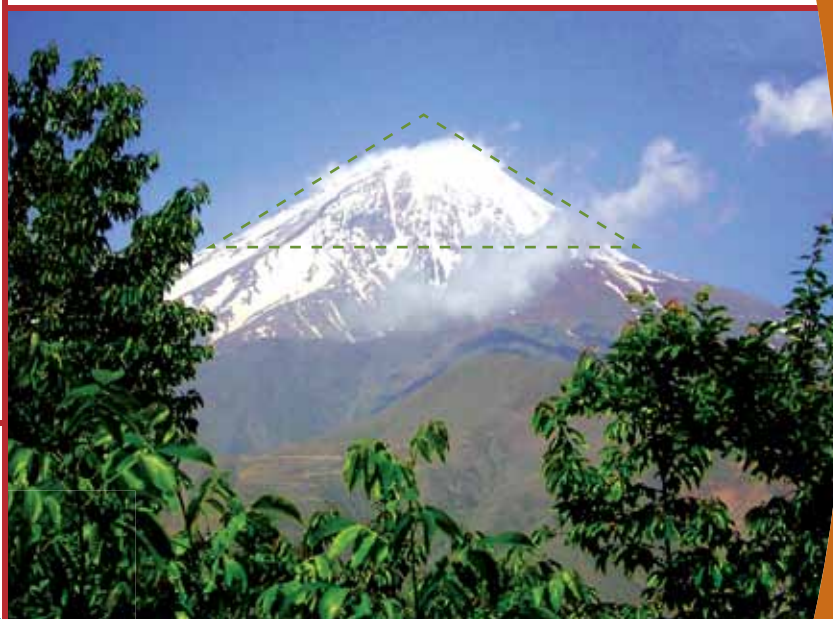


دوره بیست و سوم
شماره ۴ ■ تابستان ۱۳۹۳
۶۴ صفحه ■ ۸۰۰۰ ریال

فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی



چراغ

ریاضی

برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی



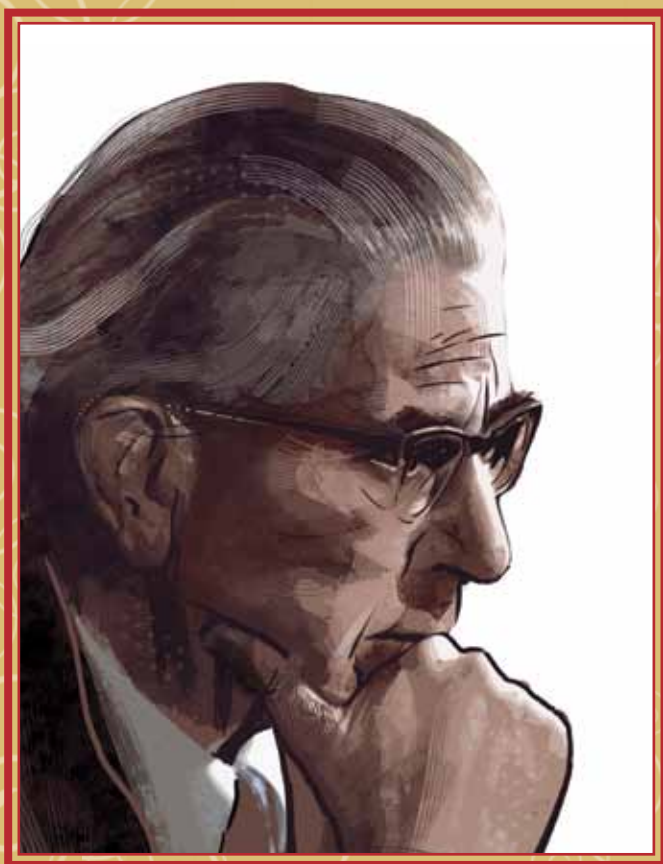
روشن

۲۳

ISSN: 1735-4951



توزیع توپیه‌ها در جعبه‌ها
ریاضیات ملکه علوم است
تاریخ ریاضی معاصر ایران
ریاضی دانشی زیبا، شیرین و دوست‌داشتنی
استدلال ریاضی و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای



پروفسور محسن هشترودی

زنده یاد دکتر محسن هشترودی در ۲۲ دی ماه ۱۳۸۶ در تبریز دیده به دنیا گشود. تحصیلات ابتدایی را در مدارس اقدسیه و سیروس و تحصیلات متوسطه را در دارالفنون تهران گذراند. در سال ۱۳۰۴ وارد رشته طب در دارالفنون آن زمان شد و چند سالی را به تحصیل در این رشته پرداخت. سپس جزو گروه اول دانشجویان اعزامی به اروپا برای تحصیل در رشته مهندسی به فرانسه اعزام شد. در بازگشت، در «دانش سرای عالی» که به تازگی تأسیس شده بود، رشته ریاضی را انتخاب کرد و از فارغ التحصیلان دومین دوره آن بود.

در سفر اعزامی دوم به اروپا، هشترودی به فرانسه رفت و از دانشکده علوم پاریس درجه لیسانس و از «دانشگاه سوربن» درجه دکترای ریاضی اخذ کرد. در سال ۱۳۱۵ به ایران برگشت و با سمت دانشیاری در دانشکده علوم دانشگاه تهران و دانش سرای عالی به تدریس پرداخت. پس از آن در سال ۱۳۲۰ رئیس دانشگاه تبریز و در ۱۳۲۱ رئیس فرهنگ تهران شد و به تدریج مدارج علمی را یکی پس از دیگری طی کرد و سمت‌ها و عناوین بسیاری را کسب نمود.

استاد هشترودی تألیفات متعددی داشت و مقالات بسیاری نیز در نشریات بین‌المللی و داخلی به چاپ رساند که برخی از این مقالات به زبان فرانسوی توسط دانشگاه تهران منتشر شدند. علاوه بر آن، وی یکی از مشوقان مرحوم عبدالحسین مصحفی به انتشار «مجله ریاضی یکان» بود و خود جزو نویسندگان ثابت آن مجله محسوب می‌شد. هشترودی همچنین دارای شهرت بین‌المللی بود و با بسیاری از مشاهیر و ریاضی دانان بزرگ جهان مکاتبه داشت.

استاد هشترودی به غیر از ریاضیات در شعر و ادبیات نیز دستی داشت و مجموعه اشعار وی با عنوان «سایه‌ها» سال‌ها پیش به چاپ رسیده است. وی در دوره‌ای هم سردبیر «کتاب هفته کیهان» بود. بسیاری از استادان بنام ریاضی معاصر از شاگردان پروفسور هشترودی بوده‌اند و جملگی او را معمار ریاضیات مدرن کشورمان می‌دانند. زنده یاد پرویز شهریاری در مورد وی می‌گوید: «دو خصلت اساسی، هشترودی را از بسیاری کسان دیگر ممتاز می‌کرد: واقع‌بینی و بی‌پروایی. به خاطر همین همیشه انسانی فکر می‌کرد و از بیان اندیشه خود بیم نداشت.»

زنده یاد هشترودی در ساعت ۴ بعد از ظهر روز شنبه ۱۳ شهریور ۱۳۵۵ به علت سکته قلبی دنیای فانی را ترک کرد. بیکر وی در روز ۱۷ شهریور از دانشگاه تهران تشییع شد و در آرامگاه خصوصی شماره ۸۲۴ بهشت زهرا در خاک آرام گرفت.

بسم الله الرحمن الرحيم

- دوره بیست و سوم
- شماره ۴
- تابستان ۱۳۹۳
- ۶۴ صفحه
- ۸۰۰۰ ریال

چرخه ریاضی

برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

♦ مدیرمسئول: محمد ناصری

♦ سردبیر: حمیدرضا امیری ♦ مدیر داخلی: هوشنگ شرقی

♦ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی ♦ تصویرگر: میثم موسوی ♦ ویراستار ادبی: بهروز راستانی

♦ هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، دکتر ابراهیم ریحانی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر،

هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور، دکتر محرم‌نژاد ایردموسی و با یاد همکار عزیزان زنده یاد پرویز شهریاری

♦ وبگاه: www.roshdmag.ir ♦ پیام‌نگار: Borhanm@roshdmag.ir

♦ پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ - ۰۲۱ ♦ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

♦ تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲ - ۰۲۱

♦ تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۰۲۱ ♦ شماره گان: ۷۷۳۳۶۶۵۵ - ۰۲۱

♦ شمارگان: ۱۰۳۰۰ نسخه

♦ چاپ: شرکت افست (سهامی عام)



- | | | | | |
|----|---|---|---|--------------------|
| ۲ | ➤ | ریاضیات ملکه علوم است | ➤ | سردبیر |
| ۳ | ➤ | تاریخ ریاضی معاصر ایران | ➤ | دکتر فرید قاسملو |
| ۷ | ➤ | ریاضیات در سینمای جهان (عجیب‌تراز داستان) | ➤ | احسان یارمحمدی |
| ۱۰ | ➤ | راه‌حلی دیگر برای تمرینی از هندسه ۲ | ➤ | مهدی میرزافام |
| ۱۲ | ➤ | ریاضی، دانشی زیبا، شیرین و دوست‌داشتنی | ➤ | سیده صدیقه علوی |
| ۱۶ | ➤ | آموزش ترجمه متون ریاضی (۳) | ➤ | حمیدرضا امیری |
| ۱۷ | ➤ | ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی | ➤ | بهرام دستوریان |
| ۱۸ | ➤ | توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها | ➤ | مصطفی دیداری |
| ۲۳ | ➤ | ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی | ➤ | هوشنگ شرقی |
| ۲۴ | ➤ | تاریخچه مجلات ریاضی ایران | ➤ | غلامرضا یاسی‌پور |
| ۲۸ | ➤ | پای تخته | ➤ | محرم‌نژاد ایردموسی |
| ۳۲ | ➤ | استدلالات اشتباه‌آمیز در تعیین دامنه توابع | ➤ | احسان یارمحمدی |
| ۳۸ | ➤ | استدلال ریاضی و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای | ➤ | فهیمة کلاهدوز |
| ۴۶ | ➤ | مغالطات در محاورات | ➤ | غلامرضا یاسی‌پور |
| ۴۹ | ➤ | پاسخ ایستگاه‌های اندیشه و ادب ریاضی این شماره | | |
| ۵۰ | ➤ | همراه با مخاطبان | | |
| ۵۲ | ➤ | مسائلی برای حل | | |
| ۵۷ | ➤ | حل مسائل | | |



مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه) • طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان • طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان • طرح معماهای ریاضی • نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

• مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. • مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد. • مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. • استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. • مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. • در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.



ریاضیات ملکه علوم است

در جهان امروز، ریاضیات در تمامی علوم و سرتاسر زندگی بشر نقش بسزایی پیدا کرده و تأثیرات آن در پیشرفت، سازندگی و رشد بشر در همه عرصه‌ها غیرقابل انکار است. کاربردهای ریاضیات در علوم پایه همچون فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و نیز رشته‌های مهندسی بسیار مشهود و از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، تا جایی که در رشته‌های مهندسی، درس «ریاضی مهندسی» از دروس اصلی و از نیازهای فوری و اجب به‌شمار می‌رود.

می‌دانید که پایه‌های این علم مادر، و به تعبیری ملکه علوم، در دوران مدرسه و سال‌های تحصیل قبل از دانشگاه پیریزی و مستحکم می‌شود. از این رو شما باید برای این علم، اهمیت ویژه‌ای قائل شوید و برای یادگیری درست آن برنامه‌ریزی داشته باشید. بدین منظور و از همه مهم‌تر، باید روش‌های صحیح مطالعه و فراگیری ریاضیات را بشناسید و با توجه به توانمندی‌ها و شغافتی که از خودتان دارید، با لذت و آرامش به یادگیری دروس ریاضی خود بپردازید.

انشاءالله در شماره‌های بعدی به معرفی، بررسی و چگونگی استفاده از این روش‌ها می‌پردازیم و البته پاسخگوی سؤالات و شنوای نظرات مفید و تجربه‌های خوب شما در این زمینه هستیم.

سر دبیر

تاریخ ریاضی معاصر ایران

تاریخ
ریاضیات



دکتر فرید قاسملو*

مسلمانی که «پژوهش» را در فرنگ آموخته‌اند. اما علت علاقه فرنگ به پژوهش در تاریخ ریاضیات دوره اسلامی چیست؟ یا در قالبی کلی تر، علت علاقه و سرمایه‌گذاری فرنگی‌ها روی پژوهش در تاریخ علوم دوره اسلامی چیست؟ به نظر می‌رسد پاسخ این پرسش آن باشد که پژوهش در تاریخ علوم دوره اسلامی به منزله راهکاری است برای درک بهتر ماجرای گسترش علوم در اروپا پس از رنسانس. به روایت دیگر، بررسی تاریخ علوم دوره اسلامی دست‌کم روشن‌گر زوایای تاریک بخشی از تاریخ علوم اروپا است؛ از آنجا که در قرون وسطا ایران و دیگر سرزمین‌های اسلامی «صادر» کننده علوم بوده‌اند و ممالک غربی «مصرف کننده» این علوم، بهترین راهکار برای بررسی تطور علوم در سرزمین‌های غربی آن است که هرچه بهتر چگونگی این صدور و عناصر مهم آن را بشناسند.

اما در دوران معاصر ما دیگر صادر کننده علوم نبودیم و حرفی برای گفتن در جوامع غربی نداشتیم. بنابراین فکر باطلی است اگر گمان کنیم این بار نیز، در مطالعه ماجرای ورود علوم نوین به ایران و دیگر کشورهای اسلامی، باز هم غرب می‌تواند راهگشا باشد و نظریه پردازی کند.

ب. اگر در بررسی علوم کهن، گذشت زمان باعث طرح نظریه‌ها، انتشار پژوهش‌های جدید و دست یافتن به منابع جدید است، در بررسی تکوین دانش‌های جدید در ایران، حداقل در بخشی از زمینه‌ها، گذشت زمان اثر معکوس می‌گذارد. یعنی در اثر گذشت زمان، یا بعضی منابع از بین می‌روند یا بخشی از صاحبان تاریخ، روی در نقاب خاک می‌کشند. هنوز هم کسانی در ایران هستند که بخشی از تکوین علوم جدید در ایران مرهون زحمات آنان است و با گذشت زمان، هر روز از تعداد آن‌ها کاسته می‌شود. بنابراین، اگر «کنون» نجیبیم،

کتابخانه

تاریخ ریاضی معاصر، جواد بهبودیان، رحیم زارع نهندی، مهدی بهزاد، پرویز شهریاری

اشاره

دکتر فرید قاسملو دانش آموخته تاریخ و از محققان برجسته بنیاد دایرةالمعارف اسلامی است. ایشان با همکاری دانشگاه آزاد اسلامی تحقیق جامعی درباره تاریخ ریاضی معاصر ایران انجام داده‌اند و در نهایت صمیمیت، چکیده‌ای از آن را در اختیار ما و خوانندگان مجله برهان قرار دادند. قسمت اول این تحقیق در پی می‌آید.

مقدمه

آیا پرداختن به تاریخ ریاضیات ایران در دوران معاصر یک ضرورت است؟ شاید عده‌ای این سؤال را از ریشه نادرست بدانند و براساس قاعده کلی «ضرورت پرداختن به تاریخ علوم»، طرح سؤالاتی از این دست را ضروری ندانند. و شاید عده‌ای دیگر نیز، دلایل چندی درباره «عدم اضطراب برای پرداختن به چنین بحثی» یا «لزوم پرداختن به ادوار کهن تر تاریخ ریاضیات در ایران» طرح کنند. اما پاسخ نهایی چیست؟

مؤلف این سطور بهتر می‌بیند در مقام پاسخ گویی به این پرسش، گزاره‌هایی را طرح کند تا با کنار هم نهادن آن‌ها بتواند پاسخی برای پرسش فوق بیابد:

الف. ریشه‌ها، نظریه‌ها و مهم‌ترین منابع مطالعه در تاریخ ریاضیات کهن در ایران و دیگر کشورهای تمدن اسلامی، یا دستپخت پژوهشگران فرنگی هستند، یا پژوهشگران

شاید فردا برای پرداختن به این عرصه دیر باشد.

ج. دست کم در بخشی از منابع نیز، تفاوتی ماهوی بین منابع مطالعه در علوم کهن و علوم نوین وجود دارد و آن، اهمیت تاریخ شفاهی در بررسی تاریخ علوم در ایران معاصر (و نیز دیگر کشورهای اسلامی) است. تاریخ شفاهی در کشور ما سابقه زیادی ندارد و پرداختن به عرصه علوم نیز، در حوزه تاریخ شفاهی از آن هم جوان تر است. بر این اساس، اگرچه خوش بختانه آرام آرام حیطه های نظری پژوهش در تاریخ شفاهی جایگاه خود را یافته و آثار بسیار خوبی درباره چگونگی دست یابی به تاریخ شفاهی در حوزه زبان فارسی در قالب کتاب و مقاله منتشر شده است و می شود. اما در عرصه «علوم» راه بسیار زیادی برای رسیدن به مقصود وجود دارد و راه طی نشده هم دراز است و هم ناهموار^۱. امیدوار هستم طرح سه گزاره فوق و گزاره هایی از این دست، پاسخی باشد بر پرسشی که در ابتدای سطور طرح کردم. اما علت اینکه مقدمه حاضر را با پرسشی آغاز کردم که اندکی «بدیهی» می نماید، بیش از هر چیز آن است که بکوشم اقدامی کرده باشم در محکومیت گذشتگان.

واقعیت این است که ابر و باد و مه و خورشید و فلک و عوامل بسیاری از این دست باید دست به دست هم دهند و پاسخی جامعه شناسانه به این پرسش دهند که «چرا» یک نسل گذشته از پژوهشگران این ملک، عرصه تاریخ علوم نوین را مورد نظر قرار نداده و در پرداختن به آن کوتاهی کرده است و در نتیجه، در همین عرصه تاریخ ریاضیات معاصر، ما فرصت ادراک افرادی از جنس هشترودی، مصاحب، مصحفی و وصال را برای تدوین تاریخ ریاضیات معاصر ایران و تهیه آرشیوی شفاهی در این زمینه از دست دادیم؛ فرصتی سوخته که به نظر می رسد دیگر باز نمی گردد، مگر آنکه معجزه ای رخ دهد.

اغتنام فرصت تعریف یک طرح پژوهشی در معاونت پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی، این امکان را داد تا نویسنده این سطور بخشی از این طرح را به تهیه بخش کوچکی از تاریخ شفاهی ریاضیات در ایران اختصاص دهد. مؤلف این سطور، هیچ ادعایی در کامل، نهایی یا حتی متوسط بودن مجموعه های تهیه شده که در صفحات آینده تقدیم ارباب معرفت می شود، ندارد. فقط و فقط تأکید می شود که این مجموعه از دو منظر تهیه شده است: یکی آنکه در گزارشی که حاصل طرح پژوهشی فوق الاشاره است، به عنوان منبع به کار آمده و مورد استناد قرار گیرد، و دیگر آنکه گامی باشد نخستین برای پرداختن به این عرصه از تاریخ علوم

در کشورمان، و نیز نگاهی با این امید که دیگران بکوشند تا فرصت از دست نرفته، مجموعه هایی کامل تر و نهایی از این متن را، نه در عرصه تاریخ ریاضیات معاصر ایران، بلکه در تمامی عرصه های علوم فراهم آورند.

کوشش برای تهیه آرشیو شفاهی تاریخ ریاضیات ایران، تنها به چهار مصاحبه حاضر محدود نشده بود، اما عوامل بسیاری دست به دست هم دادند تا این مجموعه در حد و اندازه حاضر پدید آید. به عنوان نمونه، مرحوم استاد منوچهر وصال و مرحوم استاد عبدالحسین مصحفی، به خاطر کهولت از هر گونه مصاحبه معذور بودند. مصاحبه با مرحوم استاد پرویز شهریاری نیز، تنها با ارائه کتبی پرسش ها میسر شد. در این میان، عدم همکاری مثال زدنی استادان گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم نیز، در تهیه هر گونه مصاحبه و تهیه هر گونه آرشیو شفاهی از این بزرگواران بسیار ستودنی بود! مصاحبه با استاد دکتر جواد بهبودیان، به علت بعد مسافت محل درس و زندگی استاد، از طریق ارسال پرسش ها و در تابستان ۱۳۹۰ خورشیدی صورت گرفت. گفت و گو با استاد دکتر زارع نهنندی در یک روز دل انگیز بهاری در سال ۱۳۹۰ در محل کار استاد در گروه ریاضی دانشکده علوم دانشگاه تهران صورت پذیرفت. گفت و گو با استاد دکتر بهزاد، این معمار ریاضیات معاصر ایران هم در دو جلسه مفصل، در پاییز ۱۳۹۰ در محل «معاونت پژوهشی سازمان مرکزی دانشگاه آزاد اسلامی» انجام شد.

به هیچ وجه نمی توان گفت وگوهای حاضر را نهایی پنداشت. این فقط آغاز راهی است که لاجرم روزی باید پیموده شود. باید امیدوار بود با گسترش سریع آموزش کلاسیک تاریخ علوم در کشورمان، گروهی از پژوهشگران جوان و با انرژی این عرصه علاقه، دانش و البته پایان نامه های خود را بر این بخش از تاریخ علوم کشورمان متمرکز سازند. پدید آمدن مجموعه حاضر حاصل همکاری افراد بسیاری است که منت بی پایانی بر مؤلف این سطور گذاشته اند. علاوه بر بزرگواری استادان پرویز شهریاری، مهدی بهزاد، رحیم زارع نهنندی و جواد بهبودیان که پدیدآورندگان اصلی این مجموعه هستند، لازم است از اولیای وقت معاونت پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی، به خصوص جناب آقای فریدون رهنمای رودپشتی، معاونت محترم وقت پژوهشی، جناب آقای مهندس نوروزیان، ریاست محترم وقت «دفتر گسترش علم» دانشگاه، جناب آقای مهندس نوید باصری، سرکار خانم فریبا پایروند ثابت، سرکار خانم بهاره منجمی، سرکار خانم سارا خسروی و دیگر عزیزانی که این کمترین را در تهیه مجموعه یاری دادند، تشکر و قدردانی نمایم.

از همان ابتدا به ریاضی علاقه داشتم

گفت‌وگو با استاد پرویز شهریاری

از چه هنگامی به پرداختن به تاریخ ریاضیات علاقه‌مند شدید؟

نخستین کتابی که بنده ترجمه کردم، از زبان فرانسوی و به‌نام «تاریخ حساب» اثر رنه تاتون بود که در سال ۱۳۳۰ انجام شد. فکر می‌کنم از همان ابتدا به ادبیات، تاریخ و فلسفه علاقه‌مند بودم. همواره به تاریخ ریاضیات بیشتر علاقه داشته‌ام تا خود ریاضیات. البته به خود ریاضیات بیشتر پرداخته‌ام، ولی گمان می‌کنم از انگشت‌شمار کسانی هستم که هم به تاریخ و فلسفه ریاضی و هم خود ریاضی پرداخته‌ام.

در سال‌های اخیر تمام تمرکز من روی تاریخ ریاضیات بوده است و آخرین کتابی که از من به چاپ رسیده، کتابی دربارهٔ کوشیار گیلانی است که آن را از زبان روسی برگردانده‌ام.

استادان و راهنمایان جناب‌عالی در این عرصه چه کسانی بودند؟

در برگردان و نگارش کتاب‌هایم بیشتر به‌صورت خودجوش کار کرده‌ام.

چرا از بین همهٔ علوم ریاضیات را انتخاب کردید؟

پس از اتمام دانش‌سرای مقدماتی در کرمان، برای ادامهٔ تحصیل به تهران آمدم و چون سال آخر متوسطه را نخوانده بودم، در دانشکدهٔ ادبیات دانشگاه تهران کلاس‌هایی برگزار شد تا افرادی مانند من بتوانند سال آخر دبیرستان را تمام کنند. سه رشته وجود داشت: ریاضی، طبیعی (تجربی) و ادبی. ابتدا در رشتهٔ ادبی ثبت‌نام کردم، چون خیال داشتم فلسفه بخوانم. ولی به‌دلیل ازدحام دانشجویان (نزدیک به ۳۵۰ نفر) تصمیم گرفتم به رشته‌ای بروم که تعداد کمتری دانشجو داشته باشد. رشتهٔ ریاضی شش شاگرد بیشتر نداشت که یک نفر از آن‌ها وسط کار رفت و من اضافه شدم و در مجموع شش نفر فارغ‌التحصیل شدیم.

هم‌زمان در دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران نیز ثبت‌نام کردم. در آن زمان تنها دانشگاه در سطح ایران دانشگاه تهران بود و



از ۱۵ سالگی، یعنی سال سوم دبیرستان معلم بوده‌ام و در زنگ‌های ورزش، درس‌های کمتر مهم دبستان را درس می‌دادم. از همان ابتدا به ریاضی علاقه داشتم، ولی حواسم بیشتر به فلسفه و تاریخ بود

دانشکدهٔ فنی آن تنها دانشکدهٔ فنی در کل ایران. دانشکدهٔ علوم که یک کلاس ریاضی داشت. در تمام تابستان دانشکدهٔ علوم تبلیغ می‌کرد که ۶۰ دانشجو می‌پذیرد، ولی مهرماه که رفتیم دیدیم تنها ۱۳ نفر ثبت‌نام کرده‌اند. دانشکدهٔ علوم را همراه دانش‌سرای عالی تمام کردم. البته باید بگویم که من از ۱۵ سالگی، یعنی سال سوم دبیرستان معلم بوده‌ام و در زنگ‌های ورزش، درس‌های کمتر مهم دبستان را درس می‌دادم. از همان ابتدا به ریاضی علاقه داشتم، ولی حواسم بیشتر به فلسفه و تاریخ بود. بعد از وارد شدن به ریاضیات آن‌ها را خودم ادامه دادم.

چالش‌های آموزش ریاضیات در ایران معاصر را چه چیز یابچیزهایی می‌دانید؟

شاید بهتر بود این پرسش به‌طور کلی دربارهٔ آموزش مطرح می‌شد. در زمان ما در زمینهٔ آموزش و پرورش آنچه بیشتر از همه ناراحت‌کننده است، وجود تضاد عجیبی در مقایسهٔ این سده با سده‌های پیش از آن است. مهم‌ترین این تضادها، تضاد در زمینهٔ وسیله‌های آموزش و پرورش است. وسیله‌های آموزشی این سده مانند کتاب‌های بی‌شمار کمک‌آموزشی، اینترنت، رایانه و... قابل مقایسه با سده‌های پیش از آن نیست. اما متأسفانه نتیجه معکوس بوده است.

به‌دلیل شیوه‌های نامناسب و غیراصولی آموزش، دانش‌آموزان در برخورد با دقیق‌ترین مسئله‌ها نیز بیشتر می‌کوشند به حافظه‌شان رجوع کنند تا به منطق و استدلال علمی. من معتقدم که به دانش‌آموزان، حتی در دانش‌هایی چون تاریخ و ادبیات هم می‌توانیم نحوهٔ درست استدلال کردن را بیاموزیم. این مهم‌ترین وظیفهٔ معلم است. البته پرسش‌های

چرا پدر و مادر در خانه با لحنی ویژه به فرزندشان می‌گویند: «فردا ریاضی داری؟» این باعث ترس کودک می‌شود. در حالی که ریاضیات با بقیه درس‌ها هیچ فرقی ندارد

چهار گزینه‌ای برای ورود به دانشگاه و یا مدارس به اصطلاح برتر، کار معلمان را بسیار دشوار کرده است. این گونه آزمون‌ها قدرت استدلال را از دانش‌آموزان گرفته‌اند.

در فرمول‌های تستی تنها با نتیجه یک روند منطقی سروکار داریم که آن را نیز باید به‌خاطر بسپاریم. این به معنای کشتن تفکر منطقی در دانش‌آموزان است. این نوع آموزش باعث می‌شود که دانش‌آموزان نتوانند بین آنچه یاد می‌گیرند و نیازهای جامعه خود ارتباط برقرار کنند و ریاضیات را علمی مجرد و بازی با شکل‌ها و عددها بدانند. به این ترتیب، شاید هرگز کششی برای فراگیری ریاضیات یا هر دانش دیگری به‌دست نیاورند. بنابراین یکی از مشکل‌هایی که در زمینه آموزش و پرورش وجود دارد، مسئله تفکر و استدلال است.

مشکل بعدی وجود معلم‌هایی به نام معلم خصوصی است. کودکی که معلم خصوصی دارد، سر کلاس درس را خوب گوش نمی‌کند، به امید آنکه معلم خصوصی می‌گیرد. اشکال اصلی اینجاست که با گرفتن معلم خصوصی نیز، مجال تفکر از دانش‌آموز گرفته می‌شود. شاگرد خودش باید با مشکلات روبه‌رو شود و با آن‌ها دست و پنجه نرم کند. اما روش‌های فعلی باعث می‌شود دانش‌آموز در آینده نتواند مشکل‌های اجتماعی خود را حل کند. شاید بخشی از مسئله از این موضوع ناشی می‌شود که خانواده انتظار دارد فرزندش شاگرد اول شود و همیشه نمره ۲۰ بگیرد. بنابراین برای هر نمره ۲۰ او جایزه تعیین می‌کند و با این کار، ناخواسته او را به رقابتی ناسالم وامی‌دارد. خانواده سعی می‌کند مشکل‌هایی را که در آموزش او پیدا می‌شود، برطرف کند. حل المسائل و معلم کمکی می‌گیرد یا به مدرسه تلفن می‌کند که اندکی بیشتر مراقب بچه من باشید. با این طرز برخورد، کجا دانش‌آموز می‌تواند خودش مشکلاتش را حل کند؟

از طرف دیگر نوع برخورد خانواده با درس ریاضیات نیز در نگاه بچه‌ها نسبت به این درس بسیار تأثیرگذار است. من تعجب می‌کنم که چرا پدر و مادر در خانه با لحنی ویژه به فرزندشان می‌گویند: «فردا ریاضی داری؟» این باعث ترس کودک می‌شود. در حالی که ریاضیات با بقیه درس‌ها هیچ فرقی ندارد چرا به شاگرد نمی‌گویند فردا کلاس ادبیات یا جغرافی داری؟

تأثیرگذارترین افراد در فرایند تکوین دانش ریاضیات در ایران معاصر، از تأسیس دانشگاه تهران تاکنون را چه کسانی می‌دانید؟

افراد زیادی در فرایند تکوین دانش ریاضیات در ایران نقش داشته‌اند و اوضاع کنونی ریاضیات ایران محصول کار جمعی است. متأسفانه اکنون نام تمامی آن‌ها را به‌خاطر ندارم. با وجود

این می‌توانم به اشخاصی چون اسدالله آل‌بویه، غلامحسین مصاحب و احمد بیرشک اشاره کنم.

تأثیرگذارترین کتاب‌های زبان فارسی - اعم از ترجمه یا تألیف - در فرایند تکوین دانش ریاضیات در ایران معاصر را چه کتاب‌هایی می‌دانید؟

در این زمینه نیز کتاب‌های بسیاری وجود دارند که به یقین من تمامی آن‌ها را مطالعه نکرده‌ام و نمی‌توانم نظری کلی بدهم.

به نظر جناب عالی کدام یک از شاخه‌های ریاضیات در کشور ما مورد توجه قرار گرفته و کدام یک مورد غفلت واقع شده است؟ علت این توجه و غفلت را چه می‌دانید؟

می‌توان گفت امروزه ریاضی‌دانان ایرانی در بیشتر شاخه‌های ریاضیات، چه محض و چه کاربردی، مشغول به کار هستند و تحقیقات با ارزشی را نه تنها در نشریات ایرانی، بلکه در معتبرترین نشریات خارجی به چاپ می‌رسانند. فکر می‌کنم یکی از دلیل‌های این امر بازگشت ریاضی‌دانان ایرانی به کشور پس از تحصیلاتشان در خارج از کشور و انتقال دانششان به ریاضی‌دانان جوان بوده است. کم نیستند دانشمندان ایرانی که در خارج از کشور جزو برترین‌ها هستند. البته من تصور می‌کنم هر کسی در کشور خودش می‌تواند مفیدتر و تأثیرگذارتر باشد.

مهم‌ترین نشریات در تکوین دانش ریاضیات معاصر ایران از تأسیس دانشگاه تهران تاکنون را چه نشریاتی می‌دانید؟
به‌نظرم مجله‌هایی چون «یکان»، «آشتی با ریاضیات» و «آشنایی با ریاضیات»، و پس از آن‌ها مجله «نشر ریاضی» یا «فرهنگ و اندیشه ریاضی» نقش بسزایی را ایفا کرده‌اند.

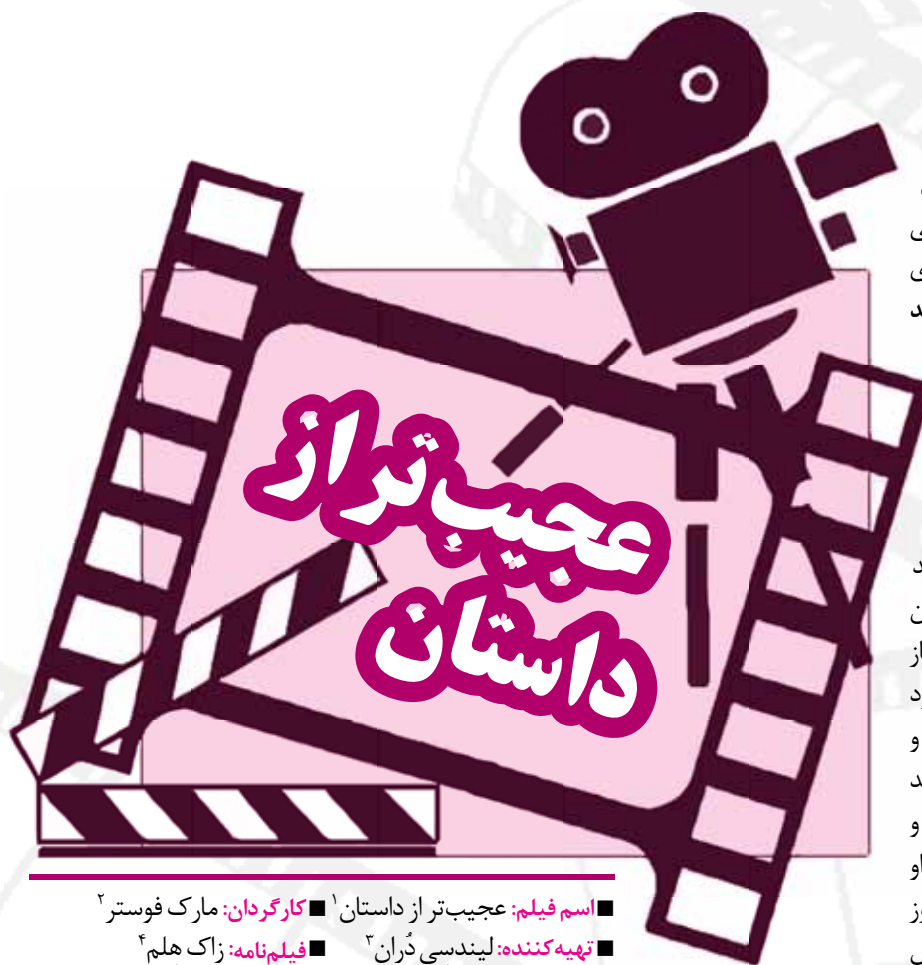
مهم‌ترین سازمان‌ها، مؤسسات و نهادهای تأثیرگذار در تکوین دانش ریاضیات در ایران معاصر، از زمان تأسیس دانشگاه تهران تاکنون کدام‌ها هستند؟

انجمن ریاضی ایران و سپس خانه‌های ریاضی که فکر می‌کنم، اندیشه تشکیل آن‌ها برای نخستین‌بار در ایران مطرح شد.

پی‌نوشت

۱. خوشبختانه امروزه موضوع تاریخ شفاهی در کشور مورد توجه قرار گرفته و زیربنای مطالعاتی و نظری خوبی در این عرصه پدید آمده است. فقط می‌ماند پرداختن به مصاحبه با صاحب‌نظران عرصه ریاضی کشور برای تدوین تاریخ شفاهی ریاضی ایران.

* ghassamlou@gmail.com



■ **اسم فیلم:** عجیب‌ترین داستان^۱ ■ **کارگردان:** مارک فوستر^۲
■ **تهیه‌کننده:** لیندسی دُران^۳ ■ **فیلم‌نامه:** زاک هلم^۴

فیلم عجیب‌تر از داستان دربارهٔ دوره‌ای از زندگی یک مأمور ممیز حسابداری ادارهٔ مالیات به‌نام هارولد کریک^۵ (ویل فرل) است که توانمندی‌های ویژه‌ای در انجام چهار عمل شمارش و امور محاسباتی دارد. فیلم با صحنه‌هایی دربارهٔ هارولد و ساعت مچی‌اش از زبان یک راوی به این صورت آغاز می‌شود: «داستان در مورد مردی به‌نام هارولد کریک و ساعت مچی‌اش است. هارولد مرد شماره‌های بی‌نهایت و محاسبات بی‌پایان است. او برای دوازده سال، در هر روز هفته هر یک از ۳۲ دندانش را ۷۶ بار (۳۸ بار عقب و جلو و ۳۸ بار بالا و پایین) مسواک می‌زد. هر روز هفته برای دوازده سال به‌جای استفاده از گره دوپل برای کراواتش، از گره تک استفاده می‌کرد و بنابراین ۴۳ ثانیه در وقت صرفه‌جویی می‌کرد. برای دوازده سال در هر روز هفته هارولد با سرعت ۵۷ قدم به ازای هر ساختمان و به مسافت شش ساختمان می‌دوید تا به زحمت و سختی به اتوبوس ساعت ۸:۱۷ به مقصد کرانکر برسد.» اما روند و داستان فیلم با استفاده از پیوندی که میان چهار شخصیت هارولد کریک، پروفسور ژولز هیلبرت^۶ (داستین هافمن)، آنا پاسکال^۷ (مگی گیلنهال) و کارن آیفِل^۸

زندانیان شود. هارولد برای اینکه بفهمد صداهایی که می‌شنود، چه منشأ و دلیلی دارند، به روان‌پزشک مراجعه می‌کند. بعد از گفت‌وگوها و معاینات لازم، روان‌پزشک به هارولد می‌گوید که شما دچار «سکیزوفرنی»^۹ شده‌اید. اما هارولد این موضوع را نمی‌پذیرد و او توسط روان‌پزشک به یک استاد ادبیات به‌نام پروفسور ژولز هیلبرت معرفی می‌شود. در ملاقاتی که بین هارولد و پروفسور هیلبرت رخ می‌دهد، بعد از اینکه هارولد ماجرا را تعریف می‌کند، پروفسور به او می‌گوید که من نمی‌توانم کمکت کنم. چون من متخصص دیوانگی نیستم و من متخصص

هارولد با یکی از همکارانش به‌نام دیو (تونی هیل) موضوع را مطرح می‌کند. به دیو می‌گوید صداهایی که می‌شنود از جانب زنی است که دارد داستانی را روایت می‌کند. در همین حین دیو پروندهٔ مالیاتی یک نانوائی را برای بررسی و رسیدگی به تخلفات مالیاتی صاحب آن به هارولد می‌دهد. هنگامی که هارولد به نانوائی مراجعه می‌کند، با برخورد سرد و عجیب آنا پاسکال، صاحب نانوائی، مواجه می‌شود. هارولد در مراجعات بعدی به نانوائی و بررسی‌های لازم متوجه می‌شود که آنا پاسکال ۲۲ درصد تخلف مالیاتی دارد و به‌همین دلیل طبق قوانین او باید روانهٔ

(اما تامپسن) ایجاد می‌شود، شکل می‌گیرد. هارولد کریک که تمام کارهای او مانند نهار خوردن، نوشیدن قهوه و... از نظم ریاضی‌وار خاصی تبعیت می‌کنند، یک روز چهارشنبه صداهایی را می‌شنود که در واقع انعکاسی هستند از کارهایی که او انجام می‌دهد. تداوم این صداها باعث ایجاد اختلال و عدم تمرکز در زندگی روزمرهٔ او می‌شود. حتی باعث می‌شود که در پاسخ‌گویی به حاصل ضرب ۶۷×۴۵۳ که توسط یکی از همکارانش مطرح شده است، با کمی درنگ و برخلاف همیشه جواب نادرست بدهد و سپس با کمی مکث پاسخ درست را به او ارائه کند.



فیلم داشته باشیم، می باید نخست بیان کنیم که: زندگانی مؤثر و پویا، اصول بنیادینی دارد و افراد تنها در صورتی می توانند کامیابی راستین و خوش بختی

او، شخصیت محوری کشته نشود. سرنوشت محتوم هارولد نیز مرگ است. هارولد سعی می کند آدرسی از کارن آیفیل به دست آورد و او را از فرجام

هیلبرت روی می دهد، پروفسور نخست می پرسد در مسیری که آمدم، آیا تعداد پله ها را شمارش کردی؟ آیا تعداد موزائیک ها را شمردی؟ سپس سؤالات دیگری مطرح می کند تا به ماهیت آنچه در ذهن هارولد می گذرد، پی ببرد. آن ها بعد از مدتی نتیجه می گیرند، صداهایی که او می شنود، از جانب کارن آیفیل، رمان نویسی است که مشغول نگارش کتاب جدیدش براساس زندگی هارولد کریک است. پروفسور هیلبرت به هارولد می گوید: صدایی که می شنوی به اعمالی که تو انجام می دهی، وابسته است. در ادامه هارولد هنگامی که در اتاق کار پروفسور هیلبرت حضور دارد، متوجه مصاحبه ای مربوط به ۱۰ سال قبل می شود که مجدداً از یک شبکه تلویزیونی بازپخش می شود. در آن مصاحبه، زن رمان نویسی حضور دارد که صدایش دقیقاً با صدایی که هارولد می شنود، مطابقت دارد. هارولد این موضوع را به پروفسور اطلاع می دهد، و هیلبرت برای هارولد اظهار تأسف می کند که کارن آیفیل، نویسنده ای که در تلویزیون دیده است، در تمام رمان هایش شخصیت اصلی داستان را محکوم به مرگ می کند و تا به حال سابقه نداشته است که در رمان های

ادبیات هستم. در این بین هارولد جمله: «شخصتش هم خبر نداشت» را بیان می کند که باعث جلب توجه پروفسور می شود و پس از ارائه توضیحاتی از جانب پروفسور هیلبرت، او در نهایت به هارولد می گوید که حاضر است در این زمینه به او کمک کند. در مراجعه های بعدی هارولد به نانویی برای رسیدگی به امور مالیاتی، بین او و آنا گفت و گوهایی صورت می گیرد. هارولد از آنا می پرسد چه موقع تصمیم گرفتی که آشپز شوی؟ آنا جواب می دهد من به دانشکده حقوق دانشگاه هاروارد^{۱۰} رفتم و به سختی در آنجا پذیرفته شدم، اما تحصیلم را تمام نکردم. او ادامه می دهد که در آنجا من و هم کلاسی هایم برای مطالعه دروس گاهی مجبور بودیم تمام شب را بیدار بمانیم. من آشپزی می کردم تا کسی گرسنه سرکلاس درس نرود و در مواقعی تمام بعدازظهر را در آشپزخانه خوابگاه می گذراندم. آن ها عاشق دست پخت من بودند و من مدام دنبال به دست آوردن دستور پخت غذاها و خوراکی های جدیدتر بودم. در نهایت هم به علت عدم موفقیت در امتحانات رشته تحصیلی ام، از دانشگاه اخراج شدم. اما در ملاقات بعدی که بین هارولد و پروفسور

ماندگار را تجربه کنند که این اصول را بیاموزند و آن را بخشی از منش اصلی خود قرار دهند. گاهی برای رسیدن به این اصول لازم است قدرت تغییر نگرش و برداشت را بالا برد. هرچند که ممکن است این تغییر، آنی باشد و یا فرایندی آهسته و سرشار از تعمق و تأمل داشته باشد. اما در نهایت منشأ دگرگونی عظیم و عجیبی خواهد شد که این می تواند با پرسیدن سؤالی یا آشکار ساختن نادانی در رسیدن به سر منزل مقصود آغاز شود؛ چون پذیرش نادانی نخستین گامی است که به سوی آموزش

بدی که می خواهد برای شخصیت داستانش - یعنی خود او - رقم بزند، منصرف کند. در نهایت هارولد با مراجعه به بایگانی اداره مالیات، شماره تلفنی را از کارن آیفیل به دست می آورد و با او قرار ملاقاتی می گذارد تا او را متقاعد سازد، اگر در مقام نویسنده رمان دست به کشتن شخصیت بنیادی داستان بزند، در واقع حکم مرگ او را صادر کرده است. در نهایت، کارل آیفیل پایان داستانش را تغییر می دهد و هارولد از مرگ حتمی نجات پیدا می کند. اما اگر بخواهیم برداشت ژرف تر و ارزنده تری از این





فرد را تعیین می‌کند، بلکه عکس‌العمل فرد نسبت به اوضاع و شرایط است که در کامیابی یا شکست او مؤثر است.

پی‌نوشت‌ها

1. Stranger Than Fiction
2. Marc Foster
3. Lindsay Doran
4. Zach Helm

برای این فیلم، زاک هلم نامزد دریافت جایزه «ساترن» برای بهترین نویسندگی، نامزد دریافت «جایزه انجمن منتقدان فیلم‌های نمایش داده شده» به‌عنوان بهترین نویسنده و نیز برنده «جایزه کمیته ملی مجله سینما» برای بهترین فیلم‌نامه ایتکاری و غیراقتباسی شد.

5. Harold Crick
6. Jules Hilbert
7. Ana Pascal
8. Karen Eiffel
9. Schizophrenia

نوعی اختلال شدید روانی که از خصوصیات آن دوری شدید بیمار از واقعیت است. چون این بیماری با جنون همراه است و غالباً در دوران اولیه و جوانی زندگی افراد بروز می‌کند، به آن جنون جوانی هم می‌گویند.

10. Harvard University

دانشگاه هاروارد دانشگاهی خصوصی و بسیار ممتاز در شهر «کمبریج» ایالت ماساچوست ایالات متحده آمریکاست. نام آن در ابتدا «دانشکده نو» یا «دانشکده در شهرک نو» بود که بعداً در ۱۳ مارس ۱۶۳۹ به افتخار کشیشی به نام جان هاروارد که ۴۰۰ جلد کتاب و مبلغ ۷۷۹ پوند به این دانشگاه کمک کرده بود، نام‌گذاری شد. علاقه‌مندان می‌توانند برای آشنایی بیشتر با این دانشگاه به تارنمای آن به نشانی <http://www.harvard.edu> مراجعه کنند.

* ehsan.yarmohamadi@yahoo.com

می‌خواهد بیان کند که اتخاذ این‌گونه تصمیم‌ها و رفتارها در زندگی باعث سوق یافتن مسیر زندگی به‌سوی فاجعه و تباهی می‌شود. اما نقطه مقابل او، سبک زندگی سرزنده و پرجنب‌وجوش آنا پاسکال است. در نخستین ملاقات‌های رسمی که بین هارولد و آنا رخ می‌دهد، آنا تضاد بین آن دو را مشخص می‌کند و می‌گوید سبک زندگی هارولد کریک هیچ جایگاهی در زندگی او ندارد. اما هنگامی که هارولد دست به انجام اصلاحات می‌زند، جریان زندگی او از روندی تأسف برانگیز به رویکردی پویا و شاد تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توان گفت، هر فردی در هر جایگاهی که باشد (مثلاً مانند هارولد کریک نابغه اعداد باشد)، افکار و باورهایش موقعیت فعلی او را رقم زده‌اند و برای تغییر در این جایگاه می‌باید افکار و باورهایش را تغییر دهد تا موقعیت و آنچه را که هست تغییر دهد. در ضمن این شرایط و اوضاع نیست که پیروزی یا شکست

در ابتدا از دیدگاه یک مأمور اداره مالیات و محدودیت‌هایی که او در حین انجام وظیفه با آن‌ها روبه‌روست، سخن به میان می‌آورد. اما چرخشی به موقع و مؤثر در نقطه نظراتش که به واسطه معاشرت و هم‌کلامی با شخصیت اجتماعی پروفیسور ژولز هیلبرت - که حتی با اینکه یک استاد ادبیات است، اما به عنوان ناجی غریق در استخر نیز فعالیت می‌کند - ایجاد می‌شود، تأثیرات شگرفی در زندگی او پدید می‌آورد.

هارولد کریک در این فیلم فردی است که زندگی او با حساب و کتاب کامل و مبتنی بر اعداد و ارقام سپری می‌شود. انتخاب این سبک زندگی باعث شده است، تمامی اعمالی که او در زندگی روزمره‌اش به آن‌ها دست می‌زند، خشک، بی‌روح و غیرقابل انعطاف باشند. در نهایت کارگردان با انتخاب سرنوشت شومی که کارن آیفیل رمان‌نویس برای او تداعی کرده است،

برمی‌داریم. گاهی نیز می‌تواند در چارچوب پرهیز از عادات و امیال اعتیادآمیز مخرب و پرورش عادت‌هایی قرار گیرد که انسان را از برجسب‌های کهنه و محدودیت‌های تابلوگونه برهاند و روزنه امید را برای اتخاذ تصمیم‌ها و توانمندی‌های مثبت گسترش دهد.

هارولد کریک نمی‌تواند به‌تنهایی و با تمسک به زندگی منظم ماشینی و با استفاده از قوانین خشک مالیاتی، زندگی مناسبی داشته باشد. از این‌رو، زاک هلم، در مقام فیلم‌نامه‌نویس فیلم عجیب‌تر از داستان، بر آن می‌شود که سرانجام نامیمون هارولد ریاضی پیشه و با نظم و ترتیب را از زبان کارن آیفیل نویسنده به تصویر بکشد. هارولد حتی با موقعیت عاطفی که بین او و آنا پاسکال ناتوانا روی می‌دهد، منفعلانه برخورد می‌کند و

راه حلی دیگر

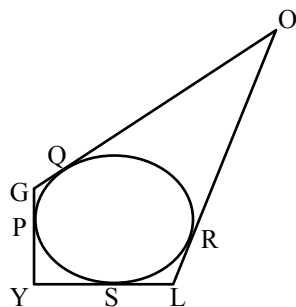
برای تمرینی از هندسه ۲

آموزشی

بر یک دایره مماس باشند، آنگاه چندضلعی را محیطی یا محیط بر دایره می نامند.

متن اصلی

در ادامه، تمرین های ۶ و ۷ موجود در صفحه ۵۶ کتاب درسی هندسه (۲)* را مشاهده می کنید که در اینجا سعی کرده ایم روشی غیر از روش پیشنهادی کتاب را برای حل آنها به کار بگیریم:



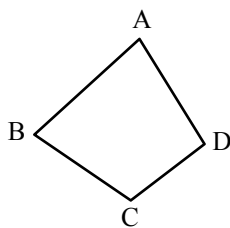
۶. ضلع های چهارضلعی محیطی GOLY بر دایره مماس اند (شکل ۱). ثابت کنید:

$$GO + LY = OL + GY$$

شکل ۱

۷. در چهارضلعی ABCD داریم: $AB + CD = AD + BC$. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است. (شکل ۲).

راهنمایی: روی ضلع AB، پاره خط $AM = AD$ و روی ضلع BC پاره خط $CN = CD$ را جدا کنید. از ویژگی مثلث های متساوی الساقین استفاده کنید.



شکل ۲

چهارضلعی محیطی

کلید واژه

چکیده

در اثبات عکس یک قضیه معمولاً از روش برهان خلف بهره می گیریم و در مسیر اثبات از خود قضیه نیز استفاده می کنیم. وقتی با دانش آموزان کلاس برای حل این تمرین وارد بحث شدیم، از ایشان خواستیم که راه حل ارائه کنند. آن هایی که در منزل به تمرین فکر کرده بودند، تقریباً همه، راه حلی را که کتاب در راهنمایی خود ارائه داده است، پیشنهاد می کردند؛ ولی ناگهان متوجه شدیم که اگر تمرین ۶ را یک قضیه بدانیم، تمرین ۷ در واقع عکس این قضیه است. لذا می توانیم برای حل آن از روش برهان خلف استفاده کنیم.



مهدی میرزافام
دبیر دبیرستان های
شهرستان عجبشیر
استان آذربایجان شرقی

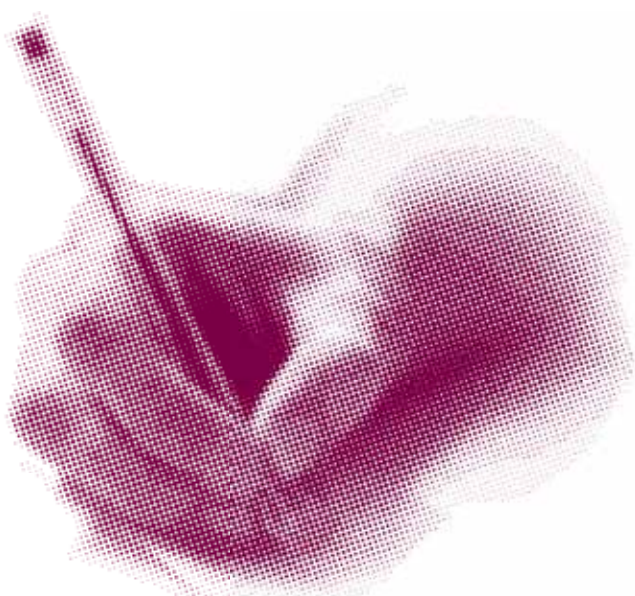
مقدمه

در اینجا چند اصطلاح را که در متن اصلی احتمالاً برایتان ناشناخته است، تعریف می کنیم و یا توضیح می دهیم:

* چندضلعی محدب: یک چندضلعی را محدب گویند هرگاه پاره خطی که هر دو نقطه دلخواه آن را به هم وصل می کند، کاملاً در داخل آن قرار بگیرد. در یک چندضلعی محدب نیمسازهای داخلی هر دو رأس مجاور متقاطعند.

* قضیه وجود مثلث: اگر سه عدد حقیقی مثبت داشته باشیم و هریک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک تر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که اندازه ضلع های آن این سه عدد باشند.

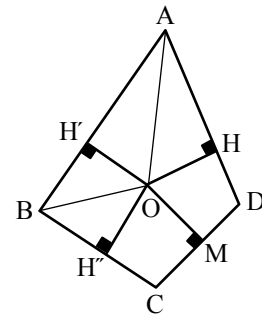
* چندضلعی محیطی: اگر همه ضلع های یک چندضلعی



اثبات: دو رأس مجاور دلخواه مانند A و B را انتخاب و نیم‌ساز داخلی آن‌ها را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند. طبق ویژگی نیم‌ساز یک زاویه داریم:

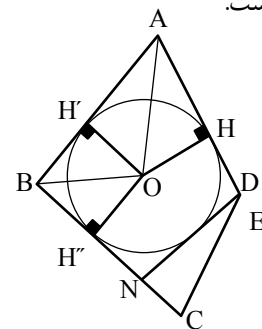
$$OH = OH' = OH'' = r$$

حال، اگر دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O رسم کنیم، سه ضلع AD، AB و BC به ترتیب در نقاط H، H' و H'' بر دایره مماس خواهند شد. از نقطه O عمود بر ضلع CD رسم می‌کنیم و محل فرود را M می‌نامیم. اگر $OM = r$ باشد، در این صورت دایره مذکور بر ضلع CD نیز مماس می‌شود و این یعنی چهارضلعی ABCD محیطی است و چیزی برای اثبات نخواهیم داشت. حال اگر چنین نباشد، یعنی اگر $OM \neq r$ (برهان خلف) که در این صورت یکی از حالات زیر پیش می‌آید:



شکل ۳

حالت اول: اگر $OM > r$ ، در این صورت دایره گفته شده داخل چهارضلعی خواهد افتاد. حال از رأس D مماسی بر دایره‌ای که گفته شد، رسم می‌کنیم و محل تقاطع آن با ضلع BC را N می‌نامیم. این، یعنی چهارضلعی ABND، محیط بر دایره رسم شده است.



شکل ۴

حال طبق تمرین ۶ همین صفحه از کتاب درسی می‌توان نوشت:

$$AD + BN = AB + DN \quad (۱)$$

و طبق فرض داریم:

$$AD + BC = AB + CD \quad (۲)$$

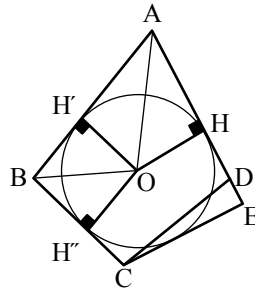
حال اگر طرفین رابطه (۱) را از طرفین رابطه (۲) کم کنیم، خواهیم داشت:

$$BC - BN = CD - DN \Rightarrow CN = CD - DN$$

$$\Rightarrow CN + DN = CD \quad (۳)$$

که رابطه (۳) با قضیه وجود مثلث در تناقض است (یعنی مثلث DNC قابل تشکیل نیست). لذا $OM > r$ نمی‌تواند درست باشد.

حالت دوم: اگر $OM < r$ در این صورت قسمتی از دایره گفته شده بیرون از چهارضلعی خواهد افتاد. حال از رأس C بر دایره، مماسی رسم می‌کنیم و محل تقاطع آن با امتداد ضلع AD را E می‌نامیم. چهارضلعی ABCE محیط بر دایره رسم شده است.



شکل ۵

حال طبق تمرین ۶ همین صفحه از کتاب درسی می‌توان نوشت:

$$AB + CE = BC + AE \quad (۳)$$

و طبق فرض داریم:

$$AB + CD = BC + AD \quad (۴)$$

حال اگر رابطه (۴) را از رابطه (۳) کم کنیم، خواهیم داشت:

$$CE - CD = AE - AD \Rightarrow CE - CD = DE$$

$$\Rightarrow CE = CD + DE \quad (۵)$$

که رابطه (۵) با قضیه وجود مثلث در تناقض است (یعنی مثلث CDE قابل تشکیل نیست). لذا $OM < r$ نمی‌تواند درست باشد. مشاهده می‌کنیم در هر دو حالت ما به تناقض رسیدیم. لذا فرض خلف باطل و حکم یعنی $OM = r$ برقرار است.

پی‌نوشت‌ها

- * کتاب هندسه (۲)، مؤلفان: جواد حاجی بابایی، محمد هاشم رستمی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام‌آزاد، زهرا گویا، جعفر نیوشا، بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، عزیزه رحمانی، اسدالله رضوی و مرتضی میرمحمدرضایی.

ریاضی، دانشی زیبا، شیرین و دوست‌داشتنی

آموزشی

سیده صدیقه علوی*
کارشناس ارشد ریاضی محض
دبیرستان شاهد
ناحیه یک ساری

آموزش ریاضی، آموزش عمومی

کلید واژه

چکیده

دانش ریاضی به دلیل اهمیت و کاربرد گسترده‌اش در ایجاد و گسترش تمدن بشری از دیرباز مورد توجه بوده و از زمانی که بشر در صدد آموزش نسل‌های جوان خود برآمده، در برنامه درسی گنجانده شده است. در این مقاله تلاش شده است، آموزش این دانش در نظام آموزشی کشورمان و بازتاب‌های این آموزش و نتایجش بررسی شود و با جست‌وجوی رویکردهایی که نیاز به تغییر در آن‌ها احساس شده است، راه‌حل‌هایی ارائه شود.

مقدمه

آنچه پیش‌رو دارید دل‌نوشته‌ای است به زبان کسی که با دانش ریاضی از کودکی تا بزرگسالی دمساز بوده و از این هم‌نشینی خرسند، و از بی‌مهری‌هایی که با این عزیز می‌شود، دل‌نگران و رنجیده‌خاطر است. کم‌نبوده‌اند مقالات و سخنرانی‌های بس مبسوط و غزا که در باب اهمیت ریاضیات، تأثیر ریاضیات، جهانی کردن ریاضیات، و لزوم آموزش ریاضی ارائه شده‌اند، ولی نتیجه این همه چه بوده است؟ آیا آشتی با ریاضیات بوده است یا هنوز گریز از آن ادامه دارد؟ شاید به این مقوله کمتر پرداخته‌ایم! آنچه در ادامه می‌آید، بررسی وضعیت کنونی درس ریاضی از دیدگاه کسی است که به‌نوعی با آن درگیر است. سپس به آنچه از این آموزش انتظار می‌رود، می‌پردازیم. در پایان نیز راه‌های برون‌رفت از وضعیت فعلی و حرکت به‌سوی آنچه باید باشد، ارائه شده است.

آنچه در آموزش عمومی ما ریاضیات دانسته می‌شود

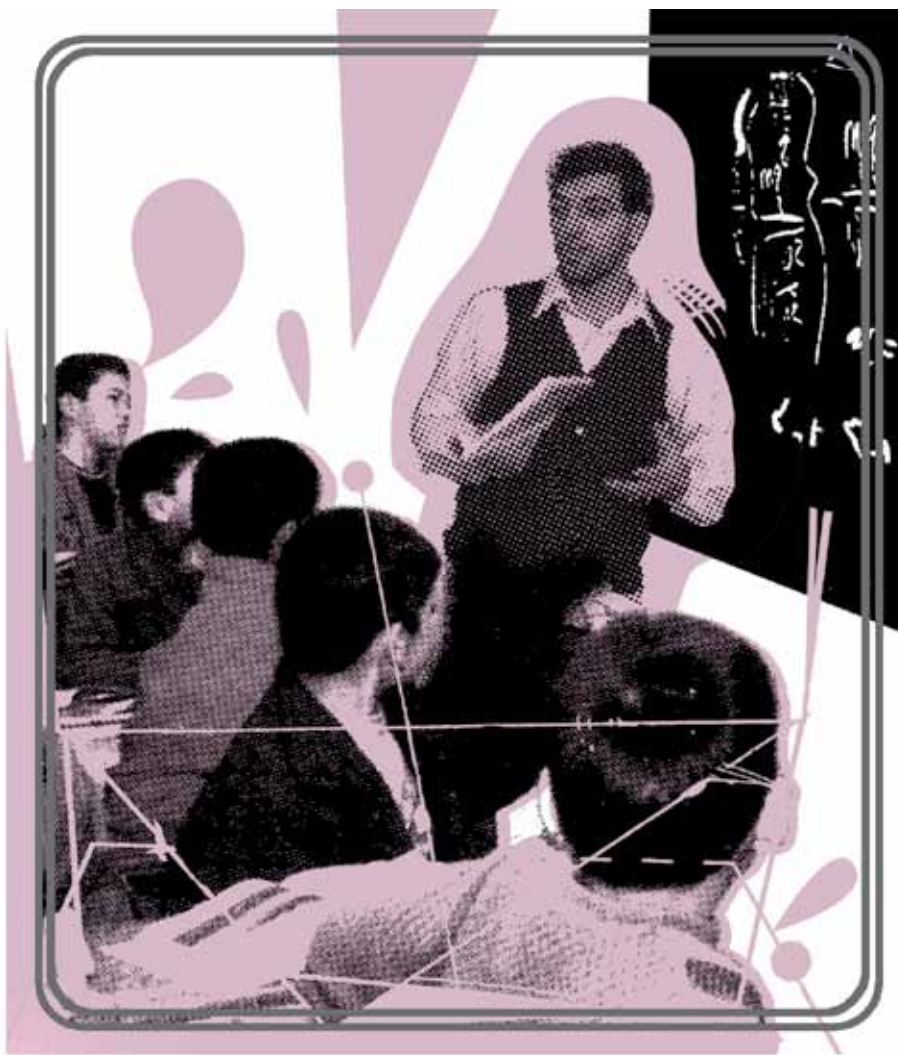
اجازه بدهید از دیدگاه یک ریاضی‌خوان از ابتدایی تا دبیرستان

حرکت کنیم و ببینیم، چه چیزهایی در ساعتی که با نام ریاضی و عنوان‌های متناسب به آن از اول ابتدایی تا چهارم دبیرستان می‌گذرانیم، قرار است

بیاموزیم (تازه من شاگردی هستم که از اول ابتدایی تا چهارم دبیرستان این درس را ۲۰ می‌گیرم).

اول دبستان را به پایان رسانده‌ام. اکنون اعداد حسابی را تا صد می‌شمارم. می‌توانم جمع و تفریق اعداد را تا جایی که انگشتان دست و پایم اجازه دهند، انجام دهم. می‌توانم خط و منحنی باز و بسته بکشم. جمع تکراری را دیده‌ام. می‌توانم مداد، خودکار، کتاب و خیلی شانس بیاورم، پرتقال، سیب و نظایر آن را تا دست کم تا ۱۰۰ بشمارم.

می‌روم کلاس دوم. یک یادآوری، بعد جمع و تفریق که اول اسمش منها بود. کمی می‌گذرد و روش عجیبی به اسم قرض دادن و ده بر یک و شبیه این‌ها یاد می‌گیرم. خیلی بجنهم، کمی جلو می‌روم و شاید برخی سه رقمی‌ها را هم در نوشتن رسمی به‌کار ببرم و آرام‌آرام جمع و تفریق کنم. با گردی و چهارگوش و سه‌گوش هم آشنا می‌شوم. می‌آیم به سوم دبستان این جمع و تفریق که ما را رها نمی‌کند! دائم بر رقم‌هایشان اضافه می‌شود. خیلی از قرض دادن و ده بر یک خوشمان، می‌آمد قطارش پر واگن‌تر شده است. تازه حالا جمع‌های تکراری هم باید در سروسامان بگیرند. قبلش من باید در یک جان‌کندن حسابی، یک چهارگوش بزرگ ۱۰ در ۱۰ (حالا نامش به مربع تغییر یافته) را که جدول ضرب



نامیده می‌شود، مثل یک داروی تلخ قاشق قاشق بخورم تا آخرش ببینم چه خبر است.

روزهای شاد زندگی من سپری می‌شود و من با کابوس ریاضی چهارم و پنجم که همه از قبل می‌گفتند سخت است، شب‌ها را صبح می‌کنم و شاید خودم را بکشم برای رفتن به تیزهوشان که دیگر دارد می‌رود به سال بعد که قبلاً اول راهنمایی بود. بالاخره در ضرب دو رقمی در دو رقمی و سه رقمی در سه رقمی، اسم زاویه‌ها (گوشه خودمان)، مثلث و مستطیل و دایره، تقسیم، مضرب، بخش‌پذیری، واحدها، تناسب، مساحت، حل مسئله و... سری توی سرها پیدا می‌کنم. می‌گویند به دوره راهنمایی که برویم، معلم این درس با بقیه درس‌ها فرق می‌کند. راستی چه‌طور می‌شود؟

در دوره راهنمایی باز هم مفصل به پنج کلاس قبلی سری می‌زنیم و برمی‌گردیم. چیزهایی به اسم هندسه پیدا شده‌اند که یادش بخیر زیر سر همان سه‌گوش و چهارگوش و گردی خودمان است. شکل‌های شبیه هم که توی هر کدام به یک گوشه گیر می‌دهند و باید اندازه‌اش را پیدا کنیم. خط‌کش هست، ولی باید محاسبه کنیم! یک چیزی که ۲ سانتی‌متر است، می‌گویند ۲ کیلومتر است و از این شعبده‌بازی‌هایی که معلوم نیست چرا در کتاب این‌قدر زیادند. تازه برایمان گل و ماشین می‌کشند و می‌شمارند. بعد چیزی که «ایکس» نام دارد، پیدا می‌شود. اینجا در این سه سال جذر می‌گیریم و تقریب می‌کنیم. مسئله‌ها، یادم رفته بود، از دوم ابتدایی تا اینجا ما را تعقیب کرده‌اند. مثل سایه عذاب هر شب تا حلشان نکنیم، نمی‌توانیم بخوابیم.

به دبیرستان می‌رسم. وای نگویید!

آموزش عمومی و یک چیزهایی که حد و پیوستگی، مشتق و انتگرال نامیده می‌شوند. می‌گویند در فیزیک به‌درد می‌خورند، ولی ما این‌ها را یک‌جور دیگر می‌بینیم. شاید اگر برویم دانشگاه (وای کابوس بعدی کنکور)، آنجا به‌درد بخورند. ما که سال اول و دوم در فیزیک هرچه لازم داشتیم، معلم‌ها گفته‌اند و بعدش یک‌طور دیگر در ریاضی پیدایشان شد. ولی در فیزیک گویی بهتر بود، می‌شد با آن‌ها کنار آمد. اینجا نمایی‌ها و لگاریتم‌ها نفسمان را گرفته‌اند.

راستی در این دوازده سال ریاضی خواندیم که آخرش یاد بگیریم یک چیزی به اسم تابع را که به هیچ

یک اسم‌هایی که قبلاً بلد بودیم، حالا طور دیگری شده‌اند. فکر کنم همان موضوع گردی و دایره است. ما در راهنمایی معادله خط می‌نوشتیم، ولی حالا شیب، موازی، عمود، قرینه معکوس، فاصله نقطه از خط و یک کشف جدید داریم؛ چیزی که آن را «مثلثات» می‌نامند. البته چیزهایی درباره ربطش به مثلث شنیده‌ام. آن خط‌های دوست داشتنی حالا بلای جان ما شده‌اند. پست‌های جدیدی مثل مماس و قائم داریم. خط‌خطی‌های دبستان یک شناس‌نامه‌هایی به نام معادله دارند و صحبت از وارون شدنشان و مساحت زیرشان است.

خلاصه می‌رسیم به ته کابوس

**کتاب‌های درسی
باید به سمت
موضوعات تازه
و پیشرفته‌تر
بروند و به جای
اینکه هر سال
موضوعات زیادی
را تکرار کنند، به
ژرفا بپردازند**

**صرافی مستقیم نیست، بکشیم و
انتگرالش را حساب کنیم!**

البته نویسنده منکر اهمیت مباحث مطرح شده در درس‌های جبر، ریاضیات گسسته، هندسه ۲ و هندسه تحلیلی نیست. ولی در سال چهارم عملاً تمام این‌ها به دلیل آمادگی برای کنکور، به توصیه همکاران غیررسمی در مراکز غیررسمی آموزشی کنار گذاشته می‌شوند و در نتیجه نمودی ندارند.

**■ نگاه پیکره آموزش و پرورش، جز
معلمان ریاضی به ریاضیات**

از نگاه بخش اعظمی (حدود ۷۰ درصد) از همکاران، مدیران، معاونان مدارس تا مسئولان اداری در سطح معاونان و مدیران منطقه‌ای تا استانی، ریاضی یک چالش در نظام آموزشی است. دبیران ریاضی کمترین راندمان را دارند، در دسرهای آموزشی حاد مربوط به درس ریاضی است، عامل افت و مردودی درس ریاضی است و مخلص کلام، کاش روزی بیاید که درس ریاضی و معلمان از نظام آموزشی کشور حذف شوند، تا دغدغه‌های آنان تمام شود.

■ معلمان ریاضی چه می‌گویند؟

کلاس‌هایمان پر از دانش‌آموزان بی‌انگیزه و بی‌حوصله‌اند که با همه‌چیز، جز حرف زدن و شیطنت قهرند. دغدغه همه‌چیز را دارند جز درس و مدرسه. نظام آموزشی یک برنامه تحمیلی دارد و برنامه و کتاب درسی را کس دیگری تدارک می‌بیند. ما، هم باید درس بدهیم و هم باید سپر بلای همه مشکلات باشیم. آخر هم باعث همه مشکلات ما هستیم که باید یک تنه پاسخ دهیم. مسئولان از رده مدرسه‌ای تا بالا دائم از وضعیت تدریس ریاضی ناراضی‌اند و مشکل را در تدریس آن‌ها جست‌وجو می‌کنند.

کل جامعه نسبت به ریاضیات و آموزش آن دید منفی دارد و ریاضیات به یک کابوس اجتماعی بین خانواده‌ها تبدیل شده است. ترس از ریاضی مانند ترس از مار آن قدر عمیق شده است که گاهی شک می‌کنیم نکند ارثی باشد! همه تلاش می‌کنیم دانش‌آموزان تا حد امکان در امتحانات پایان هر سال، نهایی و کنکور نتیجه بگیرند تا شاید کمی به احساس رضایت از کارمان برسیم و امیدوی برای تدریس در سال آینده پیدا کنیم.

**■ آموزش ریاضی آن‌طور که باید
باشد**

ارزش‌های آموزش ریاضی در مدرسه کدام‌اند؟

- اقتصاد ما وابسته به انسان‌هایی است که می‌توانند از مهارت‌های ریاضی خود در علوم، فناوری، مهندسی، تجارت و اقتصاد استفاده کنند.
- ریاضی یک حوزه از دانش منطقی است که ذهن انسان را به‌طور منطقی پرورش می‌دهد.
- ریاضی فعالیت لذت‌بخش است.
- ریاضی بخشی از میراث فرهنگی ماست.

● ریاضی برای درک جهان واقعی و برای زندگی روزمره ضروری است (رفیع‌پور کتابی، ۱۳۹۰: ۶۲-۵۶). دانش‌آموزان نباید به ریاضی به‌عنوان مجموعه‌ای از قواعد و رویه‌های دلخواه نگاه کنند. باید ریاضی را موضوعی ببینند که در آن اشیا به‌طور منطقی و با معنا به هم مرتبط‌اند و لازم است به این باور برسند که قادر به فهمیدن آن هستند.

در هر پایه تحصیلی، برنامه درسی باید بر موضوعات محدودتری تمرکز کند و در عوض، برای آن‌ها وقت

بیشتری صرف گردد و عمیق‌تر به آن‌ها پرداخته شود.

کتاب‌های درسی باید به سمت موضوعات تازه و پیشرفته‌تر بروند و به جای اینکه هر سال موضوعات زیادی را تکرار کنند، به ژرفا بپردازند (جرمی کیل، ۱۳۸۹).

**■ نیازهایی که شاید ریاضیات
پاسخ‌گوی بخشی از آن باشد**

می‌دانیم که در دوره متوسطه، دانش‌آموزان در مرحله نوجوانی و آغاز جوانی‌اند و به واقع در اوج انرژی دوره زندگی خود قرار دارند. پس اگر آموزش بانشاط و هیجان‌انگیز باشد، مقبولیت بیشتری خواهد داشت. یکی دیگر از ویژگی‌های این دوره روحیه حقیقت‌جویی و حقیقت‌طلبی است؛ یافتن دلیل پدیده‌ها و روحی که بر آن‌ها حاکم است. بچه‌ها مسلماً در سال‌های اول زندگی با مشکلات زیادی مواجه‌اند که ساختار شخصیت آن‌ها را تشکیل خواهد داد. اگر آن‌ها در جایی بتوانند نحوه رویارویی با مشکلات را بیاموزند، به آرامش خواهند رسید.

■ نتیجه‌گیری و پیشنهاد

● (الف) تجزیه و تحلیل

دست‌پورده‌های ما در نظام آموزشی، نیازهایی دارند که شاید در روند آموزش ما دیده نشده‌اند یا اگر هم مدنظر بوده‌اند، راهبرد مناسبی برای برآورده شدنشان اندیشیده نشده است یا در مرحله اجرا فراموش شده‌اند.

از سوی دیگر، در روند آموزش باورهای یاددهندگان و باورهای یادگیرندگان به شدت تأثیرگذارند. باورها از مهم‌ترین عوامل تأثیرگذار در بروز رفتارهای آدمی هستند و به دلیل ساختار مجرد بخشی از ریاضیات، تأثیر آن‌ها در کیفیت رفتارهای مرتبط

با ریاضی افراد، عمیق تر است. مثلاً، باورهای یادگیرنده نسبت به خود، یادگیری، ریاضی و معلم آن، به عنوان قسمتی از دانش غیررسمی فرد، یکی از پایه های یادگیری و حل مسئله ریاضی وی را تشکیل می دهند (حسام، ۱۳۹۰: ۱۰-۴).

در چند دهه اخیر، مطالعات زیادی در حوزه باورهای معلمان ریاضی انجام شده اند که مؤید تأثیر مستقیم باورها بر شیوه تدریس اند. تلاش برای تغییر شیوه تدریس معلمان، بدون تغییر باورهای آنان نشدنی است. بنابراین، برای بهبود آموزش ریاضی، توجه به باورهای معلمان حیاتی است. معلمان می توانند با تغییر باورهای خود نسبت به ماهیت ریاضی و یاددهی - یادگیری آن، نحوه تعامل خود را با دانش آموزان از نو طراحی کنند (فدایی، ۱۳۹۱: ۲۱-۱۶).

● (ب) پیشنهادها

دیدیم که اگر مشکلات را بپذیریم و در جهت رفع آن ها اقدام کنیم، ناچار از تغییر رویکردها و باورها هستیم. از این رو، پیشنهادهای زیر را مطرح می کنم:

۱. اول از همه با توجه به بار منفی که عنوان ریاضیات دارد و در عرف و لغت، همه آن را با ریاضت مرتبط می کنند (هرچند که در لغت معنای ورزش هم می دهد و برخی با توجه به ورزش فکر، لغت ریاضی را برای این دانش مناسب می دانند)، پیشنهاد می کنم عنوان جدیدی به جای ریاضیات برگزیده شود. حساب را هم خیلی مناسب نمی دانم، زیرا تنها به یک بعد از این دانش می پردازد و سایر ویژگی های آن را تحت الشعاع قرار می دهد.

۲. شاید به تغییر اساسی نگرش و دیدگاه ها نیاز داشته باشیم؛ مثلاً،

در سه سال اول ابتدایی (در سیستم ۳-۳-۶ جدید)، کتابی برای هر سه پایه تحصیلی در اختیار دانش آموزان گذاشت به نام دانش (یا دانش های) پایه که مسائلی کاربردی با رویکرد حل مسئله و آمیخته ای از دانش های فیزیک، ریاضی، شیمی و زیست شناسی، آن طور که به واقع در زندگی هم هست، مطرح کند و بتوان آن را با روش های آمیخته، مانند اکتشافی و فعال تدریس کرد (یک مثال ساده: کاشتن گل به صورت عملی، در باغچه مدرسه، در یک مساحت معلوم، با نظم خاص، ریاضی اش تعداد گل ها و مکان آن ها، شیمی و فیزیکش ترکیبات خاک، تأثیر نور و...، زیست شناسی هم مراحل رشد. تازه مهارت های اجتماعی همکاری و مواجهه با مشکل و حل آن هم آموزش داده می شود). در این روش، هم دانش ها با آمیختگی واقعی شان ارائه می شوند، و هم دلچسب، کاربردی و دلپذیر هستند

۳. در پایه های بالاتر، به خصوص پایان متوسطه عمومی و متوسطه تخصصی، کلاس هایی که به آموزش دانش ریاضی فعلی اختصاص می یابند، به استفاده از مسائل کاربردی به معنای واقعی بپردازند. (نه مانند برخی مسائلی که در کتاب های فعلی مطرح می شوند و چند پهلوی بودنشان، معلمان را روی منظور سؤال به چالش می کشد و از هدفش دور می شود). همچنین، با دادن آگاهی لازم و آموزش های عملی به همکاران در کلاس های ضمن خدمت، کلاس های مزبور به جلسات بحث و تبادل نظر حداقل سه جلسه در هر نیم سال تحصیلی در درس هایی با محتوای جبر، هندسه

و حسابان فعلی (گسسته، تحلیلی و دیفرانسیل) تبدیل شوند. به این شکل که معلم موضوع، مسئله یا قضیه ای را مطرح کند و بعد به صحبت بچه ها در مورد درکشان از موضوع و راه حل های پیشنهادی گوش فرادهد. همه دانش آموزان را، حتی آن ها را که ایده ای ندارند، وارد بحث کند و سپس بحث را سامان دهد و نتیجه گیری کند. نظرات دانش آموزانی را هم که قانع نمی شوند، کتبی دریافت و افکارشان را در تعامل هدایت کند. به این ترتیب، نوعی ارزشیابی پایانی در کلاس انجام می شود، مشارکت در تدریس برآورده می شود، کلاس نشاط پیدا می کند، و روحیه حقیقت جویی بچه ها تقویت می شود و پرورش می یابد. در واقع از این طریق مراحل و فنون حل مسئله به کار برده و آموزش داده می شود. از همه مهم تر، انرژی دانش آموزان در این چانه زنی علمی به مصرف می رسد و کلاس هم بانشاط و زنده می شود.

۴. برای جشنواره الگوی برتر تدریس حداقل در دو کلاس از هر مدرسه دوربینی باشد و هر معلم به دلخواه خود در این گونه کلاس ها تدریس کند و در پایان هر جلسه فیلم را خودش تجزیه و تحلیل کند و تغییرات رویکردی که خودش صلاح می داند، در روش تدریس خود (هر کسی بهترین و منصف ترین قاضی برای خویش است) اعمال کند. هرگاه خودش احساس رضایت کرد، آن بخش را که مناسب می داند به مسئولان مدرسه ارائه کند تا در جشنواره مطرح شود. چون این تدریس ها در موقعیت واقعی و با تعداد واقعی دانش آموز انجام می شود، کاربردی خواهد بود.

*sedighehalavi54@gmail.com

در چند دهه اخیر، مطالعات زیادی در حوزه باورهای معلمان ریاضی انجام شده اند که مؤید تأثیر مستقیم باورها بر شیوه تدریس اند

آموزش ترجمه متون ریاضی (۳)

آموزشی

حمیدرضا امیری

■ اصطلاحات و لغات مهم

1. Set	مجموعه
2. Subset	زیرمجموعه
3. Unordered	نامرتب
4. Distinct	مجزا، دوبه‌دو متمایز
5. Notation	نماد
6. Equal	مساوی
7. Braces	آکولاد
8. Cardinlity	عدد اصلی
9. Collection	گردایه
10. Describe	توصیف کردن
11. Superset	آبرمجموعه

A set is an unordered collection of distinct objects. We use the notation $x \in S$ to mean "x is an element of S" and $x \notin S$ to mean "x is not an element of S." Given two subsets (subcollections) of U, X and Y, we say "X is a subset of Y," written $X \subseteq Y$, if $x \in X$ implies that $x \in Y$. Alternatively, we may say that "Y is a superset of X." $X \subseteq Y$ and $Y \subseteq X$ mean the same thing. We say that two subsets X and Y of U are equal if $X \subseteq Y$ and $Y \subseteq X$. We use braces to designate sets when we wish to specify or describe them in terms of their elements: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, \dots\}$. A set with k elements is called a k-set or set with cardinality k. The cardinality of a set A is denoted by $|A|$.

Since a set is an unordered collection of distinct objects, the following all describe the same 3-element set $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\} = \{a, b, c, b\}$.

■ Primes and their history

An integer $p > 1$ is called a prime if it is not divisible by any integer other than, 1, -1, p and -p. Another way of saying this is that an integer $p > 1$ is a prime if it cannot be written as the product of two smaller positive integers. An integer $n > 1$ that is not a prime is called composite (the number 1 is considered neither prime, nor composite). Thus 2, 3, 5, 7, 11 are primes, but $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot 4$, $9 = 3 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$ are not primes.

یک مجموعه، گردایه‌ای نامرتب از اشیای دوبه‌دو متمایز است. ما از نماد $x \in S$ به معنی «x عضوی از S است» استفاده می‌کنیم و $x \notin S$ به معنی «x عضوی از S نیست» است. فرض کنیم X و Y دو زیرمجموعه از U باشند، می‌گوییم: $X \subseteq Y$ «زیرمجموعه Y است» و می‌نویسیم: $X \subseteq Y$ ؛ اگر $x \in X$ نتیجه دهد که: $x \in Y$.

متقابلاً ممکن است ما Y را «آبرمجموعه X» بگوییم. $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$ به معنی یکی بودن آن‌هاست. می‌گوییم دو مجموعه X و Y از U مساوی یکدیگرند، اگر: $Y \subseteq X$ و $X \subseteq Y$.

ما از آکولادها برای مشخص کردن مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم و زمانی که بخواهیم آن‌ها را برحسب (همراه با) اعضایشان نام‌گذاری کنیم $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{2, 4, 6, \dots\}$. هر مجموعه دارای K عضو، یک K-مجموعه یا مجموعه‌ای با عدد اصلی K نامیده می‌شود. عدد اصلی مجموعه A با نماد $|A|$ نشان داده می‌شود.

از آنجا که هر مجموعه، گردایه‌ای نامرتب از اشیای دوبه‌دو متمایز است، مجموعه‌های زیر همگی یک مجموعه ۳ عضوی را توصیف می‌کنند:

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\} = \{a, b, b, c, c, b\}$$

■ اعداد اول و تاریخچه آن‌ها

عدد صحیح $p > 1$ اول نامیده می‌شود هرگاه بر هیچ عدد صحیحی غیر از ۱ و -۱ و -p و p بخش پذیر نباشد. به بیان دیگر، عدد صحیح $p > 1$ اول است اگر نتوانیم آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد صحیح کوچک‌تر از خودش بنویسیم.

عدد $n > 1$ که اول نباشد، مرکب نامیده می‌شود (عدد ۱ نه اول و نه مرکب در نظر گرفته می‌شود). بنابراین ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ اعدادی اول هستند، ولی $۴ = ۲ \times ۲$ ، $۶ = ۲ \times ۳$ ، $۸ = ۲ \times ۴$ ، $۱۰ = ۲ \times ۵$ اول نیستند.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول فرهنگ و اندیشه

این یک جدول ۶×۶ با رمزی نهفته در آن است. هدف از حل جدول یافتن رمز آن است و شما باید آن را به دست آورید. به این منظور، راه حل زیر را قدم به قدم انجام دهید. نخست جدول عددی است، حل کنید. عددهای یک رقمی یا دورقمی و یا سه رقمی را با توجه به توضیحات جدول، به دست آورید و آن‌ها را در ردیف‌های افقی و عمودی جدول، از چپ به راست، یا از بالا به پایین قرار دهید:

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} = ?$ - اندازه زاویه حاده α که در رابطه

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin 37^\circ$$
 صدق می‌کند.

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ - دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ با طول‌های مساوی، به ترتیب

با محور x زاویه‌های 85° و 17° درجه می‌سازند. مکمل زاویه‌ای که بردار $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ با محور x می‌سازد، چند درجه است؟
۶. زاویه بین دو بردار $2i + \sqrt{3}j$ و i . مقدار عددی a ، به شرطی که چندجمله‌ای $3x^4 + x^2 + a$ بر $x^4 - 1$ بخش پذیر باشد.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						
۴						
۵						
۶						

حال که جدول را حل کرده‌اید، آن را یک ماتریس $M_{6 \times 6}$ فرض کنید. درایه‌های این ماتریس همان عددهای جدول هستند. مثلاً درایه m_{33} یعنی عدد واقع در سطر دوم و ستون سوم جدول. بدیهی است درایه‌هایی که در جدول شامل خانه سیاه هستند، وجود ندارند. مثلاً درایه m_{13} وجود ندارد. حال با توجه به این موضوع، دوازده عدد زیر را بیابید و در خانه‌های جدول افقی زیر به ترتیب بچینید:

	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
	$m_{54} m_{66}$	$m_{51} m_{63}$	$m_{52} m_{65}$	$m_{45} m_{36}$	$m_{44} m_{65}$	m_{11}	$m_{41} m_{11}$	$m_{36} m_{16}$	$m_{25} m_{17}$	$m_{37} m_{14}$	$m_{11} m_{15}$	$m_{11} m_{17}$

افقی:

۱. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ - تعداد ضلع‌های چندضلعی منتظمی که در دایره

به شعاع R محاط شده و مساحت آن مساوی $3R^2$ است.
۲. تفاضل یک زاویه داخلی یک پنج‌ضلعی منتظم از متمم زاویه 85° - عدد 1534 به پیمانه 52 با این عدد همنهشت است.

۳. حاصل $6x - 4y + 7z$ که x و y و z جواب‌های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} 3x + y + 4z = 9 \\ -x + y + 2z = -1 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$
 هستند - عدد حسابی که طبیعی نیست.

۴. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{2x - 6}$ - مقدار عددی a که در دو رابطه

$$2^a = 8^{b+1} \text{ و } 9^b = 3^{(a-1)}$$
 صدق می‌کند.

۵. واسطه هندسی بین دو عدد a و b که در روابط $\log_{13} a = \frac{1}{2}$ و

$$\log_{13} b = \frac{3}{2}$$
 صدق می‌کنند - عدد سه رقمی با سه رقم متوالی

(از راست به چپ) که مجموع آن و مقلوبش 150° واحد از سه برابر تفاضل آن و مقلوبش کمتر است.

۶. با فرض $a^b = 2$ ، حاصل $3a^{5b}$ - حاصل

$$\int_{-2}^3 x[x] dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$$

عمودی:

۱. کوچک‌ترین عدد اول دو رقمی - نسبت جمله سیزدهم یک

دنباله هندسی به جمله اول آن، به شرطی که جمله دهم آن $\sqrt{62}$ و جمله چهارم آن $\sqrt{2}$ باشد.

۲. دو برابر نخستین عدد اول سه رقمی - سه برابر دومین عدد اول دو رقمی.

۳. در پرتاب دو تاس با هم، تعداد اعضای پیشامد تصادفی آن که

مجموع دو عدد ظاهر شده بزرگ‌تر از ۳ باشد - با فرض $x > 0$ و

$$f(x) = \frac{x^2}{12} + \frac{11}{12} \text{ مقدار } (f^{-1})'(1)$$

سرگرمی
علمی

بهرام دستوریان

توجه داشته که منظور از دو درایه متوالی، عدد دو رقمی است که رقم‌های آن همان دو درایه هستند. مثلاً $m_{11} m_{22}$ یک عدد دو رقمی است که رقم یکان آن m_{11} و رقم دهگان آن m_{22} است.

حالا که جدول بالا را پر کرده‌اید، می‌توانید به سادگی رمز جدول را بیابید. ۳۲ حرف الفبای فارسی را با عددهای طبیعی ۱ تا ۳۲ به ترتیب متناظر کنید. مثلاً «الف» با عدد ۱، «ب» با عدد ۲ و... «ی» با عدد ۳۲. حال حروف متناظر با دوازده عدد جدول فوق را بیابید و به همان ترتیب به هم وصل کنید تا رمز جدول را به دست آورید.

پی‌نوشت

* مقلوب هر عدد طبیعی، از وارونه کردن جای ارقام آن به دست می‌آید. مثلاً مقلوب ۲۴، ۴۲ و مقلوب ۱۳۹۳، ۳۹۳۱ است.

توپ‌ها توزیع در جعبه‌ها

آموزشی



مصطفی دیداری
کارشناس ارشد ریاضی

کلیدواژه
توزیع توپ در جعبه‌ها، ترکیب با تکرار، افراز،
جمع‌وند یک عدد

چکیده

در این مقاله، دسته‌های مهمی از مسئله‌های شمارشی که به بررسی تعداد روش‌های توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها منجر می‌شوند، بررسی شده‌اند.

بسیاری از مسئله‌های شمارشی را می‌توان برحسب تعداد راه‌های توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها بیان کرد. در این مقاله چهار مسئله اساسی توزیع‌ها را به اجمال بررسی می‌کنیم. این چهار مسئله عبارت‌اند از:

۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متمایز
 ۲. تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه متمایز
 ۳. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه یکسان
 ۴. تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه یکسان
- سه مسئله اول به‌صورت مستقیم یا غیرمستقیم در کتاب‌های درسی مطرح شده‌اند، در صورتی که از مسئله چهارم صحبتی به میان نیامده است.

۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متمایز

مثال ۱. می‌خواهیم ۵ توپ با شماره‌های ۱، ۲، ... و ۵ را در ۳ جعبه به رنگ‌های آبی، قرمز و زرد توزیع کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** برای هر توپ ۳ انتخاب وجود دارد: بنابراین طبق اصل ضرب جواب مسئله $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ است.

نتیجه ۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت برابر است با: k^n .

مثال ۲. چند تابع از مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ به مجموعه $\{1, 2, 3\}$ وجود دارد؟

● **پاسخ:** عضو a می‌تواند به هر یک از عددهای ۱، ۲ و ۳ تصویر شود. بنابراین برای هر عضو از مجموعه اول ۳ انتخاب وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر است با: 3^5 .

مثال ۳. می‌خواهیم ۳ جایزه متفاوت را بین ۵ نفر توزیع کنیم، به‌طوری که به هر کدام حداکثر یک جایزه برسد. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** جایزه اول را می‌توانیم به هر کدام از ۵ نفر بدهیم. جایزه دوم را نیز به هر کدام از ۴ نفر باقی‌مانده و جایزه سوم را نیز می‌توانیم به ۳ نفر دیگر بدهیم. بنابراین طبق اصل ضرب، جواب مسئله $5 \times 4 \times 3$ است. این عدد را می‌توانیم به‌صورت $\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$ نیز بنویسیم.

نتیجه ۲. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت ($k \geq n$) که در هر جعبه حداکثر یک

توپ قرار گیرد، برابر است با: $P(k, n) = \frac{k!}{(k-n)!}$

مثال ۴. شرکتی در نظر دارد برای هر یک از شغل‌های نگهبان، دفتردار، منشی و مسئول رایانه یک نفر را استخدام کند. ۴ نفر برای استخدام در این شغل‌ها داوطلب شده‌اند. شرکت به چند روش می‌تواند افراد را برای مشاغل استخدام کند؟

● **پاسخ:** ۴!.

نتیجه ۳. تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه n عضو به خودش برابر است با $n!$

نتیجه ۴. تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضو به خودش برابر است با $n!$



مثال ۵. مثال قبلی را در نظر بگیرید، با این تفاوت که ۱۰ نفر برای استخدام داوطلب شده باشند. پرنمودن مشاغل به چند روش امکان پذیر است؟

● **پاسخ:** ابتدا باید ۴ نفر را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{10}{4}$ روش امکان پذیر است. حال این ۴ نفر را می توان به ۴! طریق در مشاغل استخدام کرد. بنابراین جواب مسئله $\frac{10!}{6!} \times 4! = \binom{10}{4} \times 4!$ است (می توانستیم با استدلالی مشابه به عدد $10 \times 9 \times 8 \times 7$ برسیم).

نتیجه ۵. تعداد راه های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متمایز ($k \leq n$) به طوری که در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرار گیرد، برابر است با: $S(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

مثال ۶. شرکتی در نظر دارد برای چهار شغل نگهبان، دفتردار، منشی و مسئول رایانه به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ نفر را استخدام کند. ده نفر متقاضی استخدام در این مشاغل شده اند. شرکت به چند روش می تواند این افراد را استخدام کند؟

● **پاسخ:** ابتدا می توانیم ۳ نفر را انتخاب و آن ها را مسئول رایانه کنیم. در ادامه ۲ نفر از افراد باقی مانده را برای منشی گری در نظر می گیریم و به همین ترتیب سایر مشاغل را به افراد می دهیم. بنابراین جواب مسئله $\binom{10}{3} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1}$ است.

مثال ۷. می خواهیم ۵ توپ از رشته های ورزشی متفاوت را در سه جعبه ۱، ۲ و ۳ به گونه ای قرار دهیم که در هر جعبه حداقل یک توپ قرار گیرد. این کار به چند روش امکان پذیر است؟

● **پاسخ:** صورت دیگر مسئله به این صورت است: تعداد توابع پوشا از مجموعه ای ۵ عضوی به مجموعه $\{1, 2, 3\}$ را به دست آورید.

برای جواب دادن به این مسئله ناچاریم از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنیم. ابتدا پیشامدهای نامطلوب را تعریف می کنیم:

پیشامدهایی که در جعبه اول توپی قرار نگیرد یا عدد ۱ تصویر هیچ: A_1
 عضوی از مجموعه اول نباشد
 پیشامدهایی که در جعبه دوم توپی قرار نگیرد یا عدد ۲ تصویر هیچ: A_2
 عضوی از مجموعه اول نباشد
 پیشامدهایی که در جعبه سوم توپی قرار نگیرد یا عدد ۳ تصویر هیچ: A_3
 عضوی از مجموعه اول نباشد
 تعداد کل حالت های نامطلوب برابر است با:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$
 $= 2^5 - 2^4 - 2^4 - 2^4 + 2^3 = 3 \times 2^5 - 3$
 دقت کنید که برای مثال، $|A_1|$ را می توان به این صورت به دست آورد که تعداد حالت هایی که در جعبه اول توپی قرار نگیرد، ۲۵ است، چون برای توزیع هر توپ دو جعبه

موجود است. برای به دست آوردن پاسخ نهایی مسئله باید کل روش‌های توزیع، یعنی 3^5 را از حالت‌های نامطلوب کم کنیم. بنابراین $(3^5 - (3 \times 2^5 - 3))$ روش برای توزیع توپ‌ها با شرایط مسئله وجود دارد.

قضیه ۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت ($k \leq n$) (تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به k عضوی) به طوری که در هر جعبه حداقل یک توپ قرار گیرد، برابر است با:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \binom{k}{0} k^n - \binom{k}{1} (k-1)^n + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} (k-k)$$

۲. توزیع n توپ یکسان در k جعبه متمایز

برای بررسی این نوع از توزیع‌ها ابتدا لازم است قضیه ۲ را یادآوری کنیم:

قضیه ۲: تعداد جایگشت‌های n شیئی که n_1 تا از آن‌ها مانند هم، n_2 تا از آن‌ها نیز مانند هم و... n_k تا از آن‌ها مانند هم است که $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ برابر است با:

$$\frac{n!}{(n_1)!(n_2)! \dots (n_k)!}$$

مثال ۸. با حروف کلمه انتخابات چند کلمه ۸ حرفی بدون توجه به مفهوم آن می‌توان ساخت؟

● **پاسخ:** با توجه به اینکه ۳ حرف الف و ۲ حرف ت وجود دارد، پاسخ $\frac{8!}{3!2!}$ است.

مثال ۹. با ارقام ۰، ۰، ۰، ۲، ۲، ۳، ۳ و ۳ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت؟

● **پاسخ:** رقم صفر در اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند قرار بگیرد، بنابراین این رقم یا عدد ۲ یا عدد ۳ است.

۲ : اعدادی که با ۲ شروع می‌شوند.

$$\frac{7!}{3!1!2!} = 140$$

۳ : اعدادی که با ۳ شروع می‌شوند.

$$\frac{7!}{2!2!3!} = 210$$

بنابراین جواب مسئله $140 + 210 = 350$ عدد ۸ رقمی است.

مثال ۱۰. ضریب جمله $x^2 y^3 z^4 w$ در بسط $(x+y+z+w)^{10}$ چیست؟

● **پاسخ:** جمله $x^2 y^3 z^4 w$ از ضرب دو تا x ، سه تا y و چهار

تا z و یک w به دست می‌آید. بنابراین به تعداد جایگشت‌های این ده شیئی جمله $x^2 y^3 z^4 w$ در بسط وجود دارد. بنابراین ضریب آن $\frac{10!}{2!3!4!1!}$ است.

به بحث اصلی این قسمت، یعنی توزیع توپ‌های یکسان به جعبه‌های متمایز برمی‌گردیم. فرض کنید n توپ یکسان در اختیار داشته باشیم و تعداد توپ‌های توزیع شده در جعبه اول را x_1 ، تعداد توپ‌های توزیع شده در جعبه دوم را x_2 و... تعداد توپ‌های توزیعی در جعبه k ام را x_k بنامیم. واضح است که: $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. از طرف دیگر هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نیز متناظر با یک روش توزیع است. بنابراین می‌توان گفت تعداد روش‌های توزیع n توپ

یکسان در k جعبه متمایز برابر است با تعداد جواب‌های معادله

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0 \\ i = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

مثال ۱۱. به چند روش می‌توان پنج توپ یکسان را در ۳ جعبه با رنگ‌های متفاوت توزیع کرد؟

● **پاسخ:** با توجه به توضیحات قبلی تعداد روش‌ها برابر است با جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. به این منظور ۵ توپ و دو خط، ||00000، در نظر می‌گیریم. هر جایگشت این هفت شیئی متناظر با یک جواب معادله فوق خواهد بود. برای مثال، جایگشت 0|000|0 متناظر با جواب $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 1$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌ها یا همان تعداد جواب‌های معادله برابر است با:

$$\frac{7!}{5!2!} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2}$$

قضیه ۳. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$
 برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

مثال ۱۲. می‌خواهیم از بین ۳ نوع گل متفاوت، دسته‌گلی با ۱۰ شاخه گل درست کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** تعداد گل‌های نوع اول را x_1 ، نوع دوم را x_2 و نوع سوم را x_3 می‌نامیم. بنابراین: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ و لذا پاسخ

$$\binom{12}{2} \text{ است.}$$

مثال ۱۳. می‌خواهیم ۱۰ سکه تمام بهار آزادی را بین نفرات اول تا سوم یک مسابقه به گونه‌ای توزیع کنیم که به نفر اول

حداقل ۳ سکه، به نفر دوم حداقل ۲ سکه و به نفر سوم حداقل یک سکه برسد. این کار به چند روش امکان پذیر است؟

● **پاسخ:** جواب مسئله برابر با جواب های صحیح و نامنفی

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 1 \end{cases}$$

است. به این منظور ابتدا ۳

سکه به نفر اول، ۳ سکه به نفر دوم و ۱ سکه به نفر سوم می دهیم. بنابراین تعداد روش ها، برابر است با تعداد روش های توزیع ۴ سکه باقی مانده بین ۳ نفر که این تعداد برابر است با:

$$\binom{6}{2} = 15$$

● **مثال ۱۴:** می خواهیم ۱۲ سکه تمام بهار آزادی را بین نفرات اول تا سوم یک مسابقه با شرایط زیر توزیع کنیم:

(الف) به نفر اول بیشتر از ۳ سکه

(ب) به نفر دوم حداقل یک و حداکثر ۳ سکه

(ج) به نفر سوم حداکثر ۲ سکه

این کار به چند روش امکان پذیر است؟

● **پاسخ:** تعداد روش ها برابر است با جواب های صحیح و

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 > 3, 1 \leq x_2 \leq 3, x_3 \leq 2 \end{cases}$$

نامنفی معادله. برای از بین بردن

شرط های بزرگ تری، ۴ سکه به نفر اول و یک سکه به نفر دوم می دهیم. بنابراین کافی است ۷ سکه باقی مانده را با شرایط

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 7 \\ y_1 \leq 2, y_2 \leq 2 \end{cases}$$

توزیع کنیم (دستگاه دوم) y_1 برابر است

با تعداد سکه هایی که به نفر اول از بقیه سکه ها می رسد و...). برای از بین بردن شرط کوچک تری باید از اصل شمول و عدم شمول استفاده نماییم. بنابراین پیشامدهای نامطلوب به صورت روبه رو

$A_1 = y_1 > 2$ ها در آن ها ۲ جواب هایی که

$A_2 = y_2 > 2$ ها در آن ها ۲ جواب هایی که

تعریف می شود.

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \\ &= \binom{4+3-1}{3-1} + \binom{4+3-1}{3-1} - \binom{1+3-1}{3-1} = 27 \end{aligned}$$

$$\binom{7+3-1}{3-1} - 27 = 9$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با: ۹

(چون کل جواب های دستگاه دوم را از حالت های نامطلوب کم می کنیم).

● **مثال ۱۵:** تعداد جمله های بسط $(x + y + z + w)^{10}$ را به دست آورید.

● **پاسخ:** هر جمله بسط فوق به صورت $x^a y^b z^c w^d$ است که در آن داریم: $a + b + c + d = 10$. بنابراین هر جواب صحیح و نامنفی این معادله متناظر با یک جمله از بسط است و جواب مسئله $\binom{13}{3}$ است.

● **مثال ۱۶:** چند سه تایی مرتب از اعداد طبیعی مانند (a,b,c) وجود دارد که: $abc = 3^{12}$ ؟

● **پاسخ:** واضح است که باید $a = 3^x, b = 3^y, c = 3^z$. بنابراین: $3^{x+y+z} = 3^{12}$ و لذا: $x + y + z = 12$.

بنابراین به ازای هر جواب صحیح و نامنفی معادله فوق دقیقاً یک سه تایی به دست می آید. در نتیجه پاسخ مسئله $\binom{14}{2}$ است.

● **مثال ۱۷:** چند سه تایی مرتب از اعداد طبیعی مانند (a,b,c) وجود دارد که: $abc = 2^{10} \times 3^{12}$ ؟

● **پاسخ:** شکل کلی اعداد a,b,c باید به صورت $a = 2^{x_1} \times 3^{y_1}, b = 2^{x_2} \times 3^{y_2}, c = 2^{x_3} \times 3^{y_3}$ باشد.

بنابراین، با توجه به $abc = 2^{10} \times 3^{12}$ باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 12 \end{cases}$$

که تمامی متغیرها صحیح و نامنفی اند.

هر جواب دستگاه متناظر با یک سه تایی است، در نتیجه جواب

$$\text{مسئله } \binom{12}{2} \binom{14}{2} \text{ است.}$$

قابل ذکر است که تعداد سه تایی های صحیح با شرایط

$$\text{مسئله فوق برابر است با: } 4 \times \binom{12}{2} \binom{14}{2} \text{ (چرا؟)}$$

۳. توزیع n توپ متمایز در k جعبه یکسان

● **مثال ۱۸:** می خواهیم از بین ۴ نفر، دو تیم دو نفره تشکیل دهیم تا با هم مسابقه دهند. این کار به چند روش امکان پذیر است؟

● **پاسخ:** فرض کنیم این چهار نفر را با مجموعه $\{a,b,c,d\}$

نمایش دهیم. هر انتخاب دو عضو از این چهار نفر، دو تیم را به وجود می آورد. بنابراین ممکن است گفته شود جواب مسئله

$$\binom{4}{2}$$

است. اما باید دقت کرد که انتخاب دو عضو a و b تیم های

$\{a,b\}$ و $\{c,d\}$ و انتخاب دو عضو c و d نیز همان تیم‌بندی را به وجود می‌آورد. بنابراین پاسخ مسئله $\frac{1}{2!} \binom{4}{2} = 3$ است. این تیم‌بندی‌ها به این صورت است: $\{a,b\} \{c,d\}$ ، $\{a,c\} \{b,d\}$ و $\{a,d\} \{b,c\}$.

مثال ۱۹. می‌خواهیم ۴ توپ متمایز را در ۴ جعبه یکسان توزیع کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** چهار توپ را با مجموعه $\{a,b,c,d\}$ نمایش می‌دهیم و توزیع‌ها را به چهار دسته زیر تقسیم می‌کنیم:

(الف) در تمامی جعبه‌ها توپ قرار گیرد.

(ب) در سه جعبه توپ قرار گیرد و یکی خالی بماند.

(ج) در دو جعبه توپ قرار گیرد و دو جعبه خالی بمانند.

(د) در یک جعبه توپ قرار گیرد و بقیه جعبه‌ها خالی بمانند.

واضح است بخش الف فقط دارای توزیع $\{a\} \{b\} \{c\} \{d\}$ و بخش د نیز فقط دارای توزیع $\{a,b,c,d\}$ است. برای به دست آوردن حالت‌های بخش ب می‌توان گفت: باید یک جعبه دو عضوی و دو جعبه یک عضوی داشته باشیم. بنابراین تعداد این

توزیع‌ها (افرازاها) برابر است با: $\frac{\binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{1}}{2!} = 6$ (مستقیماً حالت‌ها را بنویسید). تقسیم بر ۲! به دلیل وجود دو مجموعه تک‌عضوی است که جابه‌جایی آن‌ها حالت جدیدی را به وجود نمی‌آورد. اما بخش ج. در این حالت یا دو جعبه هر کدام دارای دو توپ داریم که تعداد آن‌ها می‌شود: $3 = \frac{\binom{4}{2} \binom{2}{2}}{2!}$ و یا جعبه‌ای سه‌تویی و یک جعبه یک‌تویی داریم که تعداد آن‌ها برابر است با $4 = \binom{4}{3} \binom{1}{1}$ است. بنابراین به $15 = 1 + 6 + 3 + 4$ روش می‌توان ۴ توپ متمایز را در ۴ جعبه یکسان توزیع کرد.

نتیجه: تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه یکسان برابر است با تعداد راه‌های افراز مجموعه n عضوی به یک، دو، ...، k مجموعه.

مثال ۲۰. می‌خواهیم ۴ توپ متمایز را در ۳ جعبه یکسان توزیع کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** جواب مسئله برابر است با تعداد افرازهای مجموعه $\{a,b,c,d\}$ به یک یا دو یا سه مجموعه. این تعداد با توجه به

مثال ۱۹ برابر است با ۱۴.

مثال ۲۱. ۱۲ نفر را به چند روش می‌توان در ۴ اتاق ۳ نفره اسکان داد؟

● **پاسخ:** $\frac{\binom{12}{3} \binom{9}{3} \binom{6}{3} \binom{3}{3}}{4!}$. دقت کنید که در این تعداد، اتاق‌ها (جعبه‌ها) با یکدیگر تفاوتی ندارند.

در پایان این قسمت می‌خواهیم رابطه‌ای کلی برای به دست آوردن تعداد افرازاها ارائه دهیم. فرض کنید $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ برابر با تعداد راه‌های توزیع n شیء متمایز در k جعبه یکسان بوده است، به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند. در واقع $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ همان تعداد راه‌های افراز مجموعه n عضوی به k زیرمجموعه ناتهی است. قابل ذکر است که اعداد $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ را «اعداد استرلینگ نوع دوم» نیز می‌نامند.

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \quad \text{قضیه ۴.}$$

برهان: بنابر قضیه ۱، $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$ تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت است به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند.

این توزیع‌ها را به روشی دیگر نیز به دست می‌آوریم. ابتدا فرض می‌کنیم n شیء را در k جعبه یکسان توزیع کرده‌ایم، به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند.

حال می‌توانیم جعبه‌ها را به $k!$ طریق با اعداد $1, 2, \dots, k$ نام‌گذاری کنیم. بنابراین تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت به طوری که هیچ کدام خالی نماند برابر است با: $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k!$ و حکم ثابت است.

مثال ۲۲. تعداد راه‌های توزیع ۵ توپ متمایز را در ۳ جعبه یکسان به دست آورید، به طوری که جعبه‌ای خالی نماند.

● **پاسخ:**

$$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3!} \left(\binom{3}{0} (3-0)^5 - \binom{3}{1} (3-1)^5 + \binom{3}{2} (3-2)^5 \right) \\ = \frac{1}{6} (3^5 - 3 \times 2^5 + 3) = 6$$

نتیجه: تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} + \dots + \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: سه معمای پانزده

سرگرمی
سر علمی

هوشنگ شرقی

من و دو دخترم دیشب برای شام تنها بودیم و مادر آن‌ها برای کاری واجب به منزل مادرش رفته بود! من که آشپزی بلد نیستم و نمی‌خواستم از غذاهای فست‌فودی استفاده کنم، تصمیم گرفتم که به غذاهای ساده خانگی بسنده کنم و دخترها هم به‌همین رضایت دادند. در تهیه این غذاها عامل زمان بسیار مهم بود، ولی متأسفانه تمام ساعت‌هایمان خوابیده بودند و تنها ابزارهای اندازه‌گیری زمان برای ما ساعت‌های شنی متفاوتی بودند که در اختیار داشتیم. در نتیجه این موضوع سه چند معمای جالب بر خوردیم که آن‌ها را برایتان نقل می‌کنم.

◆ معمای اول: تخم‌مرغ‌های پخته!

اولین چیزی که تصمیم گرفتیم بخوریم، تخم‌مرغ آب‌پز بود (البته چیزهای دیگری هم داشتیم!) برای آنکه مطمئن شویم تخم‌مرغ‌ها کاملاً سفت و پخته می‌شوند، ۱۵ دقیقه باید در آب می‌جوشیدند و چون کمی گرسنه بودیم، می‌خواستیم بلافاصله بعد از ۱۵ دقیقه تخم‌مرغ‌ها را بخوریم. به کمک دو ساعت شنی که یکی ۷ دقیقه‌ای و دیگری ۱۱ دقیقه‌ای است، به هر زحمتی بود توانستیم زمان ۱۵ دقیقه را اندازه‌گیری کنیم و بلافاصله بعد از ۱۵ دقیقه تخم‌مرغ‌هایمان هم آماده خوردن بودند. به‌نظر شما چه‌طور این ۱۵ دقیقه را اندازه گرفتیم؟

◆ معمای دوم: تخم‌مرغ‌های عسلی!

بعد از خوردن تخم‌مرغ‌های پخته، باز هم گرسنه بودیم! تصمیم گرفتیم چند تخم‌مرغ عسلی هم بخوریم. برای پخته شدن تخم‌مرغ عسلی گذشت ۹ دقیقه وقت، لازم و کافی بود. پس باید ۹ دقیقه وقت را اندازه‌گیری می‌کردیم و این بار می‌خواستیم از یک ساعت شنی ۴ دقیقه‌ای و یک ساعت شنی ۷ دقیقه‌ای استفاده کنیم. چگونه توانستیم این کار را انجام دهیم به‌طوری که درست پس از ۹ دقیقه همه تخم‌مرغ‌هایمان حاضر بودند؟

◆ معمای سوم: کتلت‌های خوشمزه!

بعد از خوردن تخم‌مرغ‌های عسلی، باز هم گرسنه بودیم! ولی دختر بزرگم گفت: «عیبی ندارد بابا! سه تا کتلت در یخچال داریم که به هر کدامان یکی از آن‌ها می‌رسد. فقط باید کمی سرخ شوند، چون سرد و یخ‌زده هستند.»
حال باید هر طرف هر کتلت را یک دقیقه سرخ می‌کردیم. مشکل ما دیگر زمان نبود، چون با ساعت شنی یک دقیقه‌ای که داشتیم این کار را به سادگی می‌توانستیم انجام دهیم. مشکل این بود که یک ماهی‌تابه کوچک برای سرخ کردن داشتیم که فقط گنجایش دو کتلت را داشت و ما می‌خواستیم سه دقیقه بعد کتلت‌هایمان حاضر باشند! چه‌طور این کار را انجام دادیم؟

یادتان باشد که باید هر دو طرف هر سه کتلت سرخ شوند و هر طرف یک دقیقه طول می‌کشد تا سرخ شود و ماهی‌تابه برای دو کتلت جا دارد.

۴. توزیع n توپ یکسان در k جعبه یکسان

مثال ۲۳: می‌خواهیم عدد ۵ را به‌صورت جمع اعداد طبیعی بنویسیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** تعداد روش‌ها را به پنج دسته زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

الف) جمع یک عدد	$5=5$
ب) جمع دو عدد	$5=4+1=3+2$
ج) جمع سه عدد	$5=3+1+1=2+2+1$
د) جمع چهار عدد	$5=2+1+1+1$
ه) جمع پنج عدد	$5=1+1+1+1+1$

بنابراین جواب مسئله ۷ روش است.

مثال ۲۴: می‌خواهیم ۵ توپ یکسان را در ۵ جعبه یکسان

توزیع کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** ۷ روش (چرا؟)

نتیجه: تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه

یکسان برابر است با تعداد حالت‌هایی که بتوان

عدد n را به‌صورت جمع یک، دو، ... و k عدد

طبیعی نوشت.

مثال ۲۵: به چند روش می‌توان ۷ توپ یک‌رنگ را در ۳ جعبه

یکسان قرار دارد، به‌طوری که هیچ کدام خالی نماند؟

● **پاسخ:** باید دید که به چند روش می‌توان عدد ۷ را به‌صورت مجموع ۳ عدد طبیعی نوشت:

$$7=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$$

مثال ۲۶: به چند روش می‌توان n توپ یکسان را در $n-1$ جعبه

یکسان توزیع کرد، به‌طوری که هیچ کدام خالی نماند؟ ($n \geq 2$)

پاسخ: یک روش

مثال ۲۷: به چند روش می‌توان n توپ یکسان را در $n-2$ جعبه

یکسان توزیع کرد، به‌طوری که هیچ کدام خالی نماند؟ ($n \geq 4$)

● **پاسخ:** دو روش

مثال ۲۸: به چند روش می‌توان n توپ یکسان را در دو جعبه

توزیع کرد، به‌طوری که هیچ کدام خالی نماند؟

● **پاسخ:** $n = 1 + (n-1) = 2 + (n-2) + \dots + \left[\frac{n}{2} \right]$ است. بنابراین

شایان ذکر است که در حالت کلی فرمولی صریح برای تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه یکسان ارائه نشده است، اما در کتاب‌های ریاضی می‌توان رابطه بازگشتی برای این مسئله پیدا کرد.

رشد آموزشی ریاضی

شماره های ۲۰ تا ۲۷

کتاب «ثروت ملل» آدام اسمیت را به زبان مجارستانی ترجمه کرد. این ترجمه تا مدت ها کتاب درسی مدارس در مجارستان بود. اندکی قبل از فوتش موفق شد که به عنوان پریوات دوتسنت (استاد بدون کرسی) دانشگاه بوداپست انتخاب شود.

وقتی جورج ده ساله بود، پدرش فوت کرد و همسر و سه پسر و دو دختر از خود به جای گذاشت. برادر بزرگ تر در رشته پزشکی تحصیل کرد و جراحی برجسته و یکی از استادان جراحی دانشگاه شد. گرچه او یک روش جراحی معده که به نام او مشهور است ابداع کرد، اما به ریاضیات عشق می ورزید و همواره از انتخاب رشته پزشکی متأسف بود. چند سال بعد برادر کوچک تر جورج در جنگ جهانی اول کشته شد.

مادر او مُصر بود که جورج حرفه پدرش را تعقیب کند. لذا او در سال ۱۹۰۵ در دانشگاه بوداپست در رشته حقوق ثبت نام کرد. ولی به علت بی علاقه گی فقط یک نیم سال در این رشته ادامه داد. سپس در رشته زبان و ادبیات به مدت دو سال تحصیل کرد که این ادامه تحصیل به اخذ گواهی نامه تدریس در دوره های دبیرستان انجامید؛ ولی او از این مدرک هیچ گاه استفاده نکرد. او که دوستدار ادبیات بود - در حالی که هنوز شاگرد دوره اول دبیرستان بود، اشعار هاینه را به زبان مجارستانی

پرداختند، هرگز تصور نمی کردند که این نظریه روزی کاربردی برای «تسخیر فضا»

پیدا کند. البته منظور این نیست که کاربرد ریاضیات فراموش شود و یا کم اهمیت جلوه کند، بلکه مقصود این است که ریاضیات را نباید فقط به خاطر کاربرد آن مطالعه کرد. به قول هیلبرت، کاربرد نباید ملاک ارزش ریاضیات باشد. خوش بختانه هر دوی این ها مؤید یکدیگرند.

مقاله بعدی به زندگی نامه جورج پولیا، ریاضی دان برجسته معاصر می پردازد که به ترجمه و اقتباس دکتر علیرضا مدقالچی است. مقاله می گوید:

«جرج پولیا در تاریخ ۱۳ دسامبر ۱۸۸۷ م در شهر بوداپست به دنیا آمد. پدرش یاکوب (۱۸۹۷-۱۸۴۴) و مادرش آنا (۱۹۳۹-۱۸۵۳) نام داشت. پدر او در یک شرکت بیمه بین المللی در مجارستان سمت حقوق دان داشت. علاقه اصلی یاکوب به اقتصاد و آمار بود. او در این راستا ادامه می داد تا جایگاهی آکادمیک در اقتصاد به دست آورد. از این رو تمام وقت خود را وقف تحقیق می کرد. در حالی که به وسیله و کالت امرار معاش می کرد، چندین کتاب و مقاله نوشت. او چندین زبان از جمله انگلیسی را به اندازه کافی آموخت که

جرج پولیا، المپیاد بین المللی ریاضی،
قاعده تقسیم بر هفت و سیزده

کتاب و مقاله

شماره ۱۷

به سال

پنجم انتشار «رشد آموزش ریاضی» رسیده ایم. بهار ۱۳۶۷ است و بهای مجله همچنان ۱۰۰ ریال. مقاله زیبایی در ریاضیات، دومین مقاله این شماره است و آغازی این چنین دارد:

«ما خیلی به ریاضیات می پردازیم و احکام آن را به خاطر زیبایی معنوی شان تأیید می کنیم. زیرا اگر این شور و هیجان فراموش شود، ما دیگر ریاضیات را نمی فهمیم، مفاهیم آن از میان می پاشند و برهان ها استحکام خود را از دست می دهند. ریاضیات بی معنا می شود و در انبوهی از مکرر گویی های پوچ فرو می رود» (مایکل پولانی، در کتاب معرفت شخصی).

گو اینکه انگیزه پیدایش ریاضیات مسائل عملی بوده، ولی می توان گفت که در بسیاری از موارد نیز ریاضیات به خاطر زیبایی اش خلق و ابداع شده است و به خاطر آن به پیش می رود. وقتی یونانیان در چندین هزار سال پیش به بسط نظریه مقاطع مخروطی



شماره ۱۸

شماره هجدهم
رشد آموزش ریاضی
در تابستان ۱۳۶۷
انتشار یافته است.
مجله با «گزارش
وضعیت آموزش ریاضی
در آموزش و پرورش» آغاز
و با پاسخ به نامه‌ها پایان
می‌پذیرد. یکی از مقاله‌های
جالب این شماره، مقاله عدد

طلایی و نسبت زیبایی و قاعده
تعیین‌کننده باقی‌مانده تقسیم یک عدد
صحیح بر اعداد ۷، ۱۳، ۲۷ و ۳۷، و اعداد
صحیح ردیف شده، است که چنین آغاز
می‌شود:

«ما از عدد صحیح ردیف شده
برداشت خاصی داریم که بهتر است این
اصطلاح را تعریف کنیم.
تعریف: عدد صحیح مثبت را ردیف
شده می‌نامیم، در صورتی که ارقام آن، در
نمایش اعشاری، از چپ به راست نازولی
باشد.»

عنوان مقاله بعدی «گزارش سفر
هیئت اعزامی ایران برای شرکت در بیست
ونهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی» است.
در قسمتی از این مقاله چنین آمده است:
«هیئت اعزامی ایران برای شرکت در
بیست و نهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی
ساعت ۸:۱۵ بعد از ظهر روز چهارشنبه،
۱۵ تیرماه ۱۳۶۷ با بدرقه مسئولین
محترم وزارت آموزش و پرورش، از طریق
پکن و توکیو عازم استرالیا شد. سرپرستی
این هیئت را آقای دکتر محمدعلی
نجفی، عضو هیئت علمی «دانشگاه
صنعتی شریف» و سرپرستی دوم را آقای
دکتر علیرضا مدقالچی، عضو هیئت
علمی «دانشگاه تربیت معلم» عهده‌دار

برگرداند - او به فلسفه هم علاقه‌مند
بود. یکی از استادان فلسفه او را متقاعد
کرد که مطالعه ریاضیات و فیزیک او را
در درک مسائل فلسفی یاری می‌کند.
لذا مطالعه جدی ریاضیات را شروع
کرد؛ موضوعی که او در سال‌های اول
تحصیلش چندان علاقه‌ای به آن نشان
نداده بود.»

دیگر مقاله‌های این شماره مجله
عبارتند از «بررسی معادلات درجه
دوم دوجوهولی با استفاده از ماتریس»
از هاشم پروانه مسیحا، «اهمیت زوایای
۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه در نظریه اعداد»
از دکتر ارسلان شادمان، و «معرفی
نشریات بین‌المللی ریاضی از دکتر
محمدحسن بیژن‌زاده. دکتر بیژن‌زاده
می‌نویسد:

«مجله «ماهنامه ریاضی» از انتشارات
«انجمن ریاضی آمریکا» ست که تقریباً
هر ماه منتشر می‌شود. این مجله که
قدمتی به اندازه تاریخ تأسیس انجمن
ریاضی آمریکا (یکصد سال) دارد، از
جمله کثیرالانتشارترین نشریات این
انجمن به‌شمار می‌آید. ماهنامه ریاضی
می‌کوشد مشوقی برای بسط گسترش
ریاضیات به‌ویژه ریاضیات در سطح
کالج (دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی)
باشد. نظر هیئت تحریریه مجله مبین
آن است که مقالاتی مورد پذیرش قرار
می‌گیرند که جنبه توصیفی داشته و
کاربرد ریاضیات در زندگی واقعی را
مورد توجه قرار دهند. به‌علاوه، محبوبیت
گسترده‌ای بین خوانندگان داشته باشند.
مقالات هر شماره تحت این عنوان‌های
زیر دسته‌بندی می‌شوند: مقالات اصلی؛
یادداشت‌های کوتاه؛ آموزش ریاضیات؛
مسائل و حل آن‌ها؛ بررسی کتاب‌های
جدید؛ بررسی تلگرافی؛ نامه‌هایی به
سردبیر. مجله با حل مسائل پنجمین
مسابقه ریاضی دانش‌آموزان کشور و
نامه‌ها پایان می‌پذیرد.

بودند. آقای توفیق حیدرزاده نیز از مجله
دانشمند در این سفر همراه هیئت بودند.
دانش‌آموزان شرکت‌کننده عبارت بودند
از:

۱. علیرضا بیگدلی، سال چهارم از قم
 ۲. آرش حسینی، سال چهارم از تهران
 ۳. حسام حمیدی تهرانی، سال چهارم
از تهران
 ۴. محمدعلی خجسته‌پور، سال سوم
از شیراز
 ۵. امیراعلم غضنفریان، سال چهارم از
زنجان
 ۶. بهزاد نظری، سال چهارم از اصفهان
- یادآوری می‌شود که اعضای این
تیم از طریق دو آزمون استانی و نهایی
انتخاب شده، و در یک اردوی دوهفته‌ای
در مجموعه ورزشی انقلاب تهران شرکت
کرده بودند. در این اردو مسائل مختلف
ریاضی، از جمله مسائل المپیادهای
گذشته توسط استادان دانشگاه و دبیران
مغرب مورد بحث و بررسی قرار گرفت.
همه امور مربوط به برگزاری مسابقات
داخلی و انجام سایر مراحل اعزام با
همت و مساعدت «سازمان پژوهش و
برنامه‌ریزی آموزشی» انجام گرفت و

کمیته ویژه‌ای با عنوان «کمیته مسابقات ریاضی دانش آموزی کشور» عهده‌دار نظارت بر اجرای مسابقات داخلی بود. هیئت اعزامی با بدرقه و دعای خیر ریاست محترم سازمان و عده‌ای از مسئولین سازمان با دلی سرشار از امید و آرزو از طریق پایون دولتی به‌سوی توکیو پرواز کرد. هواپیما در ساعت ۳ صبح به وقت تهران (ساعت ۷:۳۰ به وقت پکن) در فرودگاه پکن به زمین نشست، در ساعت ۹ پکن را به قصد توکیو ترک کرد، و در ساعت ۲:۰۷ بعدازظهر به وقت توکیو در فرودگاه ناریتای توکیو به زمین نشست. بالاخره ساعت ۶:۰۸ بعدازظهر از توکیو پرواز و در ساعت ۵:۲۰ صبح به وقت ژاپن در فرودگاه بین‌المللی سیدنی به زمین نشست. اختلاف ساعت پکن و تهران چهار ساعت و نیم و توکیو و سیدنی یک ساعت است. چین و ژاپن اختلاف ساعت ندارند.

در فرودگاه سیدنی، آقای پیترواوه‌لارن (رئیس کمیته اجرایی بیست و نهمین المپیاد) از هیئت‌ها استقبال می‌کرد و راهنمایی‌های لازم را ارائه می‌داد. به‌هر حال هیئت اعزامی بعد از مسافرتی طولانی به اولین مقصد المپیاد رسید و از فرودگاه توسط سرویس دانشگاه به دانشگاه نیوساوت ویلز هدایت شد.

هیئت ما از اولین هیئت‌هایی بود که به سیدنی رسیده بود. در این دانشگاه هیئت‌ها در خوابگاه‌ها اسکان می‌یافتند. سیدنی شهر بزرگ و تمیزی است و حدود سه و نیم میلیون نفر جمعیت دارد. یکی از بناهای بسیار با عظمت شهر سیدنی، برج این شهر است. برج سیدنی بر ساختمانی تجاری و ۱۰ طبقه قرار گرفته و ارتفاع آن در حدود ۳۰۰ متر است که حقیقتاً ثمره‌ای از دانش و فناوری قرن بیستم محسوب می‌شود. در اوج این برج، ساختمانی مدور در چهار طبقه ساخته‌اند که در آن فروشگاه، رستوران و ایوانی

مدور قرار دارد که مشرف بر تمامی نقاط شهر ساحلی سیدنی است.

روز یکشنبه نوزدهم تیرماه متوجه شدیم که عده‌ای از مسلمانان علیه حمله آمریکا به هواپیمای ایرباس ۶۶۵ تظاهرات و راه‌پیمایی کرده‌اند و مراتب نفرت و انزجار خود را ابراز می‌دارند. جالب بود که عده‌ای از غیرمسلمانان نیز در این تظاهرات شرکت داشتند. خبر این تظاهرات به‌طور وسیع در رسانه‌های گروهی پخش شد. اعضای تیم ایران نیز در بخشی از این تظاهرات شرکت کردند. روز دوشنبه بیستم تیرماه مراحل برگزاری المپیاد به‌طور رسمی شروع شد. در این روز سرپرستان اول هیئت‌ها برای شرکت در جلسات هیئت ژوری و طرح و انتخاب سؤال و سایر مراحل امتحان به شهر «کنبرا» اعزام شدند. اعضای هیئت‌ها همراه با سرپرست دوم در سیدنی ماندند. در این مدت، فرصت مناسبی پیش آمد تا با سرپرستان هیئت‌ها درباره موضوعات آموزش ریاضی، نحوه انتخاب اعضای تیم‌هایشان و سایر مسائل علمی و آموزشی مذاکره کنیم.

آزمون مقدماتی در کشورهای مختلف حداقل در دو مرحله انجام می‌گیرد. مثلاً سرپرست دوم یوگسلاوی می‌گفت که یک آزمون بین ایالات مختلف و یک آزمون نهایی به‌عمل می‌آید و بعد از طی اردویی دوهفته‌ای، انتخاب نهایی انجام می‌گیرد. در کشورهای بلوک شرق، مدارس ویژه‌ای برای تأمین کادر فنی و علمی کشور وجود دارد که اعضای تیم‌های شرکت کننده در المپیادها نیز از این مدارس انتخاب می‌شوند. آزمون‌های مقدماتی بین همه دانش‌آموزان به‌عمل می‌آید و لذا هر دانش‌آموز می‌تواند حتی سه یا چهار بار هم در المپیاد شرکت کند. در فرانسه و آلمان غربی هم المپیاد داخلی برگزار می‌شود که دومرحله‌ای است. سیستم انتخاب در آمریکا و انگلستان

چندمرحله‌ای است. یعنی دانش‌آموزان طی چند مرحله آزمون تستی و تشریحی و گذراندن اردوهای مختلف انتخاب می‌شوند. آزمون اولیه در این دو کشور تستی است و بین تمام دانش‌آموزان انجام می‌گیرد.

در مجموع از نحوه انتخاب اعضای تیم چنین برمی‌آید که در هر یک از کشورهای شرکت کننده، کمیته ویژه‌ای مسئول برگزاری المپیادهای داخلی است. این کمیته‌ها برای تشویق و ترغیب جوانان به ادامه تحصیل در رشته ریاضی فعالیت می‌کنند و هر ساله جزوای از مسائل گوناگون ابتکاری تهیه می‌کنند و در اختیار دانش‌آموزان می‌گذارند. برای انتخاب اعضای تیم چند مرحله گزینش انجام می‌گیرد و مراحل آماده‌سازی در اردوهای گوناگون به‌عمل می‌آید. در این اردوها، نه تنها مسائل ریاضی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند، بلکه مباحث درسی هم تدریس می‌شوند. مثلاً دانش‌آموزان رومانی اظهار می‌کردند که طی اردو، مسائل زیادی از مجله ماهانه ریاضی را حل کرده‌اند. رومانی جزو کشورهایی است که همواره در ردیف‌های بالا قرار دارد.

بقیه مقالات این شماره مانند شماره‌های قبل و ادامه مقاله‌های پیشین هستند

شماره‌های ۲۰ و ۲۱

شماره‌های نوزده و بیست مجله که مربوط به سال پنجم انتشار آن است در سال ۱۳۶۷ به بهای ۲۰۰ ریال منتشر شد. مجله پس از مقاله‌های «رشد آموزش ریاضی» و «ریاضیات دوره اسلامی»، به مقاله «معمای ابوالهول»، به ترجمه حسن نصیرنیا می‌رسد. در این مقاله آمده



چنین آمده است:

«در این مقاله برای تشخیص قابلیت تقسیم بر اعداد اول قواعدی ساده بیان شده است. در آغاز چند نمونه را با ذکر مثال ارائه می‌دهیم و سپس یک قضیه کلی و سرانجام یک نمونه را به صورت تفکیکی ثابت می‌کنیم.

قاعده ۱. عددی بر هفت قابل

قسمت است که اگر دو برابر رقم یکان آن را از بقیه عدد (عدد بدون رقم یکان) کم کنیم، باقی‌مانده مضرب هفت باشد. چنانچه در این مرحله مضرب هفت بودن مشخص نباشد، عمل را در مورد عدد حاصل تکرار می‌کنیم. مثلاً عدد ۱۲۱۱ بر هفت قابل قسمت است، زیرا:

$$1211 - (2 \times 1) = 119$$

$$119 - (2 \times 9) = 11$$

(توضیح: به جای کم کردن دو برابر رقم یکان از بقیه عدد، می‌توان ۵ برابر رقم یکان را به بقیه افزود و عمل را ادامه داد). **قاعده ۲.** عددی بر ۱۳ قابل قسمت است که اگر ۴ برابر رقم یکان آن را با بقیه عدد جمع کنیم حاصل، مضرب ۱۳ باشد و در صورت مشخص نبودن مضرب ۱۳، عمل را ادامه می‌دهیم.

مثلاً عدد ۶۳۷ مضرب ۱۳ است، زیرا:

$$637 + (4 \times 7) = 91$$

$$91 + (4 \times 1) = 13$$

توضیح: به جای افزودن ۴ برابر رقم یکان می‌توان ۹ برابر رقم یکان را از بقیه کم کرد.

بقیه مقاله را در همین شماره‌ها می‌توان خواند. عنوان مطلب بعدی «یک مسئله از جبر خطی» و مقاله بعد «محاسبه یک حد و کاربرد آن» است. «پاسخ ششمین مرحله مسابقات دانش‌آموزی کشور» عنوان یکی دیگر از مقالات است. در مقاله «اخبار ریاضی»

است: «دکتر میتسو ماتسو، مهندس پرآوازه ژنتیک در جهان، توانسته است برای نخستین بار موجودات زنده دوبعدی تولید کند. البته موجوداتی نه کاملاً بلکه تقریباً دوبعدی. مخلوق‌های او جانداران ذره‌بینی بلورمانندی هستند که در محیط‌های کشت شبیه به ورقه‌های بسیار بسیار نازک - به نازکی یک لایه مولکول - پرورش می‌یابند.»

دکتر ماتسو، نام «rep-tile» (رپتایل) مرکب از دو واژه «rep» و «tile» مخفف «replicate» به معنی تولیدمثل و تکثیر کردن و واژه tile به مفهوم «آجر کاشی» (از این پس هر کجا نام رپتایل بیاید، به جای آن عبارت «موجود ذره‌بینی» را ذکر خواهیم کرد. م.) را بر این جانداران خود نهاده و دو دلیل هم آورده است: یکی اینکه آن‌ها بر اثر تولیدمثل تکثیر می‌شوند و دیگر اینکه شکل آن‌ها مانند آجرهای کاشی چندوجهی است. این جانوران آن قدر کوچک‌اند که جز با میکروسکوپ‌های الکترونی قوی دیده نمی‌شوند. آن‌ها به کمک مژک‌های کناره‌های بدن خود در محیط کشت مایع ساخته می‌شوند، شنا می‌کنند و غذا را از راه «پوست» جذب می‌نمایند. شکل موجود ذره‌بینی ماتسو، هم‌گام با رشد و نمو بدن آن تغییر نمی‌کند، بلکه به همان صورت چندوجهی باقی می‌ماند. زمانی که حجم بدن موجود ذره‌بینی به مرحله حساس تکثیر رسید، برخلاف یک آمیب، به دو نیم نمی‌شود، بلکه به چهار قسمت هم‌ارز (چهار موجود ذره‌بینی کوچک مساوی که قابل انطباق بر یکدیگر باشند) تقسیم می‌شود که هر یک از نظر شکل و قیافه شبیه موجود ذره‌بینی مادر است.

مقاله دیگر در مورد «عاد کردن» و مطلب بعدی «کاربرد نامساوی‌ها در تعیین ماکسیمم و مینیمم توابع چندمتغیره» است. در مقاله «قواعدی ساده درباره قابلیت تقسیم بر اعداد اول»

نیز با موارد زیر آشنا می‌شویم:

«شورای برنامه‌ریزی دوره متوسطه: به منظور تدوین اهداف، برنامه‌ها و تألیف کتب ریاضی دوره متوسطه با حضور استادان برجسته ریاضی، دبیران باتجربه ریاضی و کارشناسان گروه ریاضی دفتر تحقیقات اولین جلسه خود را در دفتر وزیر محترم آموزش و پرورش با شرکت ریاست محترم سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی و مدیرکل محترم دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی و تألیف تشکیل داد. این جلسات به‌طور مستمر دو هفته یک‌بار در دفتر ریاست محترم سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی با حضور اعضای شورا تشکیل می‌شود.»

چهارمین شماره «پیک ریاضی»، نشریه دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان، دومین شماره «جنگ ریاضی»، نشریه جهاد دانشگاهی دانشکده علوم دانشگاه تهران، و سومین شماره «نشر ریاضی»، نشریه مرکز نشر دانشگاهی منتشر شد.

به این ترتیب به پایان شماره بیستم مجله می‌رسیم و مطالعه بیشتر آن را به عهده خواننده می‌گذاریم.

* aban_mehr@yahoo.com

پای تخته

آموزشی

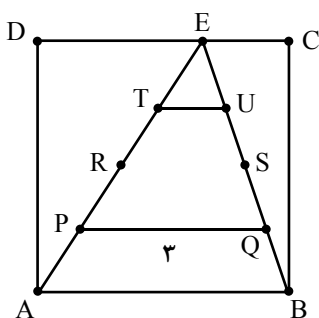
محرم نژاد ایردموسی

بخش اول: مسئله‌ها

۸۱. در یک نهضلی منتظم، همه قطرها را رسم کرده‌ایم. چند مثلث متساوی‌الساقین در شکل حاصل وجود دارد که سه رأس هر یک، سه رأس از نهضلی مذکور است.

۸۲. اشکان در کشوی کمد خود ۱۰ لنگه جوراب آبی و تعدادی لنگه جوراب سفید دارد. اگر او بدون نگاه کردن به جوراب‌ها بخواهد تعدادی لنگه جوراب از کشو خارج کند، به‌طوری که قطعاً یک جفت جوراب آبی در میان آن‌ها باشد، باید حداقل m لنگه جوراب از کشو خارج کند و در صورتی که بخواهد بدون نگاه کردن تعدادی لنگه جوراب بردارد، به‌طوری که قطعاً یک جفت جوراب سفید در میان آن‌ها باشد، باید حداقل n لنگه جوراب از کشو خارج کند. می‌دانیم $m=2n$. چند لنگه جوراب سفید در کشو وجود دارد؟

۸۳. نقطه E روی ضلع CD از مربع $ABCD$ واقع است. پاره‌خط AE توسط نقاط P ، R و T به چهار قسمت مساوی و پاره‌خط EB نیز توسط نقاط Q ، S و U به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. اگر طول پاره‌خط PQ برابر ۳ باشد، مساحت چهارضلعی $PQUT$ را به دست آورید.



شکل ۱

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «فصل‌نامه» برهان است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، ۲۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در فصل‌نامه، برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسمی نفرات برتر در فصل‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکته آخر اینکه در چند شماره اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به تدریج پربرتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

۸۴. افسانه ۶ کارت دارد که روی هر کدام از آن‌ها یک عدد طبیعی نوشته شده است. او هر بار سه کارت را انتخاب می‌کند و سه عدد روی آن سه کارت را با هم جمع می‌کند. بیست عدد حاصل می‌شود که ده‌تای آن‌ها برابر ۱۶ و ده‌تای دیگر برابر ۱۸ هستند. کوچک‌ترین عددی که روی کارت‌ها نوشته شده است چه عددی است؟

۸۵. اگر تعداد اعداد پنج رقمی که حاصل ضرب رقم‌های هر یک برابر ۲۵ است، برابر a و تعداد اعداد پنج رقمی که حاصل ضرب رقم‌های هر یک برابر ۱۵ است، برابر b باشد، $\frac{a}{b}$ را بیابید.

۸۶. نیم دایره‌ای به قطر AB رسم کنید. همچنین، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را طوری رسم کنید که نیم‌دایره را در دو نقطه دیگر به جز A و B قطع کند. یک ناحیه مشترک و سه ناحیه غیرمشترک ایجاد می‌شوند. مجموع مساحت‌های سه ناحیه غیرمشترک را بیابید، اگر بدانیم: $AB=12$.

۸۷. مستطیلی با ابعاد صحیح به مربعات واحد افزاشده است. می‌دانیم تعداد مربعات واحدی که مجاور با ضلع‌های مستطیل هستند، با تعداد بقیه مربعات برابر است. این مستطیل چند در چند است؟

۸۸. عمل $\odot$ روی اعداد مثبت طوری تعریف شده است که داشته باشیم:

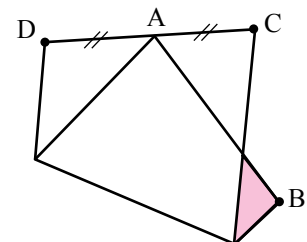
$$(1) (2x) \odot y = \frac{1}{2} + (x \odot y)$$

$$(2) y^2 \odot x = x^2 \odot y$$

$$(3) 2 \odot 2 = \frac{3}{2}$$

مقدار $32 \odot 8$ را بیابید.

۸۹. کاغذی مربع شکل به ضلع ۸ سانتی‌متر داریم. اگر کاغذ را تا کنیم و رأس A را روی نقطه وسط پاره خط DC قرار دهیم، مثلث کوچکی در رأس B ایجاد می‌شود (شکل ۲). مساحت این مثلث را بیابید.



شکل ۲

۹۰. karti با شماره ۱۲ به تو می‌دهم. با رعایت ۲ قاعده زیر می‌توانی کارت‌های دیگری نیز داشته باشی:

۱. اگر karti با شماره a داشتی، می‌توانی karti با شماره $2a+1$ نیز داشته باشی.

۲. اگر karti با شماره b داشتی باشی که b مضرب ۳ باشد، آن‌گاه مجاز هستی karti با شماره $\frac{b}{3}$ هم داشته باشی.

الف. ثابت کن می‌توانی karti با شماره ۲۹ داشته باشی.

ب. ثابت کن می‌توانی karti با شماره $1-2^{2012}$ داشته باشی.

ج. ثابت کن نمی‌توانی karti با شماره ۱۰۰ داشته باشی.

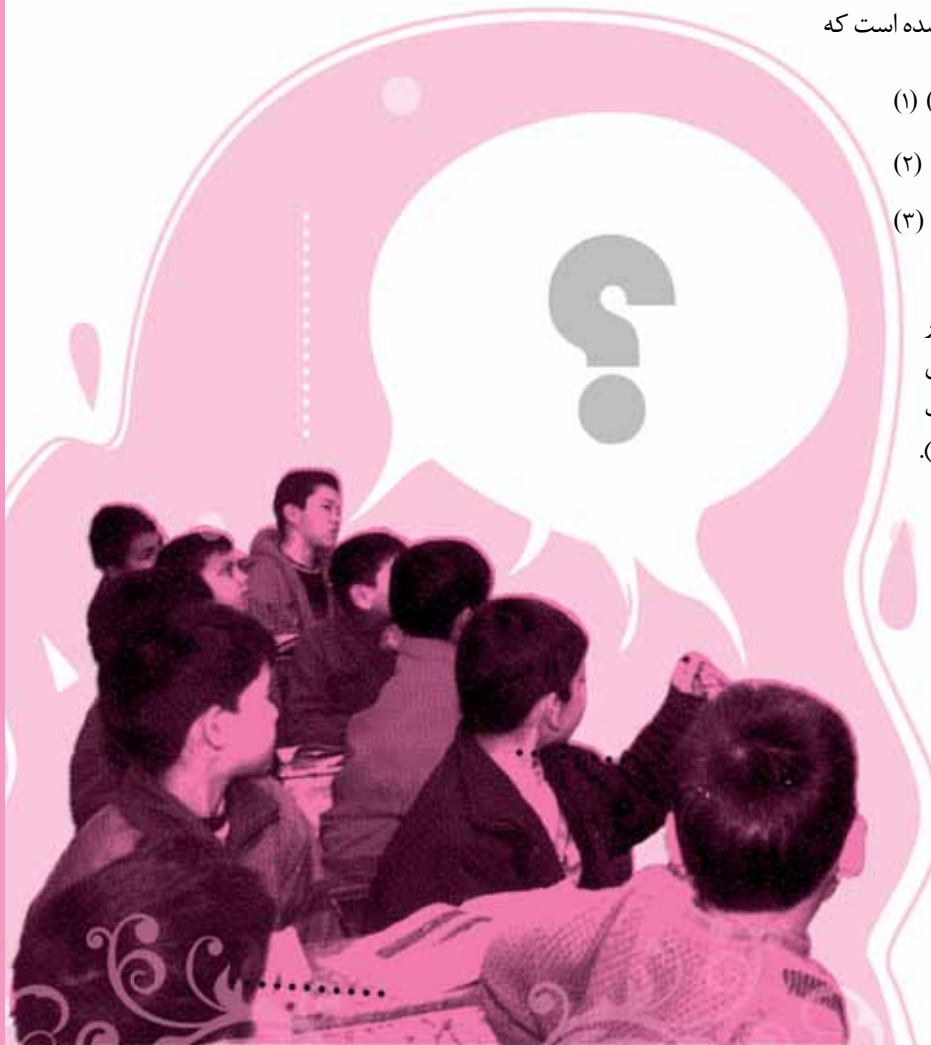
بخش دوم: راه حل‌ها

۲۱. n عددی طبیعی است. ثابت کنید هیچ دو عدد طبیعی

مانند a و b وجود ندارند، به طوری که $\frac{[a,b]}{a+b} = n$

$[a,b]$ همان کوچک‌ترین مضرب مشترک a و b است).

حل: با فرض $(a,b)=d$ ، $a=a'd$ و $b=b'd$ ، نتیجه می‌شود: $(a',b')=1$. پس:



عدد حقیقی x و y می‌دانیم: $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$. ثابت کنید f نیز تابعی فرد است.

حل: چون g فرد است، داریم: $g(-x) = -g(x)$ که نتیجه می‌دهد: $g(0) = 0$. بنابراین: $f(0) \leq 0$. از طرفی با فرض $x=y=0$ ، داریم: $f(0) \leq 2f(0)$ که نتیجه می‌دهد: $f(0) \geq 0$. پس: $f(0) = 0$. اکنون با فرض $y = -x$ در فرض داریم: $0 = f(x-x) \leq f(x)+f(-x)$ از طرف دیگر:

$$f(x)+f(-x) \leq g(x)+g(-x) = g(x)-g(x) = 0$$

در نتیجه: $f(x)+f(-x) = 0$ که نشان می‌دهد $f(-x) = -f(x)$ و f فرد است.

۲۶. یک چندوجهی $m+n$ وجه دارد که m تای آن‌ها به شکل چهارضلعی و n تای دیگر به شکل مثلث هستند. همچنین در هر رأس چندوجهی چهار وجه مشترک هستند. ثابت کنید: $n=8$.

حل: در هر چندوجهی داریم: $v+f-e=2$ که در آن v تعداد رئوس، f تعداد وجوه و e تعداد یال‌هاست. در نتیجه:

$$4v = 2e \quad v + (m+n) - \frac{4m+3n}{2} = 2$$

در نتیجه: $v = m + \frac{3}{4}n$. با جای گذاری v در رابطه اول خواهیم داشت:

$$m + \frac{3}{4}n + m + n - 2m - \frac{3}{2}n = 2$$

$$\Rightarrow \frac{n}{4} = 2 \Rightarrow n = 8$$

۲۷. با فرض $E(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$ مطلوب است حاصل

$$E\left(\frac{1}{1392}\right) + E\left(\frac{2}{1392}\right) + \dots + E\left(\frac{1391}{1392}\right)$$

حل: فرض کنید $0 \leq x \leq 1$ ، در نتیجه:

$$E(x) + E(1-x) = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2} = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{4}{4+2 \times 4^x} = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{2}{2+4^x} = 1$$

بنابراین:

$$E\left(\frac{1}{1392}\right) + E\left(\frac{2}{1392}\right) + \dots + E\left(\frac{1391}{1392}\right) = \frac{1392}{2} \times 1 = 696$$

۲۸. a و b دو عدد حقیقی هستند. ثابت کنید:

$$\sqrt{a^2+b^2+6a-2b+10} + \sqrt{a^2+b^2-6a+2b+10} \geq 2\sqrt{10}$$

$$\frac{[a,b]}{a+b} = n \Leftrightarrow \frac{a'b'd}{(a'+b')d} = n \Leftrightarrow a'b' = n(a'+b')$$

از طرف دیگر، چون a' و b' نسبت به هم اول هستند، داریم: $(a', a'+b') = (b', a'+b') = 1$ که نتیجه می‌دهد:

$$(a'b', a'+b') = 1 \quad \text{علاوه بر این داریم:}$$

$$(a'b', a'+b') = (n(a'+b'), a'+b') = a'+b'$$

در نتیجه $a'+b'=1$ که با طبیعی بودن a' و b' تناقض دارد.

۲۲. ثابت کنید:

$$\sum_{k=0}^{2009} (k+1)! (e^k (e^{k+1}) - k - 1) = 2011! (e^{2010} - 1)$$

حل: با فرض $a^n = (n+1)! (e^{n+1} - 1)$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{2009} (k+1)! (e^k (e^{k+1}) - k - 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{2009} (a_{k+1} - a_k) = a_{2010} - a_0$$

$$= (2011)! (e^{2010} - 1) - 1! (e^0 - 1) = 2011! (e^{2010} - 1)$$

۲۳. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots}}} - \sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\dots}}}}{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}}$$

حل: فرض کنید: $A = \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{\dots}}}$ در نتیجه:

$$A = 30 + A \quad \text{از حل این معادله به دو جواب } A=6 \text{ و } A=-5$$

می‌رسیم که با توجه به علامت A ، -5 غیرقابل قبول است.

به همین طریق می‌توان ثابت کرد: $3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\dots}}}$ و

$$7 = \sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{\dots}}} \quad \text{در نتیجه مقدار خواسته شده برابر}$$

$$-5 = \frac{6}{3} - 7 \quad \text{خواهد بود.}$$

۲۴. همهٔ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $16^x + 1 = 2^x + 8^x$ را بیابید.

حل: با تغییر معادله به صورت $(2^x-1)(8^x-1) = 0$ ، خواهیم

داشت: $2^x-1=0$ یا $8^x-1=0$ و تنها جواب معادله $x=0$ خواهد بود.

۲۵. f و g دو تابع حقیقی هستند، g تابعی فرد است، به ازای

هر عدد حقیقی x داریم: $f(x) \leq g(x)$ و به ازای هر دو

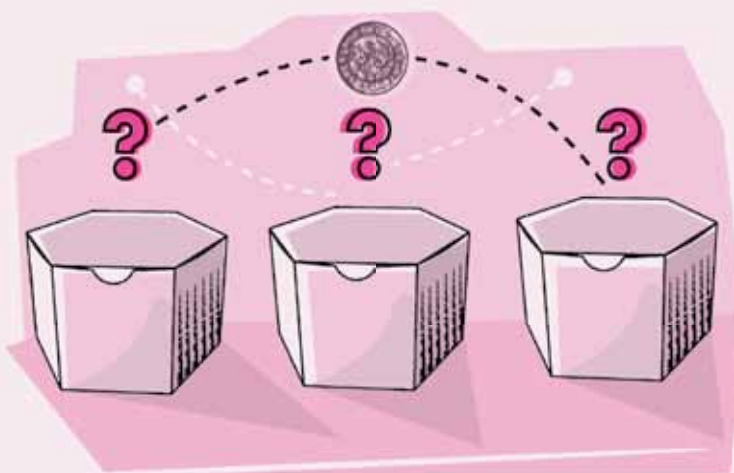
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم:

سرگرمی
سر علمی

پارادوکسی یا سفسطه ۸۸

حالا در این ایستگاه می خواهیم کمی بیشتر شما را به فکر فرو ببریم! یک پارادوکس زیبا از احتمال داریم. فرض کنید سه جعبه A، B و C داریم که در یکی از آن ها یک سکه وجود دارد. اگر یکی از سه جعبه را به تصادف انتخاب کنیم، چه قدر احتمال دارد که سکه در آن جعبه باشد؟ حتماً می گوئید $\frac{1}{3}$. اما این طور نیست! احتمال آن $\frac{1}{2}$ است! چرا؟



فرض کنید که شما جعبه A را انتخاب می کنید. حالا سکه با احتمال برابر در یکی از سه جعبه است. پس اگر جعبه B خالی باشد، شانس بودن سکه در جعبه A، $\frac{1}{2}$ است. این طور نیست؟ همچنین، اگر جعبه C خالی باشد، باز هم شانس بودن سکه در جعبه A، $\frac{1}{2}$ است؛ درست است؟ ولی روشن است که لااقل یکی از دو جعبه B یا C خالی هستند و دیدیم که هر کدام که خالی باشند، احتمال بودن سکه در جعبه A، $\frac{1}{2}$ است. پس در هر حال احتمال بودن سکه در جعبه A، $\frac{1}{2}$ است! حالا این استنتاج درست است و ما گرفتار یک پارادوکس زیربنایی شده ایم، یا اینکه سفسطه است؟

حل: می دانیم فاصله دو نقطه (a,b) و (m,n) برابر است با:

$$\sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2}$$

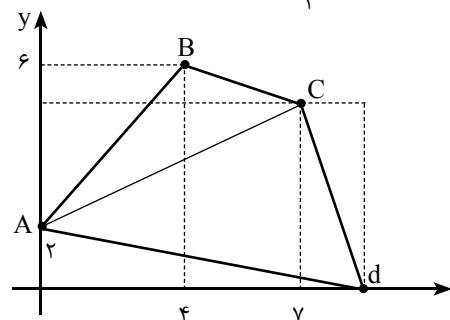
عبارت سمت چپ را می توان به صورت $\sqrt{(a+3)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-3)^2 + (b+1)^2}$ نوشت که بیان کننده مجموع فاصله نقطه (a,b) از دو نقطه (3,-1) و (-3,1) است. در نتیجه طبق نامساوی مثلثی، این مجموع از فاصله دو نقطه (3,-1) و (-3,1) که همان $2\sqrt{10}$ است، بزرگ تر یا با آن مساوی خواهد بود.

۲۹. حداکثر چند مهره شاه را می توان در صفحه شطرنج $n \times n$ قرار داد، به طوری که هیچ دوتایی همدیگر را تهدید نکنند؟

حل: اگر صفحه شطرنج را به ۱۶ مربع دو در دو افزایش دهیم، با توجه به اینکه در هر مربع حداکثر یک مهره شاه را می توان قرار داد، نتیجه می شود حداکثر تعداد مهره های شاه برابر است با ۱۶. با انتخاب خانه گوشه بالایی و سمت چپی از هر مربع 2×2 ، یک جواب خاص برای ۱۶ مهره شاه نیز مشخص می شود.

۳۰. مساحت چهارضلعی ABCD با رئوس $A(0,2)$ ، $B(4,6)$ ، $C(7,5)$ و $D(d,0)$ برابر است با ۲۴. مقدار d را که عددی مثبت است بیابید.

حل: با مشخص کردن نقاط A، B، C و D در صفحه مختصات (شکل ۳) می توان ابتدا مساحت مثلث ABC را یافت که برابر ۸ خواهد شد. در نتیجه، مساحت مثلث ACD برابر با ۱۶ باید باشد. اگر مساحت مثلث ACD را بر حسب d بیابیم، مقدار آن برابر $\frac{3}{2}d + 7$ خواهد شد. در نتیجه: $d=6$.



شکل ۳

استدلال‌های اشتباه آمیز در تعیین دامنه توابع

$$D_f = ?!$$

دامنه توابع، توابع رادیکالی

کلیدواژه

عمل قرار گیرند که ریاضی‌آموزان در برخورد با آن‌ها و در ارائه پاسخ درست و درک چرایی و چگونگی راه‌حل انتخاب شده برای نیل به مقصود دچار چالش بیشتری می‌شوند. در مسئله ۴ صفحه ۸۴ کتاب ریاضی ۲ داریم: دامنه هر یک از توابع زیر را بیابید:

$$h(x) = \sqrt{x(x-3)^2} \text{ و } i(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

با توجه به این مسئله اکنون در مورد تعیین دامنه توابعی

$$\text{با ضابطه } f(x) = \sqrt{a(x)b(x)}, b(x) \neq 0 \text{ و } g(x) = \sqrt{\frac{a(x)}{b(x)}}$$

به بحث و بررسی می‌پردازیم (البته در هریک از منابع مقاله حاضر که فهرستشان در پایان مقاله آمده است، برای هر یک از توابع $a(x)$ و $b(x)$ ، چندجمله‌ای‌هایی از درجه‌های اول و دوم در نظر گرفته شده‌اند. اما می‌توان این توابع را به صورتی مدنظر قرار داد که تنها به توابعی از درجه‌های اول و دوم برای متناظر کردن با توابع $a(x)$ و $b(x)$ اکتفا نکرد و برای درک بهتر ریاضی‌آموزان با این مقوله، از موارد متنوع‌تر و کاراتر نیز استفاده کرد).

در ضمن با دقت در هر یک از موارد مسئله‌ای که در بالا بیان شده است، درمی‌یابیم قاعده کلی که برای دستیابی

ریاضی‌آموزان سال دوم دوره دوم متوسطه با مفهوم «دامنه تابع»^۱ و تعیین دامنه توابع در کتاب ریاضی ۲ آشنا می‌شوند و در سال‌های سوم و چهارم، بنابر رشته تحصیلی که در آن ادامه تحصیل می‌دهند، با این مفهوم و موضوع‌های مرتبط با آن آشنایی‌های لازم و کافی را به دست می‌آورند. اما ملاحظه می‌شود که درک نادرست و نامناسب از این مفهوم در کتاب‌های ریاضی ۲ و حسابان، باعث ایجاد اختلال در یادگیری آن و موضوع‌های مرتبط با آن در سال‌های آتی تحصیلی برای ریاضی‌آموزان می‌شود. بنابراین آنچه که در این مقاله مورد بحث و کنکاش قرار خواهد گرفت، بررسی دامنه چند نوع از «توابع رادیکالی»^۲ است که در پارهای از موارد، ریاضی‌آموزان و به ویژه ریاضی‌آموزان سال‌های دوم و سوم دبیرستان را دچار چالش و مشکل در تعیین دامنه آن‌ها می‌کند.

ابتدا به ارائه مسئله‌ای متناظر با این گونه توابع، که در کتاب درسی ریاضی ۲ دوره دوم آموزش متوسطه گنجانده شده است، می‌پردازیم. سپس سعی می‌کنیم که با ارائه مثال‌هایی مشابه آن‌ها، به تفصیل درباره آن‌ها به استدلال بپردازیم تا به این واسطه ریاضی‌آموزان در آینده در پاسخ‌گویی به این گونه پرسش‌ها از توانایی‌های جامع و مانع برخوردار باشند. البته در ارائه مطالب در مقاله حاضر سعی شده است مسائلی ملاک

در ادامه به ارائه راه حل های ریاضی آموزان کلاس درس مبتنی بر هر دو روش اول و دوم می پردازیم. (البته در هر دو روش سعی شده است، آنچه که از جانب ایشان به عنوان راه حل برای هر دو روش مطرح شده است، دارای تلخیص مناسب باشد تا آنچه را که نگارنده مقاله به واسطه این تلخیص بیان نکرده است، ریاضی آموزان مخاطب مقاله، خود مورد بررسی و تحلیل قرار دهند). پس:

پاسخ ریاضی آموزان به روش اول

$$a(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 6x + 5}}$$

$$\Rightarrow a(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}} = \frac{a_1(x)}{a_r(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{a_1} = [-4, 2] \\ D_{a_r} = (-5, -1) \end{cases} \Rightarrow D_a = [-4, -1)$$

$$b(x) = \sqrt{(16 - x^2)(x^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow b(x) = \sqrt{16 - x^2} \times \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= b_1(x)b_r(x) \Rightarrow \begin{cases} D_{b_1} = [-4, 4] \\ D_{b_r} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_b = [-4, -1] \cup [1, 4]$$

$$c(x) = \sqrt{(x^2 + x + 1)(-x^2 + 3x - 5)}$$

$$\Rightarrow c(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \times \sqrt{-x^2 + 3x - 5}$$

$$= c_1(x)c_r(x) \Rightarrow \begin{cases} D_{c_1} = R \\ D_{c_r} = \{ \} \end{cases} \Rightarrow D_c = \{ \}$$

$$d(x) = \sqrt{\frac{-3x^2 + 2x - 4}{-4x^2 + 5x - 3}}$$

$$\Rightarrow d(x) = \frac{\sqrt{-3x^2 + 2x - 4}}{\sqrt{-4x^2 + 5x - 3}} = \frac{d_1(x)}{d_r(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{d_1} = \{ \} \\ D_{d_r} = \{ \} \end{cases} \Rightarrow D_d = \{ \}$$

$$e(x) = \sqrt{\frac{8x^2 - x + 5}{x^2 + 4x + 6}}$$

$$\Rightarrow e(x) = \frac{\sqrt{8x^2 - x + 5}}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}} = \frac{e_1(x)}{e_r(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{e_1} = R \\ D_{e_r} = R \end{cases} \Rightarrow D_e = R$$

به پاسخ درست در منابع مفروض استفاده و توصیه شده، بهره برداری از روش تعیین علامت است. اما حالا ببینیم اگر ریاضی آموزی پرسشی را در قالب راه حل به ظاهر درست دیگری برای رسیدن به جواب به دست آمده مطابق با پاسخی که به روش تعیین علامت حاصل می شود، مطرح کند^۲، و یا اگر در مورد این موضوع از ما سؤال کرد که چرا تنها می باید از روش تعیین علامت برای تعیین دامنه این گونه از توابع استفاده کرد، آیا می توانیم با اتکا به آنچه که به عنوان استفاده از روش تعیین علامت از آن یاد شده است، پاسخی درست و درخور ملاحظه به وی بدهیم یا خیر. برای ارائه راهکار دقیق و کارا فرض می کنیم که تمرین زیر به عنوان فعالیت برای ریاضی آموزان مطرح شده و از این ایشان خواسته شده است که راه حل یا راه حل های خود را در مورد آن ارائه کنند.

● فعالیت ۱. دامنه هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.^۴

$$a(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 6x + 5}} \quad ۱.$$

$$b(x) = \sqrt{(16 - x^2)(x^2 - 1)} \quad ۲.$$

$$c(x) = \sqrt{(x^2 + x + 1)(-x^2 + 3x - 5)} \quad ۳.$$

$$d(x) = \sqrt{\frac{-3x^2 + 2x - 4}{-4x^2 + 5x - 3}} \quad ۴.$$

$$e(x) = \sqrt{\frac{8x^2 - x + 5}{x^2 + 4x + 6}} \quad ۵.$$

$$f(x) = \sqrt{(x - 4 - x^2)(7x - 6x^2 - 3)} \quad ۶.$$

راه حل هایی که از جانب ریاضی آموزان بیان شده اند، به صورت کلی در چارچوب استفاده از دو روش زیر قرار می گیرند:

● **روش اول:** تعدادی از آن ها، با استفاده از روابط $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ ، $B \neq 0$ و $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ ضابطه های توابع مفروض را ساده کرده اند و سپس با تعیین مقادیر درست و مناسب برای x در هر یک از عبارات ساده شده در نهایت با تعیین مقدار x مشترک بین مقادیر موجود برای x ، مقادیر مناسب را برای ضابطه های توابع مزبور به دست آورده اند.

● **روش دوم:** تعدادی دیگر از آن ها عبارت زیر رادیکال در هر دو تابع مفروض را بزرگ تر یا مساوی صفر قرار داده اند و سپس با استفاده از تعیین علامت، مقادیر مناسب را برای x متناظر با ضابطه هر تابع به دست آورده اند.

نمی‌دهند و در نهایت برای ارائه راه حل مناسب و صحیح هر دو روش را می‌پذیرند.

اما اشتباه اساسی که ایشان ممکن است در کاربرد روش اول داشته باشند، استفاده از استدلال‌های ناقص و یا نیمه‌کاملی است که آن‌ها در حین انجام اعمال محاسباتی خود برای ارائه راه حل از آن‌ها بهره می‌برند. در ضمن ممکن است که مدرسان در کلاس درس ریاضی به کاربران بدون ارائه هیچ‌گونه دلیلی پیشنهاد کنند، هر زمان به چنین مسائلی برخوردند، تنها از روش دوم (روش تعیین علامت) استفاده کنند و در واقع نتوانند ریاضی‌آموزان را برای پذیرش روش تعیین علامت و یا روش دیگری برای حل این دسته از مسائل در حالت کلی متقاعد سازند. اما این موضوع سبب استفاده ریاضی‌آموزان از استدلال‌های اشتباه‌آمیز می‌شود که حتی ممکن است ریاضی‌آموزان با آن‌ها به جواب‌های به ظاهر صحیح برسند. بنابراین اشاره به کاربرد مناسب و درست این روش‌ها ضرورت دارد. اکنون به دو رابطه زیر توجه کنید:

$$\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B} \text{ و } A \geq 0, B \geq 0. \quad ۱.$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \text{ و } A \geq 0, B > 0. \quad ۲.$$

درستی دو رابطه بالا، هنگامی که A و B مقادیر حقیقی مناسبی را بنابر آنچه که به‌عنوان شرط برای مقادیر A و B در نظر گرفته شده است، اختیار می‌کنند، با استفاده از درک شهودی به سهولت قابل درک است. (هر چند که تعدادی از ریاضی‌آموزان در این زمینه از دقت و توجه کافی استفاده نمی‌کنند). اما هنگامی که هریک از عبارت‌های A و B دربرگیرنده عبارت‌های «جبری»^۵ و یا «متعالی»^۶ باشند، بهره‌گیری از روابط مزبور برای کاربران ریاضی موضوعی حداقل آسان نیست. بنابراین ممکن است که ریاضی‌آموزان بدون هیچ‌گونه توجه به شرایط گنجانده شده در روابط بالا برای مقادیر A و B، دست به استفاده از این روابط بزنند و در نتیجه به پاسخ‌های غلط برسند.

اکنون با آگاهی از این مطالب پاسخ‌هایی را که ریاضی‌آموزان با استفاده از روش اول یافته‌اند، بنابر آنچه که به‌عنوان استدلال اشتباه‌آمیز ملاک این مقاله است، مورد بررسی و تحلیل قرار می‌دهیم.

■ استدلال‌های اشتباه‌آمیز در روش اول

$$۱. \text{ در تابع } a(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 6x + 5}} \text{ داریم:}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x-4-x^2)(7x-6x^2-3)} \\ \Rightarrow f(x) &= \sqrt{x-4-x^2} \times \sqrt{7x-6x^2-3} \\ &= f_1(x)f_2(x) \Rightarrow \begin{cases} D_{f_1} = \{ \} \\ D_{f_2} = \{ \} \end{cases} \Rightarrow D_f = \{ \} \end{aligned}$$

■ پاسخ ریاضی‌آموزان به روش دوم

$$۱. \text{ در تابع } a(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 6x + 5}} \text{ داریم:}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 6x + 5} \geq 0 \Rightarrow D_a = (-\infty, -5) \cup [-4, -1) \cup [2, +\infty)$$

$$۲. \text{ در تابع } b(x) = \sqrt{(16-x^2)(x^2-1)} \text{ داریم:}$$

$$(16-x^2)(x^2-1) \geq 0 \Rightarrow D_b = [-4, -1] \cup [1, 4]$$

$$۳. \text{ در تابع } c(x) = \sqrt{(x^2+x+1)(-x^2+3x-5)} \text{ داریم:}$$

$$(x^2+x+1)(-x^2+3x-5) \geq 0 \Rightarrow D_c = \{ \}$$

$$۴. \text{ در تابع } d(x) = \sqrt{\frac{-3x^2+2x-4}{-4x^2+5x-3}} \text{ داریم:}$$

$$\frac{-3x^2+2x-4}{-4x^2+5x-3} \geq 0 \Rightarrow D_d = R$$

$$۵. \text{ در تابع } e(x) = \sqrt{\frac{8x^2-x+5}{x^2+4x+6}} \text{ داریم:}$$

$$\frac{8x^2-x+5}{x^2+4x+6} \geq 0 \Rightarrow D_e = R$$

$$۶. \text{ در تابع } f(x) = \sqrt{(x-4-x^2)(7x-6x^2-3)} \text{ داریم:}$$

$$(x-4-x^2)(7x-6x^2-3) \geq 0 \Rightarrow D_f = R$$

اکنون اگر به پاسخ‌های ریاضی‌آموزان، با استفاده از هر دو روش و نتیجه‌ای که ایشان در پایان هر مورد از تمرین مفروض گرفته‌اند، بنگریم، ملاحظه می‌کنیم که در تعدادی از آن‌ها هر دو پاسخ یکسان است ولی در تعدادی دیگر، جواب‌ها با یکدیگر هماهنگی ندارند. معمولاً ریاضی‌آموزان در مواردی که دو پاسخ با یکدیگر برابر نباشند، متوجه این موضوع می‌شوند که در یکی از راه‌حل‌ها ایرادی نهفته است. بنابراین سعی می‌کنند که با تمسک به استدلال‌های درست و مناسب این مشکل را برطرف سازند. اما ایشان غالباً نسبت به تمرین‌هایی که هر دو روش حل باعث تولید جواب یکسان شده است، عکس‌العمل ویژه‌ای نشان

و $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ در تناقض است. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنه تابع مزبور درست نیست.

۵. در تابع $e(x) = \sqrt{\frac{8x^2 - x + 5}{x^2 + 4x + 6}}$ داریم:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : 8x^2 - x + 5 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 6 > 0 \end{cases}$$

این یعنی هر دو عبارت $8x^2 - x + 5$ و $x^2 + 4x + 6$

مقادیر مثبت را اختیار می کنند و این موضوع با $A \geq 0, B > 0$ و $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ هم خوانی دارد. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنه تابع مزبور درست است.

۶. در تابع $f(x) = \sqrt{(x-4-x^2)(7x-6x^2-3)}$ داریم:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : -x^2 + x - 4 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : -6x^2 + 7x - 3 < 0 \end{cases}$$

این یعنی هر دو عبارت $-x^2 + x - 4$ و $-6x^2 + 7x - 3$ مقادیر منفی را اختیار می کنند و این موضوع با $A \geq 0, B \geq 0$ و $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ در تناقض است. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنه تابع مزبور درست نیست.

با بررسی نحوه استدلال درست در استفاده از روابط طلایی بالا برای شش تابع مزبور، ملاحظه می کنیم که در

مورد ۵ تابع $e(x) = \sqrt{\frac{8x^2 - x + 5}{x^2 + 4x + 6}}$ نه تنها پاسخ به دست آمده با استفاده از هر دو روش درست است، بلکه نحوه استدلال برای به کارگیری رابطه مورد نیاز نیز اشتباه آمیز نیست و سرانجام به نتیجه گیری درست براساس استدلال درست منجر می شود.

در ادامه می کوشیم فعالیت دیگری را ارائه کنیم که ضابطه توابع مفروض در آن، شرایط درست و مناسب استفاده از روابط کلیدی و کاربردی ارائه شده قبلی را داشته باشد. در نهایت با بهره گیری از این فعالیت ملاحظه خواهیم کرد، در پاره ای از موارد که ساختار و اجزای تشکیل دهنده ضابطه توابعی مفروض عبارتی دارد که برای تعیین دامنه آن ها، استفاده از تشکیل یک نامعادله و حل آن با استفاده از روش تعیین علامت، راهکار آسان، کارا و موجزی نیست، با بهره جستن از همان روابط طلایی (با در نظر داشتن شرایط آن ها) که محور اصلی این مقاله هستند، می توانیم به تعیین دامنه توابع مزبور بپردازیم.

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -4] \cup [2, +\infty) \\ x \in (-4, 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 5 \geq 0 \\ x^2 + 6x + 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty) \\ x \in (-5, -1) \end{cases}$$

این یعنی هر یک از عبارت های $x^2 + 2x - 8$ و $x^2 + 6x + 5$ هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را اختیار می کنند و این موضوع با $A \geq 0, B > 0$ و $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ در تناقض است. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنه تابع مزبور درست نیست.

۲. در تابع $b(x) = \sqrt{(16-x^2)(x^2-1)}$ داریم:

$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \\ 16 - x^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-4, 4] \\ x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x \in (-1, 1) \end{cases}$$

این یعنی هر یک از عبارت های $16 - x^2$ و $x^2 - 1$ هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را اختیار می کنند و این موضوع با $A \geq 0, B \geq 0$ و $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ در تناقض است. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنه تابع مزبور درست نیست.

۳. در تابع $c(x) = \sqrt{(x^2 + x + 1)(-x^2 + 3x - 5)}$ داریم:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : -x^2 + 3x - 5 < 0 \end{cases}$$

این یعنی عبارت $x^2 + x + 1$ مقادیر مثبت و عبارت $-x^2 + 3x - 5$ مقادیر منفی را اختیار می کنند و این موضوع با $A \geq 0, B \geq 0$ و $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ در تناقض است. بنابراین استفاده از این روش برای تعیین دامنه تابع مزبور درست نیست.

۴. در تابع $d(x) = \sqrt{\frac{-3x^2 + 2x - 4}{-4x^2 + 5x - 3}}$ داریم:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : -3x^2 + 2x - 4 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : -4x^2 + 5x - 3 < 0 \end{cases}$$

این یعنی هر دو عبارت $-3x^2 + 2x - 4$ و $-4x^2 + 5x - 3$ مقادیر منفی را اختیار می کنند و این موضوع با $A \geq 0, B > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 36| + |x + 10| > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\delta\} : \sqrt{(x - \delta)^2} > 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{\delta\} : \frac{|x^2 - 36| + |x + 10|}{\sqrt{(x - \delta)^2}} > 0$$

بنابراین:

$$b(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 36| + |x + 10|}}{\sqrt{(x - \delta)^2}} = \frac{\sqrt{|x^2 - 36| + |x + 10|}}{\sqrt{(x - \delta)^2}}$$

$$= \frac{b_1(x)}{b_r(x)} \Rightarrow \begin{cases} D_{b_1} = \mathbb{R} \\ D_{b_r} = \mathbb{R} - \{\delta\} \end{cases} \Rightarrow D_b = \mathbb{R} - \{\delta\}$$

$$c(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{3x^2 + |x| + 2}}}{\sqrt{2x^2 - \lfloor x - 7 \rfloor + 6x}}$$

$$\Rightarrow c(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{3x^2 + |x| + 2}}}{\sqrt{2x^2 - \lfloor x - 7 \rfloor + 6x}}$$

$$\Rightarrow c(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{3x^2 + |x| + 2}}}{\sqrt{2x^2 - \lfloor x - 7 \rfloor + 6x}}$$

$$\Rightarrow c(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{3x^2 + |x| + 2}}}{\sqrt{2x^2 + \delta x + 7 + x - \lfloor x \rfloor}}$$

۳.

می دانیم:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : 3x^2 + |x| + 2 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 + \delta x + 7 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : 0 < x - \lfloor x \rfloor \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : 3x^2 + |x| + 2 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 + \delta x + 7 + x - \lfloor x \rfloor > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{3x^2 + |x| + 2}}{\sqrt{2x^2 - \lfloor x - 7 \rfloor + 6x}} > 0$$

$$c(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{3x^2 + |x| + 2}}}{\sqrt{2x^2 - \lfloor x - 7 \rfloor + 6x}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{3x^2 + |x| + 2}}}{\sqrt{2x^2 - \lfloor x - 7 \rfloor + 6x}} = \frac{c_1(x)}{c_r(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{c_1} = \mathbb{R} \\ D_{c_r} = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_c = \mathbb{R}$$

بنابراین:

● فعالیت ۲. دامنه هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$1. a(x) = \sqrt{(x^2 + 1 + |6 - x| - 2x)\sqrt{|x|}}$$

$$2. b(x) = \sqrt{\frac{|x^2 - 36| + |x + 10|}{x^2 - 10x + 25}}$$

$$3. c(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{3x^2 + |x| + 2}}{2x^2 - \lfloor x - 7 \rfloor + 6x}}$$

$$4. d(x) = \sqrt{\text{sgn}(2x^2 - 7|x| + \delta) \text{sgn}(\sqrt{x^2 - \delta x + 8})}$$

پاسخها

۱.

$$a(x) = \sqrt{(x^2 + 1 + |6 - x| - 2x)\sqrt{|x|}}$$

$$\Rightarrow a(x) = \sqrt{(x^2 - 2x + 1 + |6 - x|)\sqrt{|x|}}$$

$$\Rightarrow a(x) = \sqrt{((x - 1)^2 + |6 - x|)\sqrt{|x|}}$$

می دانیم:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : |6 - x| \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 + |6 - x| > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|} \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : ((x - 1)^2 + |6 - x|)\sqrt{|x|} \geq 0$$

بنابراین:

$$a(x) = \sqrt{((x - 1)^2 + |6 - x|)\sqrt{|x|}} \\ = \sqrt{(x - 1)^2 + |6 - x|} \times \sqrt{\sqrt{|x|}} = a_1(x)a_r(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{a_1} = \mathbb{R} \\ D_{a_r} = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_a = \mathbb{R}$$

۲.

$$b(x) = \sqrt{\frac{|x^2 - 36| + |x + 10|}{x^2 - 10x + 25}}$$

$$\Rightarrow b(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 36| + |x + 10|}}{\sqrt{(x - \delta)^2}}$$

می دانیم:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : |x^2 - 36| \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : |x + 10| \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x - \delta)^2} \geq 0 \end{cases}$$

منابع

۱. ایرانمنش، علی و محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان. ریاضیات ۲ (سال دوم آموزش متوسطه). دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تهران. ۱۳۹۲.
۲. اصلاح‌پذیر، بهمن و ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمدتقی طاهری، تنجانی و وحید عالمیان. حسابان (سال سوم آموزش متوسطه). دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تهران. ۱۳۹۲.
۳. بابلیان، اسماعیل و میرزا جلیلی، رضا شهریاری اردبیلی و علیرضا مدقالچی. ریاضیات ۲ (سال دوم آموزش متوسطه). دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تهران. ۱۳۸۵.
۴. بیژن‌زاده، محمدحسن و غلامعلی فرشادی و یدالله ایلخانی‌پور. حسابان (سال سوم آموزش متوسطه). دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تهران. ۱۳۸۷.
۵. رستمی، محمدهاشم، عبدالحمید عطوفی و محمد گودرزی. ریاضیات ۳ (سال سوم آموزش متوسطه). دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تهران. ۱۳۸۹.

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{sgn}(3x^2 - 7|x| + 5) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{sgn}(\sqrt{x^2 - 5x + 8}) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{\operatorname{sgn}(3x^2 - 7|x| + 5) \operatorname{sgn}(\sqrt{x^2 - 5x + 8})} = 1$$

بنابراین:

$$D_d = \mathbb{R}$$

۴.

$$d(x) = \sqrt{\operatorname{sgn}(3x^2 - 7|x| + 5) \operatorname{sgn}(\sqrt{x^2 - 5x + 8})}$$

$$\Rightarrow d(x) = \sqrt{\operatorname{sgn}(3x^2 - 7|x| + 5) \sqrt{\operatorname{sgn}(\sqrt{x^2 - 5x + 8})}}$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 7|x| + 5 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 8 > 0 \end{cases}$$

چند تمرین

۱. با استفاده از هر دو روش بیان شده در این مقاله به بررسی و تعیین دامنهٔ توابع زیر بپردازید. سپس به تفصیل استدلال‌های خود را برای درستی یا نادرستی هر روش بیان کنید.

$$b(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + 5x + 7}} \quad ۲.$$

$$d(x) = \sqrt{(x^2 - 4)(11 - x^2)} \quad ۴.$$

$$b(x) = \sqrt{\frac{|x+5| + |x-2|}{(x^2 - 6x + 9)|x|}} \quad ۲.$$

$$d(x) = \sqrt{(\sqrt{|-x|} + |x^2 - 1|)(5 - x)^4} \quad ۴.$$

$$a(x) = \sqrt{\frac{-3x^2 + 2x - 4}{5x - 3 - 4x^2}} \quad ۱.$$

$$c(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - x}} \quad ۳.$$

$$a(x) = \sqrt{(x^2 + |x+7|)(25 - x^2)} \quad ۱.$$

$$c(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + |x+1| + 4}{|x^2 - 9| + |x+5|}} \quad ۳.$$

۳. توابع $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq 0$ و $f(x) = \sqrt{a(x)b(x)}$ و $a(x) \geq 0$, $b(x) > 0$ و $f(x) = \sqrt{\frac{a(x)}{b(x)}}$ مفروض‌اند. آیا می‌توان استدلال کرد که: $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R}$ ؟ چرایی و چگونگی استدلال خود را به تفصیل بیان کنید.

۴. توابع $a(x) \leq 0$, $b(x) \leq 0$ و $f(x) = \sqrt{a(x)b(x)}$ و $a(x) \leq 0$, $b(x) < 0$ و $f(x) = \sqrt{\frac{a(x)}{b(x)}}$ مفروض‌اند. آیا می‌توان استدلال کرد که: $D_g = \{ \}$ و $D_f = \{ \}$ ؟ چرایی و چگونگی استدلال خود را به تفصیل بیان کنید.

پی‌نوشت‌ها

1. Domain of function

2. Radical Functions

۳. این موضوع را می‌توانید در ادامه در مثال‌هایی که در این مقاله برای ریاضی‌آموزان بیان شده‌اند و در مورد راه‌حل درست و نادرست برای هر یک از آن‌ها که ریاضی‌آموزان نقطه‌نظرات و راهکارهای خود را پیشنهاد کرده‌اند، ملاحظه کنید.

۴. شما ریاضی‌آموزانی که مخاطب این مقاله هستید، می‌توانید قبل از پیگیری ادامهٔ مقاله و مطالعهٔ کامل آن، توانایی‌های خود را با حل این تمرین در بوتهٔ آزمایش قرار دهید.

5. Algebraic

6. Transcendental

$$۷. \text{الف)} \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{تابع } f(x) \text{ را تابع علامت می‌نامیم و با } \operatorname{sgn}(x) \text{ نمایش می‌دهیم.}$$

ب) تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ را تابع جزء صحیح می‌نامیم (جزء صحیح هر عدد حقیقی x برابر است با: $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$).

استدلال ریاضی

و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای

اشاره:

در ویژه‌نامه‌ای که در شماره ۷۵ مجله (مهرماه ۹۱) برای بزرگداشت زنده‌یاد پرویز شهریاری داشتیم، فراخوانی را برای شرکت دبیران، دانشجویان و دانش‌آموزان رشته ریاضی در مسابقه مقاله‌نویسی با عنوان «مسابقه بزرگ استاد پرویز شهریاری» اعلام کردیم. اگرچه استقبال خوانندگان مجله، در حدی که انتظار داشتیم نبود، اما از میان مقالات رسیده، مقاله ارسالی خانم فهیمه کلاهدوز، نسبت به سایر مقالات از استحکام بیشتری برخوردار بوده و به‌عنوان مقاله برگزیده انتخاب شد. اینک مقاله فوق به خوانندگان مجله تقدیم می‌شود، با این امید که در یکی از شماره‌های آینده، گفت‌وگویی نیز با این همکار محترم داشته باشیم.



فهمیه کلاهدوز*
کارشناس ارشد آموزش ریاضی
و دبیر ریاضی
شهرستان دهقان

■ مقدمه

فرایند استدلال یکی از اجزای اصلی علوم ریاضی است. این فرایند برای یادگیری ریاضیات مدرسه‌ای نیز ضروری و مهم است. متخصصان تعلیم و تربیت با تأکید بر اهمیت تفکر اندیشمندان و منطقی به‌عنوان یکی از مهارت‌های مورد نیاز افراد در زندگی، پرورش آن را یکی از هدف‌های اصلی تعلیم و تربیت می‌دانند. بر این اساس آنان معتقدند که نظام آموزشی به‌جای انتقال صرف اطلاعات به دانش‌آموزان، باید موقعیت‌های مناسبی را برای پرورش تفکر و توسعه توانایی استدلال منطقی دانش‌آموزان فراهم آورد (ملکی و حبیبی‌پور، ۱۳۸۵؛ حاجی حسین‌نژاد و بالغی‌زاده، ۱۳۸۹).

کوهن^۱ (۲۰۰۸) در کتاب «آموزش برای تفکر»^۲، با بیان سؤالاتی مرتبط با اهداف آموزش مدرسه‌ای، مخاطب را با چالش‌هایی مواجه می‌کند: کدام مهارت‌های فکری برای دانش‌آموزان ضروری است؟ برای دستیابی به این مهارت‌ها، لازم است با چه فعالیت‌هایی آشنا شوند و چه دانشی را کسب کنند؟ چرا برخی از مهارت‌ها بیش از بقیه اهمیت دارند و آن‌ها را شایسته سرمایه‌گذاری می‌دانیم؟ و... کوهن در ادامه فرض می‌کند که به این پرسش‌ها پاسخ‌های منطقی داده شود و بهترین روش‌ها برای تسلط کافی دانش‌آموزان به مهارت‌های مورد نیاز، تعیین شود، اما او معتقد است که باز هم چالش دیگری باقی می‌ماند: آیا دانش‌آموزان این مهارت‌ها را آن‌قدر بارزش می‌دانند که با علاقه به تمرین آن‌ها بپردازند؟ آیا این مهارت‌ها را در زمان و مکان مناسب به کار می‌گیرند و دلیل

استدلال ریاضی، تفکر منطقی، ریاضیات
مدرسه‌ای، آموزش ریاضی

کلید واژه

چکیده

همان‌گونه که می‌دانیم، مهارت استدلال کردن از جمله مهارت‌هایی است که به‌طور کلی در زندگی روزانه و به‌طور خاص در آموزش ریاضی از جایگاه خاصی برخوردار است. به‌نظر می‌رسد که یکی از وظایف اصلی تعلیم و تربیت نیز پرورش مهارت‌های استدلالی دانش‌آموزان به منظور تصمیم‌گیری در مورد مسائل زندگی و شرکت در بحث‌های منطقی است. علم ریاضیات به‌عنوان شاخه‌ای از علوم می‌تواند نقش مؤثری در توسعه تفکر و قدرت استدلال افراد ایفا کند. لذا هدف این مطالعه که به روش تحلیلی - توصیفی انجام گرفته، آن است که براساس پژوهش‌های انجام شده در این زمینه، به بررسی مفهوم استدلال ریاضی از دیدگاه محققان و آموزشگران ریاضی و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای بپردازد.



■ استدلال و جایگاه آن در ریاضیات

لیتون^۸ (۲۰۰۳) به معنای گسترده، استدلال را به عنوان فرایند «همانگی»^۹ شواهد، باورها و اندیشه‌ها برای نتیجه‌گیری در مورد آنچه درست است، تعریف می‌کند. علاوه بر این، او معتقد است استدلال کردن فرایندی است که به عنوان یک «میانجی»^{۱۰} و واسطه عمل می‌کند و اثرات و نشانه‌های خود را تقریباً در هر چیزی که ما انجام می‌دهیم و یا در مورد آن فکر می‌کنیم، برجای می‌گذارد؛ زیرا همه این فرایندها شامل استنباط کردن و نتیجه‌گیری هستند. در واقع لیتون (۲۰۰۳) بر این باور است که همه ما در انجام کارهای مختلف، برای مثال هنگام یادگیری مطالب، تحلیل، قضاوت، ارزیابی، کشف و یا بهینه‌سازی، در حال نتیجه‌گیری و استنباط از اطلاعات، عقاید و باورهایمان هستیم.

بیرنه^{۱۱} و جانسون^{۱۲} (۱۹۹۳) بر این باورند که فرایند استدلال شامل استنباط‌هایی است که از اصول و شواهد به دست می‌آیند و به وسیله آن، افراد نتایج جدیدی را استنتاج می‌کنند و یا نتیجه ارائه شده را مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌دهند (نقل شده در: Christou & Papageorgiou, 2007).

ویستر^{۱۳} (۱۹۸۲) فرایند استدلال را به عنوان توانایی تفکر منسجم و منطقی و استنتاج نتایج از بین حقایق مفروض و آشنا تعریف می‌کند (نقل شده در: Mansi, 2003).

برودیه^{۱۴} (۲۰۱۰) نیز معتقد است که حاصل فرایند استدلال، یک متن، گفت‌وگو و یا یک نوشته است که برای نتیجه‌گیری نهایی از اسناد و شواهدی که در جامعه مورد نظر، قابل قبول و مورد پذیرش هستند، استفاده می‌شود.

به طور کلی می‌توان گفت استدلال کردن، شامل فرایند تفکر، نتیجه‌گیری و ارتباطات بین تجربه‌ها و دانشی است که فرد برای توضیح آنچه که می‌بیند، مورد استفاده قرار می‌دهد.

استفاده از آن‌ها را می‌دانند؟

راس^۳ (۱۹۹۸) معتقد است که استدلال تنها یک مهارت ریاضی نیست، بلکه مهارتی اساسی در زندگی است و برای اینکه دانش‌آموزان آن را کسب کنند، معلمان باید ریاضی را به عنوان یک موضوع درسی زنده، مهیج و پرشور که نقش مؤثری در آموزش مدرسه‌ای ایفا می‌کند، در نظر بگیرند. همچنین او بر این باور است که معلمان باید به ماهیت نظری ریاضی که هم بسیاری از موقعیت‌ها را به صورت آرمانی درمی‌آورد، و هم از مفاهیم مجرد تفسیرهای کاربردی می‌سازد، توجه داشته باشند.

اعضای «شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا»^۴ نیز در کتاب «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای» بیان می‌دارند که استدلال و اثبات ریاضی، درک و بینش افراد را در پدیده‌های متفاوت توسعه می‌دهد. همچنین آن‌ها بیان می‌دارند، افرادی که استدلال می‌کنند و دارای تفکر تحلیلی هستند، قادرند که الگوها، ساختارها و نظم موجود در جهان واقعی را به خوبی درک کنند.

بال و باس^۵ (۲۰۰۳) معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبه ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. آن‌ها در تحقیقات خود نتیجه می‌گیرند، دانشی که فاقد توجیه کردن است، به راحتی می‌تواند غیرمنطقی و غیرمستدل باشد. هنگامی که ریاضیات به عنوان یک علم مستدل به جای مجموعه‌ای از رویه‌ها یاد گرفته می‌شود، دانش به دست آمده به راحتی می‌تواند بازسازی شود؛ حتی وقتی که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند. آن‌ها بر این باورند که استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد، بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند.

برودیه^۶ (۲۰۱۰) نیز بیان می‌دارد که استدلال ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند، فعالیت‌های ریاضی را به عنوان یک مجموعه منسجم و پیوسته ببینند و مفاهیمشان را به موقعیت‌های دیگر ارتباط دهند.

وو^۷ (۱۹۹۶) بر این باور است که ریاضیات می‌تواند موقعیتی را برای دانش‌آموزان فراهم آورد تا بین آنچه که درست است و آنچه که تنها درست به نظر می‌آید، تمایز قائل شوند و ضروری است که آن‌ها این مهارت‌ها را بیاموزند (نقل شده در: Varghese, 2007). لذا به دلیل اهمیت استدلال‌های منطقی، دانش‌آموزان باید از ابتدا به کمک ابزارها و زبان مناسب، با ارزش این استدلال‌ها آشنا شوند تا در ورود به مباحث پیرامون اثبات‌های رسمی با مشکل مواجه نشوند.

در ادامه به بررسی مفهوم استدلال در ریاضیات و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای خواهیم پرداخت.

در ادبیات تحقیق

دو ویژگی مهم

برای استدلال

ریاضی بیان

می شود و دیگر

فعالیت های

مرتبط با آن، مثلاً

سروکار داشتن با

نمادهای ریاضی،

بازنمایی و

برقراری ارتباط،

در حمایت از

این ویژگی ها

نقش خود را ایفا

می کنند

براساس تعاریف بیان شده می توان گفت، استدلالی که در حوزه ریاضیات و با توجه به منطق و واقعیات موجود در ریاضی ارائه می شود، «استدلال ریاضی» نامیده می شود. مانسی (۲۰۰۳) نیز براساس تعریف وبستر از استدلال، استدلال ریاضی را به عنوان توانایی تفکر منسجم و منطقی و استنتاج از حقایق ریاضی آشنا یا مفروض، تعریف می کند.

همچنین یا کل^{۱۴} و هنا (۲۰۰۳) استدلال ریاضی را استفاده از «استقرا»^{۱۵}، «استنتاج»^{۱۶} و «استنباط»^{۱۷} برای نتیجه گیری در مورد «کمیت»^{۱۸} ها و «ساختار»^{۱۹} ها توصیف و آن را به عنوان «فعالیتی جمعی»^{۲۰} معرفی می کنند که در آن، یادگیرندگان در تعامل با یکدیگر برای حل مسائل ریاضی شرکت دارند.

(نقل شده در: Yankelewitz, Mueller & Maher, 2010)

برودیه (۲۰۱۰) بر این باور است که هنگام ارائه یک استدلال، شیوه هایی از تفکر ایجاد می شوند که می توانند شامل فرایندهایی از جمله متقاعد شدن فرد و متقاعد کردن دیگران در مورد یک ادعای خاص، حل یک مسئله و پیوستن تعدادی مفاهیم به یک مجموعه منسجم و کلی تر باشند.

یانکلویتز (۲۰۰۹) نیز معتقد است که توانایی برای متقاعد کردن دیگران در مورد درستی و صحت یک گزاره از طریق بحث و توجیه، اساس استدلال ریاضی را تشکیل می دهد.

لایتنر^{۲۱} (۲۰۰۰) چهار گام را در فرایند استدلال معرفی می کند که تقریباً مشابه مراحل حل مسئله به روش پولیا (۱۹۵۴) است:

۱. ابتدا موقعیتی «سؤال برانگیز»^{۲۲} و دشوار پیدا می شود که مشخص نیست چگونه باید اقدام کرد.

۲. شخص تلاش می کند که راهبردی برای حل مسئله انتخاب کند (به یاد آورد، بسازد و یا کشف کند). سپس بررسی می کند که آیا راهبرد موردنظر، مسئله را حل می کند یا نه و اگر نه، به دنبال راهبرد دیگری خواهد بود.

۳. این مرحله که اجرای راهبرد نامید می شود، می تواند از طریق استدلال های تأییدکننده حمایت شود؛ بدین صورت که شخص در پی آن است که: آیا راهبرد موردنظر به کار می آید؟ و گرنه دوباره راهبرد دیگری انتخاب و اجرا می شود.

۴. در مرحله آخر، یعنی نتیجه گیری، بعد از طی مراحل بالا یک نتیجه کلی به دست می آید.

تعمیم و توجیه در استدلال ریاضی

در ادبیات تحقیق دو ویژگی مهم برای استدلال ریاضی بیان می شود و دیگر فعالیتهای مرتبط با آن، مثلاً سروکار داشتن با نمادهای ریاضی، بازنمایی و برقراری ارتباط، در حمایت از این ویژگی ها نقش خود را ایفا

می کنند. این دو ویژگی «تعمیم»^{۲۳} و «توجیه»^{۲۴} هستند (Brodie, 2010; Ball & Bass, 2003). توجیه کردن به معنای «ارائه دلایل کافی» است و یک فعالیت مهم ریاضی محسوب می شود که به افراد اجازه می دهد، بین مفاهیم و قسمت های گوناگون یک گزاره ارتباط برقرار کنند و برای تأیید ادعاها و حدسیه های خود، مدارک و شواهد لازم را ارائه و مفاهیم و ایده های جدید ریاضی را توسعه دهند. فرایند تعمیم نیز شبکه ای به هم پیوسته از دانش و مفاهیم ریاضی را ایجاد می کند و امکان حل مسئله را فراهم می کند؛ زیرا به یادگیرنده کمک می کند تا ساختار زیربنایی مسئله یا دسته های بزرگ تری از مسائل و ایده هایی را که مطرح می شوند، ببینند. به طور کلی، زمانی که یادگیرندگان استدلال ریاضی می کنند، از طریق توجیه و تعمیم با ریاضیات ارتباط برقرار می سازند (Brodie, 2010).

■ روش های استدلال

براساس تحقیقات انجام شده (استایلیانیدز و استایلیانیدز، ۲۰۰۸؛ کریمی و فردین پور، ۱۳۸۵؛ جلیلی، ۱۳۸۵؛ جهانشاهی، ۱۳۸۰؛ عین اللهی، ۱۳۷۹)، روش های استدلال به صورت زیر طبقه بندی می شوند:

۱. **روش شهودی**^{۲۵}: این روش به واسطه آنچه مشاهده می کنیم یا آنچه که احساسمان به ما می گوید، به دست می آید که روشی علمی و مطمئن به شمار نمی آید؛ اما به فهم بهتر مفاهیم ریاضی کمک می کند.

۲. **روش تمثیلی**^{۲۶}: در این روش از طریق تمثیل بین مفاهیم گوناگون به نوعی شباهت و یکسانی دست می یابیم. این روش می تواند در ایجاد زمینه های شهودی مؤثر واقع شود. برای مثال، با توجه به درست بودن گزاره «هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است» و «مربع، نوع خاصی از مستطیل است»، می توان نتیجه گرفت که: «مربع یک متوازی الاضلاع است».

۳. **روش استقرایی**^{۲۷} - تجربی: به معنای نتیجه گیری و کشف حقایق کلی بر مبنای وقایع جزئی و دسته محدودی از مشاهدات است. در ریاضی از این روش برای بناکردن یک قانون کلی استفاده می شود، نه برای اثبات آن.

۴. **روش استنتاجی**^{۲۸}: این روش شامل دنباله ای از گزاره هاست که به طور منطقی با هم در ارتباط هستند و براساس حقایق و واقعیتهای پذیرفته شده، به یک نتیجه گیری درست منتهی می شوند.

شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا نیز در کتاب «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه ای» (۲۰۰۰) به طور مفصل و جزئی انواع مهارت های استدلالی مورد نیاز دانش آموزان

را برمی شمارد و تأکید می کند که آموزش این مهارت ها باید در تمام سطوح تحصیلی مورد توجه قرار گیرد.

■ طبقه بندی استدلال ها از نگاه برخی محققان

بال و باس (۲۰۰۳) دو مفهوم «استدلال» و «معناسازی»^{۲۹} را از یکدیگر متمایز دانسته اند. آن ها معناسازی را فرایندی شخصی می دانند که خود فرد آن را انجام می دهد. اما استدلال به مجموعه ای از هنجارهای مشترک جمعی اطلاق می شود که براساس نظم و انضباط پایه ریزی شده اند. هر چند این محققان از جامعه و هنجارها توضیح شفافی ارائه نکرده اند، اما اظهار نظر تلویحی و ضمنی آن ها بدین گونه است که فرایند استدلال هنگامی رخ می دهد که برای دستیابی به یک جمع بندی مشترک درباره اصول مورد بحث، نظرات و ایده های مختلف مورد آزمایش قرار می گیرند. بال و باس (۲۰۰۳) «استدلال کاوش گرایانه»^{۳۰} و «استدلال توجیهی»^{۳۱} را نیز از یکدیگر متمایز می دانند. آن ها معتقدند استدلال کاوش گرایانه مبین استدلالی است که به کشف و توضیح ایده های جدید ریاضی می انجامد و استدلال توجیهی استدلالی است که برای توجیه و اثبات ادعاهای ریاضی به کار می رود.

این تمایز توسط پولیا (۱۹۵۴) نیز بیان می شود. او بین استدلال «اثباتی»^{۳۲} که برای ارائه اثبات های رسمی مورد استفاده قرار می گیرد، و استدلال های محتمل (قابل قبول)^{۳۳} که برای کشف مفاهیم ریاضی ارائه می شوند، تمایز قائل می شود. پولیا (۱۹۵۴) معتقد است که در بسیاری از موارد، نوع دوم در الگوهای استدلال مورد استفاده توسط ریاضی دانان و دانشجویان ریاضی، مورد غفلت قرار می گیرد.

(نقل شده در: yankelowitz, 2009)
همچنین پولیا (۱۹۵۴) به استدلال «راه یابانه»^{۳۴} (اکتشافی) اشاره می کند و بیان می دارد که این نوع استدلال، نه به عنوان استدلالی قطعی و نهایی، بلکه تنها به عنوان ابزاری موجه نما و موقتی در نظر گرفته می شود و هدف آن، کشف راه حل مسئله است. او عقیده دارد: «هنگامی که می خواهیم برهانی قطعی بسازیم، به استدلال راه یابانه نیاز داریم. بدان گونه که برای برپا داشتن پل، نخست به چوب بست ها نیازمندیم» (ص ۵۰).

لایتنر (۲۰۰۸) نیز بین دو نوع استدلال تمایز قائل می شود که عبارت اند از:

۱. استدلال تقلیدی^{۳۵}: که از روی عادت و تکرار یاد گرفته می شود و دو نوع دارد که عبارت اند از:

● استدلال به یاد سپاری (مربوط به حافظه)^{۳۶}: برای مثال، دانش آموزی که یک مسئله را با استفاده از یک جواب کامل و معین در کتاب درسی یا حل شده توسط معلم،

حل می کند.

● استدلال الگوریتمی^{۳۷}: که در آن یک مسئله از طریق به کار بردن رویه ای معین حل می شود.

۲. استدلال خلاقانه^{۳۸}: شامل دنباله ای از استدلال های جدید است که براساس اصول ریاضی هستند. تفاوت مهم بین استدلال تقلیدی و خلاقانه این است که نوع اول ضرورتاً شامل تفکر مفهومی و تحلیلی نیست، در حالی که به گفته لایتنر، چنین فرایند تفکری برای استدلال خلاقانه ضروری است.

■ استدلال در ریاضیات مدرسه ای

از آنجا که فرایند استدلال بخش مهمی در ریاضیات محسوب می شود، لذا این فرایند برای یادگیری در ریاضیات مدرسه ای نیز ضروری و مهم است. یاکل و هنا (۲۰۰۳) تأکید می کنند که باید برای همه دانش آموزان از همان اوایل تحصیلات در مدارس ابتدایی، محیط حمایتی مناسبی برای تأیید یا رد ادعاها ایجاد شود. تحقیقات نشان می دهند، تدریس صرف الگوریتم ها می تواند برای توسعه استدلال دانش آموزان بی فایده و حتی مضر باشد

(نقل شده در: Mueller, 2007)

میولر (۲۰۰۷) معتقد است: هنگامی که ریاضیات به عنوان یک فرایند استدلالی در مقابل یک فرایند «قانون مدار»^{۳۹} پذیرفته می شود، آن گاه شرایط جمعی (محیط اجتماعی)^{۴۰} نیز باید در نظر گرفته شود. برای مثال، ایجاد فضایی که در آن دانش آموزان بتوانند به عنوان یک جامعه یادگیرنده در تعامل با یکدیگر باشند و نظرات خود را مورد نقد و بررسی قرار دهند، یکی از شرایط ضروری فرایند استدلال در ریاضیات مدرسه ای است. این فرایند می تواند به توجیه و اثبات ریاضی منجر شود. برخی از تحقیقات نیز نشان می دهند که ساخت اثبات توسط دانش آموزان، با تشویق آن ها به توجیه راه حل هایشان در کلاس درس اتفاق می افتد.

(Mueller & Maher, 2009)

طبق گفته ماهر و دیویس^{۴۱} (۱۹۹۵)، موقعی که دانش آموزان به بررسی و انتقال ایده هایشان در ریاضیات تشویق می شوند، قادر خواهند بود که شکل هایی از استدلال را به همان روشی که ریاضی دانان حرفه ای انجام می دهند، مورد استفاده قرار دهند. در واقع آن ها معتقدند که روش دانش آموزان برای تنظیم ایده ها، بحث در مورد تفکراتشان و همچنین ابداع روش هایی برای متقاعد کردن خود و دیگران، مشابه کار ریاضی دانان در فرایند استدلال است (نقل شده در: Mueller, 2007).

پولیا:

«هنگامی که

می خواهیم

برهانی قطعی

بسازیم،

به استدلال

راه یابانه نیاز

داریم. بدان گونه

که برای برپا

داشتن پل،

نخست به

چوب بست ها

نیازمندیم»

میولر و همکاران (۲۰۱۰) معتقدند، اغلب دانش آموزان هنگام توضیح و توجیه تفکراتشان با مشکل مواجه می شوند. آن ها بیان می دارند که اگرچه ممکن است دانش آموزان بتوانند برخی از مسائل پیچیده را حل کنند، اما در اغلب موارد قادر به توجیه راه حل هایشان نیستند و یا نمی توانند به خوبی فرایند چگونگی رسیدن به جواب را توضیح دهند. یکی از دلایل این مشکل می تواند تأکید بیش از اندازه معلم در کلاس درس بر یادگیری حقایق ریاضی، مهارت ها و رویه های مورد نیاز تنها برای حل مسائل الگوریتمی و سرراست باشد. در این صورت ممکن است توانایی دانش آموزان برای استدلال کردن به تعویق بیفتد. تا زمانی که آن ها مفاهیم مورد نظر را به طور کامل و به خوبی نفهمیده باشند، در به کارگیری این مفاهیم در استدلال و بحث هایشان با مشکل مواجه خواهند بود.

باید توجه داشت که برخی مواقع دانش آموزان نمی توانند شکل رسمی و نمادین استدلال های استنتاجی را به خوبی درک کنند. در این گونه موارد می توانند برای شروع کار با استدلال استنتاجی از شکل های غیررسمی آن در آموزش استفاده کنند. برای مثال، استایلیانیدز و استایلیانیدز (۲۰۰۸) سه نوع اثبات را که هر سه بر پایه استدلال استنتاجی اند، برای تأیید گزاره زیر ارائه می دهند که در جدول ۱ مشاهده می شود:

«حاصل جمع دو عدد فرد، عددی زوج می شود.»

همان گونه که اشاره شد، استایلیانیدز و استایلیانیدز معتقدند که هر سه روش ارائه شده براساس استدلال استنتاجی هستند و تنها نحوه بیان آن ها متفاوت است (تصویری^{۴۲}، جبری، روایتی^{۴۳}) و هر کدام از این روش ها با توجه به شرایط دانش آموزان قابل استفاده اند. لازم به ذکر است که گرچه نتایج ریاضی در قالب استدلال های رسمی و منطقی ارائه می شوند، ولی این نتایج برگرفته از استدلال های غیررسمی ریاضی دانان هستند. برخی از محققان آموزشی نیز مهارت در استدلال های غیررسمی را مورد تأکید قرار داده اند و بیان می دارند که بسیاری از تکالیف مرتبط با استدلال در کتاب های درسی ماهیت غیررسمی دارند و لذا توسعه مهارت های دانش آموزان در این زمینه می تواند تأثیر زیادی در افزایش توانایی آن ها به منظور ارائه استدلال های رسمی داشته باشد (Wu & Tsai, 2007).

ماک^{۴۴} (۱۹۹۰) در مطالعه خود نشان می دهد که وقتی دانش آموزان از دانش غیررسمی خود برای حل مسائل استفاده می کنند، به ایجاد الگوریتم ها و رویه ها می پردازند؛ هر چند در برخی موارد این الگوریتم ها با نمونه های سنتی تدریس شده در مدارس تفاوت دارند (نقل شده در: Mueller, 2007). مور^{۴۵} (۱۹۹۴) نیز در تحقیق خود دریافت که دانشجویان بدون درک و فهم غیررسمی مفاهیم

جدول ۱. سه نوع استدلال استنتاجی برای تأیید گزاره «حاصل جمع دو عدد فرد، عددی زوج می شود.» (Stylianides & Stylianides, 2008)

مراحل استدلال	اثبات با استفاده از زبان عامیانه	اثبات با استفاده از نمادهای جبری	اثبات با استفاده از شکل
مرحله اول	اعداد فرد، اعدادی هستند که اگر شما آن ها را به صورت جفت جفت کنار هم قرار دهید، یکی اضافه می آید.	اعداد فرد اعدادی به شکل $2n+1$ هستند که n یک عدد صحیح است.	اعداد فرد به این شکل هستند:
مرحله دوم	اعداد زوج، اعدادی هستند که اگر به صورت جفت جفت دسته بندی شوند، هیچ چیز اضافه نمی آید.	اعداد زوج به شکل $2n$ هستند که n یک عدد صحیح است.	اعداد زوج به شکل زیر هستند:
مرحله سوم	اگر شما دو عدد فرد را با هم جمع کنید، آن دسته های تک عضوی که از هر کدام باقی می ماند، وقتی در کنار هم قرار می گیرند، یک جفت را تشکیل می دهند.	اگر شما دو عدد فرد را با هم جمع کنید، داریم: $(2a+1) + (2b+1) =$ $(2a+2b) + (1+1) =$ $2(a+b+1)$	اگر دو عدد فرد را با هم جمع کنیم، داریم:
مرحله چهارم	عدد حاصل می تواند به صورت جفت جفت دسته بندی شود. پس عدد حاصل یک عدد زوج است.	عدد حاصل به صورت $2n$ ، و بنابراین زوج است.	اعداد حاصل به شکل یک عدد زوج هستند.

نمی‌توانند تعریف موردنظر را یاد بگیرند و توضیح دهند که این خود یکی از علل شکست دانشجویان در ارائه اثبات است (نقل شده در: Hawro, 2007). هیل و هویلز (۲۰۰۰) نیز معتقدند برای توسعه و بهبود توانایی و شایستگی دانش‌آموزان در ارائه استدلال‌های استنتاجی، ابتدا باید توانایی آن‌ها در استدلال‌های غیررسمی و روایتی تقویت شود. علاوه بر این، کریستو و پاچارجیو (۲۰۰۷)، در مطالعه خود نشان داده‌اند که استفاده بجا و مناسب از استدلال استقرایی نیز (به‌خصوص در دوره ابتدایی) می‌تواند نقش مهمی در یادگیری ریاضیات و موقعیت‌های حل مسئله داشته باشد.

دوبلی‌پرز^{۴۶} (۲۰۰۳) نیز در مورد نقش استدلال استقرایی و قیاسی در ریاضیات صحبت می‌کند و برخی از کارکردهای این شکل از استدلال را هنگام انجام فعالیت‌های ریاضی، مانند حدسیه‌سازی، ساخت یک گزاره و یا ارائه یک مثال نقص نشان می‌دهد. او معتقد است که ریاضی‌دانان قبل از اینکه مسئله را از یک دیدگاه استنتاجی بررسی کنند، از روش‌های استدلال استقرایی، شهودی و یا قیاسی استفاده کنند. در واقع این نوع از استدلال‌ها پیش‌زمینه‌ای برای اثبات‌های رسمی هستند. دوبلی‌پرز تأکید می‌کند که این استدلال‌ها محدودیت‌هایی دارند و شخص همیشه باید در ذهن داشته باشد که آن‌ها برای ضمانت درستی گزاره‌های ریاضی کافی نیستند و مفاهیم ریاضی را همانند استدلال استنتاجی توضیح نمی‌دهند. (نقل شده در: yankelowitz, 2009).

علاوه‌بر این، پولیا (۱۹۵۴) معتقد است که برای حل مسئله و یا اثبات یک گزاره، گاه استدلال شهودی مقدم است و گاه استدلال صوری و گاه توأماً استفاده کردن از آن‌ها سودمند و جالب است. البته باید توجه داشت که تا قبل از ورود به دبیرستان، دانش‌آموزان باید با محدودیت‌های استدلال غیراستنتاجی آشنا شوند. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (۲۰۰۰) نیز بیان داشته است که دانش‌آموزان کلاس‌های ششم تا هشتم به منظور استفاده از استدلال استقرایی به‌طور مناسب، باید محدودیت‌ها و همچنین شیوه استفاده از آن را بدانند؛ زیرا بسیاری از تکالیف آن‌ها بر استدلال‌های استقرایی تکیه دارند. لازم به ذکر است که در فرایند توجیه، اصلاح و رد حدسیه‌ها، فرصت آشنایی با محدودیت‌ها و کاربرد استدلال استقرایی نیز برای دانش‌آموزان فراهم می‌آید.

واتسون^{۴۷} (۲۰۰۸) معتقد است که در بسیاری از کلاس‌های مدرسه، استدلال‌های استقرایی و استنتاجی هم‌زمان با هم معرفی می‌شوند و مورد استفاده قرار می‌گیرند. باید توجه داشت که استفاده مناسب از این دو روش توسط

دانش‌آموزان و همچنین توسعه توانایی آن‌ها در استدلال استنتاجی ضروری و البته تاحدودی مشکل است (نقل شده در: استیسی و وینکنت، ۲۰۰۹). با وجود این، استایلیانیدز (۲۰۰۵) بر این باور است که فرصت‌های آموزشی، دانش‌آموزان را بیشتر برای استدلال استقرایی آماده می‌کنند تا استدلال استنتاجی. از نقطه‌نظر او فرصت‌های استدلال و اثبات به‌طور ناهموار و نامتوازن در سطوح متفاوت تحصیلی و مفاهیم گوناگون در درس‌های ریاضی توزیع شده‌اند.

مانسی^{۴۸} (۲۰۰۳) معتقد است، قبل از اینکه از دانش‌آموزان خواسته شود به نوشتن اثبات بپردازند، باید توانایی و مهارت استدلال ریاضی در آن‌ها توسعه یابد. در واقع گسترش توانایی دانش‌آموزان برای استدلال و توجیه اینکه چرا یک گزاره ریاضی برقرار است و یا چرا یک رویه خاص درست است، باید به‌عنوان قسمت مهمی از آموزش ریاضیات محسوب شود؛ زیرا دانش‌آموزانی که مهارت‌های مربوط به توجیه و استدلال در آن‌ها تقویت نمی‌شود به احتمال زیاد با مفهوم اثبات مشکل پیدا خواهند کرد.

ادوارد^{۴۹} (۱۹۹۷) اصطلاحی را تحت عنوان «قلمرو پیش از اثبات»^{۴۹} در مورد دانش‌آموزان مطرح می‌کند. این اصطلاح شامل شیوه‌های تفکر، گفت‌وگو و فعالیت‌هایی است، که هدفشان کشف گزاره‌های ریاضی است. در واقع او معتقد است، قلمرو پیش از اثبات، همان استدلال ریاضی است که دانش‌آموزان با آن درگیر می‌شوند تا مهارت نوشتن اثبات‌های رسمی در آن‌ها توسعه یابد. او پنج نوع فعالیت استدلالی را که عموماً در قلمرو پیش از اثبات به آن‌ها توجه می‌شود و دارای سلسله مراتب هستند، چنین مطرح می‌کند:

۱. **شناخت و ساخت الگوها^{۵۰}**: اولین مهارت، شناخت و ساخت الگوها یا قوانین برای کشف مسائل معین است.
۲. **توصیف الگوها^{۵۱}**: پس از تسلط بر مرحله اول، دانش‌آموزان شروع به توصیف الگوها از طریق قانون‌گذاری به‌صورت رسمی (استفاده از نمادهای جبری) یا غیررسمی (مثلاً توصیف روایتی) می‌کنند.
۳. **حدسیه‌سازی^{۵۲}**: پس از تسلط بر مرحله دوم، دانش‌آموزان حدسیه‌سازی می‌کنند. یعنی قادر هستند که الگو یا قانونی را بیان کنند که به‌طور کلی درست است؛ گرچه آن‌ها هنوز ضرورت اثبات کردن را نمی‌دانند.
۴. **استدلال استقرایی**: ممکن است دانش‌آموزان با بررسی چند مثال و مورد خاص، درستی حدسشان را تأیید کنند و بگویند که گزاره موردنظر همیشه درست است.
۵. **استدلال استنتاجی**: موقعی که دانش‌آموزان با استفاده

مانسی:
قبل از اینکه
از دانش‌آموزان
خواسته شود
به نوشتن
اثبات بپردازند،
باید توانایی و
مهارت استدلال
ریاضی در آن‌ها
توسعه یابد

از اصول موضوعه^{۵۳} و قضایای ثابت شده سعی می‌کنند که درستی حدس خود را تأیید کنند، از استدلال استنتاجی بهره می‌گیرند. در این مرحله شخص برای یادگیری فرایند اثبات آماده است.

برودیه (۲۰۱۰) بیان می‌دارد که برای برخی از ریاضی‌دانان و برنامه‌ریزان درسی، استدلال ریاضی با اثبات برابر دانسته شده است، در حالی که برخی دیگر معتقدند که اثبات شکلی از استدلال و توجیه است. او معتقد است که اثبات رسمی همیشه یک توجیه یا توضیح کافی از مفاهیم ریاضی را ارائه نمی‌دهد. گرچه اثبات‌های رسمی مدت زیادی است که برای تولید دانش ریاضی بدون خطا تدریس می‌شوند، اما در حقیقت بدین گونه نیست. برای مثال، بیشتر معلمان ریاضی از طریق ارائه یک استدلال یک صفحه‌ای از «قضیه فیثاغورس» قانع می‌شوند، در حالی که یک اثبات دقیق منطقی در مورد این موضوع، حدود ۸۰ صفحه است (دویلی‌پرز، ۱۹۹۰ نقل شده در: Brodie, 2010). در واقع اثبات، ما را از عدم اطمینان و غیرمنطقی بودن دانشمان حفظ نمی‌کند، اما در عین حال، یک بخش مهم و ضروری از استدلال ریاضی است که به عنوان

شکل ویژه‌ای از استدلال، توجیه و تعمیم در ریاضیات آموخته می‌شود (هنا و جانک، ۱۹۹۶، نقل شده در: Brodie, 2010).

■ بحث و نتیجه‌گیری

همان گونه که اهمیت استدلال‌های منطقی برای ریاضی‌دانان مشخص شده است، دانش‌آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای استدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند. به طور کلی، استفاده از انواع روش‌های استدلال برای آموزش و ارائه این مفاهیم در ریاضیات مدرسه‌ای مناسب است، اما باید دقت داشت که هر کدام از این روش‌ها در جای مناسب و با توجه به شرایط دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گیرد تا آن‌ها نیز برای دقت و رسیدن به اعتبار مورد نیاز در این زمینه، ارزش قائل شوند.

برخی از تحقیقات به استفاده دانش‌آموزان از مثال‌ها و استدلال استقرایی در تأیید گزاره‌ها و عدم توانایی آن‌ها در تمایز بین روش‌های متفاوت استدلال و اثبات اشاره می‌کنند. باید توجه داشت که هر چند استفاده مناسب از استدلال‌های استقرایی و غیررسمی در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای امری

پی‌نوشت‌ها

1. Kuhn
2. Education for thinking
3. Ross
4. National council of teachers of mathematics
5. Ball & Bass
6. Brodie
7. Wu
8. Leighton
9. coordinating
10. mediator
11. Byrne
12. Johnson
13. Webster
14. Yackel
15. induction
16. deduction
17. inference
18. quantity
19. structure
20. communal activity
21. Lithner
22. problematic
23. Generalizing
24. Justifying
25. intuition
26. analogy
27. inductive
28. deductive
29. sense-making
30. reasoning of inquiry
31. reasoning of justification
32. demonstrative
33. plausible
34. heuristic
35. Imitative
36. memorised
37. algorithmic
38. creative
39. rules oriented
40. social enviroment
41. Davis
42. pictorial
43. narrative
44. Mack
45. Moore
46. de Villiers
47. Watson
48. Edvard
49. the territory before proof
50. Noticing and constructing patterns
51. Describing
52. Conjecturing
53. axiomatic
54. Anderson

منابع

1. پولیا، جورج (۱۳۸۶). چگونه مسئله را حل کنیم. ترجمه احمد آرام. کیهان. تهران. چاپ هشتم.
2. جلیلی، میرزا (۱۳۸۵). «اثبات در یک دستگاه ریاضی». مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۸۳.
3. جهان‌شاهی، محمد (۱۳۸۰). اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستان و پیش‌دانشگاهی. (چاپ دوم). تهران: انتشارات مدرسه.
4. عین‌اللهی، علیرضا (۱۳۷۹). روش‌های استدلال در ریاضیات. پستین. تهران.
5. کریمی فردین‌پور، یونس (۱۳۸۵). «اثبات و استدلال در ریاضیات مدرسه‌ای». مجله رشد آموزش ریاضی. ش ۸۳.
6. حاجی حسین‌نژاد، غلامرضا و بالفی‌زاده، سوسن (۱۳۸۹). «تأثیر آموزش مبتنی بر «تدریس برای فهمیدن» بر برنامه درسی تجربه شده - درس تاریخ هنر». فصل‌نامه مطالعات برنامه درسی ایران. ش ۱۷.
7. راس، کنت (۱۳۸۵). «ریاضی ورزیدن و اثبات: جایگاه الگوریتم‌ها و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای. ترجمه فاطمه مرادی و محبوبه شریعتی. مجله رشد آموزش ریاضی. ش ۸۳.
8. ملکی، حسن و حبیبی‌پور، مجید (۱۳۸۵). «پرورش تفکر انتقادی هدف اساسی تعلیم و تربیت». فصل‌نامه نوآوری‌های آموزشی. ش ۱۹.
9. Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
10. Brodie, Karin (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*. New York: springer, Retrieved May 10, 2011 from <http://www.springer.com>.
11. Christou, Constantion & Papageorgiou, Eleni (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction*, 17, 55-66.
12. Hawro, Justyna (2007). University students' difficulties with formal proving and attempts to overcome them. In CERME 5, 2290-2299.
13. Healy, L. & Hoyle, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4), 396-428.

یکی از وظایف
معلمان ریاضی
این است که در
کلاس درس،
فرصت‌ها و
شرایطی را
فراهم نمایند
که در قالب آن،
دانش‌آموزان
از اهمیت و
ضرورت اثبات
و استدلال‌های
معتبر و
کارکردهای
مختلف این
مفاهیم، آگاه
شوند

نیز به‌خوبی این جریان نقد و بررسی را هدایت و کنترل کند، آن‌گاه این استدلال‌ها می‌توانند به سمت استدلال‌های رسمی و اثبات ریاضی سوق یابند. بدین ترتیب معلمان می‌توانند به ارتقای توانایی و مهارت‌های مربوط به استدلال و اثبات در دانش‌آموزان، کمک مؤثری کنند. برای مثال، معلم می‌تواند بعد از انجام فعالیت‌ها و تکالیف مربوط به استدلال و اثبات، با بیان سؤالاتی همچون: «می‌توانید توضیح دهید که چگونه به این جواب رسیده‌اید؟» یا «من و هم‌کلاسی‌هایتان را از درستی جوابتان مطمئن کنید»، از یادگیرندگان بخواهد که جوابشان را توضیح دهند. زیرا عمل «توضیح دادن» می‌تواند فرایند تفکر دانش‌آموزان را توسعه دهد و موجب شود که آن‌ها با استدلال‌های یکدیگر آشنا و برای ساخت ایده‌های مفید ریاضی آماده شوند.

امیداست که با مطالعات بیشتر و عمیق‌تر در کشور خودمان بتوانیم در پرورش و توسعه مهارت‌های استدلالی دانش‌آموزان، قدم‌های مؤثری برداریم که این کار به تلاش محققان آموزشی و معلمان، و همچنین حمایت مسئولان آموزش و پرورش و بها دادن به این تحقیقات نیاز دارد.

ضروری است، اما باید شرایط آموزشی را به‌گونه‌ای فراهم کرد که دانش‌آموزان به ضرورت استدلال‌های استنتاجی پی ببرند. با وجود اینکه مدرسه مکان مناسبی برای پرورش تفکر و مهارت‌های استدلالی دانش‌آموزان است، اما همان‌گونه که آندرسون^۴ و همکارانش (۲۰۰۰) بیان می‌کنند، لازم است مشخص شود که آیا بین آموخته‌های دانش‌آموزان و توانایی آنان در حل مسائل زندگی حال و آینده ارتباطی وجود دارد یا نه (نقل شده در: Kuhn, 2008).

در این راستا، یکی از وظایف معلمان ریاضی این است که در کلاس درس، فرصت‌ها و شرایطی را فراهم نمایند که در قالب آن، دانش‌آموزان از اهمیت و ضرورت اثبات و استدلال‌های معتبر و کارکردهای مختلف این مفاهیم، آگاه شوند. مطالعات (برای مثال، شونفیلد، ۱۹۹۴؛ بال و باس، ۲۰۰۳؛ استایلیانیدز، ۲۰۰۷ و ۲۰۱۱) نیز نشان می‌دهند که چنانچه محیط حمایتی مناسبی برای پرورش و رشد استدلال‌های دانش‌آموزان فراهم شود، به‌طوری که آن‌ها بتوانند در کلاس درس نظرات خود را بیان کنند، همچنین استدلال‌ها و حدسیه‌های هم‌کلاسی‌هایشان را مورد نقد و بررسی قرار دهند و معلم

- Learning, 10, 103-133.
28. Varghese, Thomas, (2007). *Students teachers conception of mathematical proof*. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.
 29. Wu, Ying - Tien & Tsai, Chin-Chung (2007). High school students' informal reasoning on a socio-scientific issue: Qualitative and quantitative analyses. *International journal of science education*, 29(9), 1163-1187.
 30. Yankelewitz, Dina (2009). *The Development of mathematical reasoning in elementary school students exploration of fraction ideas*. Unpublished doctoral dissertation, university of New Jersey, USA. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
 31. Yankelewitz, Dina, Muelle, Mary & Maher, Carolyn A. (2010). A task that elicits reasoning: A dual analysis. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 76-85.
 - * Math5fa@yahoo.com
 - Education, 72, 271-288.
 24. Stylianides, Andreas J. (2007). Proof and proving in school mathematics, *Journal for research in Mathematics education*, 38(3), 289-321.
 25. Stylianides, Andreas J. (2011). Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. *Pythagoras*, 32(1), Art.# 14, 10 pages. (doi: 10, 4102/pythagoras. v32i1, 14).
 26. Stylianides, A. J., & Ball, D.L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowing about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11,307-332.
 27. Stylianides, Gabriel J. & Stylianides, Andreas J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning, *Mathematical Thinking and*
 19. Mueller, Mary, Maher, Carolyn (2009). Learning to Reason in an Informal Math After-School Program, *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 21, No. 3, 7-35.
 20. NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
 21. Paddack, Megan (2009). *The process of making meaning: The interplay between teachers knowledge of mathematical proofs and their classroom practices*. Unpublished doctoral dissertation, university of new Hampshire, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
 22. Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13(1), 55-80.
 23. Stacey, Kaye & Vincent, Jill (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Science and Mathematics*
 14. Kuhn, Deanna (2008). *Education for thinking*. United states of American: Harvard university.
 15. Leighton, J. P. (2003). *Defining and Describing Reasoning*. In J. O. Leighton & R. J. Sternberg (Eds.), *The Nature of Reasoning*. New York, NY: Cambridge.
 16. Lithner, Johan (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 165-190.
 17. Mansi, K. E. (2003). *Reasoning and proof in mathematics Education: A Review of Literature*. A Theses submitted to the graduate faculty of north Carolina State university in partial fulfillment of the degree of master of science.
 18. Mueller, Mary (2007). A study of the development of reasoning in sixth grade students, Unpublished doctoral dissertation, the state university of new Jersey, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

مغالطات در محاورات

■ مغالطه «که» و «چه»

حضرت علی (ع) در «تهج البلاغه» می فرماید: «نُظِرَ إِلَيَّ مَا قَالُوا وَ لَا تُنْظَرُ إِلَيَّ مَنْ قَالَ».

سعدی شیرازی این قاعده را به بهترین صورتی در «گلستان» خود ترجمه کرده است و می فرماید: «بین چه می گوید، مبین که می گوید.»

اغلب ما در محاورتمان، مرتکب این مغالطه می شویم و برای اثبات عقیده مان از شخصی مشهور نقل قول می کنیم. در حالی که اگر بعضی از سخنان این شخص درست است، به هیچ وجه معلوم نیست که تمام سخنان او درست باشد. بسیار امکان دارد، این سخنی که از او نقل کرده ایم، سخنی نادرست باشد. نیز به این علت که اگر سخنی بشنویم، توقع داریم که گوینده خود به آن عمل کرده باشد، و اگر این چنین نباشد، آن کلام را حتی در صورت درست بودن قابل قبول نمی دانیم. در حالی که بسیار امکان دارد گوینده ای سخن بسیار درستی بگوید، اما خود به آن عمل نکند. مولوی در این مورد تمثیلی می آورد که اشاره به همین حالت دارد. او می فرماید:

همچو جوی است او نه آبی می خورد
آب از او بر آب خواران بگذرد
آب در جو زان نمی گیرد قرار
زانکه آن جو نیست تشنه و آب خوار

سعدی نیز در گلستان با توجه به این مطلب می گوید:

باطل است آنچه مدعی گوید:
«خفته را خفته کی کند بیدار»

مرد باید که گیرد اندر گوش
و نوشته است پند بر دیوار

و در این سخن اشاره به این دارد که آدمی باید به «چه» توجه داشته باشد نه به «که». به عبارت دیگر، این «سخن» است که باید بررسی شود نه «گوینده سخن». البته در این مورد باید معصومان را مستثنا کرد.

مقدمه

بسیاری از دانش آموزان بر این تصورند که مغالطه تنها در حوزه ریاضیات رخ می دهد، و غافل از این اند که ما در صحبت های روزمره مان، مرتباً و بدون آنکه متوجه باشیم، در شبکه مغالطات می افشیم و بندی این بندهای درهم تنیده می شویم.

در این مقاله به صورتی بسیار کوتاه به پاره ای از این مغالطات اشاره می کنیم و خاطر نشان می سازیم که مغالطات محاورات بسی بیشتر از این مواردی است که ما آورده ایم. خواننده خود باید با دقت و فراست مواظب باشد که با شناخت آن ها، نه خود در هزار توپشان گرفتار آید و نه به دیگری اجازه ماندن در آن را بدهد.

استدلال ریاضی، تفکر منطقی، ریاضیات
مدرسه ای، آموزش ریاضی



■ تعریف مغالطه

مغالطه در لغت، به معنی به «غلط افکندن» است و در اصطلاح منطق، بدین مفهوم است که از مقدمات استدلالمان، با مقدمه یا مقدماتی به ظاهر موجه، نتیجه ای دلخواه را به دست آوریم.

و اینک چند مغالطه که در محاورات روزانه به کار می روند و مشهورترند:

گفت من کشتی و دریا خوانده‌ام
مدتی در فهم آن می‌مانده‌ام
اینک این کشتی و این دریا و من
مرد کشتی‌بان و اهل رای و فن

(مثنوی)

در این مورد، این سخن هم از شاعر معاصر، حمیدی
شیرازی شنیدنی است:

پشه‌ای گردان چو گردی در فضا
روی یال شیری افتاد از قضا
بسکه آن ناچیز خودبینیش بود
پیش خود بر شیر سنگینیش بود
لحظه‌ای نگذشته با شیر کلان
گفت آن مسکین لاغر کای فلان:
گر تو را بر دوش سنگینیم ما
زود گو تا بیش ننشینیم ما
شیر گفت از این زمان تا هر زمان
هر کجایی هر چه می‌خواهی بمان
گر نه خود گفتی به دوشم جسته‌ای
خود ندانستم کجا بنشسته‌ای

شیخ محمود شبستری نیز با اشاره به همین حقارت
جهانی‌بینی این گونه اشخاص می‌فرماید:

تو از عالم همین لفظی شنیدی
بیا بر گو که از عالم چه دیدی؟

(گلشن راز)

■ مغالطه نسب‌بودن بدی

اغلب اوقات دچار این مغالطه می‌شویم که بدی را مطلق
می‌دانیم و تصور می‌کنیم که در جهان بد مطلق موجود
است؛ در حالی که چنین نیست. مولوی در این مورد زهرمار



■ مغالطه جهان‌بینی

پاره‌ای از افراد بر این تصورند که چون به اصطلاح دنیا
دیده‌اند، پس می‌توانند هر چه به زبانشان می‌آید بگویند،
و آن را درست پندارند. از همه مهم‌تر شنونده آن‌ها نیز
باید به درستی آن گردن نهد و اقرار کند! در حالی که خبر
ندارند جهان بسیار وسیع‌تر از آن است که پنداشته‌اند و
جهان‌بینی‌شان از آن حقیرتر که در خاطر نگاشته‌اند.

مولوی در این مورد می‌فرماید:

تو جهان را قدر دیده دیده‌ای
کو جهان؟ سبلت چرا مالیده‌ای

(مثنوی)

و بعد این تمثیل زیبا را می‌آورد:
آن مگس بر برگ کاه و بول خر
همچو کشتی‌بان همی افراشت سر



را مثال می آورد و می گوید:
 زهرمار آن مار را باشد حیات
 از برای دیگری آمد ممات
 پس بد مطلق نباشد در جهان
 بد به نسبت باشد این را هم بدان

(مثنوی)

باید توجه داشت که در این گونه موارد سفیدی و سیاهی مطلق وجود ندارد و این دو را باید به درجات سنجید. گرچه در این اواخر اصطلاح خاکستری نیز مطرح می شود، ولی کافی نیست و بین سیاهی و سفیدی به قول قدما هزار مرحله موجود است. توجه کنیم که این برخورد نادرست ما از منطق ارسطویی مان سرچشمه می گیرد. می دانیم که در منطق ارسطویی که «منطق دو ارزشی»^۱ است، یک گزاره یا راست است یا دروغ. یعنی یک گزاره نمی تواند در آن واحد (و دیگر وحدت های تناقض) هم راست باشد هم دروغ، و نه راست باشد نه دروغ. ناچار باید یکی از این دو باشد. این منطق به جفا در استدلال های روزمره مان رخنه کرده است و ما را به سمت مطلق گرایی سوق می دهد و موجب افتادنمان در دام چنین مغالطه ای می شود.

این را هم تذکر بدهیم که در مقابل منطق دو ارزشی متعارفمان، «منطق چندارزشی»^۲ قرار دارد و این اواخر توسط یک ایرانی به نام لطفی زاده، «منطق فازی»^۳ مطرح شده که بی شمار ارزشی است.

اشاره دیگری که در این مورد می توان کرد، مربوط به بعضی شبکه های اینترنتی است که در آن ها تنها لغت «like» موجود است، در حالی که کاربران بر این خواسته اند که موارد دیگری چون «love» و «hate» و تعدادی دیگر از این گونه موارد نیز در دسترسشان باشد، زیرا فقط یک اصطلاح را برای بیان منظورشان کافی نمی دانند.

پی نوشت ها

1. two valued logic
2. many valued logic
3. fuzzy logic

و به این ترتیب نشان می دهد که چون هر شیء از یک یا چند جهت خوب، و از جهت یا جهات دیگر بد است، پس بد مطلق در جهان موجود نیست.

گرچه در اینجا می توان خاطر نشان کرد که هرچه تجربه و دانش ما بیشتر شود، بدی این بد نسبی هم کمتر می شود، و مثلاً از همین زهرماری که برای انسان مرگ می آورد - چون دانش و تجربه آدمی بیشتر شود - پاره ای از داروها را برای نجات همین انسان می سازند و در اختیارش قرار می دهند. پس در این مورد نیز باید توجه داشته باشیم که از بد، به طور مطلق بهره برداری نکنیم، و در دام این مغالطه نیفتیم.

■ مغالطه سفید و سیاه

پاره ای از اشخاص، زمانی که از کسی یا چیزی سخن به میان می آورند، یا آن را سفید سفید یا سیاه سیاه در نظر می گیرند، در حالی که چنین نیست. در کتاب «اسرار التوحید» ابوسعید ابوالخیر چنین آمده است: روزی شیخ با اصحاب در کوچه ای روان بودند، در مسیر به سگی مرده برخوردند که مدتی از مرگش می گذشت و جسدش بو گرفته بود. مریدان شیخ همه بینی خود را با دست گرفته دور شدند، جز شیخ که نزدیک لاشه سگ مرده رفت، و به دندان هایش اشاره کرد و گفت چه دندان های سپیدی دارد. سعدی می فرماید:

دشمن چو بینی ناتوان، لاف از بُروت خود مزین
 مغزی است در هر استخوان، مردی است در هر پیرهن
 (گلستان)

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

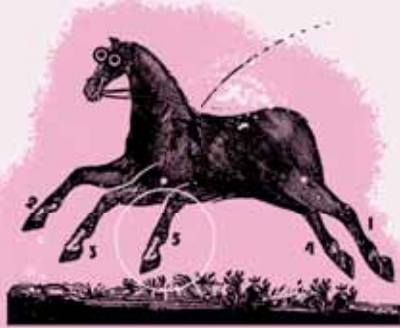
چند لطیفه ریاضی

ایستگاه چهارم:

بعد از تفکر روی چند معما و پارادوکس، حالا گوش کردن به این چند لطیفه، آرام بخش است!

لطیفه اول

یک شیمی دان، یک فیزیک دان و یک ریاضی دان در یک جزیره گرفتار شده بودند و غذایشان تمام شده بود. تنها یک قوطی کنسرو داشتند، اما دربار کن نداشتند. فیزیک دان و شیمی دان در حال بحث گرمی در مورد راه های باز کردن در قوطی بودند، ناگهان ریاضی دان از جا پرید و در حالی که انتظار داشتند حرف تازه ای در این مورد بگوید، گفت: «بیایید فرض کنیم ما یک دربار کن داریم...!»



لطیفه سوم

این مسئله را برای یک ریاضی دان، یک فیلسوف و یک مهندس مطرح کردند: «اگر دم اسب را به عنوان یک پا تعریف کنیم، حالا اسب چند پا دارد؟»
ریاضی دان گفت: «۵ تا»، فیلسوف گفت: «یکی» و مهندس گفت: «نمی توانید این کار را بکنید!»

لطیفه دوم

ریاضی دان می خواست یک میز کار طراحی کند. او نخست میزی بدون پایه طراحی کرد. سپس میزی با تعدادی نامتناهی پایه طراحی کرد! سپس بقیه عمرش را صرف تعمیم این موضوع کرد که میزی با n پایه طراحی کند، به طوری که n لزوماً یک عدد طبیعی نباشد!

پاسخ ایستگاه های اندیشه و ادب ریاضی این شماره

ایستگاه اول: رمز جدول همان عنوان جدول است. فرهنگ و اندیشه!

ایستگاه دوم: معمهای بامزه!

معمای اول: یک راه این است که اول ساعت ها را با هم به کار بیندازیم و وقتی ساعت هفت دقیقه ای به آخر رسید، چهار دقیقه از شن ساعت ۱۱ دقیقه ای باقی مانده است. از همان لحظه تخم مرغ ها را در آب قرار می دهیم و بعد از تمام شدن زمان کار ساعت ۱۱ دقیقه ای، آن را سروته می کنیم تا ۱۱ دقیقه دیگر هم جوشیدن تخم مرغ ها ادامه یابد و در مجموع ۱۵ دقیقه بجوشند. ولی در این صورت مجبور می شویم برای خوردن آن ۲۲ دقیقه صبر کنیم!

راه بهتر و کمی دشوارتر آن است که ما انجام دادیم: تخم مرغ ها را فوراً در آب گذاشتیم و هم زمان هر دو ساعت را به کار انداختیم. وقتی کار ساعت ۷ دقیقه ای تمام شد، آن را برگردانیدیم و وقتی کار ساعت ۱۱ دقیقه ای تمام شد، به اندازه ۴ دقیقه شن، ته ساعت ۷ دقیقه ای جمع شده بود. آن را یک بار دیگر برگردانیدیم و ۴ دقیقه دیگر را برای ادامه جوشیدن تخم مرغ ها اندازه گرفتیم.

معمای دوم: تخم مرغ ها را در آب انداختیم و هر دو ساعت را به کار انداختیم. وقتی ساعت ۴ دقیقه ای کارش تمام شد، آن را برگردانیدیم و وقتی ساعت ۷ دقیقه ای کارش تمام شد، آن را هم برگردانیدیم. یک دقیقه بعد ساعت ۴ دقیقه ای کارش تمام شد و ۸ دقیقه سپری شد و به اندازه ۶ دقیقه شن در بالای ساعت ۷ دقیقه ای باقی بود. یک دقیقه شن هم در پایین آن ریخته بود. پس بلافاصله ساعت ۷ دقیقه ای را دوباره برگردانیدیم تا یک دقیقه دیگر هم محاسبه شود.

معمای سوم: برخلاف تصور اولیه، کار ساده است: دو کتلت را درون ماهی تابه قرار می دهیم و یک دقیقه بعد یکی از آن ها را برمی گردانیم و یکی را از ماهی تابه خارج می کنیم. سپس کتلت سوم را به جای آن می گذاریم. یک دقیقه بعد طرف دوم کتلت اول پخته و آن را خارج می کنیم و کتلت دوم را هم برمی گردانیم. کتلت سوم را هم که بیرون بود، به داخل ماهی تابه می بریم و طرف دوم آن را هم به همراه طرف دوم کتلت دوم سرخ می کنیم. پس بعد از سه دقیقه هر سه کتلت آماده اند!



همراه با مخاطبان

آتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. باز هم با ما در ارتباط باشید.

● آقای بهرام دستوریان، از دانشگاه آزاد اسلامی واحد دهشت

دو مطلب ارسالی شما با عنوان‌های «جدول فرهنگ و اندیشه» و «همهٔ اعداد حسابی با هم برابرند؟!» به دستمان رسید. با سپاس فراوان از شما، از جدول عددی ارسالی‌تان در ایستگاه اندیشه و ادب همین شماره استفاده کردیم. اما در مورد مقاله‌تان یادآور می‌شویم، ایده‌هایی که در مورد پارادوکس‌هایتان به کار برده‌اید، تکراری و قدری کهنه‌اند و بارها مورد استفادهٔ طراحان پارادوکس‌ها (یا سفسطه‌ها!) قرار گرفته‌اند. اگر بتوانید روی مسائل جدی‌تر مورد نیاز دانش‌آموزان تمرکز کنید و برایمان مطلب بفرستید، حتماً از آن‌ها استفاده می‌کنیم و سپاس‌گزارتان خواهیم بود.

● خانم فاطمه رضانژاد از شهرستان رودبار

مطلبتان با عنوان «ریاضیات ذهنی» به دستمان رسید. به نظر می‌آید بیشتر برای دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی مناسب باشد، لذا آن را به همکارانمان در مجلهٔ رشد برهان متوسطهٔ ۱ تحویل دادیم تا ان‌شاءالله مورد استفاده قرار دهند.

● آقای محمد رحمانی از شهرستان تاکستان استان زنجان

مقاله‌تان با عنوان «محاسبهٔ

● آقایان حسن و محمد طبیعی

مطلبتان به دستمان رسید. مانند گذشته به مجلهٔ محبت دارید و ما هم سعی می‌کنیم از مطالب ارسالی‌تان استفاده کنیم. پاسخ‌های آقای محمد طبیعی به مسائل بخش «پای تخته» هم به مسئول این بخش تحویل داده شد.

● آقای محمد کریم نائل از دانشگاه آزاد اسلامی واحد آبادان

مقاله‌تان با عنوان «حل یک مسئلهٔ هندسی با چند راه‌حل» به دستمان رسید. ان‌شاءالله در یکی از شماره‌های

در نهایت خوش‌بختی، نامه‌ها و پیام‌نگارهای متعدد شما عزیزان، همچنان بارقهٔ امید راه دشواری است که ما برگزیده‌ایم. به ما نوید داشتن یاران و همراهانی وفادار را برای ادامهٔ این مسیر می‌دهد. پاسخ‌های ما را به بخشی از این نامه‌ها و پیام‌نگارها ملاحظه می‌کنید:

انتگرال به کمک مساحت» به دستمان رسید. فرمت ارسال ایمیل تان طوری بود که هنگام پرینت گرفتن از آن، بعضی از فرمول‌ها و شکل‌ها حذف شدند. لذا از شما خواهشمندیم که مطلبتان را بار دیگر اصلاح و برایمان ارسال کنید. علاوه بر این، بارها متذکر شده‌ایم که در ابتدای مقاله ارسال، مشخصات کامل و سمت خود را ذکر کنید و یک تلفن تماس نیز بگذارید. در مورد محتوای مقاله تان هم باید بگوییم که بحث «انتگرال» آن هم در این سطح، تنها در ماه‌های پایانی سال تحصیلی و در سطح دانش‌آموزان دوره پیش‌دانشگاهی رشته ریاضی مطرح می‌شود، لذا تنها می‌تواند مورد اقبال دسته بسیار کوچکی از خوانندگان مجله واقع شود. از شما دوست عزیز خواهشمندیم روی مطالب عمومی‌تر تمرکز کنید و باز هم ما را مورد عنایت خود قرار دهید. با این همه، ضمن سپاس از شما و در صورت ارسال مجدد مقاله، امیدواریم بتوانیم از آن در یکی از شماره‌های بعدی استفاده کنیم.

● آقا یا خانم اسدی

مطلبتان با عنوان «احتمال» به دست ما رسید. باز هم توصیه می‌کنیم مشخصات کامل و سمت

خود را در ابتدای مقاله بنویسید و حتماً یک شماره تلفن تماس ذکر کنید. با سپاس از شما امیدواریم در یکی از شماره‌های آینده از آن استفاده کنیم.

● خانم رقیه شهبازی از شهرستان عجب‌شیر استان آذربایجان شرقی

ایمیل‌های ارسالی تان به دستمان رسید. با سپاس فراوان از توجهتان به مجله، توصیه می‌کنیم که مطالبی را برایمان بفرستید که ایده آن‌ها به‌طور کامل از خودتان باشد. به جای اقتباس از منابع داخلی یا خارجی، سعی کنید درباره مفاهیم ساده ریاضی قلم بزنید و آنچه را که به نظر تان مفید می‌آید، مطرح سازید. با این حال در صورت امکان سعی می‌کنیم از مطالبتان استفاده کنیم.

● آقای نوید نصرت‌زهی از شهرستان سراوان

مطلب شما درباره روش‌های ضرب سریع اعداد، به دستمان رسید. به نظر می‌رسید که بیشتر برای طرح در مجله برهان متوسطه ۱ مناسب باشد و لذا به همکارانمان در آن مجله تحویل داده شد.

● خانم مریم حیدری عبداللہی از

شهرستان یزد

با سپاس فراوان از ارسال جدول واژگان ریاضی، به شما بابت ذوق و سلیقه تان تبریک می‌گوییم و توصیه می‌کنیم در این زمینه بیشتر فعالیت کنید و باری‌رسان مجله تان شوید. از جدول ارسالی تان در یکی از شماره‌های آینده حتماً استفاده می‌کنیم. مقاله تان با عنوان «گذر از سختی‌ها...» هم به دستمان رسید. البته ترجمه مطالب مجلات خارجی با ذکر منبع (که شما هم چنین کرده‌اید)، مناسب و قابل استفاده است، ولی تلاش کنید خودتان هم دست به قلم ببرید و مقالات مناسبی، با توجه به اشرافی که به نیازهای دانش‌آموزان دارید، برای آنان بنویسید. از مقاله تان در یکی از شماره‌های آینده استفاده خواهیم کرد. با تشکر از شما، باز هم با ما در تماس باشید.

● آقای سیداحسان حسینی از

شهرستان دره شهر استان ایلام

مقاله تان با عنوان «شاهزاده ریاضیات» به دستمان رسید. با تشکر فراوان از توجهتان به مجله خودتان، و به خصوص توجهتان به تاریخ ریاضیات، حتماً در یکی از شماره‌های آینده از آن استفاده می‌کنیم. باز هم با ما در ارتباط باشید.

با عرض معذرت از دیگر دوستانی که به دلیل محدودیت فضای مجله، امکان پاسخ‌گویی در این شماره به آن‌ها فراهم نشد، ادامه پاسخ به نامه‌ها و پیام‌نگارها را به شماره بعد موکول می‌کنیم. با آرزوی توفیق برای همه خوانندگان و دوستداران مجله، تا شماره ویژه مهرماه همگی را به خدا می‌سپاریم.

مسائل ریاضی ۱

مصطفی دیداری

۱. جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

الف) در مقایسه دو عدد، عدد بزرگتر در سمت ... عدد کوچکتر قرار دارد.

ب) روی محور اعداد نقاطی وجود دارند که نظیر هیچ عدد گویایی نیستند. این اعداد را اعداد ... می نامیم.

ج) عدد π تا دقت دو رقم اعشار برابر است با...

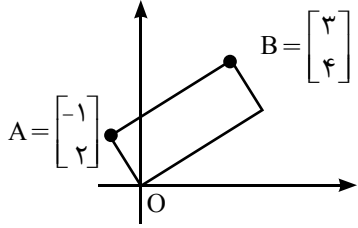
د) $|x|$ برابر است با ... عدد x تا صفر.

۲. عبارت رادیکالی زیر را ساده کنید:
 $\sqrt[3]{40} + 2\sqrt{8} - \sqrt{50} + 3\sqrt{5}$

۳. حاصل عبارت زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.
 $(a+2b)^2 - a(a-2b)^2$

۴. تجزیه کنید.
 $27x^2 - 8y^2$

۵. مساحت مستطیل زیر را بیابید.



۶. اگر نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ m+1 \end{bmatrix}$ روی خط $(2m-1)x + \frac{2}{3}y = 7$ باشد، m را به دست آورید.

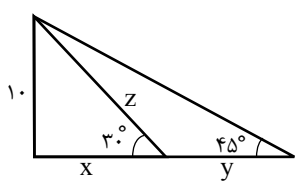
۷. دو خط $x-y=5$ و $3x+2y=5$ را

در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) محل تلاقی دو خط را به دست آورید.

ب) معادله خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط بگذرد و بر خط $y+3x=2$ عمود باشد.

۸. مقدار x ، y و z را به کمک نسبت های مثلثاتی به دست آورید.



۹. اگر $\theta = 30^\circ$ باشد، حاصل عبارت $\sin^2 \theta - \cos 2\theta + 2 \tan \theta$ را به دست آورید.

۱۰. درستی تساوی زیر را ثابت کنید

$$\frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)} = 1 - \sin \theta \cos \theta$$

(sin θ + cos θ ≠ ۰)

۱۱. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{x-1}{2x-3} - \frac{x^2+4}{4x^2-9}$

ب) $\frac{4x^2-25y^2}{(x+4)} \div \frac{2x^2y+5xy^2}{x^2+8x+16}$

۱۲. تقسیم زیر را انجام دهید و خارج قسمت و باقی مانده را به دست آورید:

$$12x^2 + 36x - 1 \div x + 1$$

۱۳. مخرج عبارت رادیکالی زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{2\sqrt{a+a\sqrt{2}}}$$

۱۴. معادلات درجه دوم زیر را با روش های خواسته شده حل کنید.

الف) (روش مربع کامل) $x^2 - 6x - 7 = 0$

ب) (روش کلی) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

ج) (روش هندسی) $x^2 - x - 2 = 0$

۱۵. اگر معادله درجه دوم $(m-1)x^2 - 2x + 3 = 0$ دارای جواب حقیقی نباشد، حدود m را به دست آورید.

۱۶. نامعادله زیر را حل کنید و جواب را روی محور نمایش دهید.

$$2(1-x) - 3(1+x) \leq 6$$

۱۷. هزینه رفت و برگشت سفر به اصفهان ۷۰/۰۰۰ تومان، هزینه خوراک ۱۳۰/۰۰۰ تومان و هزینه هر شب اقامت در هتل ۵۰/۰۰۰ تومان است. با ۴۷۰/۰۰۰ تومان حداکثر چند روز می توان در اصفهان اقامت کرد؟ (نامعادله موردنظر را بنویسید.)

مسائل ریاضی ۲

مصطفی دیداری

۱. در یک دنباله حسابی مجموع جملات نهم و دهم برابر با ۵۶ و جمله پنجم برابر با ۱۰ است. دنباله را مشخص کنید و جمله بیستم دنباله را به دست آورید.

۲. اگر رابطه $f = \{(-1, a-b), (a-b, 5), (-1, 3), (3, a+b)\}$ تابع باشد:

الف) a و b را به دست آورید.
 ب) حاصل $f(-1) + f^{-1}(5)$ را به دست آورید.

۳. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -|x+1| - 2$ را به کمک انتقال به دست آورید (با رسم مراحل).

۴. دامنه توابع زیر را به دست آورید:
 الف) $f(x) = \frac{1}{x(x^2-4)}$



۱۵. دستگاه زیر را به روش ماتریس

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
 معکوس حل کنید:

۱۶. به چند طریق می‌توان با حروف

کلمه FLOWER کلمه چهار حرفی

ساخت که (تکرار مجاز نیست):

الف) دارای حرف L باشد و دارای

حرف O نباشد.

ب) دو حرف O و L در کلمه موجود

و در کنار هم باشند.

۱۷. مقدار n را از تساوی زیر به دست

آورید.

$$P(n, 2) = C(n, 3)$$

۱۸. از بین ۴ دانش‌آموز تجربی، ۵

دانش‌آموز ریاضی و ۳ دانش‌آموز

انسانی می‌خواهیم شورایی سه‌نفره

تشکیل دهیم. به چند روش می‌توان

اعضای آن را انتخاب کرد، در صورتی که:

الف) رشته دانش‌آموزان مهم نباشد.

ب) از هر رشته به تعداد مساوی در

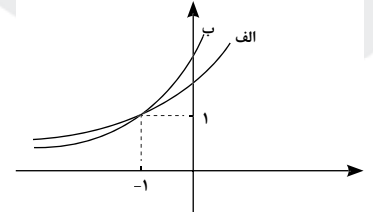
شورا انتخاب شود.

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-4}{1-x}} \quad (\text{ب})$$

۵. مشخص کنید دو نمودار (الف) و (ب)

مربوط به کدام یک از توابع $y = 3^{x+1}$ و

$y = 3^{x+1}$ هستند؟



۶. معادله زیر را حل کنید:

$$\log_{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} = -\frac{1}{3}$$

۷. حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$A = \log_4 2\sqrt{r} - 2 \log_5 \frac{1}{5}$$

۸. معادله زیر را حل کنید:

$$\log(x+1) - \log(x-1) = 2 \log 2 - 1$$

۹. $\frac{11\pi}{6}$ رادیان را به درجه تبدیل و آن

را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

۱۰. حاصل $\sin(\frac{7\pi}{4}) + \cos 210^\circ$ را به دست

آورید (ساده کردن لازم نیست).

۱۱. اگر $0 \leq \theta \leq 2\pi$ باشد، زوایای θ را

به گونه‌ای بیابید که $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد

(با رسم شکل).

۱۲. الف) نمودار تابع با ضابطه $y = 4 \cos 2x$

را در یک دوره تناوب رسم و حداقل و

حداکثر آن را تعیین کنید.

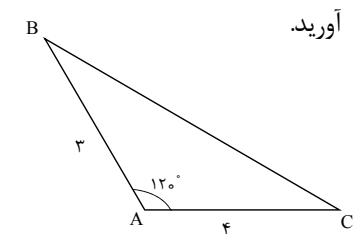
ب) محل برخورد تابع با محور xها را

در نمودار مشخص کنید.

۱۳. با توجه به شکل زیر طول ضلع BC

و مساحت مثلث و $\sin \hat{C}$ را به دست

آورید.



۱۴. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل

$(2A^T + I)^{-1}$ را به دست آورید.

مسائل هندسه ۱

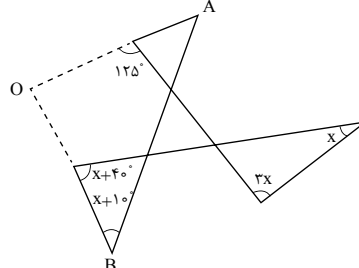
هوشنگ شرقی

۱. ثابت کنید هر دوزنقه‌ای که دو قطر آن با

هم برابر باشند، متساوی الساقین است.

۲. در شکل زیر $OA = OB$ است. اندازه x

را به دست آورید.



۳. ثابت کنید هر مثلثی که در آن میانه

وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد،

مثلث قائم‌الزاویه است.

۴. در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), $AB = 2$ و

$AC = 6$ است. طول ارتفاع AH را

به دست آورید.

۵. در دوزنقه ABCD، AB و CD به

ترتیب قاعده‌های بزرگ و کوچک و AD

و BC ساق‌ها هستند. می‌دانیم که:

$AD = AB = 6 \text{ cm}$. مساحت دوزنقه

را به دست آورید، اگر $\hat{ADC} = 30^\circ$ و

$\hat{DCB} = 60^\circ$ باشد.

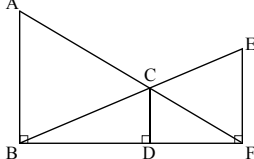
۶. ثابت کنید در دو مثلث متشابه، نسبت

مساحت‌ها توان دوم نسبت تشابه است.

۷. در شکل زیر AB، EF و CD بر BF

عمود شده‌اند. ثابت کنید:

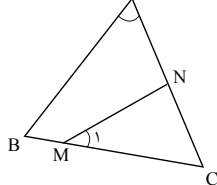
$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{EF}$$



۸. در شکل زیر $\hat{M}_1 = \hat{A}$ است. اگر N

وسط AC باشد، ثابت کنید:

$$AC^2 = 4CM \cdot BC$$

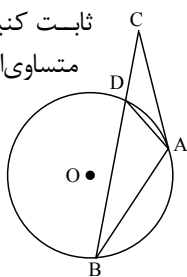


دایره پدید می‌آید، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

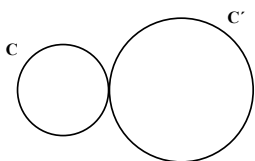
۹. در دایره O ، مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند.

خط BC دایره را در نقطه D قطع کرده است.

ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است.



۱۰. شکل زیر نشان‌دهنده دو دایره مماس بیرون است.



الف) این دو دایره دارای چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی هستند؟

ب) اگر $R = 4$ و $R' = 9$ آن‌گاه اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها را به‌دست آورید.

۱۱. نقاط $A(6,1)$ ، $B(8,3)$ ، $C(6,5)$ و $D(4,3)$ رأس‌های یک مربع هستند.

الف) مربع و تصویرش را تحت انتقال $T(x,y) = (x-5, y-2)$ رسم کنید.

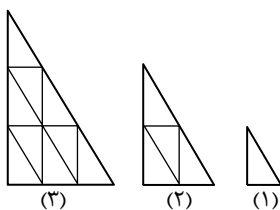
ب) طول و شیب خط AB و تصویرش را به‌دست آورید و با هم مقایسه کنید. پ) آیا تبدیل ایزومتري است؟ چرا؟

۱۲. خط به معادله $L: 3x - 2y - 12 = 0$ و تصویرش را تحت تبدیل تجانس $D(x,y) = (\frac{1}{4}x, \frac{1}{4}y)$ رسم کنید. سپس معادله خط تصویر را به‌دست آورید.

۱۳. مثلث ABC و مثلث ECD

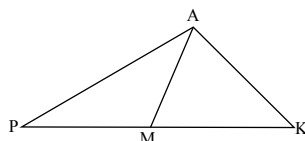
شکل‌های زیر و با استفاده از استدلال استقرایی جدول زیر را کامل کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مثلث‌های کوچک	۱	۴	۹	۱۶	...	?



۲. قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است.

۳. در مثلث PAK ، نقطه M روی ضلع PK قرار دارد. ثابت کنید اگر $AM > MK$ ، آن‌گاه $PM = AK$.



۴. قضیه: ثابت کنید عمودمنصف‌های ضلع‌های هر مثلث هم‌رسانند.

۵. خط d و نقطه A بیرواقع بر آن، داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه A به فاصله معلوم R باشد. با توجه به اندازه R روی تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید.

۶. قضیه: ثابت کنید طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه خارج آن با هم برابرند.

۷. پاره خط AB به طول ۴ سانتی‌متر داده شده است. کمان در خور زاویه 30° روبه‌رو به این پاره خط مفروض است. شعاع دایره‌ای را که این کمان در خور بخشی از آن است و فاصله مرکز این دایره از پاره خط AB را تعیین کنید.

۸. قضیه: ثابت کنید اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک

۹. در مثلث ABC ، ارتفاع‌های BM و CN بر اضلاع AC و AB رسم شده‌اند. اگر $AM = 2\text{cm}$ ، $AB = 5\text{cm}$ و $MN = \frac{1}{5}\text{cm}$ باشد، طول BC را به‌دست آورید.

۱۰. طول یال‌های مکعب مستطیلی ۱، $\sqrt{3}$ و ۲ واحد است. زاویه قطر اصلی مکعب مستطیل را با یال بزرگ‌تر به‌دست آورید.

۱۱. مساحت کل یک منشور قائم با قاعده مربع برابر ۱۸۲ واحد سطح است. اگر مجموع طول‌های ارتفاع و ضلع قاعده آن ۱۰ واحد باشد، حجم منشور را به‌دست آورید.

۱۲. حجم هرمی را به‌دست آورید که قاعده آن مربعی به ضلع a و هر یک از وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقین به ضلع b باشد.

۱۳. حجم مخروطی را به‌دست آورید که شعاع قاعده آن با شعاع کره‌ای به حجم 288π ، و ارتفاع آن، با ارتفاع منشوری به حجم $10\sqrt{3}$ که قاعده آن مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد است، برابر باشد.

۱۴. طول قطر یک مکعب مستطیل مساوی $2\sqrt{3}$ و مساحت کل آن مساوی ۲۴ واحد است. حجم این مکعب مستطیل را به‌دست آورید.

سوالات هندسه ۲

هماهنگ کشوری - خرداد ۹۱

۱. مثلث‌های شکل‌های ۱، ۲ و ۳ با هم متشابه و مثلث‌های کوچک همه با یکدیگر هم‌نهشت هستند. با توجه به

سؤالات حسابان

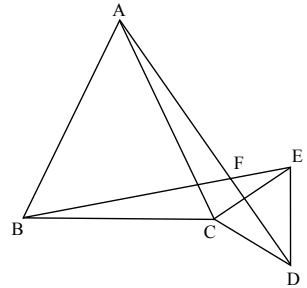
مسائل امتحان نهایی

هماهنگ کشوری - خرداد ۹۱

متساوی الاضلاع هستند. با استفاده از

تبدیل دوران ثابت کنید:

$$AD = BE \text{ و } \angle AFB = 60^\circ.$$



۱۴. درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید:

(الف) هر زاویه خارجی یک چندضلعی، از هر زاویه داخلی آن بزرگتر است.
(ب) تبدیل بازتاب جهت شکل را حفظ نمی کند.

(پ) اگر دو خط متقاطع باشند، تحت یک بازتاب نیمساز زاویه تشکیل شده بین خط و تصویرش محور تقارن است.

(ت) اگر دو صفحه P و P' برهم عمود باشند، هر خط عمود بر صفحه P بر صفحه P' نیز عمود است.

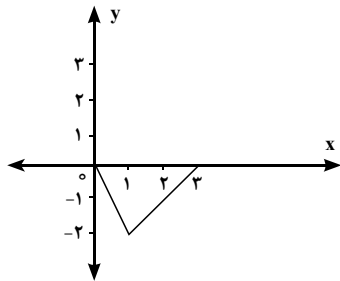
۱۵. قضیه: ثابت کنید اگر خط L با صفحه P موازی باشد، هر صفحه که از L بگذرد و با P متقاطع باشد، P را در یک خط موازی L قطع می کند.

۱۶. اگر سه خط L_1, L_2 و L_3 دوجه دو متقاطع باشند، ثابت کنید این سه خط در یک صفحه قرار دارند و یا همسراند.

۱۷. ثابت کنید دو صفحه P و P' موازی هستند، اگر و تنها اگر هر خط واقع بر یکی از این صفحه ها با صفحه دیگر موازی است.

۱۸. (الف) دو خط متناظر را تعریف کنید.
(ب) نشان دهید اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد، بر هر خط از آن صفحه نیز عمود است.

برابرند با ... و ... ($c \neq 0$)
۵. در شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. با استفاده از انتقال، ابتدا نمودار تابع $y = f(x-3)$ و سپس نمودار تابع $y = -2f(x-3)$ را رسم کنید



۶. اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و

$g = \{(0, 4), (3, 2), (5, 6)\}$ دو تابع باشند:

(الف) تابع $f \circ g$ را به صورت زوج های مرتب بنویسید.

(ب) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۷. ثابت کنید تابع $x \geq 2$ و $f(x) = (x-2)^2$ وارون پذیر است. سپس ضابطه وارون آن را بنویسید.

۸. سینوس زاویه $22/5^\circ$ را حساب کنید.

۹. تمامی جواب های معادله $2 \cos^2 x - \cos x = 0$ را تعیین کنید.

۱۰. مقدار $\cos(\tan^{-1} \frac{3}{4})$ را حساب کنید.

۱۱. حد توابع زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید:

(الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - [x])$

(ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

۱۲. مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ پیوسته شود.

$$f(x) = \begin{cases} a - |x-1| & x \geq 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

۱۳. نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست 2 تعریف شده

۱. ۱۴۴ لیتر آب میوه، ۴۵ لیتر شیر و

۶۳ لیتر دوغ در شیشه هایی با حجم یکسان بسته بندی شده اند. حداقل تعداد شیشه ها را بیابید. (گنجایش شیشه ها را بر حسب لیتر، عدد طبیعی فرض کنید).

۲. در دنباله هندسی نامتناهی زیر، مجموع تمام جملات را بیابید: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

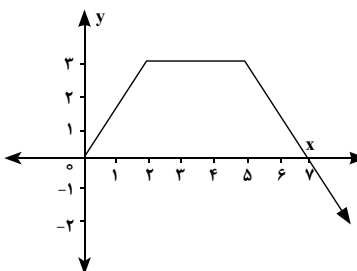
۳. معادله $\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$ را با روش هندسی حل کنید.

۴. جاهای خالی را با عبارات ریاضی مناسب پر کنید:

(الف) مجموعه جواب معادله $\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x-1} = 5$ برابر است با...

(ب) اگر $x \leq 1$ باشد، ضابطه تابع $y = |x-3| + |x-1|$ بدون استفاده از قدر مطلق برابر است با...

(ج) تابع زیر در بازه ... صعودی اکید و در بازه ... نزولی اکید و در بازه ... ثابت است.



(د) اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، ریشه های معادله درجه دوم $cx^2 + bx + a = 0$

باشد، ولی در هیچ همسایگی چپ $\frac{1}{2}$ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

۱۴. معادله خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - x$ را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی به دست آورید.

۱۵. مشتق بگیرید (ساده کردن الزامی نیست):

(الف) $y = (x^2 + \frac{1}{x})$

(ب) $y = 2(2x - 5)^4 + \sqrt{x}$

(ج) $y = \frac{\sin \sqrt{x}}{1 + x^2}$

۱۶. آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟ (دلیل خود را توضیح دهید.)

سوالات جبر و احتمال

مسائل امتحان نهایی

هماهنگ کشوری - خرداد ۹۱

۱. با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید:

$$(1 + \sqrt{3})^n \geq 1 + n\sqrt{3}$$

۲. کدامیک از عبارتهای زیر درست و کدامیک نادرست است؟ (با ذکر دلیل)

(الف) اگر a و b دو عدد صحیح و فرد و هر دو مضربی از ۵ باشند آن گاه مجموع آن ها مضرب ۱۰ است.

(ب) اگر a یک عدد حقیقی و $a^2 > 0$ باشد، آن گاه $a > 0$ است.

(پ) اگر a, b و c اعداد طبیعی باشند، آن گاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است.

۳. ۵۰ عدد طبیعی متمایز را در نظر

گرفته و هر یک از این اعداد را بر عدد ۲۴ تقسیم کرده‌ایم. حداقل چند تا از آن ها باقی مانده یکسانی را بر ۲۴ خواهند داشت و چرا؟

۴. اگر a, b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$$

۵. با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $(\Delta n + 3)$ زوج باشد، آن گاه n یک عدد فرد است.

۶. مجموعه‌های $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 2\}$ و $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ مفروض اند:

(الف) A و B را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

(ب) $A \Delta B$ را مشخص کنید.

(ج) $(A \Delta B) \times A$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید.

۷. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

(الف) $(C \cap A \cap B) \cup (A - C) \cup (A - B) = A$

(ب) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

۸. رابطه R روی R^2 به صورت زیر

تعریف شده است:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ab = cd$$

(الف) نشان دهید که این رابطه هم‌ارزی است.

(ب) کلاس هم‌ارزی $[(-1, 2)]$ را مشخص کنید.

۹. یک طرف سکه سالمی عدد ۱ و در طرف دیگر آن عدد ۲ را نوشته‌ایم. این سکه را ۳ بار پرتاب می‌کنیم:

(الف) فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی را بنویسید.

(ب) پیشامد A را که در آن، مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب اول و دوم برابر ۳ باشد، مشخص کنید.

(پ) پیشامد B را که در آن، عدد ظاهر شده در پرتاب دوم برابر ۱ باشد، بنویسید

(ت) پیشامد آن که B رخ دهد، ولی

A رخ ندهد را تعیین کنید.

۱۰. درون کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۶ مهره سیاه و ۴ مهره قرمز وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره با هم به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است:

(الف) احتمال آن که دقیقاً ۲ تا از مهره‌های خارج شده سفید باشند.

(ب) احتمال آن که مهره‌های خارج شده از ۳ رنگ متفاوت باشند.

۱۱. تاس سالمی را ۱۲ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که ۴ بار عدد فرد روی تاس ظاهر شده باشد، چه قدر است؟

۱۲. سه نفر دوندۀ a, b و c در یک مسابقه شرکت می‌کنند. احتمال برد

a نصف احتمال برد b و احتمال برد b $\frac{1}{3}$ احتمال برد c است:

(الف) احتمال برد هر یک از دونده‌ها را بیابید.

(ب) احتمال آن که b یا c برنده شوند را تعیین کنید.

۱۳. تیری را به سمت هدفی مربع شکل به ضلع ۴ پرتاب می‌کنیم. احتمال آن

را بیابید که نقطه اصابت تیر درون دایره‌ای به شعاع $\frac{5}{8}$ قرار بگیرد که مرکز آن منطبق بر مرکز مربع است.

۱۴. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری که داشته

باشیم: $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ ،

مطلوب است محاسبه $P(A - B)$.



$$\frac{1}{2\sqrt{a}+a\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{a}-a\sqrt{2}}{2\sqrt{a}-a\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{a}-a\sqrt{2}}{4a-2a^2}$$

۱۴. $(\frac{b}{r})^2$ یعنی $(\frac{r}{b})^2$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$(الف) x^2 - 6x - 7 = x^2 - 6x + 9 - 9 - 7 = 0$$

$$(x-3)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x-3=4 \Rightarrow x=7 \\ x-3=-4 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

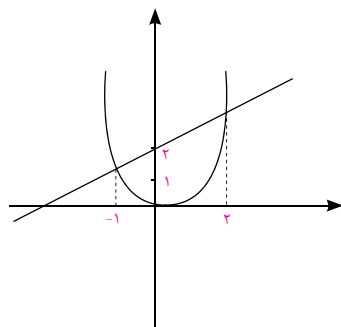
$$(ب) \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(-5) = 49$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-7}{4} = -1 \end{cases}$$

$$(ج) x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 2$$

معادله دو جواب دارد.

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$



$$\Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4(m-1)(3) < 0$$

$$4 - 12m + 12 < 0$$

$$\frac{16}{12} < \frac{12}{12}m \Rightarrow \frac{16}{12} < m$$

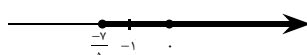
$$\Rightarrow m > \frac{4}{3}$$

$$2(1-x) - 3(1+x) \leq 6$$

$$2 - 2x - 3 - 3x \leq 6$$

$$-5x \leq 7$$

$$x \geq \frac{-7}{5}$$



تعداد روزهای ماندن = x

$$70/000 + 130/000 + 50/000 \leq 470/000$$

$$50/000 \leq 270/000$$

$$x \leq \frac{270/000}{50/000} = 5/000 \quad \text{حداکثر پنج روز}$$

$$(ب) y + 3x = 2 \Rightarrow y = -3x + 2$$

$$m = -3 \Rightarrow \text{شیب خط خواسته شده} = \frac{1}{3}$$

$$y - (-2) = \frac{1}{3}(x - 3)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 2$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2}z = 2 \Rightarrow z = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \cdot \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{z} = \frac{\sqrt{2}}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{x}{1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{1} = 1$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{x+y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{x+y}$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 \cdot \sqrt{3}$$

$$y = 1 \cdot \sqrt{3} - x = 1 \cdot \sqrt{3} - 1$$

$$\sin^2 30^\circ - \cos 60^\circ + 2 \tan 20^\circ$$

$$= (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)}$$

$$= 1 - \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{x-1}{2x-3} - \frac{x^2+4}{4x^2-9}$$

$$= \frac{x-1}{2x-3} - \frac{x^2+4}{(2x-3)(2x+3)}$$

$$= \frac{(x-1)(2x+3) - (x^2+4)}{(2x-3)(2x+3)}$$

$$= \frac{2x^2 + x - 3 - x^2 - 4}{(2x-3)(2x+3)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 7}{(2x-3)(2x+3)}$$

$$\frac{(2x-5y)(2x+5y)}{x+4} \div \frac{xy(2x+5y)}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{(2x-5y)(2x+5y)}{(x+4)} \times \frac{(x+4)^2}{xy(2x+5y)}$$

$$= \frac{(2x-5y)(x+4)}{xy}$$

$$\frac{12x^2 + 36x - 1}{12x^2 + 12x^2} \mid \frac{x+1}{12x^2 - 12x + 48}$$

$$-12x^2 + 36x - 1$$

$$-12x^2 - 12x$$

$$48x - 1$$

$$48x + 48$$

$$-49$$

حل مسائل ریاضی ۱



۱. الف) راست

ب) گنگ

ج) ۳/۱۴

د) فاصله

$$2. \sqrt{40} + 2\sqrt{8} - \sqrt{50} + 3\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{2^2 \times 10} + 2\sqrt{2^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} + 3\sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{2} \times 10 + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$3. (a+2b)^2 - a(a-2b)^2$$

$$= a^2 + 4ab + 4b^2 - a(a^2 - 4ab + 4b^2)$$

$$= a^2 + 4ab + 4b^2 - a^3 + 4a^2b - 4ab^2$$

$$= 1 \cdot a^2b + 4ab^2 + 4b^2$$

$$4. (3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$$

$$5. OA = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

$$AB = \sqrt{(3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$S = OA \times AB = \sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$$

$$6. (2m-1)(-3) + \frac{2}{3}(m+1) = 7$$

$$\xrightarrow{\times 3} (2m-1)(-9) + 2(m+1) = 21$$

$$-18m + 9 + 2m + 2 = 21$$

$$-16m = 10 \Rightarrow m = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$$

۷. الف) محل تلاقی دو خط همان

جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases}$$

$$\Delta x = 15$$

$$x = 3$$

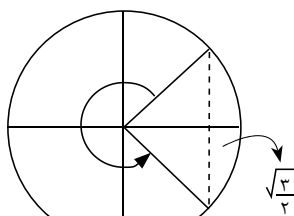
$$\Rightarrow y = -2 \Rightarrow A \mid_{-2}$$

حل مسائل ریاضی ۲

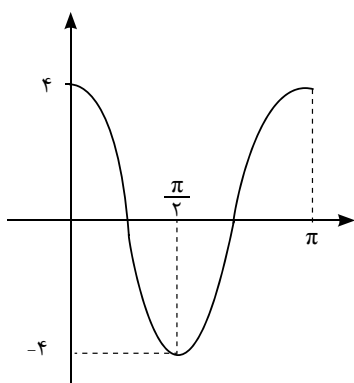
$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \cos 210^\circ \\ &= \sin\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos(180^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos 30^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ = \frac{11\pi}{6}$$



$$T = \frac{7\pi}{2} = \pi$$



$$\begin{aligned} & \text{حد اکثر} = 4 \\ & \text{حد ادقل} = -4 \\ & \text{محل برخورد با محور } x \text{ ها} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

$$BC^T = AC^T + AB^T - 2(AC)(AB) \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow BC^T = 16 + 9 - 2(4)(3) \cos \frac{\pi}{3} = 37$$

$$BC = \sqrt{37}$$

$$S = \frac{1}{2}(AC)(AB) \sin \hat{A} = \frac{1}{2}(4)(3) \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{A}}{a} \Rightarrow \frac{\sin \hat{C}}{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{4} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

	1	4
$x - 4$	—	—
$1 - x$	+	—
	—	+

ت. ن. = جواب

۵. الف نمودار $y = 3^{x+1}$ و ب نمودار

$y = 3^{x+1}$ است (نقطه یابی کنید؛ مثلاً

$x = 0$).

$$(x^T)^{-\frac{1}{T}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{T}{T}} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{به توان } -\frac{T}{T}}$$

$$\Rightarrow (x^{-\frac{T}{T}})^{-\frac{T}{T}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{T}{T}} = (4^{-T})^{-\frac{T}{T}}$$

$$x = 4^T = 8$$

$$\log_9 \sqrt{7} - 2 \log_9 \frac{1}{5}$$

$$= \log_9 \sqrt{7} + \log_9 \sqrt{5} - 2 \log_9 5$$

$$= \log_9 \sqrt{7} + \log_9 \sqrt{5} + 4 \log_9 \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4 = \frac{19}{2}$$

$$\log(x+1) - \log(x-1) = 2 \log 2 - 1$$

$$\Rightarrow \log \frac{x+1}{x-1} = \log 2^2 - \log 10$$

$$\Rightarrow \log \frac{x+1}{x-1} = \log \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{10}$$

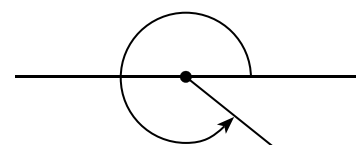
$$\Rightarrow 10x + 10 = 4x - 4 \Rightarrow 6x = -14$$

$$x = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$$

و با توجه به دامنه لگاریتم نیز این جواب غیر قابل قبول است و معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{11\pi}{\pi}$$

$$D = \frac{180 \times 11}{\pi} = 330^\circ$$



$$\begin{cases} a_1 + a_1 = 56 \Rightarrow a_1 + 8d + a_1 + 9d = 56 \\ a_5 = 10 \Rightarrow a_1 + 4d = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 17d = 56 \\ a_1 + 4d = 10 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 2a_1 + 17d = 56 \\ -2a_1 - 8d = -20 \end{cases}$$

$$9d = 36 \Rightarrow d = 4$$

$$\Rightarrow a_1 = -6$$

$$a_n = -6 + (n-1)(4)$$

$$a_{17} = -6 + 16(4) = 70$$

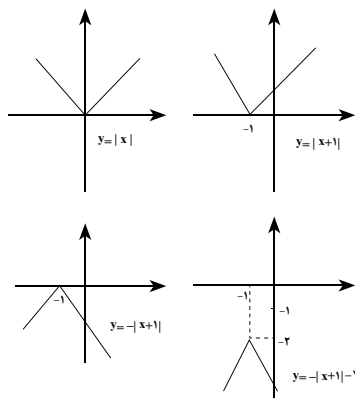
۲. الف)

$$a - b = 3 \Rightarrow a + b = 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

ب)

$$f(-1) + f^{-1}(5) = (4-1) + (4-1) = 6$$

۳.



$$x(x^T - 4) = 0$$

$$x = 0, x = \pm 2$$

$$D = R - \{0, -2, 2\}$$

۴. الف)

$$\frac{x-4}{1-x} \geq 0$$

$$x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

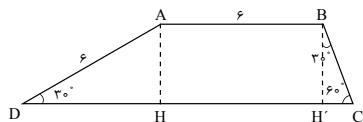
$$1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ب)

$$\Rightarrow BC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2 \times 6}{2\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

۵.



$$AD = 6, \hat{D} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{2} AD = 3$$

$$\Rightarrow DH^2 = AD^2 - AH^2 = 36 - 9 = 27$$

$$\Rightarrow DH = 3\sqrt{3}, BH' = AH = 3, CH' = \frac{BC}{2}$$

$$BC = 2CH'$$

$$BC^2 = BH'^2 + CH'^2 \Rightarrow 4CH'^2 = 9 + CH'^2$$

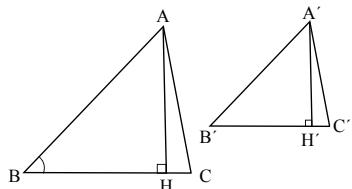
$$\Rightarrow 3CH'^2 = 9, CH' = \sqrt{3}$$

$$HH' = AB = 6 \Rightarrow CD = DH + HH' + CH' = 3\sqrt{3} + 6 + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 6$$

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \times AH$$

$$= \frac{6 + 4\sqrt{3} + 6}{2} \times 3 = 6(3 + \sqrt{3})$$

۶.



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}',$$

$$\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta A'B'H'$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = K$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = K$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AH}{\frac{1}{2} B'C' \cdot A'H'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right) \left(\frac{AH}{A'H'}\right)$$

$$= K \times K = K^2$$

۷. از قضیه تالس در مثلث‌های ABF و

EBF کمک می‌گیریم:

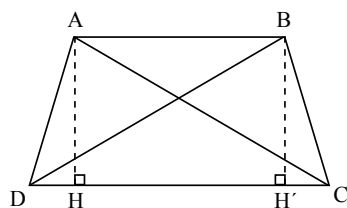
$$CD \parallel AB \Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{DF}{BF}$$

$$CD \parallel EF \Rightarrow \frac{CD}{EF} = \frac{BD}{BF}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{AB} + \frac{CD}{EF} = \frac{DF + BD}{BF} = \frac{BF}{BF} = 1$$

$$\Rightarrow CD \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{EF} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{CD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{EF}$$



چون: $AB \parallel HH'$ پس $ABH'H$

مستطیل است. در نتیجه: $AH = BH'$. بنابراین:

$$AH = BH', AC = DB \text{ (فرض)},$$

(وتر و یک ضلع)

$$\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \Rightarrow \Delta ACH \cong \Delta BDH'$$

$$\Rightarrow DH' = CH \Rightarrow DH' - HH' = CH - HH'$$

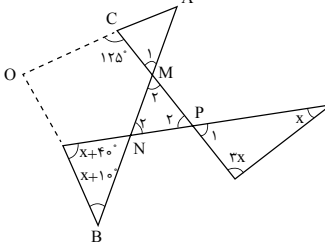
$$\Rightarrow DH = CH'$$

$$(DH = CH', BH' = AH, \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ)$$

(ضریض)

$$\Rightarrow \Delta ADH \cong \Delta BCH' \Rightarrow AD = BC$$

۲.



$$\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = 180^\circ - 4x$$

$$OA = OB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = x + 10^\circ$$

$$O\hat{C}M = \hat{A} + \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 125^\circ - \hat{A}$$

$$= 125^\circ - (x + 10^\circ) = 115^\circ - x$$

$$\hat{N}_1 = \hat{N}_2 = 180^\circ - (x + 40^\circ + x + 10^\circ) = 130^\circ - 2x$$

$$\hat{M}_2 + \hat{N}_2 + \hat{P}_2 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 115^\circ - x + 130^\circ - 2x + 180^\circ - 4x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 7x = 245^\circ \Rightarrow x = 35^\circ$$

۳.

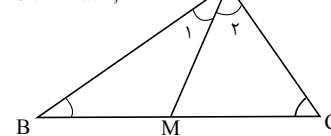
$$AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow AM = MB = MC$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}, \hat{A}_2 = \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{C} = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\hat{A}$$

$$\Rightarrow 2\hat{A} = 180^\circ, \hat{A} = 90^\circ$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

۴.

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4 + 36 = 40$$

۱۴.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, 2A^2 + I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(2A^2 + I)^{-1} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۵.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B =$$

$$\frac{1}{-2 - (-3)} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

۱۶. الف) حرف O را کنار می‌گذاریم.

حال:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \underbrace{4 \times 3 \times 2}_{= 96} = 96$$

سایر خانه‌ها انتخاب یک خانه برای L

(ب) O و L را در یک دسته قرار

می‌دهیم. بنابراین دو خانه باقی می‌ماند.

$$\underbrace{2!}_{= 2} \times 4 \times 3 = 24$$

پس:

جایگشت‌های O و L

$$p(n, r) = c(n, r) \quad (n \geq r)$$

۱۷.

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-r)! r!}$$

$$\Rightarrow n - 2 = 6 \Rightarrow n = 8$$

۱۸.

$$\text{الف)} \left(\begin{matrix} 12 \\ 3 \end{matrix} \right) = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

$$\text{ب)} \left(\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right) = 4 \times 5 \times 3 = 60$$

حل مسائل هندسه

۱

هوشنگ شرقی

۱. ارتفاع‌های AH و BH' را رسم

می‌کنیم. AH و BH' بر BC عمود و

در نتیجه با هم موازی‌اند.

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 12, 2(ab + ac + bc) = 24$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc = 12$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$(a-c)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a-b = a-c = b-c = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c \Rightarrow 3a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$\Rightarrow a = b = c = 2 \Rightarrow V = abc = 8$$

در نتیجه، مثلث AEH قائم الزاویه

هم هست و بنابراین زوایای حاده آن

$$\angle AEH = \angle HAE = 45^\circ \text{ هستند}$$

۱۱. اگر ضلع قاعده را a و ارتفاع منشور

را h در نظر بگیریم، طبق فرض داریم:

$$\text{مساحت کل } S = 4ah + 2a^2 = 182$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ah = 91, a + h = 10$$

$$\Rightarrow h = 10 - a \Rightarrow a^2 + 2a(10 - a) = 91$$

$$\Rightarrow a^2 - 20a + 91 = 0 \Rightarrow (a-7)(a-13) = 0$$

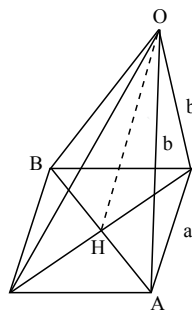
$$\Rightarrow a = 13 \text{ (غرض)}, a = 7 \Rightarrow h = 3$$

$$V = a^2 h = 49 \times 3 = 147$$

۱۲. پای ارتفاع هرم، وسط قاعده (محل

برخورد قطرهای) است. بنابراین می توان

نوشت:



$$HA = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta OHA: OH^2 + HA^2 = OA^2$$

$$\Rightarrow OH^2 + \frac{a^2}{2} = b^2$$

$$\Rightarrow OH^2 = b^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow OH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{\text{base}} h = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$$

۱۳. اگر شعاع قاعده مخروط و شعاع کره

را R بنامیم، طبق فرض داریم:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = 288\pi \Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6$$

و اگر ارتفاع مخروط و منشور را با h

نمایش دهیم، داریم:

$$S_{\text{base}} h = 10\sqrt{3}, S_{\text{base}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2^2) = \sqrt{3}$$

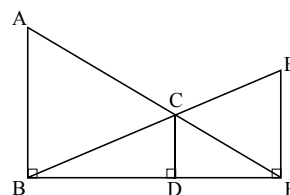
$$\Rightarrow \sqrt{3} h = 10\sqrt{3}, h = 10$$

و از آنجا حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (6)^2 \times 10 = 120\pi$$

۱۴. اگر ابعاد مکعب مستطیل را a، b و c

بنامیم، طبق فرض داریم:



$$\hat{M}_1 = \hat{A}, \hat{C} = \hat{C} \Rightarrow \Delta MCN \sim \Delta ABC$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{CN}{BC} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{2} = \frac{MC}{BC} = \frac{MC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2}{2} = MC \cdot BC$$

$$\Rightarrow AC^2 = 2MC \cdot BC$$

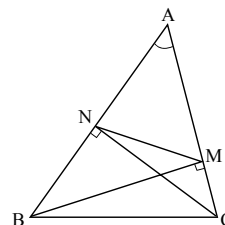
$$\hat{A} = \hat{A}, \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta ANC$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

$$(\hat{A} = \hat{A}, \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}) \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{1/\delta}{BC} \Rightarrow BC = 5/\delta \text{ cm}$$



۱۰. مطابق شکل زاویه AEH

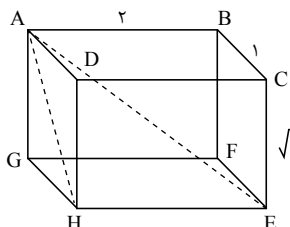
موردنظر است. مثلث AEH را در نظر

می گیریم:

$$AH = \sqrt{AG^2 + GH^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$AE = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{1+4+3} = 2\sqrt{2}$$

$$HE = 2$$



بنابراین، در این مثلث متساوی الساقین،

مربع ضلع بزرگ برابر با مجموع

مربع های دو ضلع دیگر است:

$$AE^2 = AH^2 + HE^2$$

حل مسائل هندسه ۲

هوشنگ شرقی

۱.

n	...	4	3	2	1	شماره شکل
n ²	...	16	9	4	1	تعداد مثلث های کوچک

۲. فرض: ABC یک مثلث است.

حکم: AB + BC > AC

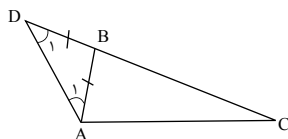
برهان: ضلع BC را از رأس B

امتداد می دهیم و به اندازه AB روی آن

جدا می کنیم تا نقطه D بدست آید.

سپس D را به A وصل می کنیم. در

مثلث ABD داریم:



$$BD = AB \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_1$$

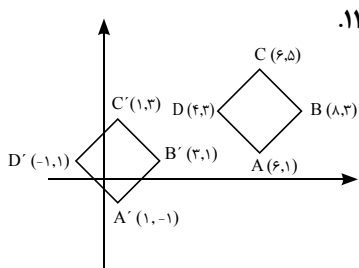
همچنین در مثلث ADC داریم:

$$DC = DB + BC \Rightarrow DC = AB + BC$$

با توجه به شکل $\hat{D}_1 < \hat{A}_1$

بنابراین $\hat{D}_1 < \hat{A}_1$ در نتیجه: DC > AC

. بنابراین: AB + BC > AC



الف) $T(x, y) = (x - 6, y - 2)$

$$\left. \begin{aligned} A(6, 1) &\rightarrow A'(-1, -1) \\ B(8, 3) &\rightarrow B'(3, 1) \\ C(6, 5) &\rightarrow C'(1, 3) \\ D(4, 3) &\rightarrow D'(-1, 1) \end{aligned} \right\}$$

ب)

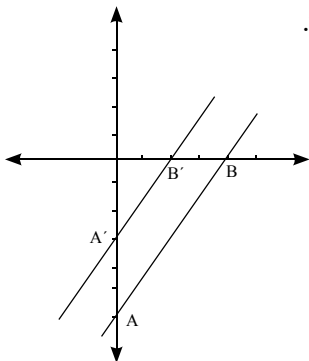
$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(6-8)^2 + (1-3)^2} \\ &= \sqrt{4} = 2\sqrt{2} \\ A'B' &= \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{16} = 4\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{3-1}{8-6} = 1 \\ m_{A'B'} &= \frac{1-(-1)}{3-(-1)} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{AB} = m_{A'B'}$$

ج) بله، چون تبدیل انتقال ایزومتري

است.

۱۲.



$$L: 3x - 2y - 12 = 0$$

$$D(x, y) = \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{2}y\right)$$

$$A(0, -6) \xrightarrow{D} A'(0, -3)$$

$$B(6, 0) \xrightarrow{D} B'(3, 0)$$

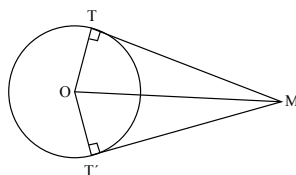
$$m' = \frac{-3-0}{0-3} = 1 \Rightarrow L': y - 0 = 1(x - 3)$$

$$\Rightarrow y = x - 3$$

۱۳. دوران حول C و به اندازه 60° را

تبدیل T می‌نامیم. با این تعریف روشن

است که: $T(A) = B, T(D) = E, T(C) = C$
 $\Rightarrow T(\triangle ADC) = \triangle BEC$



$$R = \frac{a}{r \sin \alpha} \Rightarrow R = \frac{4}{r \sin 30^\circ} = 8$$

$$OH = R |\cos \alpha| \Rightarrow OH = 4 |\cos 30^\circ| = 2\sqrt{3}$$

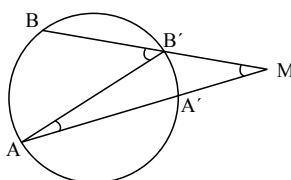
۸. امتداد وترهای AA' و BB' از دایره
 C در نقطه M یکدیگر را قطع کرده‌اند.
 پاره خط AB' را رسم می‌کنیم.

$$\widehat{AB'B} = \widehat{B'AM} + \widehat{AMB'}$$

(زاویه خارجی مثلث $\triangle AMB'$)

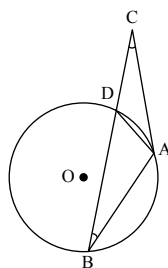
$$\Rightarrow \widehat{AMB'} = \widehat{AB'B} - \widehat{B'AM} = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{A'B'}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMB'} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2}$$



$$\left. \begin{aligned} AC = AB &\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \\ \triangle ABC: B &= \frac{\widehat{AD}}{2} \text{ محاطی} \\ D\hat{A}C &= \frac{\widehat{AD}}{2} \text{ ظلی} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow D\hat{A}C = \widehat{C} \Rightarrow DC = DA$$



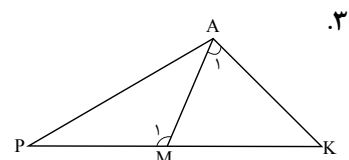
۱۰. یک مماس مشترک داخلی و دو
 مماس مشترک خارجی دارند.

$$\left\{ \begin{aligned} R &= 4 \\ R' &= 9 \end{aligned} \right.$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2}$$

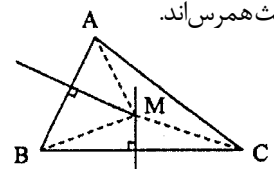
$$TT' = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$



$$\left. \begin{aligned} PM &= AK \\ \triangle AMP, \triangle AMK: AM &= AM \end{aligned} \right\} \Rightarrow AP > MK$$

لولا $\hat{M}_1 > \hat{A}_1$ (زاویه خارجی)

۴. عمودمنصف‌های دو ضلع AB و BC از
 مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در
 M قطع کنند چون M روی عمودمنصف
 AC است پس: $MA = MB$ (۱) و چون
 M روی عمودمنصف AB است پس:
 $MA = MC$ (۲) از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:
 $MA = MB = MC$. بنابراین نقطه M از دو سر
 پاره خط AC به یک فاصله است. یعنی
 نقطه M روی عمودمنصف AC است.
 پس عمودمنصف‌های ضلع‌های هر
 مثلث هم‌مس اند.

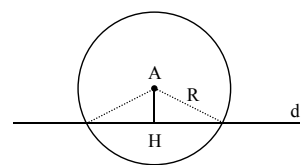


۵. دایره‌ای به شعاع R و به مرکز A رسم
 می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط
 d جواب مسئله است.

اگر: $AH > R$ ، مسئله جواب ندارد.

اگر: $AH = R$ ، مسئله یک جواب دارد.

اگر: $AH < R$ ، مسئله دو جواب دارد.



۶. چون شعاع در نقطه تماس بر خط
 مماس عمود است، نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{T} &= \hat{T}' = 90^\circ \\ OT &= OT' \Rightarrow \triangle OMT \cong \triangle OMT' \\ OM &= OM \end{aligned} \right.$$

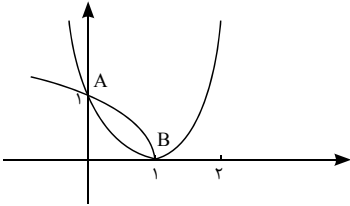
$$\Rightarrow MT = MT'$$

$$f(x) = \sqrt{1-x},$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow A(0,1), B(1,0)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$$



۴. الف)

$$x(x-1) + 3(x-3) = 5(x-1)(x-3)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 22x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-8)(2x-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{4}{2}, \frac{3}{2} \right\} = \text{مجموعه جواب}$$

$$x-1 \leq 0 \Rightarrow |x-1| = 1-x, x-3 < 0$$

$$\Rightarrow |x-3| = 3-x \Rightarrow y = 4-2x$$

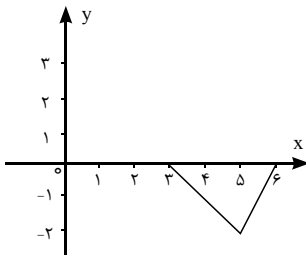
ج) $[-2, 5]$: صعود اکید

$[5, +\infty)$: نزولی اکید

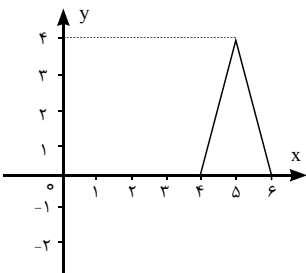
$[2, 5]$: ثابت

د) $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$

۵.



$$y = f(x-3)$$



$$y = -2f(x-3)$$

$$\text{fog}(0) = f(g(0)) = f(4) = \sqrt{4-3} = 1, \quad ۶.$$

$$\text{fog}(3) = f(g(3)) = f(2) \quad \text{وجود ندارد}$$

$$\text{fog}(5) = f(g(5)) = f(6) = \sqrt{6-3} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{fog} = \{(0,1), (5, \sqrt{3})\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{3, 5\}$$

۱۷. فرض کنیم: $P \parallel P'$ و $d \subset P$ اگر

خط d با صفحه P' متقاطع باشد، پس صفحه P با صفحه P' متقاطع خواهد بود که این خلاف فرض است.

پس: $d \parallel P'$ برعکس، فرض کنیم هر خط مانند d از صفحه P با صفحه P' موازی باشد. اگر صفحه P با صفحه P' متقاطع باشد، آن گاه در یک خط مانند L مشترک خواهند بود. اگر خط d در صفحه P متقاطع با L در نقطه A رسم شود، خط d صفحه P' را در نقطه A قطع کرده که این خلاف فرض است. پس: $P \parallel P'$.

۱۸. الف) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی گیرند، دو خط متناظر می گوئیم.

ب) فرض کنید خط L بر صفحه P عمود است و آن را در نقطه A قطع کرده است. فرض کنید L' خط دلخواهی در صفحه P باشد. از نقطه A در صفحه P خط L'' را به موازات L' رسم می کنیم. از آنجا که L بر L'' عمود و L' با L'' موازی است. L بر L' هم عمود است.

و چون دوران ایزومتري است، پس:

$BE = AD$ و نیز طبق ویژگی دوران AD و BE زاویه های مساوی دوران با هم می سازند: $\angle AFB = 60^\circ$.

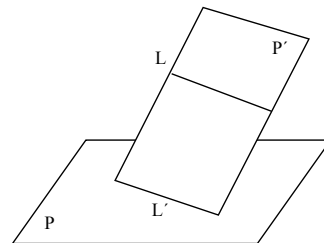
۱۴. الف) نادرست ب) درست

پ) درست ت) نادرست

۱۵. برای اثبات این قضیه دو حالت موازی بودن یک خط و یک صفحه در فضا را در نظر می گیریم.

الف) خط L در صفحه P قرار ندارد. فرض کنیم P' صفحه گذرنده از L باشد که P را در خط P' قطع می کند. L و L' هر دو در صفحه L' هستند و یکدیگر را قطع نمی کنند. زیرا از متقاطع بودن L و L' نتیجه می شود که خط L صفحه P را قطع می کند که این خلاف فرض است. پس با هم موازی اند.

ب) خط L در صفحه P قرار دارد. پس در این حالت هر صفحه P' متمایز از P که از L می گذرد، صفحه P را در همان خط L قطع می کند و درستی قضیه روشن است.



۱۶. از دو خط L_1 و L_2 صفحه P را می گذرانیم. اگر L_2 در صفحه P باشد، حکم برقرار است. در صورتی که L_2 در صفحه P نباشد. چون L_1 با L_2 متقاطع است، پس صفحه P را در نقطه مشترک L_1 و L_2 قطع می کند. زیرا در غیر این صورت باید صفحه را در دو نقطه متمایز قطع کند. یعنی L_2 به تمامی در صفحه P قرار می گیرد که این خلاف فرض است.

حل سؤالات حسابان

مسائل امتحان نهایی

هماهنگ کشوری - خرداد ۹۱

$$\left. \begin{aligned} 144 &= 3^2 \times 2^4 \\ 45 &= 3^2 \times 5 \\ 63 &= 3^2 \times 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{و } 3^2 = \text{م.م.م}$$

$$28 = 7 + 5 + 2^3 = \text{تعداد شیشه ها}$$

$$\frac{1}{1-q} = \frac{a}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$



نحوه اشتراک:

شما می توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۴۰۰۰ بانک تجارت شعبه سدره ازمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱- مراجعه به وبگاه مجلات رشد: نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات قبض واریزی.

۲- ارسال اصل قبض بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی (قبض را نیز خود نگه دارید).

نام مجلات در خواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

خیابان:

شهرستان:

مبلغ پرداختی:

شماره قبض:

در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده اید، شماره اشتراک خود را ذکر کنید:

امضاء:

نشانی: تهران، تهران، صندوق پستی: امرومبستر کین: ۱۶۵۹۵۱۱۱
 وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir
 شماره اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۲۳۶۶۵۶ / ۷۷۲۳۵۱۱ / ۷۷۲۳۹۱۷۳-۱۴

هرینه اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال
 هرینه اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال

سؤالات جبر واحد احتمال

هماهنگ کشوری - خرداد ۹۱

۱۶. $P(1): 1 + \sqrt{3} \geq 1 + \sqrt{3}$
 $P(k): (1 + \sqrt{3})^k \geq 1 + k\sqrt{3}$
 $P(k+1): (1 + \sqrt{3})^{k+1} \geq 1 + (k+1)\sqrt{3}$
 دو طرف فرض را در $1 + \sqrt{3}$ ضرب می کنیم
 $(1 + \sqrt{3})^k (1 + \sqrt{3}) \geq (1 + k\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$
 $(1 + \sqrt{3})^{k+1} \geq (1 + k\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$
 برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم:
 $(1 + k\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) \geq 1 + (k+1)\sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow 1 + \sqrt{3} + k\sqrt{3} + 3k \geq 1 + k\sqrt{3} + \sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow 3k \geq 0$ (بدیهی است).

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(x - \frac{\pi}{4})}{(x - \frac{\pi}{4})(x + \frac{\pi}{4})(\sqrt{x + \frac{\pi}{4}})} = \frac{1}{\lambda \times \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} (x - [x]) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

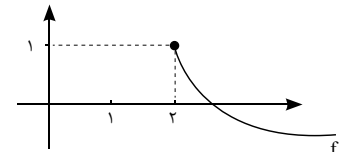
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \text{شرط پیوستگی}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (a - |x - 1|) = a \quad \text{حد راست}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \quad \text{حد چپ}$$

$$\Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$



$$f(1) = 2(1)^2 - 1 = 1 \quad y' = 6x^2 - 1$$

$$m = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$$

$$y' = 3x^2 - \frac{1}{x^2} \quad \text{(الف)}$$

$$y' = 3 \times 4 \times 2 \times (2x - 5)^2 + \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \quad \text{(ب)}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2$$

$$x_1 - 2 \geq 0, x_2 - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = (x - 2)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = (x - 2) \Rightarrow \sqrt{y} + 2 = x$$

$$x = \sqrt{y} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2 22.5^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2 22.5^\circ$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 22.5^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 22.5^\circ = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos(\tan^{-1}\frac{3}{4}) = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x - \frac{\pi}{4})(x + \frac{\pi}{4})} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \quad \text{(الف)}$$

۲. الف) درست است:

راحل اول:

$$\begin{aligned} a &= \Delta q \\ b &= \Delta t \end{aligned} \Rightarrow a + b = \Delta q + \Delta t = \Delta(q + t) \\ = \Delta(\tau k) = 1 \cdot k$$

(q+t) زوج است $\Rightarrow q, t$ فرد هستند

راحل دوم:

$$\begin{aligned} a &= \Delta(\tau t + 1) \\ b &= \Delta(\tau t' + 1) \end{aligned} \Rightarrow a + b = \Delta(\tau t + 1) + \Delta(\tau t' + 1) \\ = 1 \cdot (t + t' + 1) = 1 \cdot k$$

ب) نادرست است:

مثال نقض: $a = -2 < 0 \rightarrow a^2 = 4 > 0$

پ) نادرست است:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= \Delta \\ c &= 2 \end{aligned} \Rightarrow b\sqrt{ac} = \Delta\sqrt{4} = 1 \cdot 1 = 1$$

۳. باقی مانده‌های تقسیم اعداد طبیعی بر

۲۴، یکی از ۲۴ عدد ۰ و ۱ و ۲ و ... و ۲۳

هستند. بنابراین $m = 50$ کبوتر و $n = 24$

لانه کبوتر داریم. طبق تعمیم یافته اصل

لانه کبوتر، به اندازه $1 + \lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor$ کبوتر

وارد یک لانه می‌شوند:

(لاقل سه عدد باقی مانده یکسانی

خواهند داشت.) $1 + \lfloor \frac{49-1}{24} \rfloor = \lfloor \frac{48}{24} \rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$

۴. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2a + 2b + 2c$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 - 2a - 2b - 2c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

و چون همه مراحل برگشت پذیر

هستند، پس اثبات کامل است.

۵. فرض خلف: $n \neq 2k + 1 \Rightarrow n = 2k$

$$\Delta n + 3 = \Delta(2k) + 3 = 1 \cdot k + 3$$

$$= 2(\Delta k + 1) + 1 = 2q + 1$$

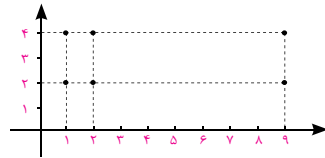
پس $\Delta n + 3$ عددی فرد است و این

تناقض نشان می‌دهد که فرض خلف

نادرست است.

۶.

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4\}, B = \{1, 4, 9\} \\ A \Delta B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{2, 4, 1, 9\} - \{4\} = \{2, 1, 9\} \\ (A \Delta B) \times A &= \{2, 1, 9\} \times \{2, 4\} \\ &= \{(2, 2), (2, 4), (1, 2), (1, 4), (9, 2), (9, 4)\} \end{aligned}$$



۷. الف) $(C \cap A \cap B) \cup (A - C) \cup (A - B)$

$$\begin{aligned} &= (C \cap A \cap B) \cup (A \cap C') \cup (A \cap B') \\ &= A \cap [(C \cap B) \cup (C' \cup B')] \\ &= A \cap [(C \cap B) \cup (C \cap B)'] = A \cap U = A \end{aligned}$$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup B) = B$

$$\Rightarrow (A \cup B)' = B' \Rightarrow A' \cap B' = B'$$

$$\Rightarrow B' \subseteq A'$$

۸. الف) $\forall (a, b) \in R^2, (a, b)R(a, b)$

رابطه بازتابی $\Rightarrow ab = ab$

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow (c, d)R(a, b)$$

$$(a, b)R(c, d) \Rightarrow ab = cd \Rightarrow cd = ab$$

$\Rightarrow (c, d)R(a, b)$ رابطه تقارنی

$$(a, b)R(c, d) \Rightarrow (a, b)R(c, f)$$

$$\begin{aligned} (c, d)R(c, f) \Rightarrow cd = cf \\ ab = cd \Rightarrow ab = cf \Rightarrow (a, b)R(c, f) \end{aligned}$$

رابطه متعدی

R هر سه خاصیت را دارد، پس

هم‌ارزی است.

ب) $[(-1, 2)] = \{(x, y) | (x, y)R(-1, 2)\}$

$$= \{(x, y) | xy = -2\}$$

۹.

$$\begin{aligned} \text{الف) } S &= \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), \\ &\quad (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } A = \{(1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2)\}$$

$$\text{پ) } B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2)\}$$

$$\text{ت) } B - A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2)\}$$

۱۰.

$$\text{الف) } P(A) = \frac{C(\Delta, 2) \times C(1, 1)}{C(15, 3)} = \frac{100}{455} = \frac{20}{91}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } P(B) &= \frac{C(\Delta, 1) \times C(\epsilon, 1) \times C(\epsilon, 1)}{C(15, 3)} \\ &= \frac{120}{455} = \frac{24}{91} \end{aligned}$$

۱۱.

$$P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{\binom{12}{4}}{2^{12}}$$

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1$$

$$P(a) = \frac{1}{2} P(b)$$

$$P(b) = \frac{1}{3} P(c)$$

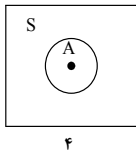
$$P(c) = x$$

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{6}{9}$$

$$\text{الف) } P(a) = \frac{1}{9}, P(b) = \frac{2}{9}, P(c) = \frac{6}{9}$$

$$\text{ب) } P\{b, c\} = P(b) + P(c) = \frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{8}{9}$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{1}{16}\pi} = \frac{\pi}{64}$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad 12$$

$$\frac{2}{3} = P(A) - P(A \cap B) + \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} = P(A - B) + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(A - B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند.

مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت ماهانه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند)

شش‌گردد

(برای دانش‌آموزان ابتدایی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی)

شش‌هفتم

(برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی)

شش‌هشتم

(برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم و پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی)

شش‌نهم

(برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول)

شش‌دهم

(برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم)

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهانه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

• رشد آموزش ابتدایی • رشد آموزش متوسطه • رشد تکنولوژی آموزشی • رشد مدرسه فردا • رشد مدیریت مدرسه • رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی

(به صورت فصل‌نامه و چهار شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

• رشد بردهای آموزش متوسطه اول (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه اول) • رشد بردهای آموزش متوسطه دوم (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه دوم) • رشد آموزش قرآن • رشد آموزش معارف اسلامی • رشد آموزش زبان و ادب فارسی • رشد آموزش هنر • رشد آموزش مشاوره مدرسه • رشد آموزش تربیت بدنی • رشد آموزش علوم اجتماعی • رشد آموزش تاریخ • رشد آموزش جغرافیا • رشد آموزش زبان • رشد آموزش ریاضی • رشد آموزش فیزیک • رشد آموزش شیمی • رشد آموزش زیست‌شناسی • رشد آموزش زمین‌شناسی • رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار و دانش • رشد آموزش پهن دیستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

• نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.

• تلفن و فاکس: ۸۸۳۰۱۴۷۸ - ۲۱

گرایش آموزش و پرورش

مدارس هوشمند، یادگیری مشارکتی، یادگیری فعال، معماری مدرسه، گرافیک محیطی مدرسه، کتابخانه کلاسی، کتابخانه آموزشی، کتاب و کتابخوانی در مدرسه و خارج از مدرسه، جشن شکوفه‌ها، جشن عبادت، مدارس ماندگار، کارگروهی، اردوهای جهادی، مدارس چندپایه، عشایری و روستایی، رنگ تفریح، نماز و نمازخانه، جشن‌ها و مراسم، آغاز سال تحصیلی، حجاب در مدارس و ...

گرایش ایران، سرزمین پرگهر

زندگی اقوام ایرانی، عشایر ایران، سبک زندگی ایرانی - اسلامی، معماری در ایران، آثار و ابنیه تاریخی، آداب و سنن، خانواده، مفاخر، جشن‌ها و عزاداری‌ها، تفرجگاه‌ها، پارک‌های ملی و محلی، زیست‌بوم‌های ایرانی، جلوه‌های زندگی امروز، جوانان و نوجوانان ایرانی، چهره‌های ایرانی، لباس‌های محلی اقوام، کار و زندگی و ...

گرایش «حماسه سیاسی، حماسه اقتصادی»

شرکت در انتخابات، راهپیمایی‌ها، نماز جمعه، فعالیت اقتصادی و ...

گرایش دانش‌آموزی یا موضوع «آزاد»

این بخش به دانش‌آموزان (۱۳ تا ۱۸ سال) با «موضوع آزاد» تعلق خواهد داشت.

جوایز برگزیدگان

گرایش آموزش و پرورش

- نفر اول: لوح تقدیر، تندیس جشنواره و سی میلیون ریال جایزه نقدی
- نفر دوم: لوح تقدیر، تندیس جشنواره و بیست و پنج میلیون ریال جایزه نقدی
- نفر سوم: لوح تقدیر، تندیس جشنواره و بیست میلیون ریال جایزه نقدی

فراخوان هشتمین دوره جشنواره عکس داشت

گاه شمار: ۱۳۹۳

سال: ۱۳۹۳

- دو گرایش دیگر:
- نفر اول: لوح تقدیر، تندیس جشنواره و بیست و پنج میلیون ریال جایزه نقدی
- نفر دوم: لوح تقدیر، تندیس جشنواره و بیست میلیون ریال جایزه نقدی
- نفر سوم: لوح تقدیر، تندیس جشنواره و پانزده میلیون ریال جایزه نقدی

بخش دانش‌آموزی

در بخش دانش‌آموزی، به ۵ نفر، هر کدام پانزده میلیون ریال، جایزه داده خواهد شد.

امتیازها:

۱. عکس‌های

- برگزیده به صورت نمایشگاهی در معرض دید عموم قرار خواهد گرفت و برای آن‌ها گواهی شرکت در نمایشگاه صادر می‌شود.
- به هر یک از آثار رادباخته به نمایشگاه مبلغ ۵۰۰۰۰۰ ریال به عنوان حق الزحمه پرداخت خواهد شد.

۱. شرکت همه عکاسان در این جشنواره، آزاد است.
۲. آثار ارسالی فقط به صورت «تک عکس» پذیرفته می‌شود و هر عکاس می‌تواند با ارسال ۷ عکس در هر یک از موضوع‌ها (جمعاً ۲۱ عکس) در جشنواره شرکت کند.
۳. آثار باید با حجم کمتر از ۴۰۰ کیلوبایت بر روی وبگاه جشنواره به نشانی www.roshdmag.ir بارگذاری شوند.
۴. در صورت راه‌یابی عکس به نمایشگاه، ارسال عکس با اندازه اصلی ضروری است.
۵. در صورت عدم امکان ارسال از طریق وبگاه، علاقه‌مندان می‌توانند نسبت به ارسال آثار یا لوح فشرده به نشانی جشنواره اقدام نمایند.
۶. اصلاح رنگ، کنتراست، تیرگی و روشنی، کراپ در عکس‌ها در حدی که اصالت عکس را تغییر ندهد، قابل قبول است.
۷. ضروری است هر عکاس نام، نام خانوادگی، شماره تماس، نشانی محل سکونت، پست الکترونیکی، عنوان عکس، محل و تاریخ عکاسی هر عکس را به طور کامل مطابق با برگه فراخوان تکمیل و به همراه آثار ارسال کند.
۸. ارسال اثر توسط عکاس و شرکت در جشنواره، به منزله اعلام مالکیت معنوی عکس‌هاست. در صورت اثبات خلاف این امر در هر مرحله‌ای، عواقب حقوقی و جزایی آن به عهده شرکت کننده است.
۹. به آثاری که پس از مهلت مقرر ارسال شود، ترتیب اثر داده نخواهد شد.
۱۰. ارسال آثار به معنای پذیرش همه مقررات جشنواره است و تصمیم‌گیری در مورد مسائل پیش‌بینی نشده به عهده برگزارکننده است.
۱۱. از عکس‌های رادباخته به جشنواره، در نشریات رشد، وابسته به دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی استفاده خواهد شد.
۱۲. آثار رادباخته به نمایشگاه به صورت لوح فشرده یا کتابچه، در اختیار بازدیدکنندگان قرار خواهد گرفت.
۱۳. Cd و dvd های ارسال شده عودت داده نمی‌شود و پس از پایان دایوری معدوم می‌شود.



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

علاقه‌مندان می‌توانند آثار خود را به نشانی زیر تحویل دهند و یا از طریق پست ارسال کنند.
تهران: خیابان ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۷۰، جنب فروشگاه انتشارات مدرسه، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
طبقه اول، دبیرخانه جشنواره عکس رشد. صندوق پستی ۳۳۳۱-۱۵۸۷۵
برای کسب اطلاعات بیشتر به وبگاه جشنواره مراجعه یا با شماره تلفن‌های ۸۸۳۹۲۳۲ و ۸۸۴۹۰۴۱۴-۰۲۱ تماس بگیرید.