

رشد

ریاضی

فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

دوره بیست و چهارم
شماره پی در پی ۸۵
بهار ۱۳۹۴
شماره ۳
۶۴ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیر مسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خرده غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری،
محمد هاشم رستمی،
دکتر ابراهیم ریحانی،
احمد قندهاری،
میرشهرام صدر،
هوشنگ شرقی،
سید محمد رضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی پور،
دکتر محرم نژاد ایردموسی
و با یاد همکار عزیزمان زنده یاد پرویز شهرپاری
وبگاه: www.roshtmag.ir

پیام نگار:

Borhanmotevaseteh2@roshtmag.ir

نشانی وبلاگ مجله:
<http://weblog.roshtmag.ir/borhanmotevasete2>

پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ - ۰۲۱
پيامک: ۰۲۱-۸۹۹۵۰۶

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲ - ۰۲۱
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۰۲۱
۷۷۳۳۶۶۵۵ - ۰۲۱

شمارگان: ۱۰۵۰۰ نسخه
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

حرف اول / فصل برداشت محصول / حمیدرضا امیری ۲

آموزشی / این مسئله ها واقعی اند یا روزمره؟ / قاسم حسین قنبری ۳

روشی آسان و سریع برای تعیین علامت توابع / سیمین افروزان ۶
پای تخته / محرم نژاد ایردموسی ۱۲

هندسه ناقلیدسی / سید احسان حسینی ۱۶

محاسبه انتگرال به کمک مساحت / محمد رحمانی ۲۸

تعمیم یک مسئله در هندسه / مرتضی بیات - زهرا خاتمی ۳۰

یک تساوی و چند نامساوی / محمد طبعی ۴۰

فرض ضمنی، ملانصرالدین، کانتور و غزا! / غلامرضا یاسی پور ۴۴

کاربرد ترکیبیات در فیزیک / محمد مقدسی ۴۶

ساخت انیمیشن برای آموزش ریاضی / فرزاد حمزه پور ۵۸

ریاضیات در سینمای جهان / بررسی فیلم سینمایی جنون درخشان / احسان یارمحمدی ۱۰

آموزش ترجمه متون ریاضی / مجموعه های عددی / حمیدرضا امیری ۲۱

گفت و گو / تدریس و معلمی لذت بخش است (پای صحبت استاد پیشکسوت ریاضی و آمار دکتر عین الله پاشا) /

ارغوان غلامی - هوشنگ شرقی ۲۲

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی / ایستگاه اول: بازی و ریاضی! / هوشنگ شرقی ۹

ایستگاه دوم: معماهایی از سرزمین ایران باستان! ۳۳

ایستگاه سوم: لطیفه های ریاضی ۳۹

پاسخ ایستگاه اول ۶۲

تاریخچه مجلات ریاضی ایران / رشد آموزش ریاضی شماره های ۲۵ تا ۲۸ / غلامرضا یاسی پور ۳۴

معرفی کتاب / حل مسائل جبری با روش های هندسی / احسان یارمحمدی ۴۲

تاریخ ریاضی معاصر ایران / جراید و نقش آن ها در عمومی سازی ریاضیات / دکتر فرید قاسملو ۵۱

بازتاب / پاسخ به نامه ها و پیام نگارها ۵۶

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:
○ نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه)
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
○ طرح معماهای ریاضی
○ نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و ...

● مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ● مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
● مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
● مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

تذکر مهم:

نشانی پیام نگار سابق مجله

(Borhanm@roshtmag.ir)

فقط تا چند روز آینده معتبر است.

لطفاً مقالات و سایر پیام های خود

را از این به بعد به این نشانی ارسال

نمایید:

Borhanmotevaseteh2@roshtmag.ir

فصل برداشت محصول



کم‌کم به انتهای سال تحصیلی و امتحانات پایان سال نزدیک می‌شویم. فصل امتحانات برای دانش‌آموز و معلم، شبیه به فصل برداشت محصول برای کشاورزان است.

شما در طول یک سال تحصیلی با مطالعه و تمرکز در کلاس‌های درس و تمرین و ممارست برای رسیدن به محصولی پربار کوشیده‌اید و حالا وقت برداشت و لذت‌بردن از محصول است.

اکنون با خیال راحت خودتان را برای امتحانات آماده می‌کنید و در همین حال به ایام بعد از امتحان و تابستانی سراسر توأم با شادی و البته مطالعه و برنامه‌ریزی برای شروع سال تحصیلی بعد، فکر می‌کنید. برای امتحانات که آماده می‌شوید، یادتان باشد، به نکات مهمی که یادداشت کرده‌اید، حتماً مراجعه کنید. به علاوه همه تمرین‌های کتاب درسی را باید حل کرده باشید. مثال‌های حل شده کتاب درسی و مسئله‌هایی که در کلاس درس به کمک معلم حل کرده‌اید، همگی منابع اصلی برای طرح سؤال امتحانی محسوب می‌شوند و شما باید روی آن‌ها تسلط کافی داشته باشید. راستی امتحانات مستمر و پایان نیم‌سال اول را هم به این منابع اضافه کنید. امیدواریم همگی در امتحانات موفق باشید و با دستی پر به استقبال تابستان بروید.

سرذیبر

این مسئله‌ها واقعی‌اند یا دودزمره



قاسم حسین قنبری*
دبیر ریاضی و مدرس
دانشگاه فرهنگیان سمنان

چکیده

در کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول و دوم متوسطه مسائلی مطرح شده‌اند که شکل داستانی دارند. مؤلفان محترم مدعی هستند که این مسائل از دنیای واقعی‌اند. آیا این اتفاق افتاده است؟ یعنی مسائلی از دنیای واقعی مطرح و حل شده‌اند و حل آن‌ها گره‌ای را باز می‌کند؟ یا اینکه مؤلف قصد داشته روش‌های ریاضی را به مسئله و دانش آموز تحمیل کند؟

کلیدواژه‌ها: مسئله‌های واقعی، دنیای واقعی، ریاضی پایه‌های اول و دوم دبیرستان

مقدمه

یکی از اهداف تغییر کتاب‌های درسی ریاضی، کاربردی کردن ریاضی، حل مسائل زندگی روزمره و حل مسائل دنیای واقعی است. در مقدمه کتاب ریاضی سال اول دبیرستان داریم: «یکی از اهداف این کتاب آن است که شما بتوانید ریاضی را به شکل معنادار درک کنید و توانایی به کارگیری آن را در حل مسائل روزمره پیدا کنید.» در مقدمه کتاب ریاضی سال دوم دبیرستان هم چنین می‌خوانیم: «تأکید بر ارتباط بین ریاضیات و علوم دیگر و دنیای واقعی». متأسفانه معلم‌هایی که این کتاب‌ها را تدریس می‌کنند، از جمله خود نگارنده، خاطره خوشی از این مسئله‌ها ندارند. چند مسئله این کتاب‌ها را بررسی می‌کنیم تا موضوع بهتر مشخص شود. ضمناً صورت هر مسئله بدون ویرایش از کتاب‌ها نقل می‌شود.

۱. روز نیکوکاری

مسئله صفحه ۱۰۲ کتاب ریاضی ۱ از این قرار است: «دانش آموزان مدرسه‌ای تصمیم گرفتند در روز نیکوکاری، بازار خیریه به نفع نیازمندان

برگزار کنند. قرار شد در این بازار یک‌روزه، شربت بفروشند و سود آن را برای نیازمندان مصرف کنند. آن‌ها یک بسته صدتایی لیوان یک‌بار مصرف به مبلغ هزار تومان خریدند. هزینه خود شربت، بدون در نظرگیری قیمت لیوان‌ها، هر لیوان ۹۰ تومان شد. یکی از دانش آموزان پیشنهاد کرد که هر لیوان شربت را ۱۲۵ تومان بفروشیم تا سود کافی ببریم. دانش آموز دیگری گفت: اگر به اندازه کافی شربت نفروشیم ممکن ضرر کنیم. دانش آموزان تصمیم گرفتند برای تشخیص وضعیت سود و ضرر این کار از معلم ریاضی خود کمک بگیرند.»

در این مسئله چند مشکل وجود دارد:

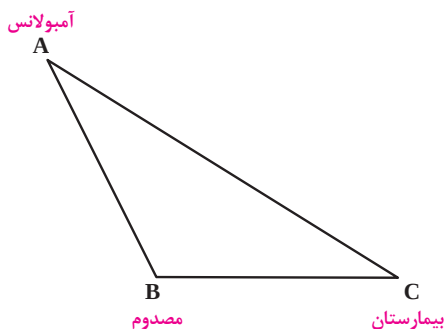
- آیا می‌توان شربت‌ها را به هر قیمتی فروخت؟
- وقتی که لیوان‌ها و پودر شربت، خریداری شده، دیگر بحث سود و زیان به چه کار می‌آید؟
- به فرض که پودر شربت اضافه را به فروشنده پس دهیم. آیا همیشه چنین کاری امکان دارد و آیا این عوض کردن صورت مسئله نیست؟

۳. عملیات نجات

کاربردهایی از مثلثات

فاطمه به مسائل امداد و نجات علاقه‌مند است. دلیل علاقه‌مندی وی وقوع اتفاقاتی چون زلزله در کشور ما است در نتیجه او سعی دارد مسائل این چنین را بهتر و بیشتر بشناسد. در یکی از این مسائل که در فیلمی آن را دیده بود حادثه‌ای در نقطه A مانند شکل زیر روی داد.

(این حادثه را می‌توانید زلزله، تصادف، سیل، ... تصور کنید). آمبولانس در فاصله ۱ کیلومتری از حادثه A در نقطه C قرار دارد. زاویه A، B و C را نیز راننده آمبولانس حدس زد او فاصله خود تا بیمارستان را نیز می‌داند. راننده آمبولانس می‌خواهد بداند که آیا به اندازه کافی بنزین برای رفتن از A به B دارد یا نه؟



شکل ۱

همان‌طور که در تصویر کتاب معلوم است، مؤلف قصد دارد بحث را با داستانی شروع کند که برای دانش‌آموز جذاب باشد و سپس آن‌ها را همراهی کند تا مسئله را حل کنند. اما خود داستان برای دانش‌آموز و هر خواننده دیگری، به یک مسئله تبدیل می‌شود. همان‌طور که در متن ذکر شده است، «زاویه‌های A، B و C را راننده آمبولانس حدس زد». پرواضح است که فقط صورت مسئله عوض شده و مسئله به مسئله سخت‌تری تبدیل شده است. چرا که وقتی راننده در نقطه A قرار دارد، چگونه سه زاویه یک مثلث را حدس می‌زند؟ حدس زدن طول یک پاره‌خط از اندازه زاویه به مراتب راحت‌تر است. همچنین، از کجا معلوم که همه خیابان‌ها روی خط راست باشند و با توجه به شرایط و اورژانسی بودن حادثه، مگر راننده غیر از حرکت چاره دیگری هم دارد؟ به عبارت دیگر نمی‌توان گفت این مسئله در دنیای واقعی اتفاق افتاده است. چرا که اگر در دنیای واقعی راننده آمبولانس برای طی کردن یک فاصله حداکثر یک کیلومتری، این

چه پودر شربتی در بازار وجود دارد که می‌توان مقداری از آن را مصرف کرد و باقی‌مانده آن را به فروشنده پس داد؟ برای انجام چنین کاری باید شربت‌ها را به صورت لیوانی درست کنیم و نه یکجا. برای این کار لازم است که برای هر لیوان یک قاشق تهیه کنیم که آن هم هزینه‌ای خواهد داشت.

برای تهیه شربت به آب نیاز داریم (امروزه آب معدنی مصرف می‌شود) هزینه آب کجا محاسبه می‌شود؟

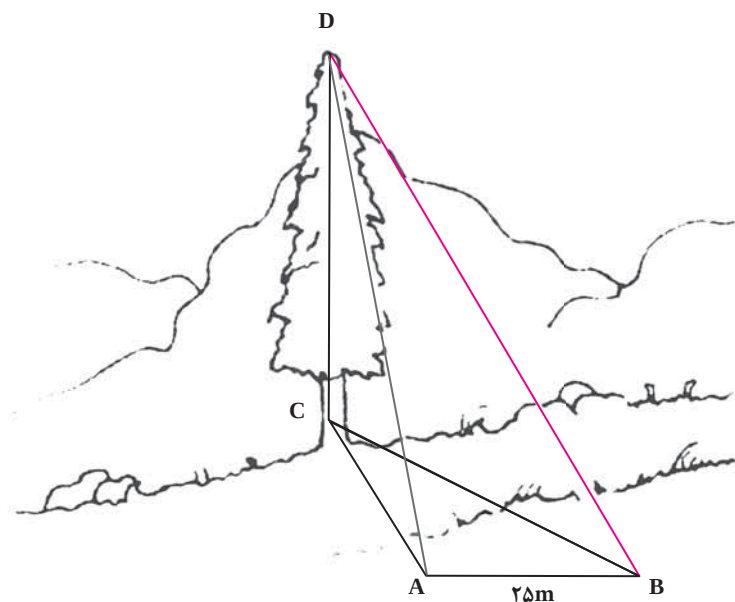
اگر فرض کنیم که همه شربت‌ها فروخته شود و هزینه آب را در نظر نگیریم (در برخی از شهرها باید فرض کنیم که با آب غیربهداشتی شربت درست کنیم، چون آب لوله‌کشی قابل شرب نیست) کل سود این بازار خیره ۲۵۰۰ تومان می‌شود. آیا این مبلغ ارزش آن را دارد که شربت غیربهداشتی به خورد مردم دهیم؟!

از این بحث‌ها نتیجه می‌گیریم که باید قیمت هر لیوان شربت را افزایش دهیم که این خود کاری خلاف شرع و عرف است، دیگر اینکه این مسئله با این شکل، اصلاً یک مسئله ریاضی نیست. به عبارت دیگر، در دنیای واقعی جایی برای این مسئله وجود ندارد.

۲. تیرک پرچم

«امروز در کلاس درس ریاضی، معلم گفت: شما که ریاضی را خوب یاد گرفته‌اید، توانایی‌های بسیاری در زندگی به‌دست آورده‌اید. شما کارهایی می‌توانید انجام دهید که دیگران نمی‌توانند. مدیر مدرسه گفته است که طناب تیرک پرچم مدرسه مدتی است که پوسیده شده و لازم است طناب جدیدی برای آن بخریم ولی نمی‌دانیم ارتفاع تیرک پرچم چه قدر است؟ من گفتم که دانش‌آموزان کلاس ریاضی من، ریاضی را خوب یاد گرفته‌اند و می‌توانند برای شما طول این تیرک را به‌دست آورند.»

این مقدمه‌ای برای ورود به بحث مثلثات در کتاب ریاضی سال اول دبیرستان است. طناب تیرک پرچم مدرسه ما که امکان پوسیدن ندارد، چرا که به جای طناب از سیم استفاده شده است. ولی اگر مدیر مدرسه بخواهد آن را عوض کند، مسئله را به این شکل هیچ‌گاه حل نخواهد کرد. او بدون شک تیرک پرچم را با ارتفاع دیوار مدرسه مقایسه می‌کند، سپس با چند متر اضافه کردن به آن و با کمی تقریب، طناب را تهیه می‌کند. ولی اگر قصد داشت مثلاً ارتفاع مناره مسجد جامع سمنان را اندازه بگیرد، شاید به این روش متوسل می‌شد.



شکل ۲

بعد از حل مسئله، ارتفاع درخت تقریباً ۱۷۶ متر! به دست می آید. تا اینجا اتفاق خاصی نیفتاده است. اما یک سؤال مهم: «آیا چنین درختی با این ارتفاع وجود دارد؟» با جست و جو در شبکه اینترنت به مدد «گوگل» درمی یابیم که بلندترین درخت جهان ۱۱۵/۵ متر ارتفاع دارد و در پارک ملی ردود در شمال کالیفرنیا روئیده است. متأسفانه نمی توانیم از این درخت عکسی در این صفحه قرار دهیم، ولی تصویر آن، هیچ تناسبی با درخت تصویر شده در کتاب ندارد.

اما سؤال مهم تر اینکه منظور از طرح این مسئله با این جواب عجیب و غریب چیست؟ چه اجباری بوده است که ارتفاع یک درخت را حساب کنیم؟ مؤلف در مقدمه کتاب بر «استفاده از تجربیات عینی دانش آموز» تأکید کرده است. آیا دانش آموزی هست که در این زمینه، تجربه عینی داشته باشد؟

پیشنهاد

- مؤلفان کتاب های درسی در صورت امکان این کتاب ها را در یک مدرسه معمولی تدریس بفرمایند تا با شرایط واقعی مدارس ایران آشنا شوند.
- مؤلفان محترم، نخست روش ها و جواب سؤال ها را در دنیای واقعی بررسی کنند تا ببینند آیا چنین نظریه هایی امکان پذیر هستند یا خیر!
- قبل از اینکه کتاب ها به شکل وسیع چاپ شوند، آن ها را به شکل آزمایشی در یک یا چند شهر تدریس کنند تا مشکلاتشان رفع شود.

* منابع
۱. ریاضیات ۱، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۸۸.
۲. ریاضیات ۲، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۸۸.

* ghanbari52@gmail.com

همه وقت صرف کند، به احتمال زیاد برای مصدومان اتفاقات بدی می افتد که جبران ناپذیر است.

۴. نردبان و کسینوس

نردبان وسیله ای است که از آن برای رفتن به ارتفاع استفاده می شود. بنابراین اندازه گیری آن کار سختی نیست. اما این مسئله در کتاب ریاضی سال اول دبیرستان به روش بسیار جالبی مطرح شده است! آیا این مسئله واقعی است؟

«فرض کنید نردبانی را برای رفتن به پشت بام به دیوار تکیه داده ایم. شما می توانید فاصله پای نردبان که بر زمین قرار دارد را تا دیوار حساب کنید. همچنین زاویه ای که نردبان با سطح زمین می سازد را هم می توانید اندازه بگیرید. آیا با این اطلاعات می توانید طول نردبان را حساب کنید؟»

خلاصه مسئله این است که نردبانی را به دیوار تکیه داده ایم و می خواهیم طول آن را اندازه بگیریم. از یک دانش آموز پنجم دبستان برای حل مسئله کمک می خواهیم. وی روش های زیر را ارائه داده است:

۱. به بالای نردبان می رویم، یک سر متر نواری را آنجا می چسبانیم و سر دیگر متر را در پایین نردبان قرار می دهیم و طول را اندازه می گیریم.

۲. اگر یک خط کش بیست سانتی متری داشته باشیم، روی نردبان می رویم و قطعه قطعه آن را اندازه می گیریم.

۳. یکی از پله ها را اندازه می گیریم و در تعداد آن ها ضرب می کنیم.

آزمایش امر بسیار ساده است. فقط کافی است با یک دانش آموز پنجم دبستان و با کوچک تر صحبت شود. تجربه تدریس نشان داده است که اگر بخواهیم به این روش مسئله را در کلاس بیان و حل کنیم، صورت مسئله تغییر می کند. چرا که دانش آموزان این روش را نمی پذیرند و نمی توان درستی و لزوم این روش را برای آن ها توجیه کرد.

بلندترین درخت دنیا

در مسائل فصل پنجم کتاب، مسئله ای ارائه شده که در آن رضا قصد اندازه گیری یک درخت را دارد. شکل ۲، شکل مربوط به این مسئله است.

۹. رضا می خواهد درختی را که در سمت دیگر رودخانه است اندازه بگیرد. او روبه روی درخت در نقطه A ایستاده است. زاویه دید رضا با نوک درخت حدوداً 60° است. او به اندازه 125 برمی گردد و بعد از طی 25 متر به نقطه B می رسد. زاویه بین مسیر AB و خط BC (پای درخت است) 45° می باشد ارتفاع درخت را حساب کنید.

روشی آسان و سریع برای تعیین علامت توابع

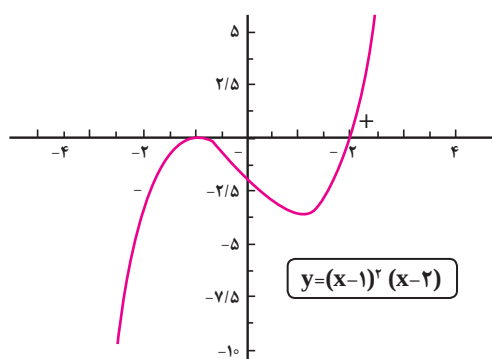
اشاره

مطالب ریاضی اجزای مرتب‌بندی هستند که با تفکر در برخی از آن‌ها می‌توان به دیگری رسید. مطالبی که خواهید خواند نشان می‌دهد که چگونه با تعمق در مفهوم ریشه‌ها و حد در بی‌نهایت می‌توان به روشی آسان و مستدل برای تعیین علامت توابع دست یافت.



سیمین افروزان*
دبیر ریاضی منطقه ۲ تهران

کلیدواژه‌ها: تعیین علامت، ریشه ساده، ریشه مضاعف، حد تابع در بی‌نهایت



نمودار ۱

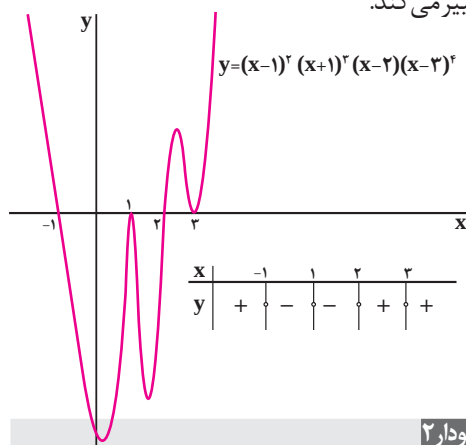
تعیین علامت یک تابع

برای اینکه مشخص کنیم یک تابع به ازای چه مقدارهایی از متغیر، مثبت و به ازای چه مقدارهایی منفی است، آن را تعیین علامت می‌کنیم. به عبارت دیگر، مشخص می‌کنیم که به ازای چه مقدارهایی از متغیر (x) ، منحنی تابع بالای محور طول‌ها و به ازای چه مقدارهایی پایین محور مذکور است. به این منظور y یا ضابطه تابع را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌ها و یا طول نقاط تقاطع نمودار تابع با محور طول‌ها را به دست آوریم.

انواع ریشه‌ها

ریشه ساده: اگر منحنی تابع، محور طول‌ها را قطع کند و قبل و بعد از نقطه تقاطع تغییر علامت دهد، طول نقطه برخورد را «ریشه ساده» گویند. در صورتی که عبارت تابع را به حاصل ضرب عامل‌ها تجزیه کنیم، ریشه‌های ساده از عامل‌هایی به دست می‌آیند که توان فرد دارند. **ریشه مضاعف:** «ریشه مضاعف» طول نقطه‌ای است که منحنی تابع در آن نقطه بر محور طول‌ها مماس باشد و قبل و بعد از آن نقطه تابع تغییر علامت ندهد. در صورتی که عبارت تابع را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسیم، ریشه‌های مضاعف از عامل‌هایی به دست می‌آیند که توان زوج دارند. برای مثال، در تابع $y = (x+1)^2(x-2)$ ، $x = -1$ ، ریشه مضاعف و $x = 2$ ریشه ساده است.

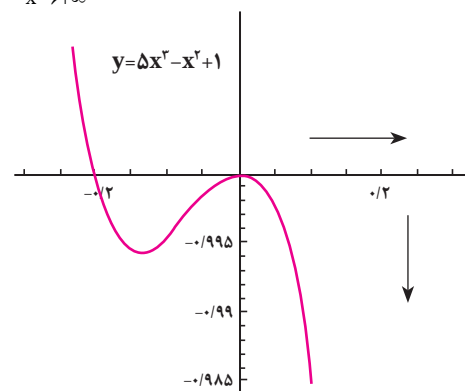
بنابراین در تعیین علامت توابع، ریشه‌های ساده نقش تعیین‌کننده‌ای دارند. همان‌طور که در نمودار ۱ مشاهده می‌کنید، تنها در ریشه‌های ساده علامت تابع تغییر می‌کند.



نمودار ۲

پس جایگزین کردن بی‌نهایت در جمله پیشرو، برای به‌دست آوردن حد تابع در بی‌نهایت کافی است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 - x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 = -5(+\infty)^3 = -\infty$$

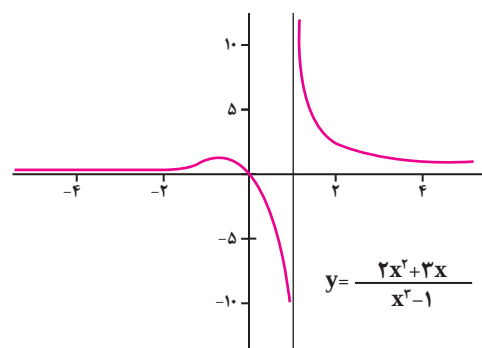


نمودار ۴

و در تابع‌های گویا نیز جمله‌های پیشرو را از صورت و مخرج انتخاب می‌کنیم.

مثال ۱. در این مثال درجه جمله پیشرو مخرج از صورت بیشتر است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$



نمودار ۵

در مثال فوق مقدار تابع از بالا (با مقادیر مثبت) به صفر نزدیک می‌شود. پس در مثبت بی‌نهایت، نمودار تابع بالای محور طول‌ها قرار دارد.

مثال ۲. در این مثال، درجه جمله پیشرو صورت و مخرج مساوی هستند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 + 3x - 1}{4x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2}{4x^2} = 2$$

لازم به ذکر است که اگر ریشه‌ای به‌دست نیامد، به این معنی است که علامت تابع همواره مثبت (نمودار تابع بالای محور طول‌ها) و یا همواره منفی (نمودار تابع پایین محور طول‌ها) است. لذا برای تعیین علامت مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱. ریشه‌های ساده را به‌دست می‌آوریم و تنها آن ریشه‌ها را در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم.

۲. چون ریشه‌های ساده دامنه تابع را به چند ناحیه مختلف‌العلامه افراز می‌کنند، کافی است علامت تابع را در یکی از این نواحی تعیین کنیم.

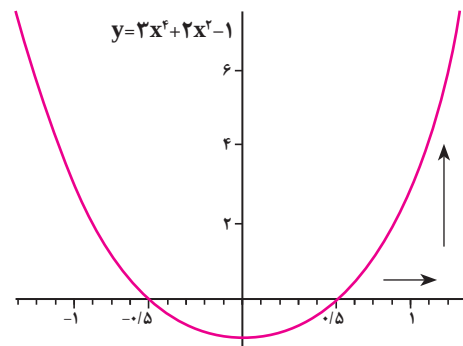
۳. به هر ریشه (ریشه ساده) که رسیدیم، علامت را تغییر می‌دهیم.

برای مشخص کردن علامت اولین خانه سمت راست در جدول تعیین علامت، لازم است رفتار تابع را در بی‌نهایت بررسی کنیم.^۱

حد یک تابع در مثبت بی‌نهایت

وقتی از حد یک تابع در مثبت بی‌نهایت سخن می‌گوییم، می‌خواهیم رفتار تابع را وقتی متغیر (x) از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود، بررسی کنیم. در چندجمله‌ای‌ها کافی است بی‌نهایت را تنها در جمله پیشرو^۲ که سریع‌ترین افزایش را دارد، جایگزین کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 + 2x^2 - 1) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 = 3(+\infty)^4 = +\infty \end{aligned}$$



نمودار ۳

اولین خانه سمت راست مثبت است؛ زیرا ضریب جمله پیشرو (x^4) مثبت است.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
y	+	0	-	+

و در تعیین علامت $y = -(x+1)^2(x-2)$ ، اولین خانه سمت راست منفی است؛ زیرا ضریب جمله پیشرو ($-x^3$) منفی است.

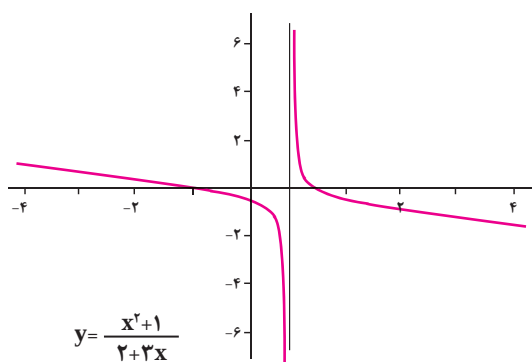
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	+	0	-

لازم به ذکر است که در این مثال، یک ریشه مضاعف هم داریم. با اینکه این ریشه‌ها تأثیری در تعیین علامت ندارند، ولی در حل برخی از مسائل وجود آن‌ها را نباید نادیده گرفت. برای مثال، جواب نامعادله $-(x+1)^2(x-2) \leq 0$

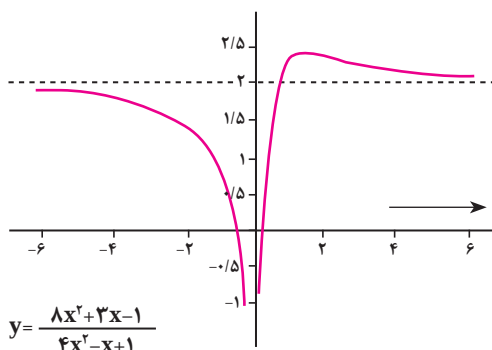
عبارت است از: $\{-1\} \cup [2, +\infty)$

در تعیین علامت $y = \frac{x^2-1}{-3x+2}$ ، اولین خانه سمت راست با توجه به علامت ضریب برآیند جملات پیشرو صورت و مخرج یعنی $-\frac{1}{3}$ ، منفی است.

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
y	+	0	- تعریف نشده	+	-



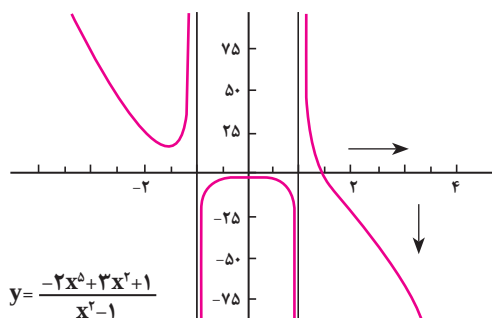
نمودار ۸



نمودار ۶

مثال ۳. در این مثال درجهٔ جملهٔ پیشرو صورت از مخرج بیشتر است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -2(+\infty)^3 = -\infty$$



نمودار ۷

حد در بی‌نهایت و جدول تعیین علامت

«علامت تابع بعد از بزرگ‌ترین ریشهٔ ساده، علامت حد تابع در مثبت بی‌نهایت است.» این مطلب بدیهی در نمودارهای مثال‌های قبل به‌خوبی مشهود است. لذا با توجه به رابطهای که بین علامت این حد و ضرایب جملات پیشرو وجود دارد، می‌توان نتیجه گرفت: «اولین خانهٔ سمت راست مربوط به جدول تعیین علامت، در چندجمله‌ای‌ها موافق علامت ضریب جملهٔ پیشرو و در عبارت‌های گویا موافق علامت ضریب حاصل از ضرایب جمله‌های پیشرو در صورت و مخرج است.»

برای مثال، در تعیین علامت $y = (x-1)^3(x+3)$



به روال سال‌های گذشته، امسال هم به یمن فرارسیدن بهار دل‌انگیز و حلول سال نو خورشیدی (۱۳۹۴) معماهایی دربارهٔ عدد سال نو داریم. بعد از چالش با این معماها می‌توانید برای مطابقت، به بخش پاسخ‌ها مراجعه کنید. پس این شما و این هم هفت معمای برگزیدهٔ عدد سال نو:

۱. می‌توان نوشت: $1394 = 2 \times 17 \times 41$. لاقلاً چند سال دیگر باید منتظر بمانیم تا عدد سال، بار دیگر به‌صورت حاصل ضرب سه عدد اول متمایز درآید؟

۲. آیا می‌توانید دو مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف رسم کنید که طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه آن‌ها عددهایی طبیعی و طول وتر آن‌ها $\sqrt{1394}$ باشد؟

۳. آیا می‌توانید مکعب مستطیلی رسم کنید که ابعاد آن همگی اعداد طبیعی و طول قطر آن $\sqrt{1394}$ باشد؟

۴. آیا می‌توانید ۱۳۹۴ را به‌صورت مجموع دو عدد اول بنویسید؟

۵. آیا می‌توانید ۱۳۹۴ را به‌صورت مجموع سه عدد اول متمایز بنویسید؟ یا به‌صورت مجموع چهار عدد اول متمایز؟

۶. حداکثر چند عدد اول می‌توانید پیدا کنید که مجموع آن‌ها مساوی ۱۳۹۴ شود؟ رهیافت شما چیست؟

۷. حداکثر چند عدد طبیعی متوالی می‌توانید پیدا کنید که مجموع آن‌ها مساوی ۱۳۹۴ شود؟ رهیافت شما چیست؟

و در تابع $y = \frac{-x^2}{1+x^2}$ ، صفر ریشهٔ مضاعف است. علامت تابع با توجه به علامت $-\frac{1}{1} = -1$ همواره منفی است و تنها در صفر، مقدار تابع صفر است.

x	$-\infty$	$+\infty$
y		-

نکتهٔ بسیار مهم

در صورتی که در یک تابع گویا صورت و مخرج، ریشه یا ریشه‌های یکسان داشته باشند، باید عامل یا عامل‌های مشترک را ساده و سپس تعیین علامت کرد. برای مثال، تابع $y = \frac{x^2 - 9}{3 - x}$ با شرط $x \neq 3$ (تابع در $x = 3$ تعریف نشده است)، به $y = -(x + 3)$ تبدیل می‌شود. بنابراین:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y	+	0	-

لازم به ذکر است که تعیین علامت را می‌توان با محاسبهٔ حد در منفی بی‌نهایت از سمت چپ در جدول شروع کرد. اما این کار مستلزم وقت و دقت بیشتری است، زیرا در منفی بی‌نهایت، تنها ضرب یا ضرایب جملات پیشرو نیستند که علامت حد را معین می‌کنند.

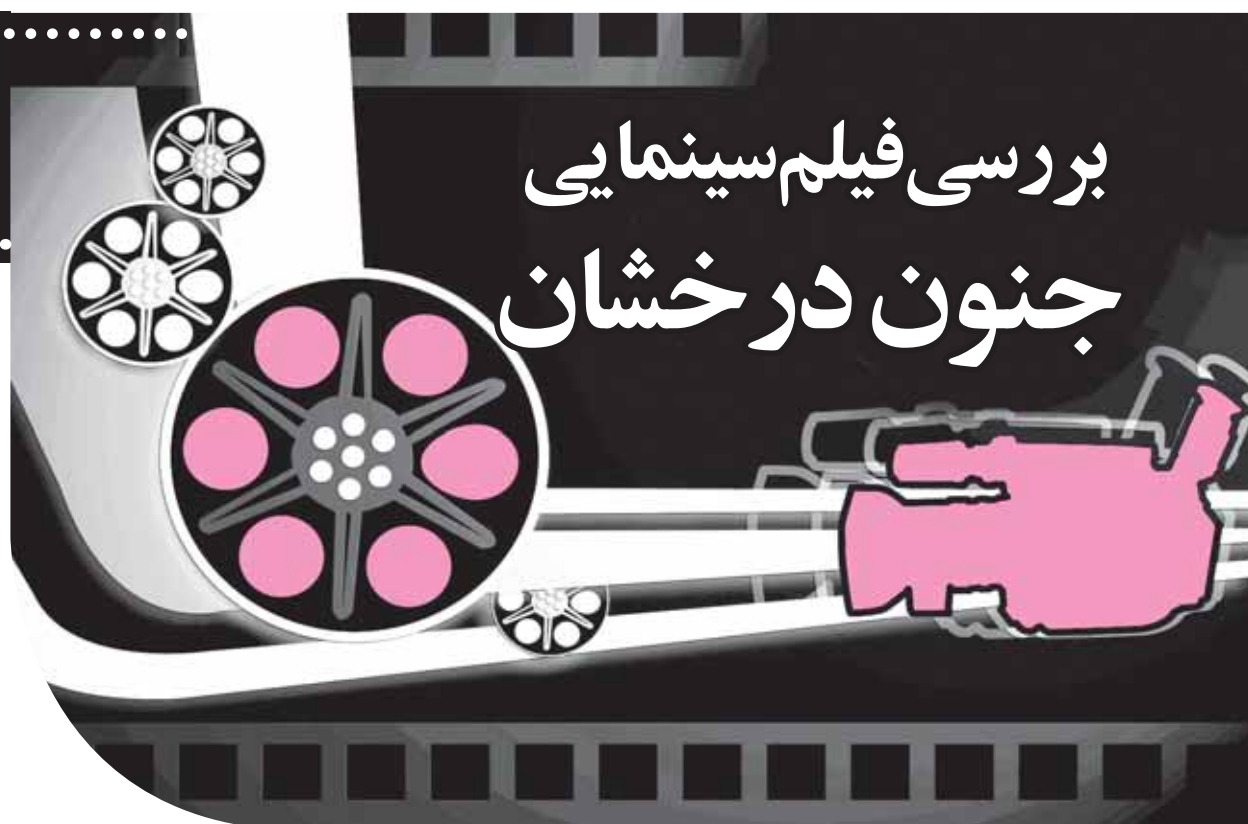
* پی‌نوشت

۱. یک راه برای انجام مرحلهٔ دوم این است که مانند تعیین علامت تابع‌های مثلثاتی، عدد دلخواهی از دامنهٔ تابع (غیر از ریشه‌ها) را در ضابطهٔ تابع قرار دهیم. علامت عدد حاصل، علامت تابع را در ناحیه‌ای که آن عدد از آن انتخاب شده است، مشخص می‌کند.

۲. در چندجمله‌ای $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ، جمله‌ای که بیشترین توان را دارد، $a_n x^n$ است که به آن جملهٔ پیشرو گویند.

۳. دانش‌آموزانی که با حد در بی‌نهایت آشنایی ندارند نیز می‌توانند از این نتیجه برای تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها و عبارات گویا استفاده کنند.

* afrouzan@yahoo.com



بررسی فیلم سینمایی جنون درخشان

و زیست‌شناسی، همواره از او به‌عنوان دانشمندی برجسته یاد می‌شود. جان نش در سال ۱۹۹۴ در کنار رینهارد سِلْتِن^۵ و جان هارسِنی^۶ موفق به اخذ جایزه نوبل اقتصاد شد.

پدر جان نش مهندس برق و مادرش تا قبل از ازدواج با پدر او، معلم مدرسه بود. والدین، پدربزرگ و مادربزرگ او همواره برای جان نش کتاب‌ها و دایرةالمعارف‌های گوناگونی تهیه می‌کردند تا او به مطالعه آن‌ها بپردازد و مطالب زیاد و متنوعی را فراگیرد.

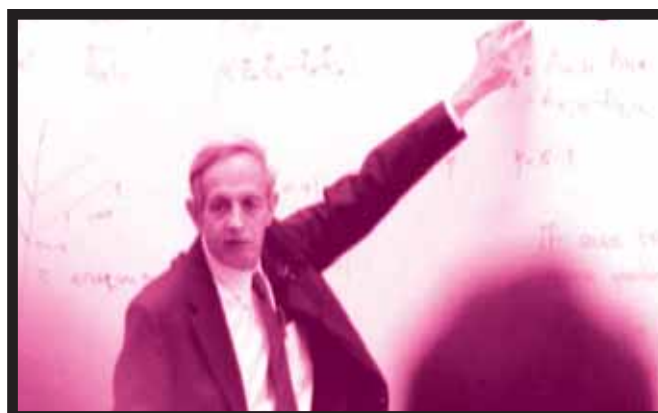
جان نش در جوانی به بیماری روان‌گسیختگی از نوع پارانوئید مبتلا شد. وی صداهایی غیرواقعی را می‌شنید که او را از خطراتی

نیازمند آگاهی‌هایی در مورد جان نش و زندگی او باشند، نخست قسمتی از زندگی‌نامه او را که در این فیلم نیز اکیداً مورد توجه قرار گرفته است نقل می‌کنیم.

جان فوربس نش در سیزدهم ژوئن سال ۱۹۲۸ در «بلوفیلد» ویرجینیای غربی در ایالات متحده آمریکا چشم به جهان گشود. او موفق به اخذ درجه دکترای ریاضیات از «دانشگاه پرینستون» شد. هر چند که زمینه اصلی کار او در ریاضیات شاخه‌های نظریه بازی‌ها، هندسه دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل جزئی بود، اما به‌واسطه ارائه نظریاتی ارزشمند در اقتصاد بازار، هوش مصنوعی، علم سیاست، نظامی‌گری، حسابداری

- اسم فیلم: جنون درخشان^۱
- کارگردان: مارک سامِلز^۲
- تهیه‌کننده: رَندال مَک لوری^۳
- نویسندگان: مارک سامِلز و رَندال مَک لوری
- زبان: انگلیسی

فیلم مستند «جنون درخشان» گوشه‌ای از زندگی پرفراز و نشیب ریاضی‌دان برجسته و معاصر آمریکایی جان فوربس نش^۴ را در قالب گفت‌وگوهایی با وی و هم‌کلاسی‌های دوره تحصیل در دانشگاه، همکاران سابقش در دانشگاه، روان‌شناس و روان‌پزشکش، و همسر، پسر و خواهرش به تصویر می‌کشد. از آنجا که ممکن است دانش‌آموزان برای درک بهتر و بیشتر این فیلم



موهوم حذر می‌دادند و وادارش می‌کردند کارهایی برخلاف خواسته‌اش انجام بدهد. رفته‌رفته بر شدت توهّمات او افزوده شد و زندگی‌اش در آستانه فروپاشی قرار گرفت. سمت استادی خود را در دانشگاه از دست داد و بالاخره در بیمارستان بستری شد. ولی در این دوران همسرش کنار او بود و به وی بسیار کمک کرد. پزشکان بیماری‌اش را نوعی از روان‌گسیختگی حاد تشخیص دادند که با افسردگی خفیف و کاهش اعتمادبه‌نفس همراه شده بود. اما او با تمام توان سعی کرد محتوای ذهن بیمار خود را ذره‌ذره اصلاح کند. این فرایند جبرانی، چیزی نزدیک به ۳۰ سال از بهترین سال‌های عمر او را گرفت. اما امید و اراده‌ای که او از خود نشان داد، کار خودش را کرد و ریاضی‌دان نابغه بالاخره از بند بیماری نجات پیدا کرد.

خودش این‌گونه بیان می‌کند: «به مرور زمان سعی کردم بخش بیمار ذهن خودم را شناسایی و پاک کنم. سعی کردم رفته‌رفته ذهنیت عالمانه‌ای را که از قبل داشتم، بازسازی کنم. این کار خیلی طول کشید و خیلی چیزها را از من گرفت. اما فکر می‌کنم الان دیگر بخش اعظم

آن هذیان‌ها و توهّمات را دور ریخته‌ام. اینکه در این سن و سال هنوز می‌توانم یک ریاضی‌دان و نظریه‌پرداز فعال باشم، به این معنی است که من در مبارزه با بیماری‌ام موفق شده‌ام.» جان نش در تکامل نظریه بازی‌ها نقش بسیار مؤثری داشت و به‌خاطر تلاش‌هایش در این زمینه، در سال ۱۹۹۴ برنده جایزه نوبل اقتصاد شد. او در سال ۱۹۹۹ از دانشگاه کارنگی ملون

دکترای افتخاری علوم و فناوری دریافت کرد. همچنین در سال ۲۰۰۳ از دانشگاه فدریکوی دوم شهر ناپل ایتالیا دکترای افتخاری اقتصاد و در سال ۲۰۰۷، از دانشگاه آنتورپ در کشور بلژیک، دکترای افتخاری دیگری در رشته اقتصاد گرفت. در حال حاضر، جان نش یکی از معروف‌ترین استادان ریاضیات در دانشگاه پرینستون ایالات متحده آمریکاست.

* ehsan.yarmohamadi@yahoo.com

* پی‌نوشت‌ها

۱. فیلم مستند جنون درخشان با نام جنون معقول از شبکه چهار سیمای جمهوری اسلامی ایران پخش شده است. علاقه‌مندان به این مجموعه می‌توانند آن را در بسته‌های شامل یک عدد «دی‌وی‌دی» از شرکت صوتی و تصویری سروش به نشانی‌های زیر دریافت کنند.
- نشانی پستی: تهران، خیابان ولی‌عصر، روبروی پارک ملت، برج سایه، فروشگاه صوتی و تصویری سروش.
- وبگاه: <http://www.sorosh-media.tv>
- پیام‌نگار: info@sorosh-media.tv
- شماره تلفن: ۰۲۱-۲۴۹۶۰
2. Mark Samels
3. Randall Mac Lowry
4. John Forbes Nash
5. Reinhard Selten
6. John Harsanyi

پای تخته

مقدمه

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در فصل‌نامه برهان است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، تعدادی مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان مجله را به چالش می‌طلبد. همچنین، از خوانندگان مجله دعوت می‌کنیم که مسائل خود را برای انعکاس در مجله برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل خود را همراه با حل آن‌ها بفرستید. شما می‌توانید مسائل و راه‌حل‌های خود را از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و با تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل‌نامه درج و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا خواهد شد.

همچنین می‌توانید با مراجعه به وبلاگ مجله که نشانی آن در صفحه فهرست مجله موجود است به مسائل شماره‌های آینده دسترسی پیدا کنید.

بخش اول:

مسئله‌ها

۱۱۱. دو نیم‌دایره به قطرهای AB و AC در نقطه A

مماس درونی‌اند. پاره‌خط‌های مساوی BE و CF

را روی AC جدا می‌سازیم و عمودهای EN و FM

را در این نقاط بر AC اخراج می‌کنیم تا نیم‌دایره‌ها

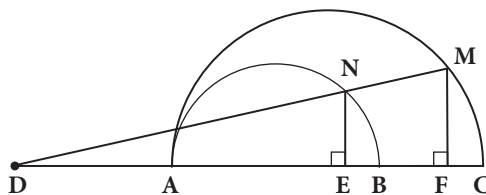
را در N و M قطع کنند. اگر امتدادهای AC و

MN یکدیگر را در نقطه D قطع کنند، ثابت کنید:

$$AD^2 = AE \cdot AF \quad (\text{الف})$$

$$NE \cdot MF = AD \cdot BE \quad (\text{ب})$$

(طراح مسئله: هوشنگ شرقی، دبیر ریاضی و عضو هیئت تحریریه)



شکل ۱

۱۱۲. یک مربع را داخل یک مربع دیگر انداخته‌ایم. ثابت

کنید اگر رئوس متناظر این دو مربع را به هم وصل

کنیم، از چهار ناحیه حاصل، مجموع مساحت‌های

دو ناحیه با مجموع مساحت‌های دو ناحیه دیگر

برابر است (طراح مسئله: نفیسه آغویی، دانش‌آموز

مرکز فرزنانگان چهاردانگه).

۱۱۳. چهار نفر ماهی گیر روی هم ۱۱ ماهی صید

کردند، به طوری که هر کدام حداقل یک ماهی

صید کردند. درستی جملات زیر را بررسی کنید:

۱. ماهی گیری وجود دارد که دقیقاً ۲ ماهی صید

کرده است.

۲. ماهی گیری وجود دارد که دقیقاً ۳ ماهی صید

کرده است.

۳. حداقل یک ماهی گیر هست که کمتر از ۳

ماهی صید کرده است.

۴. حداقل یک ماهی گیر هست که بیشتر از ۳

ماهی صید کرده است.

۵. حداقل ۲ ماهی گیر هستند که بیشتر از ۱ ماهی صید کرده‌اند.

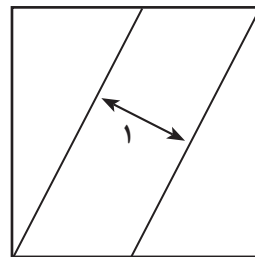
۱۱۸. آقای نوبخت ۴ فرزند دارد که یکی از آن‌ها (علی)، سنی بین ۱۳ تا ۱۹ سال دارد و حاصل ضرب سن فرزندان ۱۸۴۸ است. سن علی را پیدا کنید.

۱۱۹. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که ثلث و سه برابرش هم صحیح است؟

۱۲۰. هواپیمایی با سرعت ثابت ۸۱۰ کیلومتر بر ساعت از شهر x به شهر y می‌رود و این مسیر را ظرف ۴ ساعت طی می‌کند؛ اما هنگام بازگشت، این مسیر را در ۵ ساعت طی می‌کند. اگر سرعت باد از سمت x به y را ثابت فرض کنیم، سرعت باد را به دست آورید.

۱۱۴. در یک چایخانه سنتی چهار نوع کیک تهیه می‌شود. پنج نفر از دوستانم دیروز به آنجا رفتند و هر کدام دو کیک متفاوت برای خود سفارش دادند. مبالغی که آن‌ها پرداخت کردند عبارت بود از: ۶، ۹، ۱۱، ۱۲ و ۱۵ هزار تومان. امروز من به آنجا خواهم رفت و از هر نوع کیک یک عدد سفارش خواهم داد. چه قدر باید بپردازم؟

۱۱۵. مطابق شکل مربعی را با کشیدن دو خط موازی که فاصله‌شان یک متر است، به سه ناحیه با مساحت یکسان تقسیم کرده‌ایم. مساحت مربع را بیابید.



شکل ۲

بخش دوم: راه حل‌ها

* راه حل مسائل ۵۱ تا ۵۶ از آقای محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی (واحد کارگر) و راه حل مسائل ۵۷ تا ۶۰ از آقای مهدی قربانی، دبیر ریاضی منطقه ۹ تهران است.

۵۱. برای هر چهار ضلعی با طول اضلاع a, b, c, d و مساحت S ثابت کنید:
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4S$$

نامساوی برای هر چهارضلعی‌ها به تساوی تبدیل خواهد شد؟

می‌دانیم: $S(ABC) = \frac{1}{2}ab \sin \angle ABC$

و $S(ADC) = \frac{1}{2}cd \sin \angle ADC$. در نتیجه:

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(ab \sin \angle ABC + cd \sin \angle ADC)$$

چون: $\sin \alpha \leq 1$ ، پس: $S(ABCD) \leq \frac{ab+cd}{2}$

همچنین، می‌دانیم: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ و $c^2 + d^2 \geq 2cd$. در

نتیجه: $S(ABCD) \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. با توجه

به نامساوی‌هایی که استفاده کردیم. تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $a=b$ و $c=d$ و دو زاویه B و D قائمه هستند. در نتیجه چهارضلعی باید مربع باشد.

۵۲. عدد طبیعی M را جادویی می‌نامیم، هرگاه حاصل ضرب ارقام آن با مجموع ارقام آن برابر باشد.

۱۱۶. عمل $*$ روی اعداد صحیح به گونه‌ای تعریف شده

است که خاصیت جابه‌جایی و شرکت‌پذیری دارد.

همچنین، می‌دانیم برای هر $a \in \mathbb{Z}$ ، $a * 0 = a$ و برای هر دو عدد صحیح a و b داریم:

$$a * (b+1) = (a * b) + (1-a)$$

الف) برای هر $a \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $a * 1 = 1$.

ب) حاصل $(-3) * (-4)$ چه عددی است؟

ج) برای هر $a \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $4 * a = 4 - 3a$.

د) برای هر $a \in \mathbb{Z}$ و هر $b \in \mathbb{N}$ ثابت کنید:

$$a * b = a + b - ab$$

۱۱۷. تصاعدی حسابی با چهار جمله پیدا کنید که همه جملاتش عدد اول باشند و بین تمام چنین تصاعدهایی کمترین مجموع جملات را داشته باشد.

الف) ثابت کنید برای هر $n = 1, 2, \dots, 10$ ، عددی رقمی و جادویی وجود دارد.

ب) ثابت کنید بی‌شمار عدد طبیعی جادویی وجود دارد.

الف) اعداد زیر جواب قسمت (الف) هستند:

۱, ۲۲, ۳۳۳, ۴۴۴۴, ..., ۹۹۹۹۹۹۹۹۹, ۴۴۱۱۱۱۱۱۱۱

ب) ثابت می‌کنیم، از روی هر عدد جادویی مانند

x ، می‌توان عددی جادویی و بزرگ‌تر از x ساخت. فرض

کنید: $X = \overline{y_1 y_2 \dots y_n}$. عدد $M = \overline{y_1 y_2 \dots y_n 11 \dots 12}$

را که در آن تعداد رقم‌های ۱ برابر است با:

$2 - y_1 + y_2 + \dots + y_n$ ، در نظر بگیرید. مجموع ارقام M برابر

است با: $2(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ و حاصل ضرب ارقام M نیز

برابر است با: $2y_1 y_2 \dots y_n$. چون x جادویی است، پس M

نیز جادویی خواهد شد.

ب) فرض کنید $\frac{x}{y}$ گویا باشد. حال از برهان خلف،

مسئله را اثبات می‌کنیم:

۱. اگر z گویا باشد، آن‌گاه $z = \frac{y+x}{180}$ نیز

گویا خواهد بود. در نتیجه از گویا بودن $\frac{x}{y}$ ،

گویا بودن $\frac{x}{x+y}$ را نتیجه می‌گیریم. و چون:

$x+y \in Q$ ، پس: $x \in Q$. بنابراین $y \in Q$ است که

تناقض دارد.

۲. اگر $x \in Q$ ، آن‌گاه چون: $y = \frac{y}{x} \times x$ ، پس: $y \in Q$.

و چون $x+y \in Q$ ، در نتیجه $z = \frac{y+x}{180}$ که

باز هم به تناقض می‌رسیم.

۳. اگر $y \in Q$ ، به‌طور مشابه ثابت می‌شود x و z

هم گویا هستند که تناقض است. در نتیجه

هیچ‌کدام از اعداد x ، y و z گویا نیستند.

۵۵. در یک مدرسه ۱۰ کلاس وجود دارد. هر

دانش‌آموز از یک کلاس دقیقاً با یک دانش‌آموز

از هر یک از ۹ کلاس دیگر آشناست. ثابت کنید

تعداد دانش‌آموزان کلاس‌ها یکسان است.

فرض کنید کلاس C_1 کم‌ترین تعداد دانش‌آموز را

داشته باشد. تعداد زوج‌های آشنایی را می‌شماریم که

یکی از آن‌ها در کلاس C_1 و دیگری خارج از کلاس

C_1 باشد. چون هر عضو C_1 با ۹ نفر از دیگر کلاس‌ها

آشناست، پس تعداد زوج‌های مذکور برابر است با: $9n_1$ که

در آن، n_1 تعداد دانش‌آموزان C_1 است. از طرف دیگر، هر

دانش‌آموز از کلاس‌های C_2 تا C_9 ، دقیقاً با یک دانش‌آموز

از کلاس C_1 آشناست. پس مجموع تعداد دانش‌آموزان

C_2 تا C_9 برابر است با $9n_1$. اگر n_1 نشان‌دهندهٔ تعداد

دانش‌آموزان کلاس C_i باشد، داریم:

$n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_9$. در نتیجه

باید: $n_1 = n_2 = \dots = n_9$.

۵۶. مستطیل L را می‌توان به ۲۰۰ مربع یکسان

افراز کرد. همچنین می‌توان L را به ۲۸۸ مربع

یکسان افراز کرد. ثابت کنید L را می‌توان به

۳۹۲ مربع یکسان افراز کرد.

فرض کنید ۲۰۰ مربع در k ستون k تایی مستطیل

را افراز کرده باشند و ۲۸۸ مربع در s ستون s تایی.

در نتیجه $200 = ks$ ، $288 = ss'$. حال اگر قرار باشد

۵۲. مستطیلی با طول و عرض m و n به مربعات

واحد افراز شده است و $m, n \in \mathbb{N}$ ، به‌طوری

که مجموع مساحت مربعات واحدی که مجاور

اضلاع مستطیل هستند، برابر است با نصف

مساحت مستطیل. مقادیر طبیعی m و n را

بیابید.

باید داشته باشیم: $\frac{mn}{2} = 2m + 2n - 4$. در نتیجه:

$8 = (n-4)(m-4)$. با فرض $m \geq n$ ، داریم: $m-4=4$ و

$n-4=2$ یا $m-4=8$ و $n-4=1$. پس برای m و n چهار

دسته جواب داریم: $(6, 8)$ ، $(8, 6)$ ، $(5, 12)$ و $(12, 5)$.

۵۴. فرض کنید x, y, z اندازه‌های زوایای یک

مثلث بر حسب درجه باشند. ثابت کنید:

الف) اگر $\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$ اعدادی گویا باشند،

آن‌گاه x, y, z نیز گویا هستند.

ب) اگر تنها یکی از اعداد $\frac{x}{z}$ ، $\frac{y}{x}$ و $\frac{z}{y}$ گویا

باشد، آن‌گاه x, y, z گنگ هستند.

الف) از تساوی $x+y+z=180^\circ$ داریم:

$180^\circ = y(\frac{x}{y} + 1 + \frac{z}{y})$. چون $\frac{x}{y}$ و $\frac{z}{y}$ گویا هستند، پس

$1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y}$ نیز گویا و در نتیجه y نیز گویاست. به طریق

مشابه، گویا بودن x و z را هم می‌توان ثابت کرد.

مستطیل با ۳۹۲ مربع به ضلع T پوشانده شود، باید: $392T^2 = 200 \cdot x^2$ و در نتیجه: $T = \frac{5}{\sqrt{y}}x$ که در آن، x ضلع مربعی است که با ۲۰۰ تا از آن‌ها مستطیل را پوشانده‌ایم. شرط لازم و کافی برای پوشاندن مستطیل با مربع‌هایی به ضلع T آن است که طول و عرض مستطیل مضرب T باشند. در نتیجه اگر m و n طول و عرض مستطیل باشند، باید: $\frac{n}{T} = \frac{yn}{\Delta x} = \frac{y}{\Delta}k'$ و $\frac{m}{T} = \frac{ym}{\Delta x} = \frac{y}{\Delta}k$ پس کافی است ثابت کنیم k و k' مضرب Δ هستند. چون $kk' = 200$ ، دو حالت پیش می‌آید.

حالت اول: k و k' هر دو مضرب Δ هستند که در این حالت حکم برقرار می‌شود.

حالت دوم: فقط یکی از دو عدد k و k' مضرب Δ هستند (مثلاً k). در این حالت k مضرب 25 است و k' عامل Δ را ندارد. در نتیجه چون: $\frac{k}{k'} = \frac{s}{s'}$ ، پس $ss' = 288 = \frac{k}{k'}s^2$ و یا $ks' = 288k'$. اما طرف اول این تساوی عامل پنج را ندارد، در صورتی که طرف دوم تساوی مضرب 25 است (تناقض). بنابراین تنها حالت اول اتفاق می‌افتد.

۵۷. ثابت کنید مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی، عددی است که مجموع مکعبات آن سه عدد را می‌شمارد.

اگر سه عدد متوالی $n-1$ ، n و $n+1$ را در نظر بگیریم، مجموع آن‌ها برابر $3n$ است و: $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$ در نتیجه مجموع مکعبات سه عدد بر مجموع آن‌ها بخش پذیر است.

۵۸. x و y دو عدد حقیقی هستند، به‌طوری که: $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$. کمترین مقدار $x^2 + y^2$ را بیابید.

معادله $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$ ، معادله دایره‌ای است به مرکز $(-5, 12)$ و به شعاع 14 . با فرض $x^2 + y^2 = r^2$ ، نقطه (x, y) روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r قرار

دارد. پس (x, y) روی نقاط مشترک دو دایره است. در نتیجه کمترین مقدار r زمانی است که دو دایره مماس داخل باشند. در این حالت نقطه تماس T ، مبدأ و نقطه $A(-5, 12)$ در یک امتداد هستند و داریم: $AT = OA + r$. در نتیجه: $r = 14 - \sqrt{5^2 + 12^2} = 14 - 13 = 1$. پس کمترین مقدار $x^2 + y^2$ برابر یک است.

۵۹. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$S = \frac{1}{1!1391!} + \frac{1}{3!1389!} + \dots + \frac{1}{1391!1!}$$

دو طرف تساوی را در $1392!$ ضرب می‌کنیم:

$$1392!S = \binom{1392}{1} + \binom{1392}{3} + \dots + \binom{1392}{1391}$$

$$= 2^{1392-1} = 2^{1391}$$

در نتیجه: $S = \frac{2^{1391}}{1392!}$. اتحاد زیر (که در حل مسئله از آن استفاده شد) از اتحاد دو جمله‌ای خیام - پاسکال نتیجه می‌شود:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

۶۰. k و n دو عدد طبیعی هستند. ثابت کنید:

$$1 \times 2 \times \dots \times k + 2 \times 3 \times \dots \times (k+1) + \dots + n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1) = \frac{n(n+1)\dots(n+k)}{k+1}$$

طرف اول حکم را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{k!}{0!} + \frac{(k+1)!}{1!} + \dots + \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!}$$

$$= k! \left(\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+n-1}{n-1} \right)$$

اما از طرف دیگر، برای هر $k, r \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+r}{r} = \binom{k+r+1}{r}$$

در نتیجه عبارت داده شده برابر است با:

$$k! \binom{k+n}{n-1} = \frac{k!(k+n)!}{(n-1)!(k+1)!} = \frac{n(n+1)\dots(n+k)}{k+1}$$

هندسه نااقلیدسی

هیچ شاخه‌ای از ریاضیات نیست که روزی در جهان واقعی به کار نرود.

نیکلای لباچفسکی

مقدمه

در اوایل قرن نوزدهم، نگرش به هندسه اقلیدسی، که قدمتی ۲۱۰۰ ساله داشت و یگانه هندسه موجود بود، تغییر کرد و علم هندسه دگرگون شد و در واقع علم هندسه جدیدی متولد شد. مفاهیم خط، دایره و... تغییر کردند و مفاهیم جدیدی به وجود آمدند؛ مفاهیمی که ابتدا شگفت‌انگیز بودند، ولی توانستند نگرش همه را نسبت به محیط اطراف تغییر دهند. در هندسه جدید، مفاهیم و تعاریف ریاضی، مانند مثلثی که مجموع زوایای داخلی آن کمتر و یا بیشتر از ۱۸۰ درجه است، دو خط متمایز که یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، ... و همچنین مفاهیم فیزیکی مانند انحنای فضا، انحنای انتشار نور و... به راحتی قابل تحلیل بودند. به این ترتیب هندسه وارد دوره جدیدی از مفاهیم و کاربردهای منطقی شد.

هندسه نااقلیدسی که لباچفسکی و ریمان از پرچم‌دارانش بودند، در بسیاری از زمینه‌ها کاربرد پیدا کرد. یکی از اساسی‌ترین کاربردهای این هندسه، تشریح نظریه نسبیت انیشتین بود که فیزیک را متحول کرد و پیوند میان ریاضی و فیزیک بار دیگر پررنگ تر شد.



سیداحسان حسینی*
دانش‌آموز سال چهارم
رشته ریاضی
شهرستان دره‌شهر، ایلام

کلیدواژه‌ها: هندسه نااقلیدسی، هندسه ریمانی، هندسه لباچفسکی، نظریه نسبیت انیشتین

هندسه اقلیدسی (سه‌موی)

هندسه در آغاز بر دانسته‌های تجربی استوار بود و مردم تمدن‌های اولیه، در زندگی روزمره از هندسه استفاده می‌کردند. برای مثال، مساحت زمین‌های کشاورزی و یا محدوده زندگی خود را تعیین می‌کردند، از علائم خط، نقطه، دایره و... برای نشانه‌گذاری بهره می‌گرفتند و در نقشه‌ها و سندها از مفاهیمی مانند مساحت و فاصله استفاده می‌کردند. برخی از این مفاهیم نیز پیچیده بودند. مثلاً مصریان و بابلیان «قضیه فیثاغورث» را در ۱۵۰۰ سال قبل از فیثاغورث، در عمل، می‌شناختند و به کار می‌بردند.

نخستین بار دانشمندی به نام اقلیدس که در اسکندریه زندگی می‌کرد، هندسه را به صورت یک علم درآورد. وی حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، تمام اصول و قضایای هندسی را که تا آن زمان شناخته بود گردآورد و آن‌ها را به‌طور منظم، در یک مجموعه ۱۳ جلدی قرار داد.

در زمان اقلیدس، هندسه در تب و تاب بود و نظریات مختلفی در زمینه این علم مطرح می‌شد. کتاب اقلیدس که «اصول» نام داشت، روش‌های بنیادی و منسجمی را ارائه داد که تا امروز هم از منسجم‌ترین بنیادهای نظری بشر محسوب می‌شود. روش اقلیدس ساده بود. او چند

ریمان



لِباچفسکی



ساکری



خیام



اقلیدس



اصل (اصل موضوعه) را بدون اثبات به عنوان اصل‌های بدیهی پذیرفت و سپس براساس آن‌ها صدها قضیه دیگر را اثبات کرد که بسیاری از آن‌ها دور از ذهن بودند.

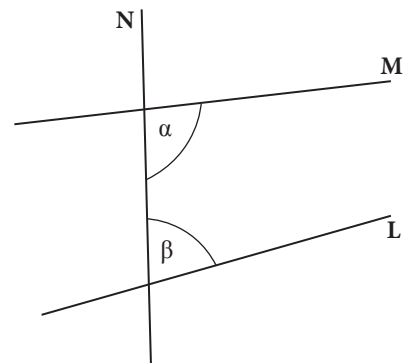
اصول موضوعی اقلیدس عبارت‌اند از:

۱. از هر دو نقطه یک خط راست می‌گذرد.
۲. هر پاره‌خط می‌تواند تا بی‌نهایت روی خط راست امتداد یابد.

۳. با یک نقطه به عنوان مرکز و یک پاره‌خط به عنوان شعاع می‌توان یک دایره رسم کرد.
۴. همه زاویه‌های قائمه با هم برابرند.

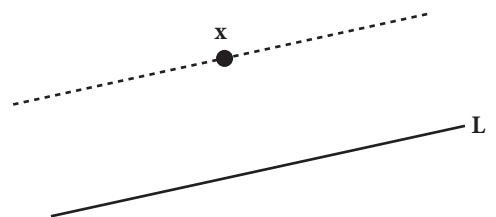
۵. اگر خط راست N دو خط راست M و L را قطع کند، و مجموع زوایای داخلی در یک طرف N کمتر از 180° درجه باشد، خط‌های M و L در آن طرف N یکدیگر را قطع می‌کنند.

اگر مجموع α و β کمتر از 180° درجه باشد، آن‌گاه خطوط M و L یکدیگر را در سمت α و β قطع می‌کنند.



شکل ۱

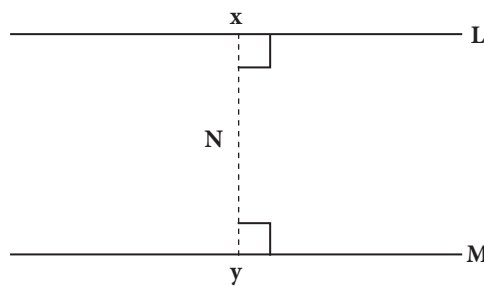
قضیه‌های زیر نیز بیانگر اصل پنجم اقلیدس‌اند:
۱. از یک نقطه خارج از یک خط، یک و تنها یک خط می‌توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد.



شکل ۲

اصل پنجم
اقلیدس چندان
بدیهی به نظر
نمی رسید. گروهی
از ریاضی دانان
معتقد بودند که
اصل پنجم را
می توان به عنوان
یک قضیه اثبات
کرد. در این راه
ریاضی دانان
زیادی تلاش
کردند، اما نتیجه
نگرفتند.

از نقطه x یک و تنها یک خط موازی با خط L می توان رسم کرد.
 ۲. اگر بین دو خط مفروض بتوان خطی رسم کرد که بر هر دو خط عمود باشد، آن دو خط با هم موازی اند.
 دو خط L و M در نقاط x و y بر خط N عموداند، پس دو خط L و M با هم موازی اند.



شکل ۳

۳. اگر دو خط با هم موازی باشند و یکی از آنها با خط سوم موازی باشد، خط دیگر نیز با خط سوم موازی خواهد بود.

پیدایش تفکرات نوین هندسی

اصل پنجم اقلیدس چندان بدیهی به نظر نمی رسید. گروهی از ریاضی دانان معتقد بودند که اصل پنجم را می توان به عنوان یک قضیه اثبات کرد. در این راه ریاضی دانان زیادی تلاش کردند، اما نتیجه نگرفتند.

خیام، ریاضی دان برجسته ایرانی، در یکی از آثار ریاضی خود به نام «رساله فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس»، اصل موضوعه پنجم اقلیدس را درباره قضیه خطوط متوازی که شالوده هندسه اقلیدسی است مورد مطالعه قرار داد و اصل پنجم را نیز اثبات کرد. به این ترتیب، خیام راه را برای دانشمندان بعد از خود هموار ساخت، به طوری که **ساکری** (ریاضی دان ایتالیایی) اساس نظریه خود را درباره خطوط موازی، مطالعات خیام دانسته است. با مطالعات خیام و نظریه های ساکری و **والیس** (ریاضی دان انگلیسی) که چند قرن بعد از خیام بیان شدند، راه برای پایه ریزی هندسه ای جدید؛ با رویکردی نااقلیدسی، هموار شد.

هندسه نااقلیدسی

در نیمه اول قرن نوزدهم دو رویداد ریاضی مهم و انقلابی به وقوع پیوست:

- کشف هندسه ای خودسازگار، غیر از هندسه اقلیدسی؛
- کشف جبری متفاوت با جبر معمولی دستگاه اعداد حقیقی.

هندسه نااقلیدسی که از مطالعه عمیق تر موضوع توازی در هندسه اقلیدسی شکل گرفت، به دو موضوع در مورد این اصل می پردازد: موضوع اول این است که از یک نقطه خارج یک خط، هیچ خطی نمی توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد (هندسه بیضوی). موضوع دوم این است که از یک نقطه خارج یک خط بی شمار خط می توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد (هندسه هذلولوی).

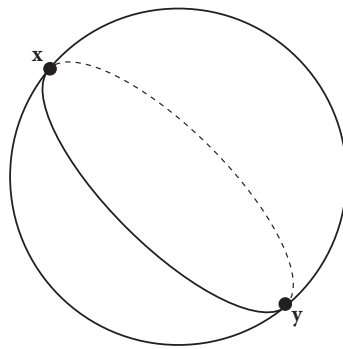
اما چگونه ممکن است دو خط که بر یک خط دیگر عمودند (بیان دوم اصل پنجم اقلیدس) با هم موازی نباشند؟ و یا اگر دو خط که با هم موازی هستند و خط سومی نیز با یکی از آنها موازی باشد، ممکن است با دیگری موازی نباشد؟ برای پاسخ گویی به این سؤالات و درک بهتر هندسه نااقلیدسی بهتر است که مفهوم خط را که با شنیدن آن یک خط راست به ذهنمان می رسد، اندکی تغییر دهیم. به عبارت دیگر، بهتر است به سطح یک کره فکر کنیم.

هندسه بیضوی (ریمانی)

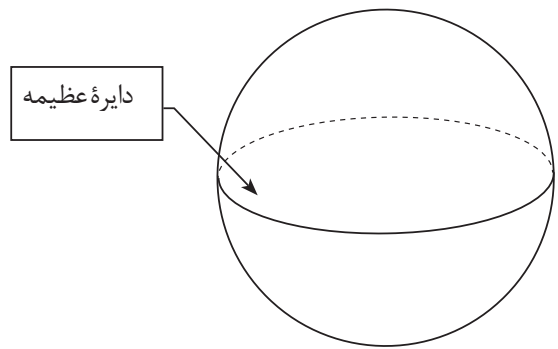
هندسه ریمانی نوعی هندسه نااقلیدسی است. در هندسه بیضوی اصل توازی این گونه بیان می شود: «از یک نقطه خارج یک خط نمی توان خطی به موازات خط مفروض رسم کرد.» در واقع در هندسه بیضوی، خطوط موازی وجود ندارند. با تجسم سطح یک کره می توان سطحی شبیه به سطح بیضوی در نظر گرفت.

اصل توازی روی سطح کره برقرار نیست، چرا که روی سطح کره اصلاً خط راستی وجود ندارد. در واقع روی سطح کره مفهوم خط از آنچه در ذهن ماست (خط راست) تغییر کرده و به منحنی تبدیل می شود. در واقع خط، روی سطح کره، قسمتی از یک «دایره عظیمه» است (دایره عظیمه دایره ای است که کره را دقیقاً دو نیم می کند).

امروزه هندسه
هذلولوی
را هندسه
لباچفسکی
می‌نامند.
لباچفسکی
اولین کسی بود
که مقاله‌ای در
زمینه هندسه
ناقلیدسی نوشت



در هندسه کروی اصل توازی برقرار نیست.



xy خطی روی کره است.

شکل ۴

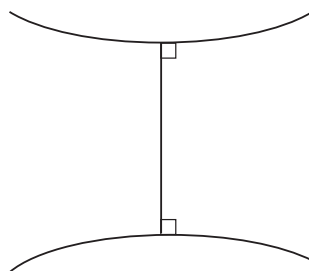
از بالای کره (قطب شمال) تا پایین کره (قطب جنوب) بیش از یک کوتاه‌ترین مسیر وجود دارد.

هندسه هذلولوی (لباچفسکی)

لباچفسکی، ریاضی‌دان روس، هر چند درباره موضوعات مختلف پژوهش‌های فراوانی انجام داد، ولی فعالیت او در زمینه هندسه و ابداع هندسه ناقلیدسی در تاریخ ریاضیات ماندگار شد. امروزه هندسه هذلولوی را هندسه لباچفسکی می‌نامند. لباچفسکی اولین کسی بود که مقاله‌ای در زمینه هندسه ناقلیدسی نوشت. **بویوئی** (دیگر ریاضی‌دان روس) نیز بدون اطلاع از کار لباچفسکی، دو سال بعد مقاله‌ای درباره هندسه ناقلیدسی نوشت.

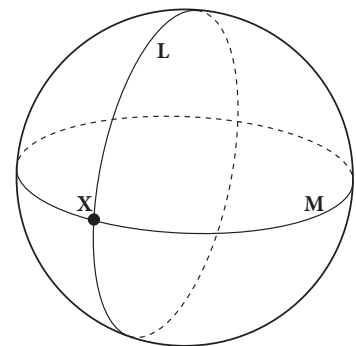
اصل توازی در هندسه هذلولوی دقیقاً عکس هندسه بیضوی تعریف می‌شود: «از یک نقطه خارج از یک خط، بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد.»

همان‌طور که در شکل ۷ نیز معلوم است، همچنان که دو خط در دو نقطه بر یک خط عمودند، اما با هم موازی نیستند، یعنی چنین نیست که امتداد آن‌ها یکدیگر را قطع نکند. همچنین بی‌شمار خط نیز می‌توان به این شکل اضافه کرد.



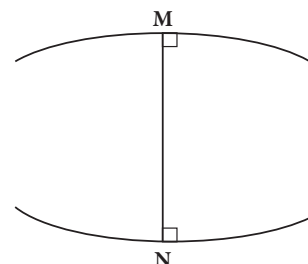
شکل ۷

دو دایره عظیمه L و M (خط روی کره) در نقطه x یکدیگر را قطع کرده‌اند. به عبارت دیگر، هیچ خطی نیست که از x بگذرد و L را قطع نکند.



شکل ۵

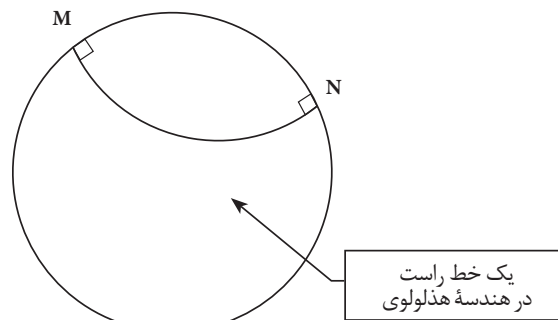
شکل ۶ اصل توازی در هندسه بیضوی را نشان می‌دهد که اصل پنجم اقلیدس را نقض می‌کند. به عبارت دیگر، با اینکه این دو خط در دو نقطه بر یک خط عمودند، ولی هیچ‌گاه با هم موازی نیستند (امتداد آن‌ها یک دیگر را قطع می‌کند).



شکل ۶

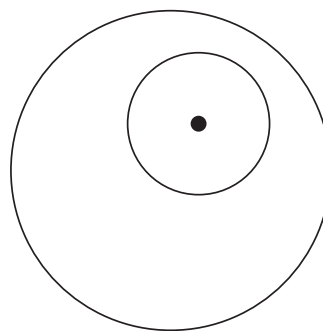
همه چهار اصل اول اقلیدس روی کره درست نیستند. مثلاً روی کره دایره‌ای به شعاع دلخواه بزرگ وجود ندارد. اصل سوم نیز برقرار نیست. مثلاً

در هندسه هذلولوی مانند هندسه کروی، باید مفهوم خط را اندکی تغییر دهیم. خط راست و کوتاه‌ترین مسیر از دیدگاه هندسه هذلولوی، کمائی از یک دایره است که بر دایره اصلی در مرز آن عمود است.



شکل ۸

خط MN (شکل ۸) شاید از دید ما که تا به حال خط را تنها یک خط راست در نظر می‌گرفتیم، عجیب باشد و واقعاً خط به نظر نرسد. اما در حقیقت این‌ها پاره‌خط‌های هذلولوی‌اند. «حقیقت یک مفهوم ریاضی بیشتر وابسته به چیزی است که انجام می‌دهد، نه آنچه که هست» (تیموری گاورز، ریاضی‌دان معاصر). دایره‌های هذلولوی شبیه به دایره‌های معمولی‌اند، ولی مرکزشان کمی متفاوت است.

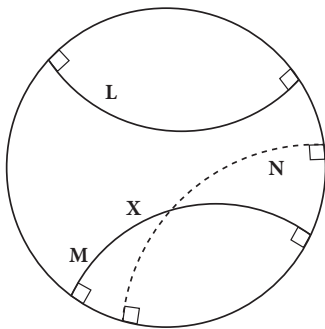


شکل ۹ دایره هذلولوی و مرکز آن

در هندسه هذلولوی نیز اصل پنجم اقلیدس نادرست است.

دو خط L و M با هم موازی‌اند، چون امتداد آن‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کند. از طرف دیگر، دو خط L و N نیز چون یکدیگر را قطع نمی‌کنند، با هم موازی‌اند. بنابر اصل پنجم اقلیدس، چون دو خط L و M با هم موازی‌اند، خط N باید با خط M موازی باشد. اما با توجه به شکل خطوط، N و M یکدیگر را در X قطع می‌کنند

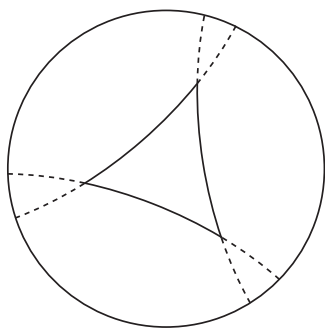
که در این صورت اصل پنجم اقلیدس نادرست می‌شود.



شکل ۱۰

یک مثلث جدید!

از دوران تحصیل ما در دبستان، یکی از به‌یادماندنی‌ترین ویژگی‌های مثلث، مجموع زوایای داخلی آن بود که همه می‌دانیم برابر با 180° درجه است. اما اکنون که با هندسه‌های نااقلیدسی آشنا شدیم، تصور مثلثی که مجموع زوایای داخلی آن کمتر از 180° درجه باشد، زیاد مشکل نیست. برای رسم این مثلث به هندسه هذلولوی مراجعه می‌کنیم.



شکل ۱۱ مثلث هذلولوی

کاربرد هندسه نااقلیدسی

هندسه نااقلیدسی که بعدها گاوس و ریمان آن را در قالب هندسه کلی تری بسط دادند، در نظریه نسبیت انیشتین مورد استفاده قرار گرفته است.

در واقع اهمیت این دو هندسه زمانی آشکار شد که نظریه نسبیت عام انیشتین به‌عنوان جایگزینی برای نظریات نیوتن از مکان، زمان و گرانش انتخاب شد. زیرا ساختار نظریه نسبیت انیشتین مبتنی بر هندسه ریمانی بود. در این نظریه، هندسه مکان - زمان به‌جای آنکه صاف باشد، منحنی است.

* منابع

۱. ایوز، هاورد و، (۱۳۹۰). آشنایی با تاریخ ریاضیات (ج ۲)، ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
۲. گاورز، تیمونی (۱۳۸۸)، مقدمه‌ای کوتاه بر ریاضیات، ترجمه‌مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی، تهران.
۳. بیرشک، احمد و دیگران، خلاصه زندگی‌نامه علمی دانشمندان، بنیاد دانش‌نامه بزرگ فارسی.
۴. ماروین جی، گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمه م. ه. شفیع‌پور، ویرایش احمد بیرشک، حمید کاظمی و همایون معین، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

*Ehsan.Hossyni@chmail.ir

مجموعه‌های عددی

Number Sets

Here are some important number sets used in mathematics:

● $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ is the set of *counting numbers*, or *naturals*.

● $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ is the set of *whole numbers*.

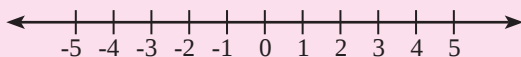
● $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ is the set of *integers*.

● $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$ is the set of *rational numbers*, or *fractions*.

This set can also be described as containing all terminating or non-terminating but repeating decimals.

● I is the set of *irrational numbers*. This set can also be described as containing all non-terminating and non-repeating decimals. Some of the most important numbers in mathematics belong to this set, including π , $\sqrt{2}$, e and ϕ .

● R is the set of *real numbers*. These are all the numbers that can be placed on a one-dimensional number line extending with no end on both the negative and positive sides.



Set Equality

Two sets A and B are said to be *equal* (denoted, as expected, by $A=B$) if and only if both sets have the exact same elements. Here, *if and only if* means that both parts of the statement (" $A=B$ " and "both sets have the exact same elements") are interchangeable. Logically speaking, this means that each part of the statement implies the other.

در اینجا تعدادی از مجموعه‌های عددی مهم را که در ریاضیات از آن‌ها استفاده می‌شود، معرفی کرده‌ایم:

● $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه اعداد شمارشی یا طبیعی است.

● $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه اعداد درست [حسابی] است.

● $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه اعداد صحیح است.

● $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$ مجموعه اعداد گویا یا کسری است.

همچنین، این مجموعه می‌تواند بیان‌کننده یا شامل همه اعداد اعشاری با پایان [مختوم] یا بی‌پایان، اما با تکرار [اعداد اعشاری متناوب] باشد.

● I مجموعه اعداد ناگویا [گنگ] است. این مجموعه همچنین

می‌تواند بیان‌کننده یا شامل همه اعداد اعشاری بی‌پایان و بدون تکرار [غیرمتناوب] باشد. تعدادی از اعداد بسیار مهم در ریاضیات که

متعلق به این مجموعه هستند، عبارت‌اند از:

ϕ , e , $\sqrt{2}$, π

● R مجموعه اعداد حقیقی است. این‌ها همه اعدادی هستند که

می‌توان روی خط اعداد یک‌بعدی قرار داد، خطی که از هر دو طرف

مثبت و منفی بی‌پایان است.



تساوی مجموعه

دو مجموعه A و B را مساوی می‌گوییم (و آن را با نماد $A=B$

نمایش می‌دهیم) «اگر و فقط اگر» دو مجموعه دقیقاً اعضای یکسان داشته باشند.

اینجا، «اگر و فقط اگر» به این معنی است که دو بخش گزاره

(« $A=B$ » و «دو مجموعه دقیقاً اعضای یکسان دارند») قابل تعویض‌اند.

به زبان منطقی، این به این معناست که هر بخش از این گزاره، بخش دیگر را نتیجه می‌دهد.

اصطلاحات و لغات مهم:

1. Natural Numbers اعداد طبیعی

3. Integers اعداد صحیح

5. Irrational Numbers اعداد گنگ

7. terminating مختوم

2. Whole Numbers اعداد درست

4. Rational Numbers اعداد گویا

6. Real Numbers اعداد حقیقی

8. Interchangeable تعویض‌پذیر

تدریس و معلمی لذت بخش است

پای صحبت استاد پیشکسوت ریاضی و آمار
دکتر عین‌الله پاشا

اشاره

برای دانش‌آموزانی که هر سال از پشت میزهای چوبی به تخته زل می‌زنند، کلمه «احتمال» چه معنایی می‌تواند داشته باشد؟ شاید، فقط شیر یا خط آمدن یک سکه! کلمه «آمار» چه‌طور؟ آیا برای آن‌ها، آمار، جز یک جزوه پر از اعداد و ارقام است که به دستشان می‌دهند؟

متأسفانه چنین است! احتمال و آمار سال‌هاست که مهجور، گوشه کلاس‌های درس افتاده‌اند، در حالی که این دو مبحث جوان ریاضیات، می‌توانند دیدی نو و تازه به دانش‌آموزان بدهند. و این بهانه‌ای لازم و کافی بود برای مصاحبه‌ای نه‌چندان کوتاه با دکتر عین‌الله پاشا، استاد آمار و احتمال. در این مصاحبه آقایان حمیدرضا امیری، سردبیر؛ هوشنگ شرقی، مدیر داخلی؛ سیدمحمد رضا هاشمی موسوی و غلامرضا یاسی پور اعضای هیئت تحریریه مجله «ریاضی رشد برهان ۲» حضور داشتند.

دکتر عین‌الله پاشا در سال ۱۳۵۰ از دانشگاه تهران، در رشته ریاضی، فارغ‌التحصیل شد و پس از اتمام دوره مدرسی ریاضی در مؤسسه ریاضیات و چهار سال تدریس در دانشسرای عالی (آن موقع) برای ادامه تحصیلات به آمریکا اعزام شد. در سال ۱۳۶۳ مدرک دکترای خود را از دانشگاه ایالتی میشیگان گرفت و بعد از بازگشت به ایران، علاوه بر تألیف کتاب‌ها و مقالات متعدد، استاد دانشگاه تربیت معلم، رئیس مؤسسه ریاضیات این دانشگاه، مدیر گروه آمار دانشگاه پیام‌نور، عضو انجمن آمار ایران و همچنین عضو «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی» بوده و ده‌ها سمت دیگر نیز داشته است. قسمت اول، گفت‌وگو با دکتر پاشا را در این شماره و قسمت دوم را در شماره ۸۶ می‌خوانید.

دیگری هم دارند که شاید با همه آن‌ها برابری می‌کند و آن انسانیت، اخلاق و تواضع مثال‌زدنی ایشان است. در این زمینه اگر نگوییم سرآمد، لااقل در زمره سرامدان هستند و من می‌خواهم تعبیر خودم را از این موضوع از کتاب معروف «گفت‌وگو با دانش‌آموزان دبیرستان» از سرژ لانگ وام بگیرم. در مقدمه این کتاب آمده است که این بار سرژ لانگ که یک استاد بزرگ دانشگاهی است، از عرش به فرش آمده و در گفت‌وگویی صمیمی با دانش‌آموزان شرکت کرده است. من می‌خواهم بگویم که دکتر پاشا امروز از عرش به فرش آمده و با یک مجله دانش‌آموزی به

● شرقی: به‌نام خدا. امروز چهارشنبه هفدهم اردیبهشت ۹۳، به همراه اعضای هیئت تحریریه مجله برهان، در خدمت استاد گرامی، دکتر عین‌الله پاشا هستیم. به‌عنوان مقدمه یادآور می‌شوم که مطابق زندگی‌نامه‌ای که چند سال پیش خود من برای درج در مجله‌ای که این‌جانب در آن به‌عنوان عضو هیئت تحریریه در خدمت استاد بودم، از ایشان دریافت کردم، آقای دکتر پاشا تاکنون دارای ده‌ها عنوان و سمت علمی و دانشگاهی بوده‌اند و اکنون نیز جزو برجسته‌ترین استادان ریاضی کشورمان هستند. ولی در کنار این پیشینه سنگین، ایشان امتیاز بزرگ

**اگر من با بدنه
آموزش و پرورش
همکاری کرده و
می‌کنم، در واقع
به عرش صعود
کرده‌ام، نه اینکه
به فرش آمده
باشم**

ده کوچکی بود به نام حسین آباد. مدرسه من هم اولین مدرسه‌ای بود که در این ده ساخته بودند. یک مدرسه نوساز که چهار کلاس بیشتر نداشت. به خاطر شغل پدرم ما در مدرسه زندگی می‌کردیم (تمام کارکنان مدرسه که ضمناً دو خانوار و بعضی مواقع یک معلم مجرد هم اضافه می‌شد، همگی در مدرسه زندگی می‌کردند) و من افتخار می‌کنم که بگویم در مدرسه به دنیا آمده‌ام و از بچگی در کلاس‌ها می‌نشستم. هنوز به کلاس اول نرفته بودم، اما همه درس‌های کلاس اول را از حفظ بودم. مرا نشاندند بودند کلاس دوم، اما کارنامه کلاس اول را برایم زده بودند. تا کلاس چهارم را در آن مدرسه بودم و بعد از آن منتقل شدیم به جای دیگری. سال چهارم برایم سال سختی بود. یکی از دلایلی هم این بود که از دوستان دوران کودکی‌ام جدا شده بودم.

بعدها که زندگی مولانا را می‌خواندم که در ۱۱ سالگی از بلخ می‌رود، با خودم می‌گفتم بی‌دلیل نیست که می‌گوید:

«بشنو از نی چون حکایت می‌کند

از جدایی‌ها شکایت می‌کند»

آن وقت‌ها خیلی دلتنگی می‌کردم، یک وقت‌هایی اگر می‌خواستم کمی بلندتر حرف بزنم، بغضی در گلویم گره می‌خورد.

در مدرسه قبلی شاگرد آزادی بودم و هیچ‌کس با من کاری نداشت. می‌رفتم، می‌آمدم و درس را می‌خواندم. اما اینجا مقررات سخت و خاصی داشت که من متوجه نمی‌شدم. مثلاً معلم می‌گفت فردا نقشه ایران را بکشید و بیاورید. فردا که می‌رفتم به من می‌گفت نقشه‌ات کو؟ و مرا هم که اصلاً نمی‌فهمیدم قضیه چیست می‌برد بیرون کلاس و دو تا چوب نوش جانمان می‌کرد. خلاصه اینکه آن سال،



مصاحبه نشسته‌اند.

پاشا: همین جا و قبل از هر چیز یک جمله بگویم و آن اینکه اگر من با مجله و با بدنه آموزش و پرورش همکاری کرده و می‌کنم، در واقع به عرش صعود کرده‌ام، نه اینکه به فرش آمده باشم، از اینکه صحبت شما را قطع کردم، عذر می‌خواهم.

● **شرقی:** این از بزرگواری شماست. ما نهایت سپاس خود را از اینکه دعوت ما را به مصاحبه پذیرفتید، اعلام می‌کنیم و مصاحبه را شروع می‌کنیم.

● **غلامی:** اجازه بدهید گفت‌وگو را با سؤالی درباره زندگی دکتر پاشا شروع کنیم. جناب دکتر پاشا، داستان زندگی شما چه بود و چه شد که سرنوشتان این‌طور به ریاضیات گره خورد؟

■ **پاشا:** ابتدا اجازه می‌خواهم به خاطر دعوتی که از من به عمل آوردید، تشکر کنم و سپس روز و هفته معلم را نیز خدمت همکارانم تبریک بگویم.

من در سال ۱۳۲۸ در مهرشهر کرج متولد شدم. حالا مهرشهر برای خودش شهری است، اما آن روزها





می‌خواندم.

از این دست خاطرات زیاد دارم. یادم می‌آید سال بعد از آن، کلاس نهم، معلم هندسه‌ای داشتیم به نام آقای ملک‌پور. معلم بسیار خوبی بود. هر وقت سؤالی را مطرح می‌کرد و کسی جواب درستی می‌داد (هر چند هم که سؤال ابتدایی بود)، می‌گفت بارک‌الله! یک ۲۰ برایش بگذارید. به خاطر همین ۲۰ گرفتن‌ها و تشویق‌ها بود که سعی می‌کردم جواب سؤال‌ها را بدهم. یکی دو تا مسئله را هم من آن سال‌ها حل کردم. یادم می‌آید که یکی از مسئله‌ها این بود: دو تا دایره مماس داخل‌اند. تفاضل شعاع‌هایشان مثلاً ۲ سانتی‌متر است. مساحت بینشان هم این قدر است. شعاع هر کدام چه قدر است؟ من یک معادله دوجمله‌ای نوشتم و مسئله را حل کردم.

● **شرقی:** همین الان راه‌حلش به ذهنم آمد و حلش کردم. چون مساحت بین دو دایره را داریم، یعنی $\pi(R^2 - R'^2)$ و در نتیجه $R^2 - R'^2$ را داریم و چون طول خط‌المركزین، یعنی $R - R'$ را داریم...
 ■ **پاشا:** بله، با اتحاد مزدوج $R^2 - R'^2$ را تجزیه می‌کنیم و به $R + R'$ می‌رسیم و از آنجا دستگاه دو معادله دوجمله‌ای تشکیل می‌شود.

● **شرقی:** خیلی جالب است! می‌شود این مسئله را در مجله بیاوریم.
 ■ **پاشا:** بله، خیلی جالب بود و همین‌ها باعث شد که من بیشتر به ریاضی علاقه‌مند شوم. تابستان هم همه وقت‌م را با حل مسئله گذراندم و وقتی به کلاس دهم آمدم و گفتند چه رشته‌ای می‌خواهی بخوانی، بدون تردید و تأمل، فوری گفتم: رشته ریاضی؛ بی‌برو برگرد!
 مرا ترساندند که ریاضیات کار هر کسی نیست؛

تا توانستم خودم را پیدا کنم خیلی سخت گذشت. اما کم‌کم اخت شدم و تا کلاس هشتم را در همان مدرسه ادامه دادم. مدرسه خوبی بود و معلم‌های خوبی داشت؛ مخصوصاً معلم ادبیات و معلم طبیعی. آنجا بود که برای اولین بار کار با میکروسکوپ را در کلاس‌های چهارم و پنجم به ما یاد دادند.

از من پرسیدید که چه‌طور به ریاضی علاقه‌مند شدم. خاطره شیرینش در این زمینه هنوز به یادم می‌آید. معمولاً موقع امتحانات کتاب را نمی‌خواندیم. می‌رفتیم و هرچه معلم در کلاس یادمان داده بود، می‌نوشتیم. یک شب کلاس هشتم، نمی‌دانم چه‌طور شد که با خودم گفتم بگذار کتاب هندسه را بیاورم و ببینم که چی نوشته است. یادم می‌آید که در کتاب علاوه بر سایر مطالب، نوشته بود: دو شکل را معادل می‌گوییم، اگر دارای مساحت‌های برابر باشند.

فردا که روز امتحان بود، معلم سؤال داده بود که دو خط موازی داریم. پاره‌خطی روی یکی از آن‌ها قرار دارد و یک نقطه متغیر روی خط دیگر حرکت می‌کند. آن نقطه را به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم و یک مثلث تشکیل می‌شود. ثابت کنید همه این مثلث‌ها معادل‌اند. با خودم گفتم یعنی باید مساحت‌هایشان برابر باشد. مساحت مثلث هم که می‌شود قاعده ضربدر نصف ارتفاع و اینجا هم که قاعده ثابت است. پس ارتفاع‌هایشان باید با هم برابر باشد که برابر است و... تمام شد، من این مسئله را حل کردم. این اولین جرقه‌ای بود که در ذهنم خورد. فهمیدم که اگر کتاب بخوانم، می‌توانم خیلی چیزها را یاد بگیرم و خیلی کارها را انجام دهم.

من همیشه از این خاطره به نام میوه ممنوعه یاد می‌کنم. چون مرا از آن عوالم کودکی آورد بیرون. من با این مسئله آمدم به دنیای دیگری؛ به دنیای ریاضیات. از آن روز به بعد حتی در تابستان‌ها ریاضی

بیا برو یک رشته دیگر بخوان و از این حرف‌های عجیب و غریب که فقط عطش‌م را بیشتر می‌کرد. سال ششم دبیرستان، تفریح من رسم ملخص و یا اپور در درس‌های هندسه رقومی و ترسیمی بود، که در این سال‌ها این دو درس از برنامه درسی حذف شده‌اند. منابع مسائل علاوه بر کتاب‌های درسی کتاب‌های مهندس خویی و آقای پرتوی بود که آن‌ها را به سختی تهیه می‌کردم، مسئله‌هایش را حل می‌کردم و لذت می‌بردم. با این چیزها خستگی‌ام در می‌آمد.

یادم می‌آید وقتی به «دبیرستان فارابی کرج» رفتم تا ریاضیات بخوانم، این دبیرستان دو معلم هندسه داشت: آقای مظاهری و آقای اعتمادی. همه‌ای بین بچه‌ها افتاده بود که هر طور شده است، سرکلاس آقای اعتمادی بنشینیم. چون خوش‌اخلاق‌تر و مهربان‌تر است و شاید نمره هم بهتر می‌دهد. این شد که همه ما رفتیم سر کلاس آقای اعتمادی و در هر نیمکت، پنج شش نفر تنگ هم نشستیم. آمدند جدایمان کردند و به دو کلاس تقسیم شدیم. ما هم با خودمان گفتیم چه باک! و رفتیم و سر کلاس آقای مظاهری نشستیم. ایشان هم آن سال مژه خوب ریاضی را به ما چشاند. ایشان یک کتاب روسی داشت و با خودش می‌آورد سر کلاس و من یک دفعه، هفت هشت دقیقه مانده بود که کلاس تمام شود، این کتاب را گرفتم و نگاه کردم. دو صفحه رسم مثلث داشت. نوشته بود مثلی را با این اطلاعات رسم کنید و مثلاً با داشتن h_a , h_b , h_c (سه ارتفاع) و این سخت‌ترینش بود...

● شرقی: بله مسئله معروفی است.

■ پاشا: ما زبان روسی نمی‌دانستیم، ولی می‌دانستیم که داستان مربوط به رسم مثلث است. تمام این دو صفحه را نوشتم و تا کنکور دانشگاه این خوراکم بود. آن سال، رسم مثلث و این جور مسائل را کار کردیم. سال بعد هم هندسه مسطحه و کلاس یازدهم هندسه فضایی داشتیم، آن سال معلم هندسه‌مان آقای اختر خاوری بودند و من هندسه را خوب می‌فهمیدم. مثلاً کنج سه قائمه را با نگاه کردن به گوشه اتاق خانه‌مان مجسم می‌کردم. خیلی هم لذت‌بخش بود. وقتی مادرم فهمید، گفت: من گاهی که به تو نگاه می‌کردم، با خودم می‌گفتم این بچه چه شده! نکنه مشکلی داره که به سقف نگاه می‌کنه و با انگشت‌هاش شکل‌های عجیب و غریب در هوا می‌سازه!

در سال ششم دبیرستان من دیگر در بحث هندسه رقومی و ترسیمی مسلط شده بودم و برای

رفع خستگی مسئله رسم حل می‌کردم. کتاب‌های متفاوتی در این زمینه بود؛ از جمله کتاب‌های آقای باقر ازگمی و آقای مهندس خویی که به سختی آن‌ها را گیر می‌آوردم و مسائل آن‌ها را حل می‌کردم و لذت می‌بردم. این جور که من شروع کردم، ظاهراً فقط از هندسه گفتم. البته درست است که برای حل آن مسئله هندسه از اتحاد مزدوج، که اتحاد جبری است، استفاده کردم، ولی به‌طور کلی توی جبر و این جور شاخه‌های ریاضی تبحر زیادی نداشتم.

● امیری: آنالیز چه‌طور؟

■ پاشا: آنالیز نداشتم. مشتق و این بحث‌ها را هم، در درس جبر می‌خواندیم. ولی توی جبر من مهارت چندانی نداشتم. یادم می‌آید، همان کلاس نهم دستگاہی را داده بودند حل کنیم. من حل می‌کردم، می‌دیدم جواب‌هایش، خیلی عجیب و غریب درمی‌آیند.

مثلاً $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2}$ و این خیلی عجیب بود. جواب

باید ۱، ۲، ۳ و خلاصه رُند درمی‌آمد. این حس در من بود که یک جای کار اشکال داره.

● یاسی‌پور: با این همه، تعجب‌آور است شما در رشته آمار و احتمال تحصیل کرده‌اید.

■ پاشا: از جلسه امتحان که آمدم بیرون، سه‌بار این مسئله را حل کردم و هر سه‌بار گفتم: دو شیش تا می‌شه هجده تا! و همین باعث می‌شد که جواب آن‌طور به‌دست بیاید. اما در امتحان نهایی، در هندسه مخروطات ۲۰ و در هندسه رقومی ترسیمی ۱۹ گرفتم. حالا یک نمره را چرا از دست دادم؟ گفته بودند یک متوازی‌السطوح بسازید که یک ضلع آن AF باشد. اما پلی‌کی سؤال اشکال داشت و من آن را BF خواندم و شکل عوض شد. این‌طور شد که یک نمره از دست دادم و خیلی حسرت خوردم.

● شرقی: استاد اگر اجازه بدهید، بحث را کمی عوض کنیم و من سؤالی بپرسم: آیا شما در آن دوره با مجله یکان هم آشنایی داشتید؟

■ پاشا: بله، با مجله یکان از همان کلاس دهم آشنا شدم. اولین شماره‌ای که خریدم و همیشه به آن رجوع کردم، یکان شماره ۱۱ بود. جلد زردرنگی داشت و مسئله‌های خوبی هم در آن نوشته شده بود. حتی وقتی دانشگاهم تمام شد، من هنوز مشترک مجله یکان بودم.



**احتمال علمی
قیاسی است؛ در
واقع از کل به جزء
می آید در صورتی
که آمار علمی
استقرایی است
و از جزء به کل
می رود**

مجلهٔ یکان ویژه‌نامه‌هایی هم داشت، از جمله ویژه‌نامهٔ شب عید و ویژه‌نامهٔ امتحان نهایی و کنکور و... انتشارات یکان هم کتاب‌های خوبی داشت، از جمله کتاب «هندسهٔ دوایر» پروفیسور **هشترودی** که آن را هم تهیه کرده بودم. الان که این مصاحبه پیش آمد، یاد یکی از نویسندگان یکان، یعنی مرحوم آقای **غیور** افتادم. خدا رحمت کند ایشان را. در مصاحبه‌ای که مجلهٔ رشد ریاضی با ایشان داشت، وقتی از ایشان خواستند خودش را معرفی کند، گفتند: «بنابر آنچه در شناسنامه من نوشته شده، نامم **حسین** و فامیلی من **غیور** و متولد همدان...» من وقتی که این جواب را خواندم، بعد از آن سر کلاس‌ها بارها گفتم که آدمی به نام حسین غیور نبود که داشت جواب می‌داد، این هندسه بود که داشت جواب می‌داد. در کتاب هندسهٔ دوایر، پروفیسور **هشترودی** به آقای **غیور** ارجاع می‌دهد که مثلاً این مسئله را **غیور** این گونه حل کرده است. شخصیت ایشان از همان دوران دبیرستان که می‌شناختمشان تا بعدها که آمدیم توی مجلهٔ رشد و همکار شدیم، برای من بسیار قابل احترام بود.

● **یاسی پور:** ایشان جامع‌الاطراف هم بودند. معلومات اضافه بر هندسه هم داشتند. به لحاظ ادبی و...

● **شرقی:** اصلاً شاعر بودند.

● **یاسی پور:** بله، معلم خود ما بود و هیئت درس می‌داد. یک‌بار از ایشان دربارهٔ کتاب «نصاب‌الصبيان» پرسیدم که کتابی خیلی مهجور و قدیمی است و بیشتر در مکتب‌خانه‌ها تدریس می‌شد. نام مؤلف آن را سؤال کردم. زنگ تفریح بود که پرسیدم و ایشان بلافاصله گفتند: چنین گوید **ابونصر فراهی**: کتاب من بخوان گر علم خواهی، **ابونصر فراهی** قرن هفتمی بود. منظورم این است که آقای **غیور** بسیار جامع‌الاطراف و متواضع بود. اصلاً توی چشم کسی نگاه نمی‌کرد، سرشان پایین بود و این قدر مأخوذ به حیا بود که همیشه وقتی سؤالی از ایشان می‌پرسیدیم، سر پایین و جواب می‌داد. به زبان ساده، معلم بود.

● **شرقی:** آقای دکتر پاشا، آیا شما در دورهٔ دبیرستان آقای **پرویز شهریاری** را می‌شناختید؟

■ **پاشا:** آقای شهریاری را من سال آخر دبیرستان با کتاب «مسابقات اتحاد جماهیر شوروی» شناختم و آن کتاب را هم تهیه کردم. از طریق آن کتاب

با آموزش ریاضی شوروی سابق آشنا شدم و دیدم که واقعاً سخت کار می‌کنند. اگر چه قبلاً هم آن کتاب روسی را که آقای **مظاهری** داشت، دیده بودم و مسئله‌هایش را هم که واقعاً دشوار بود حل کرده بودم.

● **یاسی پور:** برای تغییر فضا، اگر اجازه بدهید من با یک سؤال آن هم در حیطهٔ فلسفهٔ ریاضی شروع کنم سؤال این است که؛ آیا احتمال همان آمار است؟
● **شرقی:** من هم سؤالی نزدیک به این داشتم. آیا آمار و احتمال بخشی از ریاضیات است و یا علمی مستقل است؟

■ **پاشا:** آمار یک شاخه از ریاضیات و یا بخشی از آن است. همان‌طور که جبر و هندسه داریم، آمار هم داریم و در کنار آن احتمال هم داریم. ولی این دو با هم متفاوت‌اند. در استدلال ما یک استدلال قیاسی داریم و یک استدلال استقرایی. احتمال علمی قیاسی است؛ در واقع از کل به جزء می‌آید در صورتی که آمار علمی استقرایی است و از جزء به کل می‌رود.

● **یاسی پور:** چون خیلی خوب پاسخ دادند، جریمه‌شان این است که یک سؤال دیگر هم بکنیم (خنده). سؤال این است که آیا درصدهای احتمال، ذاتی اشیا هستند؟ یعنی ذاتاً این‌ها درصد هستند یا ما این درصدها را به آن‌ها نسبت می‌دهیم؟ در واقع آیا ریاضیات به اشیا این‌ها را داده است، یا خود ذات اشیا این‌ها را دارد؟

■ **پاشا:** حدود پنج سال پیش، کتاب «نظریهٔ احتمال» را نوشتم که انتشارات دانشگاه تربیت معلم آن را به چاپ رساند. اتفاقاً کتاب سال هم شد و کتاب خوبی است؛ چرا تبلیغ نکنیم (خنده). در همین کتاب چند موضوع مشخص می‌شود: اول اینکه پیشامد خاصیت ذاتی یک مجموعه نیست. اگر شما یک زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را در نظر بگیرید، نمی‌توانید بگویید که این ذاتاً یک پیشامد است. در واقع ما می‌گوییم که پیشامد نسبت به یک سیگما میدان تعریف می‌شود. وقتی که سیگما میدان عوض شود، پیشامد هم عوض می‌شود. پس ذاتی نیست.

همین تعریف را برای متغیر تصادفی نیز می‌دهیم که این هم خاصیت ذاتی تابعی که بر فضای نمونه تعریف می‌شود، نیست. احتمال هم تابعی است که خودمان تعریف می‌کنیم. پس این هم نمی‌تواند ذاتی باشد. برای مثال، وقتی یک تاس را می‌اندازیم، شما فضای نمونه‌ای را می‌نویسید {۱، ۲، ...، ۶}. چرا

اگر ما بدانیم که
یک مفهوم چه طور
شکل گرفته است،
یا خاستگاهش
کجا بوده است،
در تفهیمش به
دانش آموزان
کمک می کند.
اینکه بدانیم
مفهومی که
با آن سروکار
داریم، یک دفعه
پدید نیامده و
یک جورهایی
قبلاً با زندگی ما
سروکار داشته
است، به خود ما
هم کمک می کند

توضیح و بوزش

در شماره ۸۳ مجله
(پاییز ۱۳۹۳)
در متن مصاحبه

با استاد محمدعلی شیخان،
چند اشتباه رخ داده بود که به
این وسیله اصلاح می گردد: در
صفحه ۴۲، ستون سوم، سطر
چهارم به جای آقای «گل جان»،
«عیسی حبیب الله خیر»
و در سطر هشتم به جای
«عباس شریفی مقدم»،
«عباس شعری مقدم»
صحیح است.

آزمون‌ها شرکت کردیم. بچه‌های ما، به نسبت، با دو دسته از سؤالات غریبه بودند؛ آمار و احتمال. حالا آمار تاحدی در کتاب‌های دوره دبستان (چهارم و پنجم) آموزش داده می‌شود، ولی احتمال نه. در برنامه درسی جدیدی که کتاب‌هایش به تازگی تألیف شده، از سال دوم بحث احتمال وارد کتاب‌ها شد. امسال نیز در کتاب‌های پایه‌های چهارم و هشتم تألیف شد. من خودم شخصاً در تألیف آن‌ها مسئولیت‌هایی برعهده داشتم.

در برنامه درسی کشورهایی مثل کانادا، احتمال از دوره دبستان وارد کتاب‌های درسی شده است. حالا در اینجا دو سؤال پیش می‌آید: اول اینکه اصلاً به چه صورت باید این درس آموزش داده شود؟ آیا باید فقط آن را به صورت تجربی مطرح کنیم یا استدلال ریاضی را هم باید مطرح کنیم؟ دوم اینکه اصلاً بچه‌ها در این سن، پذیری این مفهوم هستند یا خیر؟

پاشا: به امتحان‌های تیمز اشاره کردید. یاد می‌آید دهه هفتاد، اولین یا دومین باری بود که این امتحانات را برگزار می‌کردند. اوایل دهه هشتاد، من دو دانشجوی کارشناسی ارشد را انتخاب کردم تا روی داده‌های این آزمون کار کنند. من فهرست نمرات را که نگاه می‌کردم، بیشتر صفر می‌دیدم. خیلی تأسف می‌خوردم که چرا این قدر صفر داریم. یعنی بچه‌های ما تا این حد آمادگی ندارند؟!

دیگر اینکه در احتمال آن دیدی که باید باشد، وجود ندارد؛ البته هم در آمار و هم در احتمال. شما خودتان این را بهتر از من می‌دانید که آمار و مدل‌سازی را در کنار درس هندسه قرار داده‌اند و آن را معلم هندسه تدریس می‌کند. حالا می‌دانید چه بلایی بر سر این درس می‌آید؟ دو هفته آخر می‌آیند یک جزوه می‌دهند و همین، تمام شد و رفت. در کلاس‌های بازآموزی، دبیرها از ما می‌پرسیدند: چرا وقت بچه‌ها را می‌گیرید و یک سال به بچه‌ها آمار درس می‌دهید؟ ما این آمار را در ظرف دو هفته به بچه‌ها یاد می‌دهیم. من هم در جواب می‌گفتم در کمتر از نصف روز هم می‌شود اصول رانندگی را یاد داد، اما آیا فرد راننده می‌شود؟

آمار هم به تمرین احتیاج دارد. در صورتی که موقع تدریس تمام این تمرین‌ها و پروژه‌ها را حذف می‌کنند و فقط یک سلسله اصول را یاد می‌دهند. این درس باید یک هویت مستقل داشته باشد و تدریسش از ابتدا شروع بشود تا دانش‌آموز کم‌کم درگیرش شود.

نمی‌نویسید فرد و زوج، یا چرا نمی‌نویسید آمدن عدد اول و غیر اول؟ یعنی لزومی ندارد که حتماً اعداد ۱ تا ۶ را بنویسید. وقتی که ما مثلاً می‌نویسیم عدد کمتر از ۵ یا بیشتر، فضای نمونه‌ای ما دو عضو بیشتر ندارد. بعد سؤال می‌کنیم: احتمال اینکه از این دو حالت عددی کمتر از ۵ بیاید چه قدر است؟ همه می‌گویند ۱. اما دو حالت نیست. پس فضایمان را مناسب‌تر نظر نگرفته‌ایم. بنابراین با توجه به اینکه مسئله‌مان چیست، ما به فضایمان تخصیص احتمال می‌دهیم. پس این درصدها و احتمال‌ها ذات آن پیشامد نیستند.

● یاسی پور: آیا در آموزش ریاضیات، آموزش تاریخ آن هم لازم است؟

پاشا: بله، خیلی هم مهم است. اگر ما بدانیم که یک مفهوم چه طور شکل گرفته است، یا خاستگاهش کجا بوده است، در تفهیمش به دانش‌آموزان کمک می‌کند. اینکه بدانیم مفهومی که با آن سروکار داریم، یک دفعه پدید نیامده و یک جورهایی قبلاً با زندگی ما سروکار داشته است، به خود ما هم کمک می‌کند. بله تاریخ ریاضیات باید گفته بشود و شاگرد باید این داستان را بشنود. خود من وقتی احتمال درس می‌دهم، اگر به میحثی برسم که داستان آن را بدانم، برای دانشجویان بازگو می‌کنم.

● یاسی پور: فلسفه ریاضیات چه طور؟ آن هم باید آموزش داده شود؟

پاشا: خب، باید اول مطلبی بگویم که شاید مستقیماً به این سؤال شما ارتباط پیدا نکند. ما سال آخر دبیرستان درس «منطق و فلسفه» داشتیم. این درس را که خواندم، روی طرز فکر و بینام تأثیر می‌گذاشت و از همان سال به بعد بود که متوجه شدم، دارم جور دیگری فکر می‌کنم. متأسفانه با اینکه درس خوبی بود، آن را حذف کردند. در حالی که از نظر من وجود آن لازم بود. بعدها یکی دو ترم فلسفه علم درس دادم که شامل فلسفه ریاضی هم بود. کلاس پرشور و نشاطی بود که دانشجویان در آن مشارکت خوبی داشتند، فعال بودند، حرف می‌زدند و خلاصه اینکه کلاس زنده‌ای بود.

● امیری: آقای دکتر، من سؤالی دارم که مشخصاً برمی‌گردد به کتاب‌های درسی. چند سالی بود که در پایه چهارم ابتدایی و دوم راهنمایی (هشتم) آزمون‌های تیمز برگزار می‌شد. ما دوبار در این

محاسبه

انتگرال

به کمک مساحت

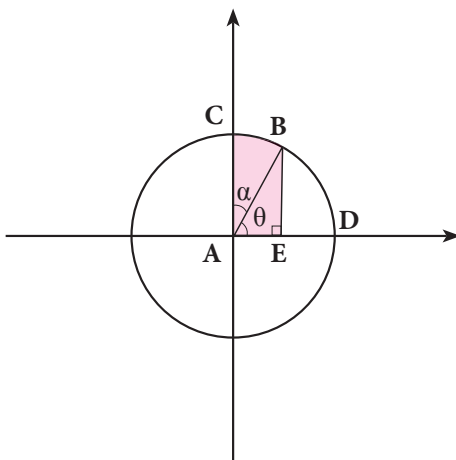
کلیدواژه‌ها: انتگرال، مساحت دایره، تعبیر انتگرال به عنوان مساحت



محمد رحمانی*
دبیر ریاضی از پاکستان

$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad (1)$$

که با به توان ۲ رساندن تساوی به رابطه $x^2 + y^2 = 4$ می‌رسیم که دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ است. با توجه به رابطه (۱)، y عبارتی مثبت است. پس نیم‌دایره بالایی برای آن انتخاب می‌شود. از طرف دیگر، با توجه به حدود تغییرات x ناحیه زیر هاشورزده را برای محاسبه مساحت داریم:



شکل ۱

برای محاسبه مساحت قطاع داریم:

$$AE = 1, \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \angle CAB = \frac{\pi}{6}$$

بنابراین مساحت قطاع (با زاویه $\alpha = \frac{\pi}{6}$) برابر

برای محاسبه انتگرال معین توابع خطی می‌توان از تعبیر آن‌ها به عنوان مساحت استفاده کرد و جواب انتگرال معین را به دست آورد. مثلاً برای محاسبه انتگرال زیر داریم:

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

با توجه به حدود انتگرال‌گیری باید $\frac{1}{4}$ مساحت دایره را برای محاسبه این انتگرال معین به دست آورد:

$$\frac{1}{4} \pi (2)^2 = \pi$$

که شبیه این مثال را در تمرین ۹ صفحه ۲۴۲ کتاب «حساب دیفرانسیل و انتگرال»، چاپ ۱۳۹۱ داریم.

در حالتی که زاویه موردنظر برای محاسبه مساحت قطاع جزء زاویه‌های متعارف مثلثاتی باشد نیز می‌توان این انتگرال را محاسبه کرد که آن را با مثال زیر توضیح می‌دهیم:

مثال ۱. با تعبیر انتگرال به عنوان مساحت، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$$

برای رسم ناحیه انتگرال‌گیری مثال بالا می‌دانیم که تابع زیر علامت انتگرال به صورت زیر است:

برای محاسبه
انتگرال معین
توابع خطی
می توان از تعبیر
آن ها به عنوان
مساحت استفاده
کرد و جواب
انتگرال معین را
به دست آورد

مساحت مثلث OAB عبارت است از:

$$r = 3 \Rightarrow OA = 3, AB = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

بنابراین مساحت مثلث OAB عبارت
است از:

$$\frac{\sqrt{5} \times 2}{2} = \sqrt{5}$$

همچنین برای محاسبه مساحت قطاع OAC

داریم:

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{2}{3}$$

با توجه به شکل، زاویه α برابر است با:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{2}{3}$$

از طرف دیگر، بنا به رابطه $\cos^{-1} \theta + \sin^{-1} \theta = \frac{\pi}{2}$
نتیجه می شود:

$$\sin^{-1} \theta = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \theta$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{2}{3}$$

حال با توجه به فرمول محاسبه مساحت قطاع،

مساحت تشکیل شده توسط زاویه $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ را
محاسبه می کنیم.

$$S = \frac{1}{2} r^2 \alpha = \frac{1}{2} \times 3^2 \times \sin^{-1} \frac{2}{3} = \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{2}{3}$$

بنابراین مساحت کل قسمت هاشورزده

(مجموع مساحت مثلث OAB و قطاع OAC) برابر
است با:

$$S_{\text{کل}} = \sqrt{5} + \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{2}{3}$$

و بنابراین:

$$\int_0^2 \sqrt{9-x^2} dx = \sqrt{5} + \sin^{-1} \frac{2}{3}$$

است با:

$$S_{\text{CAB}} = \frac{1}{2} r^2 \alpha = \frac{1}{2} (2)^2 \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

از طرف دیگر، برای محاسبه مساحت مثلث
ABE داریم:

$$BE = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{ABE}} = \frac{1}{2} \sqrt{3} (1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

که با جمع مساحت قطاع و مساحت مثلث،
مساحت کل و جواب انتگرال را به صورت زیر داریم:

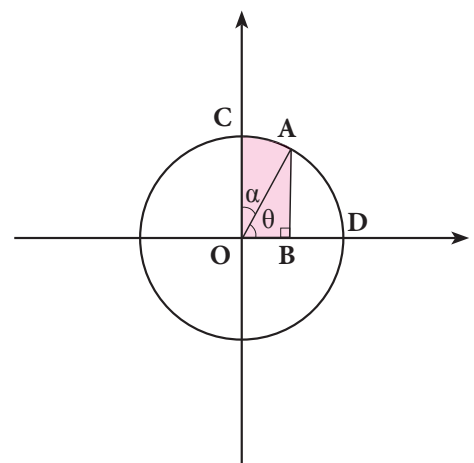
$$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

البته این انتگرال را با تغییر متغیر $x = 2 \sin \theta$ نیز
می توان حل کرد. که این تغییر متغیر جزو بحث های
کتاب دیفرانسیل نیست. اما زمانی که زاویه مورد نظر
برای محاسبه مساحت قطاع جزو زاویه های متعارف
مثلثاتی نباشد می توان این انتگرال را نیز محاسبه
کرد که آن را با مثال زیر توضیح می دهیم:

مثال ۲. با تعبیر انتگرال به عنوان مساحت، انتگرال
زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^2 \sqrt{9-x^2} dx$$

با رسم ناحیه انتگرال گیری، ناحیه هاشورزده را
با پاره خط AB به یک مثلث و یک قطاع تبدیل
می کنیم:



شکل ۲

تعمیم یک مسئله در هندسه

اشاره

درس هندسه به خاطر شهودی بودن مفاهیم آن، در مقایسه با درس‌های دیگر ریاضی، از جایگاه خاصی در آموزش ریاضی برخوردار است؛ از جمله در کشف بسیاری از ویژگی‌های هندسی و حتی تعمیم بسیاری از ویژگی‌های پنهان شکل‌های هندسی کارآمد است. از طرف دیگر، بسیاری از مفاهیم جبری، ترکیبیاتی و غیره را می‌توان به کمک اشکال هندسی تبیین کرد و بسیاری از خواص جبری و ترکیبیاتی را به کمک اشکال هندسی حدس زد و در بعضی موارد، اثباتی هندسی برای آن‌ها ارائه داد.

در مقاله «یک مسئله و چند راه حل» به قلم مهدی قربانی که در «رشد آموزش ریاضی» (زمستان ۱۳۸۳) به چاپ رسیده، یک مسئله هندسی مربوط به تعیین مساحت ناحیه داخل یک مربع به پنج روش حل شده که در تمام روش‌ها، تقارن موجود در شکل مورد استفاده قرار گرفته است. با این تفاوت که در سه راه حل اول از روش هندسی، در راه حل چهارم از روش جبری حل دستگاه سه معادله و سه مجهول، و در راه حل پنجم از مبحث انتگرال در حسابان استفاده شده است.

در اینجا ما به کمک روش ساده‌ای این مسئله را حل می‌کنیم. این روش ما را قادر می‌سازد که این مسئله را به هر چندضلعی منتظم، و نه فقط مربع، تعمیم دهیم. تعمیم این مسئله برای هر n ضلعی منتظم، رفتار غیرقابل پیش‌بینی برای حالت‌های $n=3$ و $n=6$ را روشن می‌سازد. چنانچه برای $n=3$ ، مساحت ناحیه موردنظر بیش از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است و برای $n=6$ ، مساحت ناحیه موردنظر صفر است. لازم به ذکر است، راه حلی که در اینجا داده می‌شود به‌طور اساسی به بررسی حالت $n=3$ بستگی دارد.



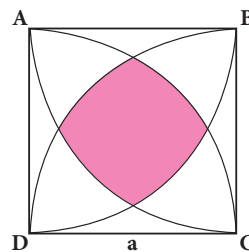
مرتضی بیات*
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد زنجان



زهرا خاتمی
دبیر ریاضی
ناحیه یک زنجان

کلیدواژه‌ها: تقارن، تعمیم مسئله هندسه، مساحت n ضلعی منتظم

مسئله ۱. در شکل ۱ چهارضلعی ABCD مربع است. به مرکز هر یک از رأس‌های مربع، ربع دایره‌هایی، به شعاع a ، ضلع مربع، رسم شده است. مساحت ناحیه هاشورخورده را تعیین کنید.



شکل ۱

قبل از آنکه به حل این مسئله بپردازیم، به حل مسئله‌ای در مورد مثلث متساوی‌الاضلاع می‌پردازیم. قابل ذکر است که این مسئله یک مسئله درون مسئله برای حل مسئله ۱ و نیز حالت n ضلعی منتظم خواهد بود.

مسئله ۲ (مسئله درون مسئله). در شکل ۲، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. به مرکز C، کمانی به شعاع a ، رسم می‌کنیم. کمان از دو رأس مثلث می‌گذرد. مساحت ناحیه هاشورخورده را تعیین کنید.

بسیاری از مفاهیم
جبری، ترکیبیاتی
و غیره را می توان
به کمک اشکال
هندسی تبیین
کرد و بسیاری
از خواص جبری
و ترکیبیاتی را
به کمک اشکال
هندسی حدس زد
و در بعضی موارد،
اثباتی هندسی
برای آن ها ارائه
داد

چون $ED=DC=CE=a$ ، پس مثلث DEC یک مثلث متساوی الاضلاع است و زاویه های EDC و ECD برابر 60° هستند. برای به دست آوردن مساحت مثلث منحنی الضلع CEB، از مساحت قطاع ECB مساحت «قطعه نقطه نشان شده» را کم می کنیم. حال طبق مسئله ۲، مساحت قطعه نقطه نشان شده به دست می آید، بنابراین:

$$-(\text{مساحت قطاع ECB}) = (\text{مساحت مثلث منحنی الضلع CEB})$$

$$= \frac{a^2 \pi}{12} - a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

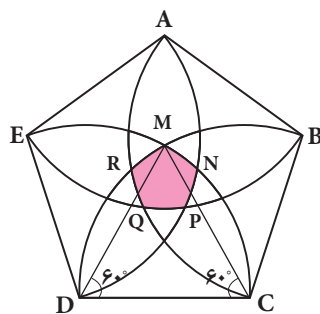
(مساحت قطعه نقطه نشان شده)

پس:

$$(\text{مساحت ناحیه EFGH}) = a^2 - 4 \left[\frac{a^2 \pi}{12} - a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right]$$

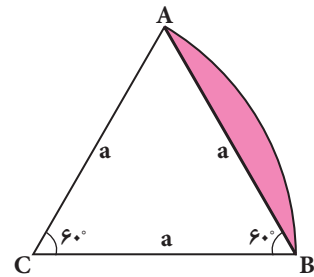
اینک به جای چهار ضلعی مربع در مسئله بالا، یک پنج ضلعی را در نظر می گیریم و به حل مسئله ۳ می پردازیم.

مسئله ۳. در شکل ۵، ABCDE یک پنج ضلعی منتظم است. به مرکز هر یک از رأس های پنج ضلعی کمانی به شعاع a ، اندازه ضلع پنج ضلعی، رسم می کنیم. مساحت ناحیه هاشور خورده را تعیین کنید.



شکل ۵

حل مسئله ۳. مشابه حل مسئله ۱، برای به دست آوردن مساحت MNPQR، باید از مساحت پنج ضلعی منتظم، مساحت مثلث های منحنی الضلع AQE، EPD، CMB، BRA، DNC را کم کنیم. در شکل ۵، رأس M را با پاره خط های MC و MD به ترتیب

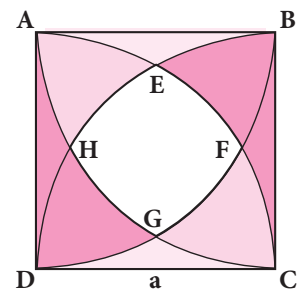


شکل ۲

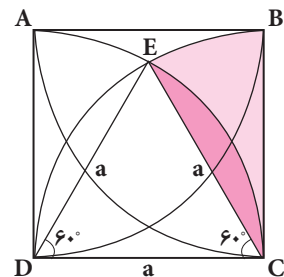
حل: مساحت ناحیه رنگ شده برابر است، با تفاضل مساحت قطاع از مساحت مثلث متساوی الاضلاع؛ بنابراین داریم:

$$(\text{مساحت قطعه هاشور خورده}) = a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

حل مسئله ۱. شکل ۳ را در نظر می گیریم. اگر از مساحت مربع ABCD مساحت چهار مثلث منحنی الضلع CEB، BHA، AGD و DFC را کم کنیم، مساحت چهار ضلعی منحنی الضلع EFGH به دست می آید. بنابراین کافی است تنها مساحت یک مثلث منحنی الضلع مانند CEB را به دست آوریم. بدین منظور شکل ۴ را در نظر می گیریم.



شکل ۳



شکل ۴

به C و D وصل می‌کنیم، بنابراین داریم:

(مساحت قطعه MCN) =

(مساحت مثلث MDC) - (مساحت قطاع MDC)

$$= \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

هر زاویه یک پنج‌ضلعی (مثلاً $\angle DCB$) برابر $\pi - \frac{2\pi}{5}$ است که در آن همان زاویه مرکزی مقابل به هر ضلع پنج‌ضلعی در داخل دایره محاطی است.

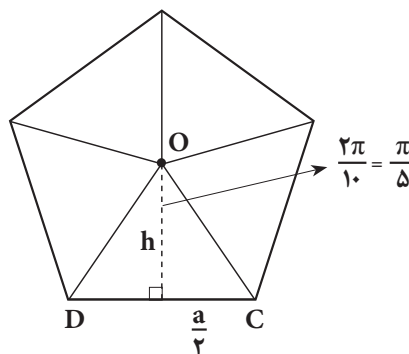
(مساحت مثلث منحنی الضلع CMB) =

(مساحت قطعه MCN) - (مساحت قطاع MCB)

$$= \frac{a^2}{2} \left[\pi - \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3} \right] - a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

اینک برای به‌دست آوردن مساحت ناحیه MNPQR، از مساحت پنج‌ضلعی، پنج برابر مساحت مثلث منحنی الضلع CMB را کم می‌کنیم. مساحت یک پنج‌ضلعی به ضلع a از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$(مساحت پنج‌ضلعی ABCDE) = 5 \times \frac{a^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{5}\right)$$



شکل ۶

(زیرا با توجه به شکل ۶ داریم:

$$h = \frac{a}{2} \cot\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

و نیز:

$$S(\triangle ODC) = \frac{a}{2} h = \frac{a^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

اینک خواهیم داشت:

(مساحت ناحیه منحنی الضلع MNPQR)

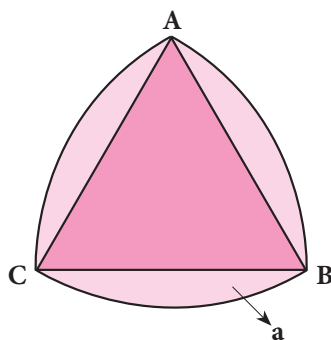
$$= 5 \left[\frac{a^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) \right] - 5 \left[\frac{a^2}{2} \left(\pi - \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3} \right) - a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right]$$

حال برای n ضلعی منتظم، مشابه آنچه که برای یک پنج‌ضلعی انجام دادیم، تنها با تغییر عدد پنج به n به دستور کلی زیر می‌رسیم (امتحان کنید!):

S=

$$n \left[\frac{a^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \right] - n \left[\frac{a^2}{2} \left(\pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right) - a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right]$$

با توجه به دستور به‌دست آمده ملاحظه می‌شود، در حالت n=6 مقدار عبارت بالا برابر صفر است. یعنی هیچ ناحیه هاشورخورده‌ای به‌وجود نمی‌آید. در ضمن در حالت n=3، مقدار این عبارت بیش از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است. مطابق شکل ۷ این امر کاملاً قابل توجیه است.



شکل ۷

● **معمای پنجم:** در ادامه همان جملات، A گفت: «C اهریمنی است.» حالا بگویید جارچی جزیره کیست؟

● **معمای ششم:** بار دیگر سه نفر دیگر که آن‌ها را هم A و B و C می‌نامیم، به دادگاه رفتند و قاضی می‌خواست بداند کدام یک از آن‌ها اهریمنی و کدام یک مزدایی است. آن‌ها جملات زیر را در دادگاه گفتند:

A: دقیقاً دو تا از ما مزدایی هستیم.
B: نه این طور نیست، فقط یکی از ما مزدایی است.
C: درست است!
کدام یک از آن‌ها مزدایی و کدام یک اهریمنی بود؟

● **معمای هفتم:** این بار ۱۰ نفر به دادگاه رفتند! آن‌ها را $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ می‌نامیم. آن‌ها جملات زیر را گفتند:

A_1 : دقیقاً یکی از ما اهریمنی است.
 A_2 : دقیقاً دو نفر از ما اهریمنی هستند.
 A_3 : دقیقاً سه نفر از ما اهریمنی هستند.
.
.
.
 A_9 : دقیقاً نه نفر از ما اهریمنی هستند.
 A_{10} : همه ما اهریمنی هستیم.
هر یک از این افراد چگونه بودند؟ اهریمنی یا مزدایی؟

پرویز گفت: «من ازدواج نکرده‌ام.»
حالا چه می‌توان گفت؟ آیا بهمن ازدواج کرده است؟ پرویز چه طور؟

● **معمای سوم:** قاضی این جزیره عجیب، یک مزدایی خردمند بود. روزی مردی را که متهم به دزدیدن یک شتر بود پیش او آوردند. قاضی از آن مرد پرسید: «آیا این درست است که شما یک بار گفته‌اید که هرگز شتر ندیده‌اید؟»

متهم پاسخ داد: «بله.»
قاضی دوباره از او پرسید: «آیا شما تا به حال گفته‌اید که آن را دزدیده‌اید؟»
و متهم به این سؤال پاسخ بله (یا خیر) داد. بعد از کمی تفکر قاضی توانست نتیجه بگیرد که متهم بی‌گناه (یا مجرم) است.
متهم بی‌گناه بود یا مجرم؟

● **معمای چهارم:** جزیره یک و فقط یک جارچی داشت و قاضی می‌خواست بداند این جارچی مزدایی است یا اهریمنی. از بین اشخاص محتمل، سه نفر، که آن‌ها را A، B و C می‌نامیم، احضار شدند و در دادگاه این سخنان را گفتند:

A: من جارچی جزیره نیستم؛
B: جارچی جزیره یک اهریمنی است؛
C: ما هر سه نفر اهریمنی هستیم.
آیا جارچی جزیره مزدایی بود یا اهریمنی؟ آیا قاضی با این اطلاعات توانست جارچی را شناسایی کند؟

ایستگاه دوم: معماهایی از سرزمین ایران باستان!

نوروز باستانی در راه است. به این مناسبت، ما برایتان معماهایی از یک سرزمین باستانی داریم. حتماً می‌دانید که ایرانیان باستان مردمانی یکتاپرست بودند و *هور/مزد* را منشأ خیر، و اهریمن یا همان شیطان را منشأ شر می‌دانستند. در جزیره‌ای دورافتاده از این سرزمین، دو دسته مردم زندگی می‌کردند: مزداییان و اهریمنیان! مزداییان راستگو و اهریمنیان دروغگو بودند. همه اعضای یک خانواده هم از یک نوع بودند؛ اهریمنی یا مزدایی. حالا چند معما از مردم این جزیره دورافتاده داریم.

● **معمای اول:** از دو برادر به نام‌های بهمن و پرویز درباره ازدواجشان سؤال شد.
بهمن گفت: «ما هر دو ازدواج کرده‌ایم.»
پرویز گفت: «من ازدواج نکرده‌ام.»
آیا بهمن ازدواج کرده است؟ پرویز چه طور؟

● **معمای دوم:** یک روایت دیگر از همین داستان وجود دارد! مطابق این روایت، بهمن گفت: «ما هر دو ازدواج کرده‌ایم یا اینکه هر دو ازدواج نکرده‌ایم.»



آموزش ریاضی

رشد

شماره‌های ۲۵ تا ۲۸

کلیدواژه‌ها: عدد اویلر، نپر، گروه و تقارن، حدس گلدباخ، اصول اقلیدس، المپiad بین‌المللی ریاضی

در گشت و گذارمان در مجله رشد آموزش ریاضی، به شماره ۲۵، بهار ۱۳۶۹ سال هفتم رسیده‌ایم. بهای این شماره همچنان ۱۰۰ ریال است و صفحه ۲ جلد آن با تصویری از دانش‌آموزان المپiad ریاضی در حال امتحان مرحله نهایی مزین شده است.

بعضی از مقاله‌های این شماره عبارتند از: گروه تقارن، یادداشتی در مورد مشتق بدون حد، خطاها، معرفی عدد e ، مباحثی درباره هندسه، و تازه‌های کتب و نشریات ریاضی. لازم به ذکر است که در نقل مطالب این مقالات، آن‌ها را بدون ویرایش، یا ویرایش بسیار جزئی، می‌آوریم. در مقاله معرفی عدد e از جواد لاک‌ی چنین آمده است:

«عدد e یکی از اعداد مهم ریاضی، هم‌ردیف عدد π است. اهمیت آن نه فقط در ریاضیات محض است، بلکه در ریاضیات کاربردی نیز نقش حیاتی دارد. این عدد اولین بار به‌وسیله لئونارد اویلر^۱ کشف شده است. نمادی که برای این عدد به کار رفته، از اویلر است، و آن حرف اول کلمه «Euler» می‌باشد. او پیشنهاد نمود که این عدد به‌عنوان مبنای لگاریتم به کار رود. از سال ۱۷۲۸ به بعد، زمانی که اویلر حدود ۲۰ سال عمر داشت، این عدد و نماد آن را در مقاله‌های منتشر نشده خود به کار می‌برد. البته امروزه این عدد را به‌عنوان مبنای لگاریتم نپر^۲ (یا طبیعی) به کار می‌برند، و انتخاب صفت [۱] نپر، برای آن، تنها بدین خاطر است که جان نپر (۱۶۱۷-۱۵۵۰) اولین فردی بود که به اختراع

تألیف شده است. کتاب اصول که از بزرگ‌ترین کشفیات در تاریخ علم به‌شمار می‌آید، شامل پنج اصل موضوع و هشت اصل متعارفی و تعدادی تعریف و قرارداد و قضایاست. اصول پنج‌گانه آن عبارتند از:

۱. از دو نقطه تنها یک خط راست می‌گذرد؛
۲. هر پاره‌خط را می‌توان از هر یک از دو طرف به اندازه پاره‌خط معلومی امتداد داد؛
۳. به مرکز هر نقطه می‌توان دایره‌ای رسم کرد که شعاع آن مساوی پاره‌خط معلومی باشد؛
۴. همه زاویه‌های قائمه قابل انطباق بر یکدیگرند؛
۵. اگر خطی دو خط دیگر را قطع کند و با آن‌ها دو زاویه بسازد، چنانچه مجموعشان کمتر از دو قائمه باشد، آن گاه که دو خط مفروض را از دو طرف امتداد دهیم، در طرفی که زاویه‌های کوچک‌تر از دو قائمه واقع شده‌اند، متقاطع می‌شوند.

در تلاش و کوششی که بعدها برای اثبات اصل پنجم به کار رفت، برای این اصل، هم‌ارزهایی پیدا شده که یکی از آن‌ها همان اصلی است که امروزه به جای اصل پنجم به کار می‌رود؛ یعنی: از نقطه‌ای واقع در خارج خط، تنها یک خط می‌توان موازی با آن رسم کرد.

تبصره: از دانشمندان ایرانی، حکیم عمر خیام نیشابوری اولین کسی بود که برای اثبات اصل پنجم اقدام کرد.

یکی از بخش‌های جالب این شماره بخش «تازه‌های کتب و نشریات ریاضی» است. در این بخش از سه منبع نام برده شده است که عبارتند از:

۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا، از سری کتب ریاضیات پیش‌دانشگاهی - ۲۹، گردآوری و حل توسط آرتینو، گالگیون و

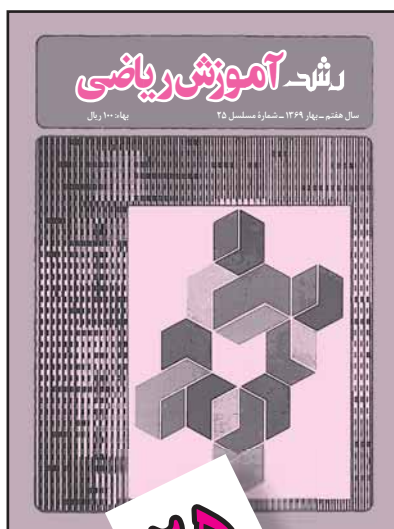
[۱] لگاریتم پرداخت. نپر بحث خود را درباره لگاریتم‌ها در سال ۱۶۱۴، در رساله‌ای تحت عنوان «شرح قانون شگفت‌انگیز لگاریتم‌ها»، شروع و منتشر کرد. این اثر حاوی جدولی است که لگاریتم سینوس زوایا را برای دقیقه‌های متوالی یک کمان به‌دست می‌دهد. از بین لگاریتم‌ها، با مبنای مختلف، آن‌هایی که بیش از دیگران اهمیت دارند، یکی با مبنای ۱۰ است که به لگاریتم معمولی^۲ معروف است، و دیگری با مبنای عدد

$$e = 2/7182818...$$

است که به لگاریتم طبیعی^۴ (یا لگاریتم نپری) مشهور است.

در مقاله «مباحثی در هندسه» از حسین غیور آمده است:

«هندسه اقلیدسی به نام «اصول»، نخستین دانش با روش اصل موضوعی است که در ۳۰۰ سال قبل از میلاد به‌وسیله اقلیدس تدوین و



۲۵

شل، ترجمه عبدالحسین مصحفی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۰۰۰ ریال.

۲. *آشنایی با نظریه حلقه‌ها*، از منصور معتمدی، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۶۷، ۱۰۵۰ ریال.

۳. شماره ۱۷ مجله «پژوهش در علم و صنعت»، از انتشارات سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی ایران.

سردبیر شماره ۲۵، دکتر محمدحسن بیژن‌زاده و مدیر داخلی آن، میرزا جلیلی است. در مقاله گزارش بیست و یکمین کنفرانس ریاضی کشور به قلم سردبیر چنین می‌خوانیم: «بیست و یکمین کنفرانس ریاضی کشور از تاریخ ۲۲ لغایت ۲۶ اسفندماه ۱۳۶۸ در دانشگاه اصفهان برگزار گردید. کنفرانس سالانه ریاضی کشور بزرگ‌ترین حادثه ریاضی است که طی یک سال در کشور اتفاق می‌افتد. در این کنفرانس علمی بیش از ۱۰۰۰ نفر از اساتید و دبیران ریاضی کشور و ۱۸ تن از ریاضی‌دانان و اساتید خارجی از کشورهای ژاپن، فرانسه، شوروی، انگلستان، آمریکا، آلمان، اتریش، هند و پاکستان شرکت داشتند. جلسه افتتاحیه کنفرانس باشکوه و زیبایی خاصی تشکیل شد که ضمن آن ریاست محترم دانشگاه اصفهان، آقای دکتر رزمجو و وزیر محترم فرهنگ و آموزش عالی، برادر دکتر مصطفی معین، در اهمیت ریاضیات و سهم ریاضی‌دانان اسلامی در بسط و گسترش این علم سخنانی ایراد کردند.» در مقاله «گروه و تقارن» از دکتر م. ر. درفشه می‌خوانیم:

«یکی از مهم‌ترین مفاهیم در علوم، به‌خصوص بیولوژی، شیمی، فیزیک و ریاضیات، مفهوم تقارن است. این مفهوم برای هنرمندان هنرهای زیبا نیز یکی از مفاهیم اساسی است. معمولاً همراه این مفهوم کلمه متقارن نیز آورده می‌شود. بیشتر اشخاص شکلی را متقارن می‌نامند که خوش‌ترکیب و دارای تعادل باشد. به عبارت دیگر، شکلی را متقارن می‌نامند که دارای محور تقارن یا صفحه تقارن باشد. در صورتی که اگر به تعریف این مفهوم ریاضی که در زیر می‌آید توجه کنیم، چنین نیست. با وجود این، اشکالی که از تقارن‌های بیشتری برخوردار باشند، بیشتر زیبا و خوش‌ترکیب به نظر می‌آیند. نقش‌هایی که روی ظروف به‌جا مانده از عهد باستان دیده می‌شوند، و یا مجسمه‌های بناهای

تاریخی و یا نقش و نگارهایی که روی دیوارهای این بناها حک شده‌اند، همگی بیانگر این نکته است که بشر از قرن‌ها پیش با این مفهوم آشنا بوده است و هنرمندان اهمیت آن را درک کرده‌اند.

یکی از اشیای متقارن که بیشتر اشخاص آن را می‌شناسند، بدن انسان است. اگر صفحه‌ای را در نظر بگیرید که از روبه‌رو از وسط بدن انسان گذشته باشد، آن‌گاه بدن انسان به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود. تساوی به این معناست که اگر به جای صفحه یک آینه m قرار دهیم، آن‌گاه تصویر یکی از این قسمت‌ها در m درست مساوی قسمت دیگر است. یعنی تصویر دست چپ دست راست می‌شود و برعکس. در واقع تساوی که ما آن را تساوی نسبی یا قابلیت انطباق می‌نامیم، اساس تعریف تقارن ریاضی است. تقارن مفهومی هندسی است که وارد جبر شده است. در اینجا ترجیحاً تقارن را برای اشکال هندسی تعریف می‌کنیم و ارتباط آن را با گروه‌ها بیان می‌نماییم.»

مطالب دیگر مجله عمدتاً در مورد مسائل و حل آن‌هاست. البته مجله/سامی خوانندگانی که حل مسائل ۲۳ و سامی همکاران و دانش‌آموزان را که حل صحیح مسائل ۲۲ و شماره‌های قبل را فرستاده‌اند، آورده است.

شماره ۲۶ مجله در تابستان ۱۳۶۹ انتشار یافته است. اعضای هیئت تحریریه عبارت بوده‌اند از دکتر اسماعیل بابلیان، ابراهیم دارابی، حسین غیور، جواد لاهی، دکتر علیرضا مدقالچی، میرزا جلیلی، دکتر محمدحسن بیژن‌زاده و محمود نصیری.

در پیش‌گفتار این شماره مقاله‌ای در مورد نقد مطالب شش ساله مجله به قلم آقای امیرکبر مجدآبادنو نوشته شده است که در آن به‌طور مختصر چنین می‌خوانیم:

«هیئت تحریریه مجله، ضمن تشکر از آقای مجدآبادنو، مراتب خوش‌حالی خود را از اینکه نقد و بررسی در مجموع منصفانه و ماهرانه بوده است، ابراز داشته‌اند. در حاشیه این امر نکاتی ملحوظ است که ذیلاً به اختصار یادآوری می‌گردد.

نقد و بررسی منصفانه نوشتارها، کتب تألیفی و ترجمه‌ای، و مجلات علمی امری است که به‌خودی خود نشانه‌ای از رشد تعالی یک

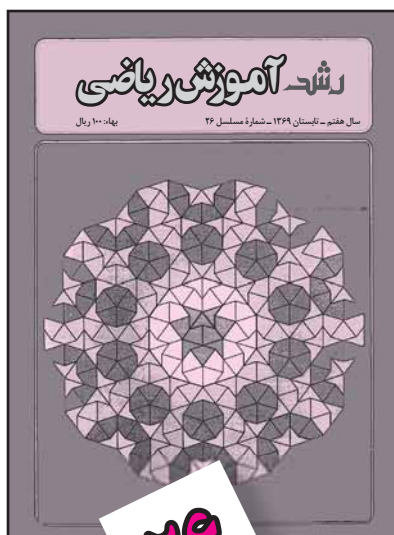
جامعه سالم فرهنگی و پویا می‌باشد. در دنیای پرتکاپوی علم، نه‌تنها این مهم امری عادی و پذیرفتنی است، بلکه در اغلب موارد برای بهتر عرضه کردن محتوای کتب و مقالات تخصصی، خاصه در ریاضیات، بیشتر مجلات علمی بخشی از کار خود را به نقد و بررسی اختصاص داده‌اند و برخی نیز منحصر به انتشار نقد و بررسی‌های انجام شده در مورد مقالات علمی تازه منتشره، مشغول‌اند.»

این شماره با «تدریس نظریه اعداد به روش دیگر» از جواد لاهی آغاز می‌شود که در آن می‌خوانیم:

«قضیه اصلی علم حساب ثابت می‌کند که اعداد اول، به انضمام عمل ضرب، عناصر سازهای برای اعداد طبیعی نایک است و هر عدد طبیعی نایک را می‌توان به کمک اعداد اول و عمل ضرب تولید کرد. هاردی گفته‌ای نزدیک بدین مضمون دارد که طبیعی‌ترین عملی که برای اعداد صحیح مثبت می‌توان تعریف کرد، عمل ضرب است، نه جمع و تفریق و به همین جهت است که مسائلی که در نظریه اعداد مطرح می‌شوند و به نحوی در آن‌ها عمل جمع و یا تفریق به کار رفته است، از مسائل مشکل نظریه اعدادند. نمونه‌ای از این نوع مسائل «قضیه بزرگ فرما» و «حدس گولدباخ» است. گولدباخ در یکی از نامه‌های خود به اوپلر که در سال ۱۷۴۲ نوشت، دو حدس به‌صورت زیر عرضه کرد:

۱. هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ حاصل جمع دو عدد اول است.

۲. هر عدد صحیح بزرگ‌تر از ۵ مجموع سه عدد



۲۹

اول است.

همچنین، احکام (۱) و (۲) با یکدیگر معادل اند. اگرچه صورت احکام فوق ساده است، ولی هنوز به عنوان مسئله‌های باز در قلمروی ریاضیات مطرح‌اند.

قضیه اصلی علم حساب مجموعه اعداد صحیح را به سه دسته کاملاً متمایز تقسیم می‌کند:

مقاله «اعداد مختلط» با این جملات آغاز می‌شود:

«بتدایی ترین نوع عدد، اعداد طبیعی هستند که کودکان آن‌ها را برای شمارش اشیاء یاد می‌گیرند. کوشش برای اینکه عمل تفریق، یعنی حل معادله $x+a=b$ نسبت به x وقتی که a و b معلوم‌اند، میسر باشد، به معرفی صفر و اعداد منفی منجر می‌شود. در این صورت مجموعه اعداد صحیح «...، ۱، ۰، -۱، -۲، ...» ساخته می‌شود. وقتی می‌خواهیم عمل تقسیم را انجام دهیم، باید معادله $ax=b$ را که در آن a و b معلوم و a مخالف صفر است، حل کنیم. برای اینکه حل این معادله در تمام حالات ممکن باشد، احتیاج به معرفی اعداد گویا (کسرها) داریم. این اعداد را با نماد $\frac{b}{a}$ که در آن a و b صحیح و $a \neq 0$ ، نشان می‌دهیم.

اکنون چهار عمل اصلی حساب، یعنی اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم (به جز تقسیم بر صفر) قابل استفاده هستند.

اعداد گویا تاحدودی نیاز ما را در مسائل ابتدایی حساب برطرف می‌کند، اما باز برای حل معادله $x^2=2$ دچار مشکل خواهیم شد. زیرا می‌توانیم ثابت کنیم که عدد $\sqrt{2}$ را نمی‌توان به صورت $\frac{p}{q}$ که در آن p و q صحیح باشند، نوشت. بنابراین این نوع اعداد، گویا نیستند. این اعداد را «کنگ» می‌نامیم. با اضافه کردن این اعداد به مجموعه اعداد گویا، مجموعه اعداد حقیقی را داریم.

مقاله «مسئله حل کردن در برنامه ریاضی (۱)» با پیشنهاداتی برای مسئله حل کردن آغاز می‌شود. پیشنهاداتی که در آن آمده از این قرار است:

«روش صحیحی جهت حل مسئله وجود ندارد. خیلی باید با شهامت بود، تا راه یا راه‌هایی برای بررسی مسائل پیشنهاد کرد. تعداد راه‌های خوب و مؤثر برای یاد دادن تفکر ریاضی برابر با تعداد معلمین خوب است.

علاوه بر این، روش‌هایی که در یک کلاس به کار گرفته می‌شود نیز یک مسئله شخصی است. آنچه برای یک معلم کارایی دارد، شاید برای یک معلم دیگر قابل استفاده نباشد و یا برای استفاده از آن باید مورد بازنگری قرار داده شود. پیشنهادات زیر با توجه به این واقعیت‌ها تنظیم می‌شوند. این پیشنهادات کارایی خوبی در کلاس‌های مختلف داشته است. خواهش این است که این پیشنهادات را مثل پیشنهادهای یک همکار نزدیک مورد بررسی قرار دهید. سعی کنید آن‌هایی را که به نظرتان درست و مناسب می‌آیند، آزمایش کرده سپس آن‌ها را طوری طراحی نمایید که به راحتی بتوانید با آن‌ها کار کنید

الف. پیشینه و منطق اساسی
اختلاف زیادی بین راهی که ما در ریاضی به کار می‌بریم و راهی که دانش‌آموزان آن را می‌بینند، وجود دارد. کار ریاضی یک کار اساسی است و آن پیشروی در مراحل عمل، کشف و رسیدن به درک طبیعت خاص هدف‌ها و دستگاه‌های ریاضی است. ما ابتدا به یک مطلب ریاضی برمی‌خوریم. همان‌طور که در آن غور می‌کنیم، این تصور در ما رشد پیدا می‌کند و این گمان تقویت می‌شود که در آن چیز درستی باید وجود داشته باشد. با مثال‌هایی آن را آزمایش می‌کنیم و به جست‌وجوی مثال نقض می‌پردازیم. سعی داریم که درک کنیم که چرا آن چیز باید درست باشد. این کوشش‌ها ممکن است موفق یا ناموفق باشد. در شروع ممکن است بارها اشتباه کنیم، راه‌های عوضی برویم، کم‌حوصله و مأیوس شویم و یا بازنگری‌های پیگیر و موفقی داشته باشیم تا اینکه به نتیجه برسیم.

این مقاله از انتشارات «انجمن ریاضی آمریکا» و ترجمه میرزا جلیلی است و ما خواننده را به مطالعه کل آن سفارش می‌کنیم.

مقاله «مطالعی راجع به هندسه» از حسین غیور ادامه مطلب شماره قبل در این مورد است. این مقاله با ایراد خیام آغاز می‌شود و به این ترتیب است:

«ایراد خیام و خواجه نصیرالدین طوسی به اصل پنجم اقلیدس

هندسه اقلیدسی در قرون اولیه اسلامی همراه با فلسفه و سایر علوم از یونانی به عربی

ترجمه شد و از قرن سوم تا هشتم هجری قمری مورد توجه شدید دانشمندان ایرانی که مؤلفات خود را به زبان عربی می‌نوشتند، بوده است.

شرح ما اشکل من مصادر اقلیدس تألیف حکیم عمر خیام، رساله‌ای است که در آن این دانشمند اولین بار (لاقل در ایران) به اصل پنجم اقلیدس ایراد می‌گیرد که چرا اقلیدس این اصل را بدیهی فرض کرده، در صورتی که برای احکامی بدیهی‌تر از آن اقامه برهان نموده است. خود [خیام] برای اثبات این اصل، هشت قضیه مطرح می‌کند و در اثبات قضیه هشتم (دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند)، برهان فلسفی می‌آورد.

دو قرن بعد، خواجه نصیرالدین طوسی ایراد خیام را به اقلیدس می‌پذیرد و می‌گوید خیام برای اثبات قضیه هشتم دلیل فلسفی آورده است، در صورتی که باید برهان آن هندسی، و متکی به چهار اصل قبلی کتاب اقلیدس باشد؛ و خود [خواجه نصیر] برای اثبات اصل پنجم برهانی اقامه می‌کند که بعدها مورد قبول واقع نمی‌شود. خواجه نصیرالدین طوسی از حکما و ریاضی‌دانان بزرگ قرن هفتم هجری قمری است که کتاب تحریر اقلیدس او که به زبان عربی نوشته شده، از جمله کارهای بزرگ ایرانیان در این رشته است...

شک خیام و نوشته‌های خواجه نصیرالدین درباره اصل پنجم در زمان‌های بعد ادامه پیدا می‌کند تا در قرن نوزدهم منتهی به کارهای گاوس و پیدایش فضاها و هندسه‌های لباچفسکی و ریمانی می‌شود.

مقاله «تعریف عدد e به کمک اصل تمامیت (کمال)» از جواد لاکتی در مورد عدد e چنین آورده است:

«مقدمه: در شماره قبل، تحت عنوان معرفی عدد e، به روش مقدماتی، این عدد را تعریف کردیم. در اینجا می‌خواهیم به روشی دیگر و با مقدمات لازم، به معرفی این عدد بپردازیم. اگرچه برای بیان چنین مقدماتی نیاز به مقالات جداگانه است، ولی به خاطر کوتاهی مطلب و رسیدن به بیان اصلی که همان معرفی عدد e است، فهرست‌وار از مفاهیم ارائه شده می‌گذریم. ۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی با نسبت کوچک‌تری، یعنی «<» باشد. این نسبت مجموعه A را مرتب می‌کند، به گونه‌ای که هر دو نقطه متمایز آن مقایسه‌پذیرند. یعنی اگر

x و y دو نقطه متمایز A باشند، آن گاه $x < y$ یا $y < x$. همین موضوع می تواند مبنای تعریف ذیل باشد.

۱.۱ تعریف: فرض کنید که A زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی باشد. در این صورت: **الف.** عدد حقیقی a را یک کران بالای A خوانیم در صورتی که، به ازای هر x از A داشته باشیم: $x \leq a$. اگر چنین a ای موجود نباشد، این مجموعه را از بالا بیکران خوانیم. **ب.** عدد b را یک کران پایین A خوانیم در صورتی که، به ازای هر x از A داشته باشیم: $b \leq x$. اگر چنین b ای موجود نباشد، این مجموعه را از پایین بیکران خوانیم.

ت. مجموعه A را کران دار خوانیم در صورتی که از پایین و بالا کران دار باشد. در غیر این صورت، A را بیکران می خوانیم. اگر مجموعه ای بیکران باشد، این مجموعه از بالا یا پایین کرانی ندارد. یعنی اگر از بالا (از پایین) بیکران باشد، آن گاه به ازای هر عدد حقیقی a ، A عضو بزرگتر از آن (کوچکتر از آن) دارد.

باقی مطالب مجله بیشتر در مورد مسائل ریاضی و حل آن هاست که خواننده علاقه مند خود می تواند به آن ها رجوع کند. آخرین مطلب مجله جواب نامه ها از ابراهیم دارابی و جواد لالی است و به این ترتیب مجله به پایان می رسد.

شماره ۲۷ مجله در سال هفتم انتشار آن، در پاییز ۱۳۶۹ به دست خوانندگان آن رسید. در پیش گفتار مجله چنین می خوانیم:

«همچنان که بارها گفته شده است، یکی از اهداف انتشار مجله رشد، انعکاس یافته های تجربی و پژوهشی دبیران محترم در زمینه آموزش ریاضی و نتایج تحقیق آن ها و نیز سایر مدرسین این رشته می باشد. به علاوه، پویایی در امر آموزش خود مستلزم مطالعه و تحقیق بیشتر و تبادل نظرهای علمی بین همه مدرسین و اساتید آموزش ریاضی است. انتظار ما بر این است که از سوی دبیران محترم مقالات بیشتری دریافت نماییم. در حالی که مجله بیشتر به سوی یک مجله علمی - تحقیقی در زمینه های مختلف ریاضی، به خصوص وجوه آموزشی آن حرکت می کند، شایسته است که همکاران محترم دبیر سعی و اهتمام بیشتری نموده و با ارسال مقالات پر محتوا تر، سهم مهم تری از صفحات مجله را به

خود اختصاص دهند.»

*

در مقاله «مسئله حل کردن در ریاضی (۲)» که ادامه همین بحث در شماره قبل است، می خوانیم:

«نوع مسائلی که ما در کلاس مورد بحث قرار می دهیم و تجاری که از آن ها می آموزیم، در طول سال تغییر می کند. مقایسه تشابه یادگیری یک بازی ورزشی با یک مسئله فکری، مراحل پیشرفت یادگیری را نشان می دهد. در اوایل سال که دانش آموزان مهارت کمتری در تکنیک های حل مسئله دارند، در آن دسته از تکنیک های اساسی که بعداً در طول دوره به کار گرفته می شوند، آموزش می بینند و تمرین می کنند (جست و جو برای استدلال های استقرایی، بررسی و آزمایش حالات خاص، استفاده از مسائل ساده تر در رابطه با مسئله اصلی، تخصیص و تعمیم)؛ درست به همان طریقی که مثلاً یک مبتدی در تنیس آموزش می بیند و تمرین می کند که چگونه سرو بزند و یا چگونه با جلو و پشت دست آشار بزند. زمانی که مهارت های اساسی خوب فرا گرفته شد می توان از آن ها در شرایط مختلفی که پیش می آید، به طور گسترده و متنوعی استفاده کرد. مسائلی که ما کار می کنیم، به تدریج مشکل تر و وقت گیر تر می شوند. در حقیقت دانش آموزان دیگر تنها اصول حل مسئله را نمی بینند، بلکه یک آموزش خوب ریاضی محض به آن ها داده می شود.

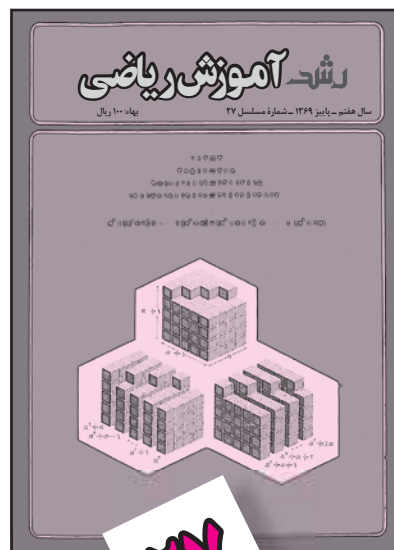
مطلبی که اکنون رودرروی دانش آموزان

قرار می گیرد، انتخاب تکنیک های مناسب برای برخورد با مسائل و استفاده مفید و مؤثر از آن هاست. بحث های کلاسی نیز به تدریج، همان طور که پیش می رویم، تغییر می کنند و تأکید بیشتر روی طرح ریزی راه حل ها و ارزشیابی آن ها قرار می گیرد. بعضی از مسائل نمونه کلاس در زیر مطرح شده است...»

در این شماره تحت عنوان «المپیادهای ریاضی بین المللی»، در حاشیه نقد کتاب چنین می خوانیم:

«جهت آشنایی با محتوای کتاب المپیادهای ریاضی بین المللی، و به انگیزه تألیف و ترجمه آن، بی مناسبت نیست که نظری اجمالی به تاریخچه این نوع المپیادها و نحوه گزینش و انتخاب و جمع آوری مسائل آن داشته باشیم.

در سال ۱۹۵۹، کشور رومانی، از کشورهای بلوک شرق (رومانی، مجارستان، چکسلواکی، لهستان، شوروی و آلمان شرقی) دعوت نمود تا در یک مسابقه ریاضی شرکت کنند. این ابتکار کشور رومانی موجب گردید که مبنای یک مسابقه ریاضی بین المللی در جهان گذاشته شود و تاکنون، هر ساله، این مسابقه در یکی از کشورهای شرکت کننده برگزار شده است. اگرچه در شروع آن تعداد کشورهای شرکت کننده اندک بود، ولی به مرور زمان، سال به سال به تعداد آن ها افزوده گردید به گونه ای که در سال ۱۹۷۷ به ۲۱ کشور، و در سال ۱۹۸۷، که ایران برای اولین بار در آن شرکت کرده بود، به ۴۲ کشور رسید. هر کشور یک تیم هشت نفره، شامل شش دانش آموز و یک سرپرست اول و یک سرپرست دوم، به کشور میزبان اعزام می دارد. سرپرستان اول هیئتی به نام هیئت ژوری تشکیل می دهند که مهم ترین مرجع تصمیم گیری در این نوع مسابقات است. هر یک از سرپرستان اول، حداکثر پنج مسئله به هیئت ژوری ارائه می دهند. اعضای هیئت ژوری براساس علاقه خویش به عضویت پنج کمیته هندسه، نظریه اعداد، آنالیز ترکیبی، توابع و نامساوی ها درمی آیند. مسائل برحسب محتوای علمی خود بین این کمیته ها توزیع می گردد. پس از بحث و تبادل نظر بر روی مسائل در کمیته ها، از هر کمیته یک مسئله برای مسابقه برگزیده می شود. بالاخره، در یک جلسه نهایی بین کمیته ها، ششمین مسئله نیز انتخاب می شود. ملاک اصلی در انتخاب مسائل



ضرورت به کارگیری نوعی از ابتکار و خلاقیت در راه حل مسئله، عدم چاپ آن مسئله در کتب و نشریات علمی است. مسابقات ظرف دو روز، هر روز سه مسئله، به مدت چهار ساعت و نیم برگزار می شود.

از مقاله های «مماس بر منحنی ها»، «مثلث های فیثاغورس»، «قضیه سینوس ها و کسینوس ها در کنج های سه وجهی» و «تعمیم یک فرمول در هندسه» می گذریم. بقیه مطالب مجله هم عمدتاً در مورد مسئله و حل آن است. در مقاله «مسابقه ریاضی دانشجویان کشور» سؤالات این مسابقه آورده شده است. جواب نامه های رسیده، خواننده را به پایان مجله می رساند.

اکنون به شماره ۲۸ مجله رسیده ایم که در زمستان ۱۳۶۹ به بهای ۱۰۰ ریال انتشار یافته است. مجله با مقاله «نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت» آغاز می شود که در آن چنین می خوانیم:

«پرسشی که کراراً به وسیله دانش آموزان، دانشجویان و حتی دبیران مطرح می شود، این است که چرا ریاضیات می خوانیم؟ و یا چرا ریاضیات تا این حد تدریس می شود؟ و یا چرا ریاضیات باید مورد توجه هر محصلی باشد؟ و اینکه اصولاً ریاضیات چه نقشی در زندگی روزمره دارد؟ این پرسشی است که همیشه مطرح بوده است و متأسفانه پاسخ قانع کننده ای که بتوان آن را در یک جمله یا در یک عبارت خلاصه کرد، نمی توان داد. هدف ما در این مقاله و مقالات بعدی پاسخ به این پرسش است.

شاید عمده ترین انگیزه مطالعه و گسترش ریاضیات و نخستین دلیل برای اهمیت دادن به آن، به کار گرفتن این دانش در مطالعه طبیعت به منظور شناخت محیط زیست و بهره برداری از آن در جهت زندگی بهتر و راحت تر باشد. هوایی که استنشاق می کنیم و یا پاکیزگی آن و نیز شرایط جوی که همراه می آورد، در زندگی روزانه ما اهمیت دارد. آب طبعاً یکی از عوامل مهم حیات است. هم از نظر استفاده از آن در مصرف روزانه، کشاورزی و دریاوردی و هم از دیدگاه یک منبع عظیم غذایی، از اهمیت ویژه ای برخوردار است. زمین منبع تولید مواد غذایی و مواد اولیه صنعتی است و برای ما ارزش حیاتی دارد. برای زندگی متعادل و سالم و بهره برداری

از موهبت های خدادادی، به تندرستی و بهداشت خوب و شرایطی که آن را بهبود بخشد، نیاز داریم. در جدال انسان برای رسیدن به این هدف ها، ریاضیات نقش اساسی دارد و به حد زیادی مورد استفاده قرار گرفته است.

خوانندگان تمام این مقاله را به خوانندگان علاقه مند توصیه می کنیم. مقاله «آشنایی با مبانی انفورماتیک و کامپیوتر» با این پیشگفتار آغاز می شود:

«اینک که، در آستانه عصر انفورماتیک قرار گرفته ایم، بهتر است اطلاعات بیشتری در زمینه مهم ترین ابزار انفورماتیکی که کامپیوتر می باشد، داشته باشیم.

انفورماتیک روی جنبه های مختلف زندگی بشر و به ویژه آموزش و فعالیت های علمی تأثیرات بنیادی گذاشته است. نظام آموزش و پرورش در کشور ما نیز برای حفظ پویایی و کم کردن فاصله با کشورهای پیشتاز در جهان معاصر به این امر مهم، یعنی وارد کردن موضوع آشنایی با کامپیوتر و انفورماتیک در برنامه آموزشی مدارس، پرداخته است. گام نخست در سال سوم رشته ریاضی - فیزیک در حال شکل گرفتن است. درس آشنایی با کامپیوتر و انفورماتیک مبتنی بر آموزش کارگاهی و استفاده از کامپیوتر هفته ای دو تا چهار ساعت از برنامه رسمی آموزش سال سوم ریاضی فیزیک را به خود اختصاص خواهد داد. تألیف کتاب درسی توسط کارشناسان مجرب، مراحل اولیه را پشت سر گذاشته است. کلاس های بازآموزی و نوآموزی برای دبیران طبق برنامه ریزی های انجام شده، تشکیل شده

است، و بالاخره با تجهیز دبیرستان های کشور به کارگاه های کامپیوتر، طی یک برنامه پنج ساله، ان شاء الله این درس جای خود را بین دروس دبیرستانی باز خواهد کرد.

گام های بعدی تسری درس آموزش کامپیوتر به سایر رشته های تحصیلی و سایر مقاطع است و پرداختن به مقوله استفاده از کامپیوتر به عنوان یک ابزار کمک آموزشی که نیرو و توان زیادی را طلب می کند.

این مقاله نیز یکی از مقاله های خواندنی این شماره است. مقاله های «خاصیت هفت گانه تابع» و «اثبات برخی پدیده های اعداد»، مقاله هایی هستند که مکمل مطالب ریاضیات دبیرستانی اند. بقیه موضوعات مطرح در این شماره نیز مانند شماره های قبلی درباره مسائل و حل مسائل است.

مجله با «اخبار گروه ریاضی و کامپیوتر»، «جواب نامه ها» و «معرفی کتاب» پایان می پذیرد.

در مقاله «معرفی کتاب»، در مورد کتاب معلم (ریاضی) چنین می خوانیم: «کتاب معلم (ریاضی): مسعود فرزاد، محمدتقی دیبایی، صفر با همت شیروانده، پرویز فرهودی مقدم. ناشر: وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۶۹. این کتاب شامل روش تدریس کتب ریاضی دوره راهنمایی تحصیلی است و مطالعه آن به همه معلمان و دبیران ریاضی توصیه می گردد.»

و به این ترتیب به پایان مطالب این شماره از مجله می رسیم.

* پی نوشت ها:

1. Leonhard Euler
2. Napier
3. common logarithms
4. natural logarithms

۵. ایران در سال ۱۳۶۶، تیمی از دانش آموزان را برای شرکت در بیست و هفتمین مسابقه المپیاد ریاضی، که در هاوانا، پایتخت کوبا، برگزار می شد، فرستاد. در این مسابقه بین ۴۲ کشور شرکت کننده، کشور ایران با ۷۰ امتیاز مقام بیست و ششمین کشور را نصیب خود کرد. این موفقیت دور از انتظار بود. زیرا ما برای اولین بار در این نوع مسابقات شرکت می کردیم، به ویژه که کشورهای نروژ، ایتالیا، لهستان و فنلاند را پشت سر گذاشتیم. این مسابقه نشان داد که سطح ریاضی در کشور، و توان علمی جوانان ما، به گونه ای است که می توانند با کشورهایی که سال های سال در ریاضیات صاحب نام و مقامی بوده اند، برابری کنند. سال بعد به همت و کوشش مسئولان آموزش و پرورش، در المپیاد ریاضی آلمان شرکت کردیم و بین ۵۱ کشور، و جمع امتیاز ۱۴۷ (۲۰ مدال نقره، ۳ مدال برنز و یک دیپلم افتخار) مقام چهاردهمین کشور را از آن خود ساختیم. این موفقیت نیز بیش از پیش برای ما با ارزش بود، چرا که بعد از فرانسه قرار گرفتیم و کشورهای بزرگی چون ایتالیا، بریتانیا، کانادا و استرالیا را هم پشت سر گذاشتیم.

* aban_mehr@yahoo.com



۲۸

● **لطیفهٔ دوم:** دو ریاضی‌دان در یک کافه نشسته بودند. اولی به دومی گفت: «من فکر می‌کنم بیشتر مردم عادی با ریاضیات مقدماتی آشنایی‌هایی دارند»، اما دومی مخالف این موضوع بود. اولی ادامه داد: «من این را به تو ثابت می‌کنم!» در این لحظه دومی از جا بلند شد و به دست‌شویی رفت. اولی به سرعت پیشخدمت را صدا زد و به او گفت: «بیا این اسکناس را بگیر و یادت باشد، هر وقت صدایت زدم و چیزی از تو پرسیدم، تو فقط بگو یک سوم مکعب x !»

پیشخدمت گفت: «یک سوم مکعب x ؟ درست است؟» ریاضی‌دان گفت: «بله درست است» و پیشخدمت در حالی که زیر لب و پشت‌سرهم می‌گفت یک سوم مکعب x ، دور شد. کمی بعد ریاضی‌دان دوم برگشت. پیش‌اولی نشست و به او گفت: «خب می‌خواستی آن موضوع را برایم ثابت کنی!» اولی گفت: «بله درست است. حالا یک نمونهٔ عملی به تو نشان می‌دهم.»

بعد پیشخدمت را صدا زد و به او گفت: «بگو ببینم، انتگرال x^2 چه می‌شود؟»

و پیشخدمت بی‌درنگ گفت: «یک سوم مکعب x » و بعد دور شد و در همان حال، یک لحظه سرش را برگرداند و با لبخند گفت: «البته به اضافهٔ یک مقدار ثابت!»



● **لطیفهٔ سوم:** یک استاد بازنشستهٔ ریاضی و نوّهٔ پنج ساله‌اش هم‌بازی و هم‌صحبت بودند. نوّهٔ استاد به کودکستان رفت و روزی به پدر بزرگ گفت: «امروز معلممان یک مسئلهٔ سخت ریاضی به ما داد که هنوز فکر را مشغول کرده است!»

استاد گفت: «عزیزم، چی فکر تو را مشغول کرده؟» کودک گفت: «مسئله این است: چهار هواپیما از باند فرودگاه به هوا بلند شدند. کمی بعد دو هواپیمای دیگر هم از باند بلند شدند و به آن‌ها پیوستند. حالا چند هواپیما در هوا هستند؟»

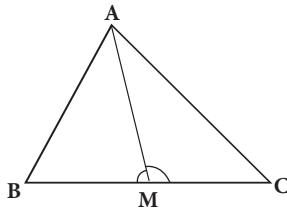
استاد گفت: «اینکه کاری نداره، عزیزم...» و کودک گفت: «آره بابا بزرگ من هم می‌دانم که $2+4=6$ ، ولی نمی‌فهمم که چرا هواپیماها باید این‌طوری عمل کنند!»



حالا بعد از کلنجار رفتن با معماهای عدد سال نو (ایستگاه اول) و معماهای منطقی (ایستگاه دوم) وقت تفریح کردن با شنیدن چند لطیفهٔ زیباست.

● **لطیفهٔ اول:** یک ریاضی‌دان، یک فیزیک‌دان و یک مهندس؛ هر کدام را با سه توپ کوچک فلزی و یک میز گرد، در یک اتاق جدا تنها گذاشتند و یک ساعت بعد به آنجا رفتند تا ببینند در این مدت، هر یک، چه کرده‌اند. در اتاق ریاضی‌دان دیدند که او سه توپ را رئوس مثلثی قرار داده است که مرکز ثقل آن، دقیقاً مرکز دایرهٔ روی میز است! در اتاق فیزیک‌دان دیدند که او سه توپ را روی هم سوار کرده و روی مرکز میز گذاشته است! اما وقتی وارد اتاق مهندس شدند، دیدند که یکی از توپ‌ها نیست، دومی شکسته است و سومی را هم مهندس توی ظرف غذایش گذاشته است تا با خود ببرد!



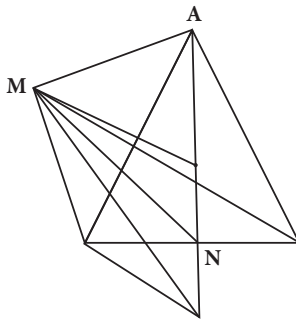


شکل ۱

برای اثبات لم فوق قضیه کسینوس‌ها را در دو مثلث AMB و AMC نوشته و با توجه به اینکه $\cos(\widehat{AMC}) = -\cos(\widehat{AMB})$ و از جمع دو رابطه، به حکم برسید.

حال قصد داریم قضیه داده شده را با استفاده از لم مطرح شده اثبات کنیم. مطابق شکل، فرض کنید N وسط BC است. از آنجا که G نقطه هم‌رسی میانه‌هاست، $AG = 2GN$. حال GN را به اندازه خودش امتداد دهید تا به G' برسید. سپس از M به A و B و C و G و N و G' وصل کنید.

$$\text{از آنجا که } \frac{AG}{GN} = 2 \text{ پس } 2GN = GG' = AG$$



شکل ۲

لذا در مثلث $\triangle AMG'$ ، MG میانه است پس بنابر لم گفته شده داریم:

$$MG^2 = \frac{MA^2 + MG'^2}{2} - \frac{AG'^2}{4} \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم N وسط GG' قرار دارد پس باز هم با استفاده از لم مذکور داریم:

$$MN^2 = \frac{MG^2 + MG'^2}{2} - \frac{GG'^2}{4} \\ \Rightarrow \frac{MG^2}{2} = MN^2 - \frac{MG^2}{2} + \frac{GG'^2}{4} \quad (2)$$

همچنین N در وسط BC واقع است لذا می‌توان نوشت:

$$MN^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \quad (3)$$

حال در تساوی (۲) به جای MN^2 مقدار $\frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

یک تساوی چند نامساوی

اشاره

گوتفريد ويلهلم لايب‌نیتس^۱، فیلسوف، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان شهیر آلمانی کارهای مهمی در زمینه محاسبات دیفرانسیل و انتگرال انجام داد. در هندسه نیز قضیه‌ای منسوب به اوست که رابطه میان فاصله یک نقطه تا مرکز یک مثلث را بر حسب اضلاع و فاصله آن نقطه تا رئوس مثلث بیان می‌کند. هر چند اثبات‌های جبری متعددی برای این قضیه موجود است، اما در اینجا قصد داریم این قضیه را به روش هندسی اثبات کنیم و چند نامساوی مهم را از آن نتیجه بگیریم.

کلیدواژه‌ها: قضیه لايب‌نیتس، نامساوی لايب‌نیتس، نامساوی اوایلر



محمد طهری*

دانش‌آموز سال چهارم رشته ریاضی
دبیرستان علامه طباطبائی تهران

■ **قضیه لايب‌نیتس:** فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در صفحه و G مرکز ثقل مثلث ABC باشد. در این صورت برابری زیر برقرار است:

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

قبل از بیان اثبات این مسئله لم زیر را مطرح می‌کنیم.

لم: در مثلث ABC اگر AM میانه وارد بر BC باشد، داریم:

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

را قرار دهید، پس خواهیم داشت:

$$\frac{MG^2}{2} = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{MG^2}{2} - \frac{BC^2}{4} + \frac{GG^2}{4}$$

اکنون اگر در تساوی (۱) به جای $\frac{MG^2}{2}$ مقدار به دست آمده در بالا را جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$MG^2 = \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{2} - \frac{MG^2}{2} - \frac{BC^2}{4} + \frac{GG^2}{4} - \frac{AG^2}{4} \quad (۴)$$

حال با توجه به اینکه $AG = GG'$ پس $AG' = 2AG$ ، در نتیجه

$$\frac{GG'^2}{4} - \frac{AG'^2}{4} = -\frac{3}{4}AG^2$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{AG}{AN} = \frac{2}{3}$ پس $\frac{AG^2}{AN^2} = \frac{4}{9}$ همچنین با توجه به اینکه N وسط BC است، پس

$$AN^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

$$\frac{GG'^2}{4} - \frac{AG'^2}{4} = -\frac{AN^2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{GG'^2}{4} - \frac{AG'^2}{4} = \frac{BC^2}{12} - \left(\frac{AB^2 + AC^2}{6} \right) \quad (۵)$$

حال با جایگذاری تساوی (۵) در تساوی (۴) خواهیم داشت:

$$MG^2 = \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{2} - \frac{MG^2}{2} - \frac{BC^2}{4} + \frac{BC^2}{12} - \left(\frac{AB^2 + AC^2}{6} \right)$$

پس

$$\frac{3}{2}MG^2 = \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{2} - \left(\frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{6} \right)$$

لذا با ضرب طرفین تساوی در عدد ۲ داریم:

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$$

حال به نتایج جالب توجه زیر از این قضیه توجه کنید:

نامساوی (۱): مثلث ABC مفروض است. M نقطه دلخواهی در صفحه است آنگاه:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$$

و حالت تساوی تنها زمانی برقرار است که M بر G منطبق باشد.

اثبات: بنابر قضیه لایبنیتس داریم:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

حال از آنجا که $3MG^2 \geq 0$ پس

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

و حالت تساوی تنها زمانی رخ می‌دهد که $3MG^2 = 0$ یا به عبارت دیگر M و G برهم منطبق باشند.

نامساوی (۲): مثلث ABC با شعاع دایره محیطی R مفروض است. آنگاه خواهیم داشت:

$$9R^2 \geq BC^2 + AC^2 + AB^2$$

اثبات: در قضیه لایبنیتس قرار دهید $M=O$ آنگاه خواهیم داشت:

$$OG^2 = R^2 - \left(\frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{9} \right)$$

$$= \frac{9R^2 - AB^2 - AC^2 - BC^2}{9}$$

حال با توجه به اینکه $OG^2 \geq 0$ پس $9R^2 \geq AB^2 + AC^2 + BC^2$ لذا

نامساوی (۳): در مثلث ABC با شعاع دایره محیطی R و شعاع دایره محاطی r نامساوی زیر برقرار است: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 18Rr$ (a و b و c اضلاع مثلث‌اند).

اثبات: می‌دانیم $R = \frac{abc}{4s}$ و $r = \frac{s}{p}$

$$18Rr = \frac{9abc}{2p} = \frac{9abc}{a+b+c}$$

لذا باید ثابت کنیم که $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{9abc}{a+b+c}$

اما از آنجا که $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2}$ و $a+b+c \geq 3\sqrt{abc}$ پس $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$ و نامساوی اثبات می‌گردد.

نامساوی (۴): در مثلث ABC با شعاع دایره محیطی R و شعاع دایره محاطی r نامساوی $R \geq 2r$ برقرار است. (نامساوی اویلر)

اثبات: از نامساوی‌های (۲) و (۳) داریم

$$9R^2 \geq AB^2 + AC^2 + BC^2 \geq 18Rr$$

$$R \geq 2r \iff 9R^2 \geq 18Rr$$

* پی‌نوشت:

1. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

* htabiee@yahoo.com

* منابع:

۱. دایرةالمعارف هندسه، جلد پنجم، مؤلف: محمدهاشم رستمی، انتشارات مدرسه.
۲. بازارآموزی و بازشناخت هندسه، مؤلفان: ه.س.م. کوکس تیر - س.ل. گریترز، مترجم عبدالحسین مصطفی، انتشارات مدرسه.
۳. هندسه مسطحه از مقدمات تا المپیاد، مؤلفان: سیامک احمدپور، مصطفی مسگری مشهدی، انتشارات خوشخوان.

حل مسائل جبری با روش‌های هندسی

می‌شود. چون زمانی که دانش‌آموزی توانایی ابداع و تجسم شکل یا تصویری مناسب و مورد استفاده را برای حل مسئله‌ای داشته باشد، اثرات استفاده از این روش در مقایسه با استفاده از روش جبری به مراتب مفیدتر و پویاتر است.

بنابراین ریاضی‌آموزان می‌توانند با مطالعه و یادگیری مطالب گنجانده شده در این کتاب، توانایی و هنر حل مسئله (ریاضی) خود را با دیدگاه هندسی ارتقا دهند و در آینده نیز برای پاسخ‌گویی و ارائه راه حل به مسائل جبری، از دست‌آویزی جدید بهره‌مند شوند. در ضمن، مطالعه این کتاب می‌تواند توانمندی‌های ریاضی‌آموزان را در درس هندسه افزایش دهد و ایشان با بهره‌مندی از نمونه‌هایی متنوع و منسجم، دانش هندسه خود را محک بزنند. علاقه‌مندان به مسائل المپیادهای ریاضی نیز می‌توانند از مطالب و مسائل این کتاب به‌عنوان تمرین‌هایی قاعده‌مند برای کسب آمادگی‌های لازم در راستای روش‌ها و هنر حل مسئله استفاده کنند. معلمان و مدرسان ریاضی نیز می‌توانند از مسائل این کتاب، به‌ویژه مسائلی که نمونه‌هایی از آن‌ها در کتاب‌های درسی ریاضی دوره دوم آموزش متوسطه با رویکرد جبری گنجانده شده است، در کلاس‌های درسشان در چارچوب یک مسئله با دو راه حل جبری و هندسی استفاده کنند و دانش‌آموزان علاقه‌مند به حل مسائل با چند روش را تشویق کنند و یاری رسانند. البته از آنجا که مسائل این کتاب دربرگیرنده موضوع‌های گوناگون و نیز تلفیق و ترکیبی از آن‌هاست، دانش‌آموزان می‌باید بر تمامی موضوع‌های کتاب‌های درسی‌شان تسلط لازم و کافی را داشته باشند.

● تألیف و تدوین: ابراهیم دارابی

● ناشر: انتشارات مدرسه (تلفن: ۸۸۸۰۰۳۲۴)

این کتاب دارای هفت فصل به شرح زیر است:

فصل ۱: نمایش اتحادهای جبری در

قالب‌های هندسی

فصل ۲: قضایا و فرمول‌های آشنا در

شکل‌های هندسی

فصل ۳: محاسبه عبارت‌های جبری

فصل ۴: ماکزیمم و می‌نیمم

فصل ۵: ویژگی‌های توابع معکوس مثلثاتی

فصل ۶: روش‌های محاسبه چند سری اعداد

فصل ۷: مسائل مختلف

با مطالعه یا مرور هر یک از فصل‌های هفت‌گانه مزبور درخواهیم یافت که هدف اصلی مؤلف و گردآورنده مطالب این کتاب آن بوده است که ریاضی‌آموزان را بر آن دارد، با استفاده از خلاقیت هندسی، قدرت‌انگاره‌سازی هندسی و درک شهودی، به ارائه راه‌حل‌های هندسی برای مسائل جبری‌ای بپردازند که همواره با آن‌ها در کتاب‌های درسی خود مواجهه می‌شوند. در واقع، مؤلف و گردآورنده کتاب «حل مسائل جبری با روش‌های هندسی»، با استفاده از روش مزبور به ارائه خط‌مشی و چارچوبی برای برخورد با مسائل جبری پرداخته است که باعث اشتیاق ریاضی‌آموزان به یادگیری

در ادامه چند نمونه از مسائل این کتاب را بیان می‌کنیم تا قبل از تهیه و مطالعه کتاب و بررسی مسائل آن، توانایی حل مسئله خود را با رویکرد هندسی بسنجید.

مسئله ۱. اگر a و b اعداد حقیقی مثبت باشند، به روش هندسی ثابت کنید: $a^2 + b^2 \geq 2ab$

مسئله ۲. اگر a و b اعداد حقیقی نامنفی باشند، به روش هندسی ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

مسئله ۳. اگر a و b اعداد حقیقی مثبت باشند، به روش هندسی ثابت کنید:

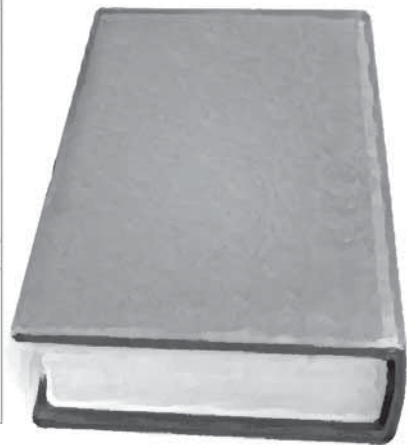
$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

مشابه مسائل ۱، ۲ و ۳ را می‌توانید در صفحات ۸۳ و ۸۴ کتاب درسی «ریاضی ۲»^۱ دوره دوم آموزش متوسطه مشاهده کنید که دانش‌آموزان می‌باید با رویکرد جبری درستی آن‌ها را ثابت کنند.

مسئله ۴. مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را که جمله اول آن n و قدرنسبت آن d است، به روش هندسی به دست آورید.

مسئله ۵. مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را که جمله اول آن a و قدرنسبت آن q است، به روش هندسی به دست آورید.

دانش‌آموزان می‌توانند مسائل ۴ و ۵ را در فصل اول کتاب «حسابان»^۲ مورد استفاده قرار دهند.



* پی‌نوشت‌ها.....

۱. ریاضی ۲ (رشته‌های علوم تجربی، ریاضی - فیزیک و فنی - حرفه‌ای). مؤلفان: علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۹۳.
۲. حسابان (رشته ریاضی - فیزیک). مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمدتقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۹۳.

آمار دانش حیاتی است!

مطابق یک آمار علمی تماس‌ها در سراسر جهان هر سال ۴۲ میلیون تخم می‌گذارند. باز مطابق همان آمار، فقط نیمی از این تخم‌ها، به تماس زنده تبدیل می‌شوند؛ و باز مطابق آمار، سه چهارم این تماس‌ها در همان ۳۶ روز نخست زاده شدن، شکار حیوانات دیگر می‌شوند. از باقی‌مانده نوزادها نیز، به دلایل متفاوت، تنها پنج درصدشان به یک سالگی می‌رسند. پس اگر به‌خاطر علم آمار نبود، حالا همه ما طعمه تماس‌ها بودیم!

فرض ضمنی

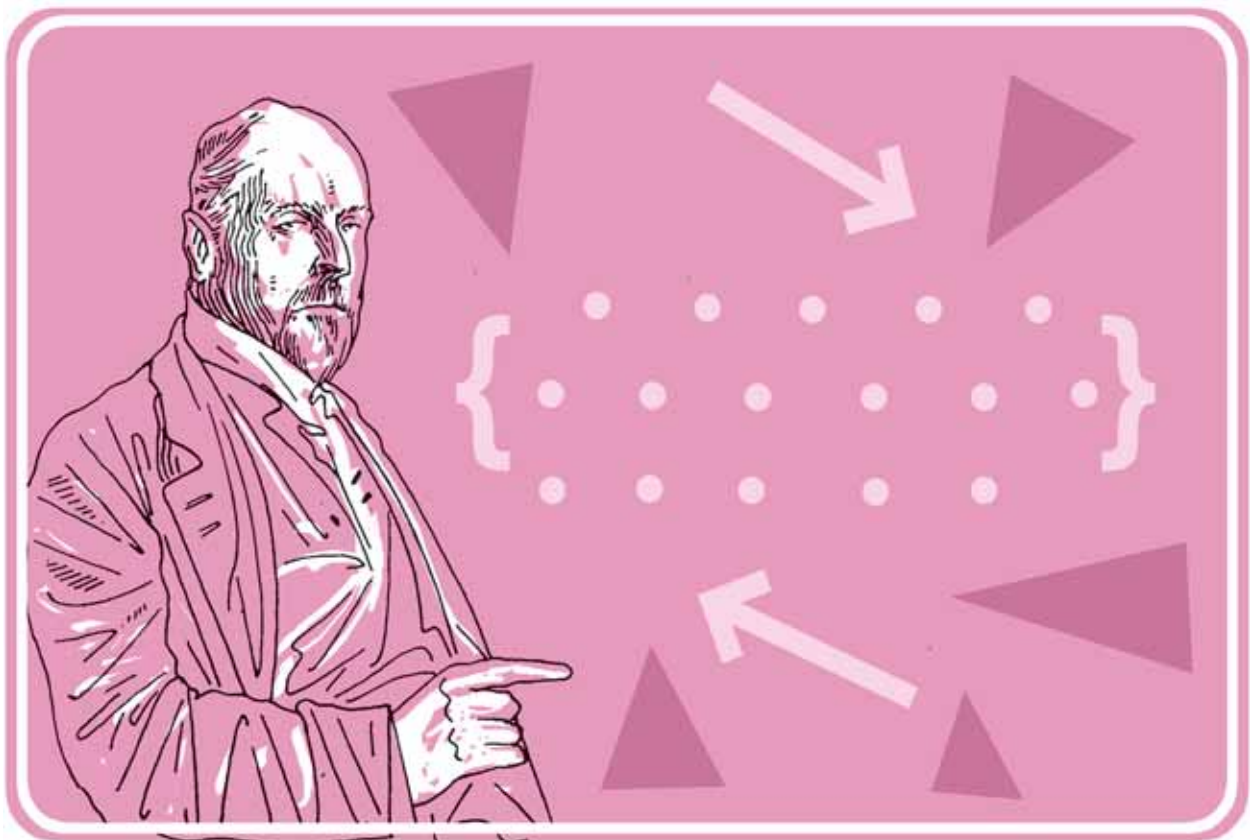
ملانصرالدین، کانتور و غزها!*

به دنبالش می گشت. گفتند: «ملاتو انگشتت را در اتاق گم کرده‌ای، چرا در حیاط به دنبالش می گردی؟» ملا جواب داد: «اتاق تاریک بود و حیاط روشن. به همین خاطر در حیاط دنبالش می گردم.»

اما داستان نیمه واقعی، که به این دلیل آن را نیمه واقعی نامیده‌ایم که ممکن است راست یا دروغ باشد.

برای پاسخ به این پرسش‌ها، نخست به ذکر چند حکایت واقعی، نیمه واقعی، و ساختگی می پردازیم، و آن گاه به سراغ فرض ضمنی و ارتباطش با این سه گروه می رویم. و اما اول حکایت ساختگی، که داستانی است از ملانصرالدین: می گویند ملانصرالدین، انگشتش را در اتاق گم کرده بود، و در حیاط

لابد از خود می پرسید: ملانصرالدین چه نسبتی با ژرژ کانتور^۱ دارد و از آن مهم تر، کانتور چه رابطه ای با غزها دارد؛ و در این میان، «فرض ضمنی»^۲ که در صدر مقاله نشسته، کیست و ارتباطش با این‌ها چیست؟ و آن وقت، چرا در عنوان مقاله پای غزها به میان کشیده شده است؟



این داستان چنان که در «مثنوی معنوی» آمده، چنین است:

غزها برای غارت به دهی ریختند، و دو نفر از بزرگان ده را پیدا کردند و قصد کشتن یکی از آن دو را کردند. مرد پرسید: «برای چه مرا می کشید؟»

گفتند: «برای اینکه رفیقت بترسد و بگوید طلا و جواهرات را کجا مخفی کرده است.»

مرد گفت: «حال که چنین است چرا او را نمی کشید تا من بترسم و جای طلا و جواهرات را نشان دهم؟»^۲

اکنون به حکایت واقعی می‌رسیم. این حکایت، که چندان هم حکایت نیست! در حوزه ریاضیات رخ داده و آن را ژرژ کانتور بیان کرده است:

«تناظر یک‌به‌یک»^۳، نیز معروف به نگاشت دوسو یا «دوسویی»^۴، بین دو مجموعه A و B ، روش جفت کردن هر عضو A با عضوی از B است. این‌ها توابع خاصی از A به B اند، که تضمین می‌کنند، هر عضو B متناظر با یک، و تنها یک عضو A است.

دوسویی‌ها در همه جای ریاضیات وجود دارند. برای مثال، هر «جایگشت»^۵، همین‌طور هر «یکریختی»^۶ یک نگاشت دوسوست. در نظریه مجموعه‌ها، اهمیت دوسویی‌ها از این موضوع نشئت گرفته است که: دو مجموعه دارای یک اندازه‌اند؛ اگر، و تنها اگر، بینشان تناظری یک‌به‌یک موجود باشد. این مطلب در مورد مجموعه‌های متناهی آشکار است؛ در واقع به این گونه است که اشیاء را می‌شماریم. برای مثال، با تشکیل یک

تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و حروف واقع در کلمه «کانتور»، تعداد حروف را می‌شماریم. همین موضوع بود که وقتی ژرژ کانتور شروع به استفاده از این اصل در سری‌های نامتناهی کرد، بنیان ریاضیات قرن نوزدهم را به لرزه درآورد.^۸

در هر سه این داستان‌ها از این فرض که به آن «فرض ضمنی» می‌گویند، استفاده شده است.

در داستان ملا، فرض ضمنی پرسنده‌ها این است که وقتی شیئی در جایی - در این مثال انگشت ملا در اتاق - گم شد، باید در همانجا به دنبالش گشت نه در جای دیگر. ملا این فرض را قبول ندارد. به‌همین دلیل در جای دیگری - در این مثال در حیاط - به دنبال انگشت گم شده خود می‌گردد.

در داستان غزا، فرض ضمنی این است که اگر کسی را برای مال و ثروتش در مقابل چشم کس دیگری شکنجه کنند یا بکشند، او می‌ترسد و جای مال و ثروت خود را نشان می‌دهد. غزا و شخص دوم، هر دو از این فرض استفاده می‌کنند.^{۱۰}

و اما در داستان کانتور، این فرض ضمنی در میان ریاضی‌دانان‌های آن زمان در نظر گرفته می‌شد که جمیع مجموعه‌های نامتناهی به یک اندازه‌اند. به این معنی که، هر دو مجموعه نامتناهی در تناظری یک‌به‌یک هستند. قضیه کانتور و «استدلال قطری»^{۱۱} او، با ابطال این عقیده، به افراد بسیاری شوک وارد کرد.^{۱۲}

* قبایل ترک تباری که در قرن ششم هجری قمری در محدوده دریای خزر تا حدود کشور چین به‌صورت پراکنده سکونت داشتند و هر از گاهی به شهرهای ایران تجاوز می‌کردند.

* پی‌نوشت‌ها

۱. Georg Cantor (۱۸۴۵-۱۹۱۸). کانتور در «سن پترزبورگ» تولد یافت، اما بیشتر عمر خود را در «هال» به‌سر برد. قسمت آخر عمرش با بیماری‌های روانی مکرر تیره و تار بود و اوقات بسیاری را در آسایشگاه گذراند. عمیق‌ترین کارهایش در ریاضیات نظریه مجموعه‌های نامتناهی و اعداد نامتناهی‌اش بود، و تمایز بین مجموعه‌های شمارا و ناشمارایش از اهمیت خاصی برخوردار است. او را می‌توان به‌عنوان ریاضی‌دانی که بی‌نهایت را آزاد ساخت، در نظر گرفت.

2. tacit assumption

۳. آن غزان ترک خونریز آمدند
در کس از اعیان آن ده یافتند
دست بستندش که قربانش کنند
قصده خون من به چه زو می‌کنید
چیزست حکمت چه غرض در کشتنم
گفت تا هیبت بر این یارت زند
گفت آخر او ز من مسکین‌تر است
گفت چون وهم است ما هر دو یکیم
خود و را بکشید اول ای شهان

(مثنوی معنوی، دفتر دوم، ۵۴-۳۰۴۶)

4. one to one correspondence

5. bijection

۶. permutation. در مرحله‌ای مقدماتی، می‌توان جایگشت n شیء را به‌عنوان ترتیب یا ترتیب دوباره n شیء در نظر گرفت. تعداد جایگشت‌های n شیء برابر $n!$ است. تعداد «جایگشت‌های r به n شیء» با $p(n, r)$ نمایش داده می‌شود، و برابر است با: $(n-r+1) \dots (n-1) \dots n$. که آن هم برابر است با: $\frac{n!}{(n-r)!}$. برای مثال، در مورد A, B, C و D ، چون دوباره دو در نظر گرفته شوند، ۱۲ جایگشت موجود است: $AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC$. فرض می‌کنیم که n شیء از k نوع متفاوت و چنان‌اند که r_1 شیء از یک نوع، r_2 شیء از نوع دوم، و غیره‌اند. در این صورت تعداد جایگشت‌های متمایز n شیء مزبور برابر $\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$ است. مثلاً تعداد کلمات متفاوتی که از کلمه $cheeses$ می‌توان ساخت، برابر است با $\frac{7!}{3! 2! 2!}$ ، که آن هم برابر است با: ۴۲۰. در سطوح پیشرفته‌تر، جایگشت مجموعه X به‌صورت نگاشت یک‌به‌یک پوشای از X به X تعریف می‌شود. (فرهنگ ریاضیات آکسفورد، کریستوفر کلافام، ترجمه غلامرضا یاسی‌پور).

۷. isomorphism (of groups). یکریختی (گروه‌ها). فرض می‌کنیم $\langle G, \circ \rangle$ و $\langle G', * \rangle$ گروه‌هایی باشند، به این ترتیب که O عمل بر G و $*$ عمل بر G' است. یکریختی بین $\langle G, \circ \rangle$ و $\langle G', * \rangle$ نگاشت یک‌به‌یک پوشای f از مجموعه G به مجموعه G' و چنان است که، به ازای جمیع a و b ‌های واقع در G ، $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$. این مطلب بدان معنی است که، اگر a, f بر b و e بر b' بنگارند، در این صورت $a \circ b$ بر $a' * b'$ می‌نگارد. اگر یکریختی‌ای بین دو گروه موجود باشد، دو گروه مزبور نسبت به یکدیگر یکریخت‌اند. دو گروه که نسبت به یکدیگر یکریخت باشند، در اساس یک ساختار دارند: ممکن است عناصر واقعی یک گروه، اشیایی کاملاً متفاوت از عناصر دیگری باشند. اما طریقی که طبق آن نسبت به عمل مربوطه برخورد می‌کنند، یکسان است. برای مثال، گروه اعداد مختلط $1, -1, -i$ با ضرب، نسبت به گروه عناصر $1, 2, 3$ با جمع به پیمانه ۴ یکریخت است.

isomorphism (of rings). یکریختی (حلقه‌ها). فرض می‌کنیم که $(R, +, \cdot)$ و $(R', \oplus, \otimes)$ حلقه‌هایی می‌باشند. در این صورت، یکریختی بین آن‌ها نگاشت یک‌به‌یک و پوشای از مجموعه R به مجموعه R' و چنان است که، به ازای جمیع a و b ‌های واقع در R ، $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$ و $f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b)$. اگر بین دو حلقه یک یکریختی موجود باشد، حلقه‌های مزبور نسبت به یکدیگر یکریخت‌اند و مانند مورد گروه‌های یکریخت، در اساس دارای یک ساختار هستند (فرهنگ ریاضیات آکسفورد، کریستوفر کلافام، ترجمه غلامرضا یاسی‌پور).

8. Math 1001, Richard Elwes, Quercus Publishing, 2010

۹. فرض ضمنی، فرضی است که استدلال‌کننده بدون اینکه متوجه باشد آن را به‌کار می‌برد، و ملا و کانتور هر دو در استدلال خود این فرض را کنار گذاشته‌اند.

۱۰. البته باید توجه داشت که در هر یک از این سه حکایت، ارزش فرض ضمنی با دیگری تفاوت دارد.

11. diagonal argument

12. Math 1001, Richard Elwes, Quercus Publishing, 2010

کاربرد

ترکیبیات

در فیزیک

چکیده

در این نوشتار کوتاه برآنیم تا ضمن توضیح مختصری درباره اصول حاکم بر شمارش، مثال‌های ساده‌ای ارائه دهیم که کاربرد آن اصول را در فیزیک نشان می‌دهند. این مثال‌ها بارها و بارها در شاخه‌های مختلف فیزیک، همچون مکانیک آماری، نظریه میدان‌های کوانتومی، نسبیت عام و غیره ظاهر می‌شوند و چون مخاطب این نوشتار دانش آموزان دبیرستانی هستند، سعی کرده‌ایم آن‌ها را گام به گام حل کنیم.



محمد مقدسی*
گروه فیزیک،
دانشکده علوم، دانشگاه
فردوسی مشهد

کلیدواژه‌ها: ترکیبیات، ماتریس، مکانیک آماری، نمودارهای فاینمن، کاربرد ریاضی در فیزیک

۱. مقدمه

یکی از مهم‌ترین چیزهایی که در زندگی بشر نقش داشته، شمارش بوده است. در سال‌های اول کودکی ما، شمردن کار سختی به نظر نمی‌رسید و حداکثر مجبور بودیم تعداد سیب‌های موجود در بشقاب را بشماریم! ولی کم‌کم با مسائل عجیب و غریبی مواجه شدیم. از ما پرسیدند: «اگر برای رفتن از شهر A به شهر B دو راه وجود داشته باشد، و برای رفتن از شهر B به شهر C سه راه وجود داشته باشد، آن‌گاه به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر C برویم؟»

البته این مسئله چندان هم سخت نیست و حتی شاید بگویید: «هر بچه‌ای می‌داند که جوابش ۶ طریق است!» در واقع شما بدون آنکه از ریاضیات پیچیده‌ای استفاده کنید و فقط با استفاده از یک منطق ساده، جواب را در ذهنتان حل‌اجی می‌کنید. اما به هر حال یک چیزی دارد عوض می‌شود: نحوه شمارش. گاهی ما نمی‌توانیم مستقیماً بشماریم. طبیعت همیشه به ما اجازه نمی‌دهد تا اجزایش را در بشقاب بگذاریم و یکی یکی آن‌ها را بشماریم! بنابراین مجبوریم به ترفندهایی متوسل شویم که شمارش را برای

ما آسان، یا حتی ممکن کنند. این ترفندها را با عنوان کلی «ترکیبیات» می‌شناسند که با روی کار آمدن علوم رایانه و الکترونیک دیجیتال، اهمیت خاصی پیدا کردند. این نوشتار می‌خواهد شما را با موقعیت‌هایی آشنا کند که معمولاً فیزیک‌دان‌ها با آن‌ها مواجه می‌شوند و طی آن مجبورند چیزی را بشمارند. پس از ذکر چند قانون بنیادی، مثال‌هایی مطرح و سعی کرده‌ایم تا حد امکان توضیحات مفصلی ارائه دهیم. به یاد داشته باشید که روش‌های ما یکتا نیستند و شما می‌توانید روش خودتان را داشته باشید. در ترکیبیات مهم‌ترین کار فکر کردن درباره نحوه شمارش است، وگرنه قوانین حاکم بر آن‌ها بسیار ساده است. ضمناً فرض شده است که شما با یک سلسله مفاهیم اولیه، همچون «مجموعه» یا «ماتریس»، آشنا هستید.

۲. قانون‌های بنیادی

• قانون ۱.۲ (قانون ضرب): اگر بتوانیم کار الف را به m روش، و کار ب را به n روش انجام دهیم، آن‌گاه هر دو کار را می‌توانیم به $m \times n$ روش انجام دهیم.



● **قانون ۲.۲ (قانون جمع):** اگر بتوانیم کار الف را به m روش، و کار ب را به n روش انجام دهیم، آن گاه $n+m$ روش هست که می‌توانیم یکی از این دو کار را انجام دهیم.

برای توضیح بیشتر به این مثال دقت کنید. می‌خواهیم از میان ۵ کتاب فارسی، ۷ کتاب انگلیسی و ۱۰ کتاب چینی، دو کتاب را طوری انتخاب کنیم که زبان‌شان یکی نباشد. بینیم چه‌طور فکر می‌کنیم:

قرار است ما دو کتاب با زبان‌های متفاوت انتخاب کنیم. پس یا «فارسی و انگلیسی» انتخاب می‌شود؛ یا «فارسی و چینی»؛ یا «انگلیسی و چینی». بیایید مورد اول را در نظر بگیریم؛ یعنی «فارسی و انگلیسی». کتاب فارسی ۵ تا چیز می‌تواند باشد و کتاب انگلیسی ۷ تا چیز. اما قانون ضرب می‌گوید که اگر بخواهیم یک کتاب فارسی و یک کتاب انگلیسی برداریم، به 5×7 روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم. با همین استدلال «فارسی و چینی» را به 5×10 روش، و «انگلیسی و چینی» را به 7×10 روش می‌توانیم انتخاب کنیم. حال دوباره به این جمله دقت کنید: یا «فارسی و انگلیسی» انتخاب می‌شود؛ یا «فارسی و چینی»؛ یا «انگلیسی و چینی». اما این همان چیزی است که قانون جمع فرض می‌کند. پس چیزهایی را که یافتیم با هم جمع می‌زنیم:

$$5 \times 7 + 5 \times 10 + 7 \times 10 = 155$$

● **قانون ۳.۲ (انتخاب (ترکیب)):** معنای انتخاب در خود کلمه نهفته است. وقتی چیزی را انتخاب می‌کنیم، اولاً اهمیتی ندارد که با چه ترتیبی انتخاب کنیم، و ثانیاً تکرار صورت نمی‌گیرد.

مثلاً در بالا ما می‌خواستیم دو زبان از سه زبان را انتخاب کنیم. آیا می‌توانستیم دو زبان یکسان انتخاب کنیم؟ آیا مهم بود که اول یک کتاب فارسی برداریم و بعد یک کتاب چینی؟ مسلماً پاسخ هر دو منفی است و دیدید که به سه طریق توانستیم این دو زبان را انتخاب کنیم. ریاضی‌دان‌ها برای این کار اصطلاح و فرمول خاصی دارند. آن‌ها می‌گویند: «می‌خواهیم ترکیب ۲ شیء را از ۳ شیء حساب کنیم» و می‌نویسند:

$$C(3,2) \equiv \binom{3}{2} \equiv \frac{3!}{(2!) \times (3-2)!}$$

و در حالت کلی:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

● **قانون ۴.۲ (چیدن (جایگشت)):** مفهوم این واژه نیز در خود آن مستتر است. وقتی کتاب‌هایتان را در قفسه می‌چینید، مسلماً ترتیب آن‌ها برایتان مهم است.

نمی‌توانید کتابی را تکرار کنید. پس اگر بخواهیم از بین سه کتاب، دو تای آن‌ها را در قفسه بچینیم، ابتدا باید آن دو کتاب را انتخاب کنیم و سپس آن‌ها را بچینیم. ما به سه طریق می‌توانیم دو کتاب را انتخاب کنیم، و به دو طریق می‌توانیم دو کتاب را در قفسه بچینیم (یعنی مثلاً اول کتاب انگلیسی بعد فارسی، یا اینکه اول کتاب فارسی بعد انگلیسی). پس طبق اصل ضرب به ۶ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم. به زبان ریاضی: «جایگشت ۲ شیء از ۳ شیء می‌شود ۶». جایگشت را با این رابطه مشخص می‌کنند:

$$P(3,2) \equiv \frac{3!}{(3-2)!}$$

و در حالت کلی:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

واضح است که اگر انتخابی در کار نباشد و بخواهیم همه کتاب‌ها را در قفسه بچینیم، در رابطه فوق ۲ به ۳ تبدیل می‌شود و می‌گوییم: «کل جایگشت‌های ۳ شیء برابر است با ۳!».

و در حالت کلی تمام جایگشت‌های n شیء برابر است با $n!$

● **قانون ۵.۲ (قید):** گاهی قیدهایی بر شمارش اعمال می‌شوند. اگر چه واضح است که قیدها چگونه بر شمارش تأثیر می‌گذارند، ولی بد نیست حرف‌هایمان را در قالب نظریه مجموعه‌ها نیز بیان کنیم. ما از اصول اولیه منطق و اساسی‌ترین اصل شمارش -تناظر یک به یک بین مجموعه مورد نظر و مجموعه اعداد طبیعی- کمک می‌گیریم. فرض کنید می‌خواهیم تعداد اعضای مجموعه‌ای (به نام W) را بشماریم که قیدی بر آن اعمال شده است. این قید مجموعه ما را به دو زیرمجموعه

$$N = \frac{(4 \times 4) - 4}{2} + 4 = \frac{4 \times (4+1)}{2} = 10 \quad (2.3)$$

روش دوم: قیدی که روی ماتریس گذاشته‌ایم، به ما می‌گوید که اگر قرار باشد دو تا عدد (i و j) کنار هم بنشینند، ترتیب آن‌ها اهمیتی ندارد، اما این امکان وجود دارد که هر دو یکسان باشند. پس یا ما دو عدد را از بین ۴ عدد انتخاب می‌کنیم، یا هر دو عدد یکسان هستند. بنابراین طبق قانون جمع:

$$N = \binom{4}{2} + 4 = 10 \quad (3.3)$$

اگر بخواهیم در حالت کلی بیان کنیم، کافی است در استدلال بالا ۴ را به n تبدیل کنیم. پس در حالت کلی تعداد مؤلفه‌های مستقل یک ماتریس متقارن

$$n \times n, \quad n \times n \quad \text{و یا} \quad \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{است.}$$

● **مثال ۲.۳ (ماتریس پادمتقارن):** ماتریس A را با این شرایط در نظر بگیرید:

$$A_{ij} = -A_{ji}, \quad i, j = 1, 0, 0, n. \quad (4.3)$$

این ماتریس چند مؤلفه مستقل دارد؟

روش اول: تنها تفاوت این مثال با مثال قبلی این است که این بار عناصر روی قطر اصلی صفر هستند و نیازی به اضافه کردن آن‌ها نیست (چون به ازای این عناصر داریم: $A_{ii} = -A_{ii}$ که نتیجه می‌گیریم $A_{ii} = 0$). بنابراین:

$$N = \frac{(n \times n) - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (5.3)$$

روش دوم: تنها تفاوت این مثال با مثال قبلی این است که امکان ندارد هر دو عدد یکسان باشند (بدون ترتیب، بدون تکرار)؛ یعنی باید فقط دو عدد را از n عدد انتخاب کنیم:

$$N = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (6.3)$$

● **مثال ۳.۳ (تانسور کاملاً پادمتقارن):** یک تانسور مرتبه r کاملاً پادمتقارن را در فضای n بعدی در نظر بگیرید (تانسورهای شدت میدان مغناطیسی از این نوع‌اند). بدین معنا که جای هر دو اندیس آن را عوض کنیم، یک علامت منفی ظاهر می‌شود. این تانسور چند مؤلفه مستقل دارد؟

با تعمیم رابطه (۴.۳) به یک تانسور r اندیسی، می‌فهمیم که اولاً هیچ دو اندیسی نمی‌توانند

افراز می‌کند: زیرمجموعه‌ای که اعضای آن در قید صدق می‌کنند (مجموعه T)، و زیرمجموعه‌ای که اعضای آن در قید صدق نمی‌کنند (مجموعه F). اکنون کاملاً مشخص است که با اعمال قید باید تعداد اعضای F را از تعداد اعضای W کم کرد.

۳. مثال‌ها

پیش از ارائه مثال‌ها دو نکته را یادآوری می‌کنیم:

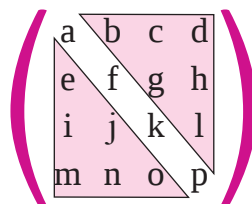
- منظور از «مؤلفه مستقل»، مؤلفه‌ای است که برحسب مؤلفه دیگری به دست نمی‌آید و ضمناً صفر هم نیست. ما تعداد آن‌ها را با N نمایش می‌دهیم.

- در این نوشتار مهم نیست که تعریف دقیق «تانسورها» چیست. برای ما فقط این نکته حائز اهمیت است که آن‌ها هم مؤلفه‌هایی دارند که تعدادشان به تعداد اندیس‌ها و تعداد ابعاد فضا بستگی دارد. مثلاً یک تانسور مرتبه ۳ که آن را با F_{ijk} نشان می‌دهیم، در فضای ۱۰ بعدی $10 \times 10 \times 10 = 1000$ مؤلفه دارد. می‌توانید آن‌ها را شبیه ماتریس‌های غول‌پیکر ببینید!

● **مثال ۱.۳ (ماتریس متقارن):** ماتریس S را با این شرایط در نظر بگیرید:

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad i, j = 1, 0, 0, 4 \quad (1.3)$$

این ماتریس چند مؤلفه مستقل دارد؟



شکل ۱ ماتریس چهاربعدی

روش اول: شکل ماتریس را با تمام مؤلفه‌هایش مجسم کنید (شکل ۱). این ماتریس 4×4 مؤلفه دارد. اما شرط تقارن باعث می‌شود تا اعضای مثلث پایینی برحسب اعضای مثلث بالایی نوشته شوند. پس اعضای یکی از این دو مثلث مستقل نیستند (فرضاً می‌گوییم مثلث پایینی). اکنون اگر قطر اصلی ماتریس را کنار بگذاریم، اعضای مثلث بالایی نصف کل اعضای باقی‌مانده هستند؛ یعنی این مثلث، $\frac{(4 \times 4) - 4}{2}$ عضو دارد. از طرف دیگر، مؤلفه‌های قطر اصلی هم مستقل هستند (قیدی روی آن‌ها نداریم). پس کل مؤلفه‌های مستقل عبارت‌اند از:

یکسان باشند. ثانیاً ترتیب این r عدد مهم نیست. پس کافی است r عدد از میان n عدد انتخاب کنیم. به عبارت دیگر:

$$N = \binom{n}{r} \quad (۷.۳)$$

به عنوان تمرین سعی کنید، تعداد مؤلفه‌های مستقل یک تانسور مرتبه r کاملاً متقارن را در فضای n بعدی به دست آورید. شما باید به عبارت $C(n+r-1, r)$ برسید.

● مثال ۴.۳ (تانسور ریمن): در مطالعه کیهان به تانسوری برخورد می‌کنیم که خمیدگی فضا-زمان را نشان می‌دهد. این تانسور از مرتبه ۴ است و در فضای n بعدی با خواص زیر مشخص می‌شود:

(۸.۳)

$$a) R_{ijkl} = -R_{jikl},$$

$$b) R_{ijkl} = -R_{jilk},$$

$$c) R_{ijkl} = R_{klij},$$

$$d) R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0.$$

تعداد مؤلفه‌های مستقل این تانسور را بیابید.

پادمتقارن بودن نسبت به دو اندیس اول باعث می‌شود تا تنها s مؤلفه مستقل ایجاد کنند که داریم: $s = \frac{n(n-1)}{2}$ ؛ به همین ترتیب در مورد دو اندیس دوم. اکنون با توجه به خاصیت (c) می‌توانیم بگوییم موجودی با دو اندیس داریم که هر کدام از آن‌ها s حالت دارد و نسبت به تعویض آن‌ها هم متقارن است. بنابراین تا اینجا $\frac{s(s+1)}{2}$ مؤلفه مستقل داریم. حال می‌خواهیم ببینیم خاصیت (d) چند معادله قیدی به ما می‌دهد. آن را با توجه به خواص (a) تا (c) کمی تغییر شکل می‌دهیم و بدین صورت می‌نویسیم:

$$R_{iikl} - R_{ijlk} + R_{iljk} - R_{ikil} + R_{iklj} - R_{ilkj} = 0 \quad (۹.۳)$$

حال اگر در این رابطه جای هر کدام از سه اندیس آخر را با یکدیگر عوض کنیم (مثلاً k با l یا l با k) یک منفی ظاهر می‌شود. بنابراین هیچ کدام از سه اندیس آخر نمی‌توانند با هم برابر باشند، چون در این صورت سمت راست تساوی فوق خود به خود صفر می‌شود. اما اندیس اول چه‌طور؟ فرض کنیم i با یکی از سه اندیس دیگر برابر باشد، در این صورت:

$$R_{iikl} + R_{ilik} + R_{ikli} = R_{ikil} + R_{ikli} \quad (۱۰.۳)$$

اما این عبارت نیز خود به خود صفر است و به قید جدیدی نمی‌رسیم. پس هر چهار اندیس باید با هم متفاوت باشند که نتیجه می‌گیریم باید ۴ عدد را از میان n عدد انتخاب کنیم. یعنی رابطه (d) معادل با $C(n, 4)$ قید است. اکنون اطلاعاتمان را خلاصه می‌کنیم:

$$N = \frac{1}{2} \left[\frac{n(n-1)}{2} \right] \left[\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right] - \frac{n!}{(4!)(n-4)!} \\ = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \quad (۱۱.۳)$$

● مثال ۵.۳ (انرژی نوسانگر هماهنگ): دستگاهی متشکل از N نوسانگر هماهنگ کوانتومی یکسان (مانند اتم‌های بلور) در نظر بگیرید. انرژی این دستگاه با رابطه زیر داده می‌شود:

$$E = \left(M + \frac{N}{2}\right) \hbar \omega \quad (۱۲.۳)$$

که در آن:

$$M = n_1 + n_2 + \dots + n_N \quad n_i = 0, 1, 2, \dots \quad (۱۳.۳)$$

بنا به دلایلی مهم است که بدانیم به چند حالت تساوی فوق برقرار می‌شود، یعنی چند دسته $(n_1, \dots, n_N)$ وجود دارد که در این تساوی صدق می‌کند. بیایید به خاطرات کودکی برگردیم و مسئله را با همان سیب‌های قدیمی حل کنیم! فرض کنید N جعبه داریم که در هر کدام تعدادی سیب گذاشته‌ایم. تعداد کل سیب‌ها M است. حال جعبه‌ها را در یک ردیف بچینید و سیب‌های داخل آن‌ها را نیز در یک ردیف بگذارید. چیزی شبیه شکل ۲ حاصل می‌شود. می‌بینید که در اولین جعبه از سمت چپ ۳ سیب هست، در دومی ۴ سیب، و همین‌طور الی آخر.



شکل ۲ جایگشت‌های سیب‌ها و دیواره‌های جعبه‌ها

حال اینکه ما بگوییم n_i ها مقادیر متفاوتی دارند، معادل این است که بگوییم تعداد سیب‌های داخل جعبه‌ها تغییر می‌کند. یعنی مثلاً جای سیب سوم و دیوار اول (از سمت چپ) عوض می‌شود. یک فرض اساسی مسئله این است که نوسانگرها (سیب‌ها) با هم تفاوتی ندارند و همگی یکسان هستند. بنابراین ترتیب

$$(17.3) \quad (2m-1)!! \equiv (2m-1) \times (2m-3) \times \dots \times 3 \times 1.$$

حال ببینیم چند نوع نمودار می‌توانیم داشته باشیم. یک نوع از آن‌ها به این صورت است:

$$(18.3) \quad D(xy)D(zz)D(zw)D(ww),$$

در این ترکیب اتصال x به y به ۱ طریق ممکن است. وقتی x را به y وصل کردیم، ۳ تا z داریم که دو تا از آن‌ها باید به هم وصل شوند. برای این کار باید آن دو را انتخاب کنیم که به $C(3, 2)$ طریق امکان‌پذیر است. اکنون یک z داریم که به ۳ طریق می‌تواند به یکی از w ها وصل شود. نهایتاً دو w باقی می‌ماند که تنها به یک طریق می‌توانند به هم وصل شوند. بنابراین تعداد نمودارهایی که به این شکل هستند، با توجه به اصل ضرب به‌دست می‌آید:

$$(19.3) \quad \underbrace{D(xy)}_1 \underbrace{D(zz)}_3 \underbrace{D(zw)}_3 \underbrace{D(ww)}_1 \Rightarrow 1 \times 3 \times 3 \times 1 = 9.$$

هفت نوع نمودار دیگر می‌توانیم داشته باشیم که به‌عنوان تمرین سعی کنید هر نوع را بیابید. سرانجام می‌توانید تعداد کل نمودارها را به انواع آن‌ها تقسیم کنید و بنویسید:

$$(20.3) \quad 105 = 4 \times 18 + 3 \times 9 + 1 \times 6$$

۴. حالت‌های پیچیده‌تر

علاوه بر آنچه گفته شد، مسائل پیچیده‌تری در فیزیک هستند که برای حل آن‌ها لازم است از روش‌های ترکیبیات استفاده کنیم.

گاهی برای شمردن تعداد حالت‌ها از توابعی کمک می‌گیرند که به توابع مولد مشهورند. اگرچه شمردن عملی گسسته است، ولی چون در این موارد تعداد حالت‌ها بسیار زیاد است، می‌توان آن‌ها را تقریباً پیوسته در نظر گرفت و از روابط حسابان کمک گرفت. چنین مسائلی در نظریهٔ ریسمان مشاهده می‌شوند. علاوه بر این، شمردن تعداد حالت‌های ممکن برای گازهای فرمیونی یا بوزونی نیز اهمیت ویژه‌ای دارد که به توابع توزیع فرمی-دیراک و بوز-اینشتین منجر می‌شود. به‌هر حال آنچه ما گفتیم تنها نمونه‌هایی از مسائلی بودند که کاربرد استدلال‌های سادهٔ ریاضی در آن‌ها مشهود است و دیگر جایی برای این پرسش باقی نمی‌گذارد که «این درس‌های ریاضی به چه درد می‌خورند!»

سیب‌ها معنایی ندارد. دیواره‌های جعبه‌ها هم که ساختهٔ ذهن ما بودند، پس ترتیب آن‌ها هم اهمیتی ندارد. ضمناً دقت کنید که در این شکل تعداد دیواره‌ها $(N-1)$ است. حالا حرف‌هایمان را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم. کل جایگشت‌های این اشیاء برابر است با $(M+N-1)!$. اما نه جایگشت‌های سیب‌ها اهمیتی دارد و نه جایگشت‌های دیواره‌ها. پس باید با آن‌ها طبق قانون ضرب رفتار کنیم و با تقسیم کردن، اثر آن‌ها را در شمارش از بین ببریم؛ یعنی:

$$(14.3) \quad N = \frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!} = \binom{M+N-1}{M} = \binom{M+N-1}{N-1}$$

• مثال ۳. ۶ (نمودارهای فاینمن): فیزیک‌دانان

برای توصیف اثر دو ذرهٔ باردار بر یکدیگر، نظریه‌ای دارند که در بخشی از آن با چنین عبارتی مواجه می‌شوند:

$$(15.3) \quad \underbrace{\phi(x)\phi(y)}_{t \rightarrow m} \underbrace{\phi(z)\dots}_{t \rightarrow n} \underbrace{\phi(w)\dots}_{t \rightarrow k} \dots$$

ϕ ها توابعی هستند که در اینجا شکل دقیق آن‌ها برای ما اهمیتی ندارد. به‌علاوه فرض می‌کنیم که تعداد کل آن‌ها عددی زوج باشد. قاعدهٔ بازی ساده است. ابتدا ϕ ها را دو به دو به هم وصل کنید. سپس برای هر اتصال اسمی انتخاب کنید. مثلاً اگر $\phi(z)$ را به $\phi(t)$ وصل کرده‌اید، به جای آن موجودی به‌نام $D(zt)$ بگذارید. واضح است که $D(zt) = D(tz)$ ، یعنی ترتیب مهم نیست. وقتی تمام توابع به هم وصل شدند، می‌گوییم یک نمودار فاینمن ساخته‌ایم. حال سؤال این است که هر نمودار فاینمن به چند طریق می‌تواند ساخته شود. بیایید ترکیب خاصی را در نظر بگیریم؛ برای مثال:

$$(16.3) \quad \phi(x) \phi(y) \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(w) \phi(w) \phi(w).$$

قبل از اینکه ببینیم هر نمودار به چند طریق می‌تواند ساخته شود، اجازه دهید حساب کنیم که در مجموع چند نمودار خواهیم داشت. در مرحلهٔ نخست باید یکی از توابع را بردارید و به یک تابع دیگر وصل کنید. این کار را می‌توانید به ۷ طریق انجام دهید. وقتی اتصال اول انجام شد، ۶ تابع می‌ماند که باید دومین اتصال را برقرار کنید. این بار به ۵ حالت می‌توانید این کار را انجام دهید. اگر به‌همین ترتیب این روند را ادامه دهید، نتیجه می‌گیرید تعداد کل نمودارها ۱۰۵ است.

در حالت کلی اگر $2m$ تابع داشته باشیم، تعداد کل نمودارها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

* پی‌نوشت.....

۱. برخی آن را مؤلفهٔ مستقل غیرصفر می‌نامند.
۲. چرا لازم نیست برابری z را با سایر اندیس‌ها بررسی کنیم؟

* M.moghadassi@chmail.ir

* منابع.....

1. C. L. Liu, Introduction to combinatorial mathematics, McGraw Hill, 1968.
2. S. M. Carrol, "Lecture notes on general relativity," gr-qc/9712019.

جراید و نقش آن‌ها در عمومی سازی ریاضیات

بررسی تاریخی طرح چند پرسش ریاضی در جراید کشور،
از دوران ناصری تا پایان عصر پهلوی اول
(قسمت اول)



دکتر فرید قاسملو*

اشاره

دکتر فرید قاسملو، دانش آموخته تاریخ و از محققان برجسته بنیاد دایرةالمعارف اسلامی است. ایشان با همکاری دانشگاه آزاد اسلامی تحقیق جامعی درباره تاریخ ریاضی معاصر ایران انجام و آن را در اختیار ما و خوانندگان مجله برهان قرار دادند. بخش اول این تحقیق در قالب چند گفت‌وگو در شماره‌های پیشین آمد. در ادامه، به بررسی نقش جراید در تاریخ ریاضی معاصر کشورمان، طی دو شماره، می‌پردازیم.

کلیدواژه‌ها: روزنامه علمی، خلاصه الحساب، شیخ بهایی، میرزا عبدالرحیم مهندس، ریاضی در دوره قاجار

مقدمه

نظر گرفت. در این میان، جایگاه دوره سوم یعنی دوره معاصر، با در نظر گرفتن تنوع منابع مطالعه در تاریخ ریاضیات این دوره پررنگ تر می‌شود. از دیگر سو، هنوز خیلی زود است که به بررسی عوامل گوناگونی که می‌توانند به مطالعه رابطه «مردم- ریاضی» در تاریخ ریاضیات در ایران معاصر کمک کنند، پرداخته شود، چراکه هنوز بحث‌های نظری لازم در این خصوص صورت نگرفته است. اما چند نمونه از این عوامل را می‌توان شامل گسترش مدارس، تغییر شکل آموزش ریاضی در ایران، رواج صنعت چاپ و همچنین، ابداع جریده نگاری در این بخش از تاریخ ریاضی در ایران دانست. این عوامل که تا پیش از آن، در دوره‌های متفاوت تاریخ ایران وجود نداشت، به دلایل متعدد و از نگاه‌های گوناگون، نقش مهمی در بسط و گسترش دانش ریاضیات در کشور ما داشته است. بر همین اساس، پرداختن به این پدیده جایگاه مهمی در مطالعات مربوط به تاریخ ریاضیات در ایران خواهد داشت.

یکی از موضوع‌هایی که در بررسی‌های تاریخ علم، و از جمله تاریخ ریاضی، در ایران لازم است مورد توجه قرار گیرد، تبیین جایگاه «مردم» در این بررسی‌هاست. به عبارت دیگر، پرداختن به این موضوع که «مردم» کجای مطالعات تاریخ علوم قرار دارند و نقش آن‌ها در تکوین دانش در جامعه چیست؟ مدتی است که بحث مربوط به مردم و تاریخ علم در زبان فارسی شروع شده و خوش‌بختانه، کتاب‌ها و مقالات چندی در حوزه‌های گوناگون «تاریخ علوم (از جمله تاریخ پزشکی) و مردم» به فارسی ترجمه یا تألیف شده است.^۱ با لایه‌بندی کردن تاریخ ریاضیات در ایران، به‌ویژه تبیین دوره‌های تاریخ ریاضیات ایران به سه دوره عصر باستان، مربوط به دوران پیش از اسلام، تا حدود قرن اول هجری، عصر اسلامی، از قرن دوم تا دوازدهم هجری، و دوره معاصر، از قرن سیزدهم تاکنون، می‌توان جایگاهی نیز برای «مردم» در این دوره‌ها در

به‌طور خلاصه باید گفت، اگر مؤلفه «مردم» در مطالعات تاریخ علم حذف شود، آنچه باقی می‌ماند، بیش از هر چیز، نه مطالعه تاریخ علم در کشور، بلکه مطالعه در تاریخ تولید متون و منابع تاریخ علم خواهد بود. موضوعی که اگرچه بخش مهمی از دانش تاریخ علم در هر جامعه به‌شمار می‌آید، اما همه تاریخ علم هر سرزمین (و از آن میان، ایران) نخواهد بود.

طرح موضوع

پدیده جریده‌نگاری، یکی از ویژگی‌های جامعه مدرن، و یکی از ابزارهای مهم کشورها برای عبور از دوران کهن و رسیدن به دوران معاصر به حساب می‌آید. از دیگر سو، جراید اگرچه در نگاه «هم‌زمانی» بیان‌کننده دغدغه‌ها، مشکلات و ویژگی‌های اجتماع به حساب می‌آیند، در نگاه «در زمانی» بیان‌کننده دغدغه‌هایی هستند که در گذشته «موضوع روز» زندگی مردم بوده‌اند و امروز «منبع تاریخی» (یا تاریخ علمی) برای پرداختن به تاریخ (یا تاریخ علم) به حساب می‌آیند. البته، یکی از منابع مهم برای مطالعه نقش مردم در تاریخ علم، همین جراید خواهند بود. از زوایای متعددی می‌توان به جراید و تاریخ علم پرداخت. اما به‌طور کلی جراید می‌توانند منبع بسیار مهمی، برای بررسی طیف وسیعی از موضوعات تاریخ علم، (و از آن میان، تاریخ ریاضیات) و تبیین رابطه «مردم» با این تاریخ باشند.

آنچه در مقاله حاضر مورد توجه بوده، نگاهی به نقش جراید برای عمومی‌سازی ریاضیات در تاریخ این دانش در دوران معاصر ایران بوده است. مؤلف این سطور در بررسی تاریخ ریاضیات در ایران معاصر، به نمونه‌هایی برخورد کرده است که جراید گام‌هایی برای عمومی کردن ریاضیات برداشته‌اند. حال اگر این موضوع را نیز در نظر بگیریم که خود موضوع «جراید» در بررسی تاریخ ریاضیات در ایران معاصر می‌تواند (و باید) از دو منظر مورد توجه قرار گیرد: جراید عمومی و با مخاطب عام مردم و جراید اختصاصی که به‌ویژه و تنها در موضوع «ریاضیات» در کشور تولید شده و می‌شوند، تا اندازه‌ای به جایگاه بسیار مهم «جراید» در بررسی‌های مربوط به تاریخ ریاضیات در ایران معاصر پی می‌بریم.

بررسی داده‌های تاریخی، نگاهی به ریاضی در دوران قاجار

آنچه تاکنون مؤلف این سطور، درباره کوشش جراید برای عمومی‌سازی دانش ریاضی در ایران، حد فاصل افتتاح دارالفنون تا پایان دوران حکومت پهلوی اول به‌دست آورده، دو نمونه تاریخی از جریده‌نگاری در ایران است که هر کدام از نمونه‌ها، خود مجموعه‌ای از پرسش‌های ریاضی را برای راه‌اندازی بحث و فحص درباره ریاضیات و با موضوع ریاضیات در میان اوراق خود درج کرده‌اند.

نخستین نمونه‌ای که مؤلف این سطور از این دست موفق به یافتن آن شده، چند پرسش ریاضی است که در چند شماره از «روزنامه علمی» طی سال‌های ۱۲۹۶-۱۲۹۴ قمری/ ۱۸۷۸-۱۸۷۶ میلادی به چاپ رسیده‌اند. روزنامه علمی، جریده‌ای دولتی بود که وظیفه انتشار علوم جدید را در کشورمان به عهده داشت^۱ و این موضوع، یعنی «انتشار علوم جدید»، از آن حیث اهمیت پیدا می‌کند که به‌نظر می‌رسد، یکی از رفتارهای اصلاحی ایرانیان، در دوران پس از شکست‌های پی در پی ایران از روسیه در سلسله جنگ‌های ایران و روس، آن بوده است که دریافته بودند، دستیابی به علوم جدید و روزآمدسازی دانش، یکی از راهکارهای اصلاحی مهم در حیطه مملکت‌داری به حساب می‌آید.^۲

از دیگر سو، روزنامه علمی، خود، ادامه حرکتی در راستای بسط و گسترش دانش در کشور است که برای نخستین بار با روزنامه علمی دولت علیه ایران در سال ۱۲۸۱ هجری قمری، یعنی حدود ۱۳ سال پس از افتتاح دارالفنون پا گرفت. به عبارت دیگر، این کوشش ایرانیان برای بسط دانش جدید در کشور از طریق انتشار جریده از سال ۱۲۸۱ و با انتشار روزنامه علمی دولت علیه ایران آغاز شد. روزنامه علمی تا سال ۱۲۸۸ حدود هشت سال انتشار یافت. این روزنامه در کنار «روزنامه دولت علیه ایران» و «روزنامه ملتی»، سه روزنامه‌ای بودند که در ایران دوران ناصری و به‌ویژه دوران بعد از افتتاح دارالفنون در ایران منتشر می‌شدند.^۳ در هر صورت، روزنامه علمی که وظیفه «انتشار علوم که فواید بزرگ بر او مترتب است» برعهده داشت، روی هم رفته در ۵۳ شماره منتشر شد. با پنج سال فترت، روزنامه علمی در سال ۱۲۹۳ ه.ق و به کوشش محمدحسن خان صنیع‌الدوله (مشهور به

به طور کلی جراید می توانند منبع بسیار مهمی، برای بررسی طیف وسیعی از موضوعات تاریخ علم، و از آن میان، تاریخ ریاضیات و تبیین رابطه «مردم» با این تاریخ باشند

نخستین پرسش‌ها (که در شماره ۲۶ روزنامه درج شدند)، ترجمه‌ای است از یکی از مثال‌هایی که در کتاب «خلاصه الحساب» شیخ بهایی (باب هشتم، در به دست آوردن مجهولات با استفاده از جبر و مقابله) آمده است. مقاله با امضای **سلطان محمد** در روزنامه درج شده است و این سلطان محمد، یکی از درس‌خواندگان دوره ناصری و از شاهزادگان دربار ناصرالدین شاه، فرزند امام قلی میرزا عمادالدوله بوده است. این را می‌دانیم که سلطان محمد میرزا نزد آقا علی مدرس تهرانی درس خوانده و ریاضی را از او آموخته و در عین حال موسیقی، عکاسی و خوش‌نویسی نیز می‌دانسته و شاعر نیز بوده است.^۷

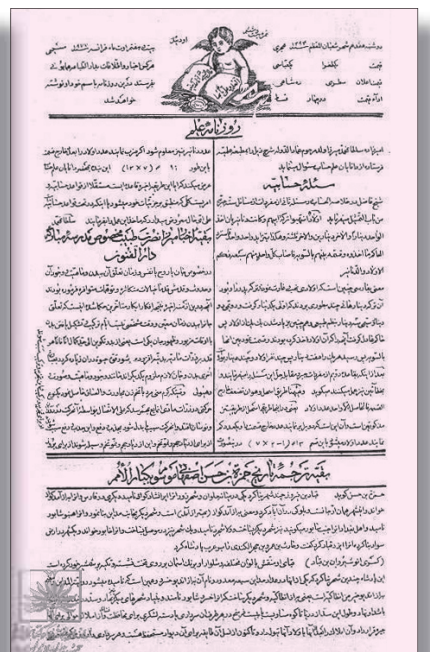
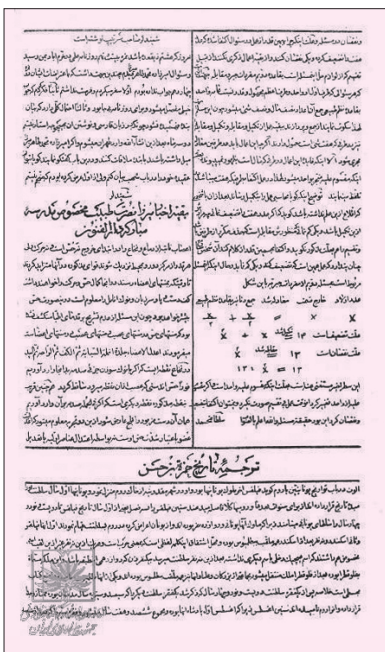
این موضوع که پرسش مطرح شده در روزنامه علمی، در سال ۱۲۹۴ و حدود ۲۶ سال پس از افتتاح دارالفنون و ورود مباحث جدید ریاضی به ایران، همچنان از مسائل مطروحه در کتاب خلاصه الحساب است، یکی از موضوع‌های قابل توجه در تکوین دانش ریاضی در دوران معاصر تاریخ ایران به حساب می‌آید. مؤلف این دستور، در جایی دیگر، به تفصیل کوشیده است نشان دهد کتاب خلاصه الحساب تا ده‌ها سال پس از ورود دانش ریاضی در ایران، همچنان بین عامه مردم سیادت داشت و به‌ویژه، با توجه به تدریس آن در مدارس علوم دینی، یکی از پایه‌های بررسی دانش ریاضی بین مردم (و نه تحصیل‌کردگان دانش‌های جدید، و از آن جمله

اعتمادالسلطنه، مرگ در سال ۱۳۱۳ هـ.ق) بار دیگر در تهران منتشر شد.^۸

آنچه درباره تاریخ ریاضیات در ایران معاصر و ارتباط آن با روزنامه علمی مهم است، مجموعه‌ای از پرسش‌های ریاضی و پاسخ‌های آن‌هاست که در دست‌کم شش شماره از این جریده (که اگرچه عنوان روزنامه داشت، اما با فاصله انتشار نامنظم منتشر می‌شد) به ترتیب زیر درج شده:

- * شماره ۲۶، دوشنبه ۱۷ شعبان ۱۲۹۴
- * شماره ۲۹، دوشنبه ۱۵ رمضان ۱۲۹۴
- * شماره ۳۰، دوشنبه ۷ شوال ۱۲۹۴
- * شماره ۳۵، دوشنبه ۴ ذی حجه ۱۲۹۴
- * شماره ۵۳، دوشنبه ۱۹ محرم ۱۲۹۶
- * شماره ۵۵، سه‌شنبه ۱۷ ربیع‌الاول ۱۲۹۶

به نظر مؤلف این دستور، این پرسش‌ها و پاسخ‌های ارسال شده به روزنامه از جمله داده‌های مهم مربوط به تکوین ریاضیات در ایران معاصر به حساب می‌آیند و از جنبه‌های متفاوت می‌توان به آن‌ها پرداخت؛ از جمله، اصطلاحات به کار رفته در آن‌ها (که جملگی تحت تأثیر کتاب بسیار مهم آموزش ریاضی در مدارس علوم دینی ایران در آن دوران، خلاصه الحساب شیخ بهایی شکل گرفته‌اند)، علائم ریاضی به کار گرفته در آن‌ها که برخلاف مؤلفه قبلی برگرفته از دانش ریاضی نوین هستند، و البته موضوع پرسش‌ها.



مهندسين ثابت نموده‌اند که هر زاویه قطعه منفرجه است، اگر چنانچه قطعه بزرگ‌تر از نصف باشد، و حاده است اگر بزرگ‌تر از نصف نباشد

ریاضی، به‌شمار می‌آید.^۸

در ادامهٔ این مقاله، به یکی دیگر از نمونه‌های کوشش در عمومی‌سازی دانش ریاضی در ایران از طریق نشر جراید که در سال ۱۳۱۹ هـ.ش انجام شده است، اشاره خواهیم کرد. اما نکتهٔ مهم این است که حد فاصل سال‌های ۱۲۹۴ هـ.ق/ ۱۸۷۶ میلادی تا ۱۳۱۹ هـ.ش/ ۱۹۴۰ میلادی، یعنی حد فاصل تقریباً ۶۴ سالهٔ بین پرسش‌های درج شده در روزنامهٔ علمی، تا پرسش‌های بعدی، دانش ریاضی در ایران بیش از هر زمان دیگری در تاریخ خود دچار تغییر شده است. کما اینکه پرسش‌های طرح شده در سال ۱۳۱۹ هـ.ش جملگی از جنس ریاضیات نوین و اروپایی بودند و این تغییر از نگاه سنتی به ریاضی تا نگاه امروزی را در مقایسهٔ بین این دو دسته پرسش می‌توان مشاهده کرد.

در هر صورت، پس از پرسش طرح شده توسط سلطان محمدمیرزا در شمارهٔ ۲۶ روزنامهٔ علمی، سه دسته پاسخ به روزنامه رسید و در سه شمارهٔ متفاوت درج شد. این موضوع که سلطان محمدمیرزا از مردم و مخاطبان روزنامهٔ علمی خواسته است، نظر خود را دربارهٔ این پرسش به مجله ارسال کنند. همان رویکرد کوششی برای عمومی‌سازی دانش ریاضی در کشور است.

از میان پاسخ‌های ارسال شده برای این پرسش، آنچه در شمارهٔ ۲۹ روزنامهٔ علمی درج شده از همه مفصل‌تر است. در این شماره از روزنامه (صفحهٔ ۲) روی هم‌رفته سه

نفر کوشیده‌اند به پرسش

پاسخ دهند: شخصی

به نام محمدطاهر میرزا،

شخصی ناشناس و میرزا

عبدالرحیم مهندس،

فرزند صدیق‌الملک. این

سه پاسخ روی هم‌رفته

تقریباً یک صفحه از حجم

چهار صفحه‌ای شمارهٔ

۲۹ روزنامهٔ علمی را به

خود اختصاص داده‌اند.

در شمارهٔ ۳۰ روزنامهٔ

علمی، حسام‌الدین فرزند

حاج میرزا محمد که به

«حکیم‌باشی شیرازی»

نیز مشهور بوده، گزارشی

دربارهٔ حل پرسش به‌دست داده است.

سلطان محمدمیرزا، یعنی همان کسی که برای نخستین بار در شمارهٔ ۲۶ روزنامهٔ علمی پرسش مطروحه در کتاب خلاصه‌الحساب را چاپ کرده بود، خود لازم دیده است دربارهٔ چهار پاسخی که برای حل مسئله فرستاده شده است، توضیحی دهد. بنابراین، در شمارهٔ ۳۵ روزنامهٔ علمی شرحی موسع برای چگونگی حل مسئله و توضیح کوشش چهار نفر قبلی برای حل مسئله به‌دست داده است که این توضیح نیز بیش از یک صفحه از حجم چهار صفحه‌ای روزنامه را به خود اختصاص داده بوده است. جالب اینجاست که خود سلطان محمدمیرزا در شمارهٔ ۲۶ روزنامهٔ علمی، وقتی به طرح مسئله می‌پردازد، جواب آن را نیز آورده است و دغدغهٔ او آن بوده است که چگونگی حل مسئله به پرسش گذاشته شود. همچنین، توضیحات همین سلطان محمدمیرزا در شمارهٔ ۳۵ روزنامهٔ علمی، ناظر بر راه‌حل‌های متفاوت حل مسئله است.

در مقام پایان دادن به این بخش، عین پرسش را به نقل از نوشتهٔ سلطان محمدمیرزا در شمارهٔ ۲۶ روزنامهٔ علمی ذکر می‌کنیم. قابل ذکر است که او ابتدا منبع مسئله را ذکر کرده، بعد متن عربی آن را از خلاصه‌الحساب درج کرده، آن‌گاه ترجمهٔ فارسی مسئله را آورده و در نهایت، گزارشی شامل حل مسئله را به‌دست داده است. پرسش این است: «**اولادی نهب و غارت نمودند ترکهٔ پدر را. او بود آن ترکه دینارهایی چند، به‌طوری بردند که اولی یک دینار گرفت و دومی دو دینار و سومی سه دینار به‌نظم طبیعی و همچنین به زیاد شدن یک یک از اولاد. پس حاکم عادل گرفت آنچه را که آن اولاد اخذ نموده بودند و قسمت نمود بین آن‌ها بالسویه. پس رسید هر یک را هفت دینار. پس چند نفر اولاد و چند دینار بوده است؟**»^۹

پرسش‌هایی که در شمارهٔ ۵۳ روزنامهٔ علمی درج شده‌اند، اگرچه همان فضای عمومی ریاضی ایران در دوران اسلامی را دارند، اما بیش از آن که پرسش‌هایی هندسی به‌شمار آیند، مجموعهٔ داده‌هایی فلسفی هستند. این را می‌دانیم که یکی از مسائل مهم مطروحه در کتب کلامی که البته مورد توجه فلاسفه اسلامی قرار نگرفت. اندیشهٔ «جزء لایتجزا» و بحث‌های اتم‌گرایانه^{۱۰} بود. در حالی که فلاسفهٔ اسلامی موضوع جزء لایتجزاء را نپذیرفته و معتقد به کوچک‌ترین جزئی از ماده که



غیرقابل تقسیم باشد، نبودند، این اندیشه بسیار مورد توجه متکلمین اسلامی قرار گرفت و از آن برای اثبات قضایای کلامی کمک گرفته شد. بر همین اساس، براهین هندسی چندی نیز، براساس مفاهیم کوچک‌تر یا بزرگ‌تر و نیز کم کردن یا افزودن به اندازه‌ای که از نصف آن کمتر شود یا بیشتر، برای استفاده از مفهوم جزء لایتجزا بین متکلمین اسلامی طرح شد. مسائلی که در شماره ۵۳ روزنامه علمی طرح شده‌اند، از این دست از مسائل به‌شمار می‌آیند.

از میان دو پرسش طرح شده در این شماره از روزنامه، که هر دو با امضای شجاع‌الدین میرزا درج شده‌اند. اولی به کلی ماهیتی فلسفی - کلامی دارد و به موضوع **طفره** اختصاص دارد^۱ و همان گونه که ذکر شد، بحثی است برای بررسی موضوع نامتناهی بودن تقسیم‌پذیری ذره که البته مورد علاقه متکلمین است. اما پرسش دوم، استدلالی هندسی است برای بحث پیرامون جزء لایتجزا و تقسیم‌پذیر بودن یا نبودن ذره. پاسخی که در شماره ۵۵ روزنامه علمی به این پرسش داده شده است، باز یکی دیگر از جنبه‌های مهم و البته جالب سرشت دانش ریاضی در ایران دوران قاجار را نشان می‌دهد؛ آنجایی که متکلمین از براهین هندسی، و البته تحت سیطره دانش ریاضی اقلیدسی به بحث پیرامون نظام طبیعت می‌پردازند.

در این شماره، شمس‌الدین حکیم‌اللهی لواسانی، از فلاسفه و متکلمان مکتب فلسفی تهران که در سبزواری نزد حاج ملاهادی سبزواری درس خوانده بود (مرگ در سال ۱۳۳۶ هـ. ق) به تفصیل به دو پرسش مطرح شده توسط شجاع‌الدین میرزا پاسخ داده است^۱؛ اگر چه سه چهارم حجم نوشته‌های او به موضوع مسئله طفره و تنها یک چهارم به پرسش هندسی شجاع‌الدین میرزا اختصاص دارد.

روح حاکم بر پرسش طرح شده توسط شجاع‌الدین میرزا، همچنین پاسخ‌های طرح شده توسط شمس‌الدین حکیم‌اللهی و نیز توجه به این موضوع که این شمس‌الدین حکیم‌اللهی لاجرم از نگاه حاج ملاهادی سبزواری به طرح مسائل می‌پردازد (البته بدون آنکه نامی از سبزواری در این میان آورده شود)، خود نظام فکری حاکم بر بحث‌های کلامی ایران دوران قاجار و نیز استفاده‌های آن زمان از مباحث هندسه برای استدلال‌های کلامی را می‌رساند. با توجه به این موضوع که هیچ‌کدام از این مسائل تاریکی نداشته‌اند و همچنان دنباله‌رو بحث‌های کلامی و هندسی

دوره میانه تاریخ ایران به حساب می‌آیند. مسائل طرح شده توسط شجاع‌الدین میرزا در شماره ۵۳ روزنامه علمی به شرح زیر هستند:

«مسئله اول آن است که حکمای اشراقیین و مشائیین ثابت نموده‌اند که طفره محال است و مهندسیین ثابت نموده‌اند که هر زاویه قطعه منفرجه است، اگر چنانچه قطعه بزرگ‌تر از نصف باشد، و حاده است اگر بزرگ‌تر از نصف نباشد. پس بنابراین، اگر چنانچه زاویه حاده را حرکت بدهیم، هنوز به قائمه نرسیده به منفرجه خواهد رسید. پس باید طفره را جایز بدانیم و جایز دانستن طفره لیس معقول عند ارباب العقول.

مسئله ثانی آن است که مهندسیین اثبات نموده‌اند که زاویه نصف دایره بزرگ‌تر است از هر حاده مستقیمه الخطین، و حال آنکه زاویه حاده سیال است و هر سیال متوقف به حدی یا حدودی نخواهد شد، محال است متوقف به حدی شود.»

* پی‌نوشت‌ها.

۱. یکی از بهترین نمونه‌های ادبیات علمی درباره نقش مردم در تاریخ علوم این کتاب است که می‌تواند مبدأ خوبی برای نظریه‌پردازی در این حوزه به‌شمار آید: کلیفورد کانر (۱۳۹۰). تاریخ علم مردم. ترجمه حسن افشار. تهران.

۲. درباره روزنامه علمی از جمله نگاه کنید به: صدر هاشمی (۱۳۲۴). «چند روزنامه مهم در زمان ناصرالدین شاه». مجله یادگار. سال ۲. شماره ۳. آبان ماه. بسیاری از شماره‌های این جریده روی بخش الکترونیک کتابخانه ملی ایران قابل دستیابی است. برای راهنمایی بیشتر، نشانی شماره نخست این جریده را روی پایگاه درج می‌کنیم:

<http://dl.nlai.ir/UI/13409c8f-a25b-42f2-93cf-f1803863b6e4/LRRView.aspx>

۳. از جمله بهترین تحلیل‌ها در این حوزه به وسیله رینگر ارائه شده است: مونیکا رینگر (۱۳۸۱). آموزش، دین و گفتمان اصلاح فرهنگی دوران قاجار. ترجمه مهدی حقیقت‌خواه. تهران.

۴. درباره این جرید دوران ناصری، از جمله نگاه کنید به: ماشالله آجودانی (۱۳۸۷). مشروطه ایرانی. تهران.

۵. از جمله نگاه کنید به: صدر هاشمی، همان ص ۶۲-۶۰؛ نیز: جعفر خماسی زاده (۱۳۸۰). روزنامه‌های ایران، از آغاز تا سال ۱۳۲۹ هـ. ق/ ۱۲۸۹ هـ. ش، برداشتی از فهرست هـ. ل. رابینو. تهران.

۶. شکل اصلی مسئله در خلاصه‌الحساب آمده و البته بدون کم و کاستی (چه در متن عربی و چه در متن فارسی) به وسیله سلطان محمد نیز درج شده است. برای متن اصلی نگاه کنید به: شیخ بهایی (۱۳۹۰). خلاصه‌الحساب. چاپ یوسف بیگ باباپور. قم.

۷. برای آگاهی بیشتر درباره زندگی سلطان محمد نگاه کنید به: ایرج افشار (۱۳۸۲). چهل سال تاریخ ایران. تهران.

۸. این موضوع را در نوشته خویش که امیدوارم طی سال ۱۳۹۳ منتشر شود، بحث کرده‌ام: فرید قاسملو (۱۳۹۳). رهیافتی به تاریخ ریاضیات در ایران معاصر. تهران.

۹. درباره جزء لایتجزی از جمله نگاه کنید: به دایرةالمعارف بزرگ اسلامی، زیر نظر محمد کاظم موسوی بجنوردی، جلد ۱۸ ذیل مدخل جزء لایتجزی (نوشته حسین معصومی همدانی).

۱۰. درباره جزء مسئله طفره، از جمله نگاه کنید به: ابوالحسن اشعری (۱۹۸۴). مقالات الاسلامیین و اختلاف المصلیین. چاپ هلموت ریتز. ویسبادن.

۱۱. درباره شمس‌الدین حکیم‌اللهی نگاه کنید به: محمد قزوینی (۱۳۲۱). «وفیات معاصرین». مجله یادگار، سال ۳. شماره ۵. دی ماه.

■ توضیح هیئت تحریریه:

صورت ریاضی این مسئله، که در سال‌های بعد و حتی اخیر، بارها در منابع مختلف و به اشکال گوناگون مورد استفاده قرار گرفته است، حل این معادله است:

$$\frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \gamma$$

در این ایام که مشغول بستن صفحات «مجله برهان» بودیم، نامه‌ها و ایمیل‌های زیادی از عزیزان مخاطب، اعم از همکاران گرامی و یا دانش‌آموزان عزیز خواننده مجله داشتیم که لازم دانستیم، لااقل به برخی از آن‌ها اشاراتی گذرا داشته و پاسخ‌گوی محبت دوستان باشیم. لازم به تکرار نیست که این‌ها تنها بخشی از مطالب رسیده است و لذا پیشاپیش از همه عزیزانی که در این شماره مجال پاسخ‌گویی به آنان فراهم نیامده است، عذرخواهی می‌کنیم.

● همکاران محترم، آقای دکتر مرتضی بیات، عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد واحد زنجان، و خانم زهرا خاتمی، دبیر آموزش و پرورش زنجان مقاله‌هایتان به دستمان رسید. با سپاس فراوان از شما عزیزان، مقاله «تعمیم یک مسئله هندسه» را در این شماره مورد استفاده قرار داده‌ایم و از مقاله دیگرتان با عنوان «اثبات ترکیباتی قضیه‌های ابن‌هشیم و فرما» در یکی از شماره‌های بعد استفاده خواهیم کرد. حتماً باز هم برایمان از مقالات و مطالب خوبتان بفرستید.

● همکار محترم آقای حسینعلی کثیری، دبیر بازنشسته ریاضی، از شهرستان بهشهر با تشکر از شما بابت ارسال مسائل، آن‌ها را برای استفاده در بخش «پای تخته» به مسئول این قسمت تحویل دادیم. انتظار داریم که شما همکار گرامی و پیشکسوت عرصه آموزش ریاضی ما را از مقالات و مطالب خوبتان که گره‌گشای مشکلات دبیران و دانش‌آموزان رشته ریاضی است، محروم نفرمایید. منتظر کارهای دیگرتان می‌مانیم.

● همکار گرامی، آقای شهریار رضایی نیکو، از استان خوزستان مقاله‌تان با عنوان «الگوریتمی برای محاسبه ریشه سوم اعداد» به دستمان رسید. امیدواریم در یکی از شماره‌های آینده مورد استفاده قرار گیرد. با سپاس فراوان از شما، منتظر کارهای دیگرتان می‌مانیم.

● همکار گرامی، آقای محمد شریفی روشناوند، دبیر ریاضی از شهرستان گناباد

مقاله‌تان با عنوان «برهان دیگر برای $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ » به دستمان رسید. استدلالی که ارائه کرده‌اید، این نقطه ابهام اساسی را دارد که در نتیجه‌گیری نهایی خود، بعد از آنکه نشان دادید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{\sqrt{n}}{n})}{(\frac{\sqrt{n}}{n})} = 1$$

فرض کردید که: $\frac{\sqrt{n}}{n} = x$ و بنابراین: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

اما اینجا یک سؤال مهم پیش می‌آید: آیا همه اعداد حقیقی موجود در همسایگی (راست و چپ) $x=0$ را می‌توان مساوی $\frac{\sqrt{n}}{n}$ در نظر گرفت؟

از اعداد منفی همسایگی چپ $x=0$ هم که صرف نظر کنیم، باز هم همه اعداد حقیقی مثبت را نمی‌توان معادل $\frac{\sqrt{n}}{n}$ (در $n \in \mathbb{N}$) در نظر گرفت. یعنی هر عدد حقیقی مثبت، لزوماً به صورت حاصل تقسیم عدد گنگ 2π بر یک عدد طبیعی دلخواه n قابل نمایش نیست. اما ایده‌ای که به کار گرفته‌اید، همان روشی است که برای اثبات دستور مساحت دایره مورد استفاده قرار می‌گیرد. یعنی با در نظر گرفتن مساحت‌های n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی و این واقعیت که مساحت دایره بین مساحت‌های آن‌ها قرار دارد و با توجه به قضیه فشردگی، می‌توان دستور مساحت دایره را اثبات کرد. این موضوعی است که در کتاب‌های درسی ما متأسفانه مورد توجه قرار نگرفته است.

توصیه ما این است که شکل مقاله خود را تغییر دهید و به جای آنکه دستور مساحت دایره ($S=\pi r^2$) را بدون اثبات بپذیرید و از آن برای اثبات دستور $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ استفاده کنید، دستور مساحت دایره را اثبات کنید. در این صورت حتماً می‌توانیم از مقاله‌تان استفاده کنیم. با سپاس مجدد و آرزوی توفیق برای شما، منتظر کارهایتان هستیم.

پاسخ به

● دوست دانش آموز، خانم فاطمه میرزایی،
از شهرستان خرم آباد، استان لرستان

مطالبتان به دستمان رسید. با سپاس از توجهتان به مجله برهان، باید به اطلاعاتن برسانیم که کشف الگوهای مختلف در میان عددهای طبیعی، از دیرباز مورد توجه ریاضی دانان حرفه‌ای و آماتور بوده است و جاذبه زیادی برای عده بسیاری از علاقه‌مندان ریاضیات داشته است. اما حدس زدن در این زمینه به‌جز جنبه‌های سرگرم کننده آن، نمی‌تواند به‌تنهایی چندان مفید باشد. اگر به واقع به رشته ریاضیات علاقه‌مند هستید، باید بیشتر مطالعه کنید. نامه دیگران را که بیشتر به مباحث زیست‌شناسی مربوط می‌شد، به مسئولان مجله «رشد آموزش زیست‌شناسی» تحویل دادیم.

● همکار محترم، آقای اسحق حسین پور،
دبیر ریاضی از شهرستان بابل

مقالاتتان با عنوان «گراف‌های فازی و بررسی خواص آن‌ها» و «عملگرها در مجموعه‌های فازی و بررسی خواص آن‌ها» به دستمان رسید. ضمن تشکر از توجهتان به مجله و نیز داشتن روحیه تحقیق و مطالعه که از نوع کارهایتان کاملاً مشهود و شایان تقدیر است، در عین حال که سعی می‌کنیم حتماً از این مقالات در شماره‌های آتی استفاده کنیم، باید یادآور شویم که مخاطبان اصلی مجله ما، دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه هستند. لذا تقاضا می‌کنیم در مقالات بعدی که حتماً برای ما می‌فرستید، به نیازهای این گروه توجه بیشتری مبذول دارید.

● همکار محترم، خانم عابده مرادی، از
آموزش و پرورش شهرستان پیشوا

مقاله‌تان با عنوان «استدلال و اثبات»، به دستمان رسید. با سپاس فراوان از لطفتان، به اطلاع شما می‌رسانیم؛ اگر شماره‌های دو سال اخیر را مطالعه کرده باشید، حتماً تصدیق می‌فرمایید که مطالب مشابه در این شماره‌ها بسیار داشته‌ایم. ضمن تشکر مجدد از شما، بابت توجهتان به مجله برهان، از شما می‌خواهیم که روی مقالات مرتبط با مباحث کتاب‌های درسی که نیاز دانش‌آموزان است، تمرکز نمایید.

● همکاران عزیز، آقایان بهرام
دستوریان و احمد الهی، دبیران ریاضی
از شهرستان کهگیلویه

مطلب مشترکتان با عنوان «نامساوی مثلثی در ماتریس‌ها» به دستمان رسید. ان‌شاءالله در یکی از شماره‌های آتی از آن استفاده می‌کنیم. با تشکر فراوان از شما، باز هم با ما در تماس باشید.

● همکار گرامی آقای محمد مهدوی، دبیر ریاضی
از شهرستان میانه

لطف شما تا به حال چندبار شامل حال ما شده و مقاله «تعیین علامت» از شما در شماره زمستان به چاپ رسید. مقالات دیگرتان هم ان‌شاءالله در شماره‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرند. با تشکر فراوان از شما منتظر کارهای دیگرتان هستیم.

● همکار گرامی، آقای هیثم دیناروند، از شهرستان
شوش دانیال (ع)

مقاله خوبتان با عنوان «استفاده از مثال‌های نقض در آموزش ریاضی دوره متوسطه» به دستمان رسید. با سپاس فراوان از شما، در یکی از شماره‌های آینده از آن استفاده می‌کنیم. باز هم با ما در ارتباط باشید.

نامه‌ها و
پیام‌نگارها

ساخت انیمیشن برای آموزش ریاضی

چکیده

معلم ریاضی چگونه می تواند مفاهیم ریاضی را به صورت انیمیشن بیان کند، بدون اینکه در انیمیشن سازی تخصصی داشته باشد؟ آیا هر انیمیشنی می تواند برای آموزش ریاضی مناسب باشد؟ با توجه به تغییرات سریعی که در علم و آموزش علوم توسط رایانه به وجود آمده، پاسخ به سؤالات بالا برای هر معلم ریاضی لازم است. در این مختصر سعی شده است که به این سؤالات پاسخی مناسب داده شود.



فرزاد حمزه پور*
دبیر ریاضی بانه
قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

کلیدواژه ها: انیمیشن سازی، انیمیشن آموزشی، وسایل کمک آموزشی

مقدمه

بر همه مدرسان ریاضی در همه سطوح واضح است که استفاده از وسایل کمک آموزشی در امر تدریس بسیار اهمیت دارد. اما مسئله این است که ساخت چنین وسایلی، هزینه بر، سخت و در مواردی غیرممکن است که البته برخی از این مشکلات به دلیل ساختار درس ریاضی است. غیر از این، نگهداری این وسایل نیز موضوع دیگری است و در کمتر مدرسه ای مکانی برای آن وجود دارد. خوش بختانه استفاده از رایانه برخی از این مشکلات را از بین برده است. نرم افزارهای ریاضی، به ویژه نرم افزار mathematica امکانات فوق العاده ای دارند که طراحی شکل و ساخت انیمیشن در آن ها بسیار آسان صورت می گیرد. همچنین، ابزار بسیار مناسبی برای تولید محتوای الکترونیکی در درس های ریاضی و فیزیک هستند. البته نرم افزارهای بسیاری از جمله Flash هم وجود دارند که برای ساخت انیمیشن های آموزشی مفیدند، اما کار با آن ها خارج از محیط ریاضی است و در واقع اطلاعات ذهن طراح به نمایش درمی آیند. در صورتی که نرم افزارهای ریاضی نمایشگر محیط واقعی ریاضی هستند و در بسیاری از موارد از این انیمیشن ها برای حل و درک مسئله هم استفاده می شود. علاوه بر این، برای کاربر ریاضی محیط این نرم افزارها محیطی آشناست.

برای ساخت یک قطعه انیمیشن به چند تصویر مرتبط نیاز داریم. ما با نمایش متوالی آن ها حرکت ایجاد شود. نرم افزار mathematica، هم امکان ایجاد این تصویرها و هم امکان نمایش متوالی آن ها را دارد. به این منظور ابتدا به معرفی چند دستور مورد نیاز می پردازیم.

دنباله

برای تولید جملات یک دنباله یا فهرست از دستور زیر استفاده می کنیم:

```
A=Table[F(n),{n,a,b}]
```

برای مثال، «برنامه ۱» فهرستی از اعداد مربع کامل از ۱ تا ۱۰۰ را تولید می کند:

```
Table[n^2,{n,1,15}]
```

```
{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225}
```

برنامه ۱

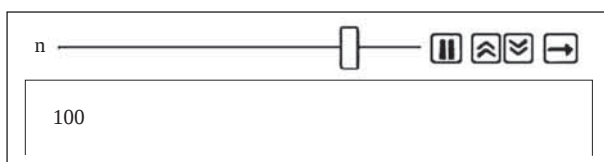
Animate

این دستور جملات دنباله $f(n)$ را پشت سر هم نمایش می دهد و از آن برای ساخت انیمیشن استفاده می شود.

```
A=Animate[f(n),{n,a,b}]
```

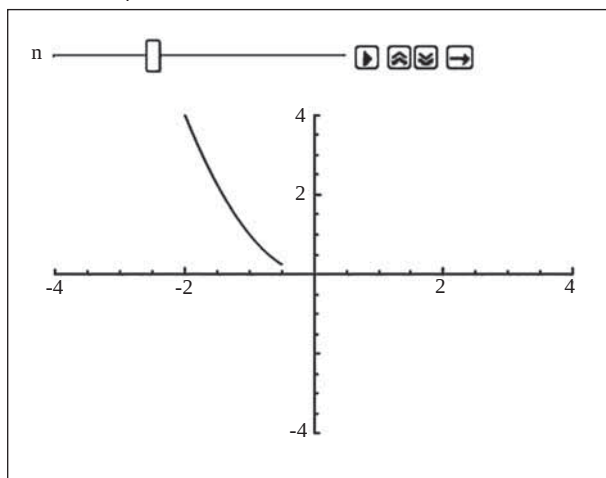
$f(n)$ می تواند یک دستور محاسباتی و یا یک دستور گرافیکی باشد.

```
Animate[n^2,{n,1,12,1}]
```



برنامه ۲

`Animate[Plot[x^2, {x, -2, n}, PlotRange -> {{-4, 4}, {-4, 4}}, {n, -7/4, 2, 1/4}]`



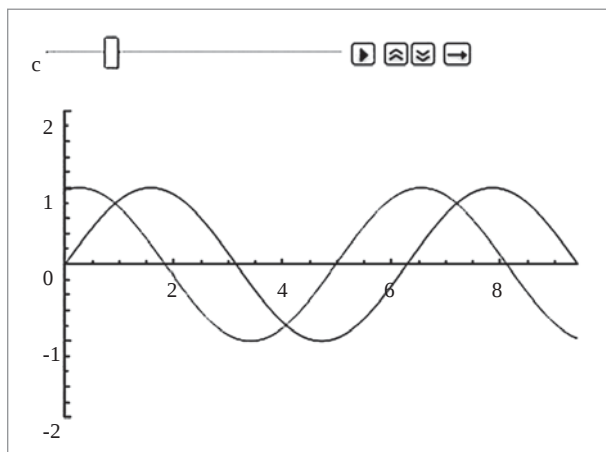
شکل ۳

در برنامه بالا گام حلقه به اندازه $\frac{1}{4}$ است و در صورتی که طول گام کمتر شود، کیفیت نمایش بالاتر می‌رود.

انتقال تابع سینوس

می‌دانیم که نمودار تابع $y=\sin(x+c)$ انتقال تابع $y=\sin(x)$ روی محور طول‌هاست. بنابراین در این مورد عامل ایجاد حرکت c محسوب می‌شود که باید در حلقه `Animate` قرار بگیرد.

`Animate[Plot[{sin[x], sin[x+c]}, {x, 0, 3π}, PlotRange -> {{0, 3π}, {{0, 3π}}, {c, 0, 2π, π/12}}]`



شکل ۴

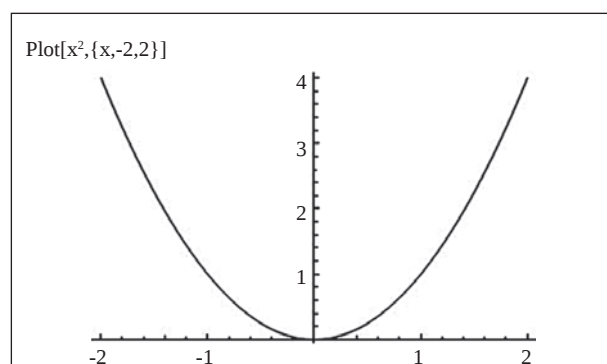
در انیمیشن بالا برای مشاهده حرکت و حل مسئله، نمودار دو تابع $y=\sin(x)$ و $y=\sin(x+c)$ با هم رسم شده‌اند. در شرایطی که دوربین ثابت است، $y=\sin(x)+c$ نیز انتقال یافته تابع $y=\sin(x)$ در راستای محور عرض‌هاست. بنابراین عامل ایجاد حرکت در حلقه `Animate`، « c »

در خروجی برنامه ۲ امکانات افزایش یا کاهش سرعت نمایش و تغییر جهت نمایش مشاهده می‌شود. به زبان ساده، `Animate` نوعی حلقه است. در این حلقه، n عامل ایجاد حرکت محسوب می‌شود.

رسم نمودار تابع به صورت متحرک

فرض کنیم می‌خواهیم قطعه انیمیشنی بسازیم که نمودار $y=x^2$ را در صفحه رسم کند؛ بدون اینکه قلم دیده شود. دستور `Plot` نمودار تابع f را در فاصله $[a, b]$ به صورت زیر رسم می‌کند.

`Plot[f(x), {x, a, b}]`



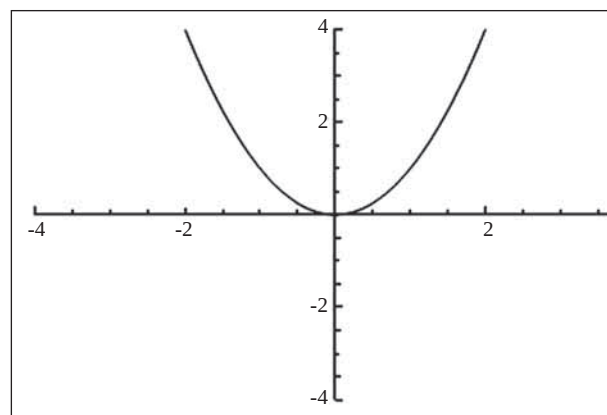
شکل ۱

کنترل دوربین

ساخت انیمیشن کنترل دوربین بسیار مهم است که توسط دستور `PlotRange` انجام می‌شود. این دستور شکل موجود در مستطیل $[c, d] \times [e, f]$ را نمایش می‌دهد که به صورت `PlotRange -> {{c, d}, {e, f}}` در دستور `Plot` قرار می‌گیرد.

مثال:

`Plot[x^2, {x, -2, 2}, PlotRange -> {{-4, 4}, {-4, 4}}]`



شکل ۲

در انیمیشن موردنظر عامل ایجاد حرکت دامنه تابع است که به صورت $[-2, n]$ درمی‌آید؛ در شرایطی که دوربین ثابت است.

محاسبه سطح زیر منحنی با روش مستطیل بندی

در این قسمت هم به چند دستور نیاز داریم:

رسم مستطیل

برای رسم یک مستطیل موازی محورها که رئوس روی یکی از قطرهای آن (a,b) , (c,d) است، با دستور

$A = \text{Rectangle}[a,b], \{c,d\}$

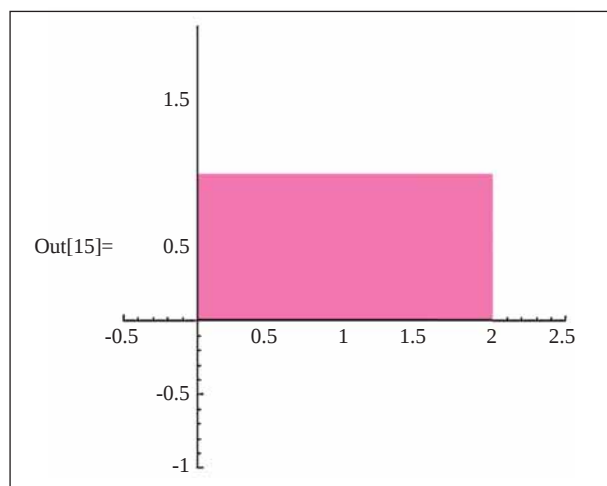
مستطیل را معرفی و نام گذاری می کنیم. سپس با دستور «Graphics[A]» آن را رسم می کنیم.

In[14]=A= Rectangle[{0,0}, {2,1}]

Graphics[A,Axes → True PlotRange→{{-5,2.5},

{-1,2}}, {AspectRatio → 1}, {n, 3, 0, .04}]

Out[14]= Rectangle[{0,0}, {2,1}]



شکل ۷

چندضلعی

یک ضلعی را به صورت $A = \text{Polygon}[\{x_1, y_1\}, \dots, \{x_n, y_n\}]$ معرفی می کنیم و با دستور Graphics[A] آن را نمایش می دهیم.

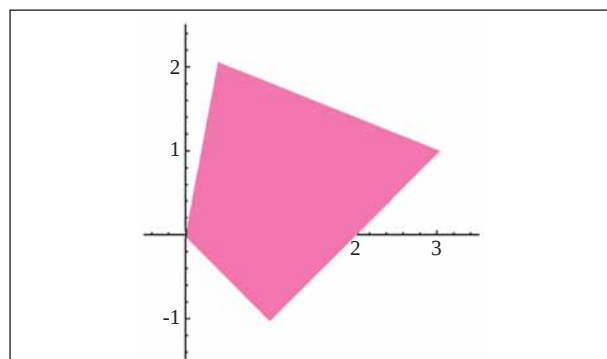
مثال:

A= Polygon[{0,0}, {1,-1}, {2,0}, {3,1}, {4,2}]

Graphics[A, PlotRange → {{-5,3.5}, {-1.5,2.5}},

{AspectRatio → 1, Axes → True}]

Polygon[{0,0}, {1,-1}, {2,0}, {3,1}, {4,2}]

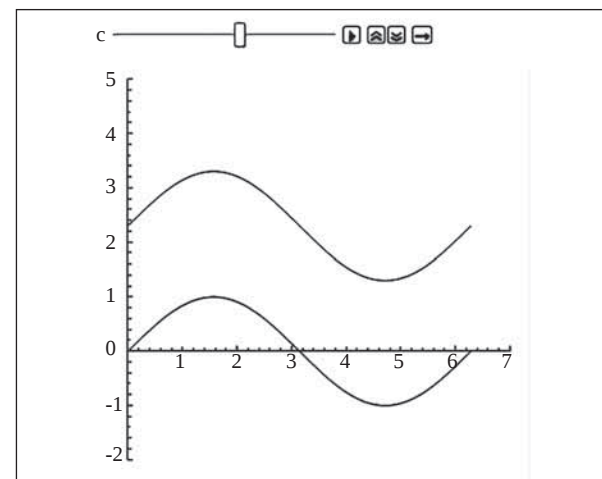


شکل ۸

است. همچنین نمودار دو تابع را با هم در یک دستگاه رسم می کنیم.

Animate[Plot[{sin[x], sin[x]+c}, {x,0,2π}, PlotRange → {{0,7},

{-2,5}}, AspectRatio → 1], {c,0,4,1}]



شکل ۵

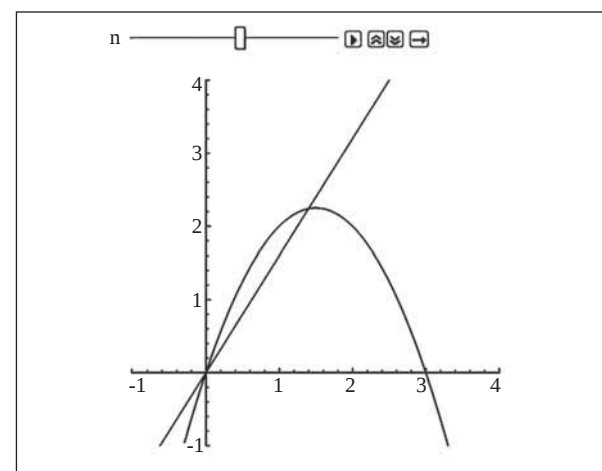
روش نیوتن برای محاسبه شیب خط مماس بر منحنی

در این روش تاریخی، برای محاسبه شیب خط مماس بر یک منحنی در نقطه A، نقطه B را روی منحنی در نظر می گیریم و شیب خط AB را حساب می کنیم. این شیب، تقریبی از شیب خط مماس است و هر چه B به A نزدیک تر باشد، تقریب دقیق تر خواهد بود.

به فرض می خواهیم محاسبه شیب خط مماس بر $f(x) = -x^2 + 3x$ را در مبدأ به صورت انیمیشن در آوریم. بنابراین مبدأ نقطه A است و: $B = (n, -n^2 + 3n)$. همچنین، معادله خط AB به صورت $y = (-n+3)x$ است که این دو تابع را با هم در یک دستگاه رسم می کنیم. عامل ایجاد حرکت n است که باعث می شود نقطه B و خط AB حرکت کند.

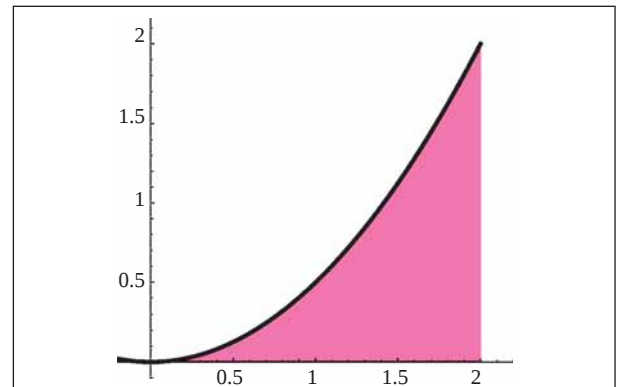
Animate[Plot[{-x^2+3x, (-n+3)x}, {x,-1,4c}, PlotRange → {{-1,4},

{-1,4}}, AspectRatio → 1], {n, 3, 0, .04}]



شکل ۶

برای محاسبه سطح زیر یک منحنی مثل $y = \frac{x^2}{2}$ از $x=0$ تا $x=2$ (شکل ۹) فاصله $[0, 2]$ را برای مثال به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم. سپس روی هر قسمت یک مستطیل می‌سازیم. مجموع مساحت این مستطیل‌ها تقریبی از مساحت اصلی است. این مستطیل‌ها می‌توانند پایین‌تر از منحنی یا بالاتر از منحنی باشند. به عبارت دیگر، تقریب نقصانی یا اضافی باشد.



شکل ۹

تقریب نقصانی

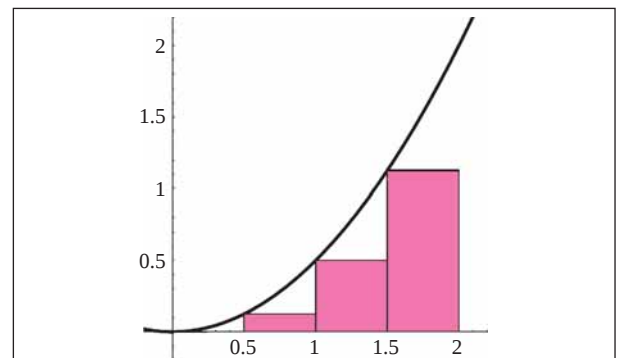
مستطیل‌های تقریب نقصانی برای چهار مستطیل به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} R_0 &= \text{Rectangle}\left[\left\{0, 0\right\}, \left\{\frac{1}{2}, f\left[\frac{1}{2}\right]\right\}\right] \\ R_1 &= \text{Rectangle}\left[\left\{\frac{1}{2}, 0\right\}, \left\{\frac{3}{2}, f\left[\frac{3}{2}\right]\right\}\right] \\ R_2 &= \text{Rectangle}\left[\left\{\frac{3}{2}, 0\right\}, \left\{\frac{5}{2}, f\left[\frac{5}{2}\right]\right\}\right] \\ R_3 &= \text{Rectangle}\left[\left\{\frac{5}{2}, 0\right\}, \left\{\frac{7}{2}, f\left[\frac{7}{2}\right]\right\}\right] \end{aligned}$$

و این مستطیل‌ها با دستور

$$\text{Graphics}[\{\{R_0\}, \{R_1\}, \{R_2\}, \{R_3\}\}]$$

نمایش داده می‌شوند (شکل ۱۰).



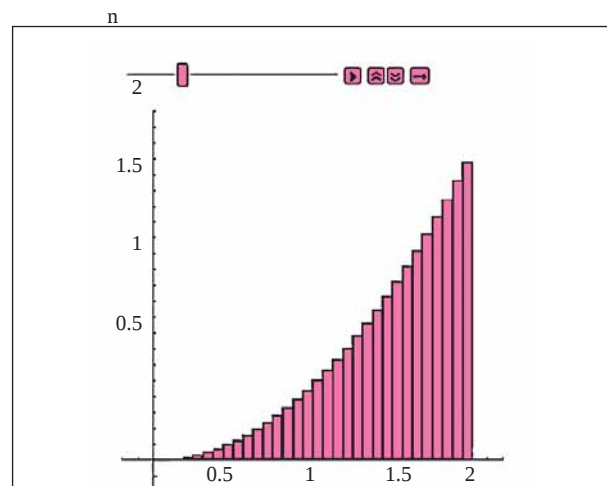
شکل ۱۰

اما این مستطیل‌ها در حالت کلی به شکل $R_k = \text{Rectangle}\left[\left\{\frac{k}{n}, 0\right\}, \left\{\frac{k+1}{n}, f\left[\frac{k+1}{n}\right]\right\}\right]$ هستند که $d = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$ و دامنه را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. اما اگر بخواهیم دامنه را به n قسمت تقسیم کنیم، با توجه به اینکه $d = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$ ، مستطیل‌ها به شکل کلی $\text{Rectangle}\left[\left\{k \frac{2}{n}, 0\right\}, \left\{(k+1) \frac{2}{n}, f\left[k \frac{2}{n}\right]\right\}\right]$ خواهند بود و با دستور $\text{Table}\left[\text{Rectangle}\left[\left\{k \frac{2}{n}, 0\right\}, \left\{(k+1) \frac{2}{n}, f\left[k \frac{2}{n}\right]\right\}\right], \{k, n-1\}\right]$ دنباله آن‌ها تولید می‌شود و Animate نیز تصاویر این دنباله را به صورت متحرک در می‌آورد که در برنامه ۳ آن را می‌بینیم:

```
b = 2,
a = 0,
F[x_] = x^2/2
Animate[Graphics[Table[EdgeForm[Thick], Blue, Rectangle[{k/n, 0},
{(k+1)/n, F[(k+1)/n]}], {k, 0, n-1}],
PlotRange -> {{-2, 2.2}, {-2, 2.2}}, AspectRatio -> 1, Axes -> True],
{n, 2, 120, 2}]
```

برنامه ۳

برنامه ۳ به آسانی قابلیت گسترش به هر تابعی را دارد. تنها کافی است که ضابطه تابع و دامنه را تغییر دهیم. خروجی این برنامه شکل ۱۱ است.



شکل ۱۱

تقریب اضافی

در تقریب اضافی (شکل ۱۲)، مساحت مستطیل‌ها از مساحت زیر منحنی بیشتر است.

پاسخ

معمای

ایستگاه اندیشه

ایستگاه اول

۱. خیلی نباید انتظار بکشیم! تنها چهار سال دیگر:

$$1398 = 2 \times 3 \times 233$$

۲. بله، به عبارت دیگر باید با توجه به قضیه فیثاغورس، عددهای طبیعی x و y را طوری بیابیم که داشته باشیم: $x^2 + y^2 = 1394$. دو جواب متمایز برای این مسئله چنین است:

$$5^2 + 37^2 = 13^2 + 35^2 = 1394$$

۳. شبیه مسئله قبل است. باید عددهای طبیعی x ، y و z را طوری بیابیم که داشته باشیم: $x^2 + y^2 + z^2 = 1394$. به راحتی از همان جواب مسئله قبل استفاده می‌کنیم. از آنجا که $5^2 + 37^2 = 1394$ پس داریم: $3^2 + 4^2 + 37^2 = 1394$.

۴. بله به سادگی! یک جواب این است: $1394 = 1381 + 13$.

۵. بله به سادگی! از همان جواب مسئله قبل استفاده می‌کنیم: $1394 = 1381 + 11 + 2$. جواب‌های بسیار دیگری هم وجود دارد؛ مثلاً این جواب: $1394 = 1373 + 2 + 19$. به صورت مجموع چهار عدد نیز می‌توان نوشت؛ از جمله: $1394 = 1373 + 3 + 5 + 13$.

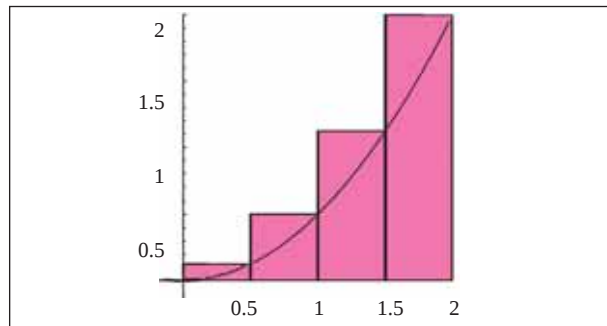
۶. بهترین الگوریتم برای این منظور، آن است که عددهای اول را از پایین به بالا مرتب کنیم تا جایی که مجموع آن‌ها از ۱۳۹۴ بیشتر یا با آن مساوی شود. با این کار به مجموع زیر می‌رسیم:

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 + 53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 83 + 89 + 97 + 101 + 103 = 1480$$

و این مجموع، ۸۶ واحد بیشتر از ۱۳۹۴ است. چون ۸۶ عدد اول نیست. پس نمی‌توان با حذف یکی از این عددها، به مجموع ۱۳۹۴ رسید. اما چون: $86 = 83 + 3$ ، پس با حذف دو عدد ۳ و ۸۳، از بین عددهای فوق، می‌توان به مجموع ۱۳۹۴ رسید:

$$2 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 + 53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 89 + 97 + 101 + 103 + 107 = 1394$$

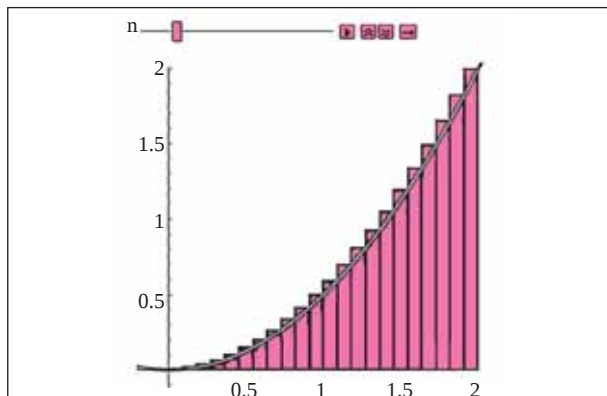
یعنی می‌توان ۲۷ عدد اول متمایز مشخص کرد که مجموعشان مساوی ۱۳۹۴ شود. ممکن است تصور شود که



شکل ۱۲

با تغییر کوچکی در برنامه ۲ می‌توانیم مفهوم تقریب اضافی را هم به صورت انیمیشن درآوریم. همچنین برای کامل شدن کار، منحنی را هم همراه مستطیل‌ها رسم می‌کنیم (شکل ۱۳).

```
b = 2,
a = 0,
F[x_] = x^2,
Animate[Show[Graphics[Table[EdgeForm[Thick], Blue, Rectangle[
[{(k^2/n), 0}, {(k+1)^2/n}, F[(k+1)/n]]], {k, 0, n-1}],
PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}, AspectRatio -> 1, Axes -> True],
Plot[F[x], {x, -1, 3}, PlotRange -> {{-2, 2.2}, {-2, 2.2}},
AspectRatio -> 1, Axes -> True, Plotstyle -> {Thickness[.01], Red}],
{n, 2, 120, 2}]
```



شکل ۱۳

در برنامه فوق از دستور Show استفاده شده است. این دستور وقتی به کار می‌رود که بخواهیم دو شکل را با هم در یک دستگاه نمایش دهیم. در دستور Show[A,B] نمایش A و B برای نرم‌افزار شناخته شده‌اند.

نکته آموزشی

برای یاد گرفتن سریع‌تر برنامه‌نویسی برای انیمیشن‌ها بهتر است برنامه‌های نوشته شده در مقاله را در رایانه خود بنویسید و اجرا کنید. سپس با تغییر اجزای آن برنامه، از قبیل تابع، دامنه و... با برنامه‌ها و ساختار آن‌ها آشنا شوید.

* منابع

۱. قنبری، قاسم حسین (۱۳۸۲). ریاضیات هنری و انیمیشن‌سازی همراه با نرم‌افزار Mathematica. انتشارات بکان.
۲. توماس، جرج و فینی، راس (۱۳۷۰). حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ترجمه مهدی بهزاد و سیامک کاظمی. مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

* farzad23@yahoo.com

◆ هزینه اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینه اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت ماهانه و نه شماره هر سه سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد کودک

(برای دانش‌آموزان ابتدایی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی)

رشد نوجوان

(برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی)

رشد دانش‌آموز

(برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی)

مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت ماهانه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد نوجوان

(برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول)

رشد جوان

(برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم)

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهانه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد آموزش ابتدایی

رشد تکنولوژی آموزشی

رشد مدیریت مدرسه

رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی

(به صورت فصل‌نامه و چهارشماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود)

رشد بردهای آموزش متوسطه اول (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه اول)

رشد بردهای آموزش متوسطه دوم (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه دوم)

رشد آموزش قرآن

رشد آموزش معارف اسلامی

رشد آموزش زبان

رشد آموزش هنر

رشد آموزش مشاوره مدرسه

رشد آموزش قرآن

رشد آموزش علوم اجتماعی

رشد آموزش تاریخ

رشد آموزش فلسفه

رشد آموزش زیست‌شناسی

رشد آموزش زمین‌شناسی

رشد آموزش فقه و حقوق

رشد آموزش پرورش

رشد آموزش بهداشت

رشد آموزش ورزش

◆ **نشانی:** تهران، خیابان ایرانشهر، شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.

◆ **تلفن و نمابر:** ۸۸۳۰۱۴۷۸ - ۰۲۱



نادرست است و نتیجه می‌شود که یکی از آن‌ها ازدواج کرده و دیگری ازدواج نکرده است. با توجه به نادرستی جمله پرویز، او باید ازدواج کرده باشد ولی بهمن ازدواج نکرده باشد. پس در هر دو حالت بهمن ازدواج نکرده است، ولی در مورد پرویز نمی‌توان نتیجه قطعی گرفت.

معمای سوم:

اگر جواب دوم متهم، بله بوده باشد، آن‌گاه واضح خواهد بود که او یک اهریمنی است (زیرا دو جمله او متناقض می‌شوند). در آن صورت هر دو جمله او نادرست است و هیچ راهی برای تشخیص اینکه او شتر را دزدیده یا نه، باقی نمی‌ماند. پس باید پاسخ دوم او خیر بوده باشد. حالا فرض کنید که او یک مزدایی بوده است. پس طبق آنچه که او گفت که شتر را ندزدیده است، از ارتکاب جرم مبرا است. اما اگر او اهریمنی بوده باشد چه‌طور؟ آن‌گاه هر دو پاسخ او نادرست است. این یعنی او هرگز نگفته که هرگز شتر را ندزدیده است. لذا او یک‌بار گفته که شتر را دزدیده است. اما اهریمنی بودن او باعث می‌شود که جمله او دروغ باشد؛ یعنی او شتر را ندزدیده است. لذا صرف‌نظر از اینکه او اهریمنی یا مزدایی بوده، گناهکار نیست (اهریمنی یا مزدایی بودن او قابل تشخیص نیست).

معمای چهارم:

بدیهی است که C اهریمنی است، زیرا هیچ مزدایی این جمله نادرست را بیان نمی‌کند که هر سه آن‌ها اهریمنی هستند. پس C اهریمنی است و در نتیجه جمله او نادرست است و لااقل یکی از دو نفر A و B مزدایی هستند. اما B نمی‌تواند جارچی جزیره باشد. زیرا یک جارچی مزدایی، دروغ نمی‌گوید که بگوید جارچی جزیره، اهریمنی است و یک جارچی اهریمنی، راست نمی‌گوید

که بگوید جارچی جزیره، اهریمنی است. پس B جارچی نیست. اگر A مزدایی باشد، جمله او درست است. بنابراین او جارچی جزیره نیست و چون B هم نیست، پس C جارچی و اهریمنی است. لذا اگر A مزدایی باشد، جارچی جزیره، اهریمنی است. اما اگر اهریمنی باشد، جمله او نادرست است و لذا جارچی جزیره است و باز هم جارچی جزیره، اهریمنی است. به‌طور خلاصه، جارچی جزیره یکی از دو نفر A و C و اهریمنی است، ولی نمی‌توان جارچی جزیره را تشخیص داد.

معمای پنجم:

چون A گفت C اهریمنی است، پس راست گفت و در نتیجه A مزدایی است و جارچی نیست. لذا جارچی جزیره، C است.

معمای ششم:

چون C با B موافقت کرده است، پس آن‌ها هر دو از یک جنس (اهریمنی یا مزدایی) هستند. اگر B مزدایی بوده باشد، آن‌گاه C هم مزدایی بوده است. اما این فرض، جمله B را نادرست می‌کند و این ممکن نیست که جمله یک مزدایی نادرست باشد. پس B اهریمنی است و لذا C هم اهریمنی و جمله A نادرست است. در نتیجه او هم اهریمنی است. یعنی هر سه نفر اهریمنی هستند.

معمای ششم:

حداکثر یکی از ۱۰ جمله می‌تواند درست باشد. بنابراین لااقل ۹ نفر از آن‌ها اهریمنی هستند. A_۱ نمی‌تواند مزدایی باشد، پس جمله A_۱ دروغ است. یعنی لااقل یکی از ۱۰ نفر مزدایی است. بنابراین دقیقاً نه نفر از آن‌ها اهریمنی هستند. پس A_۴ درست گفته و مزدایی است و بقیه اهریمنی‌اند.