بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۱۸

دورهٔ سی و دوم، شمارهٔ ۲، زمستان ۱۳۹۳
فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ ● تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴) ● نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ● وبگاه: www.roshdmag.ir ●
پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir ● پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۳ ● تلفن پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ● کد مدیرمسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۳ ● کد امور مشترکین: ۱۱۴ ●
نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱ ● تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ – ۷۷۳۳۶۶۵۵ ● چاپ: شرکت افست (سهامی عام) ● شمارگان: ۶۵۰۰

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به‌ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

● مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. ● شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود. ● نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود. ● برای ترجمهٔ مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمهٔ یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمهٔ ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستندهٔ مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمهٔ مقاله را به مترجم دیگری بدهد. ● در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود. ● پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد. ● چکیده‌ای از اثر و مقالهٔ ارسال‌شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود. ● در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. همچنین: ● مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است. ● مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات کمک‌آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. ● مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

زهرا گویا

یک اقیانوس فاصله بین رفع نیاز تا ایجاد نیاز!

در سال‌های اخیر، درهم‌تنیدگیِ آموزش و اقتصاد و تبلیغات در جهان، خیره‌کننده‌تر شده است تا جایی که کشیدن مرز مشخصی بین آن‌ها، اگر نگوییم غیرممکن، دست‌کم می‌توانیم بگوییم که بسیار سخت است. مؤسسات، بنیادها و شرکت‌های بزرگ در سراسر جهان، از تب‌وتاب خانواده‌ها نسبت به اهمیت پیشرفت آموزشیِ فرزندان خود، به خوبی آگاهند، زیرا همان‌ها در ایجاد آن، تلاش زیادی کرده‌اند! منتها مخاطبان این تلاش‌ها، بسته به عوامل بسیاری از جمله فلسفه‌های زیربنایی در حاکمیت‌های سیاسی، دیدگاه‌های ایدئولوژیکیِ غالب، میزان تمرکز در نظام‌های آموزشی، حدود اختیارات انسان بر اساس قانون‌های اساسی و مدنی، فرهنگ عمومی، حساسیت‌های اجتماعی، ترکیب‌های جمعیتی، حدود و ثغور خصوصی‌سازی و نوع نظارت بر آن، در کشورهای متفاوت و در زمان‌های مختلف، با هم فرق دارند. مثلاً در بعضی کشورها مانند ایالات متحده، با بافت غیرمتمرکز و سرمایه‌داری نظام یافته، جمعیتِ هدفِ اغلبِ این تلاش‌ها، هم مؤسسات آموزش عالی و هم کسانی هستند که در این مراکز، به تحصیل اشتغال دارند، و قابل پیش‌بینی است که با تغییرات جدی در هر یک از موارد ذکر شده، در این نشانه‌گیری، تجدید نظر شود. این در حالی است که در مناطقی مانند کشورهای حوزهٔ جنوب شرقی آسیا و به دلایل ویژه‌ای در ایران، جمعیتِ هدف و مخاطب اصلی این برنامه‌ریزی‌ها، آموزش عمومی و دانش‌آموزان‌اند که به نوعی، قابل تعمیم به بخش عظیمی از جامعه هستند. البته، بحث درباره دلایل این امر و چرایی و چگونگی آن، نیازمند فضای دیگری است که در این مختصر، نمی‌گنجد. پس تنها به طرح این مسئله مهم می‌پردازم که چگونه تلاش برای رفع نیازهای واقعی، در دگردیسی‌های پیش‌آمده، عملاً گاهی تبدیل به ایجاد نیازهای غیرواقعی شده و این روند، به سرعت در حال گسترش است که عمده‌ترین عارضه آن، ایجاد اغتشاش ذهنی در معلمان، دانش‌آموزان و خانواده‌هاست.

در ایران، طی سال‌های جنگ، وزارت آموزش و پرورش دست به ابتکاری زد که در نوع خود، منحصربه‌فرد بود و آن، تأمین امکانات آموزشی و بسترسازی برای دانش‌آموزانِ مناطق جنگی برای بازنماندن از تحصیل بود که این کار، از طریق رسانه ملی که در آن سال‌ها، تنها دارای دو یا چندِ شبکه محدود بود، انجام شد. روند کار چنین بود که بچه‌هایمان در شهرهایی که مدرسه‌ها بر سرشان خراب شده بود، با برنامه اعلام شده از قبل، پای تلویزیون می‌نشستند و همراه با مدرسانِ مجازی و با داشتن کتاب درسی مربوط در دست، درس‌ها را یاد می‌گرفتند و بعد هم در مراکز اعلام شده، امتحان می‌دادند و بدین ترتیب، از تحصیل عقب نمی‌ماندند. برای آموزشِ معلمان نیز با ابتکار دیگری، «مجلات پیک» که تغییر نام داده بود، تا حدودی تغییر کاربری داده و با عنوان «مجلات رشد» تولید و منتشر شدند. اولین عضو این خانواده، مجله «رشد آموزش ریاضی» بود و مخاطبان مشخص آن، معلمان ریاضی دوره متوسطه بودند. به تدریج و با شیب نسبتاً تندی، مجلات رشد تخصصی برای سایر حوزه‌های درسی موضوعی و مجلات رشد عمومی برای توسعه سواد عمومی و علاقه‌مندتر کردن دانش‌آموزان به یادگیری، یکی پس از دیگری، تولید و منتشر شدند که خوشبختانه این روند، هم‌چنان ادامه دارد. اما پس از گذار از دوران جنگ، بعضی از خانواده‌هایی که دغدغه اصلی‌شان زنده ماندن فرزندانشان بود، به فکر کیفیت‌بخشی به آموزش آن‌ها افتادند و تقریباً می‌توان حدس زد که این خواسته اجتماعی، نقطه‌عطفی در تولید کتاب‌های به اصطلاح «کمکی» در ایران شد که این بار، ابتکار آن را ناشران خصوصی در دست گرفتند!

از اوائل دهه هفتاد نیز، نظام آموزش متوسطه از تمام جنبه‌ها تغییر نمود و اولین ابتکارِ بخشِ به اصطلاح خصوصی

برای جلب مشتری دائمی و همیشه نگران و مضطرب، ایجاد احساس کمبود در بحبوحه این تغییرات و در نتیجه، وعدهٔ رفع آن بود! در این راه، تولیدکنندگان جدیدی پا به عرصهٔ وجود گذاشتند که با پیشینه این کار، هم به لحاظ معنایی و هم از جنبهٔ کارکردی، ارتباط واقعی نداشتند. زیرا در گذشته، افرادی مانند احمد بیرشک و پرویز شهریاری، برای کاهش نارسایی‌ها و عدم دسترسی بسیاری از دانش‌آموزانِ ایران زمین به حداقلی از امکانات، عمرشان را صرف «رفع نیاز» کردند. در حالی که روند جدید، با ۱۸۰ درجه تفاوت، خواسته یا ناخواسته، بیشترین تلاش را برای «ایجاد نیاز» کردند تا جامعهٔ تشــنه شده، برای سیراب کردن خود، طلب «کمک» کند. در نتیجه، داستان جدیدی با همان عنوان قبلی اما اهدافی تغییر یافته، متولد شــد و ماجراهایی که شاهدش هستیم، از این نقطه به بعدشروع شد! تولیدکنندگان/ نویسندگان و ناشــران کتاب‌های «کمکی» با هم به رقابت پرداختند و عملاً، طبقه اقتصادی جدیدی تشــکیل دادند که ســودآوری آن، اعجاب‌آور اســت. طبیعی اســت که در این شرایط، و با وجود سختی‌های معیشتیِ جمع وسیعی از افراد جامعه از طیف‌های گوناگون، این کارآفرینی و اشتغال‌زاییِ نوین، عدهٔ دیگری را قانع و سیراب کرد. در حقیقت در این فضا، به جای پاسخگویی به نیازهای آموزشی واقعی و خوب شناسایی شده، این «حرفه» جدید، هنرش در «ایجاد نیاز» بود نه «رفع نیاز»، و چنین شد که دیدیم و می‌بینیم! یعنی به قول معروف، جمع کردن روغن ریخته شده، اگر نه غیرممکن، ولی طاقت‌فرسا بود و این اتفاقی بود که افتاد. البته، عوامل تأثیرگذار دیگری نیاز در قوت گرفتن این جریان، سهم به سزایی داشته و دارند و در این راه، تقریباً هیچ کوتاهی نشده است که تنها یک نمونه را بیان می‌کنم.

در گیــرودار تغییر کاربریِ «کمکی»ها از هر نوع، مدارس مختلفی از جمله «غیرانتفاعی»ها که در جریان تطور و تحولِ خود به «غیردولتی» تغییر نام- و فقط تغییر نام- دادند، مجوز تأسیس گرفتند و خانواده‌ها را با اشتیاق، مجذوب خود کردند و هر یک از آن‌ها، قول برداشتن گام‌هایی فراتر از «مدرسه‌های دولتی با امکانات محدود» را به ایشان دادند. اما این «سرازپا نشناختگی»، دیری نپایید که ستارهٔ اقبالش رو به افول کرد، زیرا جمعیت دانش‌آموزیِ رو به افزایش، که نقطهٔ اوج آن در ســال ۱۳۷۹ نزدیک به ۲۰ میلیون نفر و حدوداً ۱/۳ جمعیت کشــور بود، و جمعیت «کنکوری‌ها» که با مرز دو میلیون چندان فاصله نداشــت، از ســال ۸۰ به بعد، سیر نزولی خود را شروع کرد. این اتفاق باعث شد که این مدارس که با ســرمایه‌گذاری‌های کلان، انتظار صف‌های طویل متقاضیان را داشــتند، به تدریج، با پدیدهٔ کاهش تعداد دانش‌آموزان مواجه شوند و این، آغازی برای تغییر دیدگاه مراکز آموزشی نسبت به موکلان اصلی خود یعنی دانش‌آموزان شد که عمده‌ترین وجه آن، غلبه نگاه «مشتری‌مداری» بر نگاه آموزشی و آرمانی بود. پس در این شرایط، این نوع مدارس نیز با واقع‌بینی از یک‌سو و آینده‌نگری از سویی دیگر، در رقابت برای جلب مشتری، با تولیدکنندگان «کمکی» و تلاش برای «ایجاد نیاز» و نوید «رفع نیاز» به منظور صعود از نردبان ترقیِ آموزشی، همکاری‌های تنگاتنگ و نانوشته کردند. برای نمونه، «مشــتری» به دنبال موفقیت بود و این هر دو، با ارائه کتاب‌ها و مواد کمک آموزشــی متفاوت و روش‌های به ظاهر «نوآورانه» ولی در بسیاری اوقات «واپسگرایانه» از نظر روشی در مدارس، مشتری را به سمت و سوی خویش کشانده و می‌کشانند.

اما طبیعی اســت که هر بهاری، خزانی به دنبال دارد! مثلاً، هرم جمعیتی جامعه تغییر یافته اســت. دوران نوزایی و رشــد ســریع جمعیت جوان، به ســر آمده، تعداد دانش‌آموزان در یک دهه، از حدود ۲۰ میلیون به حدود ۱۲ میلیون نفر رســیده و امکانات تعداد زیادی از این مدرســه‌ها، بدون استفاده باقی مانده است. از همه مهم‌تر این که بسیاری از صندلی‌های دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی، طبق آمارهای منتشر شده توسط دستگاه‌های ذیربط، خالی است که به این معناســت که ظرفیت پذیرش دانشــجو بیش از تعداد کل متقاضیان است. بنابراین، ورود به آموزش عالی، دیگر آرمانی دست‌نیافتنی نیست، اگرچه هنوز برای ورود به دانشگاه‌های درجهٔ یک، رقابت تنگاتنگ وجود دارد. خلاصهٔ کلام این که برای جلب «مشتری»، کارهایی انجام می‌شود که تا چند سال پیش نیز در مخیلهٔ کسی نمی‌گنجید! برای مثال، رسانه‌ها با سخاوت تمام، خانواده‌ها را مجاب به خرید تولیدات آموزشی می‌کنند و پیام‌های کوتاه، از طرفی مردم را «با سختی ورود» به مدرسه‌هایشان و هم زمان، «کنار آمدن» با متقاضیان به شرط پذیرش شرط‌هایشان، وسوسه می‌کنند. خلاصه در این «مشتری‌مداری» نوین، بسیاری دست به کارند و با هم رقابت می‌کنند، اما وای بر زمانی که با بی‌دقتی یا هر دلیل دیگری، توجیه‌گر این نابسامانی‌ها شویم.

این چند ســطر، تنها به قصد طرح مســئله‌ای این‌زمانی، عمیق، و از نظر آموزشی بانفوذ و تخریبی، نوشته شد. در شماره بعدی، کتاب «آزمون‌ها: حاکمیت خطا»، تازه‌ترین اثر دایانا راویچ- بزرگ‌ترین منتقد نظام فعلی آموزشی در ایالات متحده- معرفی شده است تا در آینه آن، شاید بتوانیم خود و مشکلات خود را بهتر ببینیم و از تجربه‌های آن، برای خروج از بحران جدید آموزشی در ایران، بهره ببریم.

مریم محسن‌پور
دانشجوی دکتری سنجش و ارزیابی، دانشگاه تهران

سنجش شناختی تشخیصی

چکیده
در دهۀ گذشته در مطالعات پیزا، از انواع آزمون‌های شناختی تشخیصی برای سنجش سواد ریاضی، علوم و خواندن دانش‌آموزان استفاده شده است. بدین سبب، برای درک بهتر مقالاتی که در رابطه با پیزا و مطالعات مشابه انجام می‌شود، لازم است معلمان ریاضی، با ویژگی‌های این نوع سنجش آشنا شوند. بنابراین هدف اصلی این مقاله، معرفی اجمالی سنجش شناختی تشخیصی است.

کلیدواژه‌ها: روان‌شناسی شناختی، سنجش شناختی تشخیصی، اندازه‌گیری ساختار دانش، اندازه‌گیری صلاحیت‌های پردازشی، روش‌های آماری، روان‌سنجی، نیمرخ صلاحیتی، ماتریس کیو.

مقدمه

یکی از ابعاد مهم فعالیت‌های آموزشی، اندازه‌گیری آموزشی است. از اواسط دهۀ ۱۹۸۰، با پیوند روان‌شناسی شناختی[1] و روان‌سنجی به یکدیگر، نقش مهمی که نظریۀ شناختی می‌تواند در اندازه‌گیری‌های آموزشی داشته باشد، به مرور برای بسیاری از متخصصان آموزشی آشکار گردید. (لیتون[2]،گیرلو هونکا[3]، ۲۰۰۴). به‌عنوان مثال، اسنو و لومان[4] (۱۹۸۹) در راستای کمک به بهبود سنجش و اندازه‌گیری آموزشی با استفاده از روان‌شناسی شناختی، گامی بزرگ برداشته‌اند. آن‌ها در فصل هفتم کتاب اندازه‌گیری آموزشی لین[5] (۱۹۸۹)، به دلالت‌های روان‌شناسی شناختی برای اندازه‌گیری آموزشی پرداخته‌اند. از نظر لیتونوگیرل (۲۰۰۷)، ایده‌های بیان شده به‌وسیله اسنو و لومان (۱۹۸۹)، بسیاری از پژوهشگران آموزشی را به بررسی بالقوۀ یک شاخۀ به نسبت نوآورانه از روان‌شناسی یعنی روان‌شناسی شناختی، و نقش آن در غنی‌سازی آزمون‌ها ترغیب

کرد. لذا از سال ۱۹۸۹، مقالات و کتاب‌های متنوعی در زمینه سنجش شناختی تشخیصی نوشته شد که از آن بین، می‌توان به فردریک سن، گلیزر، لسگلد و شافتو[۶]، (۱۹۹۰)؛ نیکولز[۷]، (۱۹۹۴)؛ نیکولز، چیپ‌من و برنان[۸]، (۱۹۹۵) اشاره کرد.

تعریف سنجش شناختی تشخیصی

رویکرد سنجش شناختی تشخیصی، با هدف ارتقای *سنجش برای یادگیری و فرایند یادگیری*[۹]، اساساً در مقابله با سنجشِ *بازده‌های یادگیری*[۱۰] از طریق فراهم کردن اطلاعات مورد نیاز برای اصلاح آموزش و یادگیری در کلاس درس به وسیلهٔ معلم، به وجود آمده است (جانگ[۱۱]، ۲۰۰۸). به‌طور کلی، هدف از طراحی سنجش شناختی تشخیصی، اندازه‌گیری ساختار دانش و صلاحیت‌های پردازشی[۱۲] دانش‌آموزان به‌منظور فراهم آوردن اطلاعاتی در زمینه نقاط قوت و ضعف شناختی آن‌هاست. ساختار دانش شامل اطلاعات رویّه‌ای و حقایق/ دانش یقینی است، در حالی‌که صلاحیت‌های پردازشی دربرگیرندهٔ تحولات و راهبردهای مورد نیاز برای دست‌ورزی با این اطلاعات است (لیتون و گیرل، ۲۰۰۷ ، به نقل از لومان، ۲۰۰۰). با اندازه‌گیری این صلاحیت‌ها بر مبنای سنجش شناختی تشخیصی، نقاط قوت و ضعف آزمون‌شوندگان شناسایی می‌شود و این‌چنین، می‌توان دربارهٔ صلاحیت‌های شناختی حل مسئلهٔ آن‌ها، استنباط‌های تشخیصی به دست آورد.

مدل شناختی در سنجش شناختی تشخیصی

تولید استنباط‌های مبتنی بر شناخت، بدون داشتن یک چارچوب تفسیری صریح، اگر غیرممکن نباشد، مشکل است، زیرا استنباط‌ها در اندازهٔ بزرگ[۱۳] (یعنی یک نمرهٔ آزمون کل) انجام نمی‌شوند، بلکه در اندازه خُرد[۱۴] (یعنی صلاحیت‌های شناختی ویژه) صورت می‌گیرند. گیرل، ونگ و ژو (۲۰۰۸)، معتقدند که مدل‌های شناختی، با فراهم کردن چارچوبی برای مرتبط کردن استنباط‌های مبتنی بر شناخت با تفسیرهای نمره آزمون خُرد شده، این هدف را محقق می‌سازند.

یک مدل شناختی[۱۵] در اندازه‌گیری آموزشی، به «توصیفی ساده از حل مسئلهٔ شخص در تکالیف آموزشی استاندارد» اشاره دارد که کمک می‌کند تا دانش و صلاحیت‌های دانش‌آموزان که در سطوح متفاوت یادگیری کسب شده است، دسته‌بندی شود و تبیین و پیش‌بینی عملکرد آن‌ها، تسهیل گردد. از ویژگی‌های مهم مدل‌های شناختی این است که صلاحیت‌های تعیین شده به وسیلهٔ مدل، باید در اندازه خُرد و قابل اندازه‌گیری باشند، همچنان که از نظر آموزشی مرتبط بوده و برای طیف وسیعی از نفع‌بران آموزشی، معنادار باشند (گیرل، روبرتز، آلوز و گاتزمن، ۲۰۰۹).

هدف از طراحی سنجش شناختی تشخیصی، اندازه‌گیری ساختار دانش و صلاحیت‌های پردازشی دانش‌آموزان به‌منظور فراهم آوردن اطلاعاتی در زمینه نقاط قوت و ضعف شناختی آن‌هاست. ساختار دانش شامل اطلاعات رویّه‌ای و حقایق/ دانش یقینی است، در حالی‌که صلاحیت‌های پردازشی دربرگیرندهٔ تحولات و راهبردهای مورد نیاز برای دست‌ورزی با این اطلاعات است

در سنجش تشخیصی، برای ساخت مدل‌های شناختی، از روش‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد. از نظر روبرتز، آلوز، چو، تامپسون، بحری و گاتزمن[۱۶] (۲۰۱۲)، روش‌های ساخت مدل‌های شناختی عبارت‌اند از:

۱. **مرور ادبیات نظری (نظریه‌های تجزیه و تحلیل تکلیف)**؛ یا تجزیه و تحلیل تکلیف توسط یک خبره[۱۷] که به‌عنوان رویکرد از بالا به پایین مفهوم‌پردازی شده است.

۲. **استفاده از گزارش‌های کلامی**[۱۸]؛ پاسخ‌های دانش‌آموزان به یک آزمون در یک حوزهٔ محتوایی، به‌عنوان یک رویکرد از پایین به بالا، مفهوم‌پردازی شده است.

۳. **ترکیب دو روش**؛ ترکیب دو رویکرد از بالا به پایین و از پایین به بالا.

به عنوان نمونه، در جدول (۱)، یک مدل شناختی هشت صلاحیتی در حوزهٔ حل معادلات خطی ارائه شده است (راپ، تمپلین و هنسون، ۲۰۱۰؛ برگرفته از تحقیقات گیرل و همکاران، ۲۰۰۷).

جدول ۱. یک مدل شناختی هشت صلاحیتی، در حوزهٔ حل معادلات خطی

● درک کردن معنای نمادها و قواعد	● حل معادلات درجه دوم
● فهمیدن توصیفات متنیِ مسئله	● حل چند معادله به‌طور هم‌زمان
● انجام دادن دست‌ورزی‌های جبری	● ساخت یک بازنمایی جدولی
● حل معادلات خطی	● ساخت یک بازنمایی تصویری

مدل‌های آماری در سنجش شناختی تشخیصی

در ســنجش شــناختی تشــخیصی، برای تحلیل داده‌های آزمون‌شوندگان، از مدل‌های آماری روان‌سنجی استفاده می‌شود. هدف از طراحی این مدل‌ها، برقراری پیوند بین نظریهٔ شــناختی و ویژگی‌های روان‌سنجی سؤال‌هاست و به طبقه‌بندی پاسخ‌های آزمون‌شوندگان براســاس متغیرهای مکنون[۱۹] چندگانــه، می‌پردازند. متغیر مکنون، متغیری آماری است که نمایانگر ویژگی ـ یا همان صلاحیت – غیرقابل مشاهدهٔ پاسخ‌دهندگان است.

از نظر راپ، تمپلین و هنسون (۲۰۱۰)، مدل‌های آماری ســنجش شــناختی تشــخیصی، براساس سه وضعیت زیر، تقسیم‌بندی می‌شوند:

از ویژگی‌های مهم مدل‌های شناختی این است که صلاحیت‌های تعیین شده به وسیلهٔ مدل، باید در اندازه خُرد و قابل اندازه‌گیری باشند، هم‌چنان که از نظر آموزشی مرتبط بوده و برای طیف وسیعی از نفع‌بران آموزشی، معنادار باشند

۱. مقیاس اندازه‌گیری متغیرهای پاســخ مشاهده شده (دو ارزشی در برابر چند ارزشی)

۲. مقیــاس اندازه‌گیــری متغیرهــای مکنون (دو ارزشی در برابر چند ارزشی)

۳. شیوه ترکیب متغیرهای مکنون.

در مدل‌های آماری سنجش شناختی تشخیصی، صلاحیت‌هــای شــناختی در قالــب نیمرخ‌هــای صلاحیتی[۲۰] ســؤال‌ها، نمایش داده می‌شوند. منظور از نیمرخ صلاحیتی در هر سؤال، الگویی ترکیبی از صلاحیت‌های مورد نیاز برای آن سؤال است که برای مجموعهٔ ســؤال‌ها، در یک ماتریس، به نام ماتریس کیــو[۲۱]، نمایــش داده می‌شــود. بنابرایــن ماتریس کیو، نشــان‌دهندهٔ ســاختار بارگیــری در مدل‌های شــناختی است. هر ســطر این ماتریس، یک نیمرخ صلاحیتی برای یک سؤال، یعنی یک فرضیه دربارهٔ صلاحیت‌های مورد نیاز برای کسب پاسخ درست به آن ســؤال است و دارای مرتبهٔ $n\times k$ است که در آن، n تعداد سؤال‌ها و k، تعداد صلاحیت‌های مورد نیاز برای آن سؤال‌هاســت. تمام درایه‌های این ماتریس، اعــداد صفر و یک هســتند. برای یــک درایه خاص ماتریــس Q در ســطر n ام و ســتون k ام، عدد ۱ نشانگر آن است که سؤال n ام خصیصه یا صلاحیت k ام را اندازه می‌گیرد و عدد صفر نشان می‌دهد که آن ســؤال، صلاحیت مورد نظر را انــدازه نمی‌گیرد (همان). در جــدول (۲)، مثالی از یک ماتریس کیو برای پنج ســؤال و سه صلاحیت شناختی ارائه شده اســت. به‌عنوان نمونه برای پاســخگویی درســت به سؤال اول، تســلط به صلاحیت ۱ کافی است، یا در ســؤال پنجم، صلاحیت‌های ۲ و ۳ برای پاسخگویی درســت به ســؤال مورد نیاز هســتند.

جدول ۲. ماتریس کیو برای سنجش تشخیصی

سؤال	صلاحیت ۱	صلاحیت ۲	صلاحیت ۳
۱	۱	۰	۰
۲	۱	۱	۰
۳	۱	۰	۱
۴	۱	۱	۱
۵	۰	۱	۱

در هر یک از مدل‌های آماری سنجش تشخیصی، عملکرد دانش‌آموز برحســب احتمال تســلط وی بر هر یک از صلاحیت‌ها تعیین می‌شود (راپ، تمپلین و هنســون، ۲۰۱۰) و برای هر دانش‌آموز، احتمال تســلط به همه صلاحیت‌هــا و در نتیجه یک نیمرخ صلاحیتی، به دســت می‌آید. این نیمرخ می‌تواند به وســیلهٔ نفع‌بران مختلف از جمله معلمان، به منظور تصمیم‌گیــری دربــارهٔ مداخلــهٔ بهینه بــرای بهبود عملکرد دانش‌آموزان، استفاده شود. به‌عنوان نمونه، اگــر در یک آزمون تشــخیصی با چهــار صلاحیت، براســاس نتایــج آزمون، احتمال تســلط بــه چهار صلاحیــت ۱ تا ۴ بــرای یک دانش‌آمــوز، به ترتیب ۰/۱، ۰/۷، ۰/۶ و ۰/۳ باشــد، با داشــتن یک نقطه بُرش برای احتمال، می‌توان تعیین کرد که آن فرد، بــه صلاحیت‌های مورد نیاز برای آن آزمون تســلط دارد یــا خیر. بــرای مثال بالا، اگــر نقطه بُرش ۵۰ درصــدی در نظر گرفته شــود، احتمــالاً دانش‌آموز مورد نظر، به صلاحیت دوم و ســوم تسلط یافته، در حالی‌که برای تسلط به صلاحیت‌های اول و چهارم، نیازمند تلاش بیشــتری اســت.

جمع‌بندی

به‌طور کلی، تهیه و تدوین ارزشیابی‌های آموزشی بر مبنای سنجش شناختی تشخیصی، مزایای زیادی دارد که از مهم‌ترین آن‌ها، پیوند دادن نظریه‌های شناختی و یادگیری با آموزش است. در دهۀ اخیر، استفاده از آزمون‌های شناختی تشخیصی جهت سنجش توانایی‌های آزمون‌شوندگان، بیشتر مورد توجه است، زیرا اطلاعات به‌دست آمده از این نوع آزمون‌ها، به‌طور معناداری می‌تواند به‌وسیلۀ نفع‌بران آموزشی که درخواست چنین اطلاعاتی را داده‌اند، تفسیر شود (راپ، تمپلین و هنسون[۲۲]، ۲۰۱۰).

نتایج این نوع سنجش‌ها، تنها محدود به گزارش یک نمرۀ کل برای هر آزمودنی نیست، بلکه می‌تواند تصویری جامع از نیمرخ شناختی دانش‌آموزان در زمینه تکلیف‌های درسی فراهم آورد تا براساس آن، بتوان با طراحی‌های آموزشیِ مناسب، نقاطِ ضعف شناسایی شدۀ دانش‌آموزان را برطرف نمود.

پی‌نوشت‌ها

۱. روان‌شناسی شناختی به مطالعه ذهن برحسب بازنمایی‌ها و فرایندهای ذهنی که زیربنای رفتارِ مشاهده شده است، می‌پردازد.
2. Leighton
3. Hunka
4. Snow & Lohman
5. Linn
6. Frederiksen, Glaser, Lesgold & Shafto
7. Nichols
8. Chipman & Brennan
9. Assessment used for Learning and as Learning Process
10. Assessment of Learning Outcomes
11. Jang
12. Processing Competencies
13. Coarse Grain Size
14. Fine Grain Size
15. Cognitive Model
16. Roberts, Alves, Chu, Thompson, Bahry & Gotzmann
17. Expert Task Analysis
18. Verbal Report
19. Latent Variable
20. Competency Profile
21. Q-Matrix
22. Rupp, Templin & Henson

منابع

1. Gierl, M. J., Roberts, M., Alves, C. & Gotzmann, A. (2009). Using Judgments from Content Specialists to Develop Cognitive Models for Diagnostic Assessments. Paper Presented at the Symposium “How to Build a Cognitive Model for Educational Assessments” *Annual Meeting of the National Council on Measurement in Education (NCME), San Diego, CA*.
2.Gierl, M. J., Wang, C. & Zhou, J. (2008). Using the Attribute Hierarchy Method to Make Diagnostic Inferences about Examinees’ Cognitive Skills in Algebra on the SAT. *The Journal of Technology, Learning, and Assessment*, Vol. 6(6).
3. Jang E. E. (2008). A Framework for Cognitive Diagnostic Assessment. In C. A. Chapelle, Y. R. Chung, & J. Xu (Eds.), *Towards adaptive CALL: Natural language processing for diagnostic language assessment* (pp. 117 -131). Ames, IA: Iowa State University.
4. Leighton, J. P. & Gierl, M. J. (2007). Why *Cognitive Diagnostic Assessment*. In J. P. Leighton & M. J. Gierl, Cognitive Diagnostic *Assessment for Education: Theory and Applications(pp. 3- 18).* New York: Cambridge University Press.
5. Leighton, J. P., Gierl, M. J. & Hunka, S. M. (2004).The Attribute Hierarchy Method for Cognitive Assessment: A Variation on Tatsuoka’s Rule-Space Approach. *Journal of Educational Measurement*, Vol. 41(3), pp. 205- 237.
6. Roberts, M. R., Alves, C.B., Chu, M., Thompson, M., Bahry, L. M. & Gotzmann, A. (2012).Testing Expert-Based vs. Student-Based Cognitive Models for a Grade 3 Diagnostic Mathematics Assessment. Paper Presented at the Session “Division D Exemplary Work from Promising Researchers”, *Annual meeting of the American Educational Research Association*, Vancouver, BC, Canada.
7. Rupp, A.A., Templin, J. & Henson, R.A. (2010). *Diagnostic Measurement, Theory, Methods, and Applications*. New York: The Guilford Press.
8. Snow, R. E.; & Lohman, D. F. (1989). Implication of cognitive psychology for education measurement. In R.L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (3rd ed., pp. 263–331). New York: Macmillan.
9. Templin, J. & Henson, R.A. (2006). Measurement of Psychological Disorders Using Cognitive Diagnosis Models. *Psychological Methods*, 2006, Vol. 11, No. 3, 287–305.

نقش و جایگاه گروه‌های آموزشی در ارتقای دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی دورهٔ متوسطه

محمدجواد کارخانه، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان پیشوا

چکیده

به‌دلیل اهمیت نقشی که دانش حرفه‌ای در توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی داراست، در بدنهٔ آموزش‌وپرورش ایران، ظرفیتی باعنوان «گروه‌های آموزشی» (و در زیرمجموعه آن، گروه آموزشی ریاضی)، با هدف ایجاد دانش حرفه‌ای برای معلمان ریاضی، در سال ۱۳۷۷ ایجاد شد. متأسفانه، در بازبینی شیوه‌نامه گروه‌های آموزشی که در سال ۱۳۹۱ انجام شد، موارد نوآورانهٔ مندرج در آن به طرز غیرمنتظره‌ای حذف شد. در این مقاله، پس از یک مقدمه، و نیز توضیحاتی در مورد ضرورت آموزش‌های مستمر معلمان ریاضی، ویژگی‌های گروه‌های آموزشی در سال‌های ۱۳۷۳ و ۱۳۹۱، با هم مقایسه می‌شوند. این مقاله، در سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران که از ۱۷۷ تا ۲۰ شهریور ۱۳۹۳ در دانشگاه شهید رجایی تهران برگزار شد، ارائه گردید و با تغییرات لازم در آن برای مجله آماده شده است.

کلیدواژه‌ها: توسعه حرفه‌ای، مدل‌های مختلف برای توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی دوره متوسطه، گروه‌های آموزشی.

مقدمه

از آنجا که حرفه معلمی دارای ویژگی‌های خاصی از جمله پیچیدگی، ناپایداری، منحصر به فرد بودن و تضاد ارزشی است، پس تمامی مسائل آن قابل پیش‌بینی نیست (شون، ۱۹۸۷، نقل شده در گویا و مرتاضی مهربانی، ۱۳۸۱). معلم، در کلاس درس خود عموماً با موقعیت‌های پیش‌بینی نشده‌ای مواجه می‌شود؛ چراکه همیشه با انسان‌هایی که سراسر پیچیدگی و ایجازند، در حال کنش و واکنش است. هدف تدریس چنین معلمی، در واقع باورکردن انسان‌ها –دانش‌آموزان یادگیرنده– است و از همین‌رو شیوه عمل وی در حین تدریس باید هدفمند، ماهرانه و همراه با شکیبایی باشد (گویا، ۱۳۷۲). معلم ریاضی این فرصت را دارد که برای هر جلسه تدریس خود

طرح درســی را تهیه کند و در کلاس آن را راهنمای عمــل خود قــرار دهد، امــا آنچه نمی‌توانــد در طرح درس گنجانده شــود، مسائلی اســت که ویژگی بارز آن‌ها ظهور در حین عمل تدریس اســت (تقاضاهای ریاضــی حیــن تدریس) و معلــم از قبــل، نمی‌تواند آن‌ها را مشــخص کند و در طرح درس خود به آن‌ها بپردازد. این مســائل گســترهٔ موضوعی وسیعی را، از قبیل بی‌انگیزگی دانش‌آمــوزان، کارآمد نبودن روش تدریس، ناتوانی معلم در دادن پاسخ مناسب به سؤالی خاص، عدم‌آمادگی ذهنی دانش‌آموزان به لحاظ دانش پیش‌نیاز و نظایر آن شامل می‌شود (یزدانفر، ۱۳۹۰). پرداختن به ارتقای دانش حرفه‌ای معلمان، به‌خصوص از ایــن نظر قابــل توجه اســت که اغلــب نظام‌های آموزشــی، ضمانت بقای خود و امکان هرگونه نوآوری در آن نظام را وجود معلمان توانا می‌دانند. برای مثال، هم همایش بین‌المللی بانکوک در ۱۹۹۵، و هم کنگرهٔ دو ســالانه بین‌المللی تعلیم‌وتربیت ژنو در ۱۹۹۶، بر آموزش معلمان تأکید داشتند. بنابراین، توسعه دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی، امری ضروری به‌نظر می‌رسد، اما آن‌چه بیشــتر باید مورد توجه و تحقیق قرار گیرد، راه‌هایی است که می‌تواند منجر به ایجاد چنین دانشی شود. (گویا، ۱۳۷۹)

توســعه دانش حرفــه‌ای معلمان ریاضــی، زمانی اهمیت بیشــتری می‌یابد که نتایج مطالعهٔ بین‌المللی تیمــز[1] و به‌دنبال آن، دیگــر مطالعات متعددی که در بســیاری از کشورهای جهان در مورد ریشه‌یابی نتایج عملکرد نامطلوب ریاضی دانش‌آموزان صورت گرفت، گویای آن است که دانش ریاضی معلمان، در موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان سهم به‌ســزایی دارد. به‌عنوان مثال، کیامنش (۱۳۷۷) با توجه به یافته‌های پژوهشی در مطالعات تیمز، وضعیــت دانش‌آموزان ایرانی را در دو درس علــوم و ریاضی نامناســب ارزیابــی کرده و علت مشــکل را در روش‌های تدریس معلمان می‌داند (دانش‌پــژوه، ۱۳۸۲). تجربه نشــان می‌دهد که عدم توجه به آموزش‌های حرفه‌ای معلمان، عواقب زیان‌باری را- هم برای معلمان و هم برای دانش‌آموزان- به‌دنبال خواهد داشــت و باعــث از بین رفتن نیروی انســانی عظیمی می‌شود. (امیریان، ۱۳۹۰)

بــا وجود اهمیتی که توســعهٔ حرفــه‌ای در بحث مربوط بــه آموزش معلمان دربــردارد، تأکید آموزش معلمان در ایران، بیشتر بر روی آموزش‌های موضوعی بوده و کمتر به دانش حرفه‌ای پرداخته شده است. به گفتهٔ گویا (۱۳۸۰)، با توجه به اینکه آموزش معلمان یک فرآیند مستمر اســت، دانش حرفه‌ای، نمی‌تواند به‌طــور مســتقل و تنها در دوره‌های قبــل از خدمت معلمان ایجاد شود. بدین سبب، در ساختار تشکیلاتی وزارت آموزش‌وپــرورش، ظرفیتــی به نــام گروه‌های آموزشــی ایجاد شده اســت تا از این طریق، معلمان به‌طور مســتمر، دانش حرفه‌ای خود را به‌روز کنند و با هم‌اندیشی، راه‌حلی برای چالش‌های حرفه‌ای خود پیدا کنند.

پیشینهٔ تاریخی

ویلیز (۲۰۰۲) توصیه می‌کند که توسعه حرفه‌ای باید در محل آموزشی معلمان[2] انجام شود، دراز مدت، مســتمر، دردســترس و در برگیرنــده نیازهای همه معلمان، و بخشی از عمل روزانه معلم و فراتر از وظیفهٔ او باشــد. در ایــن روش، فرصت‌های یادگیــریِ فعالِ بیشــتری، با توجه به هدف‌ها و نیازهای فردی معلم، می‌تواند فراهم شود؛ بلند مدت بودن آن، نیز فرصتی بــرای معلمان ایجاد می‌کند که در صورت تشــویق و حمایــت، آن‌ها می‌توانند به‌طــور متناوب تفکر کنند (بال، ۱۹۹۶، لوکس- هرسلی[3] و ماتسوموتو[4]، ۱۹۹۹، زاسلاوســکی و لیکین[5]، ۱۹۹۹، نقل شــده در میلر[6]، ۲۰۰۷). یکی از هدف‌های توســعه حرفه‌ای معلمان، این اســت که آن‌ها را در محیطی قرار دهد تا تفکر و عمل تدریس‌شان، مورد چالش قرار گیرد و در نتیجه، رفته‌رفته نیاز به تغییر در آن‌ها ایجاد شــود (شیفتر[7]، ۲۰۰۸، نقل شده در چمن‌آرا، ۱۳۸۸) مرور ادبیات این حوزه نشــان می‌دهد که سازوکارهای توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، برکلاس درس اســتوار است و ریشه در بازتــاب آن‌ها بر عمل تدریس، به منظور کم کردن فاصله زیاد بین نظریه و عمل و بهبود کیفیت تدریس دارد. لازمــهٔ موفقیتِ برنامه‌های توســعه حرفه‌ای نیز مشارکت بالنده و تعامل همه‌جانبه معلمان با یکدیگر اســت. یکی از این سازوکارها، آموزش معلمان توسط خودشان است.

آموزش معلمان توسط خودشان

دشــواری آموزش ســنتی این اســت که این نوع آموزش، همیشه در دســترس نیست (داروین، پالمر، ۲۰۰۹) و یافتــن آموزشــگرانِ به قــدر کافی خوب، که زمان مناســب در اختیار داشــته باشند، می‌تواند

مسئله‌برانگیز باشد (اریچ و همکاران، ۲۰۰۴، نقل‌شده در میلر، ۲۰۰۷). هم‌چنین، کمبودِ زمان، برنامه‌ریزی ضعیـف، عـدم درک فراینـد آمـوزش، عـدم تطابق آموزشـگران و شـاگردان با یکدیگر و عدم دسترسی به آموزشـگران، در رابطه با آن، می‌تواند وجود داشته باشد (اوینگ و همکاران، ۲۰۰۸). با در نظر گرفتن این دشـواری‌ها، مدل آموزش همکاران توسـط خودشان، مدلی اسـت برای یادگیری و توسعهٔ حرفه‌ای معلمان در مدارس سـطح پایین اجتماعی- اقتصادی است که توسط کنسینتون میلر (۲۰۰۷)، ارائه گردید. با اجرای ایـن نوع آموزش، ارتباطات بین معلمان رشـد کرده و توسعه می‌یابد و اعتماد به‌وجود آمده و ایده‌های رایج و باورها، به چالش کشـیده شده و یا در یک محیط امن اعتبار می‌یابد (راب[8]، ۲۰۰۰). این نوع آموزش می‌تواند نگاه‌هـای جدیدی را در کلاس درس به‌وجود آورد و به بازشناسـیِ آنچه که اتفاق افتاده اسـت و نیز ملاحظهٔ سختی‌هایی که به‌وجود آمده و شناسایی دلایل آن‌ها، کمک کنـد (بـرگ، ۲۰۰۲، زاسلاوسـکی و لیکین، ۲۰۰۴). از جملـه این برنامه‌هـا، برنامهٔ تدریس فعال و بازتابی در دوره متوسـطه[9] (ARTISM) در استرالیا است که به‌دلیل کارایی آن، به اختصار معرفی می‌شود.

برنامهٔ تدریس فعال و بازتابی در دورهٔ متوسطه (ARTISM)

این برنامه توسعه حرفه‌ای از طریق همکاری معلمان سه مدرسه، مسئولان یک ناحیه آموزشی و متخصصان یک دانشـگاه در اسـترالیا، تولیـد و اجرا شـد. اینکه شرکت‌کنندگان در برنامه، با یادگیری روش‌های جدیدِ تجربه شـده در دوره از جمله مشارکت با سایر معلمان، می‌توانند تدریس کلاسـی خود را جرح و تعدیل کنند، به‌عنوان پیش فرض این برنامه محسوب می‌شود. نتایج مطلوب این برنامه چنین گزارش شده است:

- توسـعه یافتن مجموعه استراتژی‌های تدریس، تمرین و توفیق با ایده‌های جدید
- بهبود بخشیدن به یادگیری دانش‌آموز؛
- ایجاد تمایل در معلمان به آزمایش؛
- تغییرات در عمل کلاسی مدرسه؛
- تغییرات در برنامه درسی ریاضی در مدرسه؛
- منابع (و جایی برای دریافت آن‌ها)؛
- تأثیر عاطفی مثبت بر معلم.

به‌طور خلاصه، در اجرای این برنامه، چهار مرحلهٔ زیر قابل تشخیص است:

مرحلهٔ ۱. برگزاری نشست‌های اولیه
مرحلهٔ ۲.
الف. به‌کار بردن عمل‌های جدید کلاسی
ب. ایجاد آمادگی گروهی برای تدریس
مرحلهٔ ۳. مرور جمعی و بازتاب روی جلسـات و کاربردهای کلاسی ایده‌های جدید
مرحلهٔ ۴.
الف. تداوم عمل‌های جدید کلاسی
ب. تدریس طراحی شـده واحد کار و بازتاب روی نتایج.

گروه‌های آموزشی در ایران، ظرفیتی برای ارتقای دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی

در ساختار تشکیلاتی نظام متمرکز آموزش‌وپرورش ایران، برای افزایش دانش حرفه‌ای و توسـعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، از سـال ۱۳۵۹، گروه‌های آموزشـی به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از معاونت آموزشـی و سپس گروه آموزشـی درس ریاضی، تشکیل شـد تا از این طریق، معلمان به‌طور مستمر، دانش حرفه‌ای خود را به روز سازند و با هم‌اندیشی، راه‌حلی برای چالش‌های حرفه‌ای خود پیدا کنند.

شـواهد نشـان می‌دهد که این ظرفیت بالقوه، به‌درستی مورد اسـتفاده قرار نگرفت و هدف اصلی ایجـاد آن، مورد غفلت واقع شـد. به‌ویـژه، فعالیت گروه‌های آموزشـی در چند سال اخیر، بیشتر نشان داد که تصمیم‌گیری‌های غیرکارشناسانه و غیراصولی در این حوزه، موجب شده تا این ظرفیت موجود در آموزش‌وپرورش ایران، که با فکر اولیهٔ پیشـرفته‌ای ایجاد شده بود، کارایی لازم را نداشته باشد و به‌جای ایجاد ارتباط بالنده و مسـتمر بین معلمان و توسعه حرفـه‌ای آن‌هـا، گاهی تنها به برگـزاری یک یا دو جلسـه کلیشه‌ای در طی سال، محدود شود. مروری بـر دسـتورالعمل جامع گروه‌های آموزشـی وزارت آموزش‌وپرورش در سـال ۱۳۷۷، نشان می‌دهد که آن دسـتورالعمل، حاوی موارد بسیاری است، که به عنوان نیازهای توسـعهٔ حرفه‌ای محسوب می‌شوند. نکات برجستهٔ دستورالعمل مذکور به شرح زیر است:

- وجود گروه‌های آموزشی در مدارس (Site - based)
- ادامه فعالیت‌های گروه‌های آموزشـی در تابسـتان (استمرار)

• اختصاص بخشی از ساعت‌های موظف معلمان برای شرکت در گروه‌ها و در غیر این‌صورت، پرداخت حق‌الزحمه به آن‌ها (حمایت سازمانی)
• اختصاص زمان کافی به گروه‌های آموزشی (حمایت سازمانی)
• واگذاری مدیریت هر درس به یکی از استان‌های فعال و توانمند (تمرکززدایی)
• انتخاب سرگروه درسی از طریق مجمع دبیران (انتخابی بودن)
• شرکت سرگروه منطقه در گروه‌های مدارس و ارزیابی کلاس درس آن‌ها (نظارت)
• تعیین صلاحیت علمی معلمانِ غیرمرتبط، توسط سرگروه مرتبط (مسؤلیت علمی)

این موارد مهم و اساسی که در دستورالعمل جامع گروه‌های آموزشی در سال ۱۳۷۷ آمده بود، به یک‌باره در شیوه‌نامه گروه‌های آموزشی در سال ۱۳۹۱، حذف گردید و این تشکیلات به دورهٔ راهنمایی تحصیلی، در دو محورِ «پایگاه کیفیت بخشی به فرایند آموزش درس ریاضی» مستقر در یکی از استان‌های کشور و «گروه‌های درسی» در استان‌ها، تغییر یافت. موارد تغییر یافته به شرح زیر است:
• حذف گروه‌های درسی در مدارس (که محل اصلی کار معلم است)
• کاهش چشمگیر زمان اختصاص داده شده به گروه‌های آموزشی (در برخی مناطق و ناحیه‌ها، این زمان به کمتر از یک‌سوم زمان اولیه رسیده است)
• انتصاب سرگروه، به‌جای انتخاب از طریق مجمع دبیران
• پررنگ‌تر شدن بحث نظارت نسبت به دستورالعمل قبلی، به‌طوری که علاوه بر نظارت داخلی که به‌صورت سلسله مراتبی در گروه‌های آموزشی وجود داشت، نظارت ستادی نیز (از طریق کارشناسی تکنولوژی و گروه‌های آموزشی)، به آن اضافه شده است.

نگاهی به دستورالعمل جامع گروه‌های آموزشی در سال ۱۳۷۷، نشان می‌دهد که در آن زمان این گروه‌ها با هدف بهبود کیفیت آموزش‌وپرورش و با تأکید بر ارتقای مهارت‌های ادراکی و حرفه‌ای نیروی انسانی و به‌کارگیری یافته‌های نوین حوزهٔ علوم تربیتی شروع به‌کار کرده بود. هم‌چنین رویکردها و برنامه‌های این گروه‌ها عبارت بوده است از:

رویکردها: بهبود کیفیت آموزش، تحول مهارت‌های ادراکی، فنی‌وحرفه‌ای معلمان، توجه به تجربه‌های معلمان در آموزش، انسجام بین عناصر برنامه‌درسی، مسئله‌یابی و جست‌وجوی حل آن، تحقیق و پژوهش، تمرکززدایی تدریجی از برنامه‌های آموزشی، نظارت، کنترل و ارزشیابی از برنامه‌های آموزشی.

برنامه‌ها: طراحی آموزشی، خلاقیت و نوآوری، نقد و بررسی کتب درسی و سنجش و اندازه‌گیری.

در شیوه‌نامهٔ سال ۱۳۹۱، علت تغییرات ایجاد شده و پشتوانه‌های پژوهشی آن- در صورت وجود- بیان نشده است. اما با توجه به اینکه دستورالعمل سال ۱۳۷۷، با پژوهش‌های حوزه آموزش‌های ضمن خدمت و حرفه‌ای معلمان ریاضی همسو بود، دانستن تفاوت‌های این دو که در جدول (۱) آمده، محل تأمل است.

جدول (۱): تفاوت‌های اجرایی دو سند مهم آموزش‌وپرورش در مورد گروه‌های آموزشی در سال‌های۱۳۷۷و۱۳۹۱

دستورالعمل جامع گروه‌های آموزشی در سال ۱۳۷۷	شیوه‌نامه گروه‌های آموزشی در سال ۱۳۹۱
زمان اختصاص داده شده به مناطق، ۶۵ ساعت	زمان اختصاص داده شده به مناطق ۳۶ ساعت و مناطق کوچک‌تر ۱۸ ساعت
انتخاب سرگروه از طریق مجمع دبیران	انتصاب سرگروه
تنوع گروه‌های آموزشی (مدرسه، منطقه، استان)	گروه‌های آموزشی فقط در منطقه یا ناحیه وجود دارند
نظارت داخلی توسط سرگروه‌ها	نظارت داخلی(توسط سرگروه‌ها) و نظارت ستادی

نکته تعجب‌برانگیزی که در شیوه‌نامه جدید به چشم می‌خورد این است که با وجود توصیه‌های فراوان مبنی بر این که برنامه‌های توسعه حرفه‌ای معلمان، باید در محل کار معلم انجام گیرد، از سال ۱۳۹۱، گروه‌های آموزشی در مدارس، که محلِ اصلی کار معلم است، تعطیل شده‌اند.

جمع‌بندی

گروه‌های آموزشی در ایران، ظرفیت بالقوه مناسبی برای افزایش دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی هستند که آن‌طور که باید، مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. لازم است برنامه‌ریزان آموزش معلمان در وزارت آموزش‌وپرورش، نیازهای حرفه‌ای معلمان ریاضی را جهت برنامه‌ریزی مناسب در این حوزه، مورد نظر

قــرار داده و از تصمیم‌گیری‌های عاجل در این حوزه، بپرهیزند.

پی‌نوشت‌ها

1. The Third International Mathematics and Science Study: TIMSS
2. Site-based
3. Loucks-Horsley
4. Matsumoto
5. Leikin
6. Miller
7. Schifter
8. Robb
9. Active and Reflective Teaching In Secondary Mathematics: ARTISM

منابع

1. Kensington-Miller, B. (2007).Professional Development for Secondary School Mathematics: a Peer Mentoring Model. **Center for Academic Development, the University of Auckland, New Zealand**.
2. Clark, D.; Carlin, P. & Andrea, P. (1992). Professional Development and the Secondary Mathematics Teacher: A Case Study
3. Lloyd, G. (2013). The ongoing development of mathematics teachers' knowledge and practice: considering possibilities, complexities, and measures of teacher learning. **Journal of Mathematics Teacher Education**. 16:161-164. Springer.

۴. گویا، ز.(۱۳۸۰). **توســعه حرفــه‌ای معلمان ریاضی: یک ضرورت**. مجلۀ رشــد آموزش ریاضی، شماره۶۴، صص. ۴ تا ۸. دفتر انتشــارات کمک‌آموزشی، ســازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۵. مرتاضــی مهربانی، ن. و گویــا، ز.(۱۳۹۰). **آموزش معلمان ریاضــی یک حــوزه تحقیقی**. مجله رشــد آمــوزش ریاضی، شــماره۶۹، صــص. ۱۹ تا ۳۳. دفتر انتشــارات کمک‌آموزشــی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۶. گویــا، ز.(۱۳۷۲). **تاریخچــه تحقیق عمل و کاربرد آن در آموزش**، فصلنامه تعلیم‌وتربیت، شماره۳۵و۳۶، صص. ۲۳ تا ۴۰. پژوهشکده تعلیم‌وتربیت، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۷. گویا، ز. (۱۳۸۶). **یادداشــت ســردبیر**، مجله رشد آموزش ریاضی، شــماره۸۷، صص. ۲ و ۳. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۸. ایوبیــان، م.(۱۳۸۵). **جايِ خاليِ مطالعۀ تدریســی**، مجله رشــد آموزش ریاضی، شماره ۸۵، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش، صص ۹ تا ۱۹.

۹. یزدانفر، م. (۱۳۹۰). **تحقیق عمل بازتابی و بازتاب آن در آموزش دانشجو- معلمان ریاضی**، مجله رشد آموزش ریاضی، شــماره۱۰۳، صص. ۴۴ تا ۴۹. دفتر انتشــارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۰. دانش‌پــژوه، ز.(۱۳۸۲). **ارزشــیابی مهارت‌های حرفه‌ای معلمان علوم و ریاضی در دورۀ راهنمایی و ارائه روش‌های ارتقای کیفی آن**. فصل‌نامه نوآوری‌های آموزشــی، شــماره ۶، دفتر انتشــارات کمک‌آموزشی، ســازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش، صص ۹۳ تا ۹۶.

۱۱. شــیفتر، دیــورا. (۱۳۸۸). **درک درســت مفاهیم ریاضی از طریق پاســخ‌های نادرســت دانش‌آموزان**. ترجمه سپیده چمن‌آرا. مجله چشم‌انداز آموزشــی، شماره ۴، صص. ۲۷ و ۲۸. دفتر انتشــارات کمک‌آموزشی، ســازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۲. طاهــری، م. عارفی، م. پرداختچی، م. قهرمانی، م. (۱۳۹۲). **کاوش فراینــد توســعۀ حرفه‌ای معلمــان در مراکز تربیت معلم: نظریه داده بنیاد**، فصل‌نامه نوآوری‌های آموزشی، شماره ۴۵، صص ۱۴۹ تا ۱۷۶.

۱۳. رفیع‌پور، ا. گویا، ز. (۱۳۸۶). **برنامه درســی مدرسه‌محور در ایــران: افســانه یا واقعیــت؟!**، فصل‌نامه مطالعــات برنامه درسی، شــماره۴، انجمن مطالعات برنامه درسی ایران(ICSA)، صص ۱۹ تا ۲۴.

۱۴. اکتفایی‌نــژاد، ح. (۱۳۸۵). **تأثیر درس‌پژوهی بر معلمان ریاضی**، پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

۱۵. امیریــان، ط. (۱۳۹۰). **چالش‌هــای یادگیــری حرفه‌ای معلمــان ریاضی تازه‌کار دورۀ متوســطه**، پایان‌نامه منتشــر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

۱۶. محمــدی، ژ. (۱۳۸۵). **بررســی دانــش جبــری معلمان ریاضی دوره راهنمایی**، پایان‌نامه منتشــر نشــده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

۱۷. عســگری، م. (۱۳۹۱). **برنامه درسی ریاضی در مدارس هوشمند ایران**، پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

اســناد اســتفاده شــده، برگرفتــه شــده از منابــع وزارت آموزش‌وپرورش.

- **شــیوه‌نامه فعالیــت گروه‌های آموزشــی دوره راهنمایی تحصیلی** (۱۳۹۱)،
- **دستورالعمل جامع گروه‌های آموزشی** (۱۳۷۷)،
- **شیوه‌نامه اجرای جشــنواره درس‌پژوهی ریاضی پایگاه کیفیت‌بخشی به فرایند آموزش درس ریاضی** (۱۳۹۲)،
- **فرم ارزیابی عملکرد سرگروه‌های مناطق شهرستان‌های استان تهران**

بدفهمی‌های دانش‌آموزان از مباحث مثلثات

مجتبی علامه، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شِروان
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

در ایران، موضوع مثلثات، به لحاظ تاریخی و فرهنگی، همیشه مورد توجه برنامه‌ریزان درسی بوده است. علاوه بر این، مثلثات یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که در علوم دیگر کاربرد فراوانی دارد و مانند هر علم دیگری، در ابتدای آموزش آن، لازم است دانش‌آموزان با مفاهیم، اصول، واژه‌ها و تعریف‌ها آشنا شوند. همان‌طور که گلیمن (۱۹۹۱) تأکید نموده است، مثلثات بخش جدانشدنی ریاضی دبیرستان است، این در حالی است که بعضی تحقیقات نشان می‌دهند که مثلثات، یکی از مباحثی است که دانش‌آموزان کمتر آن را دوست دارند و در آن موفق‌اند؛ حتی گاهی از آن بیزارند. برای آن‌ها، مثلثات در مقایسه با مباحث دیگر ریاضیِ مدرسه‌ای، دشوارتر و انتزاعی‌تر است (هولیا گور[۱]، ۲۰۰۹). تجربه‌های بسیاری از معلمان ریاضی نیز حاکی از این است که دانش‌آموزان در فهم و درک مفاهیم پایه‌ای و توابع مثلثاتی، با چالش‌های جدی مواجه‌اند.

وجود اشتباهات مفهومی و بدفهمی‌ها، دانش‌آموزان را در مواجه شدن با مسئله‌هایی مثلثاتی دچار اشکال می‌کند و باعث می‌شود تا حتی برای حل برخی از مسائل معمولی ریاضی که، دانش مورد نیاز را هم برای حل آن‌ها در اختیار دارند، باز به نتیجه نرسند و تلاش آن‌ها با شکست مواجه گردد. مثلاً بارها شاهد بوده‌ایم که تعداد قابل توجهی از دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال که اگر، $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$، آنگاه $\sin 60^\circ$ چقدر می‌شود، گفته‌اند که:

$$\sin 60^\circ = \sin(30+30)^\circ = \sin 30^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

و یا اینکه، یکی از پاسخ‌های متداول دانش‌آموزان دربارهٔ مفهوم درجه این است که: «اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت آن یک درجه است»، در صورتی‌که می‌دانیم زوایای مرکزیِ متناظر با این قسمت‌ها یک درجه‌اند، نه خود آن قسمت!

شهریاری (۱۳۷۹) معتقد است که«مثلثات در همهٔ زمینه‌های دانش بشری (از علوم نظری گرفته تا صنایع و فنون) ریشه دوانیده و بدون استفاده از آن، همهٔ رشته‌های علمی دچار نوعی توقف می‌شوند. » (ص ۳۴).

شورای ملی معلمان ریاضی امریکا (۲۰۰۰) نیز بر ضرورت وجود مثلثات در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای، تأکید کرده است. با این وجود، تحقیقات حاکی از آن است که فعالیت‌های تدریسی در کلاس‌های ریاضی نتوانسته‌اند فهم درستی از توابع مثلثاتی را ایجاد کنند (ربانی‌فرد و گویا، ۱۳۸۶).

هدف کلی این تحقیق، شناخت بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرستان و ارائهٔ راهکارهایی برای رویارویی مناسب با این بدفهمی‌ها بود.

ایـــن پژوهش، در پی آن بود کـــه ابتدا، بدفهمی‌های دانش‌آمـــوزان پایهٔ دوم دبیرســـتان را در رابطه با مثلثات شناســـایی کند و بعد، بـــرای رویارویی مناســـب با آن‌ها، راهکارهایی ارائه دهد. براســـاس این هدف‌ها، ســـؤال‌های پژوهشی زیر صورت‌بندی شدند:

۱. اشـــتباهات مفهومیِ رایج دانش‌آمـــوزان پایهٔ دوم دبیرستان در رابطه با مثلثاتِ کدام‌اند؟

۲. نقش کتاب‌های درســـی تازه‌تألیف در رفع یا ایجاد این بدفهمی‌ها چیست؟

۳. چـــه راهکارهایی برای مواجهه بـــا این بدفهمی‌ها مناسب‌اند؟

در ایـــن مقالـــه، ابتدا گـــذری کوتاه بر ســـیر تاریخی مثلثـــات داریـــم. در ادامـــه، به اهمیت و ضـــرورت حضور مثلثـــات در برنامه‌های درســـی ریاضی مدرســـه‌ای، و نیز بعضی یافته‌های تحقیقی در رابطه با ریشـــهٔ مشـــکلات و بدفهمی‌های مثلثاتی اشاره می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: مثلثات، بدفهمـــی، زاویه، رادیان، پایهٔ دهم.

یافته‌های تحقیقی در رابطه با بدفهمی‌های مثلثاتی

اســـتانداردهای شـــورای ملی معلمان ریاضی امریکا (۱۹۸۹، ۲۰۰۰)، بـــا تأکیـــد بر ارتباط بیـــن زمینه‌های مختلـــف مثلثاتی، مثلثـــات را از دیـــدگاه دانش‌آموزان و معلمان، موضوعی ســـخت برای فهم و درک معرفی کرده است. هم‌چنین، مطالعه وبر (۲۰۰۵) نشان داد که بسیاری از دانشـــجویان بعد از یک دورهٔ کامـــل یادگیری مثلثات، هنوز درک محدودی از توابع مثلثاتی دارند.

تامســـون و همکاران (۲۰۰۷)، براون (۲۰۰۶) و وبر (۲۰۰۵) اظهار نموده‌اند که با این وجود، معلمان ریاضی و تولیدکنندگان برنامه‌های درسی، توجه اندکی به مثلثات داشـــته‌اند. آن‌هایـــی هم که بـــه مثلثات توجـــه کرده‌اند، به افزایش تمرکز و نیاز به توســـعهٔ فهـــم بنیادی مثلثات و انســـجام بیشـــتر بین زمینه‌های متعدد مثلثات اشـــاره کرده‌اند.

البتـــه مور (۲۰۱۰)، مشـــکلات دانش‌آمـــوزان را در توســـعهٔ ارتباطات مثلثاتی، به احتمـــال زیاد، چندوجهی می‌داند. به این معنا که آن را ناشی از زمینه‌های آموزشی نامرتبـــط یا با ارتبـــاط کم در آموزش مثلثات اســـت. وبر (۲۰۰۵) پیشـــنهاد می‌کنـــد که دانش‌آمـــوزان باید قادر باشـــند از هندســـه، به‌عنوان اهرمی در مثلثات اســـتفاده کنند (مانند دایـــرهٔ واحد و مثلث قائم‌الزاویه) تا بتوانند از استدلال‌هایشان در ارتباط با فرمول‌های توابع سینوس و کسینوس دفاع کنند. این در حالی است که مور (۲۰۱۰)، ادبیـــات تحقیق در زمینهٔ تفکر دانش‌آموزان را در مثلثات نادر می‌داند. مـــارکل نیز با توجه به محدودیت تحقیقات آمـــوزش ریاضی و آمـــوزش مثلثات، از مثلثـــات با عنوان «فراموش‌شده و مورد آزار قرار گرفته» یاد می‌کند. براون (۲۰۰۶) بیان می‌کند که ممکن اســـت کم‌توجهی نسبت بـــه تحقیقات مربوط به مثلثـــات و به‌طور طبیعی، کمبود یافته‌های پژوهشی در حوزهٔ آموزش مثلثات، به‌علت سهم کم و مختصری باشـــد که مثلثات، در برنامه‌های درســـی ریاضی مدرسه‌ای دارد.

وبر (۲۰۰۸) معتقد است که یادگیری توابع مثلثاتی برای دانش‌آموزان، در ابتدا، مملو از مشکلات است. مثلثات چالش‌هـــای زیادی برای اولین‌بار بـــرای دانش‌آموز ایجاد می‌کند، او نیاز دارد اشـــکال مثلث‌ها را بـــا روابط عددی مرتبـــط کند و نمادهای درگیر در این ارتباط را با مهارت بیامـــوزد. به‌عـــلاوه، تابع‌های مثلثاتـــی از اولین تابع‌هایی هســـتند که دانش‌آموزان قادر نیســـتند مستقیماً با انجام محاســـبات، مقدار آن‌ها را به‌دســـت آورند. وبر تأکید دارد که با وجود اهمیت مثلثات و مشکلات بالقوهٔ دانش‌آموزان در یادگیری آن، تحقیقـــات مرتبط اندکی بر این موضوع متمرکز شده است.

گور (۲۰۰۹) در تحقیقی، خطاهای شناســـایی شده در مثلثات را در پنج مقوله، شـــامل «استفادهٔ نادرست از داده‌ها»، «تفسیر نادرست زبانی»، «استنباط‌های منطقی غیرمعتبر»، «تعریف‌های مخدوش» و «خطاهای تکنیکی- مکانیکـــی» دســـته‌بندی کـــرد. وی دریافت کـــه بعضی دانش‌آموزان، دارای بدفهمی‌ها و پیچیدگی‌های یادگیری زیادی در مثلثات هستند که حاکی از آن است که قبل از یادگیری مفاهیم اصلی مثلثات، بعضی از مفاهیم ریاضی را نادرســـت یا ناقص یـــاد گرفته‌اند؛ مفاهیمـــی که برای یادگیری مفاهیم مثلثاتی، پایه‌ای هستند، مفاهیمی مانند دایـــرهٔ واحد، مختصات نقاط محیط دایـــره و ارتباطش با طول و عرض، فاکتورگیری و رابطهٔ فیثاغورس.

کنـــدل[2] و استیســـی[3] (۱۹۹۶) با بررســـی دو روش تدریس مثلثات، یعنی روش نســـبت و روش دایره، نقاط ضعـــف و قوت هر یک را بررســـی کردند و نتیجه گرفتند کـــه دانش‌آمـــوزان در روش نســـبت (اســـتفاده از مثلث قائم‌الزاویه)، درک مناسبی از توابع سینوسی و کسینوسی به‌دســـت نمی‌آورند. آن‌ها مشـــکلات دانش‌آمـــوزان را در مسائل کلامی مثلثات، در دو دسته طبقه‌بندی کردند:

۱. قدرت تشـــخیص تابع مثلثاتی مناســـب برای حل مســـئله؛ به این معنی که درحل مســـئله مرتبط با مثلث قائم‌الزاویه، نمی‌توانند تابع مثلثاتی مناســـب را تشخیص دهند.

۲. مدل‌سازی مسئله به‌صورت معادلهٔ قابل حل.

برای نمونه، براون (۲۰۰۶) و وبر (۲۰۰۵) به نقل از مور (۲۰۰۹) بیان می‌کنند که دانش‌آموزان در ساختن درک منسجمی از مثلثات و توابع مثلثاتی مشکل دارند و مور (۲۰۰۹) دریافت که مشکل اصلی، ناشی از درک ضعیف دانش‌آموزان از اندازهٔ زاویه و دانش تکه‌تکه‌ای است که از مثلث قائم‌الزاویه و دایرهٔ مثلثاتی در رابطه با اندازهٔ زاویه به‌دست می‌آورند. مور (۲۰۰۹) با بیان اینکه موضوعات مختلف فیزیک، مهندسی، و علوم دیگر بر فهم مثلثاتی (به‌عنوان مثال، سرعت پرتابه و حرکت موجی) تکیه می‌کنند، بنا به یافته‌های براون (۲۰۰۶)، تامپسون(۲۰۰۸) و وبر(۲۰۰۵) معتقد است که اغلب دانش‌آموزان، در موضوعات مبتنی بر فهم تابع‌های مثلثاتی، مشکل دارند. اورهان (۲۰۰۸) نیز در تحقیق خود به این نتیجه رسید که اشتباهات دانش‌آموزان در مثلثات، نظام‌وار است و اکثر آن‌ها، ریشه درچگونگی ارتباط بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه و زاویه‌های آن دارد. شاید یکی از علت‌های اصلی این بدفهمی‌ها، همان‌طور که کی‌یِرِن[4] (۱۹۹۴) معتقد است، این است که در گذشته، به‌طور سنتی، مهارت در روابط مثلثاتی خیلی مهم در نظر گرفته می‌شد و یکی از اهداف اصلی تدریس مثلثات، افزایش توانایی دانش‌آموزان در انجام عملیات با این روابط بود.

مور (۲۰۱۲) با بررسی برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ایِ آمریکا، دریافت که در آن‌ها، توابع مثلثاتی اغلب به دو روش معرفی می‌گردد؛ یکی با مثلث قائم‌الزاویه و دیگری با دایرهٔ واحد. او مشکلات دانش‌آموزان را در ارتباط با توابع مثلثاتی، نتیجهٔ بی‌ارتباطی یا ارتباط کم بین این دو زمینه می‌داند و معتقد است که به‌سبب این عدم ارتباط، دانش‌آموزان نمی‌توانند درک منسجمی از تابع‌های مثلثاتی داشته باشند. مور مدعی است که چنین انسجامی، نیازمند توسعهٔ تصورات دانش‌آموزان از اندازهٔ زاویه و استفاده از آن، به‌عنوان پایه‌ای برای ایجاد انسجام بین این دو روش، است.

مور (۲۰۱۲) توضیح می‌دهد که منظور وی از انسجام مثلثاتی، چیزی بیش از ارائهٔ فهرستی از موضوعات، تعریف‌ها و قراردادهای ریاضی با اهداف دسته‌بندی شده است. از نظر تامپسون (۲۰۰۸)، انسجام مثلثاتی یعنی توسعهٔ مفاهیم مثلثاتی و ایجاد روابط معنادار بین آن‌ها. تامپسون (۲۰۰۸) ادامه می‌دهد که منظور از «انسجام»، تأکید بر مفاهیم و ایده‌ها، برقراری ارتباط بین مفاهیم و نقش هر مفهوم در ساخت و ایجاد سایر مفاهیم مثلثاتی است. به‌طور مثال، معرفی اندازهٔ زاویه قبل از توابع مثلثاتی، اگرچه حسی قوی نسبت به تلفیق مفاهیم مثلثاتی ایجاد می‌کند، اما این تلفیق به تنهایی، مترادف با «انسجام» نیست. بلکه انسجام، به معنای تولیدی از مفهوم اندازهٔ زاویه است که با ساخت‌وسازهای دانش‌آموزان از توابع مثلثاتی سازگار باشد.

در همین رابطه، مور (۲۰۱۰) نشان داده است که بسیاری از مشکلات دانش‌آموزان و معلمان در درک مفاهیم مثلثاتی، ریشه در درک ناقص آن‌ها از مفهوم اندازهٔ زاویه دارد. بِرِسود[5] (۲۰۱۰) و تامپسون (۲۰۰۸) نیز دریافتند که در برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای ایالات متحدهٔ آمریکا[6] معمولاً اندازهٔ زاویه و توابع مثلثاتی به روشی ارائه می‌شود که ممکن است مفاهیم ناسازگاری برای اندازهٔ زاویه برحسب درجه و برحسب رادیان ایجاد شوند. ناسازگاری‌هایی که باعث به‌وجود آمدن یک شکاف ذاتی در درک مثلثاتی دانش‌آموزان شود. حتی ممکن است مثلث قائم‌الزاویه را تنها برای اندازهٔ زاویه برحسب درجه و دایرهٔ مثلثاتی واحد را فقط برای اندازهٔ زاویه برحسب رادیان، تصور کنند.

به گفته مور (۲۰۱۲)، اولین تجربهٔ دانش‌آموزان از اندازهٔ زاویه، به استفادهٔ آن‌ها از زاویه‌سنج برای اندازه‌گیری زاویه برمی‌گردد، هنگامی‌که استفاده از زاویه‌سنج را آموخته و قادر به دسته‌بندی زاویه‌ها می‌شوند (مثل زوایای حاده، باز، متمم، مکمل) و از انواع استراتژی‌های محاسباتی مرتبط برای اندازه‌گیری زاویه‌ها استفاده می‌کنند. این استراتژی‌ها و ارتباطات برای هندسه مهم هستند، ولی در این روش محاسباتی برای اندازهٔ زاویه، توجه ویژه‌ای به دایرهٔ مثلثاتی با شعاع واحد که برای اندازه‌گیری زاویه استفاده شده، وجود ندارد. تدریس به دانش‌آموزان با استفاده از یک زاویه‌سنج بدون توجه به واحد اندازه‌گیری، از فیلترهای کمّی اندازه‌گیری زاویه است (تامپسون، ۲۰۱۱). در نتیجه، روش‌های آموزشی که به درستی و به‌طور کمّی زاویه را اندازه‌گیری می‌کنند، برای توسعهٔ یک درک ملموس از اندازه‌گیری زاویه، احتمالاً به شکست می‌انجامند (مور، ۲۰۱۲).

این در حالی است که اغلب، تدریس «رادیان» از روی دایرهٔ مثلثاتی، بدون توجه به زمینهٔ آموزشی «درجه» انجام می‌شود که معمولاً مبتنی بر مثلث قائم‌الزاویه است. این اولین تجربهٔ دانش‌آموز از اندازهٔ زاویه برحسب درجه است. بنا به گفته آکوک (۲۰۰۸) و تاپکو و همکاران (۲۰۰۶)، در چنین وضعیتی، ایجاد بدفهمی‌ها در رابطه با مفاهیم درجه و رادیان در دانش‌آموزان، دور از انتظار نیست، زیرا هر دو، اندازه‌های زاویه بر حسب دو مقیاس متفاوت‌اند.

به‌دلیل اینکه رادیان و درجه، واحدهای اندازه‌گیری

متفاوتی برای کمیتی واحد به‌نام زاویه هستند، پس بهتر است برای ایجاد قدرت مقایسه بین این دو واحد، از زمینهٔ تدریسی استفاده شود که مور (۲۰۱۲) این زمینهٔ مشترک را دایرهٔ واحد مثلثاتی معرفی می‌کند. مور (۲۰۱۲) در تحقیقش به این جمع‌بندی رسید که تدریس مثلثات، دارای پیچیدگی‌های زمینه‌ای زیادی است و همین پیچیدگی‌ها، فرصت مغتنمی برای یادگیری مثلثات ایجاد می‌کند. علاوه بر این، به باور وی، معمولاً هنگامی‌که یک مفهوم جدید ریاضی به دانش‌آموزان معرفی می‌شود، بدفهمی‌های جدی رخ می‌دهد. علت این است که یا دانش‌آموزان آمادگی لازم را برای درک مفهوم جدید ندارند یا اینکه مفهوم جدید، بسیار مجرد است. لنسدل[7] معتقد است برای اینکه بدفهمی‌های جدی دانش‌آموزان نسبت به مفهوم جدید تشخیص داده شده و برطرف شود، لازم است شرایط بیان توضیح و توجیه پاسخ‌های داده شده از طرف دانش‌آموزان ایجاد شود، و برای این کار، استفاده از روش ارزشیابی مبتنی بر استدلال کردن، رویکردی مناسب است.

وبر (نقل شده از ربانی‌فرد و گویا، ۱۳۸۶) نیز به دو محدودیت در فهم توابع مثلثاتی اشاره می‌کند که یکی از آن‌ها، مربوط به نقشی است که نمودارهای هندسی در فهم توابع مثلثاتی و ارتباط دادن این توابع به مدل‌های هندسی مناسب، بازی می‌کنند. مطالعهٔ وی نشان داد که دانش‌آموزان، توابع مثلثاتی را با مدل هندسی‌شان مرتبط نمی‌کنند. مثلاً هنگامی‌که از آن‌ها خواسته شد $\sin\theta$ را برای یک θ خاص تقریب بزنند، بیشتر دانش‌آموزان عنوان کردند که اطلاعات آن‌ها برای این کار کافی نیست. بعضی‌ها هم ادعا کردند اگر مثلث مناسبی داشته باشند، می‌توانند $\sin\theta$ را تقریب بزنند. علاوه بر این، براون[8] (نقل شده در ربانی‌فرد، ۱۳۸۶) دریافت که فهم مثلثاتی دانش‌آموزان در رابطه با سینوس و کسینوس، ناقص است. وی این بدفهمی‌ها را در سه دستهٔ زیر معرفی کرد:

۱. سینوس و کسینوس به‌عنوان مؤلفه‌های یک نقطه در دایره واحد؛

۲. سینوس و کسینوس به‌عنوان فاصله‌های عمودی و افقی آن نقطه؛

۳. سینوس و کسینوس به‌عنوان نسبتی از اضلاع مثلث.

در همین راستا، تحقیقات بلکت و تال (۱۹۹۱) در تأیید تأثیر مثبت استفاده از تکنولوژی، و در اینجا بهتر است بگوییم ابزار، در تدریس مثلثات است. درتحقیقی که بلکت و تال انجام دادند، دو گروه از دانش‌آموزان شرکت کردند که گروه اول، با ابزار آموزش دیدند که به آن‌ها اجازه می‌داد تا اعداد و روابط هندسی را در یک حالت تعاملی کشف کنند. مثلاً دانش‌آموزان با امتحان کردن چند زاویه خاص، می‌توانند حدس بزنند که تانژانت زاویه، با سینوس زاویه تقسیم بر کسینوس زاویه مساوی است. در صورتی که گروه دوم در همان مدرسه، توسط معلمی آموزش دیدند که به‌صورت سنتی مثلثات را تدریس می‌کرد. یافته‌های این مطالعه نشان داد که دانش‌آموزانی که با کمک ابزار آموزش دیده بودند، عملکرد بهتری نسبت به گروه دیگر داشتند. آنان به این نتیجه رسیدند که با استفاده از ابزار، دانش‌آموزان می‌توانند با شکل‌های متنوع و مختلف هندسی دست‌ورزی می‌کنند و خود، روابط عددی و مثلثاتی را کشف می‌کنند. از طرف دیگر، استفاده از ابزار در تدریس مثلثات باعث می‌شود تا دانش‌آموزان به مفاهیم بیشتر توجه کنند و برای محاسبات عددی غیرضروری، وقت خود را تلف نکنند.

در این مطالعه ۵۴ دانش‌آموز پایهٔ دهم شرکت کردند که همگی، در کلاسی بودند که نویسنده اول مقاله، معلم ریاضی آن بود. ابزار جمع‌آوری داده‌ها، آزمونی با هفت دسته سؤال بود که در این مقاله، تنها به ارائهٔ نتایج سؤال‌های سه دستهٔ اول می‌پردازیم. همهٔ سؤال‌ها برگرفته از کتاب درسی مربوط بود.

سؤال‌های دستهٔ اول

سؤال ۱: زوایای ۳- رادیان و 3π- رادیان، چه کسری از دایرهٔ مثلثاتی هستند؟ اندازهٔ آن‌ها را برحسب درجه بیان کنید (با تقریب سه رقم اعشار)

این سؤال، تمرین شمارهٔ دو از مسائل صفحهٔ ۱۲۸ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش‌های زیاد انتخاب شد:

- اضافه کردن «،» بعد از رادیان، حذف «ی» دایره‌ی، حذف عبارت مبهم «طی شده» و جایگزینی «مثلثاتی» به‌جای آن، حذف «ی» اندازه‌ی.

سؤال ۲: π رادیان با π درجه چه فرقی می‌کند؟ توضیح دهید.

هدف از سؤال‌های این دسته، بررسی درک مفهومی دانش‌آموزان از مفاهیم درجه و رادیان، ارتباط بین درجه و رادیان و سنجش قدرت به‌کارگیری این مفاهیم برای حل مسائل کاربردی بود.

سؤال‌های دستهٔ دوم

سؤال ۱:

الف. اگر $\cos\theta = \frac{۲}{۵}$ باشد، $\sin\theta$ چقدر است؟

ب. این مقدارها را روی صفحهٔ مختصات نشان دهید.

(تمرین شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۳۱ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه)

سؤال ۲: اگر زاویهٔ θ در موقعیت استاندارد باشد، یعنی نقطهٔ انتهایی کمان θ، دایرهٔ مثلثاتی را در نقطهٔ $(\frac{-۲}{\sqrt{۵}},\frac{۱}{\sqrt{۵}})$ قطع کند، مقادیر $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را در این نقطه حساب کنید.

این سؤال، تمرین شمارهٔ ۳ از مسائل صفحهٔ ۱۳۱ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش‌های زیر انتخاب شد:

- حذف «ی» از انتهای کلمات زاویه‌ی، دایره‌ی، نقطه‌ی؛
- جایگزینی «یعنی» به‌جای «به‌طوری که»؛
- جایگزینی «این نقطه» به‌جای «نقطهٔ فوق».

سؤال ۳: با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، درستی یا نادرستی عبارت $\cos۴ = \cos(-۴)$ را بررسی کنید. (زوایای فوق برحسب رادیان هستند.)

این سؤال، تمرین شمارهٔ ۲ از مسائل صفحهٔ ۱۳۸ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش کامل، صورت سؤال بازنویسی شد. صورت سؤال در کتاب درسی به‌صورت زیر بود:

- «۲. عبارت $\cos۴ = \cos(-۴)$ درست یا نادرست است؟ با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی، جوابتان را بررسی کنید. (زوایای فوق برحسب رادیان هستند.)»

هدف از سؤال‌های این دسته، بررسی درک رابطهٔ بین توابع مثلثاتی و ارتباط آن‌ها با دایرهٔ مثلثاتی، و مفاهیم پایه‌ای مثلثات از جمله موقعیت استاندارد زاویه و کمان بود. به‌دلیل هم‌پوشانیِ هدفِ سؤال‌های اول و سوم توسط سؤال دوم، این دو سؤال از سؤال‌های آزمون اصلی حذف شدند.

سؤال‌های دستهٔ سوم

سؤال ۱: دو مقدار برای θ بین $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲}$ پیدا کنید، به‌طوری که $\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ باشد.

این سؤال، تمرین شمارهٔ ۶ از مسائل صفحهٔ ۱۳۲ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش زیر انتخاب شد:

- جایگزینی «برای» به‌جای «از».

سؤال ۲: اگر $\cos\theta = ۰/۲$ باشد (θ برحسب رادیان)، بدون استفاده از ماشین‌حساب، مقادیر $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ و $\cos(\pi+\theta)$ را به‌دست آورید.

این سؤال، تمرین شمارهٔ ۴ از مسائل صفحهٔ ۱۳۹ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش زیر انتخاب شد:

- جایگزینیِ «بدون استفاده از ماشین‌حساب» به‌جای «بدون ماشین‌حساب».

سؤال ۳: اگر $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$، مقدار $\sin۲\theta$ را به‌دست آورید.

هدف اصلی سؤال‌های این دسته بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم و رابطهٔ زاویه، کمان و تابع مثلثاتی و توانایی استفاده از دایرهٔ مثلثاتی در حل مسائل بود. به‌علاوه، سؤال اول، درک دانش‌آموز از جهت مثلثاتی و تابع کسینوس را نیز می‌سنجد. سؤال دوم درک دانش‌آموز در برخورد با کسینوس زوایای حاده و منفرجه را نیز می‌سنجد و سؤال سوم در پی یافتن درک دانش‌آموز در مواجهه با تغییر زاویه در تابع سینوس است.

یافته‌ها

در این بخش، یافته‌ها به تفکیک هر دستهٔ سؤال، ارائه می‌شوند.

سؤال‌های دستهٔ اول

هدف از طراحی سؤال‌های دستهٔ اول، بررسی درک دانش‌آموزان از مفاهیم درجه و رادیان و ارتباط این دو با هم، تصور آنان از این واحدهای اندازه‌گیری زاویه در دایرهٔ مثلثاتی و هم‌چنین تفاوت مقدار کسری و جهتی در دایرهٔ مثلثاتی بود. سؤال ۱ در پی بررسی رابطهٔ بین رادیان و دایرهٔ مثلثاتی و رابطهٔ بین درجه و رادیان و تفاوت مقدار کسری و جهتی در دایرهٔ مثلثاتی بود و سؤال ۲، در پی بررسی دیدگاه دانش‌آموزان در فهمیدن تفاوت درجه و رادیان و عدد π بود. با توجه به اهداف مرتبط، این دو سؤال در یک دسته قرار گرفتند.

سؤال ۱: زوایای ۳- رادیان و ۳π- رادیان، چه کسری از دایرهٔ مثلثاتی هستند؟ اندازهٔ هر یک را برحسب درجه بیان کنید (با تقریب سه رقم اعشار).

از ۵۴ دانش‌آموز شرکت‌کننده در آزمون، ۴۴ نفر پاسخی به این سؤال ندادند و ۱۰ نفر پاسخ را یا کاملاً غلط نوشته بودند و یا ناقص! در پاسخ‌های داده شده به سؤال اول، جواب‌های ناصحیح قابل توجه بودند. برای مثال، تعداد زیادی در پاسخ به مقدار ۳π-، نوشته بودند $-۳\pi = -۳\times۱۸۰ = -۵۴۰$ که بیانگر این است که π را

مســـاوی 180° می‌دانند، یعنی درک صحیحی از ماهیت عددی π ندارند و نســـبت به عدد بودن آن، شـــک دارند. هم‌چنین، یکی از خواسته‌های ســـؤال این بود که بدانند این مقادیر، چه کســـری از دایرهٔ مثلثاتی هستند و نیازی به وارد کردن «π» برای به‌دســـت آوردن پاسخ ندارند. این امر بیانگر عدم درک دانش‌آموزان از مفهوم مقدار کسری و تفاوت آن با مقدار جهت‌دار است. تعدادی از دانش‌آموزان فقط با نوشتن فرمول

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

مقدار این زاویه‌ها را برحســـب درجه محاســـبه کرده بودند که نشـــان می‌داد آن‌ها رادیان را به‌عنوان یک واحد اندازه‌گیری مســـتقل از درجه نمی‌شناســـند و فقط آن را به‌وسیلهٔ درجه می‌توانند توضیح دهند. دانش‌آموزان، تنها فرمول را به خاطر ســـپرده و کمتـــر به معنای این برابری توجه کرده بودند. هم‌چنین، نتوانستند بین رادیان و دایرهٔ مثلثاتی ارتباط معناداری برقرار کنند.

سؤال ۲: π رادیان با π درجه چه فرقی می‌کند؟ توضیح دهید.

از ۵۴ دانش‌آمـــوز شـــرکت‌کننده در آزمون، ۴۰ نفر پاســـخی به این ســـؤال ندادنـــد و ۱۴ نفر پاســـخ را کاملاً غلط نوشـــته بودند! پنج نفر از دانش‌آموزان نوشـــته بودند «رادیان دقیق‌تر اســـت» و توضیح بیشتری در مورد دلیل این پاسخشـــان نداده بودند. علت دادن این پاســـخ، شاید به‌دلیل توضیح ندادن ضرورت معرفی رادیان به‌عنوان یک واحد اندازه‌گیری جدیدِ زاویه در کتاب درســـی ریاضی۲ است. همان‌طور که در این کتاب درسی دیده شد، معرفیِ رادیان بدون توجیه ضرورت آن اســـت و ممکن است مثلاً دانش‌آمـــوزان، آن را با واحدهـــای اندازه‌گیری طول مانند متر، سانتی‌متر و میلی‌متر که به ترتیب، دقت اندازه‌گیری را بالاتر می‌برند، مقایســـه کرده و این نتیجه را گرفته‌اند. پاسخ‌های نادرست دیگر در سه دستهٔ زیر قرار گرفتند.

۱. π رادیان ۴۰۰ واحد اســـت و π درجه ۳۶۰ درجه است.

احتمـــالاً ایـــن پاســـخ کـــه معـــرف پاســـخ‌های اکثر دانش‌آموزان اســـت، از یادگیری طوطی‌وار این مطلب که «دایره 360° و ۴۰۰ گرادیان» اســـت ناشـــی شده است. به‌علاوه این دانش‌آموزان، برای π هم ارزش عددی قائل نشـــده بودند که بیانگر فهم مبهم آن‌ها از π اســـت. این مشـــکل شـــاید به ضعف در معرفی عدد π مربوط باشـــد. در ضمـــن، این‌ها، واحدهای رادیـــان و گرادیان را معادل پنداشته بودند که پاسخ‌های زیر، مؤید این ادعاست.

- π رادیان یعنی دایره را به ۳۶۰ درجه تقسیم کنیم و π درجه مقداری از ۳۶۰ درجه را گویند.
- π رادیان ۲۰۰ درجه اســـت، ولـــی π درجه ۱۸۰ درجه است.

۲. پاســـخ‌ها نشـــان دادند کـــه دانش‌آمـــوزان، عمدتاً نمی‌دانســـتند که رادیان چیســـت و این را از نامربوطی و بی‌دقتی پاسخ‌ها می‌شد استنباط کرد. انواع پاسخ‌های این دسته به‌صورت زیر بود:

- رادیان برحسب ۱۸۰ است، یعنی هر یک π مساوی با ۱۸۰ درجه است.
- اگر دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت تقسیم کنیم، به هر قســـمت درجه می‌گویند و یک درجه را برحســـب رادیان حساب می‌کنیم.
- رادیان به ۴۰۰ قســـمت درجه‌بندی شده است، اما درجه به ۱۸۰ قسمت درجه‌بندی شده است.
- به‌دست آوردن زاویه بر حسب π را رادیان گویند.
- هر رادیان 180° است.
- رادیان دایره را به ۴۰۰ قسمت تقسیم می‌کند، ولی درجه به ۳۶۰ قسمت.
- اگر یک دایره را برحسب درجه حساب کنیم، ۳۶۰ درجه می‌شود ولی اگر برحسب رادیان تقسیم کنیم، ۱۸۰ درجه می‌شود.

۳. پاســـخ یکی از دانش‌آموزان، بـــه لحاظ ماهیتی با دیگران متفاوت و ویژه بود و جای تأمل بسیار دارد.

- *دایرهٔ مثلثاتی را به ۳۶۰ قسمت تقسیم می‌کنیم که هر قســـمت آن، یک درجه است. رادیان که همان π است ۱۸۰ درجه است که یک خط ۱۸۰ یعنی π است و زاویهٔ ۹۰ درجه که $\frac{\pi}{2}$ اســـت و زاویهٔ ۲۷۰ درجه که $\frac{3\pi}{2}$ است و زاویهٔ ۳۶۰ درجه 2π است.*

ایـــن پاســـخ، بیانگر آن اســـت که دانش‌آمـــوز، تصور درستی از زاویه هم ندارد، چون زاویه‌های متناظر به $\frac{1}{360}$ از محیط هر دایره، یک درجه است و نه هر کدام از ۳۶۰ قسمت محیط دایره. هم‌چنین، رادیان را مساوی π گرفته است و در واقع، تصور عددی نسبت به π ندارد و تنها آن را نمادی از رادیان می‌پندارد و مساوی 180° می‌داند.

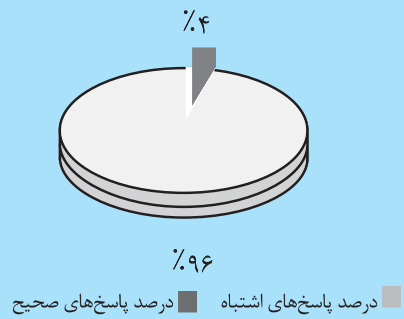
در جمع‌بنـــدی پاســـخ‌های ســـؤال‌های دســـتهٔ اول، می‌توان گفت که در این تحقیق، بیشـــتر دانش‌آموزان π را برابـــر ۱۸۰ درجه می‌پندارند، درک صحیحی از ماهیت عددی π ندارند و نســـبت به عدد بودن آن شک دارند. در واقع، π برای بیشتر دانش‌آموزان مظهر رادیان است. اغلب

دانش‌آموزان، بیشـــترین چیزی که از رادیان می‌دانستند رابطهٔ $\frac{R}{\pi}=\frac{D}{180}$ بـــود که بیانگر این مطلب اســـت که آن را یک واحد مســـتقل از درجه نمی‌شناســـند و به‌وســـیلهٔ درجه می‌توانند در مورد آن اظهار نظر کنند. پاســـخ‌های ســـؤال اول، نشـــان از ضعف دانش‌آموزان در ایجاد ارتباط بین دایرهٔ مثلثاتی و رادیان داشـــت. شاید علت اصلی، در نحوهٔ پرداختن کتاب درســـی به معرفـــی درجه و رادیان باشـــد که ابتدا درجه به‌عنوان واحد اندازه‌گیری در مثلث قائم‌الزاویه معرفی می‌شـــود و بعد از حل تمرینات متعدد، رادیان به‌عنوان واحد دیگری برای اندازهٔ زاویه و با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی معرفی می‌گردد و در کتاب درسی، نسبت به ایجاد ارتباطی مناســـب بین این دو واحد، توجه کافی نشـــده اســـت. مثلاً تعریف رادیـــان در صفحهٔ ۱۲۳ کتاب درســـی که رادیان را براساس دایرهٔ واحد تعریف می‌کند و دانش‌آموز در ادامه، در درک فرمول رابطه بین طول کمان و اندازهٔ زاویه برحســـب رادیـــان یعنی $\theta=\frac{L}{r}$ در صفحهٔ ۱۲۵ کتاب درســـی دچار سردرگمی می‌شـــود. به‌علاوه، در مـــورد علـــت این صورت‌بنـــدی، هیـــچ توضیحی داده نشـــده اســـت. هم‌چنین، توضیح مختصر و گیج‌کننده‌ای در مـــورد رابطـــهٔ درجه و رادیـــان و فرمول $\frac{R}{\pi}=\frac{D}{180}$ در صفحهٔ ۱۲۴ کتاب درسی آمده است که این امر، می‌تواند از علت‌های احتمالی این ضعف در بین دانش‌آموزان باشد. نحـــوهٔ زاویه‌بندی و پرداختن بـــه رابطهٔ درجه و رادیان در شکل‌های ارائه شده در کتاب درسی، از علت‌های دیگر در وجـــود بدفهمی‌های موجود در بین دانش‌آموزان می‌تواند باشد. مثلاً در شکل مربوط به «تمرین در کلاس» شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱۲۵ کتاب درسی، کمان نشان‌دهندهٔ زاویه است و تنها زوایای سرراســـت نظیر 270° را می‌توان محاسبه کرد، و محاسبهٔ زوایای غیرسرراست مثل ۲۲/۱۸۵، تقریباً ممکن نیست.

سؤال دستهٔ دوم

هدف از ســـؤال این دسته، بررســـی درک رابطهٔ بین توابع مثلثاتی و ارتبـــاط آن‌ها با دایرهٔ مثلثاتی، و مفاهیم پایه‌ای مثلثات از جمله موقعیت اســـتاندارد زاویه و کمان بود.

سؤال: اگر زاویهٔ θ در موقعیت استاندارد باشد، یعنی نقطـــهٔ انتهایی کمان θ، دایـــرهٔ مثلثاتی را در نقطهٔ $(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}})$ قطع کند. مقادیـــر $\cos\theta$، $\sin\theta$ و $\tan\theta$ را در این نقطه حساب کنید.



شکل ۱: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال دستهٔ دوم۴ درصد

از ۵۴ دانش‌آموز شـــرکت‌کننده در پژوهش، ۵۱ نفر پاسخی به این سؤال نداده بودند. از سه نفر بقیه هم که به این سؤال پاسخ داده بودند، تنها پاسخ دو نفر درست و نفر سوم اشتباه بود. پاسخ درست به‌صورت زیر بود:

$$(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}})=(\cos\theta,\sin\theta)\Rightarrow \quad =$$

$$x=\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ y=\sin\theta=\frac{-2}{\sqrt{5}},$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{-2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=-2$$

دانش‌آموزی که پاســـخ اشـــتباه داده بود، $\cos\theta$ را با مؤلفهٔ دوم یعنی $\frac{-2}{\sqrt{5}}$ و $\sin\theta$ را با مؤلفهٔ اول یعنی $\frac{1}{\sqrt{5}}$، مختصات نقطهٔ مساوی قرار داده بود و در ادامه با استفاده از فرمول $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$، مقدار $\tan\theta$ را $\frac{-1}{2}$ به‌دســـت آورده بود. با پرسش از او در مورد علت این پاسخ، متوجه اشتباه این دانش‌آموز در به‌خاطر سپردن ترتیب مؤلفه‌ها که به ســـینوس و کســـینوس زاویه اختصـــاص می‌دهند، شدیم که بیانگر یادگیری حافظه‌محور وی بود.

درصد پایین پاســـخ به این سؤال، شاید حاکی از عدم توانایی دانش‌آموزان در برقراری ارتباط بین توابع مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی باشـــد؛ یـــا اینکه از معرفی ایـــن توابع از طریق نســـبت‌های مثلث قائم‌الزاویه ناشی می‌شود. یعنی دانش‌آموزان، نسبت‌های مثلثاتی را به‌عنوان یک تابع درک نکرده‌اند، برخلاف آنکه در دایرهٔ مثلثاتی، سعی در معرفی نســـبت‌های مثلثاتی به‌عنوان تابع می‌شود. این در حالی اســـت که پاسخ‌های این سؤال نشان داد که دانش‌آموزان، «زاویهٔ در حالت استاندارد» را نمی‌شناسند و انتهای کمان را در حالت اســـتانداردِ زاویه، تشخیص نمی‌دهند، زیرا در کتاب درســـی، به این مهم به‌خوبی پرداخته نشده است.

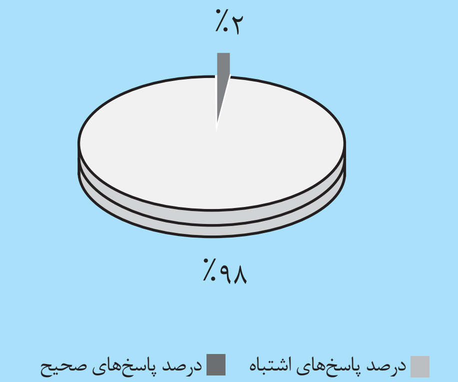
مثلاً شــکل مربوط به مثال ۳، صفحهٔ ۱۲۹ کتاب درسی، علاوه بر ایجاد بدفهمی در زاویه و اندازهٔ آن، به ارتباط بین مختصات نقطهٔ انتهای کمان و زاویه در حالت اســتاندارد نیز نپرداخته است.

سؤال‌های دستهٔ سوم

هدف اصلی ســؤال‌های این دســته، بررســی درک دانش‌آمــوزان از مفهوم و رابطهٔ زاویه، کمان، تابع مثلثاتی و توانایی اســتفاده از دایرهٔ مثلثاتی در حل مسائل بود. به علاوه با ســؤال ۱، قصد داشــتیم درک دانش‌آموزان را از جهت مثلثاتی و تابع کســینوس بررســی کنیم. سؤال ۲، درک دانش‌آموز را در برخورد با کسینوس زوایای حاده و منفرجه می‌ســنجد و سؤال ۳، در پی درک دانش‌آموز در مواجهه با تغییر زاویه در تابع سینوس است.

سؤال ۱: دو مقدار برای θ بین $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲}$ پیدا کنید، به‌طوری که $\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ باشد.

شکل ۲: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال ۱ دستهٔ سوم



از ۵۴ دانش‌آموز شــرکت کننده در این پژوهش، ۵۲ نفر پاسخی به این سؤال نداده بودند و از دو نفری هم که پاســخ داده بودند، فقط پاســخ یک نفر صحیح بود. پاسخ صحیح به‌صورت زیر بود:

$\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ در نتیجه:

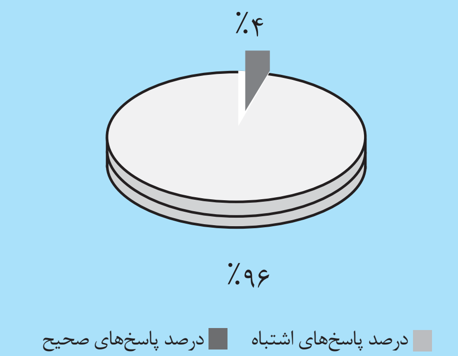
$$\cos ۶۰ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos -۶۰ = \frac{۱}{۲}$$

پاسخ دیگر که کامل نبود، به‌صورت $\cos ۶۰ = \frac{۱}{۲}$ ارائه شده بود که شاید پاسخ‌دهنده، به محدودهٔ زاویهٔ θ که بین $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲}$ بود، توجه نکرده بود و محدودهٔ θ را ربع‌های دوم و ســوم فرض کرده بود و این، نشان از وجود بدفهمی در مفهوم بازه اســت که دانش‌آموز باید آن را از $\frac{-\pi}{۲}$ یعنی ربع چهــارم تا $\frac{\pi}{۲}$ یعنی ربــع اول در نظر می‌گرفت. از دیدگاه دبیران، این مشــکل به کم‌توجهی و نمونه سؤالات اندک کتاب درســی که مشابه با این ســؤال باشند، برمی‌گردد. به‌علاوه، ناتوانی دانش‌آموزان در استفاده از دایرهٔ مثلثاتی برای حل این سؤال، واضح بود.

ســؤال ۲: اگر $\cos\theta = ۰/۲$ باشــد (θ برحســب رادیان)، بدون اســتفاده از ماشین‌حســاب، مقادیر $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta)$ و $\cos(\pi + \theta)$ را به‌دست آورید.

شکل ۳: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال ۲ دستهٔ سوم



از ۵۴ دانش‌آمــوز شــرکت‌کننده در آزمــون، به این ســؤال، تنها دو نفر پاســخ صحیح و سه نفر پاسخ اشتباه داده بودند و بقیهٔ دانش‌آموزان، اصلاً پاسخی نداده بودند. دو پاسخ اشتباه به‌صورت زیر بود:

$$\cos\theta = ۰/۲$$

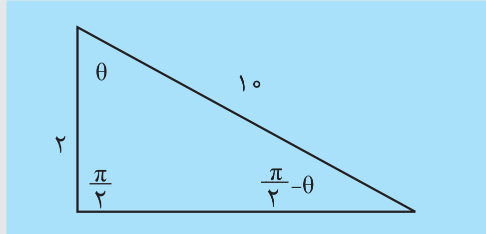
آن‌گاه

$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) = ۸۹/۸, \cos(\pi + \theta) = ۱۸۰/۲$$

ایــن دو دانش‌آمــوز، اصلاً نقشــی برای ســینوس و کســینوس در پاسخ‌هایشان قائل نشده بودند و این توابع را فقط به‌عنوان دســتگاهی که زاویه‌ها را به‌عنوان ورودی گرفتــه و آن‌ها را به خروجی می‌بــرد، فهمیده بودند که نشان از فهم و درک ضعیف آن‌ها از مفهوم تابع داشت.

یکــی دیگــر از دانش‌آمــوزان با رســم یــک مثلث قائم‌الزاویه مانند شــکل صفحه بعد، پاسخ $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta)$ را به‌درستی به‌دست آورده، ولی نتوانسته بود $\cos(\pi + \theta)$ را محاسبه کند:

چون $\cos\theta = ۰/۲$ پس

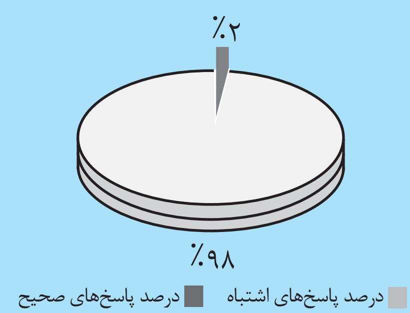


$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۲}{۱۰}=۰/۲$$

این پاسخ بیانگر آن است که دانش‌آموز، درک خوبی از نسبت‌های مثلثاتی که به‌وسیلهٔ مثلث قائم‌الزاویه در سال‌های قبل معرفی شده داشته و به‌خوبی از آن‌ها برای به‌دست آوردن مقدار $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ استفاده کرده بود، ولی نتوانسته بود از دایرهٔ مثلثاتی برای به‌دست آوردن مقدار $\cos(\pi+\theta)$ استفاده کند که این حاکی از ضعف دانش‌آموز در برقراری ارتباط بین تابع مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی بود. این دانش‌آموز قادر به محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی در محدودهٔ زاویهٔ حاده و با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه بود. ولی در محاسبهٔ مقدار تابع مثلثاتی زاویه‌های غیرحاده دچار مشکل شده بود. شاید این مشکل، از اینکه حتی یک مورد توضیح در نحوهٔ به‌دست آوردن مقادیر توابعی مشابه $\cos(\pi+\theta)$ در کتاب درسی نیست، ناشی می‌شود، چون این قسمت که از صفحهٔ ۱۳۲ کتاب درسی با عنوان «تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زوایا» شروع می‌شود، کلاً در قالب فعالیت و بر عهدهٔ دانش‌آموز گذاشته شده است.

سؤال ۳: اگر $\sin\theta=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\sin ۲\theta$ را به‌دست آورید.

شکل۴: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال ۳ دستهٔ سوم



از ۵۴ دانش‌آموز شرکت‌کننده در آزمون، فقط یک نفر به این سؤال، به‌درستی پاسخ داده بود و پاسخ ده نفر دیگر، اشتباه بود که همگی جواب اشتباه ۱ را داده بودند. پاسخ این ده نفر به صورت زیر بود:

$$\sin\theta=\frac{۱}{۲} \quad \text{آن‌گاه} \quad \sin ۲\theta=۲\sin\theta=۲(\frac{۱}{۲})=۱$$

گور (۲۰۰۹) در تحقیقی، خطاهای شناسایی شده در مثلثات را در پنج مقوله، شامل «استفادهٔ نادرست از داده‌ها»، «تفسیر نادرست زبانی»، «استنباط‌های منطقی غیرمعتبر»، «تعریف‌های مخدوش» و «خطاهای تکنیکی- مکانیکی» دسته‌بندی کرد. وی دریافت که بعضی دانش‌آموزان، دارای بدفهمی‌ها و پیچیدگی‌های یادگیری زیادی در مثلثات هستند که حاکی از آن است که قبل از یادگیری مفاهیم اصلی مثلثات، بعضی از مفاهیم ریاضی را نادرست یا ناقص یاد گرفته‌اند؛ مفاهیمی که برای یادگیری مفاهیم مثلثاتی، پایه‌ای هستند، مفاهیمی مانند دایرهٔ واحد، مختصات نقاط محیط دایره و ارتباطش با طول و عرض، فاکتورگیری و رابطهٔ فیثاغورس

این دانش‌آموزان، روابط سینوسی را به‌صورت تابعی خطی از زاویهٔ ورودی در نظر گرفته بودند که می‌تواند ناشی از عدم تأکید کتاب درسی به این مطلب باشد. چون فقط تمرین ۷ صفحهٔ ۱۳۶ از کتاب درسی که در قسمت مسائل گنجانده شده است، مربوط به بررسی این مطلب است.

هم‌چنین، دانش‌آموزان اولین‌بار است که به‌طور مستقیم، قادر به محاسبهٔ این مقدارها نیستند و این پاسخ را در ادامهٔ مطالب قبلی، موجه می‌دانستند. ایجاد یک تقابل مفهومی در کلاس درس و کتاب درسی و تأکید بر آن، کمک شایانی به رفع چنین بدفهمی‌هایی در ذهن دانش‌آموزان می‌کند. مثلاً می‌شود مشابه روند کتاب، با ارائهٔ فعالیتی، مقادیر $\sin ۶۰^\circ$ و $۲\sin ۳۰^\circ$ با هم مقایسه شوند و سپس، نتیجهٔ کلی برای تابع سینوس بیان شود، یعنی: $\sin(\pi+\theta)\neq\sin\pi+\sin\theta$ و به همین ترتیب، برای کل توابع مثلثاتی بر این نکته تأکید شود.

استدلال دانش‌آموزی که پاسخ صحیح داده بود،

به‌صورت زیر بود:

$$\sin\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

$$\theta = ۳۰^\circ \Rightarrow ۲\theta = ۶۰^\circ$$

$$\sin ۲\theta = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

این استدلال، بیانگر آن بود که این دانش‌آموز از ویژگی‌های توابع خطی آگاه بود و می‌دانست که سینوس، تابعی خطی نیست.

در جمع‌بندی پاسخ‌های این دسته، نکات ظریفی قابل بیان است، از جمله اینکه بعضی دانش‌آموزان، روابط سینوسی را به‌صورت تابعی خطی از زاویهٔ ورودی در نظر گرفته بودند و تنها قادر به محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی در محدودهٔ زاویهٔ حاده و با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه بودند. هم‌چنین در محاسبهٔ مقدار تابع مثلثاتیِ زاویه‌های غیرحاده، دچار مشکل بودند، یعنی به‌خوبی، نمی‌توانستند از دایرهٔ مثلثاتی استفاده کنند.

علاوه بر این، بعضی از دانش‌آموزان، در تشخیص مقدار تابع مثلثاتی یک زاویهٔ منفرجه مشکل داشتند.

یافته‌های این تحقیق نشان داد که رایج‌ترین بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرستان در این موارد است:

– مفهوم اندازهٔ زاویه را به‌خوبی درک نمی‌کنند؛

– با مقیاس رادیان برای اندازهٔ زاویه، ارتباط برقرار نمی‌کنند و با مشکل مواجه هستند؛

– در تخمین و تعیین محدودهٔ نسبت‌های مثلثاتیِ زاویه‌های ناشناخته، ناتوان هستند و دچار مشکل می‌شوند؛

– از مثلث قائم‌الزاویه در مقایسه با دایرهٔ مثلثاتی، بیشتر برای حل مسئله استفاده می‌شود و به‌خوبی از دایرهٔ مثلثاتی برای حل مسئله، نمی‌توانند استفاده کنند؛

– نسبت‌های مثلثاتی را به‌عنوان توابع خطی می‌پندارند.

نتیجه‌گیری

نتایج، حاصل تجزیه‌وتحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال‌های آزمونی است که به قصد جمع‌آوری داده‌ها طراحی شده بود. سؤال‌های آزمون، با دانش محتوایی مورد نظر کتاب ریاضی پایهٔ دوم متوسطه از دانش‌آموزان متناسب بود. یافته‌ها می‌تواند برای همهٔ کسانی که با تدریس ریاضی در دورهٔ متوسطه در ارتباط هستند، سودمند باشد. یادگیری مثلثات دغدغهٔ بسیاری از دبیران ریاضی است. این همکاران، با علاقه به دنبال علل مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری مثلثات هستند و در ارتباط با آن، به بحث و مناظره می‌پردازند؛ آن‌ها از پژوهشگران انتظار دارند که نسبت به یادگیری و تدریس مثلثات، که نقش برجسته‌ای در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ متوسطه در ایران دارد، بپردازند.

بیشتر مدیران و دبیران از انجام این پژوهش حمایت کردند، اگرچه نتایج آن را قابل پیش‌بینی و آشکار می‌دانستند. آن‌ها انتظار داشتند که انجام چنین پژوهش‌هایی بتواند به ارائهٔ راهکارهای عملی برای بهبود تدریس و یادگیری مثلثات بیانجامد. به باور دبیران، وجود بدفهمی‌ها در آموزش و یادگیری ریاضی در ایران، تا حد زیادی عمومیت دارد و به‌همین خاطر، لازم است در این زمینه، پژوهش‌های متعددی انجام شود. دبیران ریاضی بیان نمودند که به‌دلیل «مشکل بودن مثلثات» و به اصطلاح «فرّار» بودن آن، تدریس مثلثات را به‌عنوان «فصل آخر»، به پایان سال تحصیلی موکول می‌کنند که «تا حد امکان» به امتحانات پایانی «نزدیک» باشد.

– در مورد آزمون، نظر دانش‌آموزان این بود که ساختار آن، با سایر آزمون‌هایی که تا آن وقت داده بودند متفاوت است زیرا به دنبال استدلال است.

– معلمان نیز سؤال‌های آزمون را «بسیار بالاتر از سطح توانایی‌های دانش‌آموزان» می‌دانستند.

– چون الزامی برای ذکر نام و نام خانوادگی وجود نداشت، انتظار می‌رفت که پدیده‌ای به نام «تقلب» رخ ندهد. اما با وجودی که بیشتر دانش‌آموزان هم نام و نام خانوادگی را ننوشته بودند، باز هم مواردی از تقلب، از قبیل استفاده از جزوه و کمک گرفتن از نوشته‌های دانش‌آموز کنار دستی، دیده شد که به‌نظر می‌رسد این ناشی از ترس و اضطراب دانش‌آموزان در مواجهه با هر نوع «امتحان» بوده است. بالاخره، جمله‌ای که یکی از دانش‌آموزان در همهٔ برگه‌های پاسخ‌نامهٔ خود نوشته بود جالب بود. وی نوشته بود که، «۵ درصد را نمی‌فهمم و ۹۵ درصد را بلد نیستم»! تجزیه‌وتحلیل داده‌ها این نتیجهٔ کلی را به‌دست داد که دانش‌آموزان، از نظر درک مفاهیم مثلثاتی در سطحی که انتظار می‌رود نیستند و مشکلات و بدفهمی‌های زیادی دارند.

بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرستان در رابطه با مثلثات کدام‌اند؟

یکی از مفاهیمی که لازم است دانش‌آموزان، برای ورود به موضوع مثلثات، بر آن مسلط باشند اندازهٔ زاویه است. در این پژوهش، مشخص گردید که بسیاری از

دانش‌آمــوزان، نمی‌توانند زاویه را توضیــح دهند و اندازهٔ فضــای بین دو ضلع زاویــه را اندازهٔ زاویــه می‌دانند! این برداشت باعث می‌شود تا آن‌ها در مثلث‌های قائم‌الزاویه و دایره‌های مثلثاتی متفاوت، برای یک زاویه، اندازهٔ مساوی قائل نباشــند و خصوصاً در دایره، اندازهٔ زاویه را در رابطهٔ مستقیم با کمان بدون در نظر گرفتن شعاع دایره می‌دانند. دانش‌آمــوزان در درک رادیان به‌عنــوان مقیاس دیگری بــرای اندازه‌گیری زاویه، دچار مشــکل بودند. برای آن‌ها، «مقیاس اصلــی برای اندازه‌گیری زاویه» درجه بود. بدین ســبب، اکثراً با اســتفاده از فرمول آن، رادیان را به درجه تبدیل می‌کردند، ســپس آن را در دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌نمودند. در واقع، دانش‌آموزان گاهی رادیان را نیز یک نوع زاویه می‌پنداشــتند. خصوصاً از π، مفهوم مبهمی در ذهن داشــتند و اکثراً آن را به‌عنوان عدد نمی‌شــناختند بلکه نماد رادیان می‌انگاشــتند. هم‌چنین، نمی‌توانستند بین زاویهٔ اســتاندارد در دایــرهٔ مثلثاتی و مختصات نقطهٔ انتهای کمانی که آن را در برگرفته اســت و نســبت‌های مثلثاتــی، رابطه برقــرار کنند. بســیاری از دانش‌آموزان، بازه‌های زاویه‌های دایرهٔ مثلثاتی را به‌درســتی تشــخیص نمی‌دادند. مثــلاً وقتی زاویه محــدود به $\frac{-\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ بود، بیشتر دانش‌آموزان ربع دوم و سوم را در نظر می‌گرفتند. اغلب دانش‌آموزان برای محاســبهٔ مقدار یک زاویه از یک تابــع مثلثاتی، از مثلــث قائم‌الزاویه کمــک می‌گرفتند و کمتر می‌توانستند از دایرهٔ مثلثاتی برای محاسبه استفاده کنند. بیشتر آن‌ها، روابط مثلثاتی را همچون توابع خطی می‌پنداشــتند. می‌دانیم یکی از نشــانه‌های درک عمیق مطالب، تخمین زدن و مشــخص کردن محدودهٔ تقریب، بدون انجام گام‌های عملی است، اما بیشتر دانش‌آموزان، از چنین مهارتی برخوردار نبودند. هم‌چنین، تعداد زیادی از دانش‌آموزان، روابط مثلثاتی را به‌عنوان تابع نمی‌شناختند و بعضی از آن‌ها می‌پنداشتند نسبت‌های مثلثاتی همواره مقداری مثبت دارند.

به‌طــور کلــی، می‌تــوان بدفهمی‌هــا و مشــکلات دانش‌آموزان را به‌صورت زیر بیان کرد:

– مفهوم اندازهٔ زاویه را به‌خوبی درک نمی‌کنند؛

– با مقیاس رادیان، برای انــدازهٔ زاویه، ارتباط برقرار نمی‌کنند و با مشکل مواجه‌اند؛

– در تخمین و تعیین محدودهٔ نســبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ناشناخته، ناتوان‌اند و دچار مشکل می‌شوند؛

– در مقایســه بــا دایــرهٔ مثلثاتی، بیشــتر برای حل مسئله‌های مثلثاتی، از مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنند و به‌خوبی، از دایرهٔ مثلثاتی برای حل مســئله نمی‌توانند استفاده کنند؛

– نسبت‌های مثلثاتی را توابع خطی می‌پندارند.

یکی از مفاهیمی که لازم است دانش‌آموزان، برای ورود به موضوع مثلثات، بر آن مسلط باشند. اندازهٔ زاویه اســت. در این پژوهش، مشخص گردید که بسیاری از دانش‌آموزان، نمی‌تواننــد زاویه را توضیح دهنــد و اندازهٔ فضــای بین دو ضلــع زاویه را انــدازهٔ زاویه می‌دانند! این برداشت باعث می‌شود تا آن‌ها در مثلث‌های قائم‌الزاویه و دایره‌های مثلثاتی متفاوت، برای یک زاویه، اندازهٔ مساوی قائل نباشند و خصوصاً در دایره، اندازهٔ زاویه را در رابطهٔ مستقیم با کمان بدون در نظر گرفتن شعاع دایره می‌دانند.

نقش کتاب‌های درســی تازه‌تألیــف، در رفع یا ایجاد بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان، کدامند؟

عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان، در مورد مبحث مثلثات، که در فصل پنجم ریاضیات ۲ پایهٔ دوم متوسطه (برگرفته از دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درســی، آخرین چاپ) درج شده چنین است:

دانش‌آموزان باید بتوانند:

۱. بــا اســتفاده از دوران نیم‌خط حول مبــدأ، اندازهٔ جبری هر زاویــه را نمایش دهند. (زاویــه را در موقعیت استاندارد رسم کنند)؛

۲. رادیان را تعریف کنند؛

۳. واحدهای اندازه‌گیری زاویه (رادیان و درجه) را به یکدیگر تبدیل کنند؛

۴. اندازهٔ هر زاویه را با معلوم بودن شعاع و طول کمان محاسبه کنند؛

۵. دایرهٔ مثلثاتی را تعریف کنند؛

۶. با اســتفاده از دایرهٔ مثلثاتی، نســبت‌های مثلثاتی Sin ،Cos هر نقطه را به‌دست آورند؛

۷. بر روی دایرهٔ مثلثاتی، تانژانت هر زاویه را مشخص کنند؛

۸. نســبت‌های مثلثاتی زوایای بین صفر و 2π را که مقادیر یکسانی دارند مشخص کنند؛

۹. بــا معلوم بــودن مختصات هر نقطه، نســبت‌های مثلثاتی آن را به‌دست آورند؛

۱۰. مقادیر دقیق نســبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

را به‌دست آورند؛

۱۱. با اســتفاده از دایرهٔ مثلثاتی زوایای قرینه، متمم، مکمل و ... را به‌دست آورند؛

۱۲. شیب خط را با استفاده از تانژانت زاویه محاسبه کنند.

این در حالی است که نتایج این پژوهش نشان داد که به‌جز انتظار شــمارهٔ ۱۲، که آن هم از اهداف این پژوهش نبــود، تقریباً هیچکدام از انتظارات مــورد نظر که در بالا ذکر شــد حاصل نمی‌شود. با توجه به اینکه کتاب درسی تازه‌تألیــف ریاضیــات ۲ منبع اصلی دانش‌آموزان اســت، ایــن فصل کتاب تحلیل شــد و علاوه بــر آن با چند نفر از دبیران ریاضی هم کــه این کتاب را تدریس می‌کردند مصاحبه‌های غیرســاختاری انجام شد تا علت این فاصلهٔ فاحش بین عملکرد دانش‌آموزان و انتظارات کتاب درسی بررسی شود.

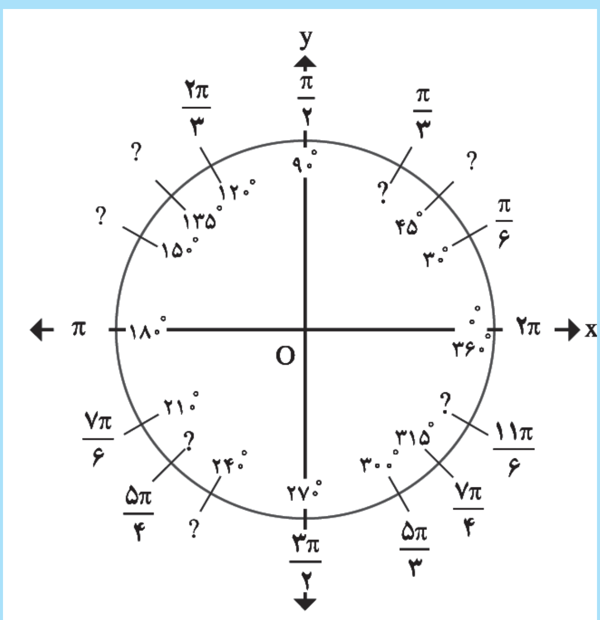
در تحلیل محتوای فصل مثلثات، داده‌های به‌دســت آمده از مصاحبه‌ها و نظرات دبیران در دسته‌های زیر قرار گرفت:

– بســیاری از دبیران، اصلاً بــه متن و محتوای فصل مثلثات کتاب ریاضی ســال دوم دبیرستان توجه ندارند و از ابزار کاغذ شــطرنجی، پرگار و نقاله به‌ندرت در تدریس بهــره می‌برند. آن‌ها در حدی که باید در کتاب مثلثات از این ابزار اســتفاده کنند، مطلع هستند، اما علت تدریس نکــردن مثلثات از روی کتاب درســی را، بیان نامناســب کتاب درسی دانستند.

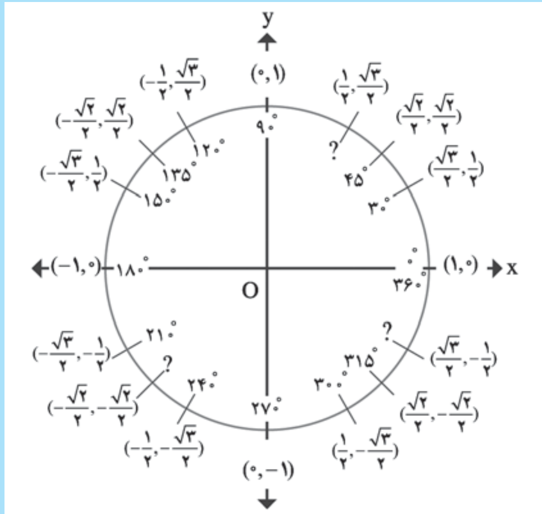
– فصل مثلثات کتاب ریاضی پایهٔ دوم دبیرستان، در تداوم ریاضی پایهٔ اول متوسطه نیست و ارتباط خوبی هم با بخش مثلثات کتاب حسابان رشتهٔ ریاضی ندارد.

– نحوهٔ نمایــش زاویه‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی، علاوه بر ایجاد بدفهمی در مفهوم و تعریف زاویه، باعث می‌شــود تا رابطهٔ بین رادیان و درجه، فقط برای بعضی زوایای خاص پنداشــته شود زیرا دانش‌آموز کمان را در این شکل‌ها در رابطهٔ مســتقیم با زاویــه‌ای که آن کمــان را دربر گرفته می‌بینند. مانند موارد زیر در کتاب ریاضی درسی پایهٔ دوم دبیرستان که عیناً و بدون هر ویرایشی نقل می‌شود:

۳– شکل مقابل دایره‌ای به شعاع واحد را نشان می‌دهد که اندازه‌های زوایا برحسب درجه و رادیان با یک‌دیگر معادل هستند. با استفاده از روابط بالا جاهای خالی دایره‌ی فوق را تکمیل نمایید.

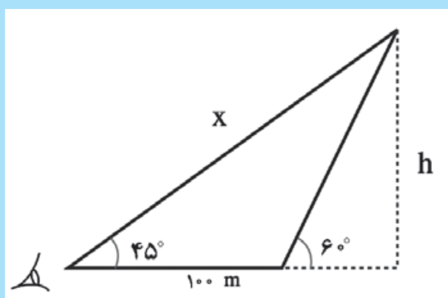


حال مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.



– دانش‌آموز، ســؤال‌های کاربردی مثلثات را نمی‌تواند حل کند، زیرا کتاب آن‌چنان که شایســته اســت به این مســائل نپرداخته و نگارش بعضی از تمرین‌ها نیز گیج‌کننده اســت که این خود باعث تضعیف روحیهٔ بیشتر دانش‌آموزان می‌شود. آن‌ها به‌عنوان نمونه، تمرین ۷ صفحهٔ ۱۵۴ ریاضی پایهٔ دوم دبیرستان را مثال زدند.

۷– شــخصی نزدیک آنتن یک ایســتگاه رادیویی ایستاده است. زاویه‌ی دید شخص با نوک آنتن 60° است. اگر او ۱۰۰ متر به عقب برود زاویه‌ای که با نوک آنتن در موقعیت جدید می‌سازد 45° است. ارتفاع آنتن را حساب کنید. (ابتدا مقدار x را پیدا کنید)



– از نظر دبیران، مقدمهٔ فصل خوب است و با مثال جالب ستارهٔ قطبی کار را شروع کرده است، اما به یک‌باره با یک فعالیت وارد بحث اصلی شده است، آن هم فعالیتی که همهٔ دانش‌آموزان با آن مشکل دارنــد. این فعالیت در ادامهٔ مقدمه اســت و بیش از آنکه حس مثلثاتــی در دانش‌آموز به‌وجود آورد در او حس محاســباتی، که موجب دلزدگی اســت، ایجاد می‌کند. به باور دبیران، یادگیرندگان در خصوص محاسبات عددی مشکل دارند، پس بهتر است تا حد ممکن، برای شروع از این‌گونه فعالیت‌ها استفاده نشود.

فعالیت

با توجه به این که ســـتاره قطبی روی دایره‌ای در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ســـاعت حرکت می‌کند و این ستاره در هر ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه و ۴/۳۳ ثانیه، یعنی ۰/۹۹۷۲۷۲۳ شبانه‌روز یک‌بار این دایره‌ی کوچک را طی می‌کند.

– در این کتاب درســـی، بحث زاویه، درجه و رادیان شتاب‌زده انجام شده است، بدون اینکه درک درســـتی از این مفاهیم در دانش‌آموزان ایجاد شـــده باشد. به عقیدهٔ آن‌ها، ابتدا لازم است دایرهٔ مثلثاتی که اساس کار مثلثات است، تعریف شود و بعد از آن، زاویه تعریف شود.

– بعضی از دبیران ابراز می‌کردند که چون «شیوهٔ بیان کتاب را قبول ندارند»، پس ساختار کتاب را به‌هم می‌ریزند و طبق ســـلیقهٔ خـــود، کار را پیش می‌برند و تاکنون هم در تدریس «با مشکلی مواجه» نشده‌اند.

– دبیران هم‌چنین، با ذکر نمونه‌ای توضیح می‌دادند که «بسیاری از مفاهیم کلیدی مثلثات، در تمرین‌ها گنجانده شده است» که به‌نظر، «کار نادرستی» می‌آید. مثلاً تمرین شمارهٔ ۷ صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی ریاضیات ۲، که بر خطی نبودن توابع مثلثاتی تأکید می‌کند؛ و یا اشارهٔ جزئی به مقدار تقریبی یک رادیان برحســـب درجه که منظـــور جملهٔ «یک رادیان تقریباً ۵۷/۳ درجه است» در فعالیت شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱۲۷ می‌باشد.

۷- با ارائه‌ی مثالی نشان دهید رابطه‌ی زیر همواره درست نیست.

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\pi-\sin\theta$$

۳- با ماشین حساب سینوس و کسینوس ۵۷/۳ درجه را محاسبه کنید و رابطه‌ی بین مختصات نقطه‌ی P و مقادیر سینوس و کسینوس را بنویسید.

– بعضی از شکل‌های کتاب در بخش مثلثات گیج‌کننده است.

– بعضی از تمرین‌ها بد بیان شـــده‌اند و باعث ســـردرگمی هستند. (مانند اشکالات سؤال‌های انتخاب شده برای آزمون این مطالعه که در فصل ۳ اشکالات بیان و اصلاح شد.)

– عنوان‌های نامناســـبِ انتخاب شده، مثلاً «تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زاویه‌ها» عنوان دقیقی نیست.

– به‌نظر می‌رسد کتاب درسی پایهٔ دوم دبیرستان با رویکرد مشارکتی تألیف شده و در اهداف تبیین شـــده، سهم بیشتری برای ایفای نقش دانش‌آموز در یادگیری، با استفاده از ابزارهایی چون پرگار، نقاله، کاغذ شطرنجی و ماشین‌حساب قائل شده است، اما دو نکته این هدف را دچار مشکل می‌کنـــد؛ اول اینکه این فصل به‌طـــور کاملاً مجزا و با حجمِ بالا، به نوعی یادآور کتاب‌های مثلثات دورهٔ نظام قدیم است و از این نظر، در جا می‌زند، زیرا مثلاً برای اینکه این مبحث به‌تدریج و مرتبط

با موضوعات دیگر به دانش‌آموزان ارائه شـود، شاید بهتر باشـد تدریس توابع مثلثاتی بعد از تدریس توابع صورت گیـرد تا حس ارتباط بهتـری را در یادگیرنده ایجاد کند و سـبب شـود مثلثات را مبحثی صلب و جدا نپندارد. از منظری دیگر و با توجه به ساعات تدریس اختصاص داده شـده به درس ریاضی پایهٔ دوم دبیرستان، به‌نظر بسیاری از دبیران ریاضی، دسـتیابی به اهداف مورد انتظار مؤلفان تقریباً غیرممکن است.

راهکارهایـی برای مواجهه با بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان

برای ارتقای درک و فهم دانش‌آموزان، راهکارهای زیر توصیه می‌شوند.

– به پیش‌نیازهای لازم دانشـی دانش‌آموزان و سطح دانش آن‌ها توجه شـود، از جمله شـناخت انواع زاویه‌ها (حاده، منفرجـه، قائمه)، تعریف وتر در مثلث قائم‌الزاویه، رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه و موارد مرتبط دیگر.

– به گفتهٔ جفری[9]، مفهـوم زاویهٔ مرجع[10] در مرحلهٔ سـازماندهی درک کامـل دایـرهٔ واحد، اساسـی اسـت. هم‌چنین، زاویهٔ مرجع نقشی کلیدی در انتقال از مثلثاتِ مبتنی بر مثلث قائم‌الزاویه به مثلثات مبتنی بر دایرهٔ واحد دارد. وی معتقد است که درک زاویهٔ مرجع، دانش‌آموز را قادر می‌سـازد تا توجه خود را بر زوایای ربع اول متمرکز کنـد، زیرا همهٔ زاویه‌های دیگر در اغلب روش‌ها، به زاویهٔ ربع اول مربوط می‌شـوند. علاوه بـر این، اندازهٔ یک زاویه مثبت یا منفی اسـت، و صرف‌نظر از بزرگی آن، یک زاویهٔ متناظـر در ربع اول وجود دارد که ویژگی‌های آن، مطابق با زاویهٔ داده شده است. وقتی که دانش‌آموز از زاویهٔ مرجع به درسـتی اسـتفاده کند، می‌تواند مطالعهٔ همهٔ زاویه‌ها، مختصات و نسبت‌های مثلثاتی را به مجموعهٔ کوچک‌تری در ربع اول تبدیل نماید.

در کتاب ریاضی دوم دبیرستان، برای معرفی زاویه‌ها و اندازهٔ آن‌ها در صفحهٔ ۱۲۱، ابتدا راجع به «دوران کامل خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ ۳۶۰ درجه باشد...» صحبت شده است. به‌طور شهودی، دانش‌آموزان می‌دانند که «اندازه»، «جهت» ندارد و طبق قرارداد، برای آن «جهـت» در نظر گرفته می‌شـود. اما قبل از آنکه این فعالیـت، فرصت کافی برای پرورش این شـهود را ایجاد کند، با شتاب زیاد، وارد مباحث متعدد مربوط به زاویه‌ها و اندازهٔ آن‌ها شده است.

– بلکت و تال (۱۹۹۱) استفاده از تکنولوژی را یکی از قوی‌ترین اصول آموزش می‌دانند و معتقدند با استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری، دانش‌آموزان با شکل‌های متنوع و مختلف هندسـی دست‌ورزی می‌کنند و خود، به روابط عددی و مثلثاتی دسـت پیدا می‌کنند. در همین راسـتا، تحقیقات بلکت و تال (۱۹۹۱) در تأیید تأثیر مثبت استفاده از تکنولوژی در تدریس مثلثات اسـت. ماشین‌حساب، به معلم اجازه می‌دهد که محاسـبات یکنواخت و تکراری را در آموزش مفاهیم و حل مسئله‌های مثلثاتی حذف کند و وقت بیشتری را به شکل‌گیری مفاهیم اختصاص بدهد.

پی‌نوشت‌ها

1. Hülya Gür
2. Kendal
3. Stacey
4. Kieran
5. Bressoud
6. Us
7. Lansdell
8. Brown
9. Jeffrey
10. Reference Angle

منابع

۱. شـهریاری، پرویز. (۱۳۷۹). سرگذشـت ریاضیـات. تهران. انتشارات مهاجر، چاپ اول.

۲. ربانی‌فـر، علی‌اکبـر. (۱۳۸۶). مشـکلات و بدفهمی‌هـای دانش‌آمـوزان در رابطـه بـا مثلثات. پایان‌نامه منتشـر نشـده کارشناسـی ارشـد آموزش ریاضی، دانشـکده علـوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی. تهران، ایران.

3. Bressoud, D. M. (2010). **Historical Reflection on Teaching Trigonometry**. Mathemaics Teacher, 104(2), 106-112.

4. Brown, A. S. (200). **The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine**. Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, p. 228. Prague: PME30.

5. Blackett. N. & Tall, D. (1991). **Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software**. Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education XV, Assisi, Italy, (1991), vol 1, pp. 144-151.

6. Gür, H. (2009). **Trigonometry Learning**. New Horizons in Education-The Journal of Education.

7. Kendel, M. & Stacey, K. (1996). **Trigonometry: Comparing Ratio and Unit Circle Methods. (?)**

8. Moore, K.C. (2010). **The Role of Quantitative Reasoning in Precalculus Students Learning Central Concepts of Trigonometry**. Unpublished Doctoral Dissertation. Arizona State University.

9. Moore, K.C. (2012). **Coherence, Quantitative Reasoning, and the Trigonometry of Students**. R. Mayes & L. L. Hatfield (Eds).; Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context, (pp. 75-92). Laramie, WY: University of Wyoming.

10. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and standards for scholl mathematics**. Boston, MA. The Author.

11. Weber, K. (2008). **Teaching Trigonometric Functions: Lessons Learned from Research**. Connecting Research to Teaching. The National Council of Teachers of Mathematicst. Vol. 102, No 2, 144-150.

12. Weber, K. (2005). **Students' Understanding of Trigonometric Functions**. Mathematics Education Research Journal. Vol 17, No, 3, 91-112.

نرم‌افزار
MathProf 4.0
به‌عنوان کتاب کمک آموزشی الکترونیکی

مریم شاه‌محمدی
کارشناس ارشد ریاضی کاربردی و دبیر ریاضی و رایانه منطقه یک تهران

اشاره

توسعهٔ تکنولوژی، تأثیر شگرفی بر آموزش داشته اســت که از آن جمله، می‌توان به متحول شدن معنا و مفهوم رســانه‌های آموزشی اشاره نمود. تکنولوژی، «دســت‌نیافتنی‌ها» را دســترس قرار داده و انتخاب مناسب‌ترین منابع را به عهدهٔ استفاده‌کننده گذاشته است. اما برای این کار، توسعه مهارت‌های انتخاب‌گری و تصمیم‌گیری در کاربران، برای بهره‌بردن از تکنولوژی، لازم است. بدین سبب، آشنایی با سایت‌های آموزشی مناســب و رایگان که بتوانند در حالی که بخشــی از نیازهای آموزشــیِ معلمان و دانش‌آمــوزان را برآورده می‌کنند، از صرف هزینه‌های غیرضروری هم بازشان دارند، مفیدنــد. بدین منظور، یکی از معلمان محترم ریاضی و خوانندگان مجله، سایت Math-Prof.com را معرفی نموده است. ضمن سپاس از این همکار گرامی، دعوت می‌کنیم که برای کنجکاوی هم که شــده، به این سایت سری بزنید! در این سایت، ۲۹۵ درس‌نامه در قالب ۱۱ حوزهٔ مختلف ریاضی ارائه شده است که به تناســب نیاز، قابل استفاده برای درس‌های ریاضی مدرسه‌ای‌هستند.

سردبیر

پیشرفت‌های دو دههٔ اخیر در علوم رایانه، نقش غیرقابل انــکاری در فراهــم آوردن زمینهٔ لازم برای اجرایی کردن نظریه‌های یادگیری سازنده‌گرا داشته اســت. یکی از شــاخه‌های تکنولوژی آموزشی، بُعد ابزاری یا سخت‌افزاری آن است. در این دیدگاه، علم تکنولوژی آموزشــی به مجموعه ابزارها و تجهیزاتی اطلاق می‌گردد که ســبب تسهیل فرایند یادگیری می‌شــود. طبعاً، نرم‌افزارهای کاربردی آموزشــی نیز به‌عنوان یکی از ابزارهای این حیطه، نقش به‌سزایی در تعمیــق دانســته‌ها ایفا می‌نماینــد. در اینجا، به معرفی یکی از نرم‌افزارهای ریاضی پرکاربرد و در عین حال آســان جهت اســتفادهٔ کاربران هنگام آموزش، می‌پردازیم.

Moth prof 4.0 یــک نرم‌افزار تخصصی ریاضی، با کاربرد ســهل و متنوع است. در محیط این نرم‌افزار، با رسم نمودارهای دو و سه بعدی، مفاهیم ریاضی واضح و آسان نمایش داده می‌شود. نرم‌افزار شامل تعداد قابل توجهی مثال‌های حل شــده و پویاست که در مباحث مختلف ریاضــی، کاربــرد دارد. این نرم‌افــزار، قابلیت محاسبهٔ بسیاری از شاخص‌های مهم توابع ریاضی را با دقت قابل ملاحظه‌ای داراست و از این حیث، بر بسیاری از نرم‌افزارهای ترســیمی و هندسی از جمله جئوجبرا، برتری دارد.

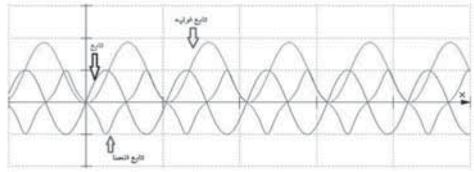
کلیدواژه‌ها: آنالیز ریاضی، مشتق و انتگرال، جبر خطی، هندسه، ریاضیات سه‌بعدی، نرم‌افزار ریاضی

نمونه‌هایی از قابلیت‌های نرم‌افزار

آنالیز ریاضی:

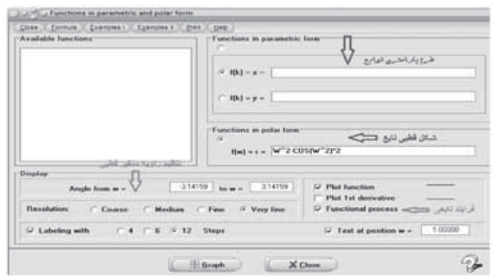
با انتخاب گزینــهٔ Mathematical functions II از منــوی Analysis یــا ابــزار از نوار ابزار، امکان تعریف توابع و نمایش نمودار آن‌ها، مشتق مرتبه اول و دوم توابع، وارون توابع، قرینه تابع نسبت به محورهای مختصــات، تابع انحنا، مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت دو تابع فراهم خواهد شد.

بــه عنوان مثال: برای تابع f(x)=sin(x) ، با انتخاب گزینه Graph، شکل روبه‌رو نمایان خواهد شد.

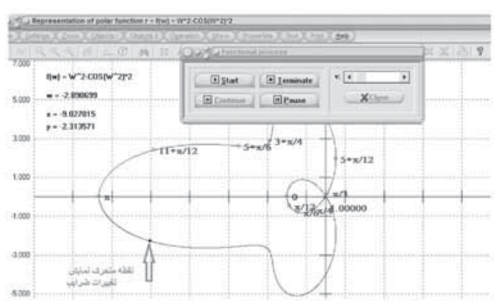


با انتخـــاب گزینـــه Determination و تعریف تابع مـــورد نظـــر در پنجره باز شـــده، می‌توان تابع مشـــتق مرتبه اول و دوم تابع را نیز محاســـبه و مشـــاهده نمود. $f(x)=\sin(x)+\tan(x)$

جهـــت آنالیز توابع قطبی یا پارامتـــری، می توان از ابزار استفاده نمود. در این قسمت با فعال نمودن گزینـــه Functional process، تغییـــرات متغیر قطبی براساس تغییرات ضرایب x و y قابل نمایش خواهد بود.

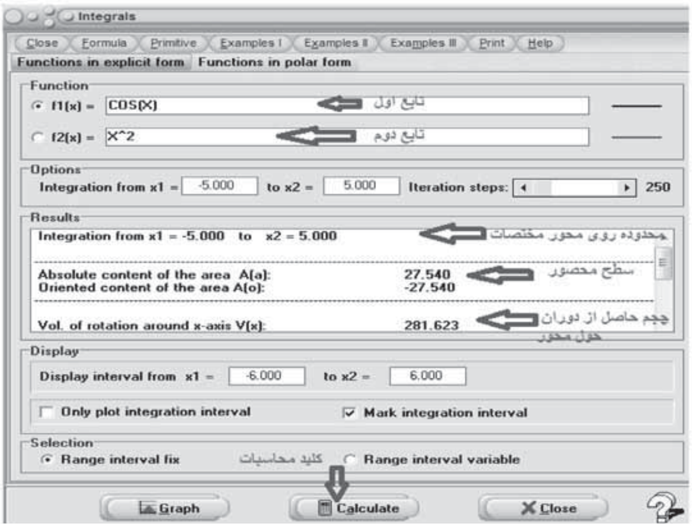


نرم‌افزار شـــامل مثال‌های از پیش‌تعریف شـــده نیز می‌باشد که در صورت نیاز می‌توان از لیست توابع ذخیره شده انتخاب کرد، همچنین قابلیت ذخیره‌سازی توابع برای کاربر نیز فراهم اســـت تا هنگام اســـتفاده مجدد، به‌راحتی بتوان از آن‌ها استفاده نمود.

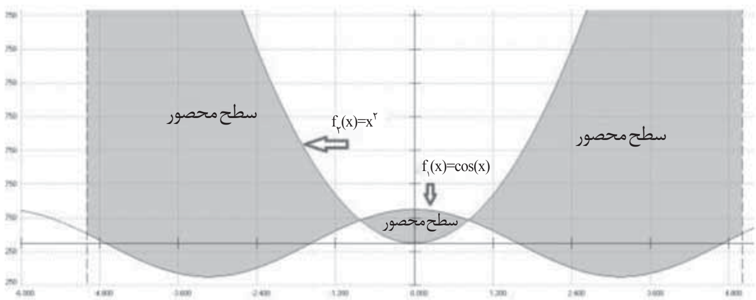


مثال کاربردی

جهت محاســـبه و نمایش ســـطح محصور بین دو تابع و حجم حاصل از دوران حول محورهای مختصات، کافی اســـت گزینه Intergerals را از تب Analysis و یا ابزار را از نوار ابزار انتخاب نموده و توابع مورد نظر را در پنجره باز شده معرفی نمایید. به‌عنوان مثال برای دو تابع $f_1(x)=\cos(x)$, $f_2(x)=x^2$ داریم:

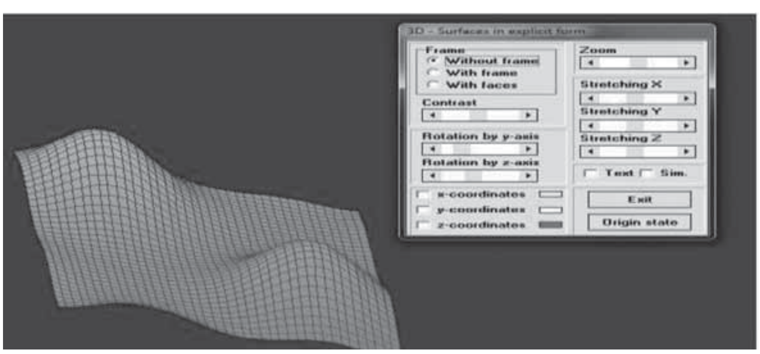


با فشردن کلید Graph، شکل توابع را نیز خواهیم داشت.



ریاضیات سه‌بعدی:

یکـــی از جذاب‌ترین مباحـــث موضوعی ریاضیات، اشکال سه بعدی و خصوصیات مربوط به آن‌ها می‌باشد. با اســـتفاده از منوی 3D-mathematics و یا ابزارهای مربوطه در نوار ابزار، امکان محاســـبه و نمایش انتگـــرال توابع به فرم صریح و پارامتری، رویه‌ها و منحنی‌های سه بعدی، رویه‌های مرتبه دوم و توابع ضمنی و ... فراهم شده است.



ترجمه: مسعود بهرامی بیدکلمه، دبیر ریاضی تهران

توابع مثلثاتی

درس‌نامه‌ای از وبگاه Math-prof.com

در دنیای جدید، معنای «کمک‌آموزشی»، تغییرات اساسی یافته است. فناوری اطلاعات و ارتباطات، دسترسی به منابع را تسهیل نموده است. در نتیجه، با اندکی مطالعه و تغییر دیدگاه، می‌توان برای بدیل‌های خلاق، مؤثر، کم‌هزینه و با سهولت به منابع کمکی، امکان‌سنجی نمود. برای این شماره، یکی از معلمان عزیز ریاضی سرکار خانم مریم شاه‌محمدی، نرم‌افزار و سایتی را به‌نام Math-prof.com معرفی نمودند که ما را با دنیای وسیعی از درس‌نامه‌های ریاضی آشنا کرد.

تا سال ۲۰۰۸، این سایت، ۲۹۵ فصل ریاضی را با نمایه‌های موضوعی در دسته‌های وسیع‌تر، معرفی کرده و آموزش داده است. برای معرفی این سایت که قابل دسترس و مجانی است و استفاده از آن، به دانش زبان انگلیسی بالایی جز واژگان تخصصی هر حوزه، نیازی ندارد. آقای مسعود بهرامی بیدکلمه، بخش‌هایی از فصل **مثلثات** این وبگاه را ترجمه کرده است.

فصل مثلثات این سایت، شامل ۱۸ بخش است و شروع آن، با هندسه (رویکرد تلفیقی) و معرفی نسبت‌های مثلثاتی از این طریق است. سپس با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه، به سینوس و کسینوس پرداخته و به‌تدریج، وارد رسم نمودارهای تابع‌های مثلثاتی شده است. بعداً، با اشاره به انتقال، رادیان به‌عنوان یکی از اندازه‌های زاویه مطرح شده است و نشان داده که چگونه به‌تدریج، وارد نمادهای مختصات قطبی، معادلات مثلثاتی به‌صورت قطبی، اتحادهای مثلثاتی، اتحادهای اساسی، فرمول‌های نصف زاویه و دو برابر زاویه، اعداد موهومی، اعداد مختلط و مساحت پنج‌ضلعی شده است.

نکته مهم در این درس‌نامه‌ها این است که با پایه‌ای‌ترین مفهوم‌ها ـ در اینجا زاویه ـ شروع شده، به مرور با سرعت مناسب، مفهوم‌ها توسعه پیدا کرده، مثال‌های مربوط آورده شده، از نمودار به‌خوبی استفاده شده و ارتباط مثلثات با مباحث مختلف ریاضی، با تأنی لازم، نشان داده شده است.

هر یک از درس‌نامه‌های این سایت، می‌تواند دانش‌آموزان را از خریدن کتاب‌های متعدد موضوعی که گاهی می‌تواند حتی باعث سردرگمی آن‌ها شود، بی‌نیاز کند. در هر صورت بد نیست معلمان عزیز ریاضی به این وبگاه سر بزنند و برای کلاس درس خود، درس‌نامه‌های مناسب با نیاز تدریس خود را انتخاب کنند و به صلاحدید خود، آن را به دانش‌آموزان نیز معرفی کنند. این شما و این بخشی از درس‌نامه مثلثات این سایت!

سردبیر

مروری بر فصل مثلثات

بنابر ساده‌ترین تعریف، تابع‌های مثلثاتی تابع‌هایی هستند که رابطهٔ بین یکی از زاویه‌های غیرقائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه را با نسبت دو ضلع آن مثلث بیان می‌کنند (و یا برعکس). به این ترتیب، هر تابع مثلثاتی، مانند f، همواره در یکی از تساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$f(q) = \frac{a}{b} \quad (۱)$$

یا

$$f(\frac{a}{b}) = q \quad (۲)$$

که در آن q اندازهٔ یکی از زاویه‌های مثلث و a و b طول دو ضلع مثلث هستند.

این به معنی آن است که:

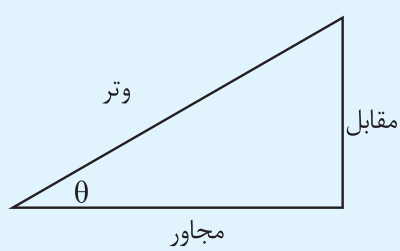
- اگر رابطهٔ (۱) برقرار باشد، در هر مثلث قائم‌الزاویه با دانستن مقدار هر یک از زاویه‌های غیرقائمه، با محاسبهٔ مقدار تابع مثلثاتی به ازای آن زاویه، نسبت دو ضلع آن مثلث به‌دست خواهد آمد.
- در صورتی‌که رابطهٔ (۲) برقرار باشد، می‌توانیم نسبت طول دو ضلع هر مثلث قائم‌الزاویه به یکدیگر را بیابیم و با محاسبه مقدار تابع مثلثاتی به ازای این نسبت، اندازهٔ یکی از زاویه‌های غیرقائمهٔ آن مثلث به‌دست خواهد آمد (چنین تابع‌هایی، تابع‌های مثلثاتی معکوس نامیده می‌شوند، زیرا عملکرد آن‌ها عکس تابع‌های قبلی است.)

رابطهٔ بین زاویه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه و نسبت دو ضلع آن از مهم‌ترین عناصر در بحث مثلثات است. با توجه به اینکه روابط مثلثاتی در همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه برقرارند، اگر اندازهٔ یکی از زاویه‌های غیرقائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه را بدانیم، می‌توانیم نسبت اضلاع آن مثلث را با استفاده از تابع‌های مثلثاتی بیابیم و اگر نسبت اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه را بدانیم، می‌توانیم با استفاده از تابع‌های مثلثاتی معکوس، اندازهٔ زاویه‌های آن را به‌دست آوریم.

مهم‌تر اینکه اگر اندازهٔ یکی از زاویه‌ها را بدانیم، می‌توانیم نسبت دو ضلع مثلث را با استفاده از تابع‌های مثلثاتی به‌دست آوریم؛ همچنین، با در اختیار داشتن اندازهٔ یکی از اضلاع می‌توانیم با استفاده از روش جبری اندازهٔ ضلع دیگر را نیز مشخص کنیم (به‌عنوان مثال اگر مشخص شود که ۲ = $\frac{a}{b}$ و بدانیم که ۶ =a آنگاه نتیجه می‌گیریم که ۳ =b).

از آنجا که در هر مثلث قائم‌الزوایه، سه ضلع و دو زاویهٔ غیرقائمه وجود دارد، باید روشی در اختیار داشته باشیم که مشخص کند هر تابع مثلثاتی رابطهٔ بین کدام زاویه را با کدام ضلع‌ها بیان می‌کند (اینکه بدانیم نسبت دو ضلع برابر با ۲ است، اما ندانیم دربارهٔ نسبت کدام‌یک از سه ضلع صحبت می‌کنیم، چندان مفید نیست. به‌همین ترتیب، اگر بدانیم اندازهٔ یکی از زاویه‌ها ۴۰ درجه است، باید بدانیم منظور کدام زوایه است).

مطابق قرارداد، اگر زاویهٔ مورد نظر را مطابق شکل زیر با θ (تتا) نشان دهیم، اضلاع مثلث را به‌صورت زیر «ضلع مجاور»، «ضلع مقابل» و «وتر» می‌نامیم:



همان‌طور که پیشتر نیز اشاره شد، تابع‌های مثلثاتی نوع (۱) که به هر زاویه نسبت دو ضلع را اختصاص می‌دهند، همواره در چنین رابطه‌ای صدق می‌کنند:

$$f(q) = \frac{a}{b}$$

از آنجـــا کـــه به ازای هر زاویه، ۳ راه برای انتخاب صورت این کســـر و ۳ راه برای انتخاب مخرج آن وجود دارد، می‌توانیم ۹ تابع مثلثاتی به‌صورت زیر داشته باشیم:

$f(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مقابل}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$
$f(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مجاور}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$
$f(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$	$f(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$	$f(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{وتر}}$

از این توابع ســـه تابع که نشانگر نســـبت یک ضلع به خودش هستند، و در قطر جدول فوق آمده‌اند، همواره برابر با ۱ هستند و هیچ استفاده‌ای برای ما ندارند. پس آن‌ها را نادیده می‌گیریم و به ۶ تابع باقی‌مانده اسامی زیر را نسبت می‌دهیم:

$\text{sine}(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$	$\text{cosecant}(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$
$\text{cosine}(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$	$\text{secant}(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$
$\text{tangent}(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$	$\text{cotangent}(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$

علاوه بر این، اسامی این تابع‌ها معمولاً به اختصار به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

sine = sin   cosecant = csc

cosine = cos   secant = sec

tangent = tan   cotangent= cot

از این شـــش تابع دو تابع اصلی که باید آن‌ها را به‌خاطر بســـپاریم سینوس و کسینوس هستند. سایر تابع‌های مثلثاتی نوع اول را می‌توان از این دو تابع استخراج کرد.

به‌عنوان مثال تابع‌های ستون سمت راست جدول قبل، معکوس ضربی تابع‌های ستون سمت چپ آن جدول هستند. علاوه بر این،

$$\frac{\sin(q)}{\cos(q)} = \frac{\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}}{\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \tan(q)$$

و به این ترتیب، تابع تانژانت، حاصل تقسیم سینوس بر کسینوس است.

$\sin(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$	$\csc(q) = \frac{۱}{\sin(q)}$
$\cos(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$	$\sec(q) = \frac{۱}{\cos(q)}$
$\tan(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$	$\cot(q) = \frac{۱}{\tan(q)}$

با بررسی بیشتر این تابع‌ها می‌بینید که به ازای سه تابع سینوس، کسینوس و تانژانت سه تابع دیگر وجود دارند که نام آن‌ها با افزودن پیشوند co به نام این تابع‌ها به‌دست آمده است. این تابع‌ها معکوس ضربی تابع‌های سـینوس، کسینوس و تانژانت هسـتند. اما برای این نامگذاری توجیهی وجود دارد؛ این تابع‌ها در واقع برابر با سینوس، سکانت یا تانژانت زاویه‌ای هستند که متمم زاویهٔ نظیر آن‌هاست و با توجه به اینکه متمم هر زاویه مانند q برابر با q- ۹۰ است، می‌توان نشان داد که روابط زیر برقرارند:

$\sin(۹۰ - q) = \text{cosine}(q)$

$\text{secant}(۹۰ - q) = \text{cosecant}(q)$

$\text{tangent}(۹۰ - q) = \text{cotangent}(q)$

که این شیوهٔ نامگذاری را توجیه می‌کند.

بسـته به انتخاب واحدهای متفاوتی نظیر درجه، گراد و رادیان، تابع‌های مثلثاتی مقادیر متفاوتی را اختیار می‌کنند.

به‌عنوان مثال:

$\sin(۹۰^\circ) = ۱$

ولی اگر q برحسب رادیان بیان شده باشد

$\sin(۹۰) = ۰/۸۹۳۹۹...$

تابع‌های مثلثاتی معکوس

تابع‌های مثلثاتی نوع (۱) را به‌صورت زیر تعریف کردیم:

$$f(q) = \frac{a}{b}$$

که در آن q یکی از زاویه‌های غیرقائمه و $\frac{a}{b}$ نسـبت دو ضلع از اضلاع مثلث اسـت. با توجه به این مطلب، می‌توانیم عکس این کار را هم انجام دهیم و تابع‌هایی را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = q$$

$\text{arcsine}\ \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = q$	$\text{arccosecant}\ \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = q$
$\text{arccosine}\ \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = q$	$\text{arcsecant}\ \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = q$
$\text{arctangent}\ \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = q$	$\text{arccotangent}\ \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = q$

که ورودی آن‌ها نسبت دو ضلع مثلث و خروجی آن‌ها اندازهٔ یکی از زاویه‌هاست. این تابع‌ها به‌صورت زیر نامگذاری می‌شوند:

شبیه به حالت قبلی برای نمایش این توابع از نمادهای اختصاری زیر استفاده می‌شود:

arcsine = arcsin　　arccosecant = arccsc

arccosine = arccos　　arcsecant = arcsec

arctangent = arctan　　arccotangent = arccot

با توجه به نمایش استاندارد معکوس توابع، یعنی $f^{-۱}$، ممکن است با نمایش توابع مثلثاتی معکوس، به‌صورت زیر نیز مواجه شویم:

$\sin^{-۱}, \quad \cos^{-۱}, \quad \sec^{-۱}, \quad \csc^{-۱}, \quad \tan^{-۱}, \quad \cot^{-۱}$

توجه: برای نمایش مربع توابع مثلثاتی بیش از یک نمایش وجود دارد. به‌عنوان مثال $(\sin\theta)^۲$ به‌صورت $\sin^۲\theta$ نیز نمایش داده می‌شود. این ممکن است سبب ایجاد این ابهام شود:

$\tan^{-1}\theta = (\tan\theta)^{-1}$

که صحیح نیســت. نمای منفی در این مورد یک حالت خاص اســت که به وارون ضربی دلالت نمی‌کند بلکه نشان‌دهندهٔ تابع وارون است.

مقادیر توابع مثلثاتی برحسب واحدهای متفاوت اندازه‌گیری

توابع مثلثاتی برحسب واحدهای اندازه‌گیری متفاوت، مقادیر متفاوتی را به زاویه‌ها نسبت می‌دهند. به‌عنوان مثال $\sin ۹۰^\circ = ۱$ در حالی‌که اگر واحد اندازه‌گیری رادیان باشـد، ...$\sin ۹۰ = ۰/۸۹۳۹۹$. اگر بعد از عدد نظیر اندازهٔ زاویه، علامت $^\circ$ باشد، در اختصاص مقادیر به نسبت‌های مثلثاتی واحد اندازه‌گیری زاویه، درجه در نظر گرفته خواهد شد. اگر پس از عدد نظیر اندازهٔ زاویه هیچ واحدی ذکر نشده باشد، در اختصاص مقدار به نسبت‌های مثلثاتی، زاویه برحسب رادیان در نظر گرفته می‌شـود. دلیل اینکه در بیان زاویه‌ها برحسب رادیان از ذکر واحد خودداری می‌شود این است که در اندازه‌گیری بزرگی زاویه‌ها به این صورت، رادیان واحدی طبیعی به‌حساب می‌آید. برای این مطلب در حساب دیفرانسیل و انتگرال توجیه‌هایی ارائه می‌شود. یکی از دلایل این مطلب این است که بیان مساحت قطاع‌های دایره، زمانی‌که زاویه برحسب رادیان بیان شود ساده‌تر است.

در بســیاری از ماشین‌حســاب‌ها، ســه حالت درجه، گراد و رادیان با هم وجود دارد. این بسیار مهم است که در جریان محاسبهٔ مقادیر تابع‌های مثلثاتی، ماشین‌حساب را در حالت درست قرار دهیم. چرا که این کار به ما می‌گوید که ماشین‌حساب در محاسبهٔ مقادیر مثلثاتی چه واحدی را برای اندازه‌گیری زاویه‌ها مبنا قرار می‌دهد. به‌عنوان مثال، اگر ماشین‌حساب در حالت درجه قرار داشته باشد، برای $\sin ۹۰^\circ$ مقدار ۱ را به‌عنوان خروجی در اختیار ما می‌گذارد. در حالی‌که اگر در حالت رادیان تنظیم شده باشد، خروجی آن به‌صورت ...۰/۸۹۳۹۹ خواهد بود. عدم تنظیم درست تنظیمات ماشین‌حساب یکی از اشتباه‌های رایج در میان کسانی است که با این مفاهیم تازه آشنا شده‌اند؛ به‌خصوص کسانی که فقط با واحد درجه آشنایی دارند بیشتر این اشتباه را مرتکب می‌شوند. برای بیان سازگاری مقادیر متفاوتی که با انتخاب واحدهای متفاوت به‌دست می‌آید، می‌توانیم نماد درجه را چنین تعریف کنیم که این نماد برابر با $\pi/۱۸۰$ است. به این ترتیب $\sin ۹۰^\circ$ در واقع بیان دیگری برای اشاره به سینوس زاویه است که باید مقدار آن را برحسب رادیان در نظر بگیریم. به این ترتیب:

$$\sin ۹۰^\circ = ۱ = \sin ۹۰\frac{\pi}{۱۸۰} = \sin\frac{\pi}{۲}$$

با استفاده از این روش می‌توان مقادیر توابع مثلثاتی را برحسب رادیان محاسبه کرد. این کار شبیه همان کاری اســت که در تعریف نماد درصد به‌عنوان کسر $\frac{۱}{۱۰۰}$ انجام می‌دهیم تا بتوانیم درصدهای متفاوت را در قالب کسرها نمایش دهیم. به‌عنوان مثال ۵۰ درصد در این روش به‌صورت کسر

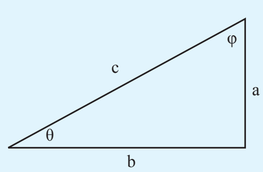
$$۵۰ \text{ درصد} = ۵۰\times\frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲}$$

نمایش داده می‌شود.

اختصاص نام به ضلع‌ها

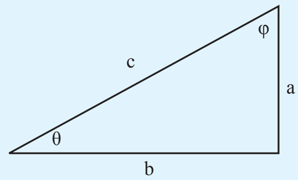
از آنجایی که در هر مثلث قائم‌الزاویه، سه ضلع و دو زاویهٔ حاده وجود دارد، در جریان کار با تابع‌های مثلثاتی نیازمند روشی هستیم که براساس آن بدانیم چه ضلع‌هایی با چه زاویه‌هایی در ارتباط هستند. بدیهی است که دانستن اینکه نسبت دو ضلع برابر با ۲ است، بدون آنکه بدانیم نسبت کدام دو ضلع برابر با این عدد است، چندان مفید نخواهد بود. به‌همین ترتیب، اگر به این نتیجه برسیم که اندازهٔ زاویه‌ای ۴۰° است، باید بدانیم منظور کدام‌یک از زاویه‌هاست. پس به روشی برای نامگذاری اضلاع نیاز داریم.

مطابق شکل زیر مثلثی قائم‌الزاویه را در نظر بگیرید.



مثلـث قائم‌الزاویـه دو زاویهٔ حاده دارد که یکی از آن‌ها را به‌عنوان زاویهٔ مورد نظرمان در نظر می‌گیریم و آن را با θ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب می‌توانیم سه ضلع مثلث را به‌صورتی منحصر به فرد با توجه به این زاویه نامگذاری کنیم. همان‌طور که در شکل فوق دیده می‌شود، اینکه θ کدام زاویه باشد، در نامگذاری ما مؤثر است. سه ضلع را مطابق الگوی زیر نامگذاری می‌کنیم. ضلع روبروی زاویهٔ قائمه را وتر می‌نامیم. این نامگذاری به انتخاب θ بستگی ندارد اما نامگذاری دو ضلع دیگر به این موضوع وابسته است. برای اشاره به دو ضلع دیگر از اصطلاح‌های ضلع مجاور و ضلع مقابل استفاده می‌کنیم. از میان دو ضلع باقی‌ماندهٔ آن که یکی از اضلاع θ است، ضلع مجاور نامیده می‌شود و تنها ضلعی که تاکنون نامگذاری نشده ضلع مقابل نامیده می‌شود.

اتحادهای مثلثاتی



$\sin\theta = \dfrac{a}{c}$	$\csc\theta = \dfrac{۱}{\sin\theta} = \dfrac{c}{a}$
$\cos\theta = \dfrac{b}{c}$	$\sec\theta = \dfrac{۱}{\cos\theta} = \dfrac{c}{b}$
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{a}{b}$	$\cot\theta = \dfrac{۱}{\tan\theta} = \dfrac{b}{a}$

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\sin^{۲} x + \cos^{۲} x = ۱$

$\tan^{۲} x + ۱ = \sec^{۲} x$

$\cot^{۲} x + ۱ = \csc^{۲} x$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = (\tan x \pm \tan y) / (۱ \mp \tan x \tan y)$

$\sin(۲x) = ۲\sin x \cos x$

$\cos(۲x) = \cos^{۲}(x) - \sin^{۲}(x) = ۲\cos^{۲}(x) - ۱ = ۱ - ۲\sin^{۲}(x)$

$\tan(۲x) = ۲\tan(x) / (۱ - \tan^{۲}(x))$

$\sin^{۲}(x) = ۱/۲ - ۱/۲\cos(۲x)$

$\cos^{۲}(x) = ۱/۲ + ۱/۲\cos(۲x)$

$\sin x - \sin y = ۲\sin((x-y)/۲)\cos((x+y)/۲)$

$\cos x - \cos y = -۲\sin((x-y)/۲)\sin((x+y)/۲)$

مثلث را با اضلاع a و b و c زاویه‌های A، B و C در نظر بگیرید. در این‌صورت

$$a/\sin(A) = b/\sin(B) = c/\sin(C)$$

و

$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos(C)$$

$$b^{۲} = a^{۲} + c^{۲} - ۲ac\cos(B)$$

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos(A)$$

همچنین

$$(a-b)/(a+b) = \tan\left[(A-B)/۲\right] / \tan\left[(A+B)/۲\right]$$

از خوانندگان عزیز دعوت می‌شود که برای مشاهده سایر بخش‌های مرتبط با این فصل و سایر فصل‌ها به این سایت مراجعه کنند.

مظنونان همیشگی[1]

اشــرف صفابخش چکوسری ، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشــگاه شــهید رجایــی تهران و دبیــر ریاضی راهنمایی شهرستان صومعه‌سرا (استان گیلان)

ســال تحصیلی آغاز می‌شود! با انرژی و با سری پر از ایده‌های نــو به کلاس می‌روی با خود می‌گویی، امســال کاری می‌کنــم که همه چیز متفاوت باشــد. فکر می‌کنی مهم نیست چه ناملایماتی دیده‌ای، سالی دیگر آغاز شده اســت. **چشم‌ها را می‌شویی و می‌خواهی همه چیز را طوری دیگر ببینی!**

می‌خواهی چشــمان دانش‌آموزان را به دنیای تازه‌ای باز کنی و علاقات چنان اســت که هــر گاه دانش‌آموزی از ســر توجه و علاقه سؤالی می‌پرسد و تو با اشتیاق پاسخ می‌دهی، همان‌دم احســاس می‌کنی پاسخش را گرفته و خوشــنود است؛ انگار همهٔ کوشش‌هایت را پاداش داده‌اند. ولی متأسفانه تلاش تو هر چه که باشد، آن‌چه تو را با آن خواهند سنجید، همان عددی است که به عنوان نمره در کارنامهٔ دانش‌آموز یا روی برگهٔ امتحانی‌اش درج می‌گردد. آن وقت است که رأی نهایی صادر می‌شود؛ اینکه تو معلم خوبی بــوده‌ای یا نه! در آن لحظه اســت کــه درمی‌یابی انگشت‌های اتهام از سوی کسانی به‌سویت دراز می‌شود که نمی‌دانند و شاید هم نخواسته‌اند بدانند که تو چه تلاشی کرده‌ای، چــه زمانی صرف کرده‌ای و چه انرژی‌ای به پای کلاس‌ات ریخته‌ای! «نمره‌هــای پایین بچه‌ها در امتحان، نتیجهٔ کم‌کاری توست!»

طبیعی اســت که چنین سطحی‌نگریســتن، بدان‌جا بینجامد که این روزها شنیدن جملاتی نظیر «فلان معلم تجدیدم کرد!» یا «فــلان معلم به من نمره نداد!» پس از نتایج امتحان‌ها، به امری عادی تبدیل شــود و ساده‌ترین توجیــه بــرای کــم‌کاری دانش‌آموزانی گردد که شــاید تقصیری هم متوجه‌شان نیست؛ چون به‌ندرت اتفاق افتاده است که در نظام آموزشی، هدف از رفتن به مدرسه را برای آن‌ها روشن و برجسته کرده باشیم. از سویی، بیشترِ آنان از طرف پدر یا مادر هم مورد بازخواست قرار می‌گیرند، چون شــاید آن‌گونه که کلمنتس و الرتون (۱۹۹۶) به درســتی بیان کرده‌اند، در بســیاری از خانواده‌های شــرقی، نمره‌ای کــه فرزندان در آزمون‌های کتبــی می‌گیرند، مایهٔ غرور و مباهات و عامل رقابت بین خانواده‌هاست[2]. به نظر می‌رسد آن‌چــه در این میان قربانی می‌شــود، فرصت درک و فهم دروســی هم‌چون ریاضی، فرصت درک زیبایی‌های آن‌ها و فرصت دوست داشتن آن‌هاست.

از این روست که هدف از درس خواندن برای دسته‌ای از دانش‌آمــوزان، معادل اســت با گرفتن نمــرهٔ ۲۰، و در مقابل، برای دســته‌ای دیگر که در آن سر طیف قرار دارند، به معنای گرفتن حداقل نمرهٔ قبولی است. اگر هم از درسی نمره‌ای پایین بگیرند، به نظرشــان این معلم است که حق آن‌هــا را پایمال کرده و البتــه درس ریاضی در این میدان جلودار و بی‌رقیب است. حتی نام «ریاضی» هم برای بیشتر دانش‌آموزان، اضطراب زاست! ظاهراً در پیدایش این احساس نسبت به ریاضی، نه والدین نقشی دارند - که بسیاری‌شان با تأکیــد بر نمــره و برنامه‌ریزی کلاس‌هــای خصوصی و نیمه‌خصوصیِ گوناگون، به‌طور مســتقیم یا غیرمســتقیم فرزندان خود را از درس بیزار کرده و اضطراب نمرهٔ بیست یــا بی‌تفاوتی مطلق را در آن‌هــا پرورانده‌اند- و نه اکثریت غالبِ اولیای مدرســه که آن‌ها هم معمــولاً تنها انتظاری که دارند، بیشــتر و بیشتر شــدن آمار قبولی دانش‌آموزان و میانگین نمره‌های آن‌هاســت. حتی برای این منظور در برخی مدارس، از تمهیداتی چون زیر فشــار گذاشتن معلم

برای بذل و بخشــش نمره گرفتــه تا گنجاندن کلاس‌های جبرانی ریاضی بعد از پایان یافتن ساعات مدرسه و در اوج خستگی معلم و دانش‌آموز، فروگذار نمی‌شود. در پیدایش ایــن ترس از ریاضی، مســئولیتی نیز متوجه آن دســته از والدین و مربیانی است که ترس و نفرت خود را از ریاضی، بی‌آنکه بدانند و بخواهند، به دانش‌آموزان منتقل می‌کنند، یا متوجه نظام آموزشی است که عملکرد آن نسب به پاره‌ای مسائل آموزشی، تناقض‌ها و ناهمگونی‌هایی در آن احساس می‌شــود. به‌نظر می‌رسد کسی که به‌طور معمول باید جور همهٔ این کوتاهی‌ها را به دوش بکشــد، کســی نیست جز معلم ریاضی، مظنون همیشگی!

شاید نیازی به بیان فواید نقد کردن نباشد؛ چون هیچ کس نیســت که بی عیب و نقص باشــد. به یقین نقدهایی به کار معلمان ریاضی وارد است، ولی باید دانست که نقد کردن آدابی دارد و اگر قرار است چیزی، کسی یا فرایندی را نقــد کنیم، در گام نخســت، باید دانــش و آگاهی کافی دربارهٔ موضوعِ مورد نقد داشــته باشیم. اینکه چشم‌ها را به روی همهٔ واقعیت‌هایی که پرداختنِ به آن‌ها مستلزم صرفِ کوشش، وقت و هزینه است، ببندیم و یک نفر را پیدا کنیم که مســئولیت همهٔ کوتاهی‌ها و کاســتی‌ها را به گردن او بیندازیم، هر چیزی می‌تواند باشــد جز «نقد». گاهی این نگاه‌ها و نقدهای غیرمنصفانه و انتظارات نابجا، چنان است که فکر می‌کنم مســئولان آموزشــی، گرایش دارند که به جای جست‌وجوی ایراد کار نظام آموزشی، دنبال یک مقصر باشــند و البته هر کس که دیوارش کوتاه‌تر باشــد، گزینهٔ بهتری اســت؛ و این روزها در نظام آموزشــیِ‌مان، دیواری کوتاه‌تر از دیوار معلم ندیده‌ام!

معلمان تلاشــگرِ بسیاری هســتند که به مطلق بودن نمره بــاور ندارند، چرا که هر معلــمِ آگاهی می‌داند که به دلایل گوناگون، بسیاری از دانش‌آموزان، تا وقتی پای نمره و امتحان در میان نیســت، عملکرد خوبــی دارند. ولی در عمــل، معلم از حداقلِ اختیار در نظام آموزشــی برخوردار اســت. به‌نظر من و برخــی از همکارانــم، برنامهٔ امتحانی، برنامه‌ای است تجویز شده که معلم صرفاً موظف به اجرای آن است. پیش از برگزاری آزمونِ هر نوبت، یک «بارم بندیِ پیشنهادی!» که در واقع معلم معمولاً «ملزم» به پیروی از آن اســت، بــه او می‌گوید که چگونه و بــه چه مقدار از هر بخش کتاب، سؤال طرح کند. در این میان، از یک سو، شیوهٔ طراحی ســؤالات توسط معلم، باید براساس الگویی تعیین شــده باشد و او «موظف» اســت ریزبارمِ سؤالات را به‌طور دقیق و جزئی برای هر پرسش یا مسئله ارائه دهد و از سوی دیگــر، از او می‌خواهند که برگه‌ها را «با اغماض» تصحیح کنــد! به‌علاوه، همان‌گونه که می‌دانیم، یک نمرهٔ مســتمر یــا تکوینی هم، باید به فعالیت‌های مســتمر دانش‌آموز در کلاس تعلق گیرد و روند یادگیری او را به‌طور پیوسته مورد ارزیابی قرار دهد، در حالی که برخی از مســئولان آموزشی بر این باورند که کارکرد نمرهٔ مســتمر، جبران کردن نمرهٔ پایانی اســت و با چنین باوری، تلاش معلم و دانش‌آموز را در طول سه ماه، نادیده می‌انگارند.گویا فراموش کرده‌اند که قرار بوده اســت ارزیابی‌ها دیگر «نمره محور» نباشد. شاید حق با آن‌ها باشد، چون در طرف دیگر میزان تأثیر «معدل دبیرســتان» در آزمون ورودی دانشــگاه‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد! در چنین شــرایطی که نظام آموزشــی در جایی بین رفتارگرایی، ساخت‌وسازگرایی و برداشت‌های سلیقه‌ای برخی از مدیران آموزشی‌اش معلق است، یک معلم هر قدر هم که تلاش کند، باز این ناهمســویی، انرژی فراوانی از او خواهد گرفت.

براســاس اصل ارزشیابی، از اصول شــش‌گانهٔ شورای ملــی معلمــان ریاضــی امریــکا[۳] (NCTM)، ارزشــیابی باید در جهت اصلاح یادگیری باشــد. در حالی که شــیوهٔ ارزشــیابی نظام آموزشــی ما به گونه‌ای است که در برخی مواقع، حتی به روند یادگیری آســیب می‌رســاند. سؤالات کلیشــه‌ای، دانش‌آموزان و نیز بسیاری از معلمان را به این سو ســوق داده است که به تکرار و تمرین برخی رویه‌های «کاربردی‌تــر» بپردازند؛ نتیجه آنکــه درک و فهم عمیق ریاضیات در این میان، قربانی شــده است. وانگهی، یکی از عواملی که از ریاضیات مدرســه‌ای، غولی ترسناک ساخته، همین شیوهٔ آزمون‌گیری نادرست است.

نکتهٔ دیگر اینکه، به‌نظر می‌رســد نظام آموزشــی ما، بین کار معلمان رشــته‌های مختلف، تفاوت چندانی قائل نیســت. این در حالی اســت کــه هر شــاخه‌ای از دروس، تعریف خاص خود را دارد و مســائل مربوط به هر شــاخهٔ درسی، از شــاخه‌های دیگر متفاوت است. کمتر موضوعی به انــدازهٔ ریاضیات به‌طــور همزمان، بــا موانعی هم‌چون مشــکل دانش‌آموزان در فهــم درس (چون نظام یادگیری ما متکی بر محفوظات و تکرار و تمرین اســت)، بی‌رغبتی دانش‌آموزان، پیش‌داوری منفی در برابر درس، حساســیت خانواده بر روی نمرهٔ درس، عدم تناســب حجم درس‌ها با زمان اختصاص داده شده[۴] و نظایر آن، مواجه است. این در حالی است که معیار عملیِ سنجشِ کیفیت کار معلمان که همان درصد قبولی آن‌ها در دروسِ مربوط به اوست، برای ارزیابی بازده کار همهٔ معلمان، بدون توجه به موضوعی که تدریس می‌کنند، به‌طور یکســان به کار می‌رود. این شیوهٔ برخــورد نیز خود می‌تواند، موجــب بی‌تفاوتی یا بی‌انگیزه

شدن معلمان ریاضی گردد.

در این میان، اگر معلمی نخواهد بی‌تفاوتی پیشه کند و با همهٔ کاستی‌ها باز هم تلاش کند تا مؤثر باشد و اگر نخواهد با چسباندن نمره‌های «خوب» به یک برگه که اسمش کارنامه است، مسئولیت آموختن دانش‌آموزان را از سرش باز کند، آن وقت باید منتظر انتقادهایی شاید غیرکارشناسانه از سوی افرادی، غالباً بیرون از حوزهٔ آموزش ریاضی باشد. در شرایطی که در آن «بهترین راه حل برای مشکلات آموزشی، همان است که کم‌زحمت‌تر و از لحاظ مالی کم هزینه‌تر است»، و در نظام آموزشی‌ای که ارزشیابی به جای آنکه جزئی از فرایند تدریس انگاشته شود، معیاری است برای ارزش‌گذاری روی کار معلم و دانش‌آموز، این بهایی است که معلم، برای پای‌بندی به اصول حرفه‌ای‌اش باید بپردازد.

معلم ریاضی قاعدتاً کسی است که با فرایند یادگیری و یاددهی ریاضیات آشنا و با آن درگیر است. کسی است که شاید به اندازهٔ یک عضو هیئت علمی دانشگاه، تحصیلات آکادمیک نداشته باشد، ولی تجربهٔ تدریس در کلاس‌های ریاضی واقعی و برخورد نزدیک با دانش‌آموزان را داراست؛ کسی است که می‌تواند دربارهٔ سطح درک دانش‌آموزان پایه‌های مختلف در مدارس و مناطق گوناگون، تا اندازه زیادی صاحبِ نظر و صاحب عقیده باشد. مجری تدریس کتاب درسی ریاضی و موظف به اجرای زمان‌بندی تدریس است و بنابراین، می‌تواند کتابی را که خود درس می‌دهد نقد کند. با وجود همهٔ این‌ها، کسی است که نظر او، کمترین نقش را در تعیین سرفصل‌های کتاب‌های درسی و تألیف و زمان‌بندی اجرای تدریس آن‌ها داراست! حال، آیا دور از انصاف نیست همین کسی که نقش او در فرایند تولید و تهیهٔ مواد آموزشی، در تعیین زمان لازم برای تدریس و در تعیین چگونگی ارزشیابی چندان جدی و برجسته نیست، مسئول تبعات منفیِ تصمیم‌های آموزشی دانسته شود؟ متأسفانه در نظام آموزشی ما، از این قبیل تضادها کم نیست.

با همهٔ آنچه عنوان گردید، هدف این نوشتار آن نیست که معلمان ریاضی را به دور از هر نوع کوتاهی و لغزشی بداند. هدف حتی این نیست که کسان دیگری را که به نوعی در تدوین برنامه‌های آموزشی دخیل‌اند، مقصر بداند. در یک نظام آموزشی، همهٔ وجوه و اجزا باید مورد ارزیابی و تحلیلِ جدی و کاربردی قرار گیرند و معلم نیز به‌عنوان جزئی از این نظام و شاید یکی از اصلی‌ترین اجزای آن، می‌بایست همانند سایر اجزا، مورد تحلیل، انتقاد و «ارزیابیِ مستمر و کارشناسانه» واقع شود. ولی اگر برداشت ما از ارزیابی و انتقاد آن است که به دنبال کم هزینه‌ترین راه برای یافتن ریشه‌های ناکامی‌های آموزشی و صرفاً در پی یافتن مقصر باشیم، و معلم را متهم کنیم، البته کاری از پیش نبرده‌ایم و با این کار، به همان سرمایهٔ ارزندهٔ انسانیِ معلم، یعنی علاقه و انگیزه نیز آسیب رسانده‌ایم.

امیدوارم روزی بیاید که مسئولان رده‌بالای آموزش‌وپرورش، دست‌اندرکاران امر تولید و تهیهٔ کتاب‌های درسی، برنامه‌ریزان آموزشی، آموزشگران ریاضی و همهٔ کسانی که به‌طور مستقیم یا غیر مستقیم در امر آموزش کودکان و نوجوانان این مرز و بوم دخیل‌اند، همسو با همدیگر و به دور از تصمیم‌گیری‌های سلیقه‌ای، در جهت بهبود کیفیت آموزش ریاضی بکوشند.

این نوشتار را با این گفتهٔ کلمنتس و الرتون (۱۹۹۶) که در کتاب خود[۵]، از قول یک معلم ریاضی دبیرستان در آمریکا نقل کرده‌اند، و شاید بتواند مصداق آن دسته از معلمان ریاضی تلاشگری باشد که با وجود ناملایمات، هم‌چنان با شور و علاقه به کلاس‌های درس می‌روند؛ به پایان می‌برم. آن معلم چنین گفته است:

... با این‌حال، وقتی درِ کلاس بسته می‌شود و با کلاسی جدید و با چهره‌هایی مشتاق روبه‌رو می‌شوم، باز هم تلاش خواهم کرد. برای من، این همان معنای معلم بودن است (ص ۵۰)

پی‌نوشت‌ها

۱. عنوانِ این نوشتار، از نام فیلمی ساختهٔ برایان سینگر و با بازی کِوین اسپیسی گرفته شده است و در تلویزیون ایران، با عنوان «مظنونین همیشگی» به نمایش درآمده است.

۲. کلمنتس و الرتون این ادعا را به‌طور ویژه در مورد ملل آسیایی بیان کرده‌اند و کلمهٔ Asian از نظر لغوی، بیشتر برای مللی به‌کار می‌رود که ما آن‌ها را «شرق دور» می‌نامیم. ولی چون این گفتهٔ کلمنتس و الرتون در فرهنگ ما هم صادق است، در اینجا با به‌کار بردن کلمهٔ شرقی (به مفهوم مللی با فرهنگی متفاوت از ملل اروپایی) که شامل کشور خودمان هم می‌شود، گفتهٔ آن‌ها را تعمیم داده‌ام.

3. (National Council of Teachers of Mathematics)

۴. موانع ذکر شده در این پاراگراف، عواملی هستند که نویسنده به‌طور تجربی و در ضمن فعالیت تدریس و نیز در تعامل با معلمان دیگر، لمس کرده است.

5.Clements, k؛& Ellerton,N. (1996). **Mathematics Education Research: Past, Present and Future;** UNESCO.

روایت معلمان

ضرب حبشی

زینت طوطیان
دبیر ریاضی کاشان

یکـی از اصولی که معلمان بایـد در کلاس مدنظر قرار دهند، تفاوت‌های فردی دانش‌آموزان اسـت تا براسـاس آن برنامهٔ درسی خود را طراحی کنند.

آن سـال دانش‌آمـوزی داشـتم که نسـبت بـه بقیهٔ دانش‌آموزان باهوش‌تر بود، مطالب را سـریع یاد می‌گرفت و حوصلهٔ تمرین و تکرار برای دیگران را نداشت؛ لذا بعضی مواقع عاملی برای بی‌انضباطی می‌شد، به همین دلیل من همیشه یک نوع تمرین یا فعالیت مکمل مخصوص او داشتم که بعد از تدریس و اطمینان از یادگیری درس جدید، آن فعالیت را، که در رابطه با موضوع همان درس بود، به او می‌گفتم. در اینجا یـک نمونه از فعالیت‌های مکمل را که در موضوع ضرب، در پایهٔ چهارم، است مطرح می‌کنم.

آن روز بعـد از تدریس، دانش‌آموزان مشـغول تمرین روی عددهای داده شـده بودند و به‌صورت گروهی مشغول کار بودند که متوجه او شـدم. ته کلاس نشسته بود و داشت روی ورقه‌ای نقاشـی می‌کرد. بالای سـرش رفتم. به او نگاه کردم و گفتم داری چه می‌کنی؟ گفت: دارم نقاشی می‌کشم. پرسیدم: ضرب حبشـی بلدی؟ گفت: ضرب حبشی؟ ضرب حبشی دیگه چه‌جور ضربی است؟!

گفتـم: در بعضـی از قبیله‌های حبشـه، مـردم وقتی می‌خواهند دو تـا عدد را در هم ضرب کنند کاری می‌کنند که خیلی جالب اسـت. گفت: شما از کجا می‌دانید؟ مگر به حبشه رفته‌اید؟

گفتم: نه این را از کتاب‌های مرجع یاد گرفته‌ام و بلافاصله برایش مسئله‌ای را مطرح کردم. گفتم: مثلاً آن‌ها اگر بخواهند، ببینند قیمت ۱۵ عدد مـداد از قرار دانه‌ای ۱۳ تومان چقدر می‌شـود باید ۱۵ را در ۱۳ ضرب کنند. آن‌ها این‌طور ضرب می‌کنند که عدد ۱۳ را در سمت چپ می‌نویسند و عدد ۱۵ را روبه‌روی آن در سـمت راست، بعد عددهای سمت چپ را نصف می‌کنند و عددهای سـمت راست را دوبرابر می‌کنند. البته اگر حاصل تقسیم اعشاری باشد، رقم یا رقم‌های اعشار آن را حذف می‌کنند.

مثلاً در اینجا به جای عدد ۶/۵ عدد ۶ را می‌نویسند و به جای ۱/۵، عدد یک می‌نویسند؛ تا عدد صحیح به دست آید.

×۲	÷۲
۱۵	۱۳
۳۰	۶
۶۰	۳
۱۲۰	۱

ایـن کار را ادامـه می‌دهند، یعنی عددهای سمت چپ را یکی بعد از دیگری نصـف می‌کنند و زیر هم می‌نویسـند تا به عدد یک برسـند. عددهای سمت راست را هم یکی بعد از دیگری دوبرابر می‌کنند و زیر هم می‌نویسند. دانش‌آموز با شنیدن توضیحات من مداد را برداشت و عددهـای مسـئله را در دو سـتون برایم نوشـت و پرسید خوب، بعد چکار می‌کنند؟ گفتم: حبشی‌ها عقیده دارند که عددهای زوج سـتون چپ بدبختی می‌آورد؛ بنابراین عددهای زوج سـتون چپ و عددهـای روبه‌روی آن‌ها را خط می‌زنند.

مثلاً در این دو ستون عدد ۶ و عدد روبـه‌روی آن یعنی ۳۰ را خط می‌زنند. بعداً در ستون راست اعداد باقی‌مانده را با هم جمع می‌کنند؛ یعنی اعداد ۱۵ و ۶۰ و ۱۲۰ را. حاصل جمع آن‌ها یعنی ۱۹۵ حاصل‌ضرب ۱۳ و ۱۵ می‌شود!

مداد را برداشـت و ۱۳ و ۱۵ را در هم ضرب کرد و دید درست است؛ جواب همان ۱۹۵ بود.

پرسـید: ضرب حبشـی همیشـه درسـت درمی‌آید؟ گفتم: بله. همیشه درسـت درمی‌آیـد. اگر بـاور نمی‌کنی امتحـان کن. او تصمیم گرفت ۳۵ را در ۲۴ ضرب کند و من رفتم تا به فعالیت دیگر گروه‌ها رسیدگی کنم.

اشاره

بـه دلیـل اهمیت نقـش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار اسـت. مجلهٔ رشد آموزش ریاضـی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضـی برقرار کنیم. ایـن روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌هـای آموزشـی و تدریس که از دل کلاس درس و عمـل معلـم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود کـه روایت‌هـای خـود را بـرای مـا بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قـرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شـوند و با پویایـی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

مترجم: محمدحسام قاسمی
کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

تیزهوشی در ریاضی و خطاها: دو مفهوم کلیدی در ریاضیات دورهٔ ابتدایی

اشاره
در ادامهٔ ترجمهٔ مفهوم‌های کلیدیِ ریاضیات دورهٔ ابتدایی، در این شماره ترجمهٔ دو مفهوم تیزهوشی در ریاضی و خطاها، ارائه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: مفهوم‌های کلیدیِ ریاضیات دورهٔ ابتدایی، تیزهوشی در ریاضی، خطاها

معرفی مفهوم تیزهوشی در ریاضی

بیان تعریفی دقیق از مفهوم تیزهوشی در ریاضی[1]، چندان کارآمد نیست، به این دلیل که برخورداری افراد از یک استعداد خاص و خدادادی در ریاضی، هنوز به‌طور علمی قابل اثبات نیست. البته ثابت شده است که شرایط ژنتیکی و وراثت می‌توانند در تیزهوش بودن یک فرد مؤثر باشند، با این حال، تعریف‌های ارائه شده در این‌باره، هیچ‌کدام جامع و مانع نیستند. با این وجود، هایلاک (۲۰۰۴) معتقد است که «دانش‌آموزی که در یک گروه سنی خاص از جانب معلم و همکلاسی‌هایش، دانش‌آموز شاخص و سرآمد کلاس ریاضی معرفی شود و نسبت به هم‌سن‌وسالان خود، باهوش و عاقل تشخیص داده شود»، معنایش این است که در ریاضی، **تیزهوش** است (ص. ۱۵۱). معلمان هم دلیل این سرآمدی را نه فقط توانایی بالای چنین دانش‌آموزانی در کسب نتایج عالی در امتحانات، قدرت حافظهٔ بالا و مهارت اجرایی خیلی خوب آن‌ها در انجام محاسبات می‌دانند، بلکه به توانایی‌های خاص آن‌ها نیز اشاره دارند؛ توانایی‌هایی مانند، درک و فهم عالی، خلاقیت و ابتکار و تجزیه‌وتحلیل شگفت‌انگیز مسائل و فعالیت‌های ریاضی، که باعث برجسته و خاص بودن این دانش‌آموزان در کلاس ریاضی می‌شود.

توضیح و بحث دربارۀ تیزهوشی در ریاضی

ریاضی یکی از موضوعات اصلی در برنامۀ درسی مدرسه‌ای است که در آن، توانایی‌های مورد انتظار از دانش‌آموز از قبل مشخص می‌شود. اهداف نیز در همان راستای توانا شدن تعریف شده و تحقق آن‌ها مورد توجه نظام آموزشی قرار می‌گیرد. چون این انتظارات معمولاً براساس سن و پایۀ دانش‌آموزان سطح‌بندی می‌شود، ممکن است در یک پایه متناسب، با ظرفیت‌های بالاترِ دانش‌آموزان توانمندتر در ریاضی (تیزهوش در ریاضی) نباشند. در نتیجه، معلمان مدارس ابتدایی معمولاً در مواجهه با چنین دانش‌آموزانی دچار مشکل می‌شوند. آن‌ها نمی‌دانند که آیا باید به نیازهای عمومی کلاس توجه بیشتری داشته باشند یا این که رویه‌ای در تدریس اتخاذ کنند که پاسخگوی نیازهای این دست دانش‌آموزان خاص نیز باشد. در اینکه باید معلمان، این دانش‌آموزان را در استفاده از حداکثر توانایی‌های بالقوۀ خود یاری کنند، شکی نیست اما گاهی معلمان گله‌مندند که حتی با وجود توجه به نیازهای این دانش‌آموزان، باز انگار روش‌های آن‌ها ناکافی و نامناسب به‌نظر می‌رسد. دلیل سردرگمی معلمان در این‌باره، شاید تنوع دانش‌آموزان به اصطلاح **تیزهوش** باشد، یعنی درست است که گاهی به یک دانش‌آموز با ویژگی‌های خاص، عنوان مستعد در ریاضی اطلاق می‌شود، اما معلوم نیست که دقیقاً، کدام یک از ویژگی‌های او، نشان‌دهندۀ تیزهوشی وی است؟ و آیا همۀ ویژگی‌ها، بین آن دانش‌آموزان مشترک و یکسان است؟

بعضی از پژوهشگران، موضوع **تیزهوشی و هوشمندی**[۲] را به‌هم مرتبط دانسته و آن‌ها را در یک حوزۀ مشترک وارد کرده و مورد مطالعه قرار می‌دهند و فرد مستعد و تیزهوش در ریاضی را در اصل، فردی برخوردار از نوع خاصی از هوش می‌دانند. گاردنر[۳] (۲۰۰۰) در مدل **هوش‌های چندگانه** خویش، انواعی از هوش را معرفی کرده است که نسبتاً، قائم‌به‌ذات بوده، و مستقل از هم عمل می‌کنند. یکی از این هوش‌ها، «هوش منطقی ـ ریاضی[۴]» است که به دو شاخۀ هوش تحلیلی (استدلال‌های منظم و منطقی) و هوش ترکیبی (شناسایی الگوها و تعمیم‌سازی) تقسیم شده است. منظور گاردنر از هوش تحلیلی آن است که یک فرد در هنگام حل یک مسئله، به‌خوبی اجزای مختلف مسئله را مورد تحلیل قرار داده، مسئله را به بخش‌های مختلف تجزیه کند، فرضیه‌ها را مورد بررسی قرار دهد و سعی کند هدف و خواستۀ آن مسئله را به‌خوبی بشناسد. در مقابل، منظور او از هوش ترکیبی این است که فرد به‌خوبی قادر باشد از مثال‌ها، نمونه‌ها، غیرنمونه‌ها و تجربه‌های مختلف درس گیرد و بتواند با ترکیب اجزای مختلف پدیده‌ها با یکدیگر و مرتبط کردن آن‌ها به هم، به یک نتیجۀ منطقی یا تعمیمی مناسب در مورد آن‌ها، دست یابد.

این دو شاخه از هوش منطقی- ریاضیاتی را به‌خوبی می‌توانیم در رفتار دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی مشاهده کنیم. در ادامه، به برخی از ویژگی‌های مشترک بین دانش‌آموزان تیزهوش که آن‌ها را از سایر همکلاسی‌هایشان متمایز می‌سازد، اشاره می‌کنیم:

- هنگام ارائۀ مطالب جدید از جانب معلم، از سرعت گیرایی بالایی برخوردارند؛
- با اعتماد به نفس زیاد از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنند، گویی برایشان کار با نمادها، راحت‌تر از کار با مثال‌های ملموس است و به‌سرعت، بین مثال‌های ملموس ونمادها، پل می‌زنند؛
- تمایل عجیبی به برقراری ارتباط بین مباحث مختلف ریاضی و مرتبط کردن آن‌ها به یکدیگر دارند؛
- به‌سرعت، متوجه نکتۀ ریاضی یا محاسباتی موجود در مسئله‌ها می‌شوند؛
- غالباً، الگوها و روابط را به‌صورت فی‌البداهه، به دیگر موقعیت‌ها تعمیم می‌دهند؛
- به‌راحتی می‌توانند یک روش مشخص را که برای حل یک مسئلۀ خاص به‌کار برده‌اند، به دیگر مسائل تعمیم دهند و شناسایی کنند که کدام مسائل را می‌توان به کمک آن روش‌ها حل کرد و برای کدام مسائل، امکان استفاده از آن‌ها نیست؛
- زمانی که مسئله‌های معمولی را حل می‌کنند، مراحل واسطه و میانی و به قول خودشان **وقت‌گیر** و **تشریفاتی** را حذف می‌کنند؛
- برای رسیدن به جواب پافشاری می‌کنند و در این راه، روش‌ها و استراتژی‌های مختلف را امتحان می‌کنند؛
- ذهنی منعطف و شخصیتی خطرپذیر دارند و خود را به قواعد یکنواخت و فرآیندهای رایج، محدود نمی‌کنند؛
- سرعت بالایی در بازخوانی نتایج، روش‌ها و اصولِ از قبل فراگرفته شده، دارند.

همان‌طور که از این فهرست دیده می‌شود، ویژگی‌های دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، اصلاً شامل تکنیک‌های خاص و اعجازهای محاسباتی- عددی نیست. کروتتسکی[۵]

داشتن تفکر خلاق در ریاضی، تا آنجا اهمیت دارد که می‌توان حتی آن را معیار اصلی سنجش تیزهوشی در ریاضی دانست که بعد از تفکر تحلیلی و تفکر ترکیبی، سومین ویژگی تیزهوشی در ریاضی است. به گفته هایلاک (۲۰۰۴: ۱۵۹)، دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، کسانی نیستند که تنها در حوزه‌های معمول (مهارت‌ها، دانش، درک و اجرا) موفق‌اند، بلکه آن‌هایی هستند که در زمینه‌هایی غیرمعمول (محدود نکردن خود به روش‌ها و چارچوب‌های خاص و داشتن تفکری خلاق و واگرا) نیز، موفق هستند

(۱۹۷۶) معتقد اســت که به‌هیچ وجــه توانایی‌های خاصِ محاسباتی، نمی‌توانند نمایانگر تیزهوشی در ریاضی باشند. همچنین، تأکید بر توانایی انجام محاســبات با تکنیک‌های خاص و نکته‌دار، در برنامهٔ درسی هیچ کشوری، جزو اهداف یا اســتانداردهای برنامهٔ درسی ریاضی نیست. بلکه برعکس، بیشتر مباحث در برنامه‌ها، حول ایجاد توانایی در فرآیندهای شــناختی مانند انعطاف‌پذیر بودن و عدم اصرار بر اســتفاده از روش‌هــای معمــول و یکنواخــت و تقویــت تفکر خلاق، متمرکزند. داشتن تفکر خلاق در ریاضی، تا آنجا اهمیت دارد که می‌توان حتی آن را معیار اصلی ســنجش تیزهوشی در ریاضی دانست که بعد از تفکر تحلیلی و تفکر ترکیبی، سومین ویژگی تیزهوشی در ریاضی است. به گفته هایلاک (۲۰۰۴: ۱۵۹)، دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، کسانی نیستند که تنهــا در حوزه‌های معمول (مهارت‌ها، دانــش، درک و اجرا) موفق‌اند، بلکه آن‌هایی هستند که در زمینه‌هایی غیرمعمول (محدود نکــردن خود به روش‌هــا و چارچوب‌های خاص و داشتن تفکری خلاق و واگرا) نیز، موفق هستند.

بــا توجه به این که دانش‌آموزان تیزهوش، از ســطوح بالای تفکر مانند راه‌حل‌های ترکیبی، روش‌ها و راهکارهای ابتکاری، تفکر تحلیلی و اســتدلال‌های منطقی پیشــرفته بهره‌مندنــد، نمی‌تــوان نیازهای خاص ایــن دانش‌آموزان را به‌راحتی و براســاس برنامهٔ درســی ارائه شــده به دیگر دانش‌آموزان معمولی، برآورده کرد. در نتیجه، دانش‌آموزان تیزهوش نیاز دارند که برایشان، برنامه‌ای خاص و متناسب با استعدادشان در نظر گرفته شود، یا حداقل معلمان آن‌ها، در روش‌های تدریس و طراحی درس‌های خود، به نیازهای ویژه آنان نیز، توجه داشته باشند.

در ادامــه، چند پیشــنهاد و راهنمایی بــرای معلمان و برنامه‌ریــزان درســی، جهت توجه بیشــتر بــه نیازهای دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، ارائه می‌کنیم:

- استفاده از دانش و مهارت‌های ریاضی برای حل مسائل غیرمعمول و ناآشــنا و ایجاد فرصت‌هایی برای پرداختن به چنین مسائلی در کلاس؛
- طرح مسئله‌هایی که در آن‌ها، از راهنمایی‌های کمتری استفاده شده است، به این معنا که مسئله‌ها، دارای کمترین اطلاعــاتِ لازم، برای حل باشــد. همچنین، مســئله‌هایی ارائه شــوند که دارای اطلاعــات اضافه، غیرضروری و حتی گمراه‌کننده باشند!
- آموزش شناســایی فرض‌هــا و تعیین اهــداف (حکم)، هم‌چنین شناساییِ اهداف و نتایج ثانویه از حل یک مسئله؛
- دادن فرصــت به دانش‌آموزان تا بتوانند از اســتدلال‌های منطقی و راه‌حل‌های خود دفاع کنند و آن‌ها را توضیح دهند؛
- در اختیــار قرار دادن مفاهیــم و مهارت‌های جدید و به روز شده به دانش‌آموزان تیزهوش تا برایشان، فرصت‌هایی جهت گســترش تجربه‌ها، تفکــرات و فرآیندهای ریاضی فراهم شود؛
- ارائــه مثال‌هایی برای کشــف الگوهای عددیِ حاصل از الگوهای هندسی و برعکس؛
- ارائه تعمیم‌ها به‌صورت جمله‌های جبری و نمادین؛
- آمــوزش شناســایی متغیرهای مســتقل از متغیرهای وابسته و دست‌کاری متغیرهای مستقل برای مشاهدهٔ تأثیر آن‌ها بر متغیرهای وابسته (مثلاً دست‌کاری در اندازهٔ طول ضلع یک مربع یا شعاع یک دایره و مشاهدهٔ چگونگی تغییر مساحت آن‌ها)؛
- استفاده از جدول‌های دوسویه برای خلاصه‌سازی جهت کشف الگوها (روش جدول‌بندی)؛
- ایجــاد موقعیت‌هایــی بــرای تحقیــق، حــدس زدن، فرضیه‌سازی، تعمیم‌دادن و ارزیابی آن‌ها؛
- دادن فرصت‌هایــی بــه دانش‌آمــوزان برای شناســایی قواعــد عمومی مشــترک بین فرآیندهــای مختلف که در موقعیت‌های مشابه دیگر نیز، قابل اجرا باشند؛
- تشــویق دانش‌آموزان تیزهوش هنگام پافشاری بر حل یک مسئله، احترام به روش‌های پیشنهادی آن‌ها و محدود نکــردن تکنیک‌ها و راه‌حل‌های معلــم به دایرهٔ کوچکی از روش‌های محاسباتی؛
- مشارکت دادن دانش‌آموزان تیزهوش در کارهایی که به استدلال‌های منطقی نیازمندند؛
- درگیر کردن دانش‌آموزان تیزهوش با موقعیت‌هایی که ظاهراً غیرمعقول‌اند، و اســتفاده از موقعیت‌های غیرثابت و انعطاف‌پذیر و چالش‌برانگیــز به این منظور که تفکر آن‌ها به‌سمت واگرایی سوق یابد.

مثال‌های عملی

تانگاتا (یکی از نویسندگان کتابی که این بخش مربوط به آن است)، در تحقیقی که بر روی گروهی از دانش‌آموزان ممتاز و توانمنــد در ریاضی انجام داد، متوجه این واقعیت شد که یک دانش‌آموز، می‌تواند ممتاز باشد ولی تیزهوش نباشد. همچنین، مهم‌تر این است که حتی یک دانش‌آموز، می‌تواند ویژگی‌های تیزهوشــی را داشته باشد، ولی از نظر کســب نمرات و نتایج، ممتاز نباشــد. وی در تحقیق خود،

توانست دو دانش‌آموز ممتاز که آن‌ها را J و K نامیده بود، شناسایی کند که دارای چنین ویژگی‌های متفاوتی بودند.

J: یک دانش‌آمــوز موفق و ممتاز که نمی‌توان او را تیزهوش نامید

J، یکــی از دانش‌آموزانی بود که معلمــان او را به‌عنوان دانش‌آموز ممتاز کلاس می‌شناختند. او در یادگیری موارد رایج و استاندارد و کسب نمرات عالی در آزمون‌های ریاضی، بسیار خوب عمل می‌کرد. اما محقق دریافت که J، از اعتماد به نفس پایینی برخوردار بوده و زمانی که با مســائل ناشناخته روبه‌رو می‌گردد، دچــار اضطراب می‌شــود، کارش را از بقیه پنهان می‌کند و تمایلی به خطرپذیری ندارد. J در تشخیص الگوهای عددی و فرآیند تعمیم‌ســازی ضعیف بود. در برقراری ارتباط با مسئله و روابط موجود بین اجزای آن، کُند عمل می‌کرد و زیاد فکر می‌کرد. اگرچه J در آزمون‌ها و ارزشــیابی‌های ملی، موفق به کسب نمرات عالی می‌شد، ولی با همهٔ این اوصاف، J نمی‌توانست دارای ویژگی‌های اصلی تیزهوش بودن در ریاضی باشد. در نتیجه از جانب پژوهشگر، به‌عنوان یک فرد تیزهوش در ریاضی، به رسمیت شناخته نشد.

K: یک دانش‌آموز تیزهوش اما با نمرات و نتایج ضعیف

در مقابل، K یک کودک ۹ ســالهٔ بازیگوش و نامرتب بــود که در مهارت‌های نوشــتاری و کتبــی، ضعیف عمل می‌کــرد. K در کلاس درس ریاضــی با رویکــرد معمول تدریس، عملکرد خوبی نداشــت. معلــم او را به‌عنوان یک دانش‌آموز ناموفق، بی‌دقت، بی‌انگیزه و بی‌میل نســبت به انجام تکالیف خود، می‌شناخت.

در یک فعالیت، محقق یــک ورق روزنامه (با یادآوری اینکه هر ورق روزنامه چهار صفحه است) با شمارهٔ صفحات ۳۵، ۳۶، ۱۰۹ و ۱۱۰، در اختیار K قرار داد. K توانســت به‌سرعت تشخیص دهد که تعداد کل صفحات این روزنامه چقدر اســت، و بعد از این که باقی صفحات روزنامه را به او دادند، توانســت ورق‌های روزنامــه را لای یکدیگر چیده و به‌صورت اصلی آن، مرتــب کند. محقق به این دانش‌آموز، یک ایدهٔ جبری ســاده داد و او را راهنمایی کرد که نماد n را بــرای تعداد صفحات روزنامه، m را برای تعداد ورق‌های روزنامه، f را برای شــمارهٔ صفحــهٔ روی نیم‌برگ اول، b را برای شــمارهٔ پشــت نیم‌برگ دوم و l و r را به‌ترتیب برای شــمارهٔ صفحه‌های چپ و راستِ دو صفحهٔ داخلی هر ورق روزنامه به‌کار گیرد. K به‌سرعت نتیجه گرفت که $n = m \times 4$. این دانش‌آموز، از بین جدول‌های مختلف که فقط یکی از آن‌ها نمایانگر روابط بین شماره‌های روزنامه بود، جدول زیر را که پاسخ صحیح بود، انتخاب کرد.

b	r	l	f
۷۲	۷۱	۲	۱
۷۰	۶۹	۴	۳
۶۸	۶۷	۶	۵
۶۶	۶۵	۸	۷
... و به همین ترتیب			

علاوه بر این، K توانست این تعمیم‌ها را نیز ارائه کند: «l و b همیشه فرد هستند»، «$b = n + 2 + 1$» و «$f + r = n$» که باعث شــگفتی محقق و معلم او شد. K حتی توانست این روابط را به‌خوبی توضیح دهد و از آن‌ها دفاع کند. وی توانست به‌خوبی نشان دهد که چگونه می‌تواند این نمادها را با در اختیار داشتنِ فقط یک ورق از روزنامه، به‌کار گیرد تــا تعداد صفحه‌هــای آن روزنامه را به دســت آورد. K در پاسخ به سؤال محقق که از او پرسید «این روش برای کدام نشــریه‌ها کاربرد دارد؟»، گفت: «می‌توان این را برای همهٔ مجلات که هر ورق آن چهار صفحه‌ای است اعمال کرد». با مطالعهٔ رفتار K در این فعالیت و چند فعالیت مشابه دیگر، تانگاتــا برخی از ویژگی‌ها و توانایی‌هــای خاص او را که از نظر وی، تیزهوش در ریاضی محســوب می‌شد، به‌صورت زیر فهرست کرد:

- توانایی خارق‌العاده در درک ســاختار اجزای به‌کار رفته در مسئله و توانایی زیاد در استدلال ریاضی؛
- توانایی تعمیم دادن الگوهای عددی و اســتفادهٔ درست از چهــار عمل اصلی، مربعِ اعــداد و نمادهای جبری، برای تعمیم‌ها؛
- برخورداری از سطح مناسبی از اعتماد به نفس، پشتکار و علاقه و اصرار، برای حل مسائل ناآشنا؛
- داشتن حافظه‌ای خوب برای دریافت اصطلاحات و مفاهیم ریاضی، و توانایی بازخوانی درست آن‌ها در شرایط جدید.

مطالعهٔ بیشتر

مطالعات کروتتسکی (۱۹۷۶) را می‌توان نقطهٔ آغازین پژوهش‌های جدی با موضوع تیزهوشی در ریاضی دانست. کوشــی[۶] (a۲۰۰۰)، توصیه‌های نظری و عملی مختلف و

مفیـدی در زمینـهٔ تدریس ریاضی به کودکان مسـتعد و تیزهوش ارائه کرده اسـت. پورتـر[۷] (۲۰۰۵) نیز به اصول خاصـی در تدریـس و کار با کودکان تیزهوش تا سـن ۸ سـال اشاره می‌کند و هر چند توصیه‌های او در این زمینه شـامل همهٔ موضوعات درسـی اسـت و تمرکزش تنها بر ریاضی نیسـت، اما مطالعهٔ پیشـنهادهای او در مورد رفتار با دانش‌آموزان تیزهوش، خالی از لطف نیسـت. همچنین، فصلی با موضوع «حمایت از کودکان تیزهوش در ریاضی» در ادواردز (۱۹۹۸) موجود اسـت که برای محدودهٔ سـنی دبستان نوشـته شده است. پایگاه مشـهور NRICH (به نشـانی www.nrich.maths.ogr) نیـز، حـاوی مـواد آموزشی مناسبی برای معلمان، در این زمینه است.

برای خطاهای ناشی از بی‌دقتی، نقش معلم می‌تواند اشاره به خطای اتفاق افتاده و دادن فرصت به دانش‌آموز برای تصحیح آن باشد. اما در بسیاری مواقع، عدم اشارهٔ مستقیم به پاسخ صحیح یا ارائهٔ چندین گزینه برای اصلاح خطای مورد نظر، راهکاری مؤثرتر است

مفاهیم مرتبط با این بخش

خلاقیت در ریاضی، تفاوت، تعمیم، حل مسئله.

معرفی مفهوم خطاها در ریاضی

معمولاً دانش‌آموزان، در انجام تکالیف نوشـتاری، انجام کارهای عملی و پاسـخ شفاهی به سؤالات معلم دچار **خطا**[۸] می‌شوند. خطا می‌تواند ناشی از بی‌دقتی یا ناشی از انتخاب و استفادهٔ نادرست از فرآیندها باشد. خطاهای ناشی از بی‌دقتی و حواس‌پرتـی را می‌تـوان به کمک تمریـن و تکرار مرتفع ساخت، اما بحث اصلی ما، راجع به خطاهای فرآیندی است که می‌تواند دلایل مختلفی همچون درک نادرست از مفاهیم، به‌کارگیری روش‌های غلط و استفادهٔ نادرست از روابط و قواعد ریاضی داشـته باشد. نکتهٔ اساسی دیگر در مورد خطاها این اسـت که خود آن‌ها، می‌توانند ابـزاری برای آموزش ریاضی باشـند، به این معنا که معلمان در روش‌های تدریس خود، عمداً مرتکب خطاهای هدف‌داری می‌شوند و با هدف ایجاد توجه بیشـتر دانش‌آموزان به آن، موضـوع مورد یادگیری را طراحی و مدیریت کنند.

توضیح و بحث

به غیـر از درس آواشناسـی (آمـوزش زبـان مادری) اغلب خطاهای دانش‌آمـوزانِ دورهٔ ابتدایی، در درس ریاضی اتفـاق می‌افتد و دلیلش هم این اسـت که اکثر کارهایی که دانش‌آموزان در ریاضی انجام می‌دهند، به پاسخ‌هایی نیازمند اسـت که درست یا نادرسـت بودن آن‌ها، مورد قضاوت قرار می‌گیرد. مثلاً از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که به‌درسـتی، اعمال ریاضـی را انجام دهند. البته موضـوع دقت در انجام تکلیف‌ها و فعالیت‌های ریاضی، بسیار مهم است و تا حدودی، انتظـارات و سـخت‌گیری‌ها در این زمینه قابـل توجیه‌اند. هیچ کدام از ما دوسـت نداریم توسط پرستاری که فرق بین میلی‌لیتر و لیتر را نمی‌داند، درمان شویم و یا هنگام معامله کردن، کسـی طرف معاملهٔ ما باشد که در انجام محاسبات عددی، دقیق نیسـت و به اشتباه، وقتی باید ۱۰۰ تومان به ما برگردانـد، ۷۲ تومان به ما پس بدهد. اکنون این سـؤال پیش می‌آیـد که یک معلم در هنـگام مواجهه با خطاهای دانش‌آمـوزان در درس ریاضی، چه در کارهای عملی مانند خطا در اندازه‌گیری و چه در پاسخ به سؤال‌های شفاهی، چه اقداماتی را بهتر اسـت انجام دهد. اینکه معلم دائماً اهمیت دقت در ریاضی را یادآور شـود و توجه دانش‌آموز را به انجام دقیق محاسبات جلب کند، لازم است اما کافی نیست.

یادآوری و اصلاح خطاها یک راهکار کوتاه‌مدت است که برای خطاهای پردازشـی کوچـک و کم‌اهمیت که در اصل، لحظه‌ای و ناشـی از عدم تمرکز هستند، مناسب است. برای خطاهای ناشـی از بی‌دقتی، نقش معلم می‌تواند اشـاره به خطای اتفاق افتاده و دادن فرصت به دانش‌آموز برای تصحیح آن باشـد. اما در بسیاری مواقع، عدم اشارهٔ مستقیم به پاسخ صحیح یا ارائهٔ چندین گزینه برای اصلاح خطای مورد نظر، راهکاری مؤثرتر است. دانش‌آموزان نیاز دارند که انجام خطاها را تجربـه کنند! به‌خصوص در مـورد خطاهای فرآیندی که نشـان‌دهندهٔ عدم درک صحیح آن‌ها از مفاهیم، فرآیندها و قواعد ریاضی اسـت. در ادامه، سعی داریم روش‌های مؤثری را در مواجهـه با خطاهای دانش‌آمـوزان در درس ریاضی و اسـتفاده از آن‌ها در تدریس ریاضی، از چهار منظر مختلف، مورد توجه و بررسی قرار دهیم.

به چالش کشیدن و تطابق

معلمان به ارتـکاب خطا از جانب دانش‌آموزان‌شـان نیازمندند، تا مشـخص کنند که تکلیف‌هایی که در اختیار دانش‌آموزان قرار داده‌اند، تا چه اندازه چالش‌برانگیز بوده‌اند. می‌توان گفت میزان چالش‌برانگیز بودن یک فعالیت ریاضی، با تعداد خطاهای انجام شـده توسط دانش‌آموزان در حین انجام آن، ارتباط مستقیم دارد. اگر دانش‌آموزی در پاسخ به سؤال‌های ریاضی، نسبتاً زیاد مرتکب خطا می‌شود، مهم‌ترین نتیجه از این امر این نیست که بگوییم آن دانش‌آموز در انجام آن کار، ناموفق و ناتوان است (اگرچه ممکن است این‌طور هم باشـد)، بلکه نتیجهٔ مهم را باید در مورد میزان تطابق سطح سؤال با سـطح دانش‌آموز دانست. شاید این

معلم اسـت که در تطابق تکالیف با سطح دانش و توانایی دانش‌آموزان، ناموفق بوده است.

داشـتن نیم‌نگاهـی بـه بدفهمی‌هـا و پیش‌بینی وقوع خطا

آمـوزگاران می‌توانند از خطاهای مشـابه دانش‌آموزان در کلاس‌های دیگر یا سـال‌های قبل، برای به‌دست آوردن دیدگاهی مبتنی بر تجربه، نسـبت به بدفهمی‌ها و ابهامات دانش‌آمـوزان اسـتفاده کنند. این دیدگاه‌هـا به آنان کمک می‌کند تا درس ریاضیِ مورد نظر را، با آگاهی بیشتری راجع به چالش‌های موجود در آن، آموزش دهند. برای مثال، وقتی که یک دانش‌آموز ۹ سـاله، برای محاسبهٔ ۲۲۷-۳۴۰، پاسخ ۱۲۷ را می‌دهد، یک معلم باهوش و باتجربه، به‌سرعت ماهیت این خطا را تشخیص داده و بدون آن که در ارائهٔ پاسخ درست به دانش‌آموز عجله کند، از او می‌خواهد که نحوهٔ انجام تفریق خود را توضیح دهد. ممکن اسـت پاسـخ دانش‌آموز شامل این جمله باشـد که «اگر هفـت را از صفر کم کنیم، هفت باقی می‌ماند». در چنیـن حالتی، با تحلیل این خطا، معلم درمی‌یابد که مشکل کار به استفادهٔ نادرستِ «هیچ» به‌جای «صفر» برمی‌گردد و بدفهمی دانش‌آموز این اسـت که عدد صفر، برایش همان هیچ است و چون هیچ است، می‌تواند آن را نادیده بگیرد. این دیدگاه در واقع، برای تشخیص خطا قبل از وقـوع، در کارهای بعدی و هنگام به‌کارگیری عدد صفر در محاسبات، می‌تواند یاری‌دهندهٔ معلم باشد.

بهره‌گیری از خطا برای یادگیری مؤثرتر (خطا در جهت کیفیت‌بخشی به آموزش)

خطاهایی را که دانش‌آموزان مرتکب می‌شـوند می‌توان به‌عنوان فرصت‌های سازنده در جهت غنا بخشیدن آموزش در نظر گرفت. هنگامی که یک خطا با فرآیند ارزیابی آن خطا همراه شود، یادگیری از اشتباهاتمان می‌تواند مؤثرترین نوع یادگیری در ریاضی باشد (بلک[۹]، ۲۰۰۳). این موضوع وقتی با استفاده از تعارض شناختی[۱۰] همراه شود، مؤثرتر نیز خواهد بود. مثلاً وقتی معلم با خطای تفریق که در بالا توضیح دادیم روبه‌رو می‌شود، از دانش‌آموز بخواهد که تفریق ۷-۱۰ را انجام دهد، زیرا مطمئن است که دانش‌آموز می‌داند پاسخ ۳ است. سـپس به او مجموعه‌ای از تفریق‌های مشـابه مانند ۷-۲۰، ۷-۳۰، ۷-۴۰ و ۷-۱۴۰ بدهد تا دانش‌آموز بتواند به عبارت ۷-۳۴۰ پاسخ درست دهد. حال معلم می‌تواند از دانش‌آموز بخواهد دوباره به تفریق ۲۲۷-۳۴۰ فکر و به‌طور مشابه، عمل کند. مشاهدهٔ این عبارت‌ها در کنار هم، می‌تواند باعث ایجاد یک تعارض شناختی سازنده در ذهن دانش‌آموز شده و او را قادر سازد که خطای اولیهٔ خود را تصحیح کند. مطمئناً این رویکرد معلم، مؤثرتـر از زمانی خواهد بود که معلم خودش مستقیماً برای دانش‌آموز توضیح دهد که خطای او کجاست و چگونه باید آن را اصلاح کند.

نحـوهٔ برخورد اخلاقی معلـم با خطاهای دانش‌آموزان

ایـن احتمال وجود دارد که یـک معلم، رفتاری را در کلاس پیشـه کند که براساس آن، خطاها و بدفهمی‌های دانش‌آمـوزان در ریاضی، بـا جریمه‌ها و تنبیه‌های متعدد همراه شـود. یا این که معلمی دیگـر، رویه‌ای اتخاذ کند کـه در آن هر خطـا، فرصتی بـرای تمـام دانش‌آموزان کلاس، جهت توسـعهٔ درک و فهمشان از آن مسئله باشد. در رویکـرد دوم، هنگامی کـه دانش‌آموزی خطا می‌کند، در واقع از دید معلم یک مشـکل جزئی اسـت و آن را به دیـد یک اتفاق مفید در کلاس نـگاه می‌کند. معلم حتی می‌تواند از دانش‌آموز، به‌خاطر وقوع این خطا تشـکر کند، زیرا فرصتی را برای تمام دانش‌آموزان فراهم کرده اسـت که بیشـتر یاد بگیرنـد و از یک دامِ بالقـوه، رهایی یابند. رویکرد درست و منطقی نیز همین رویکرد است. معلمان ابتدایی نباید به دنبـال تبدیل کلاس خود به یک کلاس عاری از خطا باشند، بلکه باید اجازه دهند خطاها رخ دهند و حتـی گاهی خود عمداً، ایـن خطاها را انجام دهند. این رویکرد، از جانب «دفتر تعیین استانداردها در آموزش[۱۱]» (Ofsted) در انگلسـتان نیز، مورد تأییـد قرار گرفت. اما در نقطـهٔ مقابـل، اگر ارتکاب خطا با برخورد نامناسـب و قهرآلود و گاهی مواقع تنبیه و کم کردن نمره همراه شود، نه‌تنها کمکی به یادگیری بیشتر نمی‌کند، بلکه باعث بروز مشـکلات روانی مانند اضطراب ریاضی می‌شود که اعتماد بـه نفس، قـدرت خطرپذیری و فعالیـت دانش‌آموز را در کلاس، کاهش می‌دهد.

معلم حتی می‌تواند از دانش‌آموز، به‌خاطر وقوع این خطا تشکر کند، زیرا فرصتی را برای تمام دانش‌آموزان فراهم کرده است که بیشتر یاد بگیرند و از یک دام بالقوه، رهایی یابَند. رویکرد درست و منطقی نیز همین رویکرد است

دفتر تعیین استانداردها در آموزش (Ofsted) معتقد اسـت که معلمان با اتخـاذ رویکرد اخلاقـی محبت‌آمیز در برخورد با اشـتباهات و خطاهـای دانش‌آموزان، باعث می‌شـوند که آن‌ها، ترسـی از خطاکردن نداشته باشند و موفق‌تـر عمل کنند. از این گذشـته، این دفتر به معلمان توصیه می‌کند که خطاها را به‌عنوان بخش غیرقابل‌انکاری از آموزش، در نظر بگیرند.

مثال‌های عملی

در ادامه، دو مثال از خطاهای متداول و واکنش صحیح معلم به آن‌ها را، ارائه می‌کنیم.

خطای فرآیندی در جمع

یک کودک ۵ ساله که جمع را با شمارشِ رو به بالا انجام می‌دهد، ممکن است خطاهایی مانند آنچه که در زیر مشاهده می‌کنید، انجام دهد:

۹=۳+۷ ۱۰=۵+۶ ۱۱=۴+۸

معلم از دانش‌آموز می‌خواهد که نشان دهد که چگونه این جواب‌ها را به دست آورده، در حالی‌که توجه دارد که در جمع ۳+۷، دانش‌آموز از هفت شروع به شمارش کرده است (هفت، هشت، نه)، به‌جای آنکه به‌طور صحیح، از هشت شروع به شمارش کند (هشت، نه، ده). این دانش‌آموز، از سه انگشت خود نیز استفاده می‌کند، اما به شیوه‌ای نادرست و با شروع از گفتن واژه هفت به‌جای واژه هشت، این کار را می‌کند. تحلیل این خطاها توسط معلم باعث می‌شود که در آموزش این فرآیندها، از عبارت‌های مناسب‌تری مانند «هفت و سه تا بیشتر» به‌جای عبارت گیج کنندهٔ «سه تا بشمار از هفت» استفاده کند. بنابراین، معلم با کسب تجارب بیشتری از خطاهای دانش‌آموزان، می‌تواند از الگوهای زبانیِ بهتری برای درک درست دانش‌آموزان در کارهای شفاهیِ بعدی خود، استفاده کند.

معلمان ابتدایی نباید به دنبال تبدیل کلاس خود به یک کلاس عاری از خطا باشند، بلکه باید اجازه دهند خطاها رخ دهند و حتی گاهی خود عمداً، این خطاها را انجام دهند

درک نادرست از ضرب اعداد اعشاری در مضارب ۱۰

گاهی معلمان ابتدایی، شاهد آن هستند که دانش‌آموزان ۱۱ ساله در انجام برخی از محاسبات بر روی مضارب ۱۰، به نتایج نادرستی می‌رسند. مثلاً حالتی مثل عبارت ۲/۳۰=۱۰×۲/۳ بسیار مشاهده شده است. معلم می‌تواند این خطا را به فرصتی برای درک عمیق‌تر دانش‌آموزان از ضرب اعداد اعشاری در مضارب ۱۰، تبدیل کند.

در مثال بالا، خطا به این دلیل رخ داده است که دانش‌آموز از یک قاعده در مورد ضرب در عدد ۱۰، به اشتباه استفاده کرده است. این قاعده «اضافه کردن صفر» نام دارد و حرفش این است که اگر عددی در ۱۰ ضرب شود، کافی است برای به‌دست آوردن حاصل، یک صفر به انتهای آن عدد اضافه شود. یک معلم باهوش می‌تواند از دانش‌آموزان بپرسد که «کدام عدد بزرگ‌تر است؟ ۲/۳ یا ۲/۳۰؟» و این سؤال، می‌تواند بحثی در کلاس به راه اندازد که در نهایت، مشخص شود دو عدد با هم برابرند. اکنون با به چالش کشیدن قاعدهٔ «اضافه کردن صفر»، این قانون در ذهن دانش‌آموز به زیر سؤال رفته است. به این ترتیب، اولین نشانه‌ها از تعارض شناختی در چهرهٔ دانش‌آموزان نمایان می‌شود. معلم سپس در کلاس، نمونه‌هایی از شرایط واقعی در زندگی را بیان می‌کند که به ضرب ۲/۳ در ۱۰ مربوط می‌شود. مثلاً می‌گوید، «۱۰ تخته چوب خریده‌ایم که طول هر کدامشان، ۲/۳ متر است. طول تمام تخته‌ها با هم، چقدر است؟ یا می‌گوید که «۲/۳ کیلوگرم شکلات خریده‌ایم که قیمت هر کیلوگرم، ۱۰ تومان است. چقدر باید به فروشنده پول بدهیم؟». مرتبط کردن مسئله به شرایط واقعی، می‌تواند در ذهن دانش‌آموز، تصور عینی‌تری از اشتباه او ایجاد کند. در نهایت، معلم به روش‌های دقیق‌ترِ محاسباتی از این نوع اشاره کرده و از همهٔ دانش‌آموزانی که در درک بهتر این موضوع و رفع این خطا کمک کرده‌اند، تشکر می‌کند.

مطالعهٔ بیشتر

کوکبرن (۱۹۹۹) به تعریف، شناسایی و چگونگی اصلاح برخی از خطاهای رایج ریاضی در سنین پایین‌تر پرداخته است. دِروز[۱۲] نیز، مطالعهٔ مفیدی در مورد خطاهای محاسباتی کودکان و بدفهمی‌های آن‌ها، در فصل دوم از کتاب هانسون[۱۳](۲۰۰۵) آورده است. اضافه بر اینها، مطالعهٔ مهم دیگری نیز توسط کوشی و همکاران (۲۰۰۰)، تحت عنوان «خطاها و بدفهمی‌های کودکان[۱۴]»، انجام شده است.

مفاهیم مرتبط با خطاهای ریاضی

سنجش برای یادگیری، تعارض شناختی، جنسیت و ریاضی، جور بودن و ناجور بودن.

پی‌نوشت‌ها

1. Giftedness in Mathematics
2. Intelligence
3. Gardner
4. Logical-Mathematical Intelligence
5. Krutetskii
6. Koshy
7. Porter
8. Error
9. Black
10. Cognitive conflict
11. Office for Standards in Education: Ofsted
12. Drews
13. Hanson
14. Children's Mistakes and Misconception

هادی دهقان، دبیر ریاضی شهرستان کرمان
عباس حسن‌خانی، دانشیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان،
دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان بخش ریاضی

میزان توجه اولین کتاب ریاضی متوسطه (پایه هفتم) به سطوح مختلف اهداف آموزشی

از دیدگاه اندرسون

چکیده
طبقه‌بندی تجدیدنظر شدهٔ بلوم (اندرسون) که از دو بُعد دانش و فرایند شناختی تشکیل شده است در سال ۲۰۰۱ معرفی شد. این پژوهش با موضوع تحلیل محتوای کتاب ریاضی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲ بر مبنای طبقه‌بندی حیطه شناختی اندرسون انجام شده است. با توجه به اهمیت بحث تحلیل محتوای کتاب‌های درسی که در نظام آموزشی متمرکز ایران بسیار تأثیرگذار است. در این پژوهش محتوای کتاب ریاضی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲ در سطوح مختلف طبقه‌بندی اندرسون طبقه‌بندی شد. این تحقیق به لحاظ روش، از نوع توصیفی- تحلیلی و به لحاظ هدف از نوع کاربردی است. پس از تجزیه‌وتحلیل یافته‌های پژوهش مشخص شد که در کتاب مزبور به تمام سطوح طبقه‌بندی اندرسون توجه شده و به سطوح به یاد آوردن، فهمیدن و به‌کار بستن در بعدهای دانشی اولیه توجه بیشتری شده است. پیشنهاد می‌شود با توجه به اهمیت و کاربرد زیاد سطوح بالای طبقه‌بندی اندرسون، با گنجاندن قسمت‌هایی مثل بازی و ریاضی در محتوای کتاب، به این سطوح توجه بیشتری صورت گیرد.
کلیدواژه‌ها: تحلیل محتوا، کتاب ریاضی پایه هفتم، دیدگاه اندرسون

مقدمه

در راســتای اجرای نظام جدید آموزشــی، کتاب تازه تألیف ریاضی پایه هفتم منتشــر شد. ریاضیات پایهٔ هفتم در شــرایطی تألیف شــده است که از یک طرف باید محتوای تعیین شده را طبق برنامه درسی مصوب ارائه کند و از طــرف دیگر، دانش‌آموزانی در این سال تحصیلی کتاب را مطالعه می‌کردند که پنج ســاله دورهٔ ابتدایی را در نظام قدیمی برنامهٔ ریاضی خوانده‌اند و تنها کتاب ریاضی پایهٔ ششــم را دیده‌اند کــه تا انــدازه‌ای حال و هوای برنامــهٔ جدید را دارد. از طــرف دیگر، معلمــان دورهٔ راهنمایی نیز به زمان احتیاج دارند تا به کار آشــنا و بر تدریس این کتاب مســلط شــوند. با این توضیح، تدریــس کتاب‌های درســی جدید در ســال اول خالی از اشکال نیست. آن‌چــه می‌تواند آســیب‌های این موضــوع را کاهش دهد، کســب آمادگی و آشــنا شــدن هر چه بیشتر معلمان دورهٔ اول متوسطه (راهنمایی سابق) با محتوا و برنامه‌های جدید خواهد بود (داوودی،۱۳۹۲).

برای بســیاری از معلمان ریاضی، کتاب درســی اولیــن راهنمــا بــرای اجرای برنامه درســی اســت (کائیــدی،۱۳۹۳). بــا توجه به اهمیت بســیار زیاد کتاب‌های درســی در نظام آموزشــی متمرکز ایران، از جملــه کتــاب ریاضی پایه هفتم کــه اولین کتاب ریاضی دورهٔ متوســطه است و مســلماً پایه و اساس ریاضیــات این دوره را تشــکیل می‌دهد نیاز اســت تــا تحلیل محتوای این کتاب از یــک دیدگاه معتبر بین‌المللی مثل طبقه‌بندی حیطه شناختی اندرسون که در قرن ۲۱ معرفی شــده اســت؛ انجــام گیرد تا اهداف آموزشی کتاب به‌خوبی مشخص و طبقه‌بندی گردد.

از آنجــا که هدف آموزش یادگیری اســت، پس به همان نســبت که یادگیری‌ها متنوع‌اند، هدف‌های آموزشــی هم گوناگون‌اند. هدف‌های متعدد آموزشی در ســطوح مختلف تحصیلی نیاز به نوعی سازمان و نظم‌وترتیب دارند (سیف،۱۳۸۹).

طبقه‌بنــدی هدف‌هــای آموزشــی چارچوبــی اســت برای دســته‌بندی بیاناتی از ایــن قبیل که از دانش‌آمــوزان چه انتظاراتــی برای آموختــن نتایج آمــوزش داریم. این چارچوب به‌عنــوان ابزاری برای تسهیل تبادل آیتم‌های آزمون در بین اعضای هیئت علمی در دانشــگاه‌های مختلف به‌منظور ایجاد بانکی از آیتم‌ها و هر کدام برای سنجش هدف‌های آموزشی تصور شده است (اندرسون،۲۰۰۱).

در سال تحصیلی ۹۳-۱۳۹۲ وزارت آموزش‌وپرورش با هدف پرورش بیشــتر قوهٔ تفکر، منطق و خلاقیت و همچنین کاربردی کردن محتوای کتاب‌های ریاضی اقــدام به تألیف کتاب ریاضی پایهٔ هفتم نمود. اکنون ما در این پژوهش بررســی می‌کنیم که آیا محتوای این کتــاب می‌توانــد دانش‌آموزانی فعــال و خلاق پرورش دهد یا باز هم بیشــتر به بعد دانش و ســطح دانش امور واقعی در طبقه‌بندی هدف‌های آموزشــی از دیدگاه اندرسون توجه شده است؟

طبقه‌بندی حیطهٔ شناختی اندرسون

حیطهٔ شناختی به‌طور کلی به یادگیری مطالب و کسب شناخت و معرفت دربارهٔ آن‌ها مربوط می‌شود. نتایج حاصل از آموزش‌های شــناختی به مهارت‌های ذهنی از قبیل بازشناسی، یادآوری، فهمیدن، توانایی کاربرد آموخته‌ها، تجزیه و تحلیل، ترکیب و ارزشیابی منتهی می‌گردد. سلسله مراتب آموختنی‌های حیطهٔ شــناختی از روند آسان به مشــکل پیروی می‌کند و دامنهٔ آن از یادگیری ســطحی تا درک بسیار عمیق از مطالب، متغیر اســت. حیطهٔ شــناختی از شــش طبقه یا سطح تنظیم شده و هر طبقهٔ بالاتر مستلزم کسب مهارت‌های شناختی طبقه یا طبقات (سطح یا سطوح) پایین‌تر است. بنجامین بلوم در سال ۱۹۵۶ با معرفی این شش سطح، طبقه‌بندی حیطهٔ شناختی بلــوم را به جهانیــان عرضه کرد. (صفــوی،۱۳۹۰) بیــش از چهار دهــه بعد، چند نفــر از صاحب‌نظران آموزشی (اندرسون، کراتول، و همکاران، ۲۰۰۱) در طبقه‌بندی حوزهٔ شــناختی، معــروف به طبقه‌بندی بلــوم، تجدیدنظر کردند و طبقه‌بنــدی تازه‌ای با نام یک طبقه‌بندی برای یادگیری، آموزش، و ســنجش پدید آوردند. در طبقه‌بندی تجدیدنظر شــدهٔ حوزهٔ

شـــناختی، یک بعدِ دانش و یک بعدِ فرایند شناختی وجـــود دارد. بعد دانش شـــامل دانش امـــور واقعی، دانش مفهومی، دانش روندی، و دانش فراشـــناختی است. بعد فرایند شناختی در برگیرندهٔ به یاد آوردن، فهمیدن، بـــه‌کار بســـتن، تحلیل کردن، ارزشـــیابی کـــردن، و آفریدن اســـت. طبقه‌های هـــر دو بعد این طبقه‌بندی به‌صورت سلســـله مراتبی، یعنی از عینی به انتزاعی و از ساده به پیچیده تنظیم یافته‌اند.

ویژگی دو بُعدی بودن این طبقه‌بندی آن اســـت کـــه در آن هر هدف بـــا توجه به هـــر دو بُعد دانش و فرایند شـــناختی طبقه‌بندی می‌شود و در یکی از خانه‌های درون جدول که محل تلاقی دو خط برآمده از دو بُعد است قرار می‌گیرد (اندرسون، ۲۰۰۱).

		بعد فرایند شناختی					
		۱ به یادآوردن	۲ فهمیدن	۳ به‌کار بستن	۴ تحلیل کردن	۵ ارزشیابی کردن	۶ آفریدن
بعد دانش	دانش امور واقعی A	A۱	A۲	A۳	A۴	A۵	A۶
	دانش مفهومی B	B۱	B۲	B۳	B۴	B۵	B۶
	دانش روندی C	C۱	C۲	C۳	C۴	C۵	C۶
	دانش فراشناختی D	D۱	D۲	D۳	D۴	D۵	D۶

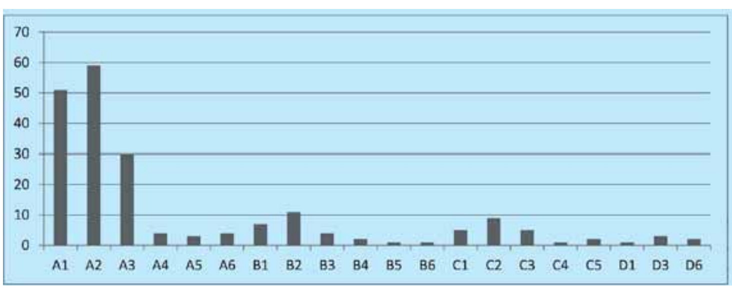
جدول ۱: متغیرهای طبقه‌بندی حیطه شناختی از دیدگاه اندرسون

روش‌شناسی

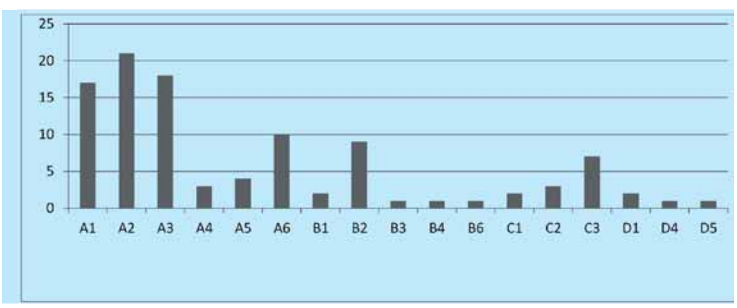
ایـــن تحقیق به لحـــاظ روش از نـــوع توصیفی- تحلیلی و با توجه به هدف از نوع کاربردی است و در صدد اســـت با توجه به فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها و تمرین‌هـــای موجود در کتاب درســـی ریاضی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲، آن‌ها را از جهت توجه به سطوح مختلف حیطهٔ شـــناختی از دیدگاه اندرسون، تحلیل محتـــوا نماید. بـــرای تحقق این هدف با اســـتفاده از کتاب‌هـــای مرجـــع (مانند کتاب راهنمـــای معلم) و نظر دبیران مجرب و اســـتاد راهنمای پایان‌نامه خود، اهداف مورد نظر از کتاب درسی مزبور استخراج و به اهداف رفتاری تبدیل شـــدند؛ ســـپس این اهداف در سطوح مختلف حیطه شناختی اندرسون طبقه‌بندی گردیدند. در پایان با اســـتفاده از آمار توصیفی درصد فراوانی هر یک از ســـطوح مشخص شد و با تجزیه و تحلیل کلی نتایج ، ســـطح کلی کتـــاب ریاضی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲ مشخص شد.

در ایـــن تحقیق تمام فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب ریاضـــی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲ مورد بررسی واقع شد.

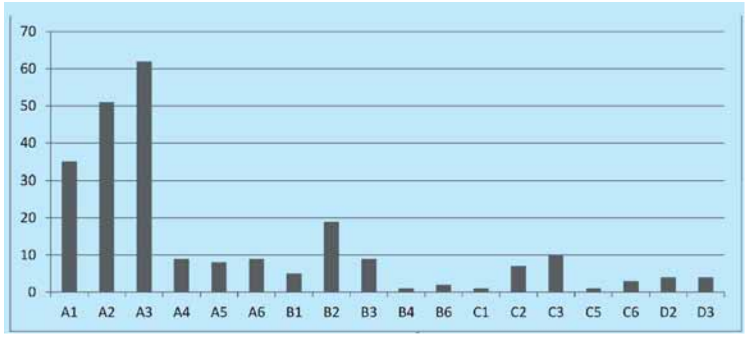
متغیرهـــای مورد اســـتفاده در جـــدول زیر ذکر شده‌اند.



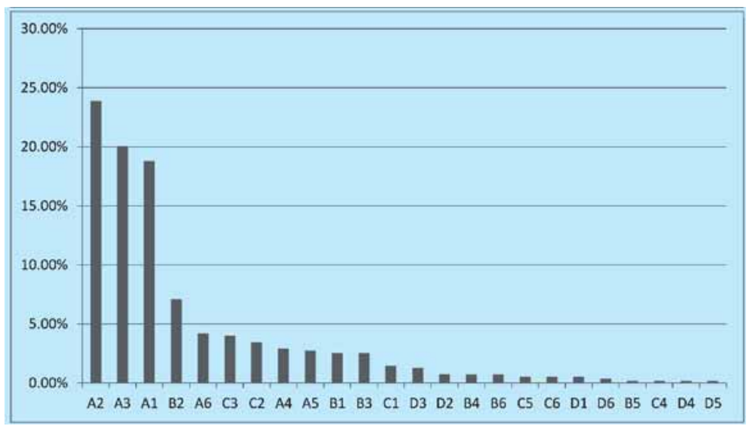
نمودار ۱: نمودار ستونی سطوح طبقه‌بندی اندرسون مربوط به فعالیت‌های کتاب ریاضی پایهٔ هفتم چاپ ۹۲



نمودار ۲: نمودار ســـتونی سطوح طبقه‌بندی اندرســـون مربوط به کار در کلاس‌های کتاب ریاضی پایهٔ هفتم، چاپ ۹۲



نمودار۳: نمودار ستونی سطوح طبقه‌بندی اندرسون مربوط به تمرین‌های کتاب ریاضی پایهٔ هفتم چاپ ۹۲



نمودار۴: نمودار ستونی درصد سطوح طبقه‌بندی اندرسون مربوط به کلیه فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب ریاضی پایهٔ هفتم چاپ ۹۲

نتایج

کتاب ریاضی پایهٔ هفتم دارای ۵۵ فعالیت است که براساس آن ۲۰۵ سؤال ریاضی مطرح شده است. ۲۰۵ هدف آموزشی موجود در فعالیت‌های کتاب براساس تعداد اهداف و توزیع فراوانی در هر یک از سطوح طبقه‌بندی اندرسون در نمودار ستونی زیر رسم شده است.

کتاب همچنین دارای ۵۴ کار در کلاس می‌باشد که در این ۵۴ کار در کلاس، ۱۰۳ سؤال ریاضی مطرح شده است. ۱۰۳ هدف آموزشی موجود در کار در کلاس‌های کتاب در نمودار ستونی زیر براساس تعداد اهداف و توزیع فراوانی در هر یک از سطوح طبقه‌بندی اندرسون طبقه‌بندی شده‌اند.

کتاب مربوطه دارای ۳۴ تمرین است که در این ۳۴ تمرین، ۲۴۰ سؤال ریاضی مطرح شده است. ۲۴۰ هدف آموزشی موجود در تمرین‌های کتاب در نمودار زیر براساس تعداد اهداف و توزیع درصد فراوانی در هر یک از سطوح اندرسون مشخص شده‌اند.

بحث و نتیجه‌گیری

با استفاده از نمودارهای موجود در مورد میزان توجه کتاب ریاضی پایهٔ هفتم به سطوح مختلف طبقه‌بندی اندرسون در فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی مربوطه باید گفت: به‌طور کلی میزان توجه کتاب ریاضی پایهٔ هفتم که دارای ۲۰۵ سؤال در «فعالیت‌ها»، ۱۰۳ سؤال در «کار در کلاس‌ها» و ۲۴۰ سؤال در «تمرین‌ها»- جمعاً ۵۴۸ سؤال یا ۵۴۸ هدف آموزشی- می‌باشد به سطوح مختلف طبقه‌بندی اندرسون مطابق با نمودار ۴ است.

- با توجه به نتایج حاصل از تحلیل فعالیت‌های کتاب، میزان توجه به «سطحِ فهمیدنِ دانش امور واقعی» بیش از سایر سطوح است.
- با توجه به نتایج حاصل از تحلیل کار در کلاس‌های کتاب، میزان توجه به «سطح فهمیدن دانش امور واقعی» بیش از سایر سطوح است.
- با توجه به نتایج حاصل از تحلیل تمرین‌های کتاب، میزان توجه به «سطح به‌کار بستن دانش امور واقعی» بیش از سایر سطوح است.

در کتاب ریاضی پایهٔ هفتم به کلیهٔ سطوح طبقه‌بندی اندرسون توجه شده است اما به بعضی طبقات توجه ویژه و به بسیاری از طبقات دیگر توجه بسیار کمی شده است. به‌طور مثال در این کتاب، به سطوح فهمیدن دانش امور واقعی و به‌کار بستن دانش امور واقعی(سطوح اولیه طبقه‌بندی) به ترتیب بیشترین توجه شده است و به سطوح ارزشیابی دانش مفهومی، تحلیل کردن دانش رویه‌ایی، تحلیل کردن دانش فراشناختی و ارزشیابی کردن دانش

نتایج حاصل از آموزش‌های شناختی به مهارت‌های ذهنی از قبیل بازشناسی، یادآوری، فهمیدن، توانایی کاربرد آموخته‌ها، تجزیه و تحلیل، ترکیب و ارزشیابی منتهی می‌گردد. سلسله مراتب آموختنی‌های حیطهٔ شناختی از روند آسان به مشکل پیروی می‌کند و دامنهٔ آن از یادگیری سطحی تا درک بسیار عمیق از مطالب، متغیر است. حیطهٔ شناختی از شش طبقه یا سطح تنظیم شده و هر طبقهٔ بالاتر مستلزم کسب مهارت‌های شناختی طبقه یا طبقات (سطح یا سطوح) پایین‌تر است

فراشــناختی، که همگی از ســطوح مهم، کاربردی و سطح بالای طبقه‌بندی هستند، کمترین توجه شده است.

از آنجا کــه در طبقه‌بندیِ هدف‌های آموزشــی حیطهٔ شــناختی از دیدگاه اندرســون، سطوح بالای طبقه‌بنــدی از اهمیت و کاربــرد فراوانی برخوردارند و ســؤالاتی که با توجه به این سطوح طراحی شوند موجب یادگیری پایدار و طولانی‌تری می‌شوند اهمیت دادن به این ســطوح در کتاب‌های درســی، خصوصاً کتاب‌های ریاضی، می‌بایســت به شــدت مورد توجه قرار گیــرد تا دانش‌آموزان در طــول دوران تحصیل به جای حفظ کردن طوطی‌وار مطالب به فهم جامع و کامــل و کاربــردی از مطالب و محتوای آموزشــی برســند و به اختراع و اکتشاف و تولید علم بپردازند. این در حالی اســت که در کتاب درسی ریاضی پایهٔ هفتم چاپ ۱۳۹۲ به سطوح بالای طبقه‌بندی توجه کمتری شده است و این می‌تواند دلیل خوبی بر کم رغبتی دانش‌آموزان در استقبال از بعضی مطالب این کتاب باشــد. تجربهٔ اینجانب و همکاران در تدریس این کتاب در ســال تحصیلی ۹۳-۹۲ به‌خوبی نشان داد که سؤالات مبتنی بر ســطوح بالای طبقه‌بندی اندرسون برای دانش‌آموزان جالب‌تر و جذاب‌تر است و یادگیری پایداری را برای آن‌ها به ارمغان می‌آورد.

پیشــنهاد به معلمان، دانش‌آموزان و برنامه‌ریزان درسی

۱. برنامه‌ریــزان درســی بایــد محتوایی را برای کتاب درســی انتخاب کنند که بــه هدف‌های تمام سطوح طبقه‌بندی اندرسون توجه داشته باشد.

۲. با توجه به نتایج به‌دست آمده از این تحقیق در مــورد توجه کم کتاب درســی به ســطوح بالای طبقه‌بندی اندرســون و اهمیــت و کاربرد زیاد این سطوح، پیشنهاد می‌شــود با گنجاندن قسمت‌هایی مثل بازی و ریاضی به کتاب درسی، به سطوح بالای طبقه‌بندی اندرسون توجه بیشتری شود.

۳. در کتــاب درســی و کتاب راهنمــای معلم اهداف رفتاری مشخص گردد.

۴. بیشــترین حجــم کتــاب درســی مربوط به فعالیت‌هاست؛ لذا باید از دبیران خواسته شود به این قسمت کتاب درسی توجه بیشتری داشته باشند تا روش تدریس دانش‌آموز محور تقویت گردد.

۵. بــا توجه بــه متفاوت بودن میــزان توجه هر قسمت از کتاب درسی به سطوح مختلف طبقه‌بندی اندرسون و ناهمگن بودن سطح علمی دانش‌آموزان، دبیران بایســتی جهت رســیدن به اهداف آموزشی مطلوب، بــه تفاوت‌های فــردی دانش‌آموزان توجه ویژه‌ای داشته باشند.

منابع

۱. داوودی، خســرو، (۱۳۹۲)، **ریاضــی پایــهٔ هفتم**، مجله رشد آموزش متوسطه، ش ۱۰۷

۲. سیف، علی اکبر، (۱۳۸۹)، **روان‌شناسی پرورشی نوین**، نشر دوران، تهران

۳. صفوی، امان‌الله، (۱۳۹۰)، **کلیات روش‌ها و فنون تدریس (متن کامل)**، نشر معاصر، تهران.

٤. کائیــدی، اعظــم، (۱۳۹۳)، **از تجزیــه تحلیــل محتوای برنامه درسی ۲۰۶۱ بیاموزیم**، مجله رشد آموزش ریاضی، ش۱۱۵

5. Anderson, L. W. ,&Krathwohl,d. (Eds.) (2001). A Taxonomy For learning, Teaching and Assesing: A Revision of Bloom's Taxonomy Of Educational Objectives, New York:Longman,

تلفیق روش‌های آموزشی و ارائهٔ راهبردهای نوین در آموزش ریاضی

ساناز خادم القرانی
دانشگاه صنعتی اصفهان و خانه ریاضیات اصفهان

چکیده

بحث پیرامون روش تدریس ریاضی، همواره مطرح بوده و تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است. در این مقاله روش فعال جهت تدریس ارائه می‌شـود. در این روش، هدف اصلی این است که دانش‌آموزان در فرایند آموزش پرجنب و جوش باشند. سه اصل آموزش این روش عبارت است از: یادگیری فعال، بهترین انگیزه و تسلســل مراحل. از معایب این روش وقت‌گیر بودن آن در شروع کار است، تلفیق روش فعال و جهت‌دهی منطقی به تفکر، طبق بررســی‌ها باعث کاهش نواقص و افزایش مزایای این روش خواهد شد. مشخص شده اســت که اســتفادهٔ همزمان از روش «کارگروهی» بر بازدهی یاددهی می‌افزاید. در جهت‌گیری منطقی، هنر حل مسئله دانش‌آموز تقویت می‌شود، و لذا دانش‌آموز حین تفکر به حل مســئله دربارهٔ نحــوهٔ تفکرش هم می‌اندیشــد. در این مقاله تأثیر تلفیق روش‌های فوق مورد مطالعه قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: روش فعال، تفکر منطقی، کارگروهی، یادگیری و آموزش ریاضی

مقدمه

مغز انســان دارای ده توانایی بالقوه اســت. برخی از این توانایی‌ها شــامل یادآوری، مقایسه، گروه‌بندی، تجزیه‌وتحلیل، و تصور هستند. اگر رشد تفکر، به معنای رشــد و پرورش این توانایی‌ها باشد، بایستی در خلال آموزش، بســتری برای رشد این توانایی‌ها فراهم شود. این در حالی است که رشد یکایک این توانایی‌ها نیازمند کاربرد آن‌ها در جریان یادگیری توسط خود فرد است [۱].

در صورتــی که انگاره شــامل تصــور، الگو، طرح، تصویــر، ایــده و... باشــد، فرایند یادگیــری را می‌توان به‌صــورت ســاختن انگاره‌های جدیــدی در ذهن و یا گســترش و تعمیــم انگاره‌های موجــود تعریف نمود. به‌علاوه یک مفهوم وقتی یاد گرفته می‌شود که از ورای تجربیات، مشاهدات و جمع‌بندی‌ها به برداشتی از یک شــئ یا پدیده تبدیل شود. این در حالی است که علم ریاضــی بر پایه مفاهیم عمدتاً انتزاعی و ذهنی شــکل گرفته است، لذا اگر بتوان مدل‌هایی عینی برای همین مفاهیم انتزاعی ایجاد نمود، همزمان با افزایش شهود و نقش دانش‌آموز در فضای آموزشی، مهارت‌های تفکری، حرکتی و فیزیکی، اجتماعی، همکاری و... در او پرورش می‌یابند.

در خانــه ریاضیات اصفهان فرصت مناســبی برای بررســی و پیاده‌ســازی یک فضای عینی در راســتای آموزش ریاضی فراهم آمد. در این فرصت فعالیتی شامل کارگروهی و تفکر منطقــی در قالب روش فعال انجام گرفت و میزان تأثیر این تلفیق بررسی شد. در این مقاله سعی شــده اســت روش آموزش تلفیقی مطالعه شده جهت استفاده در سایر کلاس‌های آموزشی ارائه شود.

اهداف

در فعالیــت مورد نظــر، روش فعــال، روش تفکر منطقی و کار گروهی به‌صورت همزمان اجرا شد. هدف از تلفیق روش فعال با کارگروهی و تفکر منطقی، تقویت مهارت‌های فکری و اجتماعی، افزایش بازدهی یادگیری و افزایش قــدرت تحلیل دانش‌آمــوزان حین آموزش ریاضی، و هم‌چنین کاهش نقایص ناشــی از اســتفاده مجزا از هر روش است.

تعاریف

روش فعال

در روش فعال، هدف این اســت کــه دانش‌آموزان در فراینــد آمــوزش، فعال و پرجنب و جوش باشــند. برخلاف روش‌های منفعل که «معلم‌محور» است روش فعال «دانش‌آموزمحور» است، یعنی دانش‌آموز در امر یادگیری شــرکت فعال دارد، با مسائل مواجه می‌شود، راجــع به حل آن‌ها فکر می‌کند و با راهنمایی معلم به حل آن‌هــا می‌پردازد. در این روش دانش‌آموز در حین کار، خودش به مفاهیم پی می‌برد. در این صورت است که به حل مســئله‌ها علاقه‌مند می‌گردد. موفقیت این روش، به مهارت معلم و تسلط او به درس بستگی دارد. در این روش، دانش‌آموز از طریق حل مســئله در طی فرایند آموزش به‌تدریج به مفاهیم پی می‌برد و نسبت به مطالب احساس علاقه و مالکیت می‌کند. هم‌چنین در او حس اعتماد به نفس تقویت می‌شود، چون در به‌دست آوردن نتیجه‌ها و کشــف قواعد سهیم است. در جریان کار فعال، دانش‌آموز رشــد می‌کند و تفکر منطقی‌اش تقویــت می‌شــود. در این روش، برای به‌دســت آوردن نتیجه بهتر لازم اســت سه اصل زیر در آموزش مطالب مورد استفاده قرار گیرد.

۱. اصل یادگیری فعال: در این اصل کشف موضوع یــا زیرموضوع توســط خــود دانش‌آموز ضمــن انجام فعالیت‌های مناسب تعریف می‌شود. اگر دانش‌آموز در تنظیم صورت مســئله‌هایی که باید حل کند، شرکت داشــته باشــد، خیلی فعال‌تر خواهد بود. بنابراین لازم است معلم شرایطی را فراهم آورد که دانش‌آموز بتواند مسائل خودش را طرح کند.

۲. اصــل بهتریــن انگیزه: در این اصــل معلم باید توجه خود را به انتخاب مسئله و ارائه هرچه بهتر آن به دانش‌آموزان معطوف کند. مسئله باید نه‌تنها از موضع معلم، بلکه از موضع شــاگرد هم، جالب باشد. وقتی از دانش‌آموز خواسته می‌شــود که نتیجه را حدس بزند، ولو بخشی از آن را، و او فرضیه‌ای ارائه می‌کند، در واقع خود را به آن وابسته کرده است، بنابراین با اشتیاق، به سرنوشت مسئله و کار کلاس علاقه‌مند می‌شود. [۴]

۳. اصل تسلســل مرحله‌ها: در این مرحله بررسی، پژوهش و فراگیری اهمیت می‌یابد. در واقع دانش‌آموز براساس دو اصل قبلی به یادگیری ترغیب می‌شود.

بنابراین ســه فاز یادگیری در عمــل و همزمان با آموزش در کلاس پیاده می‌شــود؛ فــاز اول: دانش‌آموز حــدس و گمان می‌زند. فاز دوم: آن را به‌صورت کلمات درمی‌آورد و فاز ســوم: برای تثبیت یادگیری تمرین و ممارست انجام می‌شود. [۴]

تفکر منطقی

تفکر منطقی روشی است که مغز را ورزش می‌دهد و در آن شکستی وجود ندارد؛ زیرا هر شکستی بخشی از پیروزی بعدی خواهد بود. همچنین دانش‌آموز با نحوه تفکر، توانایی‌ها و ضعف‌هایش آشنا می‌شود و گام به گام درصدد ارزشــیابی آن‌ها برمی‌آید. در این مبحث از سه نوع طریقهٔ تفکر؛ تفکر مستقیم، تفکر مرحله‌ای و تفکر راهبردی صحبت می‌شود. در تفکر مستقیم گام‌هایی که برای حل مسئله برداشته می‌شود همگی آشکار نیست و به‌نظر می‌رســد راه‌حل با یک جرقه ناگهانی در ذهن پیدا می‌شود. در فکر کردن مرحله‌ای، راه‌حل از طریق گام‌های پیش‌رونده پیدا می‌شــود و حتماً لازم نیست گام برداشته شده منطقی باشد، با این حال گام‌ها یکی پس از دیگری برداشــته می‌شوند. در تفکر راهبردی از بین گام‌های موجود بهترین انتخاب می‌شود، لذا هدف انتخاب ســازگارترین گام موجود در رســیدن به حل مسئله است [۶].

کارگروهی

کارگروهی یکی از مؤثرترین روش‌های انجام فعالیت است که براساس قوانین و دستورالعمل‌ها اجرا می‌شود، به‌عنوان مثال قوانین در ســطح اول شامل؛ ورود آرام و

سریع به گروه، ماندن در گروه تا زمان اتمام کار، دانستن وظیفه خود، سطح دوم شامل نوبت گرفتن، نظر خود را بیان کردن، از نظر خود با دلیل دفاع کردن، تشویق به مشارکت، قدردانی از مشارکت دیگران، تمرکز تیم روی وظیفه‌اش و در سطح سوم توضیح دادن، تفسیر نظرات، تحلیل روند کارگروه خود، به اتفاق نظر رسیدن و نهایتاً انتقاد از نظر نه از فرد است. با اجرای این روش به‌تدریج وابستگی مثبت بین افراد، مسئولیت‌پذیری، تأکید بر وظیفه و ادامهٔ آن، پرورش مهارت‌های اجتماعی و مساعدت دوجانبه در افراد گروه شکل می‌گیرد. یکی از ترفندهای اجرای کارگروهی، به صحبت آوردن و بیان نظرات دانش‌آموزان با کمک روش «شکستن یخ[1]» است [۹، ۸].

روش کار

قبل از شروع هر کلاس لازم است سطح اطلاعات دانش‌آموزان معلوم شود و متناسب با آن طرح کلاس نوشته و تعداد جلسات لازم تعیین گردد. حل یک مسئله می‌تواند موضوع اصلی کلاس باشد به‌نحوی که با سطح اطلاعات دانش‌آموزان هم‌خوانی داشته باشد تا دانش‌آموزان با یادآوری برخی از مباحث از پیش‌آموخته، توانایی صحبت در کلاس را داشته باشند [۳]. در واقع مسئله بایستی به‌گونه‌ای مطرح شود که در کنار ایجاد انگیزه جهت پیگیری و یادگیری، زمینهٔ مشارکت و صحبت دانش‌آموزان در کلاس را فراهم آورد، تا یک یا چند نفر متکلم‌های اصلی کلاس نشوند [۴].

در این مرحله با کمک دانش‌آموزان، باید موضوع اصلی به زیرموضوع‌های مختلف تقسیم شود. در واقع این لحظه، اولین زمانی است که دانش‌آموزان در کلاس شرکت می‌کنند لذا نحوه برخورد مدرس با پیشنهادهای دانش‌آموزان می‌تواند در ادامه روند کلاس بسیار مؤثر باشد. با برقراری صمیمیت در کلاس و حتی بین افراد گروه، اصل شکستن یخ اجرا می‌شود و لذا ترس دانش‌آموز برای بیان نظراتش کاهش می‌یابد. در ادامه برای درک بهتر و جهت بخشی به صحبت‌های دانش‌آموزان، سؤالاتی توسط مدرس مطرح شود تا در کلاس ضمن دادن فرصت تفکر به دانش‌آموز، این امکان را به او بدهد که به تفکرهایش جهت داده و با هم‌گروهی‌هایش بهتر مشورت کند. در این میان باید از هر فرصتی برای عینی و عملی نمودن موضوعات کمک گرفته شود تا ضمن فعالیت بیشتر دانش‌آموز سر کلاس و رفع خستگی او، مفاهیم ذهنی به انگاره‌های عینی تبدیل شوند. در این جریان دانش‌آموز گام به گام ضمن گذر از کار انفرادی به گروهی، از تفکر مستقیم و انفرادی بر موضوع، تفکر مرحله‌ای را نیز تجربه نمودند [۸، ۶].

از بین پیشنهادهای دانش‌آموزان، جواب‌هایی را که به پیشرفت کلاس کمک می‌کند انتخاب کنید و سعی کنید با برقراری تسلسل مراتب یا شیوه‌هایی چون پیکان عمودی، ارتباطی بین جواب‌ها ایجاد کنید. این کار، پیشرفت کلاس و درک ارتباط مطالب برای دانش‌آموزان را راحت‌تر می‌کند. اگر سخنان دانش‌آموزان بیشتر به‌صورت نجوا باشد، قوانینی بر مبنای کارگروهی گذاشته شود. برخی از این قوانین بلند صحبت کردن و سکوت به هنگام صحبت سایر دانش‌آموزان است [۹، ۸، ۷].

یکی از مراحل مقدماتی تحقیق و آموزش، «طرح سؤال» است. نباید ترسی از بابت طرح سؤال در دانش‌آموزان ایجاد شود، تقسیم موضوع تا جایی ادامه می‌یابد که در کلاس نتیجه شود طرح سؤال کافی است و باید به‌دنبال جواب بود و لذا با فرایند معکوس از انتهای مطالب شروع کرده و ادامه دهید تا به موضوع ابتدای کلاس منتهی شوید. در این مسیر لازم نیست هر چیزی تعریف شود چون برخی اوقات، کلماتی مطرح و پیشنهاد می‌شود که کل کلاس جواب مورد قبولی برای آن ارائه نمی‌دهد، چنین کلماتی به مطالعه و بحث بیشتری نیاز دارند، می‌توان این کلمات را به‌عنوان تحقیق مطرح نمود و در مورد آن‌ها در ساعات اضافی کلاس صحبت کرد [۱۰، ۶]. اغلب چنین موضوعاتی در جلسات بعدی بسیار مؤثر هستند.

از هر فرصت برای «عینیت» بخشیدن به موضوع استفاده نمایید. در این راستا از ابزارهای آموزشی استفاده کنید؛ ابزارهایی مثل نقاله، پرگار و خط‌کش با هدف ارتقای توانایی ترسیم شکل دانش‌آموزان و حل زیر مسئله‌ها بسیار مفید است. از دانش‌آموزان بخواهید تا با رسم جدول نظام‌دار و نوشتن جواب‌ها در آن، خودشان به ارتباط‌های ممکن بین جواب‌ها پی ببرند.

نتیجه‌گیری

روش پیشنهادی، در خانه ریاضیات اصفهان، با موضوع «چندضلعی‌های منظم» اجرا شد. در این دوره، تمامی راه‌کارهای فوق به‌کار رفت. ایجاد فضای عینی در یادگیری مؤثر، به‌علاوه استفاده از روش فعال ضمن تقویت روحیه مشارکت و کارگروهی باعث تفهیم بهتر

موضوع می‌شـــد. در فضای فوق که تمرینی برای انجام کارگروهـــی بود، دانش‌آموزان از ابتدا تا انتهای جلســـه مشـــترکاً با پای‌بندی بر قوانین تنظیم شده در کلاس رونـــد کار انفرادی به کارگروهی را طی کردند به‌نحوی کـــه به‌نظر خودشـــان در انتهـــای کلاس نتیجه‌گیری و جمع‌بنـــدی مطالب برای اعضا آســـان‌تر شـــده بود. با پیاده‌ســـازی مقوله‌های مورد نظـــر، دانش‌آموزان در مهارت‌هایی چون طرح سؤال، پاسخ‌گویی ریاضی‌وار و ساده‌سازی مســـئله ممارست و تمرین‌هایی انجام داده بودند.

چون حل مسئله با رسم توأم شد ضمن رفع حالت خستگی ناشی از کلاس، دانش‌آموزان بر نحوهٔ استفاده از این ابزارهای ابتدایی حل مســـئله تســـلط بیشتری یافتند. روند پاســـخ‌گویی معکوس برای سؤالات مطرح شده باعث شد تا ضمن پاسخ‌گویی بهتر به سؤالات، فهم جواب‌های یافت شده برای سؤالات از سوی دانش‌آموزان آسان‌تر شـــود و ارتباط بین مطالب ریاضی بهتر درک گردد. به‌علاوه، تمرینی بـــرای تعمیم این روش جهت سایر موضوعات از ســـوی دانش‌آموزان بود. استفاده از جدول نظام‌دار باعث تسریع روند پیشرفت دانش‌آموزان و نیز فهم بهتر مســـئله شد. در جریان این روش، تکیه دانش‌آموز بر معلم و همکلاسی‌هایش به‌تدریج کمرنگ شد به نحوی که در انتهای دوره، دانش‌آموزان به تنهایی و بدون تأیید معلم به‌خوبی صحت موضوعی را بررسی و قضاوت مناسبی دربارهٔ جواب‌ها داشتند.

از دیگر نتایج به‌دســـت آمده، تلفیق روش فعال با «هنر سریع فکر کردن» بود که باعث شد تا کمبود زمان به‌خصوص در ابتدای کار با روش فعال به حداقل برسد. این روش می‌تواند گام‌به‌گام تفکر مســـتقیم و مستقل را به تفکر مرحله‌ای و گروهی و حل راهبردی مســـائل جهـــت دهد. بنابراین حین تفکر بر موضوع پیشـــرفت ســـریع‌تر خواهد بود. زیرا کار گروهی مناسب از طریق بحـــث روی مطالب در مرحله اول در گروه و در مرحله بعد در کلاس باعث شـــد تا مطالب و تعاریف نامناسب در مرحله گروهی حذف یا تصحیح و سپس در کلاس مطرح شوند. با استفاده از تکنیک‌های کار گروهی نقش دانش‌آموز در کلاس بیشتر شد و تمرکز معلم در کلاس بیشـــتر در مدیریت زمان متناسب با پیشرفت کلاس و نیاز تأمل بر مطالب صرف می‌شـــد. در این مقاله شاید به واســـطهٔ موضـــوع و روند کار به تمرکز بیشـــتری بر مقولهٔ عینیت نیاز بود. در واقع بستگی به موضوع، نحوهٔ اجرا، زمان‌بندی کلاس و رفتار دانش‌آموزان، تمرکز بر هر یـــک از مقوله‌های عینیت، ذهنیت متفاوت خواهد شد. با تلفیق روش‌های فعال و جهت‌دهی تفکر توأم با کارگروهی، تمرکز بر موضوعات و مدیریت زمان آسان‌تر شد، ضمن آنکه مهارت‌های ارتباط جمعی، فهم و درک مســـائل و مهارت‌های اخلاقی دانش‌آموزان هم رشـــد یافت.

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر علی رجالی که مرا در زمینهٔ تکمیل و تصحیح این مقاله راهنمایی نمودند تشـــکر نمایم. همچنین از تمامی همکارانم در خانه ریاضیات اصفهان که در راستای اجرای این طرح مرا یاری نمودند سپاس‌گزارم.

پی‌نوشت‌ها

1. Ice Break

منابع

۱. بهین آیین، ن. **ماهیت ریاضیات، چگونگی آموزش و نقش آن در فراینـــد تفکر**، مجله رشـــد آموزش ریاضی، شـــماره ۷۱، ۱۳۸۲، صفحهٔ ۴۵- ۵۰.
۲. شمس اسفندآباد، ح. **روان‌شناسی تفاوت‌های فردی**، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها، چاپ اول، ۱۳۸۰.
۳. لوراین، ه. **اصل یادگیری= حافظه+ اطلاعات**، ترجمه احمد میرعابدینی، تهران، چکامه، چاپ اول، ۱۳۷۵، صفحهٔ ۳۳- ۲۵.
۴. رحمانـــی، م. **آمـــوزش ریاضـــی و حـــل مســـئله**، مشـــهد، قائم‌المهدی، چاپ اول، ۱۳۸۳.
۵. تابـــش، ی. حاجی‌بابایی، ج. رســـتگار، آ. **آموزش هنر حل مســـئله** (ریاضیات تکمیلی)، چاپ اول، ۱۳۷۹، صفحهٔ ۸۰- ۳ و ۳۰۵- ۲۳۵.
۶. دوبونو، ا. **هنر ســـریع فکر کردن**، ترجمه مزدا صدری‌افشـــار، اختران، چاپ ســـوم، ۱۳۸۷، صفحه ۱۴- ۹ و ۱۲۲، ۹۹، ۸۸، ۵۳، ۲۹، ۲۲ و ۱۳۹- ۱۳۵
7. Tuckman’s Model of Group Development, ATHERTON J S(2003) Learning & Teaching, online: http://www.dmu.ac.uk/~jamesa/ teaching/ group development.htm
8. Group dynamic from Wikipedia, http:// en.wikipedia.org/wiki/group dynamics
9. Index to Group Activities, Games, Exercises & Initiatives(2004), http://wilderdom.edu
10. Reuben Hersh, Independent Thinking. The College Math. J.,34(2003)

آزمون‌نامه

محسن فرخی، دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی
دانشگاه پیام‌نور کرمان و دبیر ریاضی شهرستان نهبندان

چند وبگاه مرجع دربارهٔ آزمون تیمز

چکیده

با توجه به نتایج ملی آزمون‌های مطالعات تیمز مشــاهده می‌شــود که جایگاه دانش‌آموزان ایرانــی در کلیــهٔ ادوار این آزمون همــواره از میانگین بین‌المللی پایین‌تر بوده اســت. این نتایج ضعیف نیازمند تحقیق و پژوهش‌های فراوان برای علت‌یابی موضوع است. از آنجا که هر پژوهشی نیازمند منابع و اطلاعات است بر آن شدم برخی سایت‌های مفید در این زمینه را که می‌توانند برای پژوهشگران این عرصه راهگشا باشند معرفی نمایم. از این جهت مقاله حاضر از نوع نظری- کاربردی می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: آزمون تیمز، تیمز، وبگاه مرجع

مقدمه

نظام‌هــای آموزشــی در همه جــا از ارکان مهم توسعهٔ جوامع به‌شمار می‌آیند. اصولاً جوامع، اهداف و آرمان‌های خود را از طریق تأسیس این نظام‌ها دنبال می‌کنند. با ایــن تعبیر، آموزش‌وپــرورش را می‌توان الگــوی کلی نهادها و مؤسســات موجــود در جامعه قلمداد نموده، و یا رشد و توسعهٔ جوامع را در گرو رشد و توســعهٔ نظام‌های آموزشی ممکن دانست (کیامنش و خیریه، ۱۳۷۹).

انجمن بین‌المللی ارزشــیابی پیشرفت تحصیلی (IEA) از مؤسســات پژوهشــی معتبری اســت که با سابقهٔ بیش از نیم قرن و انجام ده‌ها مطالعهٔ بین‌المللی در موضوعــات مختلف آموزشــی و جلب مشــارکت کشــورها از سراسر جهان گام‌های مؤثری را در زمینه ارتقا و بهبود ســطح یادگیری برداشــته است. یکی از مهم‌ترین و گســترده‌ترین مطالعات انجام شده توسط IEA، مطالعهٔ بین‌المللــی روندهای آموزش ریاضی و علوم(TIMSS) است که تاکنون بیش از شصت کشور در آن شرکت کرده‌اند.

تاریخچه‌ای مختصر از آزمون تیمز

در ســال ۱۹۵۷ میلادی، با پرتاب نخستین قمر مصنوعی به فضا در اتحاد جماهیر شوروی، امریکایی‌ها احســاس عقب‌ماندگی کردنــد. از آن پس در جامعهٔ آمریکا توجهات زیادی به امر آموزش معطوف شد چرا کــه آن‌ها علت عقب‌افتادگی خود در رقابت فضایی را

ضعف در امر آموزش مدرسه‌ای دیدند. آغاز «دوران ریاضیات جدید» و همچنین «رجعت به اصول» گواهی است بر این مدعا.

در همان زمان ویلیام وال، نخستین رئیس انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی (IEA) در فاصله سال‌های ۱۹۵۸ تا ۱۹۶۲ تلاش خود را برای انجام مطالعات بین‌المللی آغاز کرد و در سال‌های ۶۷-۱۹۵۹ اولین مطالعه بین‌المللی ریاضی (First International Mathematics Study) (FIMS) را با کمک یونسکو انجام داد. انجمن، به‌علاوه، در سایر حوزه‌های آموزشی هم، در سال‌های ۷۳-۱۹۶۶ اولین مطالعهٔ بین‌المللی علوم (First International Science Study)، در سال‌های ۸۹-۱۹۷۶ دومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضی(SIMS) (Second International Science Study) و در سال‌های ۸۹-۱۹۸۰ دومین مطالعهٔ بین‌المللی علوم (SISS)(Second International Science Study) را طراحی و اجرا کرد. همچنین از سال ۱۹۹۵ به بعد به‌طور منظم هر ۴ سال یک بار دو موضوع ریاضی و علوم با هم و همزمان مورد آزمون بین‌المللی قرار گرفته که به آزمون تیمز(TIMSS) (Third International Mathecmatics and Science Study) مشهور شده است.

تعداد کشورهای شرکت‌کننده در مطالعات انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی در هر دوره (۲۰۱۱،۲۰۰۷،۲۰۰۳،۱۹۹۹،۱۹۹۵) متفاوت بوده است. در مطالعات اخیر علاوه بر کشورهای اروپایی، امریکای شمالی و جنوب شرقی آسیا چندین کشور از خاورمیانه، آسیای مرکزی و آفریقا نیز شرکت داشته‌اند.

از سال ۲۰۰۳ به بعد نام «سومین مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم» به «مطالعه بین‌المللی روند ریاضی و علوم» (Trend International Mathematics and Science Study) تغییر نام داد. شایان ذکر است که به دلیل یکسان بودن حرف اول دو کلمهٔ سومین و روند در زبان انگلیسی (Third &Trend) در علامت اختصاری مطالعه (TIMSS) تغییری به‌وجود نیامد.

مطالعه تیمز روی سه نوع جمعیت صورت می‌گیرد: جمعیت اول، دانش‌آموزان پایهٔ چهارم(چهارم ابتدایی) جمعیت دوم، دانش‌آموزان پایهٔ هشتم (پایهٔ سوم راهنمایی) جمعیت سوم، دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم (سال آخر دورهٔ دبیرستان و فنی حرفه‌ای).

هدف از مطالعات تیمز ارزیابی عملکرد دانش‌آموزان، بهبود فرایندهای یاددهی و یادگیری ریاضی و علوم و فراهم نمودن اطلاعات در مورد پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در ارتباط با انواع متفاوت برنامه‌های درسی، اقدامات آموزشی و محیط مدرسه بر عملکرد دانش‌آموزان است.

جایگاه ایران در تیمز

کشور جمهوری اسلامی ایران به‌منظور ارزیابی و بهبود نظام آموزشی خود از سال ۱۳۷۰ برابر با ۱۹۹۱ میلادی رسماً همکاری خود را با انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی آغاز کرده و تاکنون در مطالعات دوره‌های ۱۹۹۵، ۱۹۹۹، ۲۰۰۳، ۲۰۰۷، ۲۰۱۱ و تیمز پیشرفته، ۲۰۰۸، شرکت کرده است و هم‌اکنون در حال تدارک و اجرای آزمون تیمز ۲۰۱۵ می‌باشد.

نتایج آزمون‌های تیمز در دوره‌های مختلف آزمون به شرح زیر است:

درس - پایه	رتبه ایران در تیمز ۱۹۹۵ / تعداد کل کشورهای شرکت‌کننده	رتبه ایران در تیمز ۱۹۹۹ / تعداد کل کشورهای شرکت‌کننده	رتبه ایران در تیمز ۲۰۰۳ / تعداد کل کشورهای شرکت‌کننده	رتبه ایران در تیمز ۲۰۰۷ / تعداد کل کشورهای شرکت‌کننده	رتبه ایران در تیمز ۲۰۱۱ / تعداد کل کشورهای شرکت‌کننده
ریاضیات پایه چهارم	۲۵/۲۶	-	۲۲/۲۵	۲۸/۳۶	۴۳/۵۰
علوم پایه چهارم	۲۵/۲۶	-	۲۲/۲۵	۲۷/۳۶	۳۸/۵۰
ریاضیات پایه سوم راهنمایی	۳۷/۴۱	۳۳/۳۸	۳۴/۴۶	۳۴/۴۹	۳۲/۴۲
علوم پایه سوم راهنمایی	۳۸/۴۱	۳۱/۳۸	۳۱/۴۶	۲۹/۴۹	۲۲/۴۲

رتبه دانش‌آموزان ایران در دروس ریاضیات و علوم در دو پایهٔ چهارم ابتدایی و سوم راهنمایی در سال‌های ۱۹۹۵، ۱۹۹۹، ۲۰۰۳، ۲۰۰۷ و ۲۰۱۱

با نگاهی گذرا به نتایج آزمون تیمز واضح است که دانش‌آموزان ایرانی عملکرد ضعیفی در این آزمون داشته‌اند و با توجه به اینکه نمونه انتخابی از سوی انجمن بین‌المللی پیشرفت تحصیلی معرف کل جامعه دانش‌آموزی کشور است و نیز با عنایت به جایگاه برجسته و ممتاز ایران در المپیادهای علمی لازم است پژوهش‌هایی در این خصوص صورت گیرد تا علت این ضعف مشخص گردد و سهم هر یک از عوامل تأثیرگذار بر عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان تعیین گردد و معلوم شود چگونه می‌توان درصدد برطرف کردن نقاط ضعف برآمد. اما همان‌طور که مسلم است از مهم‌ترین نیازهای یک محقق و پژوهشگر اطلاعات است، اطلاعاتی که بتوان با کمک آن نتایج ارزشمندی

در رابطه با نظام آموزش کشور به‌دست آورد.

در همین راســتا بر آن شــدیم تا برخی از مهم‌ترین و کامل‌ترین منابع و وبگاه‌هایی را که اطلاعات مربوط به آزمون‌های تیمز و پرلز را در ادوار مختلف در بر دارند معرفی نماییم تا از این طریق زمینه برای تحقیق و پژوهش افراد علاقه‌مند فراهم آید.

۱. وبگاه انجمن بین‌المللی پیشرفت تحصیلی (IEA)

نشــانی این وبگاه عبارت است از (www.iea.nl). این ســایت مرجعی است کامل از کلیه اطلاعات مربوط به آزمون‌های بین‌المللی از جمله تیمز و پرلز که توسط انجمن IEA برگزار شده است.

در این ســایت قســمت‌های متفاوتی از جمله مطالعات انجام شــده، کتاب‌ها و مقالات منتشر شده پیرامون آزمون‌ها و نیز کنفرانس‌های برگزار شده می‌باشد. اما مهم‌ترین قسمتی که می‌توان بدان اشاره کرد سربرگ data است که در آن می‌توان به کلیهٔ داده‌های مربوط به آزمون‌های برگزار شده دست یافت. داده‌هایی شامل:

۱. پاسخ دانش‌آموزان کشورهای شرکت‌کننده به سؤالات؛
۲. پاسخ دانش‌آموزان کشورهای شرکت‌کننده به پرسش‌نامه‌های دانش‌آموز؛
۳. پاسخ دبیران کشورهای شرکت‌کننده به پرسش‌نامه‌های معلم؛
۴. پاسخ مدیران مدارس کشورهای شرکت‌کننده به پرسش‌نامه‌های مدیران مدرسه.

گفتنی است که در آزمون تیمز علاوه بر سؤالاتی که دانش‌آموزان در دو درس ریاضی و علوم پاسخ می‌دهند، ســه نوع پرســش‌نامهٔ دانش‌آموز، مدیر مدرسه و دبیر مربوطه نیز باید پاســخ داده شود. این پرسش‌نامه‌ها حاوی مطالبی پیرامون وضع اقتصادی خانواده، امکانات مدرسه، سابقهٔ دبیر و ... است که خود منبع بسیار مناسبی برای تحقیق و پژوهش است.

۲. وبگاه مرکز ملی مطالعات بین‌المللی تیمز و پرلز

نشانی این وبگاه http://timsspirls.ir می‌باشد. این وبگاه شامل قسمت‌هایی مانند انتشارات، پژوهش‌ها و گزارش‌های تحلیلی است. یکی از بخش‌های مفید این وبگاه پرسش‌نامه‌های دبیر، دانش‌آموز و مدیر مدرسه است که به زبان فارسی نیز قابل دریافت است.

۳. وبگاه پژوهشگاه مطالعات آموزش‌وپرورش

نشـــانی این وبگاه http://www.rie.ir است و شـــامل بخش‌های مفیدی از جمله طرح‌های در حال اجرا، پایان‌نامـــه، مقاله و کتابخانه می‌باشـــد. همچنین در قســـمت «مرکز ملی مطالعات تیمز و پرلـــز» آخرین اخبار

گزارش‌ها و کارگاه‌های آموزشی پیرامون تیمز و پرلز قابل دسترسی است.

۴. در ایـــن وبگاه به هـــر دوره از آزمون‌های تیمز نیز یک وبگاه فرعی اختصاص یافته است که شامل اطلاعات، تحقیقات و گزارش‌های منتشر شده پیرامون آزمون مورد نظر می‌باشد. این وبگاه‌های فرعی عبارت‌اند از:

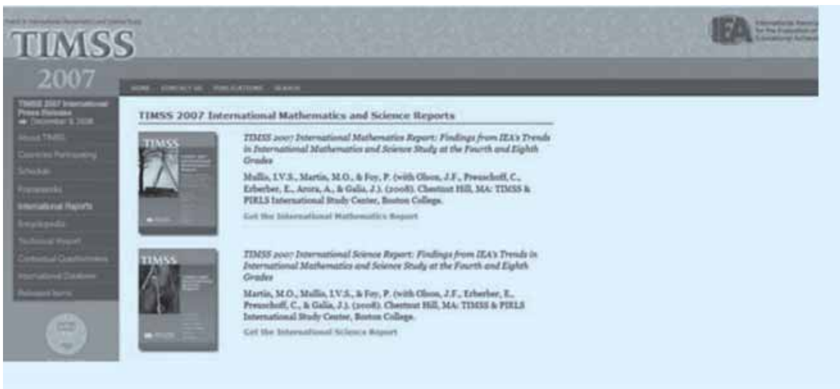
الف. تیمز ۱۹۹۵: http://timss.bc.edu/timss1995.html

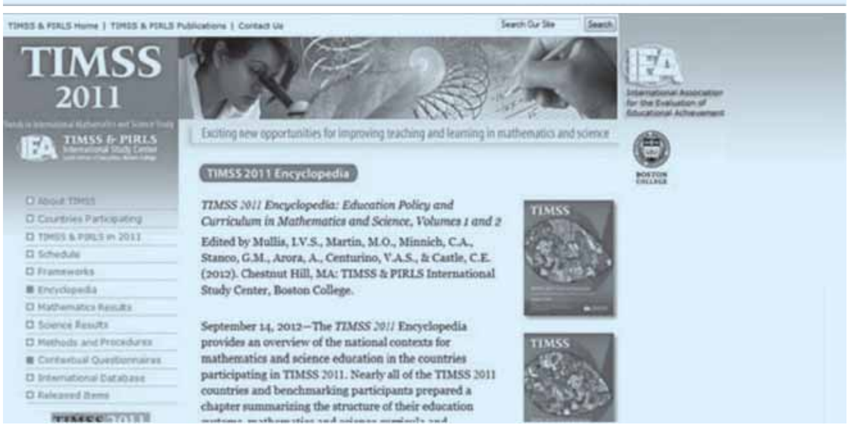
ب. تیمز ۱۹۹۹: http://timss.bc.edu/timss1999.html

ج. تیمز ۲۰۰۳ : http://timss.bc.edu/timss2003.html

د. تیمز ۲۰۰۷: http://timss.bc.edu/timss2007.html

ه. تیمز ۲۰۱۱: http://timss.bc.edu/timss2011.html





در این مجموعه سایت اطلاعات مفیدی به لحاظ تحقیق و پژوهش موجود است که بیان همهٔ آن‌ها از حوصله این بحث خارج است، اما به‌عنوان نمونه می‌توان به بخش encyclopedia اشاره کرد که شامل توضیحاتی پیرامون نظام‌های آموزشی هر یک از کشورهای شرکت‌کننده در آزمون است.

منابع

۱. احمدی، حمیده (۱۳۹۱). تحلیل عوامل مرتبط با پیشرفت تحصیلی ریاضیات دانش‌آموزان ایرانی پایه دوازدهم شرکت‌کننده در مطالعه تیمز پیشرفته ۲۰۰۸. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان.

۲. استیگلر، جیمز و جیمز هیبرت. (۱۳۹۰). **شکاف آموزشی؛** بهترین ایده‌ها از معلمان جهان برای بهبود آموزش در کلاس درس. مترجمان: دکتر محمدرضا سرکارآرانی، علی‌رضا مقدم، انتشارات مدرسه، تهران.

۳. الماسی، علی محمد. (۱۳۷۵). **آموزش‌وپرورش تطبیقی**. رشد، چاپ ششم۸۲، تهران.

۴. بیابانگرد، اسماعیل. (۱۳۸۸) **روش‌های تحقیق در روان‌شناسی و علوم تربیتی** (جلد اول). انتشارات نشر دوران، تهران.

۵. بیرمی‌پور، علی و محمدجواد لیاقت‌دار. (۱۳۸۸). بررسی کیفیت تدریس درس ریاضی پایه چهارم دبستان شهر اصفهان به منظور ارائه راهکارهایی برای بهبود عملکرد دانش‌آموزان در آزمون بین‌المللی تیمز. پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی.

۶. پهلوان صادق، اعظم. (۱۳۸۴). ارتباط پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان دختر و پسر ایرانی شرکت‌کننده در مطالعه تیمز ۲۰۰۳ با متغیرهای فردی و خانوادگی. دانشگاه تربیت معلم، تهران.

بازتاب

نقدی بر نقد

محمد شیرچیان
دبیر ریاضی، ناحیه ۲ اصفهان

اشاره

در شماره ۱۱۵ مجله (بهار ۹۳) نقدی بر کتاب ریاضی ۲ به قلم آقای مهدی میرزافام منتشر شد. در ادامه، مطلب ارسالی یکی از خوانندگان مجله آمده است. نگارنده با بازتاب بر آن، راه‌حل کامل حالت سوم مسئله را نوشته و با تأکید بر درست بودن همه حالت‌ها، مسئله فصل ۷ را بدون ابهام دانسته است. لازم به یادآوری است که در نقد منتشر شده «برداشت‌های متفاوت ناشی از مشخص نشدن نوبت نشستن دانش‌آموزان» و روش‌های معلمان برای حل این مسئله موردنظر است و به اعتقاد نویسندهٔ نقد، «حل این مسئله، سخت و حداقل خارج از توان دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان است». آقای میرزافام ادعایی مبنی بر متفاوت بودن جواب در حالت‌های مختلف ندارد بلکه دشواری محاسبهٔ چنین مسئله‌ای را برای دانش‌آموزان مورد تأکید قرار داده که راه‌حل آقای شیرچیان تأییدی بر این دشواری است.

مجله رشد آموزش ریاضی ضمن تشکر از دقت‌نظر آقای شیرچیان و نقد ایشان بر نقد آقای میرزافام، از کلیهٔ خوانندگان محترم دعوت می‌نماید نقطه‌نظرات خود را پیرامون هریک از مقالات، نقدها، دیدگاه‌ها و ... برای مجله ارسال کنند.

مقدمه

همکار محترمی در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی (دورهٔ ۳۱ ـ بهار ۹۳) در صفحهٔ ۵۶، نقدی بر یک مسئله، از فصل ۷ کتاب ریاضی ۲ نوشته بودند. در نقدِ ایشان اشتباه محاسبه‌ای باعث شده بود که حالات مختلف مسئله را به چالش بکشد ... در حالی‌که با توضیحات زیر ثابت می‌کنیم که تمام حالات مختلف به یک جواب واحد منجر می‌شوند و آن مسئله هیچ‌گونه ابهامی ندارد.

.... قبل از ورود به مسئله توجه همکاران محترم را به این نکته جلب می‌کنم که اصولاً مسائل آنالیز ترکیبی بر سه دسته‌اند: جابه‌جایی‌ها، انتخابات، جابه‌جایی و انتخاب درهم. نکتهٔ بسیار مهم این است که جابه‌جایی و انتخابِ درهم همان مسئلهٔ ترتیب است، یعنی:

$$\binom{N}{R}\times R! = \frac{N!}{(N-R)!} = P_{(N,R)}$$

نکتهٔ قابل توجه دیگر این است که فرمول ترتیب، یعنی $P_{(N,R)}$ مربوط به یک حالت خاص بوده و اگر انتخاب مرکب باشد جواب‌گوی مسئله نخواهد بود. برای روشن شدن مطلب به دو مثال زیر توجه فرمائید:

مثال ۱: به چند طریق می‌توان یک کلمهٔ ۵ حرفی، بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنی با استفاده از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی تشکیل داد؟

حل: ابتدا ۵ حرف انتخاب و سپس جای آن‌ها را با هم عوض می‌کنیم یعنی:

$$\binom{۲۶}{۵}\times ۵! = P_{(۲۶,۵)}$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان، با استفاده از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی، یک کلمهٔ ۵ حرفی بدون تکرار حروف تشکیل داد، به‌طوری‌که کلیهٔ کلمات شامل دو حرف صدادار و سه حرف بی‌صدا باشند؟

حل: ابتدا دو حرف صدادار از بین ۵ حرف صدادار را انتخاب می‌کنیم؛ سپس سه حرف بی‌صدا از بین ۲۱ حرف بی‌صدا را انتخاب می‌کنیم و آنگاه جای این ۵ حرف را با هم عوض می‌کنیم؛ یعنی:

$$\binom{۵}{۲}\binom{۲۱}{۳}\times ۵!$$

به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود در مثال دوم انتخاب مرکب است (یعنی فقط یک گروه انتخاب نداریم و مسئله شامل دو گروه انتخاب می‌باشد و فرمول ترتیب به هیچ‌وجه جوابگو نیست)

بنابراین توصیه می‌شود برای دوری از اشتباه، انتخاب را جدا و جابه‌جائی را نیز جدا انجام داده و نتایج را طبق اصل ضرب (اصل شمارش) در هم ضرب کنیم.

باز برای دوری از اشتباه به افراز زیر توجه کنید:

۳ مهرهٔ قرمز شماره‌دار و ۲ مهرهٔ سفید شماره‌دار در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد و در کنار هم قرار داد؟ (مهره‌ها مختلف و شماره دارند)

(راه اوّل): ســه مهره انتخــاب و جای آن‌ها را با هم عوض می‌کنیم: یعنی:

$$\binom{٥}{٣}\times ٣! = P_{(٥,٣)} = ٦٠$$

(راه دوّم): مســئله را بــه حالت‌هــای مختلف افراز می‌کنیم:

(یکی قرمز و دو تا سفید) یا (دو تا قرمز و یک سفید) یا (هر سه مهره قرمز)

$$\left[\binom{٣}{٣}\times ٣!\right]+\left[\binom{٣}{٢}\binom{٢}{١}\times ٣!\right]+\left[\binom{٣}{١}\binom{٢}{٢}\times ٣!\right]=٦٠$$

به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود جواب‌ها یکسان است ولی فرمول ترتیب جوابگوی راه دوم نیست.

اکنون به نقد مسئلهٔ درج شده در مجله می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که کلیهٔ حالات مطروحه به یک جواب واحد منتهی خواهند شد و هر حالت یک افراز از حالت اول است.

صورت مسئله: اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و هر ردیف شــامل ۱۰ صندلی باشد، مشخص کنید به چنــد طریق ۶ دانش‌آموز اولــی و ۳ دانش‌آموز دومی و ۴ دانش‌آمــوز ســومی می‌توانند روی آن‌ها بنشــینند به‌طوری‌کــه اولی‌ها در ردیــف اول و دومی‌ها در ردیف دوم باشند؟

راه اوّل: از ردیف اول ۶ صندلی انتخاب می‌کنیم و دانش‌آموزان اول را روی آن‌ها جابه‌جا می‌نماییم، سپس از ردیف دوم ۳ صندلی انتخاب می‌کنیم و دانش‌آموزان دوم را روی آن‌هــا جابه‌جا نموده، در آخر از ۱۱ صندلی باقی‌مانده ۴ صندلی انتخاب می‌کنیــم و دانش‌آموزان سوم را روی آن‌ها جابه‌جا می‌نماییم یعنی:

$$\left[\binom{١٠}{٦}\times ٦!\right]\times\left[\binom{١٠}{٣}\times ٣!\right]\times\left[\binom{١١}{٤}\times ٤!\right]$$
$$= P(١٠,٦).P(١٠,٣),P(١١,٤) = ٨٦٢/٢٠٢/٨٨٠/٠٠٠$$

(راه دوّم): ابتدا ۴ صندلی برای سومی‌ها سپس ۳ صندلــی برای دومی‌ها و در آخر ۶ صندلی برای اولی‌ها انتخاب می‌کنیم:

در اینجــا هم اولی‌ها حتماً در ردیف اول و دومی‌ها حتمــاً در ردیف دوم واقع می‌شــوند ولی ســومی‌ها به حالات مختلفی می‌توانند انتخاب داشته باشند (یعنی یک افراز برای سومی‌ها به قرار زیر)

$$+\begin{cases} \binom{١٠}{٤}\times ٤! & \text{حالت اول: هر ۴ نفر سومی در ردیف اول:} \\ \binom{١٠}{٣}\times\binom{١٠}{١}\times ٤! & \text{حالا دوم: سه نفر ردیف اول و یکی در ردیف دوم:} \\ \binom{١٠}{٢}\times\binom{١٠}{٢}\times ٤! & \text{حالت سوم: دو نفر ردیف اول و دو نفر ردیف دوم:} \\ \binom{١٠}{١}\times\binom{١٠}{٣}\times ٤! & \text{حالت چهارم: یک نفر ردیف اول و سه نفر ردیف دوم:} \\ \binom{١٠}{٤}\times ٤! & \text{حالت پنجم: هر ۴ نفر سومی در ردیف دوم:} \end{cases}$$

$$\overline{١١٦٢٨٠}$$

جمع این پنج حالت مختلف مسئله برابر است با:

$$P(٢٠,٤) = ١١٦٢٨٠$$

بنابراین حالات مختلف مســئله به قــرار زیر افراز می‌شود:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{در حالت اوّل} & \left[\binom{١}{٤}\times ٤!\right]\times P(١٠,٣)\times P(٦,٦) = ٢٦١٢٧٣٦٠٠٠ \\ \text{در حالت دوّم} & \left[\binom{١٠}{٣}\binom{١٠}{١}\times ٤!\right]\times P(٩,٣)\times P(٧,٦) = ٧٣١٥٦٦٠٨٠٠٠ \\ \text{در حالت سوّم} & \left[\binom{١٠}{٢}\binom{١٠}{٢}\times ٤!\right]\times P(٨,٣)\times P(٨,٦) = ٣٢٩٢٠٤٧٣٦٠٠٠ \\ \text{در حالت چهارم} & \left[\binom{١٠}{١}\binom{١٠}{٣}\times ٤!\right]\times P(٧,٣)\times P(٩,٦) = ٣٦٥٧٨٣٠٤٠٠٠٠ \\ \text{در حالت پنجم} & \left[\binom{١٠}{٤}\times ٤!\right]\times P(٦,٣)\times P(١٠,٦) = ٩١٤٤٥٧٦٠٠٠٠ \end{array}\right\}+$$

$$\text{جمع حالات اول تا پنجم} = ٨٦٢٢٠٢٨٨٠٠٠٠$$

به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود جواب‌ها یکسان است و به تقدم و تأخر دانش‌آموزان اول و دوم و سوم بستگی ندارد. بقیه حالاتی که در مجله به رشته تحریر درآمده اســت نیز به همین جواب منجر خواهد شــد (به‌دلیل مشابه) و هیچ ایرادی بر مسئله وارد نیست.

نامه‌های رسیده

مجله رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌ها، روایت معلمان، دیدگاه‌ها، نقد و بررسی کتاب از سوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شد. تا پایان مهر ۱۳۹۳، نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، به‌دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم.

- قدرت‌الله کشیری، از گرگان؛
- فرنگیس نریمی‌سا، از کرج؛
- سمیه منصوری‌راوری، از کرمان؛
- علی‌اکبر جاوید مهر، از قم؛
- غلامحسین ظفری، از اهواز؛
- بهناز ساویزی، از تهران؛
- حمید دافعی، از زنجان؛
- ربابه عبادی، از تهران؛
- قاسم حسین‌قنبری، از سمنان؛
- مرتضی شوری، از فارس؛
- سمیه نیکونهاد، از خراسان رضوی؛
- بهروز محبی‌نجم‌آبادی، از خراسان رضوی؛
- حمید شجاعی، از کرمان؛
- حسین محمدیان، از آذربایجان غربی.

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications & Teaching Technology Office

118 Roshd Mathematics Education Journal

رشد آموزش ریاضی

vol.32 no.2 2015 ISSN:1606-9226

Managing Editor: Mohammad Naseri
Editor: Zahra Gooya
Executive Director: Pari Hajikhani
Editorial Board:
Sayyed Hasan Alamolhodaei, Esmaiel Babolian, Mohammad Reza Fadaie, Soheila Gholamazad, Mirza Jalili, Mehdi Radjabalipour, Mani Rezaie, Shiva Zamani, Bijan Zangeneh.
Graphic Designer: Mehdi Karimkhani
www.roshdmag.ir
e-mail: riyazi@roshdmag.ir
P. O. Box: Tehran 15875 - 6585