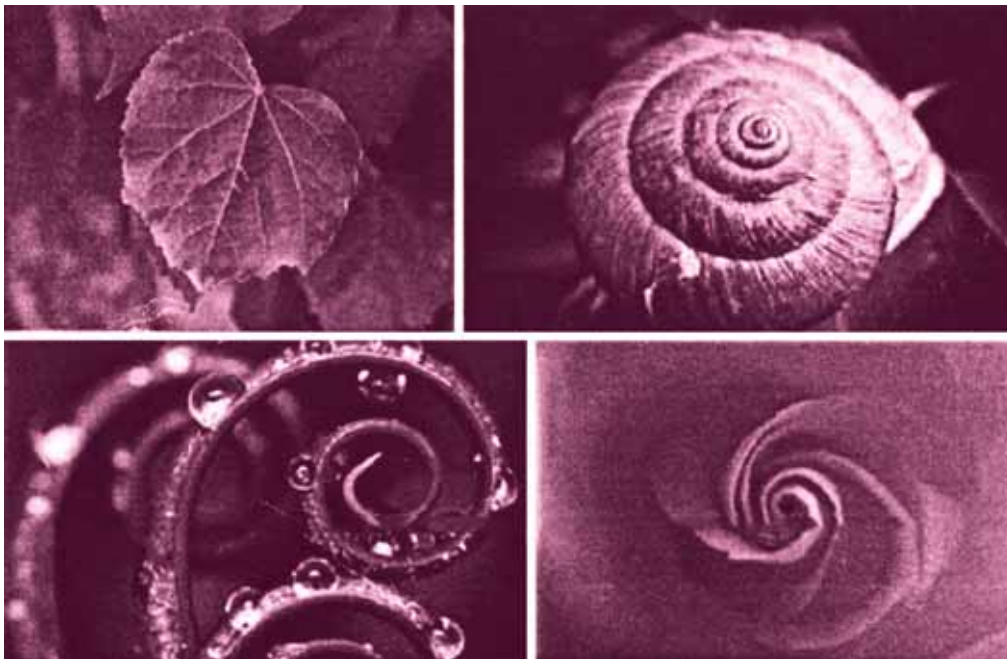
شکل ۲۱

مارپیچ‌ها

مارپیچ ارشمیدسی: معادله کلی این دسته از منحنی‌ها به صورت $r = a\theta$ است.



شکل ۲۲



از خاصیت کانون و هادی استفاده می‌کنیم که:

$$PF = e \times PD$$

اگر مبدأ را کانون F بگیریم، داریم:

$$PF = r$$

حال آنکه:

$$PD = AB = AF + FB = k + r \cos \theta$$

در این صورت به معادله زیر می‌رسیم:

$$r = e(k + r \cos \theta)$$

اگر این معادله را بر حسب r حل کنیم، به دست می‌آوریم:

$$r = ke / (1 - e \cos \theta)$$

سهمی‌ها، بیضی‌ها و هذلولی‌ها

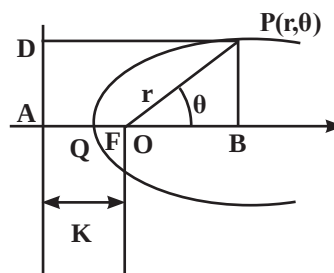
معادله مقاطع مخروطی در مختصات قطبی به صورت زیر است (کانون، مبدأ مختصات و هادی مربوطه $x = -k$ است):

$$R = ke / (1 - e \cos \theta) \quad \text{الف.}$$

اگر $e = 1$ معادله سهمی خواهد بود.
 اگر $e < 1$ معادله بیضی با خروج از مرکز e خواهد بود.
 اگر $e > 1$ معادله هذلولی با خروج از مرکز e خواهد بود.

برای رسیدن به معادله الف شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

با آن می‌توان به سهمی، هذلولی و بیضی یک جا پرداخت.



شکل ۲۶

* منابع

۱. توماس، جرج بی و فینی، راس ال. حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده و داریوش بهمردی.
۲. نامی، حسین و عشقی، علیرضا. ریاضیات عمومی ۱. مدرسان شریف.
3. www.wikipedia.org
4. www.studyblue.com
5. www.math10.com
6. www.mathcaptain.com

استفاده از مثال‌های نقض

در آموزش ریاضی دوره متوسطه

چکیده

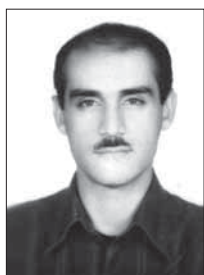
ممارست در ایجاد مثال‌ها و مثال‌های نقض می‌تواند خلاقیت و تفکر ریاضی دانش‌آموزان را افزایش دهد. مثال‌های نقض به عدم تأیید، توجیه، بحث، استدلال و تفکر منطقی می‌پردازند که برای پرورش مهارت‌های ریاضی ضروری هستند. با توجه به این مهم، در مقاله حاضر نمونه‌هایی از مثال‌های نقض پرکاربرد را که معمولاً در تدریس ریاضیات متوسطه و در موضوعاتی مانند حد، مشتق و انتگرال مفید واقع می‌شوند، ارائه می‌کنیم.

مقدمه

پولیا^۱ می‌گوید: یافتن یا برخاستن مثال‌های نقض نیازمند خلاقیت و نظم فکری است. اگر مثال بررسی شده یک قانون را اثبات کند، خواننده آن ممکن است حدس بزند که این قانون لزوماً وجود دارد و ایده‌ای درباره چگونگی اثبات آن به دست آورد؛ یا شاید بتواند در مورد اینکه چه مثالی باید برای رد کردن آن قانون مورد بررسی قرار گیرد، تصمیم بگیرد. **کلیمچاک**^۲ و **گروئن والد**^۳ نیز می‌گویند: یکی از چنین راهبردهایی می‌تواند به این صورت باشد: «دادن عبارت نادرست به دانش‌آموزان برای توجه بیشتر به مفاهیم، شرایط تئوری، خواص توابع، استدلال و توجیه».

اهداف استفاده از مثال‌های نقض در ریاضی

۱. به منظور درک عمیق‌تر دانش ریاضی و به منظور از بین بردن تصورات غلط؛
۲. به منظور افزایش مهارت‌های تفکر در تجزیه و تحلیل، توجیه، مقایسه، بررسی و اثبات؛
۳. به منظور ایجاد بینش عمیق‌تر و مفهومی‌تر؛
۴. به منظور کاهش یا از بین بردن تصورات غلط؛
۵. برای پیشروی در تفکر منطقی ریاضی؛
۶. به منظور افزایش مهارت‌های «تفکر کلی» در ریاضیات.



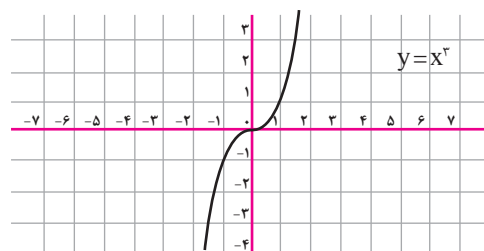
گردآوری:
هشام دیناروند
کارشناس ارشد ریاضی
دبیر ریاضی
شهرستان
شوش دانیال (ع)

برای تعمیق بیشتر بحث گزاره‌هایی از مباحث مختلف ریاضی می‌آوریم که به ظاهر و در بسیاری موارد صحیح هستند، اما مثال‌های نقضی برای آن‌ها ارائه شده است.

نظریه توابع

۱. خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه، خطی است که تنها در یک نقطه با منحنی مشترک است اما آن را قطع نمی‌کند.

مثال نقض: محور x ها، خط مماس بر منحنی $y = x^3$ است، اما منحنی را در مبدأ قطع می‌کند.



۲. اگر تابع $y = f(x)$ به ازای تمامی x های مثبت پیوسته و نزولی باشد، در نتیجه این تابع دارای ریشه است.

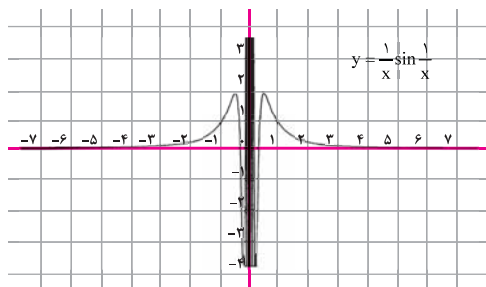
مثال نقض: تابع $y = \frac{1}{x}$ پیوسته است و به ازای x های مثبت، نزولی است، اما هیچ ریشه‌ای ندارد.

۵. خط راست $x=a$ مجانب قائم برای تابع

$y=f(x)$ است، اگر چندین مقدار بی‌نهایت برای $f(x)$ در نزدیکی نقطه $x=a$ وجود داشته باشد.

مثال نقض: چندین مقدار بی‌نهایت برای تابع

$y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ در نزدیکی نقطه $x=0$ وجود دارد، اما خط $x=0$ مجانب قائم این تابع نیست.



پیوستگی

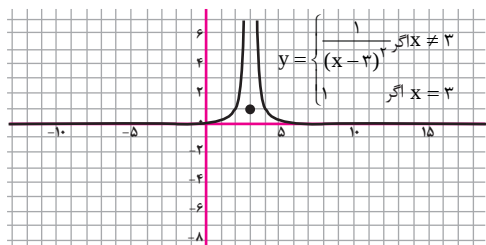
۶. اگر تابعی در همسایگی معینی از نقطه $x=a$

تعریف شود، به‌طوری‌که در سمت چپ نقطه $x=a$ صعودی و در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت، یک نقطه ماکزیمم موضعی در نقطه $x=a$ به‌وجود می‌آید.

مثال نقض: تابع

$$y = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)^2} & x \neq 3 \\ 1 & x = 3 \end{cases}$$

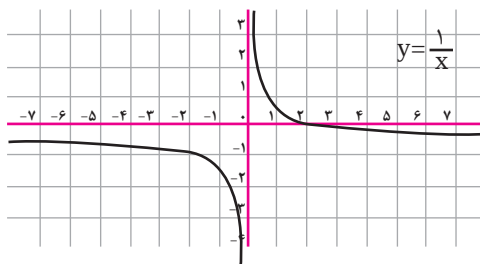
برای تمامی x ها تعریف می‌شود و از چپ از نقطه $x=3$ صعود می‌کند و از راست از نقطه $x=3$ نزول می‌یابد، اما هیچ ماکزیمم موضعی در نقطه $x=3$ ندارد.



مشتق

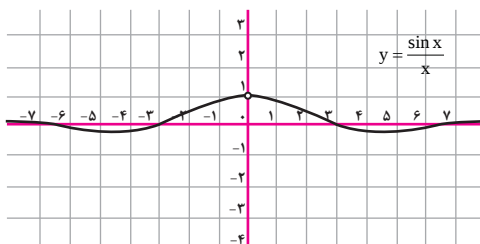
۷. اگر یک تابع غیرخطی، مشتق‌پذیر و در فاصله

$(0, \infty)$ یکنوا باشد، مشتق آن نیز در $(0, \infty)$ یکنوا است.



۳. اگر $g(a) = 0$ باشد، تابع $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x=a$ مجانب قائم دارد.

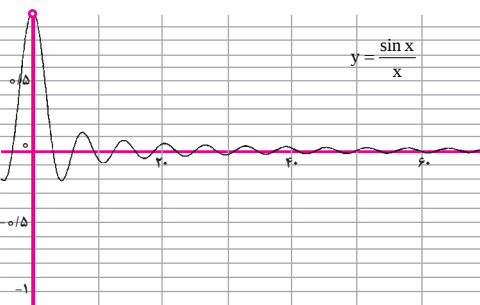
مثال نقض: تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ در نقطه $x=0$ مجانب قائم ندارد.



۴. اگر یک خط راست برای یک منحنی مجانب افقی باشد، زمانی که x به بی‌نهایت گرایش دارد و منحنی به آن خط راست نزدیک‌تر می‌شود، آن را قطع نمی‌کند و بر آن مماس نیست.

مثال نقض: زمانی که x به سمت بی‌نهایت گرایش

دارد، تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ از بالا و پایین به محور x نزدیک‌تر می‌شود: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. محور x مجانب افقی تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ است، اما نمودار این تابع چندین بار محور x را قطع می‌کند.

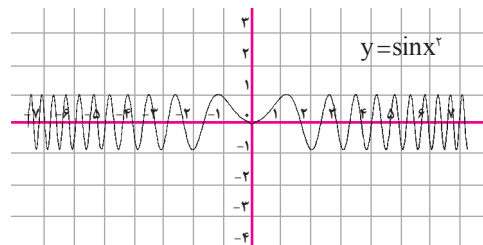


مثال نقض: برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ داریم:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ اما انتگرال $\int_a^\infty \frac{1}{x} dx$ واگراست.

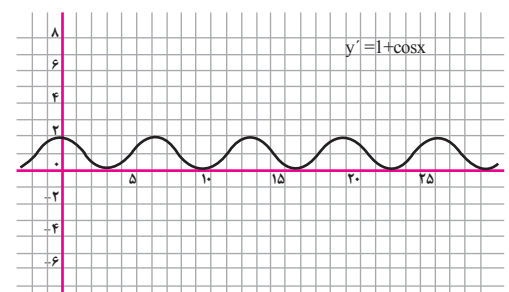
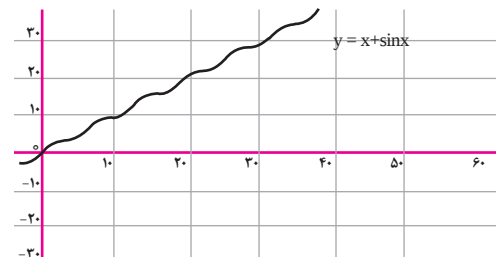
۱۰. اگر تابع $y=f(x)$ پیوسته باشد و $\int_a^\infty f(x) dx$ هم گرا باشد: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

مثال نقض: انتگرال $\int_a^\infty \sin x^2 dx$ واگراست، اما

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x^2$ موجود نیست

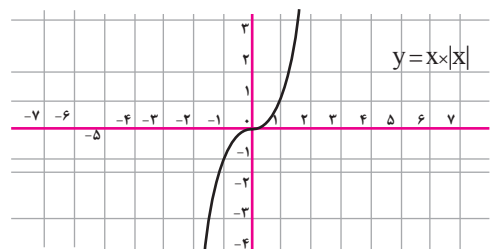


مثال نقض: تابع غیرخطی $f(x)=x+\sin x$ مشتق پذیر است و در فاصله $(0, \infty)$ یکنوا است، اما مشتق آن $f'(x)=1+\cos x$ در $(0, \infty)$ یکنوا نیست.



۸. اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشد و نقطه $(a, f(a))$ نقطه عطف برای شکل تابع باشد، مشتق دوم تابع در آن نقطه برابر صفر است.

مثال نقض: تابع $y=x \times |x|$ در $x=0$ مشتق پذیر است و نقطه $(0,0)$ نقطه عطفی برای آن است. اما مشتق دوم این تابع در نقطه $x=0$ وجود ندارد.



انتگرال

۹. اگر برای هر تابع $f(x)$ داشته باشیم، $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ، بنابراین انتگرال $\int_a^\infty f(x) dx$ نیز همگراست.

*** منابع:**

*** پی نوشت ها:**
 1. Polya
 2. Klymchuk
 3. Greunwald

1. Gruenwald, N., Klymchuk S, Using counter-examples in teaching Calculus. The New Zealand Mathematics Magazine (2003). 40(2), 33-41.
 2. klymchuk. S. counter examples in calculus. Auckland university. New Zealand. (2007).
 3. Klymchuk, S., Gruenwald, N. Counter-Examples in Calculus as a Pedagogical Strategy. Proceedings of the Third International Conference on Teaching Mathematics at the Undergraduate Level (ICTM-2). Wiley & Sons Inc. (2006).

واژه نامه

counter example	مثال نقض
curve	منحنی
covergence	همگرایی
continuouse	پیوسته
differentiable	مشتق پذیر
decreasing	نزولی
divergent	واگرا
derivative	مشتق



اثبات ترکیبیاتی

قضیه‌های ابن هیثم (ویلسون) و فرما

ابن هیثم مطرح شده است. پس جا دارد در کتاب‌های ریاضی ایرانی هم به اسم او ذکر شود.

در این مقاله «اثبات ترکیبیاتی» دو قضیه مشهور نظریه اعداد، یعنی قضیه‌های ابن هیثم و فرما را به کمک نظریه گراف و شمارش ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است که اثبات ترکیبیاتی نوعی از اثبات است که در آن برابری دو عبارت را به کمک شمارش ثابت می‌کنیم. بدین منظور نشان می‌دهیم که هر دو عبارت یک چیز را می‌شمارند. بیشتر کاربردهای این نوع اثبات در مسائل ترکیبیاتی، نظریه اعداد و نظریه احتمالات که با ساختارهای گسسته سرکار دارند، ظاهر می‌شوند. قضیه ابن هیثم: فرض کنید p یک عدد اول باشد، در آن صورت داریم:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

اگرچه از نظر تاریخی، اثبات «قضیه ویلسون» به لایبنیتز (۱۷۱۶-۱۶۴۶) و یا لاگرانژ (۱۸۱۳-۱۷۳۶) نسبت داده شده است، اما اثبات آن توسط ادوارد وارینگ در سال ۱۷۷۰ میلادی منتشر شده است. دلیل نام‌گذاری این قضیه این است که قضیه مزبور مجدداً توسط ویلسون، دانشجوی سابق ادوارد وارینگ، کشف شده است.

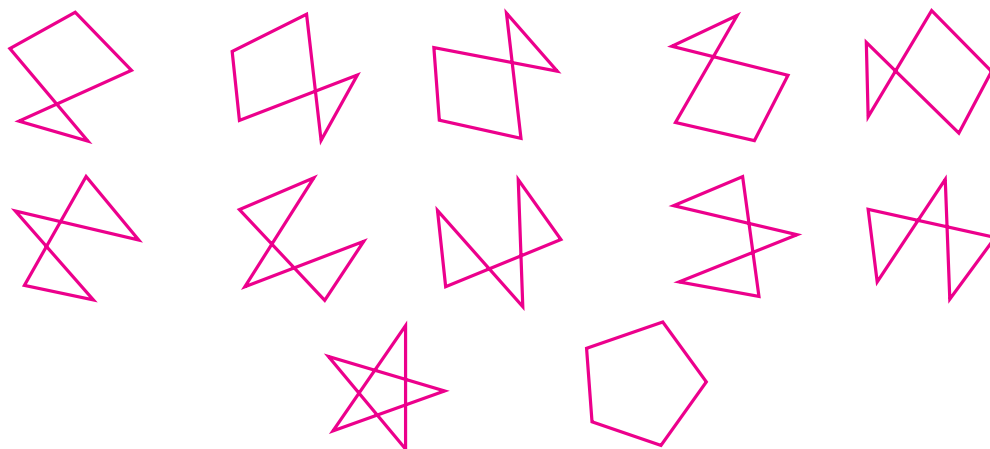
باید توجه کرد که این قضیه حدود ۶۰۰ سال قبل از ویلسون و نیز ۷۵۰ سال قبل از لایبنیتز و لاگرانژ توسط دانشمند جهان اسلام ابن هیثم کشف شد. ابن هیثم در نوشته‌های لاتینی به الهازن مشهور است و در زمینه‌های گوناگون، به‌ویژه نظریه اعداد، مطالب ارزنده دارد (به منابع ۱ تا ۳ مراجعه کنید). در صفحه ۳۲ منبع شماره ۳ از فهرست منابع مقاله حاضر، این قضیه به اسم قضیه



دکتر مرتضی بیات*
عضو هیئت علمی
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد زنجان



زهرا خاتمی
دبیر ریاضی
ناحیه یک زنجان

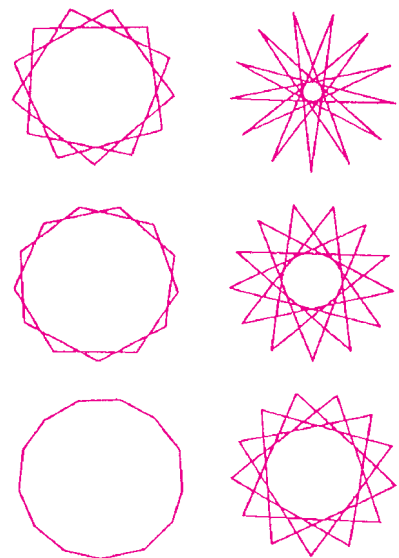


شکل ۱ دوازده ستاره‌گون پنج‌ضلعی

برهان: اگر $p=2$ باشد، آن گاه حکم واضح است. بنابراین فرض می‌کنیم p یک عدد اول فرد باشد. گیریم تعداد p نقطه روی محیط دایره واقع باشند، به طوری که دایره را به p کمان مساوی تقسیم کنند. چه تعداد چندضلعی با اتصال این نقاط می‌توان تشکیل داد؟ (برخورد یال‌ها ایرادی ندارد). این چندضلعی‌ها را به خاطر آنکه از اتصال رئوس یک p ضلعی منتظم محدب شکل گرفته‌اند، p ضلعی‌های ستاره‌گون می‌گوییم. به هر حال ملاحظه می‌کنیم که هر p ضلعی را به p طریق می‌توان رسم کرد. از طرف دیگر، همه p ضلعی‌ها به تعداد $p!$ طریق متفاوت قابل رسم هستند. بنابراین $\frac{p!}{2p}$ تا p ضلعی ستاره‌گون متفاوت را به دست می‌آوریم.

شکل ۱ دوازده نوع پنج ضلعی ستاره‌گون را نشان می‌دهد.

در بین $\frac{p!}{2p}$ تا p ضلعی، دقیقاً $\frac{p-1}{2}$ تا p ضلعی وجود دارد که تحت دوران $\frac{2\pi}{p}$ رادیان تغییر نمی‌کنند. چنین p ضلعی‌های ستاره‌گونی را p ضلعی منتظم می‌گوییم. چون آن‌ها به صورت «ستاره» از p نقطه ساخته شده‌اند و زاویه پره‌های آن‌ها $\frac{(2k+1)\pi}{p}$ برای $0 \leq k < \frac{p-1}{2}$ است. در حالت $p=5$ تنها دو پنج ضلعی منتظم وجود دارد، و این در شکل ۱ در ردیف سوم نشان داده شده است. در حالت $p=13$ ، شش ۱۳ ضلعی منتظم وجود دارد که در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲ شش ۱۳ ضلعی منتظم ستاره‌گون

خاطر نشان می‌کنیم که $\frac{p!}{2p} - \frac{p-1}{2}$ تا p ضلعی ستاره‌گون در دسته‌های p تایی وجود دارند و عناصر هر دسته با دورانی به اندازه $\frac{2\pi}{p}$ به دست می‌آیند.

اگر $p=5$ باشد، تنها دو دسته از این دسته‌ها وجود دارند (در واقع ردیف اول و دوم شکل ۱ چنین هستند). پس کل دسته‌های p تایی برابر است با:

$$\frac{\frac{p!}{2p} - \frac{p-1}{2}}{p} = \frac{(p-1)! - (p-1)}{2p}.$$

بنابراین: $(p-1)!(p-1) - 2p$ و در نتیجه $p! \equiv 1 \pmod{p}$ که این حکم را ثابت می‌کند.

قضیه کوچک فرما: فرض کنید a یک عدد صحیح و مثبت و p عددی اول باشد، آن گاه داریم:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

اگر $(a, p) = 1$ ، باشند با توجه به قانون حذف داریم:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

برهان: باید ثابت کنیم $a^p - a$ بر p به این منظور مهره‌هایی با a رنگ متفاوت اختیار می‌کنیم. با استفاده از آن‌ها رشته‌هایی با p مهره می‌سازیم. تعداد رشته‌های متمایز a^p است. (برای انتخاب هر مهره، p حالت داریم). اگر a رشته تک‌رنگ را کنار بگذاریم، $a^p - a$ رشته باقی می‌ماند. دو انتهای هر رشته را به هم وصل می‌کنیم تا یک گردنبند داشته باشیم. اگر رشته‌ها در یک جایگشت دایره‌ای با هم متفاوت باشند، گردنبندهای ایجاد شده یکسانی دارند. ولی برای یک رشته، p جایگشت دایره‌ای وجود دارد. پس تعداد گردنبندهای متمایز $\frac{a^p - a}{p}$ است. با توجه به تعبیر آن، این عدد صحیح است؛ یعنی:

$$p \mid a^p - a.$$

*منابع

1. G.E. Andrews, *Numbers theory*, Hindustan Publishing Corporation (India), Delhi, 1992.
2. W.S. Golomb, *Combinatorial proof of Fermat's "Little" Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 63, No. 10 (Dec., 1956), p. 718.
3. G. Everest and T. Ward, *An Introduction to Number Theory*, Springer Verlag, 2005.
4. قضیه ویلسون (رنگ تفریح شماره ۲۸) (۱۳۸۶). وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. شبکه ملی مدارس ایران (رشد). گزارش خبر. ۱۳۸۶.
5. حسینی، مهدی (۱۳۹۳). گزارش مختصری از یک پژوهش تاریخی: ابن هیثم و نظریه اعداد. خبرنامه انجمن ریاضی ایران. شماره پیاپی ۱۳۸.

*Baayyaatt@gmail.com



با داشتن مختصات رئوس آن



مهدی میرزافام
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شهرستان
عجب‌شیر

اشاره

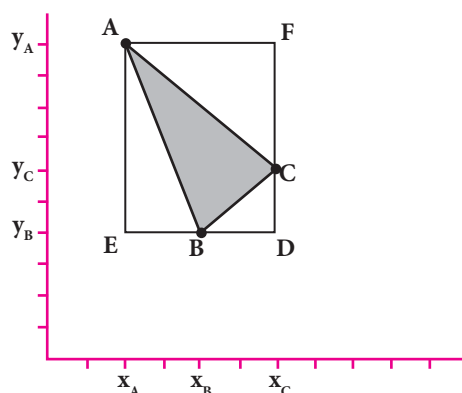
برای حل این مسئله روش‌های متعددی وجود دارد ولی روشی که در این مقاله ارائه می‌شود، حاصل خلاقیت یکی از دانش‌آموزان نگارنده^۱ در حل مسئله است. معمولاً در پایان هر کلاس، اینجانب مسائلی را متناسب با درس برای فکر کردن و یافتن راه‌حل خلاقانه برای آن، به دانش‌آموزان می‌دهم. از جمله، وقتی فصل پنجم ریاضی ۱ را شروع کردیم، به صحبت در مورد دستگاه مختصات پرداختم و در پایان جلسه این مسئله را به عنوان «فکر کنید» مطرح کردم.

کلیدواژه‌ها: مساحت مثلث، دستگاه مختصات

مقدمه

حل: روش یافتن مساحت به این صورت است

که ابتدا شکل مثلث را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، سپس با رسم خطوطی موازی با دو محور x و y ، از هر رأس مثلث، مستطیل $AFDE$ را ایجاد می‌نماییم.



دستگاه مختصات از دو محور اعداد عمودبرهم و دارای واحدهای یکسان تشکیل می‌شود، و محل تقاطع این محورها «مبدأ مختصات» نامیده می‌شود. در دستگاه مختصات، هرگاه $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ ، آن گاه x_A را طول نقطه A و y_A را عرض نقطه A می‌نامند.

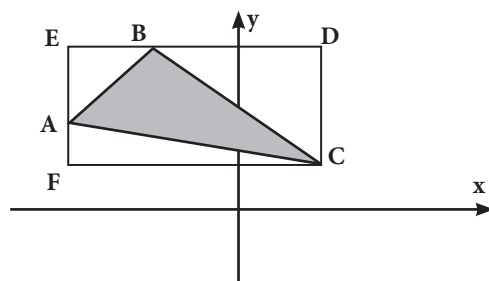
محاسبه مساحت مثلث

مسئله: با معلوم بودن مختصات سه رأس مثلث ABC مساحت آن را بیابید.

$$C = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$$



مثال: اگر مختصات سه رأس مثلث $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، مساحت آن را بیابید.



$$\begin{cases} S_{CDEF} = 3 \times 6 = 18 \\ S_{AEB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \\ S_{BDC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \\ S_{AFC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 6 = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow S_{ABC} = 18 - (2 + 6 + 3) = 18 - 11 = 7$$

*** پی نوشت**
۱. هادی خلیلی‌وند، دانش‌آموز
دوره دوم متوسطه دبیرستان
نمونه دولتی ملاصدرا، عجب‌شیر

مشاهده می‌کنیم که هر سه مثلث به‌وجود آمده روی سه ضلع مثلث ABC قائم‌الزاویه‌اند. اکنون به‌راحتی می‌توانیم مساحت مستطیل را محاسبه کنیم، سپس مجموع مساحت‌های سه مثلث قائم‌الزاویه حادث شده را از آن کم کنیم تا مساحت مثلث موردنظر به‌دست آید.

مساحت مستطیل عبارت است از:

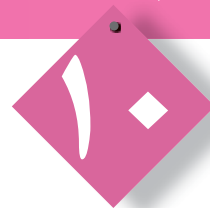
$$S_{AFDE} = (x_C - x_A)(y_A - y_B)$$

مساحت هر یک از سه مثلث مذکور نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} EA = y_A - y_B \rightarrow S_{AEB} = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(y_A - y_B) \\ EB = x_B - x_A \\ AF = x_C - x_A \rightarrow S_{AFC} = \frac{1}{2}(x_C - x_A)(y_A - y_C) \\ FC = y_A - y_C \\ CD = y_C - y_B \rightarrow S_{BDC} = \frac{1}{2}(x_C - x_B)(y_C - y_B) \\ BD = x_C - x_B \end{cases}$$

اکنون مساحت مثلث ABC را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{ABC} = S_{AFDE} - [S_{AEB} + S_{AFC} + S_{BDC}]$$



رشد آموزش ریاضی

۳۰

۶

۲۹

شماره های

کلیدواژه‌ها: آناتوفیا کریگوفسکا، هندسه‌های ناقلیدسی، قضیه رول، علی رجایی، تیمور غیائی‌نژاد، تیوتی، قضیه ویلسون

نامه‌ها؛ اسامی همکارانی که حل مسائل شماره ۲۴ را فرستاده‌اند؛ خوانندگانی که مسائل شماره ۲۵ را برای مجله فرستاده‌اند.

عنوان تمام مقالات این شماره رشد ریاضی را به این منظور آورده‌ایم که مظنه‌ای به‌دست خوانندگان تاریخچه حاضر در مورد این مجله داده باشیم. اکنون به پاره‌ای از مقالات مجله نگاهی می‌افکنیم.

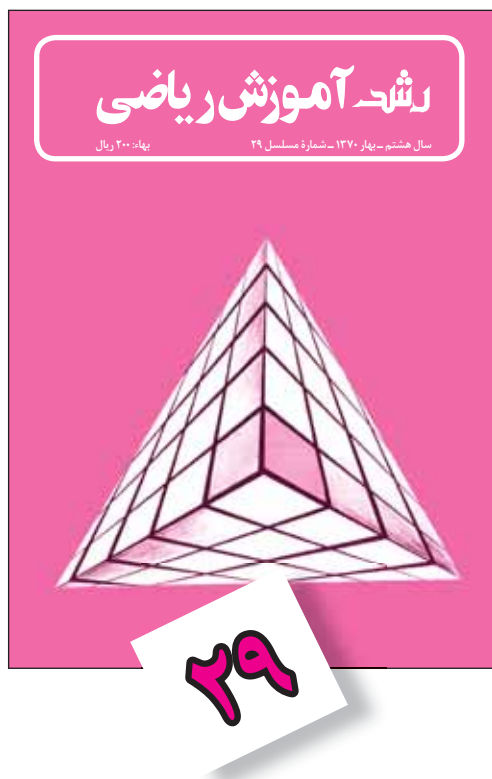
در مقاله «نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت» که دومین قسمت این مقاله است، چنین می‌خوانیم:

«بشر در تلاش خستگی‌ناپذیرش برای شناخت محیط زیست و دستیابی به هدف‌های یاد شده در قسمت اول، ناچار بوده (و هست) که دانش خود را درباره جهان خارجی (هستی) گسترش دهد. اولین سؤالی که مطرح می‌شود این است که چگونه دانش خود را درباره جهان خارجی به‌دست می‌آوریم. روشن است که برای دستیابی به این هدف حداکثر استفاده را از حواس پنج‌گانه می‌کنیم و برای انجام کارهای روزانه و بهره‌گیری از نعمت‌های زندگی همه متکی به ادراکات هستیم. گرچه این ادراکات اطلاعات زیادی درباره جهان خارجی به ما می‌دهند، ولی متأسفانه صرف‌نظر از اینکه این اطلاعات غالباً خام و نارسا هستند، در بسیاری از موارد دسترسی به

گفته‌اند کتاب‌ها بستان‌های دانشمندان‌اند، اما به‌خاطر تنوع تصویرها و مقاله‌های مجلات می‌توان گفت که بستان مجله‌ها گل‌های رنگارنگ بیشتری دارد، به‌خصوص اگر شماره ۲۹ مجله رشد آموزش ریاضی (بهار ۱۳۷۰) را در نظر بگیریم.

در این بستان به سیاحت می‌پردازیم، اما با این نگرانی که بهای مجله از ۱۰۰ ریال به ۲۰۰ ریال رسیده، یعنی دو برابر شده است. با این امید که دیگر در چند ماه آینده بهای مجله دو برابر نشود و مجله رشد ریاضی باشد نه رشد قیمت آن، قدم در این بستان می‌گذاریم.

فهرست مطالب این شماره چنین است: هشتمین المپیاد ریاضی کشور؛ مرحله نهایی هشتمین دوره مسابقات؛ نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت؛ آشنایی با مبانی انفورماتیک و کامپیوتر؛ تأملی در ساختمان عدد ۱۹۹۰؛ ظهور مسائل جدید در بررسی مسائل هندسه؛ مسائل ویژه دانش‌آموزان؛ خط‌ها و پاره‌خط‌های هم‌زاویه نسبت به دو خط؛ یک مثال نقض بر اول بودن؛ آشنایی با فلسفه‌های ریاضی؛ قضیه مقدار میانگین و یک مثال نقض؛ قاعده لایب‌نیتس و تعمیم آن؛ ریز مواد هندسه دبیرستان در برنامه جدید؛ قاعده هوپیتال؛ مسائل شماره ۲۹؛ حل مسائل شماره ۲۵؛ پاسخ به



آن‌ها از این طریق غیرممکن است. پدیده‌های اساسی جهان هستی ما به هیچ وجه به وسیله حواس قابل درک نیستند و اگر نیرویی فوق حواس نداشتیم، زندگی بشر شاید هنوز در شرایط چند هزار سال قبل بود و از بسیاری از امکانات و نعمت‌های امروزی محروم بودیم.

برای اینکه ناتوانی حواس پنج‌گانه و قدرت ریاضیات برای ما روشن شود، کافی است به موارد زیر توجه کنیم:

۱. حواس ما قادر نیست در مورد کروی بودن زمین، مدار و حرکت و گردش آن به دور خورشید و به دور محور خودش چیزی به ما بگوید.

۲. حواس ما ناتوان‌تر از آن است که به ما چیزی درباره ماهیت نیرویی که موجب نگهداری سیارات و گردش آن‌ها به دور خورشید می‌شود بگوید.

۳. حواس ما به هیچ وجه نمی‌تواند در شناخت امواج مغناطیسی که توانایی دریافت برنامه‌های رادیویی و تلویزیونی را از هزارها، بلکه میلیون‌ها فرسنگ [دورتر] به ما می‌دهد و مخابرات تلفنی را ممکن می‌سازد، کوچک‌ترین کمکی به ما بکند. رادیو، تلویزیون و تلفن و... تنها وجود این امواج را اعلام می‌کنند و بس.

مثال‌های زیر نشان می‌دهند که متأسفانه حواس ما نه تنها محدودیت دارند، بلکه در مواردی گمراه‌کننده نیز و اتکا به آن‌ها (به‌تنهایی) ممکن است فاجعه‌آمیز باشد.

الف. ناتوانی حس بینایی

بین حواس پنج‌گانه شاید مهم‌ترین آن‌ها حس بینایی باشد. در طول سالیان دراز به‌منظور نشان دادن این واقعیت که حس بینایی محدودیت دارد که گاهی نیز فریب‌دهنده است، اشکال هندسی خاصی ترسیم شده است. در حقیقت فیزیک‌دانان

و منجمین قرن نوزدهم به‌دلیل نگرانی در نامطمئن بودن مشاهدات عینی، علاقه خاصی به چشم‌بندی پیدا کردند، تا نشان دهند که مشاهدات عینی فاقد اعتبار لازم هستند و نمی‌توانند مبنای درستی برای قضاوت باشند.

در مقاله «آشنایی با مبانی انفورماتیک و کامپیوتر» که آن هم ادامه مقاله شماره قبل است، چنین می‌خوانیم:

«در شماره قبل، تا حدودی با نوشتن الگوریتم‌های ساده آشنا شدید. در این شماره ابتدا چند مثال دیگر از الگوریتم‌سازی می‌آوریم و بعد شما را با نمودار گردشی یا «فلوچارت» که نمایش تصویری الگوریتم است، آشنا خواهیم کرد

در برخی الگوریتم‌ها مجبوریم فرایند مشخصی را به دفعات زیاد تکرار کنیم. گاهی اوقات تعداد این دفعات، هر چند متغیر، مشخص است و گاهی اصلاً

مشخص نیست. مثال‌های زیر این دو مورد را نشان می‌دهند:

مثال ۱. تعداد N فقره جنس خریده‌ایم. مجموع قیمت‌های آن‌ها چه قدر می‌شود؟ (یا، برای ارزشیابی افرادی N عامل در نظر گرفته شده است که به هر عامل امتیازی داده می‌شود. مجموع امتیازات هر فرد چه قدر است؟)

مثال ۲. تعدادی جنس خریده‌ایم. مجموع قیمت‌های آن‌ها را حساب کنید.

در مثال ۱ تعداد اجناس قبل از قیمت آن‌ها داده می‌شود (هرچند ممکن است از یک مسئله به مسئله دیگر این تعداد تغییر کند)، ولی در مثال ۲ تعداد اجناس معلوم نیست و باید چاره‌ای اندیشید.

در اینجا با توجه به اینکه قیمت هر جنس عددی بزرگ‌تر از صفر است، می‌توان بعد از اینکه قیمت آخرین جنس داده شد، یک عدد، مثلاً صفر یا یک عدد منفی که به‌گونه‌ای متمایز از قیمت اجناس باشد، داد تا ضمن مقایسه قیمت‌ها با آن، بتوان به این مطلب که کدام داده قیمت نهایی است، پی برد. الگوریتم‌های زیر مربوط به مثال‌های ۱ و ۲ هستند و مطلب بالا را بیشتر روشن می‌کنند.

الگوریتم مثال ۱:

۱. شروع؛

۲. تعداد اعداد را بخوان و این تعداد را در N قرار بده؛

۳. عدد اول را بخوان و در A قرار بده؛

۴. $SUM \leftarrow 1$ و $I \leftarrow 1$ ؛

۵. $SUM \leftarrow SUM + A$ (یعنی A را با مقدار قبلی SUM جمع کرده و مقدار جدید SUM قرار بده)؛

۶. اگر $N \leq I$ ، به مرحله ۹ برو (دقت داشته باشید که اگر $N > I$ ، اجرای عملیات از مرحله ۷ ادامه می‌یابد)؛

۷. عدد بعدی را بخوان و در A قرار بده؛

۸. $I \leftarrow I + 1$ و به مرحله ۵ برگرد؛

۹. SUM مجموع اعداد است؛

۱۰. پایان.»

در مقاله «یک مثال نقض بر اول بودن $a^b - b^a$ » چنین می‌خوانیم:

«علاقه‌مندان به نظریه اعداد و به‌ویژه دوست‌داران یافتن فرمولی برای اعداد اول همواره در تلاش هستند که تابعی مثال بزنند که به ازای هر مقدار متغیر آن، و از مرتبه‌ای به بعد، اعداد اول را تولید کند. چندی قبل یکی از این علاقه‌مندان در نامه‌ای ادعا کرده بودند که عبارت $2^n - n^2$ به ازای تمام اعداد طبیعی و فرد n بزرگ‌تر از ۳، اول است. انگیزه ایشان برای این حدس، مشاهده نمونه‌های زیر بود:

$$7 = 2^5 - 5^2$$

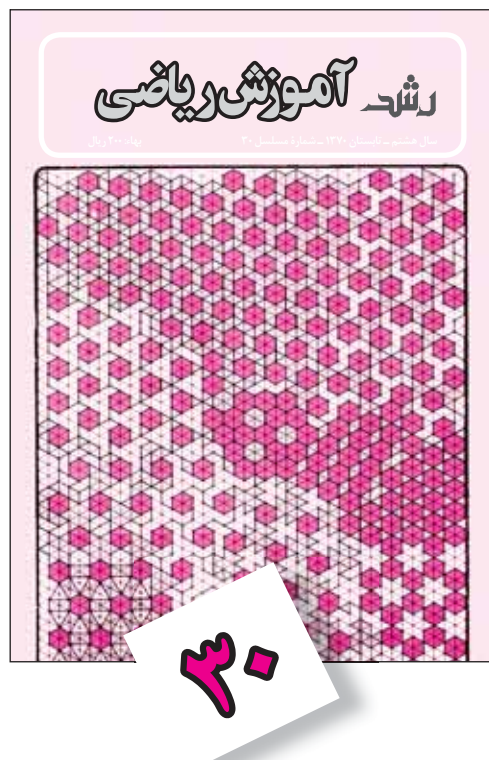
$$79 = 2^7 - 7^2$$

$$431 = 2^9 - 9^2$$

البته، تاکنون سعی فراوانی در این زمینه‌ها شده است، گمان می‌رفت که این حدس درست نباشد. در اینجا، ابتدا نادرستی این حدس را ثابت می‌کنیم و سپس به مطالعه عبارت کلی $a^b - b^a$ می‌پردازیم. از مقالات خواندنی دیگر این شماره، مقاله «آشنایی با فلسفه‌های ریاضی» است. این مقاله چنین آغاز می‌شود:

«برای کسانی که کارشان آموزش ریاضی است، شاید این کار طبیعی‌ترین کار در دنیا برایشان جلوه کند. ولی اگر اندکی کارشان را متوقف و در مورد چیزهایی که انجام می‌دهند فکر کنند که معنی آن‌ها چیست، این کار اسرارآمیزترین کارها به نظر می‌رسد!

چگونه می‌توانیم در مورد چیزهایی سخن بگوییم که هیچ کسی آن‌ها را ندیده است و بهتر از امور روزمره زندگی آن‌ها را می‌فهمیم؟ چرا هندسه اقلیدسی هنوز هم تدریس می‌شود، در حالی که فیزیک ارسطویی از سال‌ها پیش مرده است؟ در



ریاضیات چه می‌دانیم و آن‌ها را چگونه درمی‌یابیم؟ این‌ها همه سؤالاتی فلسفی‌اند؛ سؤالاتی کلی که به ماهیت ریاضیات، بنیان آن و روش‌های آن مربوط هستند. در فلسفه ریاضی این‌گونه سؤالات مطرح می‌شوند. گرچه در سال‌های اخیر مطالعه فلسفه‌های ریاضی و صورت‌بندی‌های آن پیشرفت‌های زیادی کرده است، ولی ریشه‌های آن از هزاران سال پیش، حتی از بدو شروع ریاضیات، نشئت می‌گیرد.

وقتی اقلیدس در کتاب مبانی خود نقطه را به‌عنوان «چیز بدون بُعد» تعریف می‌کند، فلسفه ریاضی شروع می‌شود. مگر می‌شود چیزی مادی وجود داشته باشد و فاقد بعد و اندازه باشد؟

پیشرفت حساب اعداد نیز با آشوب‌های فلسفی توأم بوده است. در حالی که مفهوم عدد نمایانگر تعدد است، قائل به اعدادی مانند یک و صفر شدند که آخری با مفهوم تعدد بیگانه است! پیدایش اعداد منفی نیز آشوب دیگری برپا کرده بود.

در این مقاله سعی می‌کنیم به‌گونه‌ای اجمالی دیدگاه‌های فلسفی معاصر را در باب ریاضیات مورد بررسی و مطالعه قرار دهیم. مشهورترین فلسفه‌های ریاضی مشتمل بر افلاطون‌گرایی، صورت‌گرایی و ساختارگرایی می‌باشند.

مجله مانند شماره‌های قبل با معرفی کتاب‌های ریاضی و یک آگهی در مورد دوره تابستانی منطق خاتمه می‌یابد.

در معرفی کتاب‌های رسیده، در معرفی «واژه‌نامه ریاضی» چنین می‌خوانیم:

«واژه‌نامه ریاضی: ناشر، جهاد دانشگاهی صنعتی شریف، ۳۲۰ صفحه، وزیری

کتاب واژه‌نامه ریاضی برای اولین بار در سال ۱۳۶۳ و در نتیجه یک کار جمعی توسط «گروه ریاضی کاربردی جهاد دانشگاهی صنعتی شریف» به چاپ رسید. این کتاب طی سه بار تجدید چاپ خود، با همان محتوای اولیه در تیراژ وسیع منتشر شد و در اختیار دانشجویان رشته‌های مختلف دانشگاهی

قرار گرفت. به‌دنبال استقبال گسترده از این کتاب ضرورت تکمیل و رفع نقایص چاپ اولیه آن به خوبی احساس شد و وظیفه انتشار مجموعه جدیدی که حتی‌الامکان تمامی واژه‌های متداول ریاضی را در برداشته باشد، در صدر فعالیت‌های انتشاراتی گروه تهیه‌کننده کتاب جای داده شد.

مجموعه حاضر که [حاصل] تجدیدنظر کلی بر چاپ اول کتاب است، مشتمل بر ۸۱۰۰ واژه ساده و ترکیبی است و به اضافه شدن واژه‌های جدید، حذف واژه‌های غیرریاضی، و تهیه شکل‌های موردنیاز، از غنای خاصی برخوردار می‌باشد. در این مجموعه، تعاریف، صورت قضایا و مسائل مهم ریاضی نیز درج شده‌اند که خود اعتبار ویژه‌ای به آن بخشیده است. واژه‌های این کتاب از منابع متعدد گردآوری شده و معادل‌های فارسی آن‌ها نیز تا حد ممکن از کتب ترجمه شده معتبر فراهم آمده‌اند.

با این امید که بهره‌گیری از کتاب حاضر بتواند کمک بسیار مؤثری در برداشت دانشجویان و دبیران از منابع ریاضی به زبان انگلیسی باشد.

راز کارت‌های سن و سال*

اشاره

در این مقاله تلاش شده از یک بازی (شعبده) ریاضی رمزگشایی شود. ابتدا با خود بازی آشنا می‌شویم و سپس سعی می‌کنیم مرحله به مرحله به اسرار آن پی ببریم. در نهایت، گشایش رموز این بازی، ما را به تعمیم این بازی و اثبات ریاضی درستی این تعمیم رهنمون می‌شود.

مقدمه

داستان از اینجا آغاز شد که روزی دانش‌آموزی هفت کارت را به من نشان داد که روی هر کدام از آن‌ها تعداد زیادی عدد طبیعی نوشته شده بود. او از من خواست اگر عدد سنم را روی هر کدام از این کارت‌ها دیدم، آن کارت را جدا کنم و به او بدهم. من هم همین کار را کردم و سه کارت را که عدد سنم روی آن‌ها بود، به وی دادم. دانش‌آموز به سرعت نگاهی به کارت‌ها کرد و سنم را به من گفت! با تعجب کارت‌ها را از او گرفتم و به آن‌ها نگاه کردم. اعداد روی کارت‌ها به صورت زیر بود:

۴	۵	۶	۷	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۶	۳۷
۳۸	۳۹	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۵۲	۵۳	۵۴
۵۵	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۹۲
۹۳	۹۴	۹۵	۱۰۰	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳		

۴

۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
۱۹	۲۱	۲۳	۲۵	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	۳۵
۳۷	۳۹	۴۱	۴۳	۴۵	۴۷	۴۹	۵۱	۵۳
۵۵	۵۷	۵۹	۶۱	۶۳	۶۵	۶۷	۶۹	۷۱
۷۳	۷۵	۷۷	۷۹	۸۱	۸۳	۸۵	۸۷	۸۹
۹۱	۹۳	۹۵	۹۷	۹۹	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۵	۱۰۷

۵

۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۴۰	۴۱
۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۵۶	۵۷	۵۸
۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
۹۳	۹۴	۹۵	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷		

۳

۲	۳	۶	۷	۱۰	۱۱	۱۴	۱۵	۱۸
۱۹	۲۲	۲۳	۲۶	۲۷	۳۰	۳۱	۳۴	۳۵
۳۸	۳۹	۴۲	۴۳	۴۶	۴۷	۵۰	۵۱	۵۴
۵۵	۵۸	۵۹	۶۲	۶۳	۶۶	۶۷	۷۰	۷۱
۷۴	۷۵	۷۸	۷۹	۸۲	۸۳	۸۶	۸۷	۹۰
۹۱	۹۴	۹۵	۹۸	۹۹	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۶	۱۰۷

۱

۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۴۸	۴۹
۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸
۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳
۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
۹۳	۹۴	۹۵						

۴

۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹
۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸
۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۹۶	۹۲	۹۳	۹۴
۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳
۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷					

۵

۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲
۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱
۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹
۱۰۰	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷	

۶

تکرار شده، مجموع عضو ابتدای آن مجموعه‌هاست. برای مثال، عدد ۲۶ که تنها در مجموعه‌های ۴، ۳ و ۱ تکرار شده، مجموع ۱۶، ۸ و ۲ است که این‌ها به ترتیب عضو ابتدای مجموعه‌های مذکورند. (می‌توان با عددهای دیگر نیز درستی این مطلب را بررسی کرد.)

راز سوم

مطلب دیگری که کم‌کم خود را آشکار می‌کند این است که عضو آغازین هر مجموعه، توانی حسابی^۱ از ۲ است. برای مثال، عضو ابتدای مجموعه ۰ عدد ۴ و مجموعه ۰ عدد ۱ است. آشکار شدن رازهای دوم و سوم این موضوع را مطرح می‌کند که هر عدد طبیعی از ۷ تا ۱۰۷ را می‌توان به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصره‌فرد حسابی عدد ۲ نوشت. به این معنا که در نوشتن هر عدد به‌صورت مجموعی از توان‌های ۲، هر توانی از ۲ حداکثر یک‌بار ظاهر می‌شود. آیا این مطلب برای هر عدد طبیعی نیز برقرار است؟

به این معنا که آیا هر عدد طبیعی را می‌شود به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصره‌فرد حسابی عدد ۲ نوشت؟ باید درستی این حدس را ثابت کنیم.

راز چهارم

چه رابطه‌ای بین اعضای هر کدام از این مجموعه‌ها برقرار است؟ مجموعه ۰ متشکل از تمام اعداد فرد بین ۱ و ۱۰۷ است. اما مجموعه ۱ از ۲ شروع می‌شود و دو عدد متوالی را دربرمی‌گیرد. سپس به فاصله ۴ از عدد ۶ شروع می‌شود و دوباره دو عدد متوالی می‌آید و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهد تا مجموعه را پر کند. مجموعه ۲ از ۴ شروع می‌شود و چهار عدد متوالی را دربرمی‌گیرد. سپس به فاصله ۸ از عدد ۱۲ شروع شده و باز چهار عدد متوالی را دربرمی‌گیرد و به‌همین منوال تا مجموعه کامل شود. می‌توان حدس زد مجموعه‌های دیگر هم به‌همین صورت تشکیل شده‌اند.

اندکی تأمل بیشتر در روند شکل‌گیری این مجموعه‌ها نشان می‌دهد که هر یک از این مجموعه‌ها، از دسته‌هایی تشکیل شده‌اند که عددهای هر دسته، در تقسیم بر عضو ابتدای

راز اول

در نگاه اول چیزی که به ذهن خطور می‌کند، این است که سن من تنها عدد مشترک میان آن هفت کارت جدا شده است. پس شاید دانش‌آموز با دیدن این کارت‌ها و یافتن اشتراک آن‌ها به سن من پی برده است. خب این فرض، هم صحیح است و هم ناصحیح. اگر ما به ترتیب از پایین به بالا مجموعه‌ها (کارت‌ها) را ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰، ۱۰۰۱، ۱۰۰۲، ۱۰۰۳، ۱۰۰۴، ۱۰۰۵، ۱۰۰۶، ۱۰۰۷، ۱۰۰۸، ۱۰۰۹، ۱۰۱۰، ۱۰۱۱، ۱۰۱۲، ۱۰۱۳، ۱۰۱۴، ۱۰۱۵، ۱۰۱۶، ۱۰۱۷، ۱۰۱۸، ۱۰۱۹، ۱۰۲۰، ۱۰۲۱، ۱۰۲۲، ۱۰۲۳، ۱۰۲۴، ۱۰۲۵، ۱۰۲۶، ۱۰۲۷، ۱۰۲۸، ۱۰۲۹، ۱۰۳۰، ۱۰۳۱، ۱۰۳۲، ۱۰۳۳، ۱۰۳۴، ۱۰۳۵، ۱۰۳۶، ۱۰۳۷، ۱۰۳۸، ۱۰۳۹، ۱۰۴۰، ۱۰۴۱، ۱۰۴۲، ۱۰۴۳، ۱۰۴۴، ۱۰۴۵، ۱۰۴۶، ۱۰۴۷، ۱۰۴۸، ۱۰۴۹، ۱۰۵۰، ۱۰۵۱، ۱۰۵۲، ۱۰۵۳، ۱۰۵۴، ۱۰۵۵، ۱۰۵۶، ۱۰۵۷، ۱۰۵۸، ۱۰۵۹، ۱۰۶۰، ۱۰۶۱، ۱۰۶۲، ۱۰۶۳، ۱۰۶۴، ۱۰۶۵، ۱۰۶۶، ۱۰۶۷، ۱۰۶۸، ۱۰۶۹، ۱۰۷۰، ۱۰۷۱، ۱۰۷۲، ۱۰۷۳، ۱۰۷۴، ۱۰۷۵، ۱۰۷۶، ۱۰۷۷، ۱۰۷۸، ۱۰۷۹، ۱۰۸۰، ۱۰۸۱، ۱۰۸۲، ۱۰۸۳، ۱۰۸۴، ۱۰۸۵، ۱۰۸۶، ۱۰۸۷، ۱۰۸۸، ۱۰۸۹، ۱۰۹۰، ۱۰۹۱، ۱۰۹۲، ۱۰۹۳، ۱۰۹۴، ۱۰۹۵، ۱۰۹۶، ۱۰۹۷، ۱۰۹۸، ۱۰۹۹، ۱۱۰۰، ۱۱۰۱، ۱۱۰۲، ۱۱۰۳، ۱۱۰۴، ۱۱۰۵، ۱۱۰۶، ۱۱۰۷، ۱۱۰۸، ۱۱۰۹، ۱۱۱۰، ۱۱۱۱، ۱۱۱۲، ۱۱۱۳، ۱۱۱۴، ۱۱۱۵، ۱۱۱۶، ۱۱۱۷، ۱۱۱۸، ۱۱۱۹، ۱۱۲۰، ۱۱۲۱، ۱۱۲۲، ۱۱۲۳، ۱۱۲۴، ۱۱۲۵، ۱۱۲۶، ۱۱۲۷، ۱۱۲۸، ۱۱۲۹، ۱۱۳۰، ۱۱۳۱، ۱۱۳۲، ۱۱۳۳، ۱۱۳۴، ۱۱۳۵، ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸، ۱۱۳۹، ۱۱۴۰، ۱۱۴۱، ۱۱۴۲، ۱۱۴۳، ۱۱۴۴، ۱۱۴۵، ۱۱۴۶، ۱۱۴۷، ۱۱۴۸، ۱۱۴۹، ۱۱۵۰، ۱۱۵۱، ۱۱۵۲، ۱۱۵۳، ۱۱۵۴، ۱۱۵۵، ۱۱۵۶، ۱۱۵۷، ۱۱۵۸، ۱۱۵۹، ۱۱۶۰، ۱۱۶۱، ۱۱۶۲، ۱۱۶۳، ۱۱۶۴، ۱۱۶۵، ۱۱۶۶، ۱۱۶۷، ۱۱۶۸، ۱۱۶۹، ۱۱۷۰، ۱۱۷۱، ۱۱۷۲، ۱۱۷۳، ۱۱۷۴، ۱۱۷۵، ۱۱۷۶، ۱۱۷۷، ۱۱۷۸، ۱۱۷۹، ۱۱۸۰، ۱۱۸۱، ۱۱۸۲، ۱۱۸۳، ۱۱۸۴، ۱۱۸۵، ۱۱۸۶، ۱۱

مجموعه، دارای «جزء صحیح»^۲ یکسان هستند. جالب‌تر آنکه این جزء صحیح عددی فرد است. به‌عنوان نمونه، در مجموعه^۳ که از ۸ آغاز می‌شود، دسته اول اعداد طبیعی‌اند که در تقسیم بر ۸ دارای جزء صحیح ۱ هستند، دسته دوم نیز شامل اعداد طبیعی‌اند که در تقسیم بر ۸ دارای جزء صحیح ۳ هستند و الی آخر.

حالا که روند تولید هر کدام از این مجموعه‌ها آشکار شد، می‌توان دید که به این روش می‌شود اعداد طبیعی بین ۱ تا ۱۲۷ را نیز در این ۷ مجموعه گنجانند. پس اینکه روی این کارت‌ها تا عدد ۱۰۷ نوشته شده، صرفاً به‌خاطر این بوده که طراح، بازی را برای افراد کمتر از ۱۰۷ سال طراحی کرده است. اکنون که پرده‌ها یک‌به‌یک کنار رفتند و شعبده آشکار شد، بهتر است که صورت دقیق‌تر و ریاضی این بازی را در قالب قضیه زیر بیان کنیم.

قضیه

فرض کنیم $S = \{1, 2, 3, \dots, 127\}$ ؛ برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ مجموعه A_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \left\{ x \in S \left| \left\lfloor \frac{x}{2^i} \right\rfloor \right. \right\}$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

$$\bigcup_{i=0}^6 A_i = S$$

ب. برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ و $y \in A_i$ ، $2^i \leq y$ آنگاه $y \in A_i$

ج. اگر $y \in S$ ، آنگاه k عدد $i_1, i_2, \dots, i_k$ از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$ به‌گونه‌ای وجود دارد که: $y = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_k}$ و $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

د. اگر $y \in S$ و k عدد $i_1, i_2, \dots, i_k$ از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که: $y = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_k}$ و $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

در این صورت، اگر $z \in \{1, 2, \dots, k\}$ ، آنگاه $y \in A_{i_z}$ همچنین اگر $z \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ و $z \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ، آنگاه $y \notin A_z$

این قضیه در حقیقت حالت خاصی از یک قضیه

کلی‌تر است که تعمیم این بازی برای مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از هر توان دلخواهی از ۲ محسوب می‌شود. به‌جای اثبات این قضیه، شکل تعمیم یافته آن را بیان و اثبات می‌کنیم.

تعمیم قضیه

فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $S = \{1, 2, 3, \dots, 2^n - 1\}$ ؛ برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ مجموعه A_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \left\{ x \in S \left| \left\lfloor \frac{x}{2^i} \right\rfloor \right. \right\}$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرار است:

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i = S$$

ب. برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ و $y \in A_i$ ، $2^i \leq y$ آنگاه $y \in A_i$

ج. اگر $y \in S$ ، آنگاه k عدد $i_1, i_2, \dots, i_k$ از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ به‌گونه‌ای وجود دارد که: $y = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_k}$ و $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

د. فرض کنیم $y \in S$ و k عدد $i_1, i_2, \dots, i_k$ از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که: $y = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_k}$ و $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

در این صورت، اگر $z \in \{1, 2, \dots, k\}$ ، آنگاه $y \in A_{i_z}$ همچنین اگر $z \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ و $z \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ، آنگاه $y \notin A_z$

اثبات

الف. بدیهی است که: $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i = S$. اکنون فرض

می‌کنیم: $x \in S$ ، آنگاه بنا به خاصیت ارشمیدسی $k \in \mathbb{N}$ و $0 \leq k < 2^{k+1} \leq x < 2^{k+1}$. پس:

$$\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor = 1 \quad \text{بنابراین } x \in A_k \text{ که این خود نشان می‌دهد که: } x \in \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i \text{ لذا: } S \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

ب. چون $2^i \leq y$ ، پس $y \in A_i$ اکنون فرض

می‌کنیم $y \in A_i$ پس $\left\lfloor \frac{y}{2^i} \right\rfloor$ عددی فرد است. بنابراین

$m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به گونه‌ای که $2m-1 \leq \left\lfloor \frac{y}{2^i} \right\rfloor$ ، لذا $\frac{y}{2^i} < 2m-1 \leq \frac{y}{2^i}$ که این نیز نتیجه می‌دهد: $2^i \leq y$.

ج. فرض کنیم: $y \in S$ ، در این صورت $0 \leq i_1 < n$ وجود دارد، به طوری که: $2^{i_1} \leq y < 2^{i_1+1}$. اکنون قرار می‌دهیم: $y_1 = y - 2^{i_1}$. با استدلالی مشابه، $0 \leq i_2 < i_1$ وجود دارد، به طوری که: $2^{i_2} \leq y_1 < 2^{i_2+1}$. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، بعد از چند مرحله $y_k = 0$ یا: $y_k = 1$ اگر: $y_k = 0$ که اثبات تمام است. در غیر این صورت: $y_k = 1 = 2^0$ پس $i_{k+1} = 0$ بنابراین:

$$y = 2^{i_k} + \dots + 2^{i_2} + 2^{i_1} \text{ و } i_k < i_{k-1} < \dots < i_1 < i_0$$

د. فرض کنیم: $y \in S$ و k عدد $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k$ از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که:

$$y = 2^{i_k} + \dots + 2^{i_2} + 2^{i_1} \text{ و } i_k < i_{k-1} < \dots < i_1 < i_0$$

همچنین، فرض کنیم: $\{1, 2, \dots, k\} \in \mathbb{Z}$ در این صورت:

$$\frac{y}{2^j} = \frac{2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_{j-1}} + 2^j + 2^{i_{j+1}} + \dots + 2^{i_k}}{2^j} = 2^{i_1-j} + \dots + 2^{i_{j-1}-j} + 1 + \frac{1}{2^{j-i_{j+1}}} + \dots + \frac{1}{2^{j-i_k}}$$

بنابراین: $\left\lfloor \frac{y}{2^j} \right\rfloor = 2^{i_1-j} + \dots + 2^{i_{j-1}-j} + 1$ که عددی فرد است. پس: $y \in A_j$.

حال فرض می‌کنیم $\{i_1, i_2, \dots, i_{j-1}, i_j, i_{j+1}, \dots, i_k\} \notin \mathbb{Z}$ و $\{0, 1, 2, \dots, n-1\} \in \mathbb{Z}$ در این صورت سه حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول: $0 < j \leq i_k$ در این صورت:

$$\frac{y}{2^j} = \frac{2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_k}}{2^j} = 2^{i_1-j} + \dots + 2^{i_k-j}$$

که عددی صحیح و زوج است. بنابراین $y \notin A_j$.

حالت دوم: عددی مانند $m \in \{0, 1, \dots, k\}$ وجود داشته باشد که: $i_m < j < i_{m+1}$ در این صورت:

$$\frac{y}{2^j} = \frac{2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_{m-1}} + 2^{i_m} + \dots + 2^{i_k}}{2^j}$$

$$= 2^{i_1-j} + \dots + 2^{i_{m-1}-j} + \frac{1}{2^{j-i_m}} + \dots + \frac{1}{2^{j-i_k}}$$

پس $\left\lfloor \frac{y}{2^j} \right\rfloor = 2^{i_1-j} + \dots + 2^{i_{m-1}-j}$ عددی زوج است. بنابراین: $y \notin A_j$.

حالت سوم: $i_1 < j \leq n-1$ در این صورت:

$$\frac{y}{2^j} = \frac{2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_k}}{2^j} = \frac{1}{2^{j-i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{j-i_k}}$$

که عددی بین 0 و 1 است. بنابراین: $\left\lfloor \frac{y}{2^j} \right\rfloor = 0$.

پس: $y \notin A_j$.

مقاله را با طرح چند تمرین برای خوانندگان به پایان می‌رسانیم.

تمرین

۱. در حین اثبات این قضیه به طور ضمنی نشان دادیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموعی از توان‌های منحصر به فرد حسابی عدد ۲ نوشت. آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموعی از توان‌های منحصر به فرد حسابی عدد p نوشت که در آن p عددی اول و مخالف ۲ است؟ چرا؟

۲. هر عدد طبیعی را به صورت مجموعی از توان‌های

منحصر به فرد حسابی چه اعدادی می‌توان نوشت؟

۳. فرض کنیم: $n \in \mathbb{N}$ و $S = \{1, 2, 3, \dots, 2^n-1\}$ و برای

هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه B_i را زیر مجموعه‌ای

از S تعریف می‌کنیم که اعضایش در نمایش بر

مبنای ۲ دارای رقم ۱ام یک باشند. نشان دهید:

$$B_i = A_{i+1}$$

۴. با استفاده از تمرین ۴، این بازی را با استفاده از

مبنای ۲ تفسیر کنید.

۵. در قضیه اثبات شده، تعداد عضوهای $A_i \cap A_j$

را که در آن داشته باشیم: $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ بشمارید.

۶. فرض کنیم: $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ در

این صورت $\bigcap_{i=1}^k A_{i_j}$ دارای چند عضو است؟

۷. الگوریتمی بنویسید که $n \in \mathbb{N}$ را بگیرد و n

مجموعه را که شرایط قضیه را دارند، چاپ کند.

* پی‌نوشت‌ها

* این مقاله حاصل تلاش بازی‌گوشانه نگارنده در کشف و گسترش قواعد یک بازی است. لذا برای نگارش آن از منبع و مرجعی خاص استفاده نشده است.

۱. اجتماع مجموعه اعداد

طبیعی و مجموعه تک‌عضوی

صفر را «مجموعه اعداد

حسابی» گوئیم.

۲. بزرگ‌ترین عدد صحیح

کوچک‌تر یا مساوی هر

عدد حقیقی را جزء صحیح

گوئیم. جزء صحیح عدد

حقیقی x را با نماد $[x]$

نمایش می‌دهیم.

©Rhasanik@yahoo.com

ایستگاه سوم: لطیفه‌های ریاضی



نیروی هوایی باشند، توجه او را جلب کردند، ولی آن‌ها در هیچ یک از بحث‌ها شرکت نمی‌کردند. روز آخر سمینار آن دو نفر پیش استاد آمدند و یکی از آن‌ها گفت: «بخشید؛ ما یک مسئله در مورد طراحی بال‌های هواپیمای جنگی داریم که به حل یک دستگاه معادلات به این صورت منجر شده است. با رسیدن به جواب‌های این دستگاه می‌توانیم اندازه‌هایی را برای بال‌های هواپیما به دست آوریم که به ازای مقادیر کمتر از آن‌ها، بال‌ها نوسان می‌کنند و در آن اندازه‌ها پرواز یکنواخت می‌شود. ولی در حل این دستگاه عاجز شده‌ایم و می‌خواهیم از شما کمک بگیریم.»

استاد برگه را از آن‌ها گرفت و نگاهی به معادله‌ها انداخت و کمی فکر کرد. سپس در حالی که برگه را به آن‌ها پس می‌داد، گفت: «بال‌ها را بزرگ‌تر کنید!»

● **لطیفه دوم:** این هم حکایتی است خواندنی دربارهٔ جان فن نویمان (۱۹۵۷ - ۱۹۰۳)، استاد و مبتکر علم «سیرنیتیک» که در شماره ۷۶ برهان هم دربارهٔ او در ایستگاه اندیشه دوم لطیفه‌ای داشتیم. ابتدا مسئله زیر را بخوانید:

مسئله: دو قطار در فاصله ۲۰۰ مایلی از هم هستند و هر دو با سرعت برابر ۵۰ مایل در ساعت به هم نزدیک می‌شوند طوری که سرانجام با هم تصادف خواهند کرد. پرنده‌ای با سرعت ثابت ۷۵ مایل در ساعت مکرراً از دماغه یکی از دو قطار می‌پرد و خود را به دماغه قطار دیگر می‌رساند و دوباره پرواز می‌کند و به قطار اول می‌رسد و... وقتی که تصادف اتفاق می‌افتد پرنده نیز بین دو قطار له می‌شود! مجموع مسافتی که این پرنده تا لحظه مرگ طی کرده چند مایل است؟

برای حل این مسئله دو روش، یکی دشوار و دیگری آسان وجود دارد. روش دشوار آن است که با توجه به سرعت پرنده و مسافت بین دو قطار، فواصلی را که پرنده در هر پرواز طی می‌کند، محاسبه و با هم جمع کنیم. چون تعداد پروازهای پرنده نامتناهی است، پس به یک سری نامتناهی می‌رسیم و با تعیین حد مجموع جملات این سری، مسافت را به دست آوریم.

اما روش آسان این است که اصلاً کاری به

● **لطیفه اول:** این حکایتی است که دربارهٔ یکی از ریاضی‌دانان شوروی سابق نقل شده است: این ریاضی‌دان چند روز پیاپی سمیناری تحت عنوان «کاربرد ریاضیات در مسائل آیرودینامیک» در یک دانشگاه داشت. بین حاضران در سمینار، دو نفر که لباس نظامی‌شان نشان می‌داد باید از مهندسان





مسافت‌های جزئی که پرنده طی می‌کند، نداشته باشیم و زمان پرواز را مدنظر قرار دهیم. چون دو قطار در فاصله ۲۰۰ مایلی هم هستند، پس هر کدام باید ۱۰۰ مایل مسافت را طی کنند تا به هم بخورند. و چون سرعت آن‌ها ۵۰ مایل در ساعت است، پس قبل از تصادف، ۲ ساعت حرکت می‌کنند و این همان مدت پرواز پرنده است. و چون پرنده با سرعت ۷۵ مایل در ساعت پرواز می‌کند، بنابراین ۱۵۰ مایل پرواز می‌کند!

روزی یکی از دانشجویان همین مسئله را به نویسمان داد. نویسمان نگاهی به آن انداخت و بلافاصله گفت: «۱۵۰ مایل».

دانشجو گفت: «ولی استاد خیلی از کسانی که قبل از شما این مسئله را به آن‌ها دادیم، سعی کرده بودند آن را به کمک تشکیل یک سری نامتناهی حل کنند و خیلی طول کشید تا به همین جواب برسند.» نویسمان سری تکان داد و گفت: «تعجبی ندارد، خب من هم همین کار را کردم!»

● **لطیفه سوم:** این هم یک شوخی با استادان آمار و احتمال: روزی یک تولیدکننده کفش به دوستش که استاد آمار و احتمال بود گفت: «من یک مشکل دارم: نمی‌دانم چه اندازه (سایز) کفشی را باید بیشتر تولید کنم»

استاد گفت: «این اتفاقاً یک مسئله آماری است! برمی‌گردد به توزیع گاوس، فرمولش هم این است.» دوستش گفت: «خب این علامت چیست؟» استاد گفت: «این عدد پی است.» او باز پرسید: «خب پی چی‌یه؟» استاد گفت: «پی نسبت محیط دایره به قطر آن است.» و دوستش گفت: «ولی کفش‌های من که دایره‌ای شکل نیستند!»

● **لطیفه چهارم:** باز هم شوخی با آماردانان! یک استاد آمار و احتمال عادت داشت که همیشه موقع رانندگی، قبل از رسیدن به هر چهارراه ناگهان شتاب حرکت خود را زیاد کند و با سرعت برق از چهارراه رد شود. یک روز دوستش که کنار دست او نشسته بود، با مشاهده این رفتار از او پرسید: «چرا این کار را می‌کنی؟»

استاد گفت: «بر اساس آمار، بیشترین تعداد تصادفات، سر چهارراه‌ها اتفاق می‌افتند. پس محتمل‌ترین جا برای تصادف سر چهارراه‌هاست. بنابراین باید کمترین زمان را برای حضور در این نقاط صرف کرد!»



هوش مصنوعی

هوش مصنوعی^۱نویسندگان: هنری برایتون و هوارد سلینا^۲

مترجم: ابراهیم اسکافی

ناشر: پردیس دانش

بها: ۵۵۰۰ تومان

ممکن است از درک ما فراتر رود. کتاب در مورد علومی که در ساختن هوش مصنوعی به کار می‌روند، چنین می‌گوید: «هدف هوش مصنوعی که ساختن ماشین‌هاست، مبتنی بر منطق، ریاضیات و علم رایانه است.»

مطلب دیگر کتاب در مورد هوش مصنوعی و روان‌شناسی، و روان‌شناسی شناختی است و مسئله مهم دیگر، در میان تعجب خواننده، در مورد هوش مصنوعی و فلسفه است. کتاب در این مورد می‌نویسد: «در پیمایشی از پژوهشگران هوش مصنوعی پرسیده شد که چه رشته‌ای بیش از همه به این رشته نزدیک است. بیشترین پاسخ «فلسفه» بود.

در فصل «محاسبه چیست؟» می‌خوانیم: «مفهوم محاسبه در قلب شناخت‌گرایی جای دارد؛ هرچند که معروف به آن است که به سختی می‌توان آن را تعریف کرد. محاسبه را به سادگی می‌توان این‌طور معنی کرد: نوعی از محاسبات که رایانه‌ها می‌توانند انجام دهند.»

با وجود فقدان تعریف

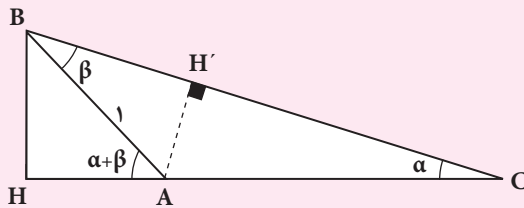
«هوش مصنوعی» کتابی است که مطالعه آن برای هر دانش‌آموز و هر دبیر ریاضی واجب است، چرا که خواننده را با اهمیت هوش مصنوعی و چگونگی اختراع و کاربرد آن آشنا می‌کند.

در کتاب در مورد کاربرد این علم چنین می‌خوانیم: «سیستم‌های رایانه‌ای را در فرودگاه‌ها نصب می‌کنند تا بار مسافران را برای تشخیص مواد منفجره وارسی کنند. اتکای تجهیزات نظامی بر پژوهش‌های ماشین‌های هوشمند روزبه‌روز افزایش می‌یابد. امروزه موشک‌ها به کمک سامانه‌های بینایی ماشینی، اهداف خود را پیدا می‌کنند.»

اصل مقدس هوش مصنوعی این است که بشر را همچون ماشین بشناسیم. هوش مصنوعی در شکل ضعیف خود به این مسئله می‌پردازد که ما تا چه حد می‌توانیم سازوکارهای زیربنایی رفتار انسان و حیوان را توضیح بدهیم. هوش مصنوعی قوی به مراتب جاه‌طلب‌تر است و اهدافش



یک اثبات ساده برای دستورهای محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$



$$\triangle ABH : AB = 1, \sin(\alpha + \beta) = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \boxed{BH = \sin(\alpha + \beta)}$$

$$\triangle ABH' : \sin \beta = \frac{AH'}{AB} = AH', \boxed{\cos \beta = BH'}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AH}{AB} = AH \Rightarrow \boxed{AH = \cos(\alpha + \beta)}$$

$$\cot \alpha = \frac{CH'}{AH'} \Rightarrow \boxed{CH' = \sin \beta \cdot \cot \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{CH'}{AC} \Rightarrow AC = \frac{\sin \beta \cdot \cot \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \boxed{AC = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}}$$

$$BC = BH' + CH' = \boxed{\sin \beta \cdot \cot \alpha + \cos \beta}$$

$$CH = AC + AH = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha = \frac{BH}{BC} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cot \alpha + \cos \beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cdot \cos \alpha + \cos \beta \cdot \sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{CH}{BC} = \frac{\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \cos(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cot \alpha + \cos \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta \cdot \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} (\cos^2 \alpha - 1) + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

دقیق، « نظریه محاسبه » شاخه توسعه یافته و استواری از علم رایانه است که به شدت مفهوم ماشین تورینگ را تداعی می کند. آلن تورینگ، ریاضی دان انگلیسی (۱۹۱۲-۵۴)، پیشگامی اثرگذار در تاریخ هوش مصنوعی، علم رایانه و منطق بود.

آن وقت به معرفی ماشین تورینگ می پردازد: «یکی از موفقیت های تورینگ پیشنهاد ابزار محاسبه ای مفهومی بود. ماشین تورینگ، ابزاری انتزاعی ساده ای است؛ بخشی از آن نوار طولانی بی انتهای است که روی آن می توان نمادها را نوشت. ماشین تورینگ با استفاده از ماشین انتزاعی اش نتایجی بنیادی را اثبات کرد که برای تمام ابزارهای محاسباتی شناخته شده صدق می کنند. تورینگ به این شاهکار بزرگ زمانی دست یافت که هنوز رایانه ها به این شکلی که امروز می شناسیم، شناخته نشده بودند.»

از بخش های مهم دیگر کتاب، بخش های پرسش ماشین تورینگ، مسئله فکر کردن، چامسکی و ورودی و خروجی زبان، و... است. مطالب کتاب مفصل تر و کلیدی تر از آن است که بتوان در این مختصر به آن ها حتی اشاره کرد. بنابراین بهترین کار برای علاقه مند به این رشته بسیار مهم ریاضی، رایانه، منطق و فلسفه، مطالعه خود کتاب است.

✳ پی نوشت ها

1. Introducing Artificial Intelligence
2. Henry Brighton and Howard Selina

Parabola Mathematics Magazine

مجله ریاضی «Parabola Mathematics Magazine» در سال ۱۹۶۴ به وسیلهٔ پروفسور جورج ژیکرز^۱ بنیان گذاری شد. این مجله به چاپ مقالات ریاضی دورهٔ پیش از ورود به دانشگاه (در ایران دورهٔ دوم آموزش متوسطه) می پردازد. علاقه مندان به آن مجله می توانند فایل «پی دی اف» متناظر با مقالات مندرج در مجله را از طریق تارنمای آن دریافت دارند. مقالات چاپ شده در شماره های گوناگون این مجله، از تکرر موضوع و تنوع ساختار بهره مند هستند و شامل مباحثی در نظریهٔ اعداد^۲، هندسه^۳، نظریهٔ گراف^۴، تاریخ ریاضیات^۵، المپیادهای ریاضی و... می شوند.

از ویژگی های بارز این مجله وجود ستونی در آن با عنوان «Profile of Mathematician» است که به معرفی ریاضیدانان معاصر و دستاوردهای آنان در عالم ریاضیات می پردازد. مناسب است که دست اندر کاران مجلات ریاضی کشورمان نیز باالگو قرار دادن این ستون، به معرفی ریاضیدانان و کارهای ایشان بپردازند تا دانش آموزان با سرمشق قرار دادن آن ها و عملکرد مثبت و پویای شان، بتوانند به نتایج متعالی دست یابند.

در شمارهٔ ۱ دورهٔ ۴۲ مجله در سال ۲۰۰۶، مقاله ای با عنوان بازی با لگاریتم^۶، وجود دارد که دانش آموزان می توانند با بهره گیری از دانسته های خود در مورد لگاریتم و قوانین آن و مراجعه به مقالهٔ مزبور، به بازی با اعداد دست بزنند. در ضمن در همان شمارهٔ مجله، مقاله ای با عنوان «بازی با تانژانت معکوس»^۷ وجود دارد که ریاضی آموزان باز هم می توانند

● اسم مجله: Parabola Mathematics Magazine

● تارنما: <http://www.parabola.unsw.edu.au>

● ناشر: University of New South Wales

● مکان انتشار: استرالیا

● زبان: انگلیسی

● سال آغاز انتشار: ۱۹۶۴

● تعداد چاپ در هر دوره: سه شماره

● نشانی:

The Editor, Parabola
School of Mathematics
University Of New South Wales
Post Office Box 1
Kensington, NSW 2033
Australia



پروفسور جورج ژیکرز

PARABOLA ONLINE

a mathematics magazine for secondary schools

About us

Welcome to Parabola Online. I am delighted that Parabola's accessibility to students, teachers and researchers will be enhanced by being available online, so that it can continue to enliven mathematics for all with an interest at the senior secondary school level. Mathematics is a fundamental and enabling science, critical to many professional and scientific fields and to

Volume 45 (2009)

Issue 1

Issue 2

Volume 44 (2008)

Issue 1

Issue 2

Issue 3



UNSW
THE UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES
SYDNEY • AUSTRALIA



پروفسور جورج
ژیکرز (سمت چپ)،
در جشن تولد
۹۰ سالگی اش



* پی نوشت ها

1. George Szekerez
2. Numbers Theory
3. Geometry
4. Graph Theory
5. History of Mathematics
6. Games with Logarithms
7. Games with Inverse Tangent
8. The Legacy of Pythagoras Theorem
9. Pell's Equation

با مراجعه به آن و اتکا به اطلاعات خود در مورد تانژانت معکوس، بُعدی از ریاضیات و سرگرمی توأم با محاسبه را تجربه کنند.

در شماره ۱ دوره ۳۹ مجله در سال ۲۰۰۳، مقاله‌ای با عنوان «میراث قضیه فیثاغورس»^۸ وجود دارد که دوست‌داران این قضیه می‌توانند به آن مراجعه کنند. در شماره ۲ دوره ۳۸ مجله در سال ۲۰۰۲، مقاله‌ای با عنوان «معادله پل»^۹ وجود دارد که به بیان تاریخچه کوتاهی درباره این معادله و نیز چگونگی یافتن راه‌حل برای آن با دیدگاه‌های متفاوت می‌پردازد.

در انتها شما خوانندگان برهان و دیگر علاقه‌مندان به ریاضی را به مطالعه این مجله توصیه می‌کنیم. همچنین افراد توانا و علاقه‌مند را برای ترجمه مقالات ریاضی مجله Parabola Mathematics Magazine که با خط‌مشی‌ها و اهداف مجله «ریاضی برهان دوره دوم متوسطه» هماهنگی دارد، به همکاری دعوت می‌کنیم.

به دست آوردن مجموع جملات با استفاده از روابط بازگشتی

اشاره

در این مقاله ابتدا رابطه بازگشتی را تعریف و روش به دست آوردن جواب این روابط را بیان می کنیم و در ادامه به کمک آن مجموع جملات را به دست می آوریم.

کلیدواژه‌ها: روابط بازگشتی، مجموع جملات

رابطه بازگشتی

نیاز داریم، اگر معادله سرشت‌نما دارای جواب‌های

x_i ، $(i=1,2,\dots,r)$ آن‌گاه جواب عمومی رابطه بازگشتی برابر است با:

$$u_n = A_1(x_1)^n + A_2(x_2)^n + \dots + A_r(x_r)^n$$

اگر $f(n) = B(n)^k$ که در آن B یک عدد ثابت و k یک عدد صحیح نامنفی است و عدد یک، ریشه معادله سرشت‌نما باشد، جواب خصوصی رابطه بازگشتی به این صورت است:

$$v_n = A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_k n^{k+1}$$

بنابراین جواب رابطه بازگشتی به صورت $a_n = u_n + v_n$ است.

حال به کمک این روابط می‌خواهیم مسائل زیر را که معمولاً به روش استقرا حل می‌کنیم، اثبات کنیم.

اگر A_i ها $(i=1,2,3,\dots)$ مقادیری ثابت باشند، آن‌گاه رابطه بازگشتی به صورت:

$$a_n = A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + \dots + A_r a_{n-r} + f(n)$$

را یک رابطه بازگشتی خطی مرتبه r با ضرایب ثابت می‌نامند. این رابطه بازگشتی همگن است هرگاه $f(n)=0$. اگر تابع $g(n)$ چنان باشد که به ازای $a_n = g(n)$ ، $n=0,1,2,\dots$ یک جواب رابطه بازگشتی نامبرده است.

برای حل روابط بازگشتی همگن ابتدا این معادله چندجمله‌ای را به دست می‌آوریم:

$$x^r - A_1 x^{r-1} - A_2 x^{r-2} - \dots - A_r = 0$$

این معادله را «معادله سرشت‌نمای رابطه بازگشتی» می‌نامند.

در یک حالت خاص، که ما در اینجا به این حالت

مسئله ۱. مجموع جملات $1+2+3+\dots+n$ را به دست آورید.

حل: واضح است که رابطه بازگشتی آن چنین است:

$$a_n = a_{n-1} + n$$

پس معادله سرشت‌نمای آن به این شکل است:

$$x-1=0$$

که ریشه آن عدد یک و جواب عمومی آن $u_n = A \cdot (1)^n = A$ است. بنا به توضیحات قبلی، چون یک ریشه معادله سرشت‌نماست، جواب خصوصی به این صورت است:

$$v_n = A_1 n + A_2 n^2$$

بنابراین جواب رابطه می‌شود:

$$a_n = u_n + v_n = A + A_1 n + A_2 n^2$$

چون: $a_0 = 0$ ، با جای‌گذاری $a_n = A + A_1 n + A_2 n^2$

در $a_n = a_{n-1} + n$ داریم:

$$A + A_1 n + A_2 n^2 = A + A_1 (n-1) + A_2 (n-1)^2 + n = A_1 n - A_1 + A_2 n^2 - 2A_2 n + A_2 + n$$

$$A_1 + A_2 n^2$$

$$2A_2 n^2 + A_2 + n = A_2 - A_1 + (A_1 - 2A_2 + 1)n$$

$$-n + A_2 n^2$$

در نتیجه به دست می‌آوریم: $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$

پس مجموع جملات برابر است با:

$$a_n = A + A_1 n + A_2 n^2 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

مسئله ۲. مجموع جملات $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ را به دست آورید.

حل: رابطه بازگشتی آن چنین است:

$$a_n = a_{n-1} + n^2$$

پس معادله سرشت‌نمای آن به این شکل است:

$$x-1=0$$

که ریشه آن عدد یک و جواب عمومی آن

$u_n = A \cdot (1)^n = A$ است. بنا به توضیحات قبلی، چون یک ریشه معادله سرشت‌نماست، جواب خصوصی به این صورت است:

$$v_n = A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3$$

بنابراین جواب رابطه چنین است:

$$a_n = u_n + v_n = A + A_1 n + A_2 n^2$$

چون $a_0 = 0$ ، با جای‌گذاری داریم:

$$0 = a_0 = A + A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0 + A_3 \cdot 0 = A$$

با جای‌گذاری $a_n = A + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3$ در

$$a_n = a_{n-1} + n^2$$

$$A + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3 = A + A_1 (n-1) + A_2 (n-1)^2 + A_3 (n-1)^3 + n^2$$

$$+ n^2 = A_1 n - A_1 + A_2 n^2 - 2A_2 n + A_2 + A_3 n^3 - 3A_3 n^2 + 3A_3 n - A_3 + n^2$$

$$+ 3A_3 n + A_3 = A_2 - A_1 + (A_1 - 2A_2 + 3A_3)n$$

$$+ (A_2 - 3A_3 + 1)n^2 + A_3 n^3$$

در نتیجه به دست می‌آوریم: $A_1 = \frac{1}{2}$ ، $A_2 = \frac{1}{6}$ ، $A_3 = \frac{1}{6}$ ، پس مجموع جملات برابر است با:

$$a_n = A + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3$$

$$= \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حل مسئله بعدی را به عنوان تمرین به

خوانندگان علاقه‌مند واگذار می‌کنیم.

تمرین:

مجموع جملات $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ را

به دست آورید.

پاسخ به نامه‌ها و پیام‌نگارها

با درودی دوباره به همه خوانندگان و یاران همیشگی مجله، باز هم لطف شما بزرگواران شامل حال دست‌اندرکاران مجله شد و نامه‌ها و ایمیل‌های ارسالی‌تان را دریافت کردیم. در اینجا با عرض پوزش از همه عزیزانی که به دلیل کمبود جا مجال پاسخ‌گویی به آنان را نمی‌یابیم، پاسخ بعضی از دوستان را می‌آوریم.

● همکار گرامی، آقای شه‌ریار رضایی نیکو، از استان زرخیز خوزستان

مقاله‌تان با عنوان «الگوریتمی برای محاسبه ریشه سوم اعداد»، به دست ما رسید. با سپاس از شما ان‌شاءالله در یکی از شماره‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. باز هم ما را مورد لطف‌تان قرار دهید.

● همکار محترم، خانم لیلا صالحی، از شهرستان کرج

مقاله‌تان با عنوان «روش‌های یادگیری ریاضی» به دستمان رسید. باید به عرض‌تان برسانیم که مخاطب اصلی مقاله شما معلمان ریاضی هستند، در حالی که، مخاطبان اصلی مجله ما دانش‌آموزان‌اند. این‌گونه مقاله‌ها را می‌توانید برای همکاران ما در مجله «رشد آموزش ریاضی» بفرستید.

● دوست دانش‌آموز، آقای علی نخبه

پاسخ‌هایتان به مسائل «پای تخته» را به مسئول آن قسمت تحویل دادیم.

● همکار گرامی، آقای علی مشایخ، از شهرستان قزوین

مقاله‌تان با عنوان «نقدی کوتاه بر ریاضی ۲ دبیرستان» به دستمان رسید. از آنجا که مخاطبان اصلی مجله ما دانش‌آموزان دبیرستان هستند، لذا از نقد کتاب‌های درسی معذوریم! می‌توانید مقاله‌تان را برای همکاران ما در مجله رشد آموزش ریاضی بفرستید. اما در عین حال ارتباطتان را با ما حفظ و سعی کنید به مسائل موردنیاز دانش‌آموزان بپردازید. در این صورت حتماً خوش‌حال می‌شویم که در خدمتتان باشیم. با سپاس فراوان از لطف و توجه‌تان به مجله برهان.

● همکار گرامی، آقای سعید چتر آبنوس، از استان فارس

مقاله‌تان با عنوان «اعمال جبری روی دنباله‌ها» به دستمان رسید. سعی می‌کنیم در یکی از شماره‌های آتی از آن استفاده کنیم. ولی از شما و سایر دوستان می‌خواهیم که به دانش‌آموزان پایه‌های اول تا سوم (و به زودی دهم و یازدهم) بیشتر توجه کنید و مطالب درخور استفاده آنان را هم مدنظر قرار دهید. با سپاس از شما و به امید ارتباط همیشگی‌تان با برهان.

● دوست عزیز، آقای عباس روح‌الامینی

تذکر بجایتان درباره مطلبی در شماره ۵۶ مجله به دستمان رسید. البته کمی دیر هنگام بود، با این حال از توجهتان سپاس‌گزاریم. از اینکه پس از سال‌ها هنوز به مجله خودتان عنایت دارید، ممنون‌تان هستیم. باز هم با ما در ارتباط باشید.

● همکار گرامی، آقای مهدی میرزا فام، از شهرستان عجبشیر

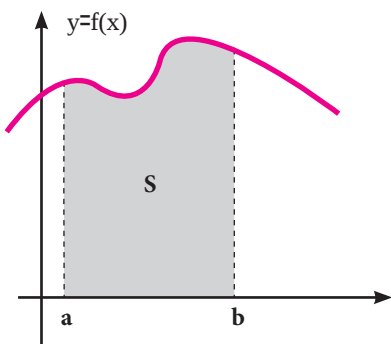
مطالبتان به دست ما رسید. قبلاً هم لطف‌تان شامل حال ما بوده است. با سپاس فراوان ان‌شاءالله به‌زودی از آن‌ها استفاده می‌کنیم. نقدی که بر کتاب ریاضی ۱ نوشته بودید، به همکاران مجله رشد آموزش ریاضی تحویل داده شد.

با سپاس فراوان از همه عزیزان خواننده تا شماره بعد و آغاز سال تحصیلی نو همه شما را به خدای دادگر می‌سپاریم. شاد باد روزگارتان!

کاربرد انتگرال در محاسبه احتمال در فضای پیوسته

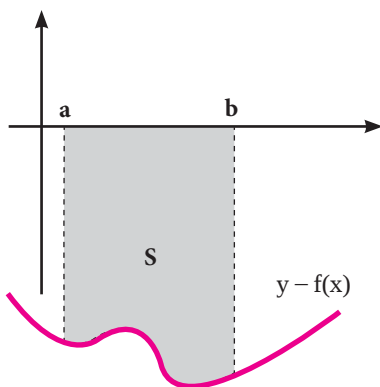
با توجه به قضیه فوق می توانیم آن را به حالت های زیر تعمیم دهیم. فرض کنیم تابع های f و g در بازه $[a, b]$ پیوسته باشند:

الف) اگر $y = f(x), f(x) \geq 0$ آن گاه مساحت محصور بین نمودار تابع f ، خط های $x=a$ و $x=b$ و محور x ها را انتگرال معین f از a تا b می نامیم و با نماد $S = \int_a^b f(x) dx$ نمایش می دهند.



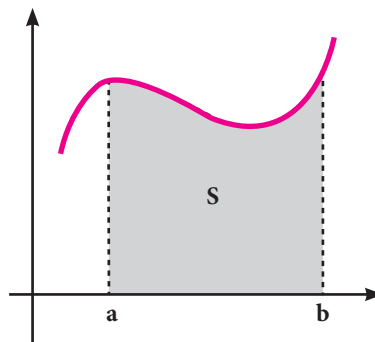
شکل ۲

ب) اگر $y = f(x), f(x) \leq 0$ آن گاه $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$



شکل ۳

اگر فضای نمونه ای و پیشامد تصادفی آن یک شکل بسته و یا $S \subset \mathbb{R}^2$ و $A \subset \mathbb{R}^2$ باشند، که در این حالت اندازه فضای نمونه ای و پیشامد تصادفی مورد نظر برابر مساحت شکل می باشد که به طور معمول با a_s و a_A نمایش می دهیم، احتمال وقوع پیشامد A را به صورت $P(A) = \frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } S} = \frac{a_A}{a_S}$ تعریف می کنیم.



شکل ۱

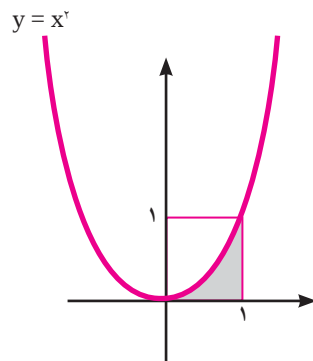
اگر سطح فضای نمونه ای و پیشامدها شامل شکل های شناخته شده مانند مربع، مستطیل، مثلث، ... باشد، می توانیم به راحتی مساحت این شکل ها را تعیین کنیم. در صورتی که شکل های نا آشنا مانند شکل مقابل داشته باشیم دیگر فرمولی برای محاسبه سطح نداریم. اما با استفاده از انتگرال می توانیم مساحت نمودارهایی به این صورت را تعیین کنیم. [۱]

با استفاده از قضیه مهم زیر می توانیم مساحت نواحی نامنظمی را محاسبه کنیم که در حالت عادی محاسبه آن ها غیر ممکن است.

قضیه: فرض کنید $f(x) \geq 0$ روی $[a, b]$ پیوسته باشد. مساحت ناحیه زیر نمودار f و خطوط $x=a$ و $x=b$ محور x ها یا $y=0$ برابر است با:

$$A(S) = \int_a^b f(x) dx.$$

پاسخ الف: مربع به طول ضلع یک، فضای نمونه‌ای را تشکیل می‌دهد، پس $a_s = 1 \times 1 = 1$. پیشامد مسئله ناحیه هاشورخورده است.



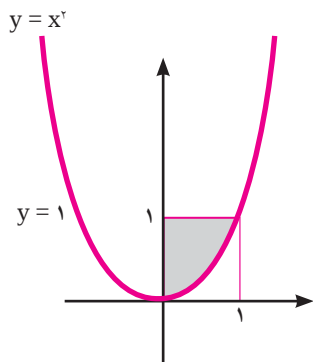
شکل ۶

بنابراین داریم:

$$a_A = \int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_s} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

پاسخ ب: پیشامد قسمت «ب» ناحیه هاشورخورده‌ای است که درون سهمی $y = x^2$ و زیر خط $y = 1$ است.



شکل ۷

بنابراین داریم:

$$a_A = \left| \int_0^1 (1 - x^2) dx \right| = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

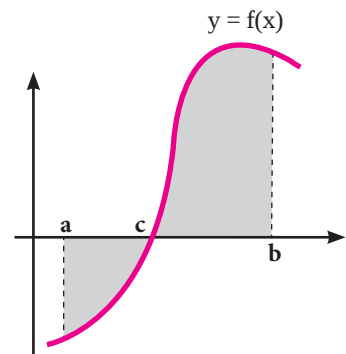
$$= \left(1 - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{2}{3}$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_s} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

پ) اگر برای هر $x \in [a, c]$ داشته باشیم، $f(x) \leq 0$ و برای هر $x \in [c, b]$ داشته باشیم، $f(x) \geq 0$. آن‌گاه $S = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \int_c^b f(x) dx$ در

صورتی که در بازه اول $f(x)$ مثبت باشد و در بازه دوم $f(x)$ منفی باشد داریم،

$$S = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

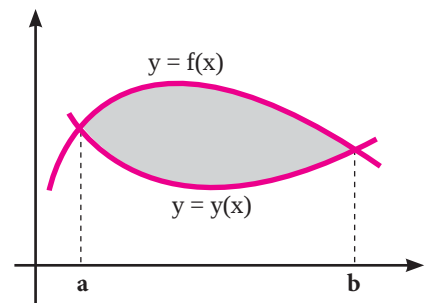


شکل ۴

ت) اگر برای هر $x \in [a, c]$ X است، مطابق

شکل $g(x)$ و $f(x)$ را داشته باشیم؛ آن‌گاه

$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$



شکل ۵

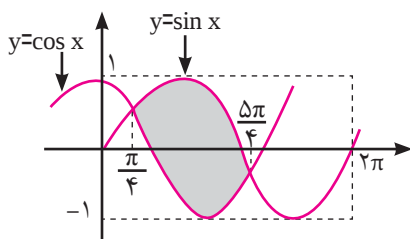
حال با بیان چند مثال با کاربرد انتگرال در فضای پیوسته آشنا می‌شویم:

مثال ۱: دو عدد را به‌طور تصادفی از فاصله $[0, 1]$ انتخاب

می‌کنیم. تعیین کنید:

الف) احتمال آنکه $y < x^2$ باشد.

ب) احتمال آنکه $y \geq x^2$ باشد.

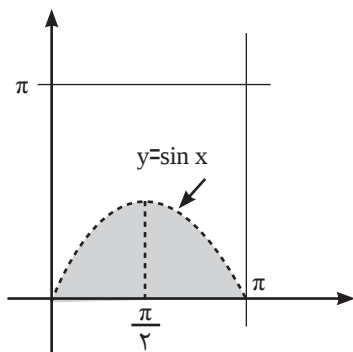


شکل ۸

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$a_A = \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right| = \left| (-\cos x - \sin x) \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{2\sqrt{2}}{4\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}$$

مثال ۴: دو عدد حقیقی را از فاصله $[0, \pi]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه $y \leq \sin x$ باشد را تعیین کنید.



پاسخ: فضای نمونه‌ای، مربعی به طول π است، لذا $a_S = \pi \times \pi = \pi^2$. سطح محصور بین محور x ها و زیر نمودار $y = \sin x$ در محدوده $x \in [0, \pi]$ پیشامد مسئله می‌باشد.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$a_A = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{2}{\pi^2}$$

* منبع:

۱. محمود نصیری، مجموعه‌ای در جبر و آنالیز، انتشارات دانشجو، ۱۳۶۷.

مثال ۲: نقطه (x, y) را روی صفحه محورها مختصات

انتخاب می‌کنیم، به قسمی که این نقطه متعلق به

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 3, -1 < y < 3\}$$

باشد. تعیین کنید، احتمال آنکه نقطه متعلق به

$$\{(x, y) \in Q \mid 1 < x < 2, -1 < y < 0, y \geq x^2 - 2x\}$$

به $\{(x, y) \in Q \mid 2 < x < 3, 0 < y < 3, y \leq x^2 - 2x\}$ باشد.

پاسخ: مستطیل به ابعاد ۲ و ۴، فضای نمونه‌ای را تشکیل

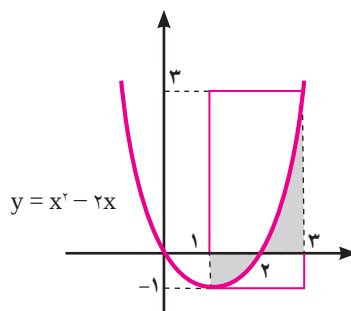
می‌دهد، پس $a_S = 2 \times 4 = 8$. پیشامد مسئله ناحیه‌های

هاشورخورده هستند. با توجه به شکل زیر، یک ناحیه به

ازای $x \in [1, 2]$ ، درون سهمی و زیر محور x ها می‌باشد

و ناحیه دیگر به ازای $x \in [2, 3]$ بیرون سهمی و بالای

محور x هاست.



شکل ۸

$$a_A = \left| \int_1^2 (x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \right| = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^3 = \left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{4}{3} = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

مثال ۳: عدد x را به‌طور تصادفی از فاصله $[0, 2\pi]$ و y را

به‌طور تصادفی از فاصله $[-1, 1]$ انتخاب می‌کنیم. تعیین

کنید، احتمال آنکه $y < \sin x$ و $y > \cos x$ باشد.

پاسخ: مستطیل به ابعاد ۲ و 2π ، فضای نمونه‌ای

را تشکیل می‌دهد، پس $a_S = 2 \times 2\pi = 4\pi$ پیشامد

مسئله ناحیه‌های هاشورخورده هستند. با توجه به

شکل مقابل، محدوده زیر نمودار $y = \sin x$ و بالای نمودار

$y = \cos x$ پیشامد مسئله است که محل تلاقی این دو

نمودار $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{4}$ است.



ایستگاه دوم

۸	۷							۶	۵			
س	ا	م	م	ط	خ		ج	و	د	ز	م	۱
ه	ت	س	ب	ا	و		ه	ط	ب	ا	ر	۲
م	ح								و		ب	
ی	ا								ی		ع	
	د								ه			
ت											م	
ق	ع								چ		س	
س	م								ه		ا	
ی	و	ا	س	م	ا	ن		ه	د	ا	ح	۳
م	د	ا	ت	ف	ه		ب	ی	ک	ر	ت	۴

معمای دوم: یک جمله مناسب چنین است:
«من مزدایی نیستم که اسب را دزدیده باشد.» اگر
گوینده اهریمنی بوده باشد، بدیهی است که این

نحوہ اشتراک:

ششما می توانید پس از وارز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۳۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سدره ازمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک جکله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیث و آریزی.

۲۰. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پاینت سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگه‌دارید).

◆ نام مجلات درخواستی:

◆ نام و نام خانوادگی:

♦ میزان تحصیلات:

♦ تاریخ موت:

♦ تلفن:

خیابان: شهرستان:

استانی : نسوہو ستانی :

نمبره فیش بانکی: مبلغ پرداختی:

پلاک: شماره پستی:

◆ اگر قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

bio

● نشانی: تہران، صندوق پستی: ۵۹۵۶۱/۱۱۱ اور مشترکین: ۵۹۵۶۱/۱۱۱

● وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir

• ۲۱-۷۷۳۳۶۵۵ / ۷۷۳۳۵۱۰ / ۷۷۳۳۹۷۱۳-۱۴
• اشتراک مجله:

◆ هزینه اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینه اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت ماهانه و به شماره هر سه سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد کودک

(برای دانش‌آموزان ابتدایی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی)

رشد نوجوان

(برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی)

رشد دانش‌آموز

(برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی)

مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت ماهانه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد نوجوان

(برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول)

رشد جوان

(برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم)

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهانه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد آموزش ابتدایی

رشد تکنولوژی آموزشی

رشد مدیریت مدرسه

رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی

(به صورت فصل‌نامه و چهارشماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد بردهای آموزش متوسطه اول (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه اول)

رشد بردهای آموزش متوسطه دوم (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه دوم)

رشد آموزش قرآن • رشد آموزش معارف اسلامی • رشد آموزش زبان

و ادب فارسی • رشد آموزش هنر • رشد آموزش مشاوره مدرسه • رشد آموزش

تربیت بدنی • رشد آموزش علوم اجتماعی • رشد آموزش تاریخ • رشد آموزش

جغرافیا • رشد آموزش ریاضی • رشد آموزش فیزیک

رشد آموزش شیمی • رشد آموزش زیست شناسی • رشد آموزش زمین شناسی

رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار و دانش • رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شود.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴

آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.

◆ تلفن و شماره: ۸۸۳۰۱۴۷۸ - ۰۲۱

از پرسش قاضی می‌توان نتیجه گرفت که اگر C اهریمنی باشد، خودش صاحب اسب است و اگر مزدایی باشد، آن‌گاه B مالک اسب است. زیرا فرض کنید C اهریمنی باشد، پس جمله‌اش نادرست است. یعنی اینکه A و B باید هر دو مزدایی باشند و جملاتشان درست است. در نتیجه از جمله A نتیجه می‌شود که اسب متعلق به C است. حالا فرض کنید C مزدایی باشد، پس جمله‌اش راست است و لذا A و B هر دو اهریمنی‌اند. لذا B دروغ گفته است و خودش مالک اسب است.

اما بعد از پرسش قاضی، با پاسخی که C داد، قاضی فهمید که چه کسی مالک اسب است. C یا مزدایی است یا اهریمنی. اگر C مزدایی باشد، B مالک اسب است. اما فرض کنید C اهریمنی باشد، پس همان‌طور که دیدیم، خودش مالک اسب است، ولی به دروغ نام A یا B را می‌برد. پس در هر حال، اگر C مزدایی یا اهریمنی باشد، نام A یا B را می‌برد. حالا فرض کنید که او نام B را برده باشد ممکن است مزدایی بوده و به درستی نام B را برده باشد و یا اهریمنی بوده و به دروغ نام او را برده باشد از آنجا قاضی نمی‌توانست تشخیص دهد که صاحب اسب چه کسی است. پس او نام A را برده و از آنجا قاضی فهمیده که او (یعنی C) اهریمنی است و خودش مالک اسب است.

درست است که او مزدایی نیست که اسب را دزدیده باشد. لذا جمله‌اش درست است. در حالی که ممکن نیست جمله یک اهریمنی درست باشد. پس او اهریمنی نیست و مزدایی است و جمله‌اش درست است. یعنی دزد هم نیست.

معمای سوم: یک جمله مناسب این است: «من اهریمنی هستم که اسب را دزدیده است.» تحلیل به‌عهده خودتان است.

معمای چهارم: هیچ‌کس در این سرزمین نمی‌تواند بگوید که اهریمنی است. (چرا؟) پس هیچ‌کس نمی‌گوید که با یک اهریمن هم دسته است (یعنی او هم اهریمنی است). بنابراین اگر جمشید مزدایی باشد، مهرباب پاسخ می‌دهد بله و اگر جمشید اهریمنی باشد، مهرباب می‌گوید نه. اگر مهرباب پاسخ بله داده بود، قاضی می‌توانست بفهمد که جمشید مزدایی است و در نتیجه بی‌گناه است (زیرا خودش گفته بود) و قاضی نمی‌توانست بفهمد چه کسی گناهکار است. پس مهرباب باید پاسخ نه داده باشد و در نتیجه قاضی دانسته باشد که جمشید اهریمنی است و در نتیجه مجرم است.

معمای پنجم: از همان سه جمله اول و قبل

