بسم الله الرحمن الرحیم

رشد

برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وچهارم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۸۹
■ آذر ۱۳۹۴
■ شمارهٔ ۳
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۰۰۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، دکتر ابراهیم ریحانی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور، دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
شمارگان:
۱۵۰۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی‌عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

حمیدرضا امیری
سردبیر

نقش مکملی، به‌عنوان یک هدف!

یکی از اهداف ماه‌نامهٔ ریاضی «رشد برهان متوسطه ۲» هم‌سویی و هم‌پوشانی با برنامهٔ درسی ملی و به‌خصوص برنامهٔ درسی ریاضی و کتاب‌های درسی ریاضی است. در واقع مجلهٔ ریاضی برهان برای هر شماره، مقاله‌ها و مطالبی را تهیه و در اختیار شما خوانندگان فرهیخته و دانش‌پژوهان عزیز قرار می‌دهد که در راستای همین هدف می‌باشد.

در تألیف کتاب‌های درسی همیشه محدودیت‌هایی وجود دارند که باعث می‌شوند همهٔ اهداف و رویکردهای تدوین شده در برنامهٔ درسی به‌طور صددرصدی به انجام نرسند؛ محدودیت‌هایی همچون متمرکز بودن نظام آموزشی کشور (اینکه کتاب درسی باید در تمام کشور به‌طور یکسان تدریس شود و لذا واضح است که برای طبقهٔ متوسط دانش‌آموزان تألیف خواهد شد)، محدودیت‌های زمانی، و یا محدودیت در تعداد صفحات کتاب (این محدودیت با توجه به ساعت تدریس هفتگی ریاضی به‌وجود می‌آید). این محدودیت‌ها باعث می‌شوند خلأهای احتمالی در کتاب‌های درسی پدید آیند و یا اینکه بعضی مطالب به توضیحات بیشتر و حتی به بیان و ارائه از روش‌های دیگر نیاز داشته باشند. ما این نقش مکملی را به‌عنوان یک هدف از اهداف چاپ مجلهٔ ریاضی برهان برای خودمان فرض کرده‌ایم و تا آنجا که بتوانیم به آن خواهیم پرداخت. مقاله‌های درسی، مسائلی برای حل و بعضی از بخش‌های مجله به‌همین منظور برای شما تألیف و تدوین شده‌اند.

موضوعی که برای ما خیلی مهم است، تشخیص و نظر شما و دبیران محترم شماست. بنابراین ارتباط خودتان را با ما برقرار کنید و با ارسال نظرات و پیشنهادات و حتی نوشته‌های خودتان، ما را در رسیدن به این اهداف یاری کنید. منتظر نظرات و مقاله‌های شما هستیم.

مؤید و پیروز باشید

آموزشی

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

حسابان در Mathstudio

اشاره

درس حسابان پر از مسائلی است که جنبهٔ محاسباتی دارند و به کمک نرم‌افزار هم حل می‌شوند. نمودار و حد یک دنباله، حد، مشتق و انتگرال یک تابع این‌گونه هستند و روش حل آن‌ها در این مختصر بیان شده است.

مقدمه

در ادامهٔ مقاله‌های قبلی، بحث حسابان را در نرم‌افزار «Mathstudio» ادامه می‌دهیم. بحث حسابان به کمک این نرم‌افزار بسیار زیبا می‌شود. از طرفی نیاز به محاسبات از بین رفته است و از طرف دیگر کیفیت کار بسیار بالاست. چرا که بسیاری از مفاهیمی که قبلاً امکان دیدن نداشتند، امکان دیدن پیدا می‌کنند و شما بسیار راحت می‌توانید افکار خود را تماشا کنید.

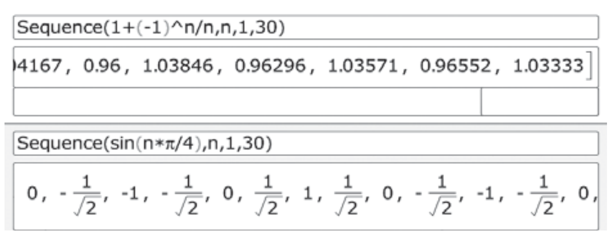
دنباله

معرفی و نوشتن جملات دنباله

اگر a_n یک دنباله باشد، برای محاسبه و نوشتن m جملهٔ اول این دنباله از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

Sequence (a_n, n, ۱, m)

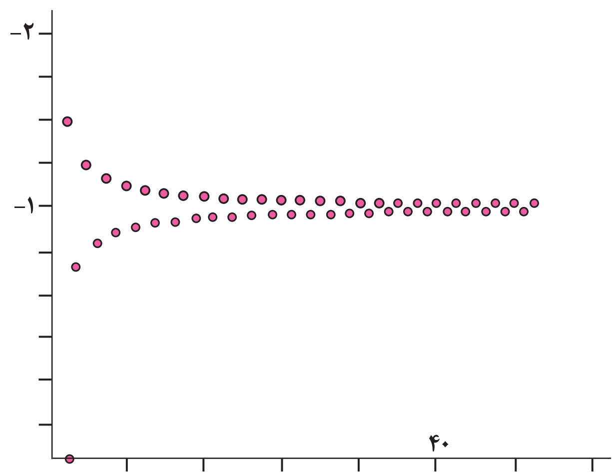
این دستور در شکل کلی به‌صورت Sequence (a_n, n, m, k, p) است که m جملهٔ شروع، k پایان و p گام حرکت به‌شمار می‌آید. برای مثال در شکل ۱، ۳۰ جملهٔ اول دنباله‌های $a_n = ۱ + \frac{(-۱)^n}{n}$ و $b_n = \sin(\frac{n\pi}{۴})$ حساب شده‌اند.



شکل ۱

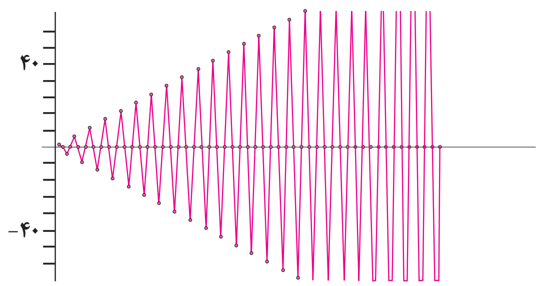
رسم نمودار یک دنباله

برای رسم نمودار یک دنباله بعد از معرفی دنباله، از کلید Plot استفاده می‌کنیم. مثلاً در شکل ۲ نمودار $a_n = ۱ + \frac{(-۱)^n}{n}$ رسم شده است.



شکل ۲

همچنین در شکل ۳ نمودار دنبالهٔ $b_n = n\sin(\frac{n\pi}{۴})$ با تغییر در نوع نمایش رسم شده است.



شکل ۳

حد دنباله

بـرای محاسـبهٔ حـد دنبالـهٔ a_n، دسـتور Limit(a_n, n, ∞) را بـه‌کار می‌بریـم. در شـکل ۴ حـد دنباله‌هـای $a_n = \frac{۲n+۳}{۳n-۱}$، $b_n = \sin(\frac{\pi n}{۲})$ و $c_n = \frac{\sin(n)}{n}$ محاسـبه شده اسـت که در مورد دوم حد وجود ندارد.

```
Limit((2n+3)/(3n-1),n,∞)
```
$\frac{2}{3}$

```
Limit(sin(n*π/2),n,∞)
```
$[-1, \ldots, 1]$

```
Limit(sin(n)/n,n,∞)
```
0

شکل ۴

مجموع n جملهٔ ابتدایی یک دنباله

اگـر a_n یـک دنبالـه باشـد، می‌توانیـم مجمـوع n جملـهٔ ابتدایـی آن یـا همـان S_n را بـا دسـتور Sum_Series (a_n, n, a, b, c) حساب کنیم که a، b و c به‌ترتیب شروع، پایان و گام حرکت هستند.

● **مثـال** مجموع ۱۰ جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ $a_n = (\frac{۱}{۲})^n$ و مجموع ۲۰ جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ $a_n = \frac{(-۱)^n}{n}$ را حساب کنید.

```
Sum_Series((1/2)^n,n,1,10)
```
0.99902344

```
Sum_Series((-1)^n/n,n,1,20)
```
-0.6687714

شکل ۵

قسـمت جالب دستور Sum_Series این است که می‌توان رابطهٔ کلی این مجموع را نیز برحسـب n به‌دسـت آورد. برای مثال، حاصل ۱×۲+۲×۳+...+n×(n+۱) را برحسـب n حسـاب می‌کنیم. با توجه به اینکه a_n=n×(n+۱)، دسـتور به‌صورت Sum_Series (k*(k+1), k,۱,n) در می‌آید.

به‌همین روش حاصل عبارت $\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+...+\frac{۱}{n\times(n+۱)}$ به این صورت می‌شود: $\text{Sum\_Series}(\frac{۱}{k*(k+۱)}, k, ۱, n)$.

```
Sum_Series(k*(k+1),k,1,n)
```
$\frac{n^3}{3}+n^2+\frac{2n}{3}$

```
Sum_Series(1/(k* k+1 ),k,1,n)
```
$-\frac{1}{n+1}+1$

شکل ۶

سـؤال: آیا می‌توانید به روش اسـتقرای ریاضـی و یا روش‌های دیگر درستی این نتایج را اثبات کنید؟

بسط تیلور

بسط تیلور یک تابع، از مباحثی است که در ریاضیات دبیرستانی مطرح نمی‌شود، ولی دانستن آن همراه با نمودار خالی از فایده نیست. چرا که بسـیاری از دانش‌آموزان نکته‌سنج می‌پرسند: ماشین‌حساب یا رایانه چگونه سینوس یا کسـینوس یک زاویه را حساب می‌کنند؟ منظورشان این است که: آیا ماشین‌حساب هم از مثلث قائم‌الزاویه برای محاسبهٔ نسبت‌ها استفاده می‌کند؟ شکل ۸ می‌تواند پاسخ خوبی برای این سؤال زیبا باشد.

برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای درجهٔ n تیلور تابع y=f(x) این دستور را به‌کار می‌بریم:

Taylor (f(x),x,n)

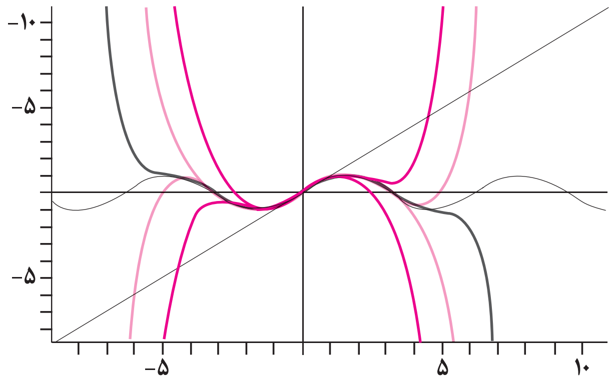
در شـکل ۷ بسـط تیلور درجـهٔ ۵ و ۶ برای تابـع y=cos(x) و y=sin(x) محاسبه شده است.

```
Taylor(sin(x),x,5)
```
$\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+x$

```
Taylor(cos(x),x,6)
```
$-\frac{x^6}{720}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{2}+1$

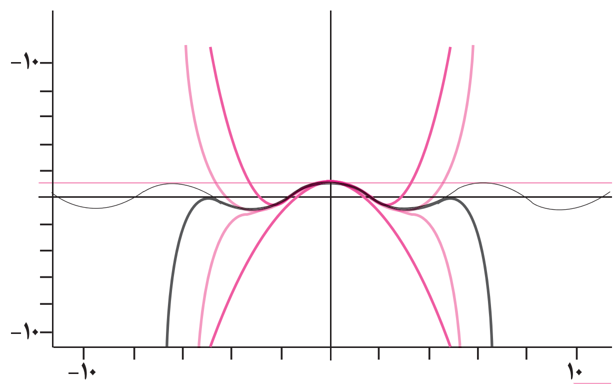
شکل ۷

در شکل ۸ تابع y=sin(x) همراه چندجمله‌ای‌های درجهٔ ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۱۱ رسم شده است.



شکل ۸

در شکل ۹ همین کار برای تابع y=cos(x) انجام شده است. زوج بودن یا همان متقارن بودن همهٔ توابعی که در این تقریب استفاده شده‌اند، باعث شده است که شکلی متقارن و زیبا به‌وجود آید.



شکل ۹

البته اگر این شکل با رنگ‌های متفاوت روی گوشی یا تبلت رسم شود، گویاتر خواهد بود.

محاسبهٔ حد

برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a} f(x)$ از دستور «Limit (f(x), x,a)» استفاده می‌کنیم که این دستور هم در صفحهٔ سمت راست صفحه کلید و هم در قسمت «Cataloge» برنامه وجود دارد.

● **مثال:** حاصل عبارت‌های $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{4x+5}-3}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x}$ و $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ را حساب کنید.

```
Limit((1-cos 3x )/x^2,x,0)
```
$\frac{9}{2}$

```
Limit((√ 3x+1 -2)/(√ 4x+5 -3),x,1)
```
$\frac{9}{8}$

```
Limit(sin(1/x),x,0)
```
$[-1, ..., 1]$

شکل ۱۰

همان‌طور که در شکل ۱۰ مشخص شده است، $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ وجود ندارد. چرا که حاصل عددی از مجموعهٔ [۱,۱-] است.

محاسبهٔ مشتق

اگر بخواهیم از تابع y=f(x) نسبت به x مشتق بگیریم، از دستور «D(f(x))» استفاده می‌کنیم. در شکل ۱۱ مشتق تابع $y=\frac{\cos(x)}{e^x+x}$ و $y=x^2\sin(3x)$ حساب شده است. به این منظور صفحه کلید را یک صفحه به راست می‌بریم، حرف D را انتخاب می‌کنیم تا D( ) در صفحه ظاهر شود.

```
D(x^2sin(3x))
```
$2x\sin(3x)+3x^2\cos(3x)$

```
D(cos(x)/(e^x+x))
```
$-\frac{\sin(x)}{x+e^x}-\frac{(e^x+1)\cos(x)}{(x+e^x)^2}$

شکل ۱۱

همچنین اگر بخواهیم مشتق مرتبهٔ n تابعی را حساب کنیم، دستور مشتق به «D(f(x),x,n)» تغییر می‌کند. در شکل ۱۲ مشتق اول تا پنجم تابع $y=x^7$ حساب شده است.

```
[D(x^7,x,1),D(x^7,x,2),D(x^7,x,3),D(x^7,x,4),D(x^7,x,5)]
```
$[7x^6,\ 42x^5,\ 210x^4,\ 840x^3,\ 2520x^2]$

شکل ۱۲

مشتق ضمنی

اگر F یک تابع دومتغیره باشد، از دستور D به شکل «D(F,Var)» استفاده می‌کنیم که «Var» همان متغیر موردنظر است. مشتق تابع

$f(x,y)=xy^2+z^3$ نسبت به x و z در شکل ۱۳ حساب شده است.

```
D(x*y^2+z^3,x)
y²
D(x*y^2+z^3,z)
3 z²
```

شکل ۱۳

خط مماس بر منحنی

یکی از مسائلی که در بحث مشتق مطرح می‌شود، خط مماس بر منحنی اســت. برای نوشتن معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ از این دستور استفاده می‌کنیم:

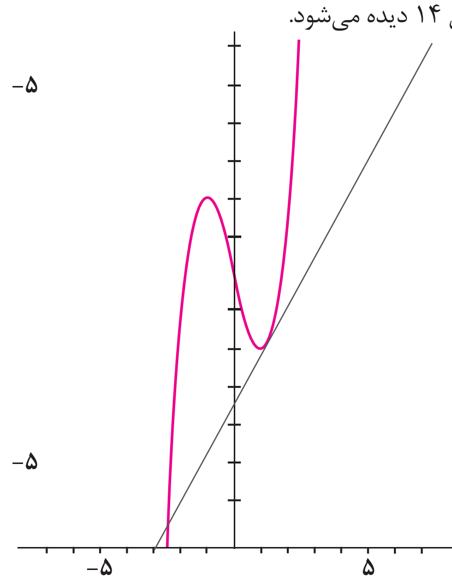
Tangentline(f(x),x,a)

که امکانات خوبی را در اختیار ما قرار می‌دهد. در شکل ۱۴ معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y=x^3-3x$ را در نقطه‌ای به طول $x=2$ نوشته‌ایم.

```
TangentLine(x^3-3x,x,2)
9 x - 16
Plot(x^3-3x,TangentLine(x^3-3x,x,1.2))
```

شکل ۱۴

به‌عنوان یک مثال جالب، نمودار تابع $y=x^3-3x$ و خط مماس بر آن را در $x=1/2$ با هم در یک دســتگاه رسم می‌کنیم. برنامهٔ این کار در شکل ۱۴ دیده می‌شود.



شکل ۱۵

انتگرال نامعین

برای محاسبهٔ انتگرال نامعین تابع $y=f(x)$، یعنی $\int f(x)dx$ دو روش وجود دارد:

الــف) صفحه کلید را یک صفحه به راســت می‌بریم. علامت $\int$ را انتخاب می‌کنیم تا $\int()$ در صفحه ظاهر شــود. در این مرحله ضابطهٔ تابع را داخل پرانتز می‌نویسیم.

● **مثــال** حاصــل $\int e^x \cos(2x)dx$ و $\int x^2 \sin(x)dx$ را حســاب کنید.

```
∫(x^2*sin(x))
- x² cos(x) + 2 x sin(x) + 2 cos(x)
∫(e^x*cos(2x))
cos(2 x) eˣ / 5 + 2 sin(2 x) eˣ / 5
```

شکل ۱۶

ب) از تابع «Integrate(f(x))» که در نوار بالای برنامه در قسمت «cataloge» وجود دارد، استفاده می‌کنیم. آشنایی با این دستور برای انتگرال معین مفید است.

● **مثال** تابع اولیهٔ توابع $g(x)=x^3\ln(x)$ و $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ را حساب کنید.

```
Integrate(x^3*ln(x))
- x⁴/16 + x⁴ ln(x)/4
Integrate(1/(x^2-4))
1/4 ln((x - 2)/(x + 2))
```

شکل ۱۷

انتگرال معین

بــرای محاســبهٔ $\int_a^b f(x)dx$ دســتور کلــی بــه صــورت «NIntegrate(f(x),x,a,b)» است که ابتدا دستور «NIntegrate()» را از بخش «cataloge» فرامی‌خوانیم. ســپس موارد لازم برای هر مثال را در آن می‌نویسیم.

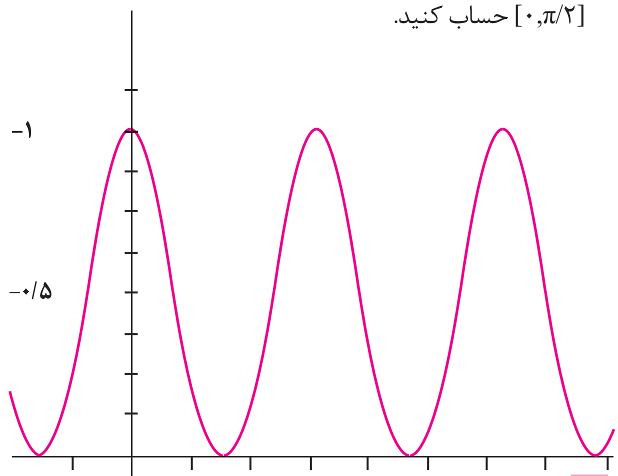
مثال: حاصل $\int_{0}^{4}(x^3-4x)dx$ و $\int_{0}^{2}(x^2-4x)dx$ را حساب کنید.

```
NIntegrate(x^2-4x,x,0,4)
- 32/3
NIntegrate(x^3-4x,x,0,2)
-4
```

شکل ۱۸

تذکر: برای محاسبهٔ انتگرال معین توابع مثلثاتی، برنامه باید برحسب رادیان تنظیم شود. به این منظور از منوی بالای برنامه، «Option» را انتخاب و سپس در قسمت «Angle mode» عبارت «Radian» را انتخاب می‌کنیم.

● **مثال** مساحت بین منحنی $f(x)=\cos^2(x)$ و محور xها را در فاصلهٔ $[0,\pi/2]$ حساب کنید.



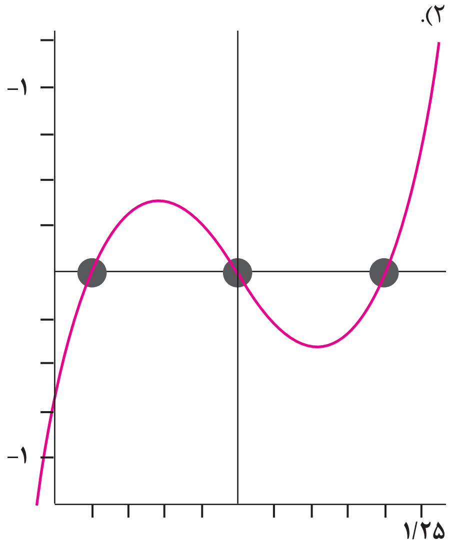
شکل ۱۹

چون این تابع مثبت است، نمودار آن بالای محور xهاست. پس مساحت همان حاصل انتگرال است که آن را حساب می‌کنیم.

```
NIntegrate((cos x )^2,x,0,π/2)
1.57040284
```

شکل ۲۰

وقتی از نرم‌افزاری در ریاضی برای حل یک مسئله استفاده می‌کنیم، امکاناتی را در اختیار ما قرار می‌دهد که روش‌های قبلی را با سرعت بالاتری طی می‌کنیم. مثلاً می‌خواهیم مساحت ناحیهٔ محصور بین محور طول‌ها و منحنی $f(x)=x^3-x$ را حساب کنیم. بنابراین ابتدا نمودار را رسم می‌کنیم و محل برخورد منحنی و محور xها را می‌یابیم (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

با توجه به شکل، منحنی محور xها را در نقاط ۱-،۰،۱ قطع می‌کند. لذا در فاصله‌های $[-1,0]$،$[0,1]$ انتگرال می‌گیریم و قدرمطلق آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

```
1 a=NIntegrate(x^3-x,x,0,1)
2 b=NIntegrate(x^3-x,x,-1,0)
3 s=abs(a)+b
1/2
```

شکل ۲۲

نکتهٔ پایانی

آنچه در این مقاله بیان شد فقط قسمت کوچکی از توانایی‌ها و قابلیت‌های این نرم‌افزار است. بدیهی است که معلمان و دانش‌آموزان هرقدر با نرم‌افزار بیشتر کار کنند و در آن به مهارت بیشتری برسند، از آن بهرهٔ بیشتری خواهند برد.

از طرف دیگر این را هم باید به‌خاطر سپرد که هر رایانه‌ای حتماً خطاهایی خواهد داشت و هیچ‌گاه جای فکر انسان را نخواهد گرفت و قادر به فکر کردن نیست. به این معنی که بعد از حل یک مسئله توسط رایانه، جواب‌ها توسط انسان باید تفسیر و تحلیل شود. اما نرم‌افزارها روزبه‌روز پیشرفت می‌کنند و کامل می‌شوند و این جای امیدواری دارد.

*** منبع**

از آنجا که کتاب یا مقاله‌ای برای آموزش این نرم‌افزار در دسترس نبود، ما از خود نرم‌افزار به‌عنوان منبع و برای آموزش استفاده کردیم.

حمیدرضا امیری

اعداد اول و تجزیه

اغلب ریاضی‌دانان قبول دارند که مهم‌ترین مفهوم در نظریهٔ اعداد، مفهوم «عدد اول» است.

تعریف اعداد اول و مرکب

عدد طبیعی n اول است اگر $n \geq ۲$ و تنها شمارنده‌های n، n و ۱ باشند. ما مجموعهٔ اعداد اول را با P نمایش می‌دهیم. هر عدد صحیح $n \geq ۲$ که اول نباشد، مرکب است. عدد ۲ کوچک‌ترین عدد اول و تنها عدد اولِ زوج است. دیگر اعداد اول کمتر از ۲۰ عبارت‌اند از: ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹.

مثال: تجزیه به اعداد اول برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$

عدد صحیح ۲۲۶۵۱۲ را در نظر بگیرید. این عدد به ۲ ختم می‌شود. بنابراین توسط ۲ شمرده می‌شود؛ (می‌گوییم n توسط m شمرده می‌شود ـ m شمارندهٔ n است (مترجم) ـ و با نماد $m \mid n$ نشان می‌دهیم، اگر $n=mq$، برای عددی صحیح مانند q). در واقع $\frac{۲۲۶۵۱۲}{۲}=۱۱۳۲۵۶$. ما می‌توانیم آن را دوباره بر ۲ تقسیم کنیم: $\frac{۱۱۳۲۵۶}{۲}=۵۶۶۲۸$، و دوباره: $\frac{۵۶۶۲۸}{۲}=۲۸۳۱۴$ و دوباره: $\frac{۲۸۳۱۴}{۲}=۱۴۱۵۷$.

در این مرحله ما دیگر نمی‌توانیم هیچ تقسیم بر دویی داشته باشیم. بنابراین داریم: $۲۲۶۵۱۲=۲^۴\times۱۴۱۵۷$. اما این به راحتی قابل بررسی است که ۱۴۱۵۷ بر ۳ بخش‌پذیر است و ۴۷۱۹ به‌دست می‌آید و با تقسیم مجدد بر ۳، ۱۵۷۳ حاصل می‌شود. لذا با این تقسیمات بر ۳ خواهیم داشت: $۲۲۶۵۱۲=۲^۴\times۳^۲\times۱۵۷۳$.

با استمرار و ادامهٔ این مسیر در پایان خواهیم داشت: $۲۲۶۵۱۲=۲^۴\times۳^۲\times۱۱^۲\times۱۳$. ما ۲۲۶۵۱۲ را به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشته‌ایم. همچنین، نماد $m \nmid n$ به این معنی است که n توسط m شمرده نمی‌شود (n بر m بخش‌پذیر نیست ـ مترجم).

Prime Numbers and Factorization

Most mathematicians would agree that the most important concept in number theory is the notion of a prime.

Definition 1 (Prime and composite numbers) *A natural number n is prime if $n \geq 2$ and the only divisors of n are n and 1. We denote the set of prime numbers by P. An integer $n \geq 2$ that is not prime is composite.* The number 2 is the smallest prime and the only even prime. The other primes less than 20 are 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

(Prime factorization of any integer $n \geq 2$)

Consider the integer 226512. It ends in 2 so it is divisible by 2. (We say that "*n* is divisible by *m*," indicated by the notation $m|n$, if $n=qm$ for some integer *q*.) In fact, 226512/2=113256. We can divide by 2 again, 113256/2=56628; and again, 56628/2=28314; and again, 28314/2=14157. That's it. We can't divide by 2 anymore, so we have $226512=2^4*14157$. But, it is easy to check that 14157 is divisible by 3 to get 4719 which is again divisible by 3 to get 1573. That's it for dividing by 3, so we have $226512=2^4*3^2*1573$.

کلمه‌ها و اصطلاحات مهم

1. Prime number عدد اول
2. Divides عاد می‌کند
3. Product حاصل‌ضرب
4. Irrational گنگ، ناگویا
5. Rational number عدد گویا
6. Fraction کسر
7. Multiple مضرب
8. Positive integer صحیحِ مثبت
9. Contradict تناقض

Continuing in this manner, we end up with $226512=2^4 * 3^2 * 11^2 * 13$. We have written 226512 as a product of primes. Also, the notation $m \nmid n$ means that *n* is not divisible by *m*.

ترجمه برای دانش‌آموز

From the closure property for multiplication of odd integers, you can prove by induction that for any $k \geq 1$, and any integer m, m^k is odd if and only if m is odd. Logically equivalent is that m^k is even if and only if m is even. The fact that m^k is odd if m is odd can also be proved using the binomial theorem, which you should have seen in high school:

$$(x+y)^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i}.$$

Since m is odd, $m=2j+1$ for some integer j. Let $x=2j$ and $y=1$. Written another way,

$$m^k = (2j+1)^k$$
$$= 1 + (2j)^1 \binom{k}{1} + (2j)^2 \binom{k}{2} + \ldots + (2j)^k \binom{k}{k}.$$

In this form m^k is obviously 1 plus an even integer and hence odd.

قضیه: همهٔ اعداد طبیعی با هم برابرند!

اثبات: به روش استقرای ریاضی: فرض می‌کنیم برای هر دو عدد طبیعی a و b، max(a,b)=n و نشان می‌دهیم برای هر n∈N، a=b.

به ازای n=۱، max(a,b)=۱ و در نتیجه: a=b=۱.

حال فرض می‌کنیم: اگر max(a,b)=k، آن‌گاه a=b (فرض استقرا) و ثابت می‌کنیم اگر max(a,b)=k+1، آن‌گاه a=b (حکم استقرا). اگر max(a,b)=k+1، آن‌گاه: max(a-۱,b-۱)=k و طبق فرض استقرا: a-۱=b-۱ و در نتیجه a=b و حکم ثابت است!

پرسش‌های پیکارجو!

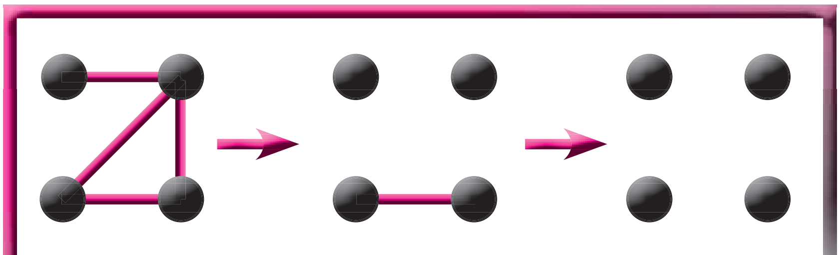
دنبالهٔ عددهای مثبت a_n چنان است که داریم:

$$(a_{n+1}+n)a_n=1$$

در این دنباله چند جملهٔ گویا وجود دارد؟

الف) ۱　　ب) ۲　　ج) ۳　　د) بی‌شمار　　هـ) هیچ

محمود داورزنی
دبیر ریاضی شهری و دانشجوی دکتری ریاضی

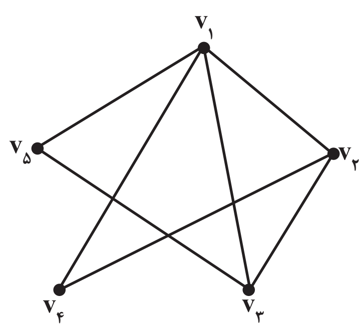


دنبالهٔ گرافیک و الگوریتم هاول- حکیمی

اشاره

دنباله‌ای نزولی از اعداد حسابی که جملات آن درجه‌های رئوس یک گراف باشند، دنبالهٔ گرافیک نامیده می‌شود. در این مقاله می‌خواهیم به بررسی روش‌های تشخیص گرافیک بودن یک دنبالهٔ عددی بپردازیم.

هر گراف ساده تعدادی رأس (p) و تعدادی یال (q) دارد. مثلاً در گراف زیر، $p=5$ و $q=6$.

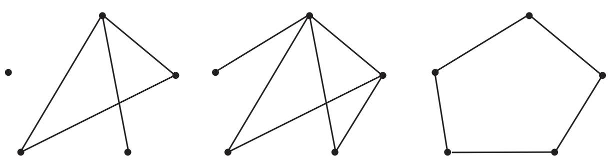


شکل ۱

و می‌دانیم که تعداد یال‌های متصل به یک رأس مانند v_i، درجهٔ آن نامیده می‌شود و با $\deg(v_i)$ نشان داده می‌شود. مثلاً در گراف بالا،

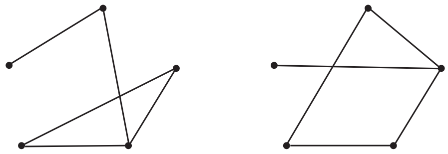
$$\deg(v_1)=4,\ \deg(v_2)=\deg(v_3)=3,\ \deg(v_4)=\deg(v_5)=2$$

بنابراین درجه‌های رأس‌های این گراف، یک دنبالهٔ نزولی به‌صورت: ۴,۳,۳,۲,۲ تشکیل می‌دهند که به اصطلاح، «دنبالهٔ درجات» نامیده می‌شود. واضح است که برای هر گراف می‌توان یک دنبالهٔ درجه‌ها نوشت. به مثال‌های زیر توجه کنید.



شکل۲

البته ممکن است دو گراف متفاوت[1] دارای یک دنبالهٔ درجه‌ها باشند. مثلاً گراف‌های زیر هر دو دنبالهٔ درجه‌ای به‌صورت: ۳,۲,۲,۲,۱ دارند، ولی با یکدیگر متفاوت‌اند. (گراف سمت راست، دور به طول ۴ دارد، در حالی‌که گراف دیگر دارای دور به طول ۳ است.)



شکل ۳

p و q از یک دنبالهٔ درجه‌ها به راحتی مشخص می‌شوند. مثلاً در

دنبالهٔ درجه‌های ۴،۳،۳،۲،۲ تعداد اعداد به‌کار رفته، همان p اســت و به کمک قضیهٔ $\sum \deg(v_i) = ۲q$ ، مقدار q نیز مشخص می‌شود. در این دنباله داریم: $p = ۵$ و $q = \frac{۱۴}{۲} = ۷$.

گرچه هر گرافی یک دنبالهٔ درجه‌ها دارد، ولی هر دنباله‌ای از اعداد صحیح نامنفی، لزوماً درجات یک گراف نیست. مثلاً دنبالهٔ ۴،۳،۲،۱،۰ مربوط به یک گراف نیست. آیا می‌توانید دلیل این امر را توضیح دهید؟

یکی از جواب‌ها این است که با وجود عدد ۴، یعنی رأسی داریم که با چهار رأس دیگر مجاور است. پس درجهٔ ۴ رأس دیگر باید حداقل ۱ باشد، در حالی‌که در این دنباله، عدد صفر وجود دارد. پس این دنباله مربوط به گراف نیســت. به‌عنوان یک مثال دیگر، دنبالهٔ ۵،۴،۳،۲،۲،۱ نیز مربوط به درجات یک گراف نیســت، زیرا تعداد اعداد فرد در این دنباله، یک عدد فرد است[۲].

◀**تعریف دنبالهٔ گرافیک:** دنبالــهٔ $d=(d_1,d_2,...,d_n)$ از اعداد صحیح نامنفــی را دنبالهٔ گرافیک می‌گوییم، هــرگاه دنبالهٔ درجه‌های یک گراف ساده باشد.

بــا توجه به تعریــف و مثال‌های بــالا، دنباله‌هــای ۴،۳،۲،۱،۰ و همین‌طور ۵،۴،۳،۲،۲،۱ گرافیک نیستند. تشخیص اینکه کدام دنباله‌ها گرافیکی هســتند، به‌طور معمول با بررسی خواصی که باید این اعداد به‌عنوان درجات داشــته باشند، انجام می‌شــود. اگر $d=(d_1,d_2,...,d_n)$ به‌عنوان یک دنباله از اعداد صحیح نامنفی داده شــده باشد و بخواهد درجات یک گراف ساده باشد، باید:

۱. داشته باشیم: $d_i \leq p-1$.
۲. حداقل دو عدد مساوی در دنباله موجود باشد.
۳. تعداد اعداد فرد، فرد باشد.
۴. اگر k عضو دنباله برابر با p-۱ باشد، آنگاه: $d_n \geq k$.

لازم به ذکر است که بعضی از خواص بالا همارز یکدیگرند.

●**مثال:** آیا دنبالهٔ (۶،۶،۵،۴،۳،۳،۱) گرافیک است؟

◆**حل:** در این دنباله، p=۷ و دو مقدار برابر با ۶=۱-p هســتند. پس باید: $d_n \geq ۲$، در حالی‌که $d_n = ۱$. پس این دنباله گرافیک نیست.

ســؤالی که ممکن است برای شما پیش آمده باشد، این است که: آیا شــرطی لازم و کافی برای اثبات گرافیــک بودن یک دنباله وجود دارد یا خیر؟

جواب مثبت اســت و چند قضیهٔ دوشــرطی بــرای اثبات این امر وجود دارد. اولین قضیه در ســال ۱۹۶۰، توســط دو ریاضی‌دان بزرگ اثبات شده است.

◀**قضیــهٔ ۱ (اردوش[۳] ـ گالای):** دنبالهٔ نزولی $(d_1,d_2,...,d_n)$ از اعداد صحیح نامنفی، گرافیک است، هرگاه مجموع تمام این اعداد زوج باشد و برای هر $۱ \leq k \leq n$:

$$\sum_{i=۱}^{k} d_i \leq k(k-۱) + \sum_{i=k+۱}^{n} \min\{k, d_i\}. \quad (*)$$

هاول ریاضی‌دان اهل چک و سیف‌الله لوئیس حکیمی ریاضی‌دان ایرانی ـ آمریکایی زادهٔ ایران، این الگوریتم را بنیان نهادند.

●**مثال ۴.** به کمک قضیهٔ بالا، گرافیک بودن دنبالهٔ (۶،۶،۵،۴،۳،۱،۱) را بررســی می‌کنیم. در گام نخست، مجموع این اعداد زوج است و در گام بعد، شرط (*) را برای مقادیر متفاوت k بررسی می‌کنیم.

$k=۱ \Rightarrow ۶ \leq ۱(۱-۱)+(۱+۱+۱+۱+۱+۱)=۶$

$k=۲ \Rightarrow ۶+۶ \leq ۲(۲-۱)+(۲+۲+۲+۱+۱)=۱۰$

با توجه به عدم برقراری نامساوی آخر برای k=۲، دنبالهٔ داده شده گرافیک نیست. قضیهٔ بعدی که مشهور به «الگوریتم هاول ـ حکیمی»[۴] است، ساده‌تر از قضیهٔ ۱ عمل می‌کند.

◀**قضیــهٔ ۲ (هــاول ـ حکیمــی):** دنبالــهٔ $(d_1,d_2,...,d_n)$ که $d_1=k$ از اعــداد صحیــح نامنفی، گرافیک اســت اگــر و تنها اگــر دنبالهٔ $(d_2-1,d_3-1,...,d_{k+1}-1,d_{k+2},...,d_n)$ گرافیک باشد.

طبق الگوریتم بالا، کافی است عدد بزرگ‌تر را از دنباله حذف کنیم و به همان اندازه از اعداد بعد از آن، یک واحد کم کنیم. اکنون گرافیک بودن دنبالهٔ اولیه منوط به گرافیک بودن این دنباله اســت. چیزی که این قضیه را ساده‌تر از قضیهٔ قبل می‌کند، این است که اگر تشخیص گرافیک بودن دنبالهٔ به‌دســت آمده مشکل باشد، باز هم می‌توان این کار را ادامه داد. قبل از اجرای مجدد الگوریتم روی دنبالهٔ به‌دست آمده باید آن دنباله را نزولی کنیم.

●**مثــال:** به کمــک الگوریتم هاول ـ حکیمــی، گرافیک‌بودن دنبالهٔ (۶،۶،۵،۴،۳،۱،۱) را بررسی می‌کنیم. با یک‌بار اجرای این الگوریتم داریم:

$(\underline{۶},۶,۵,۴,۳,۱,۱) \longrightarrow (۵,۴,۳,۲,۰,۰)$

دنبالهٔ به‌دســت آمده گرافیک نیســت. (به‌خاطر وجود یک مقدار p-۱، کمترین درجه باید حداقل ۱ باشد). اگر باز هم تشخیص گرافیک بودن این دنباله مشکل باشد، می‌توانیم یک‌بار دیگر الگوریتم را استفاده کنیم:

$(\underline{۵},۴,۳,۲,۰,۰) \longrightarrow (۳,۲,۱,-۱,-۱)$

اکنون به‌خاطر وجود مقادیر ۱-، این دنباله گرافیک نیســت و در نتیجه دنباله‌های قبل نیز گرافیک نیستند.

●**مثال:** به کمک این الگوریتم، گرافیک بودن دنبالهٔ (۶،۶،۵،۴،۳،۳،۳) را بررسی می‌کنیم.

$(\underline{۶},۶,۵,۴,۳,۳,۳) \longrightarrow (\underline{۵},۴,۳,۲,۲,۲) \longrightarrow (\underline{۳},۲,۱,۱,۱) \longrightarrow (۱,۰,۰,۱)$

دنبالهٔ اخیر گرافیک اســت، زیرا به راحتی می‌توان گراف نظیر را رسم کرد.

شکل ۴

پس تمام دنباله‌های قبل نیز گرافیک هستند.

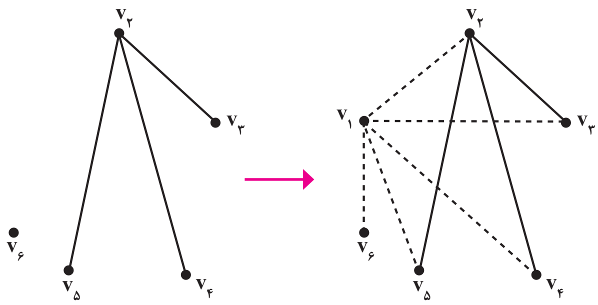
یکی دیگر از کاربردهای الگوریتم هاول ـ حکیمی، رسم یک گراف از روی دنبالهٔ درجات آن است. برای این کار، ابتدا الگوریتم را تا جایی روی دنبالهٔ داده شــده اجرا می‌کنیم که بتوانیــم گراف متناظر آن را رسم کنیم. اکنون با مشاهدهٔ دنبالهٔ قبل و اینکه چه عددی حذف شده اســت، یک رأس به گراف رسم شده اضافه می‌کنیم و به تمام رئوسی که از آن‌ها یک واحد کم شــده است، یک یال متصل می‌کنیم. با این کار، گراف متناظر دنبالهٔ قبل نیز رســم می‌شود. با تکرار این کار تمام گراف‌ها رسم می‌شوند.

● **مثال:** گــراف متناظر با دنبالــهٔ گرافیک (۵،۴،۲،۲،۲،۱،۱) را رســم می‌کنیم.

با یک‌بار اجرای الگوریتم خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} v_1\, v_2\, v_3\, v_4\, v_5\, v_6 & & v_2\, v_3\, v_4\, v_5\, v_6 \\ (۵،۴،۲،۲،۲،۱) & \longrightarrow & (۳،۱،۱،۱،۰) \end{matrix}$$

گراف مربوط به آخرین دنباله را رسم می‌کنیم و سپس یک رأس به این گراف می‌افزاییم و به تمام رئوس دیگر متصل می‌کنیم (یال‌های نقطه‌چین):



شکل ۵

گراف به‌دست آمده، همان گراف مربوط به دنبالهٔ (۵،۴،۲،۲،۲،۱) است.

البته دقت داشــته باشــید که ممکن اســت گراف دیگری نیز با این دنبالهٔ درجه‌ها موجود باشــد. به‌عنوان تمرینی برای این مباحث، گرافیک بودن دنباله‌های زیر را بررسی کنید و در صورت مثبت بودن جواب، گراف نظیر آن‌ها را نیز رسم کنید.

الف) (۵،۵،۵،۴،۲،۱،۱،۱)

ب) (۵،۵،۴،۴،۲،۲،۱،۱)

ج) (۵،۵،۵،۳،۲،۲،۱،۱)

د) (۵،۵،۴،۳،۲،۲،۲،۲،۱)

هـ) (۶،۶،۵،۴،۳،۳،۱)

و) (۷،۶،۵،۴،۳،۳،۲)

پی‌نوشت‌ها

۱. دو گــراف متفاوت‌انــد، هرگاه یکریخت نباشــند. گراف‌های $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ را یکریخت می‌گوییم هرگاه تابع دوســویی $f:V_1\rightarrow V_2$ موجود باشــد؛ به‌طوری‌که: $\{a,b\}\in E_1 \Leftrightarrow \{f(a),f(b)\}\in E_2$. مثلاً گراف‌های  و  یکریخت هستند. دو گراف یکریخت خصوصیات یکسانی دارند؛ یعنی از نظر دنبالهٔ درجه، تعداد دورها، مسیرها و غیره یکسان هستند.

۲. از قضیهٔ $\sum \deg(v_i) = ۲q$ ، می‌دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف، همیشه یک عدد زوج است و به‌عنوان یک نتیجه، تعداد اعداد فرد باید همواره زوج باشد و همین‌طور می‌توان نشان داد که تعداد اعداد زوج یک دنباله، از لحاظ زوجیت با p یکسان است.

۳. **پال اردوش**، ریاضی‌دان اهل مجارستان در سال ۱۹۱۳ به‌دنیا آمد. نشانه‌های نبوغ از کودکی در او مشخص بود. اولین مقالهٔ خود را در ریاضی در سن ۱۸ سالگی نوشــت و تا پایان عمر حدود ۱۵۰۰ مقاله و کتاب به رشــتهٔ تحریر درآورد و از این حیث، در تاریخ ریاضی بی‌همتاســت. وی در ســال ۱۹۹۶ و در سن ۸۳ سالگی درگذشت.

اردوش قصد نوشتن کتابی با نام «اثبات» را داشت که در آن هر قضیه به زیباترین وجه اثبات می‌شود، چرا که معتقد بود، اثبات تمام قضایا به بهترین شکل در لوحی نزد پروردگار موجود است. به اصرار دانشجویان شروع به نوشتن چنین کتابی کرد، ولی مرگ به او مجال اتمام آن‌را نداد. دو تن از شاگردانش از ایده‌ها و نظرات او کتابی با همین نام نوشتند و به روح او تقدیم کردند. این کتاب با نام «کتاب اثبات» توسط پژوهشگاه دانش‌های بنیادی و با ترجمهٔ آقای **سیامک کاظمی** منتشر شده است و شما می‌توانید از اثبات‌های بی‌نظیر آن لذت ببرید.

۴. **هاول** ریاضی‌دانی اهل چک است و سیفا... لوئیس حکیمی نیز ریاضی‌دان ایرانی ـ امریکایی است که در ایران به‌دنیا آمده است. هاول در سال ۱۹۵۵ و حکیمی در سال ۱۹۶۲ این الگوریتم را بنیان نهادند.

منابع

۱. علیپور، علیرضا. **ترکیبیات**، انتشارات فاطمی، چاپ ششم.

۲. ایگنر، مارتین و تسیگلر، گونتر، **کتاب اثبات**، ترجمه سیامک کاظمی، انتشارات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی.

3. Bondy, J. A. Murty U.S.R., *Graph Theory, Springer publishing*, 2008.

4. Hakimi S. L. On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph. I", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* **10**: 496-506, MR 0148049

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

	۰	۳	۱	۱ ۱	۳	۰	۶	۱	۵	۱ ۱ ۱	۵	۰	۱	۱	۳	۱	۱ ۱	۳	۰
۰																			
۱							■												
۱۱				■			■												
۱							■												
۱۱۱۳۱		■			■		■		■	■	■							■	
۱۱۱۱۱۱		■			■		■		■		■							■	
۴۵۴		■	■	■	■		■	■	■	■	■				■	■	■	■	
۱۱۱									■		■				■				
۳۳۱									■	■	■		■	■	■		■		
۰																			

احتمالاً می‌دانید که ژاپنی‌ها در طراحی جدول‌های متنوع پیشـینه‌ای غنی دارند و در گذشته‌های دور در طرح مربع‌های وفقی پیشگام بوده‌اند. در دهه‌های اخیر نیز آن‌ها مبتکر «سودوکو»ها بوده‌اند. یکی از جدول‌هایی که در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ در کشور ژاپن طرف‌داران بسـیاری داشت و مایهٔ سرگرمی نوجوانان ژاپنی بود، جدول‌های نقاشی با کشـف رمزهای عددی بود. در این جدول‌ها که به‌صورت شطرنجی با تعداد سطرها و ستون‌های دلخواه بودند، در کناره‌های جدول، تعداد خانه‌های جدول که باید سیاه شوند (تا نقاشی موردنظر شـکل بگیرد) مشخص می‌شد. علاوه‌بر آن، خانه‌هایی که چسبیده به‌هم بودند هم بهِ‌ترتیب مشـخص می‌شدند و این‌کار با یک عدد (کد) چندرقمی انجام می‌پذیرفت. مثلاً اگر در کنار یک سطر (یا ستون) کد ۱۲۳۱ قرار داشت، معرف این بود که در این سـطر (یا سـتون) ابتدا باید یک خانهٔ تکی و سپس دو خانهٔ چسبیده به‌هم، بعد سه خانهٔ چسبیده به‌هم و بعد یک خانهٔ تکی سیاه شود. اما اینکه کدام خانه‌ها باید سیاه شوند، می‌باید توسط حل‌کنندهٔ جدول کشف می‌شد و این کار با مقایسهٔ سطرها و ستون‌ها و احتمالات گوناگون امکان‌پذیر است. برای مثال به جدول پر شده (نقاشی‌شدهٔ) مقابل توجه کنید.

اگر به عددهای نوشـته شـده در کناره‌های جدول دقت کنیـد، آنچه که گفتیم را می‌توانید به وضوح مشاهده کنید. اکنون اگر این عددها را داشته باشید، چگونه می‌توانید رمز جدول را کشـف و آن را نقاشـی کنید؟ (بدیهی است که نقاشی رمز می‌تواند بسیار متنوع باشد و در نمونه‌های ژاپنی آن موارد بسیار زیبایی وجود دارد.)

به عددها دقت کنید. مثلاً عدد واقع در کنارهٔ سطر پنجم، به ما می‌گوید، در این سطر سـه خانهٔ تکی و سـپس یک سه‌تایی و بعد یک خانهٔ تکی باید سیاه شوند. بدیهی است که بین هر دو بخش سـیاه شده باید لااقل یک جای خالی وجود داشته باشد. به کمک این اطلاعات و نیز مقایسـهٔ سطرها و ستون‌ها می‌توانید به‌تدریج خانه‌های خالی و پر را مشخص و در نهایت طرح را کامل کنید.

با این توضیح‌ها فکر می‌کنم که حالا آمادگی داشـته باشـید که یک نمونه از این جدول‌ها را نقاشی کنید. بعد از آن خود می‌توانید برای دوستانتان از این جدول‌ها طراحی کنید و با آن‌ها سرگرم شوید و علاوه‌بر آن قوهٔ خلاقیت خود را نیز پرورش دهید.

	۳	۱	۱	۳	۱	۱ ۱ ۱	۱ ۱	۴ ۳	۱	۱ ۱ ۲	۱ ۱	۳ ۱ ۲	۱ ۱	۲ ۱ ۱ ۲	۰	۱ ۱ ۱	۱ ۱ ۱	۳ ۳	۱	۱ ۲	۱	۱ ۲	۱	۱ ۲	۰	۱	۱	۳
۱۱۱																												
۱۱																												
۱۱۳۱۱۱۱																												
۱۳۱۳۷۳																												
۱۱۱۱۳																												
۴۳۱																												
۰																												
۱۱۱																												
۱																												
۳۱۱۱۱																												
۷۳																												
۳																												

۲

مصاحبه با دکتر محمدعلی آبام
رئیس کمیتهٔ المپیاد رایانهٔ ایران

المپیاد پلی برای رسیدن به اهداف بعدی است!

مقدمه

در شمارهٔ ۲ مجله برهان، قسمت اول مصاحبه با دکتر محمدعلی آبام را خواندید و از روایت ایشان از چگونگی ورودشان به تیم المپیاد ریاضی ایران و شرکت در مسابقات المپیاد بین‌المللی ریاضی سال ۱۹۹۵ کانادا آگاه شدید. همان رقابت‌هایی که در آن مریم میرزاخانی برای دومین‌بار موفق به دریافت مدال طلای المپیاد جهانی شد و محمدعلی آبام هم‌تیمی وی بود. در ادامه به چگونگی انتخاب رشتهٔ کامپیوتر در دانشگاه توسط ایشان رسیدیم و در قسمت دوم مصاحبه که در پی می‌خوانید، به فعالیت‌های ایشان در کمیتهٔ المپیاد رایانهٔ کشورمان می‌پردازیم:

رشد برهان: چه‌طور شد که جذب المپیاد رایانه شدید و به همکاری با «باشگاه دانش‌پژوهان جوان» پرداختید؟

آبام: در سال‌های اول و دوم دانشگاه که بودم، همکاری‌های محدودی با کمیتهٔ المپیاد ریاضی داشتم. ولی کم‌کم از آن‌ها فاصله گرفتم و بیشتر به کار خودم (رایانه) می‌پرداختم. در سال ۱۳۸۱ آقای دکتر **قدسی** (دبیر وقت کمیتهٔ ملی المپیاد کامپیوتر) به من پیشنهاد همکاری با کمیتهٔ رایانه را داد که مصادف شد با رفتن من به خارج از کشور و در نتیجه چند ماه بیشتر نتوانستم با این کمیته همکاری کنم. بعد از بازگشت من به ایران، دوباره به من پیشنهاد شد که به‌طور گسترده‌تری با کمیته همکاری کنم و بعد از رفتن آقای دکتر قدسی برای فرصت مطالعاتی به خارج از کشور، از مهرماه ۱۳۹۰ من به‌عنوان رئیس کمیته انتخاب شدم.

رشد برهان: برای آشنایی خوانندگان مجلهٔ ما که دانش‌آموزان دبیرستان هستند، لطفاً بفرمایید، چه تفاوت‌ها و شباهت‌هایی بین المپیادهای ریاضی و رایانه وجود دارد؟

آبام: واقعیت این است که در کشورهای دیگر تفاوت‌ها زیاد است، اما در کشور ما، خب شباهت‌هایی وجود دارد. در ایران چون تعداد شرکت‌کننده زیاد است، لذا در مرحلهٔ اول آزمونی با سؤالات پنج گزینه‌ای برگزار می‌شود که بیشتر از نیمی از سؤالات آن از ترکیبیات است و بقیهٔ سؤالات آن در ارتباط با خلاقیت و حتی معماهای مرتبط با آن است. مبحث ترکیبیات در واقع شروع یافتن الگوریتم‌هاست. کسی که شهود ترکیبیاتی دارد، یعنی به حالت‌بندی دست می‌زند و چیزی را جست‌وجو می‌کند، در الگوریتم‌ها هم می‌تواند چنین کاری را انجام دهد. اما بچه‌های المپیاد رایانه فقط باید مقدماتی از ترکیبیات و نظریهٔ اعداد (در حد آشنایی با مفاهیم اولیه، مانند بخش‌پذیری، اعداد اول و...) را بدانند؛ به‌خصوص برای شرکت در آزمون مرحلهٔ اول.

رشد برهان: در آزمون مرحلهٔ اول چند نفر شرکت‌کننده دارید؟

آبام: سال قبل ۱۲ هزار نفر بودند و امسال ۱۰ هزار نفر.

رشد برهان: چند نفر را برای مرحلهٔ دوم پذیرش می‌کنید؟

آبـام: در آزمون مرحلهٔ دوم که در اردیبهشــت‌ماه برگــزار می‌کنیم، حدود هزار تا هــزار و پانصد نفر را انتخــاب می‌کنیم. در این آزمون هــم باز تاحدودی ســؤالات ترکیبیات داریــم، ولی بحــث الگوریتم را تقویت می‌کنیم.

رشد برهان: خب با توجــه به اینکه دانش‌آموزان در دبیرســتان خیلی با بحث الگوریتم آشــنایی پیدا نمی‌کنند، چه‌طور می‌توانند اطلاعاتی در این زمینه پیدا به‌دســت آورند؟ آیا کتابی یــا متنی را به آن‌ها معرفی می‌کنید؟

آبام: ما ســایتی داریم به‌نــام «opedia.ir» که یک ســایت آموزش عمومی است و توســط کمیتهٔ ملی المپیاد رایانه طراحی شــده اســت. همــهٔ اطلاعات مربوط بــه المپیاد رایانه و منابعــی که دانش‌آموزان بایــد به آنجا مراجعه کنند و ســؤالات مرحلهٔ اول با راه‌حــل آن‌هــا و مطالب دیگری در این ســایت قرار داده شــده‌اند. در کنار این ســایت، ســایت دیگری هم داریم کــه در آنجا بچه‌هــا می‌توانند به آموزش یکدیگر کمک کنند، برای هم ســؤال طرح کنند، به راه‌حل‌های یکدیگر رأی بدهند و...

رشد برهان: آیــا بچه‌هــا باید با ســخت‌افزار هم آشنایی داشته باشند؟

آبـام: نــه اصلاً نیــازی به آشــنایی با ســخت‌افزار رایانه ندارند و با نرم‌افــزار هم، فقط با بحث طراحی الگوریتــم و پایه‌هــای ریاضی آن ماننــد ترکیبیات مقدماتــی، نظریهٔ اعــداد مقدماتی و تئــوری گراف مقدماتی ســروکار دارند. بهترین روش یادگیری هم، روش حل مســئله اســت. یادم هست که وقتی برای المپیــاد ریاضی آماده می‌شــدیم، کتابــی بود به نام «المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف» (ترجمهٔ زنده‌یاد **پرویز شــهریاری**) که ما هر روز تقریباً ۱۰ مسئله از این کتاب حل می‌کردیم و برای هر مسئله حدود یک ســاعت یا بیشتر وقت می‌گذاشتیم. اصلاً هم به راه‌حل کتــاب مراجعه نمی‌کردیم. دفترچه‌ای داشــتم که هر ایدهٔ جدیدی که برای حل مســئله‌ها به ذهنم رســیده بــود و از آن اســتفاده کرده بودم، در آن دفترچه یادداشــت می‌کردم. بعد از مدتی این ایده‌ها ملکهٔ ذهنم می‌شــدند، به‌طــوری که در حل مســئله‌های دیگر از آن‌ها به‌طور خودکار اســتفاده می‌کردم.

رشد برهان: پس می‌توان گفت دانش‌آموزی که می‌خواهد المپیادی باشد، باید از مسئله حل کردن خسته نشود.

آبـام: بله مــا از مســئله حل کردن اصلاً خســته نمی‌شدیم و از آن لذت هم می‌بردیم.

رشد برهان: ایــن موضوع خیلی مهم اســت. آیا این لذت بردن ذاتی اســت یا قابل اکتســاب است؟ یعنی آیا می‌شــود کاری کرد کــه دانش‌آموز از حل مسئله لذت ببرد و این لذت را به او چشاند؟

آبام: تا حالا با چنین مســئله‌ای مواجه نشده‌ام که بخواهم لذت حل مسئله را به کسی بچشانم! اما فکر می‌کنم نحوهٔ تدریس در این امر مؤثر باشد. مثلاً من خودم از کلاس‌های معلمان المپیادم خیلی استفاده کردم و استادان آن کلاس‌ها در ایجاد انگیزه و لذت

برای شرکت در المپیاد رایانه، اصلاً نیازی به آشنایی با سخت‌افزار کامپیوتر نیست و با نرم‌افزار هم فقط با بحث طراحی الگوریتم و پایه‌های ریاضی آن سروکار داریم

همراه با اعضای تیم المپیاد رایانه ایران در کشور تایوان پس از دریافت مدال‌ها و اعلام نتایج (مرداد ۱۳۹۳)

روش من این بود که وقتی به کلاس می‌رفتم، سعی می‌کردم مسائلی را مطرح کنم که خودم قبلاً حل نکرده بودم و در نتیجه در فرایند حل مسئله با دانش‌آموزانم شریک می‌شوم

بردنم از ریاضیات خیلی مؤثر بودند. یادم هست که آقای دکتر ایردموسی، همان موقع ما را به کتابخانهٔ دانشگاه تهران برد و آنجا منابع خارجی را در اختیار ما گذاشت. این کارها در تشویق و علاقه‌مند شدن ما خیلی مؤثر بود.

رشد برهان: می‌توان گفت که اگر معلم خودش از حل مسئله لذت ببرد، می‌تواند این لذت را به دانش‌آموزش هم منتقل کند.

آبام: بله. روش خود من این بود که وقتی به کلاس می‌رفتم، سعی می‌کردم مسائلی را مطرح کنم که خودم قبلاً حل نکرده بودم و در نتیجه در فرایند حل مسئله با دانش‌آموزانم شریک می‌شدم و این کار برای من و آن‌ها هیجان داشت. اما وقتی شما مسئله‌ای را بارها حل کرده باشید و بخواهید همان را دوباره مطرح کنید، بدیهی است که از آن ممکن است احساس دلزدگی هم بکنید. در حالی‌که اگر مسئله را برای اولین‌بار مطرح کنید، می‌توانید هیجان و انرژی حاصل از حل آن را به دانش‌آموزانتان هم منتقل کنید. البته در کلاس‌های عادی به‌هر حال چاره‌ای نیست و باید برخی مباحث تکراری را مطرح کرد، ولی در کلاس‌های المپیاد انجام این کار آسان‌تر است.

رشد برهان: سؤالی به ذهنم رسید: آیا توانایی حل مسئله از شرکت در المپیادها به‌دست می‌آید؟ آیا این توانایی به کسانی که در رشته‌های ریاضی و رایانه هم ادامهٔ تحصیل ندهند، کمکی می‌کند؟

آبام: کارهایی که ما برای آمادگی شرکت در المپیاد انجام می‌دادیم، به ما یاد داد که چه‌طور به‌صورت سازمان‌یافته بیندیشیم، ایده بیابیم و مسئله‌ها را حل کنیم. این توانمندی می‌تواند به هر کسی در هر مرحله از آموزش هر رشته‌ای که باشند، کمک کند. بنای کار علمی محققانه باید در دورهٔ دانش‌آموزی گذاشته شود و بهترین‌جا برای این کار شرکت در المپیادهاست. من آثار این کار را همان‌طور که قبلاً اشاره کردم، در دورهٔ دکترا دیدم.

رشد برهان: سؤال دوم من هم در همین ارتباط است. الان وضعیت طوری شده است که وقتی معلم یک سؤال کمی تفکر برانگیز و غیرتکراری به دانش‌آموزان می‌دهد، فوراً جبهه می‌گیرند و می‌گویند: این سؤال‌ها المپیادی هستند، از این سؤال‌ها به ما ندهید و... .

آبام: بعضی وقت‌ها گفتن اینکه این مسئله، مسئلهٔ سختی است، تأثیر منفی دارد و می‌تواند باعث این‌گونه واکنش‌ها شود.

رشد برهان: البته دانش‌آموزان باید توجه داشته باشند که مسئله نباید حتماً حل شود، و اگر مسئله حل هم نشود، باز پرداختن به آن مفید است. این درست نیست که یا من ایده‌ای برای حل مسئله دارم، و یا ندارم که اگر ندارم، باید آن را کنار بگذارم! متأسفانه بسیاری از بچه‌ها این‌طور فکر می‌کنند.

آبام: از هر مسئله‌ای باید تجربه کسب کرد. یا باید از ایده‌های قبلی برای حل آن کمک گرفت و یا باید از آن ایده‌های جدید به‌وجود آورد.

رشد برهان: من سؤال دیگری داشتم: کدام‌یک از این دو را ترجیح می‌دهید: یک مسئلهٔ تشریحی چالش‌برانگیز که یک ساعت وقت برای حل آن داشته باشید، یا یک تست با یک دقیقه وقت؟

آبام: من اولی را ترجیح می‌دهم. اگرچه از حل مسئلهٔ تستی هم لذت می‌برم، اما طبیعت ذهن من طوری است که دوست دارد به آن فرصت داده شود و خیلی با اینکه بخواهد سریع محاسبات را انجام دهد، سازگاری ندارد.

رشد برهان: حالا برویم سراغ مسائلی که خودتان برای مرحلهٔ اول المپیاد رایانه مطرح می‌کنید؛ یعنی سؤال‌های پنج گزینه‌ای. در آنجا زمان مطرح است یا خیر؟

آبام: زمان مطرح است، ولی به‌طور متوسط برای هر سؤال پنج دقیقه وقت هست. برای تست چندگزینه‌ای زمان خیلی تعیین‌کننده نیست و ضرورتی هم ندارد که برای عبور از آزمون مرحلهٔ اول حتماً به هر ۳۰ سؤال پاسخ درست بدهند. آمارهای قبلی ما نشان می‌دهند، کسانی که تقریباً $\frac{1}{3}$ نمرهٔ کامل را آورده بودند، در آزمون مرحله اول قبول شده بودند. در مرحلهٔ دوم هم آزمون ما در دو روز برگزار می‌شود که روز اول به‌صورت تستی و روز دوم تشریحی است.

چون تصحیح اوراق بیش از هزار نفر کمی دشوار است، لذا حدوداً ورقه‌های تشریحی ۳۰۰ نفر اول آزمون تستی را تصحیح می‌کنیم و ۸۰ نفر اول این آزمون‌ها را انتخاب می‌کنیم. بعد یک آزمون برنامه‌ریزی رایانه از آن‌ها می‌گیریم و ۴۰ نفر نخست را برای اردوی تابستانی گزینش می‌کنیم. در پایان دوره، هشت نفر اول مدال طلا، از نه تا شانزده نفر بعد مدال نقره و بقیه مدال برنز می‌گیرند. آن هشت نفر از مزایای برگزیدگان المپیاد برخوردار می‌شوند، ولی از بین آن‌ها با آزمون‌های دیگر، چهار نفر اعضای اصلی تیم المپیاد رایانهٔ ایران انتخاب می‌شوند. آن‌ها در دوره‌های آمادگی شرکت می‌کنند تا به آزمون جهانی اعزام شوند. در حال حاضر این گروه برای شرکت در بیست‌وهفتمین المپیاد جهانی رایانه که در کشور قزاقستان برگزار می‌شود مشغول آموزش هستند. کشور ما از سومین دوره در این رقابت‌ها شرکت کرده است و میزبان رقابت‌های سال ۲۰۱۷ نیز هست.

در کنار اعضای تیم المپیاد رایانهٔ ایران اعزامی به المپیاد بین‌المللی ریاضی در کشور قزاقستان (باشگاه دانش‌پژوهان جوان ــ تیرماه ۱۳۹۴)

کشور ما از سومین دورهٔ المپیاد رایانه، در این المپیاد شرکت کرده است و میزبان رقابت‌های سال ۲۰۱۷ است

رشد برهان: از اینکه وقتتان را در اختیار ما قرار دادید، از شما سپاس‌گزاریم و برای شما و اعضای تیم المپیاد رایانهٔ کشور عزیزمان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

۲ پرسش‌های پیکارجو!

در بسط دوجمله‌ای $(\sqrt[21]{5}+\sqrt[20]{5})^{1395}$ چند جملهٔ گویا وجود دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

احسان یارمحمدی

جادوی مُقَرنَس

- **نام فیلم:** جادوی مُقَرنَس[1]
- **طراحان و نویسندگان:** ایوونه دولد ـ سمپلونیوس[2]، سیلویا هارمسن[3]، سوزان کرومکرِ[4] و میشائیل وینکلرِ[5]
- تولید شده تحت نظارت و حمایت دانشگاه هِیدِلبِرگ[6]
- **راویان:** سَرجون کَرَم[7] (عربی)، میشائیل شِیلِز[8] (انگلیسی)، ژان ـ میشل رابِر[9] (آلمانی)، صفی‌الدین نجم‌آبادی (فارسی) و گولای تولاسُقلو[10] (ترکی)
- **سال تولید:** ۲۰۰۵
- **مترجم:** محمد باقری
- **تهیه و توزیع در ایران:** خانهٔ ریاضیات اصفهان

فیلم ویدیویی «جادوی مُقَرنَس» دربارهٔ گونه‌ای از نقش‌های هندسی که در بناهای تاریخی دورهٔ اسلامی که شامل خاورمیانه، شامل آفریقا و قسمتی از اروپا بوده است، سخن به‌میان می‌آورد. این فیلم می‌تواند برای علاقه‌مندان به هندسهٔ کاربردی که می‌خواهند نمونه‌های واقعی از کاربرد ریاضیات را در ساختمان‌سازی دورهٔ اسلامی در داخل کشور یا خارج از ایران ملاحظه

کنند و نیز دوستداران تاریخ ریاضیات و به‌ویژه کارها و دستاوردهای **غیاث‌الدین جمشید کاشانی**، ریاضی‌دان نامدار ایران، مفید باشد. ایران‌گردان می‌توانند نمونه‌هایی از مُقَرنَس‌ها را در «مسجد شیخ لطف‌الله» واقع در اصفهان، «کاخ عالی‌قاپو» در اصفهان، «تخت سلیمان» واقع در آذربایجان و زیارتگاه ایلخانی واقع در بسطام[۱۱] مشاهده کنند. این فیلم به این علت جادوی مُقَرنَس نامیده شده است که مُقَرنَس‌ها که در میانهٔ سدهٔ چهارم هجری پدیدار شده بودند، به صنعت ساختمان‌سازی سراسر جهان اسلام راه پیدا کردند و هنر و صنعت دورهٔ اسلامی را به رخ جهانیان کشیدند.

البته از آنجا که تماشای این ویدیو مستلزم آگاهی از برخی مطالب دربارهٔ مُقَرنَس است، بنابراین نخست پاره‌ای از آن‌ها را در پی می‌آوریم تا علاقه‌مندان به دیدن این فیلم، با درک بهتری به استقبال از آن بروند.

مقرنس نامی عربی است برای طاق‌های استالاستیک‌مانند، که عبارت‌اند از تزئینات معماری سه‌بعدی متشکل از اجزای حفره‌مانندی که در چندین لایه قرار می‌گیرند. مقرنس در حوالی قرن چهارم هجری در شمال‌شرقی ایران و تقریباً همزمان با آن، و ظاهراً به‌طور مستقل، در میانهٔ شمال آفریقا پدید آمد. از قرن پنجم هجری به این‌سو، مقرنس در سراسر جهان اسلام گسترش یافت (نقشهٔ ۱) و همانند نقش‌های گل و بته و کتیبه‌نویسی به‌صورت یکی از عناصر ویژهٔ معماری درآمد.

برای نمایش انواع گوناگون مقرنس نمونه‌های زیر در ویدیویی «جادوی مقرنس» نشان داده می‌شوند:

- قصر عباسیان (۶۲۱-۵۷۵ هـ.ق)، واقع در بغداد عراق
- کاپلاپالاتینا (۵۳۳)، واقع در پالرمو ایتالیا
- آرامگاه نورالدین (۵۴۸)، واقع در دمشق سوریه
- مسجد کلان (۵۲۰)، واقع در بخارا ازبکستان
- مسجد جمعه (قرن ششم هجری)، واقع در اصفهان ایران
- مدرسه قاراتای (۶۴۸)، واقع در قونیه ترکیه
- کاروان‌سرای سلطان‌خان (۶۲۶-۶۷۶)، واقع در آقسرای ترکیه
- مسجد جامع پیاله پاشا (۹۷۹)، واقع در استانبول ترکیه (طراحی شده توسط معمار زبردستی به‌نام «سنان» (۸۹۴-۹۹۴ هـ.ق)

مقرنس نامی عربی است برای طاق‌های اسکولاستیک‌مانند که عبارتند از تزئینات معماری سه‌بعدی متشکل از اجزای حفره‌مانندی که در چندین لایه قرار می‌گیرند

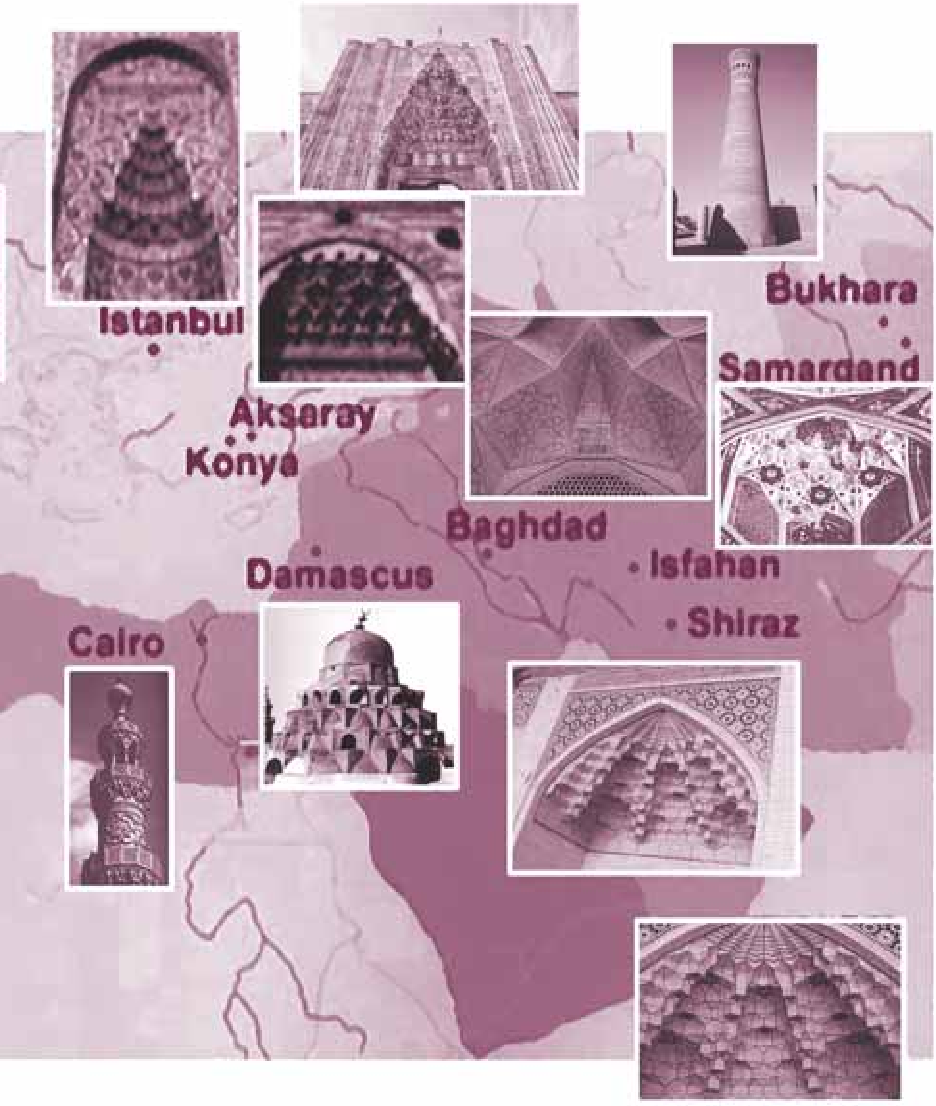
نقشهٔ ۱

- آرامگاه قایتبی (۸۷۸-۸۷۵)، واقع در قاهرهٔ مصر
- قرویین (۵۲۸)، واقع در فاس مراکش
- الحمراء، تالار دو خواهر (قرن ششم هجری)، واقع در غرناطه (گرانادا) اسپانیا
- قصر دارملولی (قرن سیزدهم هجری)، واقع در تونس
- آرامگاه شاه حمزه‌علی (قرن ششم)، واقع در شیراز ایران
- مدرسهٔ طلاکاری (قرن یازدهم)، واقع در سمرقند ازبکستان
- خانهٔ بروجردی‌ها (قرن سیزدهم)، واقع در کاشان ایران

غیاث‌الدین جمشید کاشانی (درگذشته به سال ۸۳۲ هجری) ریاضی‌دان عهد تیموری که از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و منجمان دورهٔ اسلامی است، در شهر کاشان ایران به‌دنیا آمد و مهم‌ترین آثار ریاضی خود را در شهر سمرقند پدید آورد. اثر عمدهٔ او، «مفتاح‌الحساب»، که به راستی دایرةالمعارفی از علوم ریاضی است، به پنج مقاله تقسیم شده است. قدیمی‌ترین نسخهٔ خطی آن، (نسخهٔ ۳۱۸۰/۱ در کتابخانهٔ ملی ملک ایران) به تاریخ ۸۳۰ هجری است؛ یعنی همان سالی که کاشانی نگارش این رساله را به پایان رساند.

کاشانی در مقالهٔ چهارم کتاب، دربارهٔ اندازه‌گیری‌ها که مفصل‌ترین مقالهٔ مفتاح‌الحساب است، برای محاسبهٔ مساحت شکل‌های گوناگون، از مثلث‌های ساده شروع می‌کند و در پایان به تقریب مساحت سطح مقرنس می‌رسد. قدیمی‌ترین تعریف مقرنس به این صورت از کاشانی است: «مقرنس سقفی است پلکانی با وجوه متعدد و با بام مسطح. هر وجه با وجه کناری‌اش زاویهٔ قائمه یا نیم‌قائمه یا مجموع این دو ترکیب دیگری از این دو می‌سازد. این وجه را می‌توان به‌صورت ایستاده

اجزای مقرنس عبارتند از خانه‌ها و اجزای میانی که سقف دو خانه مجاور را به‌هم متصل می‌کنند



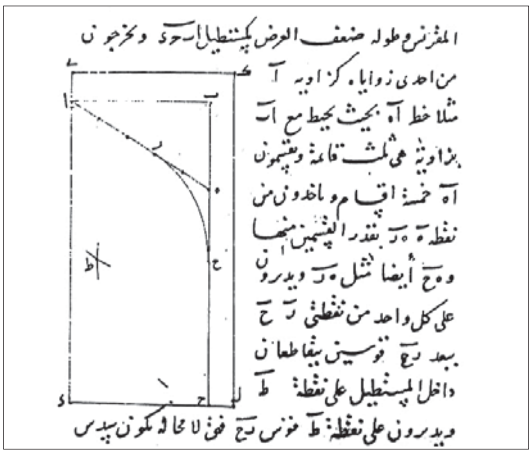
بر صفحه‌ای موازی با افق در نظر گرفت. بالای آن‌ها یا سطح صافی غیرموازی با سطح افق و یا دو سطح صاف یا خمیده قرار می‌گیرد که سقف آن‌ها را تشکیل می‌دهد. این دو وجه به همراه سقفشان یک **خانه** نامیده می‌شوند. خانه‌های مجاور که قاعده‌هایشان روی یک سطح مشترک موازی با افق باشند، یک **لایه** خوانده می‌شوند.»

اجزای مقرنس عبارت‌اند از خانه‌ها و اجزای میانی که سقف دو خانهٔ مجاور را به‌هم متصل می‌کنند. همان‌طور که کاشانی در رسالهٔ خود شرح می‌دهد، اجزای متداول مقرنس برپایهٔ شکل‌های هندسی ایجاد می‌شوند. به این معنی که تصویر مسطح یک جزء یا منظر آن از پایین، از شکل‌های سادهٔ هندسی تشکیل شده است: مربع، لوزی، نیم‌لوزی، بادام و مکمل آن نسبت به لوزی، دوپایهٔ کوچک، کوزه (هشت‌ضلعی مربعی) و مکمل آن نسبت به مربع، دوپایهٔ بزرگ (ذوالرجلین)، و جودانه‌ها (که فقط در لایهٔ بالایی مقرنس ظاهر می‌شوند).

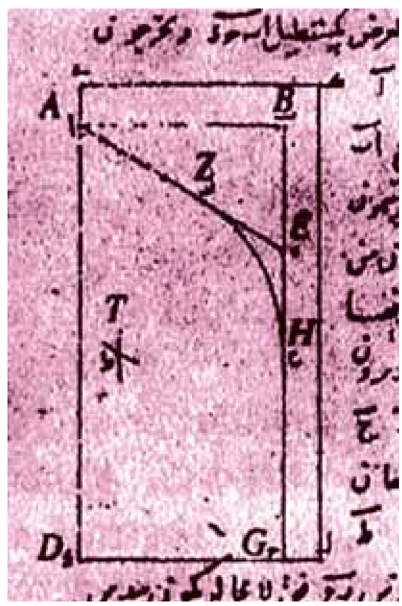
فصل آخر، «مساحی بناها و عمارت‌ها»، واقعاً برای کاربردهای عملی نوشته شده است. با وجود اینکه غالباً تصور می‌شود که کاشانی شیوهٔ ساخت مقرنس را شرح داده است، ولی در واقع چنین نیست. او از هندسه به‌عنوان ابزاری برای انجام محاسبات استفاده کرده است. در کنار مساحت و حجم اتاق‌ها، ازج‌ها و گنبدها، کاشانی شیوه‌ای را برای به‌دست آوردن تقریبی مساحت مقرنس‌ها ارائه می‌کند. این کار برای او امکان‌پذیر است، چون مقرنس، با اینکه یک ساختار معماری پیچیده است، از اجزای هندسی نسبتاً ساده‌ای تشکیل شده است. این محاسبات برای ارزش‌گذاری بنا یا محاسبهٔ مصالح و دستمزد هنرمندان و معمار، همان‌طور که در قرن یازدهم (عهد صفوی) در ایران متداول بوده، مفید است.

قوس مقرنس

برای اینکه بتوان اجزای مقرنس را به‌هم وصل کرد، آن‌ها را باید طوری ساخت که منحنی‌های کناری‌شان یکسان باشند. این منحنی را کاشانی با عنوان «روش بنایان» شرح داده است که نشان می‌دهد از تجارب عملی گرفته شده است. بناها یک مستطیل می‌کشند که عرض آن (AB) واحد مقرنس را تشکیل می‌دهد و طول آن (BG) دو برابر عرض آن است؛ مانند مستطیل ABGD (شکل ۱). یک زاویهٔ ۳۰ درجه و نسبت‌های دقیق ترسیم می‌شوند. این طرح یک نمونه برای محاسبهٔ «ضریب» توسط کاشانی است. ضریب برای محاسبهٔ تقریبی سطح مقرنس به‌کار می‌رود. برخلاف دیگر ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، او محاسبات را در دستگاه شصت‌گانی انجام می‌دهد و نتیجه را به اعداد


المقرنس و طوله ضعف العرض کمستطیل ا ب ج د و نخرج من
احدی زوایاه کزاویة آ
مثلا خط آ ه بحیث یحیط مع آ ب
بزاویة هی ثلث قائمة و یقسمون
آ ه خمسة اقسام و یاخذون من
نقطة ه ز بقدر الخمسین منها
و ه ح ایضا مثل ه ز و یدیرون
علی کل واحد من نقطتی ز ح
ببعد ز ح قوسین یتقاطعان
داخل المستطیل علی نقطة ط
و یدیرون علی نقطة ط قوس ز ح

توضیح: از آنجا که تمام تصاویر از متن فیلم گرفته شده‌اند، اسامی مکان‌ها به زبان اصلی درج شده‌اند.



شکل ۱ــ خم توصیف‌شده توسط کاشانی در مفتاح‌الحساب (کتابخانهٔ ملک، نسخهٔ ۳۱۸۰/۱). حروف لاتین اضافه شده‌اند.

ده‌دهی برمی‌گرداند. داشتن هر دو مقدار می‌تواند از بروز اشتباه هنگام رونویسی از رساله جلوگیری کند.

در اینجا ما فقط طرح کلی محاسبه را در مبنای ده ارائه می‌کنیم:

$AB = \text{مقرنس واحد} = ۱;$

$BG = ۲AB, \angle BAE = ۳۰^\circ;$

$AE = \frac{۲}{۳}\sqrt{۳}, AZ = \frac{۳}{۵}AE = \frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۳}\sqrt{۳} = \frac{۲}{۵}\sqrt{۳};$

$ZE = EH, ZT = HT = ZH;$

$ZT = ZE\sqrt{۳} = \frac{۲}{۵}AE \times \sqrt{۳} = \frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}\times\sqrt{۳} = \frac{۴}{۵}$

به مرکز T یک دایره با شعاع ZT رسم می‌کنیم. پارامتر خمش برای محاسبهٔ سقف هر لایه و به‌طور خاص مساحت اجزای میانی به‌کار می‌رود. یک خانه شامل دو وجه و سقف آن‌ها می‌شود. وجه‌ها مستطیل و سقف‌ها مثلث‌هایی با ضلع منحنی هستند. بنابراین ضریب به‌عنوان ارتفاع مستطیل به علاوهٔ نصف ارتفاع مثلث با ضلع منحنی در نظر گرفته می‌شود. اگر این ضریب را در پایهٔ یک خانه ضرب کنیم، سطح آن خانه محاسبه می‌شود.

* پی‌نوشت‌ها

1. Magic of Muqarnes
در فرهنگ لغت «عمید» دربارهٔ واژه مُقَرنَس چنین آمده است: «سقف یا گنبد گچبری شده، عمارت عالی که در سقف آن نقش و نگار برجسته یا پله‌پله از گچ درست کرده باشند، کنگره‌دار، قرناس‌دار، قرنیزدار.»
2. Yvonne Dold-Samplonius
3. Silvia Harmsen
4. Susanne Kromker
5. Michael Winckler
6. University of Heidelberg
7. Sarjoun Karam
8. Michael Shiels
9. Jean - Michel Raber
10. Gulay Tulasoglu
۱۱. بسطام شهری در شهرستان بسطام استان سمنان در ۶ کیلومتری شمال‌شرق شاهرود است.

معرفی کتاب

احسان یارمحمدی

هشترودی اندیشمند بی‌پروا

- **نام کتاب:** هشترودی اندیشمند بی‌پروا
- **مؤلف:** پرویز شهریاری
- **ناشر:** پژوهنده (چاپ نخست: ۱۳۸۴)

همان‌گونه که از عنوان کتاب هویداست، موضوع آن زندگی‌زنده‌یاد **محسن هشترودی** (۱۳۵۵-۱۲۸۶ هـ.ش)، ریاضی‌دان نامدار و اندیشمند بی‌پروای معاصر است. زنده‌یاد **پرویز شهریاری** (۱۳۹۱-۱۳۰۵) با اختصاص دادن این کتاب به هشترودی و اندیشه‌های او سعی بر این داشته است که دین خود را به آن استاد ارجمند ادا کند و آیندگان را نیز با اندیشه‌ها و رفتارهای هشترودی آشنا سازد. فهرست مطالب کتاب از این قرار است:

- **پیش‌گفتار**
- **انسانی که شور جوانی را تا آخرین روزهای زندگی خود حفظ کرده بود**
- **هشترودی اندیشمندی پرآوازه و ناشناخته**
- **هشترودی، اندیشمند بی‌پروا**
- **اندیشه‌هایی دربارهٔ دانش، صنعت و هنر آینده و کاربرد ریاضیات در آن‌ها**
- **نقد علمی و نقد هنری**
- **سایه**

در ادامه می‌کوشیم سطرهایی از این کتاب را به شما ریاضی‌آموزان تقدیم کنیم تا برای تهیه و مطالعهٔ کتاب پیش‌زمینه‌ای داشته باشید.

در پیش‌گفتار کتاب می‌خوانیم: «... استاد محسن هشترودی در ۲۲ دی‌ماه ۱۲۸۶ در تبریز به‌دنیا آمد و بعدازظهر روز سه‌شنبه ۱۳ شهریور ۱۳۵۵ از دنیا رفت. استاد، دبیرستان را در دارالفنون گذراند و در سال ۱۳۰۳ وارد دانشکده پزشکی شد، ولی به‌علت علاقه به ریاضیات یک سال بعد، پزشکی را رها کرد و به ریاضیات پرداخت. در سال ۱۹۳۷ میلادی به فرانسه رفت و در دانشگاه سوربون درجهٔ دکترای ریاضیات را گرفت. در سال ۱۳۳۶ خورشیدی ریاست دانشکدهٔ علوم را در دانشگاه تهران به‌عهده گرفت.

به‌یاد دارم یک‌بار در دورهٔ ریاست ایشان، دانشجویان اعتصاب کرده بودند. نیروهای انتظامی به دانشگاه یورش بردند و دانشجویان در دانشکده علوم پناه گرفتند. دکتر هشترودی دستور داد تمامی درها را ببستند و خود جلوی در اصلی دانشکدهٔ علوم ایستاد. وقتی مأمورین خواستند به دانشکده وارد شوند، دکتر هشترودی اجازه نداد و گفت این‌ها بچه‌های من هستند و من اجازه نمی‌دهم به آن‌ها آسیبی برسد ... و سرانجام وقتی اوضاع آرام شد، چند نفر چند نفر دانشجویان را به منزلشان روانه کردند.

در واقع، دکتر محسن هشترودی از خصلت‌های اخلاقی نیرومندی برخوردار بود و به‌ویژه به جوانان و دانشجویان همیشه و همه‌جا توجه داشت. در نخستین کنفرانس ریاضی کشور که در شیراز برگزار شده بود، ناظر سخنرانی استاد بودیم. سخنرانی او یکسره مربوط به جوانان و نگه‌داشتن حرمت آن‌ها بود. او وقتی از مربیان یاد می‌کرد، از اعتقاد خود دربارهٔ معلمان صحبت می‌کرد و می‌گفت: پیش از همه، باید به آموزگاران دبستان و دبیران دبیرستان توجه کرد، چرا که آن‌ها با نوجوانان و جوانان سروکار دارند که سرمایه‌های این مملکت‌اند. ... او معتقد بود، آموزگاران نقش اساسی در شکوفایی

استعدادها دارند و به‌همین مناسبت باید در تربیت آن‌ها دقت کرد. او می‌گفت، در یاد دادن ریاضیات، باید از راهی رفت که خود دانش‌آموز موضوع را کشف کند.

... زنده‌یاد **حســین غیور** که من او را می‌شناختم و ســال‌های تحصیل را با او در دانشــگاه تهران گذرانده‌ام، ایــن خاطــره را به‌عنوان **اولیــن ملاقات با پروفســور هشترودی** نوشته است که در این‌جا می‌خوانید: در سال ۱۳۲۶ هجری شمســی که در دانش‌سرای عالی تحصیل می‌کردم، در اولین ملاقات با پروفســور هشــترودی، این مسئله را که خود طرح کرده بودم و به‌علت عدم آشنایی با ریاضیات عالی، در حل آن کوشش بی‌فایده کردم، با استاد در میان گذاشتم. مسئله این بود: **خط راستی رسم کنید که در ســه دایره، ســه وتر به طول‌هــای برابر ایجاد کند**. استاد بدون اینکه قلم روی کاغذ ببرند، بعد از چند دقیقه قدم زدن و فکر کردن فرمودند، حل این مسئله به رسم مماس مشترک دوسهمی مربوط می‌شود، بنابراین با روش ترسیم هندسی [به یاری پرگار و خط‌کش] قابل حل نیســت. من همان شــب بعد از مطالعــه و دقت در مسئله، به حقیقت گفتهٔ استاد پی بردم و از سرعت انتقال و حدت ذهن ایشــان در شگفت ماندم. بعدها که افتخار محضر درس اســتاد به کرات نصیب من شد، دانستم که این پاسخ، تصادفی یا مسبوق به سابقه نبوده است.

... او در یکــی از کتاب‌های خود، انســان را به منزلهٔ کســی کــه در مرکز کره‌ای قرار گرفته اســت، مجســم می‌کند که فضای دور و بر او را، در داخل کره، دانسته‌های او مشخص می‌کند. سطح کره در بخش داخلی برای هر انســان معلوم و ســطح بیرونی آن مجهول است. **انسان** می‌کوشــد دانش و دانسته‌های خود را زیادتر کند. هرچه دانش آدمی بیشــتر شود، ســطح کره بیشتر و در نتیجه سطح بیرونی آن هم بیشتر می‌شود. به این ترتیب هرچه به دانش انســان بیشتر افزوده شــود، مجهول‌های او هم اضافه می‌شوند.

استاد هشترودی به ریاضیات کاربردی و فلسفهٔ ریاضی هم اهمیت می‌داد. خاطره‌ای از او نقل می‌کنم. روزی در جلســهٔ امتحان، در سال سوم ریاضیات، برای دانشجویی این پرســش را مطرح می‌کند: **پرده‌ای جلوی دری که بسته اســت، آویزان کرده‌ایم. لوله‌ای را که با فشار، آب از آن بیرون می‌آید، به‌سوی پرده می‌گیریم. اگر آب به پایین یا وسط و یا بالای پرده بخورد و درست در وسط پرده، لوله میزان شده باشد، منحنی حرکت پرده به چه صورتی درمی‌آید؟»**

فصل پنجم کتاب «هشــترودی اندیشمند بی‌پروا» حاوی متن سخنرانی چاپ نشده‌ای از استاد فقید دکتر محسن هشترودی است که نه‌تنها وسعت ذهن و اندیشهٔ این مرد بزرگ را نشــان می‌دهد، بلکــه به خواننده هم چنین وسعت تخیلی را القا می‌کند و اندیشهٔ او را به پرواز در فراخنای آینده فرامی‌خواند. در اینجا از ارائهٔ متن این سخنرانی خودداری می‌کنیم و مخاطبان را به مطالعهٔ آن در کتاب دعوت می‌کنیم.

فصل هفتم کتاب شامل شعری با عنوان «سایه» از زنده‌یاد هشترودی است که بیانگر روحیهٔ هنری و عاطفی این استاد فقید است.

در پایان امیدواریم که به مطالعهٔ این کتاب به‌صورت جامــع و مانع بپردازید تا با گوشــه‌ای از زندگی و افکار برجستهٔ زنده‌یاد پروفسور محسن هشترودی آشنا شوید.

هرچه به دانش انسان بیشتر افزوده شود، مجهول‌های او هم اضافه می‌شوند

چند معمای منطقی
(ادامهٔ ماجرای محکومین به جام زهر یا شربت!)

در شمارهٔ ویژهٔ مهرماه دیدید که در سرزمینی دور، پادشاه فر
شــود تا شــاید نجات یابند. روش هم این بود که برای آنان ســینی
شربت وجود داشت و ظاهر آن‌ها کاملاً شبیه هم بود. محکوم باید
از مرگ نجات می‌یافت. روی جام‌ها هم جملاتی نوشته شده بودند
محکومین کمک می‌کرد تا جام شربت را پیدا کنند و معمای ما برا
شربت، کدام جام است.
معمــای پنــج محکوم اول را در شــمارهٔ مهرماه و معمای پنج
دوازدهم مانده‌اند. این دو معمای آخر و به‌خصوص معمای محکوم
دعوت می‌کنیم.

معمای محکوم یازدهم

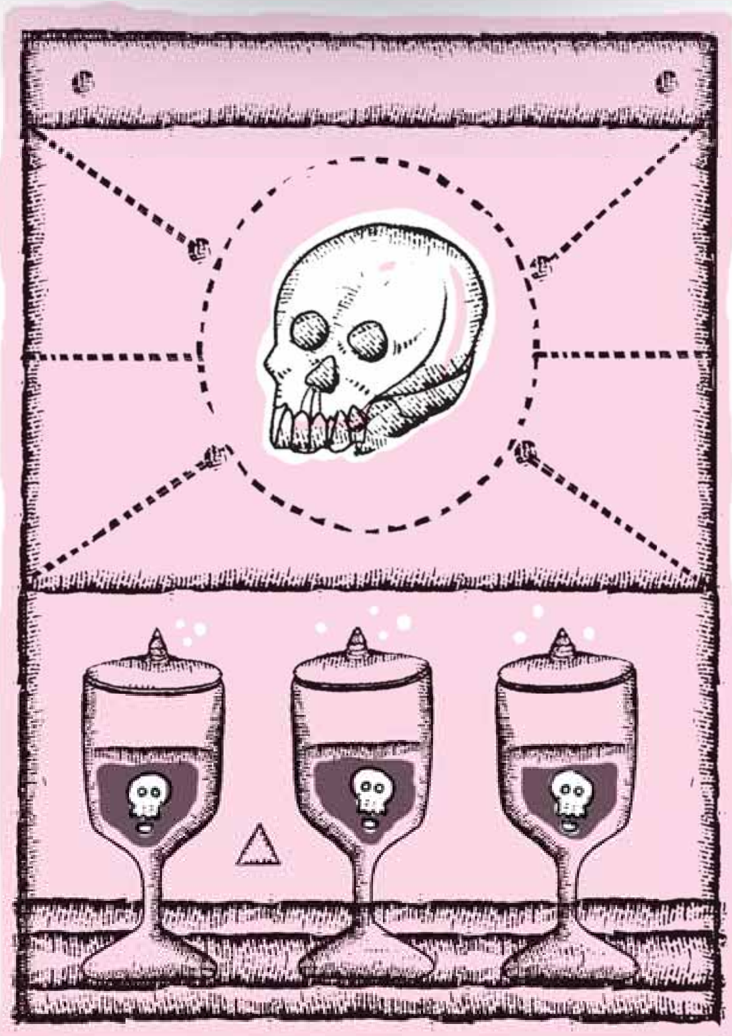
برای محکوم یازدهم هم سه جام آوردند. جام‌ها سرپوشیده و رنگی
در یکی از سه جام شربت و در دیگری زهر وجود دارد و دیگری خالی
بیابد و بنوشد. روی جام اول نوشته شده بود: جام سوم خالی است، ر
ســوم نوشــته بود: این جام خالی است. قاضی گفت: «نوشتهٔ روی جا
روی جام خالی هم دروغ یا راست است.
محکوم باید کدام جام را بنوشد؟

و سرانجام محکوم دوازدهم!

در مورد محکوم دوازدهم حرف و حدیث بسیار بود و عدهٔ زیادی م
بود که معمای او بسیار دشوارتر از بقیه باشد تا نتواند به‌راحتی جام شر
جام دربستهٔ رنگی آوردند! و به او گفتند که فقط یک جام حاوی شربت
یا شامل زهرند و یا خالی هستند. نوشته‌های روی همهٔ جام‌های زهر،
خالی می‌توانند درست یا نادرست باشند. نوشته‌های روی جام‌ها به‌ترت

جام اول: شربت در جامی با شمارهٔ فرد است.
جام دوم: این جام خالی است.
جام سوم: نوشتهٔ روی جام پنجم درست است و یا اینکه نوشتهٔ ج
جام چهارم: نوشتهٔ روی جام اول نادرست است.
جام پنجم: از نوشتهٔ جام دوم یا نوشتهٔ جام چهارم، یکی درست ا
جام ششم: نوشتهٔ روی جام سوم نادرست است.
جام هفتم: شربت در جام اول نیست.
جام هشتم: این جام حاوی زهر است و جام نهم خالی است.
جام نهم: این جام حاوی زهر است و نوشتهٔ جام ششم نادرست ا

محکوم با مشاهدهٔ این وضع فریاد زد: «این عادلانه نیست!»
و قاضی با لبخند گفت: «خودم هم می‌دانم!»
محکوم گفت: «لااقل به من بگویید: آیا جام هشتم خالی است یا
و قاضی به او در این‌باره توضیح کافی داد و سپس گفت: «حالا دی
محکوم باید کدام جام را سر بکشد؟!



رمان داد که به دوازده تن از محکومین به اعدام، فرصتی دیگر داده
ی حاوی دو جام و بعضی اوقات سه جام می‌بردند که در جام‌ها زهر یا
یکی از جام‌ها را سر می‌کشید و البته اگر این جام حاوی شربت بود،
که قاضی در مورد درستی یا نادرستی آن‌ها اظهاراتی می‌کرد که به
ی شما این بود که بتوانید به‌جای محکومین تشخیص دهید که جام

محکوم دیگر را در شـمارهٔ آبان‌ماه دیدیـد. اما محکومین یازدهم و
آخر به‌راسـتی چالش‌برانگیز و جالب‌اند. پس شـما را به حل آن‌ها

ی بودند، به‌طوری که درون آن‌ها قابل رؤیت نبود. قاضی توضیح داد که
ی است. محکوم فقط و فقط در صورتی نجات می‌یابد که جام شربت را
وی جام دوم نوشته شده بود: در جام اول زهر وجود دارد و روی جام
م حاوی شربت درست است و نوشتهٔ روی جام زهر دروغ است. نوشتهٔ

عتقد بودند که شایستگی تخفیف را ندارد. بنابراین پادشاه دستور داده
بت را بیابد و با نوشیدن آن نجات پیدا کند. به دستور قاضی برای او نه
ت است و فقط نوشیدن آن می‌تواند او را نجات دهد و هشت‌تای دیگر
نادرست و نوشتهٔ روی جام شربت درست و نوشته‌های روی جام‌های
یب زیر بودند:

جام هفتم نادرست است.

ست.

ست.

نه؟»
یگر می‌توانی جام شربت را پیدا کنی و نجات بیابی.»

۳ پرسش‌های پیکارجو!

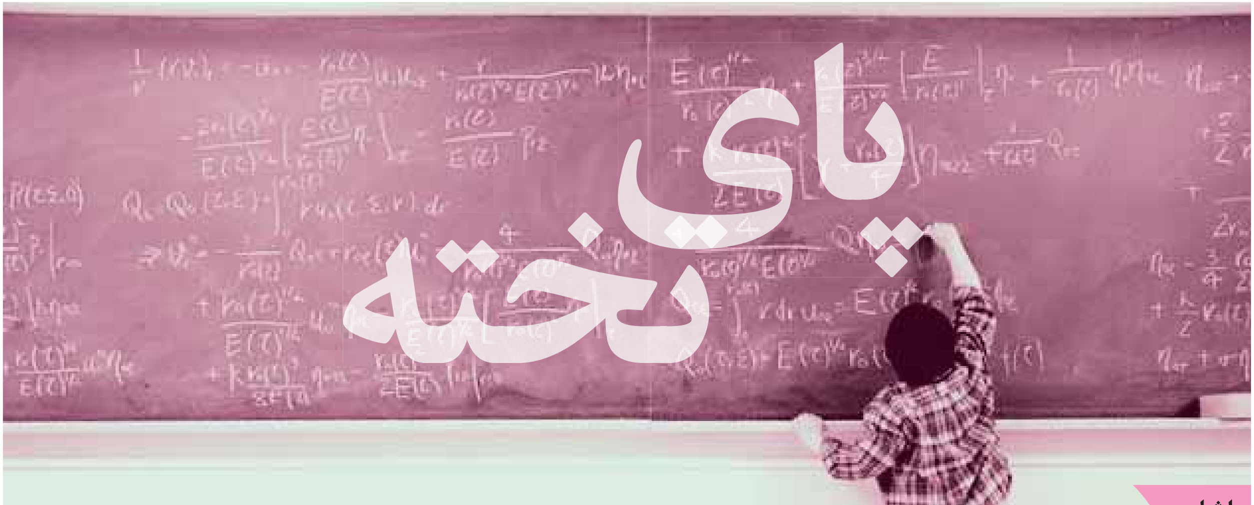
اختـلاف اندازه‌های زوایـای داخلی دو چندضلعی منتظم، 9° اسـت. اختلاف تعداد قطرهای آن‌ها، حداقل چندتاست؟

الف) **۲۰** ب) **۱۵** ج) **۵۷** د) **۵۷۰** هـ) **۳۷۰**

آموزشی

دکتر محرم نژاد ایردموسی

پای تخته



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۱۵۱. اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax+b+۱=۰$ طبیعی باشند، ثابت کنید $a^۲+b^۲$ عددی مرکب است.

۱۵۲. همهٔ جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$$m^۲-۳m+۱=n^۲+n-۱$$

۱۵۳. ضرایب تابع $p(x)=ax^۲+bx+c$ اعدادی حقیقی هستند و مقادیر $p(۰)$، $p(۱)$ و $p(-۱)$ صحیح‌اند. ثابت کنید $p(n)$ به ازای همهٔ مقادیر صحیح n صحیح است.

۱۵۴. $p(x)$ یک چندجمله‌ای است، به‌طوری‌که: $p(x^۲+۱)=x^۴+۴x^۲$. مطلوب است: $p(x^۲-۱)$.

۱۵۵. a، b، c و d اعدادی طبیعی هستند، به‌طوری‌که: $a+b=c+d$ و $a^۳+b^۳=c^۳+d^۳$. ثابت کنید دو تا از این اعداد با هم برابر هستند.

۱۵۶. با فرض $n > r > ۰$ ثابت کنید:

$$\binom{n}{r}^۲ > \binom{n}{r+۱}\binom{n}{r-۱}$$

۱۵۷. با فرض $a < b$ ثابت کنید:

$$\binom{a}{۲}+\binom{b}{۲} \geq \binom{a+۱}{۲}+\binom{b-۱}{۲}$$

۱۵۸. سیزده نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض‌اند. ثابت کنید چهار نقطه در میان آن‌ها وجود دارند که مرکز ثقل این چهار نقطه مختصاتی صحیح دارد (مختصات مرکز ثقل k نقطه برابر است با میانگین مختصات آن k نقطه).

۱۵۹. اعداد ۱ تا n روی تختهٔ سیاه نوشته شده‌اند. می‌خواهیم برای این اعداد علامت مثبت یا منفی بگذاریم، به‌طوری‌که مجموع اعداد حاصل صفر شود. به ازای چه مقادیری از n این کار امکان‌پذیر است؟

۱۶۰. ثابت کنید تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد مانند n، فرد است، اگر و تنها اگر n مربع کامل باشد.

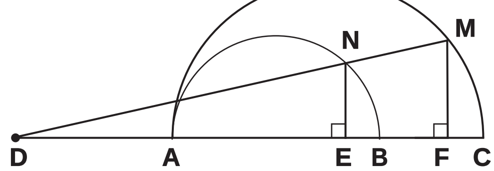
■ بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۱۱. دو نیم‌دایره به قطرهای AB و AC در نقطهٔ A مماس درونی‌اند. پاره‌خط‌های مساوی BE و CF را روی AC جدا می‌سازیم و عمودهای EN و FM را در این نقاط بر AC اخراج می‌کنیم تا نیم‌دایره‌ها را در N و M قطع کنند. اگر امتدادهای AC و MN یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند، ثابت کنید:

الف) AE*AF=AD^۲

ب) NE*MF=AD*BE

(طراح مسئله: هوشنگ شرقی، دبیر ریاضی و عضو هیئت تحریریه)



از قضیهٔ تالس در مثلث DMF داریم:

$$\frac{DE}{DF}=\frac{NE}{MF}\Rightarrow\frac{AD+AE}{AD+AF}=\frac{NE}{MF}$$
$$\Rightarrow\left(\frac{AD+AE}{AD+AF}\right)^2=\frac{NE^2}{MF^2}\qquad(*)$$

در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ANB و AMC (زوایای ANB و AMC محاطی رو به قطر و 90° هستند) داریم: $NE^2=AE.BE$ و $MF^2=AF.FC$. بنابراین با جایگزینی در رابطهٔ (*) خواهیم داشت:

$$\frac{AD^2+AE^2+2AD.AE}{AD^2+AF^2+2AD.AF}=\frac{AE.BE}{AF.FC}=\frac{AE}{AF}$$
$$\Rightarrow(AD^2+AE^2+2AD.AE)AF$$
$$=(AD^2+AF^2+2AD.AF).AE$$
$$\Rightarrow AD^2.AF+AE^2.AF=AD^2.AE+AF^2.AE$$
$$\Rightarrow AD^2(AF-AE)=AE.AF(AF-AE)$$
$$\Rightarrow AD^2=AE.AF$$

برای قسمت دوم می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}NE^2=AE.BE\\ MF^2=AF.FC\end{array}\right\}\Rightarrow NE^2.MF^2=(AE.AF).(BE.FC)$$
$$\Rightarrow NE^2.MF^2=AD^2.BE^2\Rightarrow NE.MF=AD.BE$$

۱۱۲. یک مربع را داخل یک مربع دیگر انداخته‌ایم. ثابت کنید اگر رئوس متناظر این دو مربع را به‌هم وصل کنیم، از چهار ناحیهٔ حاصل، مجموع مساحت‌های دو ناحیه با مجموع مساحت‌های دو ناحیهٔ دیگر برابر است (طراح مسئله: نفیسه آغویی، دانش‌آموز مرکز فرزانگان چهاردانگه).

این مسئله در شماره‌های قبل (مسئلهٔ ۹۲) حل شده است.

۱۱۳. چهار نفر ماهی‌گیر روی هم ۱۱ ماهی صید کردند، به‌طوری که هر کدام حداقل یک ماهی صید کردند. درستی جملات زیر را بررسی کنید:

۱. ماهی‌گیری وجود دارد که دقیقاً ۲ ماهی صید کرده است.

۲. ماهی‌گیری وجود دارد که دقیقاً ۳ ماهی صید کرده است.

۳. حداقل یک ماهی‌گیر هست که کمتر از ۳ ماهی صید کرده است.

۴. حداقل یک ماهی‌گیر هست که بیشتر از ۳ ماهی صید کرده است.

۵. حداقل ۲ ماهی‌گیر هستند که بیشتر از ۱ ماهی صید کرده‌اند.

(۱) لزوماً درست نیست. برای مثال ممکن است تعداد ماهی‌های صید شده ۱، ۱، ۱ و ۸ باشد.

(۲) لزوماً درست نیست. همان مثال قسمت قبل را در نظر بگیرید.

(۳) درست است. اگر چنین نباشد، یعنی هر کدام از آن‌ها حداقل سه ماهی صید کرده باشند، آن‌گاه حداقل ۱۲ ماهی باید صید شده باشد که چنین نیست.

(۴) لزوماً صحیح نیست. برای مثال ممکن است تعداد ماهی‌های صید شده ۲، ۳، ۳، ۳ باشد.

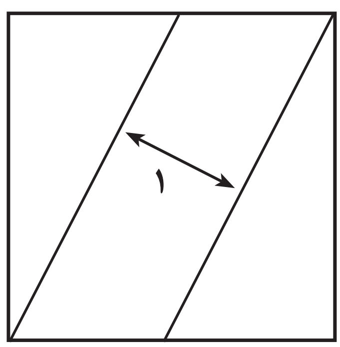
(۵) لزوماً صحیح نیست. همان مثال قسمت (۱) را در نظر بگیرید.

۱۱۴. در یک چایخانه سنتی چهار نوع کیک تهیه می‌شود. پنج نفر از دوستانم دیروز به آنجا رفتند و هر کدام دو کیک متفاوت برای خود سفارش دادند. مبالغی که آن‌ها پرداخت کردند عبارت بود از: ۶، ۹، ۱۱، ۱۲ و ۱۵ هزار تومان. امروز من به آنجا خواهم رفت و از هر نوع کیک یک عدد سفارش خواهم داد. چه‌قدر باید بپردازم؟

اگر قیمت کیک‌ها را $a \le b \le c \le d$ فرض کنیم، داریم:
$a+b \le a+c \le a+d,\ b+c \le b+d \le c+d.$
چون مبالغ پرداختی متفاوت است، پس سفارش‌ها هم دوبه‌دو متفاوت خواهند بود. از طرف دیگر: $\binom{۴}{۲} = ۶$.
پس دو نوع کیک هستند که با هم سفارش داده نشده‌اند.

فرض کنید قیمت این دو نوع کیک با هم برابر و x باشد. در نتیجه: $۳(a+b+c+d)=۵۳+x$. با در نظر گرفتن شش حالت متفاوت برای x و حل معادلات نتیجه خواهد شد: $x=۱۰$ و $(a,b,c,d)=(۲,۴,۷,۸)$.

۱۱۵. مطابق شکل مربعی را با کشیدن دو خط موازی که فاصله‌شان یک متر است، به سه ناحیه با مساحت یکسان تقسیم کرده‌ایم. مساحت مربع را بیابید.



اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم. ضلع افقی دو مثلث کناری برابر $\frac{۲a}{۳}$ خواهد شد. با در نظر گرفتن مساحت متوازی‌الاضلاع داریم:

$$\frac{a^۲}{۳} = ۱ \times \sqrt{a^۲ + \frac{۴}{۹}a^۲}$$

در نتیجه: $a = \sqrt{۱۳}$.

۱۱۶. عمل * روی اعداد صحیح به‌گونه‌ای تعریف شده است که خاصیت جابه‌جایی و شرکت‌پذیری دارد. همچنین، می‌دانیم برای هر $a \in \mathbb{Z}$، $a*۰=a$ و برای هر دو عدد صحیح a و b داریم: $a*(b+۱)=(a*b)+(۱-a)$.

الف) برای هر $a \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $a*۱=۱$.

ب) حاصل $(-۳)*(-۴)$ چه عددی است؟

ج) برای هر $a \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $۴*a=۳a-۴$.

د) برای هر $a \in \mathbb{Z}$ و هر $b \in \mathbb{N}$ ثابت کنید:
$a*b=a+b-ab$

(الف)
$$a*۱ = a*(۰+۱) = a*۰+(۱-a) = a+۱-a = ۱$$
(ب)
$$(-۴)*(-۳) = (-۴)*(۳*۳) = ((-۴)*۳)*۳ = ۱۱*۳ = -۱۹$$

البته از قسمت (د) استفاده کردیم. پس کافی است (د) را ثابت کنیم تا (ج) نتیجه شود. (د) به روش استقرا روی b، حکم را ثابت می‌کنیم. برای $b=۱$ حکم ثابت شده است (قسمت (الف)). فرض کنید حکم برای $b=k$ صحیح باشد. در نتیجه:

$$a*(k+۱) = a*k+(۱-a) = a+k-ak+۱-a$$
$$= a+(k+۱)-a.(k+۱)$$

پس حکم برای $b=k+۱$ نیز اثبات شد.

۱۱۷. تصاعدی حسابی با چهار جمله پیدا کنید که همهٔ جملاتش عدد اول باشند و بین تمام چنین تصاعدهایی کمترین مجموع جملات را داشته باشد.

اگر $d \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا ۲، آن‌گاه $۲d \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا ۲ و در نتیجه، a، $a+d$ و $a+۲d$ به پیمانهٔ ۳، باقی‌مانده‌های متفاوت خواهند داشت. بنابراین یکی از آن‌ها مضرب سه است. پس $a=۳$. اما در این حالت $a+۳d$ نیز مضرب سه است که نشان می‌دهد اول نیست. پس d باید مضرب ۳ باشد. از طرف دیگر d حتماً زوج است، بنابراین d مضرب ۶ است. کمترین مقدار d برابر ۶ و کمترین مقدار مجموع چهار جمله برابر است با: ۲۳+۱۷+۱۱+۵؛ یعنی ۵۶. چون جمله اول نمی‌تواند ۳ باشد.

۱۱۸. آقای نوبخت ۴ فرزند دارد که یکی از آن‌ها (علی)، سنی بین ۱۳ تا ۱۹ سال دارد و

حاصل‌ضرب سن فرزندانش ۱۸۴۸ است. سن علی را پیدا کنید.

با تجزیهٔ ۱۸۴۸ به عامل‌های اول داریم:

$۱۸۴۸=۲^{۳}\times۳\times۷\times۱۱$

تنها مقسوم‌علیهی از ۱۸۴۸ که بین ۱۳ و ۱۹ قرار دارد، عدد ۷×۲ است. پس سن علی برابر است با ۱۴.

۱۱۹. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که ثلث و سه برابرش هم صحیح است؟

هر عدد طبیعی به‌صورت $n=۳k$ در شرایط مسئله صدق می‌کند. پس بی‌شمار عدد طبیعی با شرایط مذکور وجود دارد.

۱۲۰. هواپیمایی با سرعت ثابت ۸۱۰ کیلومتر بر ساعت از شهر x به شهر y می‌رود و این مسیر را ظرف ۴ ساعت طی می‌کند؛ اما هنگام بازگشت، این مسیر را در ۵ ساعت طی می‌کند. اگر سرعت باد از سمت x به y را ثابت فرض کنیم، سرعت باد را به‌دست آورید.

اگر سرعت هواپیما و سرعت باد را $v_۱$ و $v_۲$ فرض کنیم، داریم: $v_۱+v_۲=۸۱۰$ و $v_۱-v_۲=\frac{۸۱۰\times۴}{۵}$. در نتیجه $v_۲=\frac{۱}{۲}(۸۱۰-۶۴۸)$. پس سرعت باد برابر است با ۸۱ کیلومتر بر ساعت.

۱۲۱. ثابت کنید معادلهٔ $۱=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{d}+\frac{۱}{e}+\frac{۱}{f}$ در مجموعه اعداد طبیعی فرد، جواب ندارد.

(برهان خلف) فرض کنید معادله جواب دارد. دو طرف تساوی را در abcdef ضرب می‌کنیم. طرف اول، حاصل جمع ۶ عدد فرد و در نتیجه زوج است، در حالی‌که طرف دوم abcdef فرد است (تناقض). پس معادله در مجموعه اعداد طبیعی فرد جواب ندارد.

۱۲۲. آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را پشت‌سرهم طوری چید که تعداد عددهای میان ۱ و ۲، میان ۲ و ۳، ...، و میان ۸ و ۹، عددی فرد باشد؟

(برهان خلف) فرض کنید چنین ترتیبی وجود دارد. با استقرا می‌توان ثابت کرد که در چنین حالتی، باید تعداد اعداد بین هر دو عدد i و j نیز فرد باشد. با استقرا روی $k=i-j$ حکم را ثابت می‌کنیم. با فرض $i<j$، اگر: $i-j=۱=k$ حکم برقرار است. فرض کنید تعداد اعداد بین i و $i+m$ فرد باشد. حال دو عدد i و $i+m+۱$ را در نظر بگیرید. دو حالت برای $i+m$ وجود دارد:

الف) $i+m$ بین دو عدد i و $i+m+۱$ قرار دارد: تعداد اعداد بین $i+m$ و $i+m+۱$ فرد است. همچنین تعداد اعداد بین i و $i+m$ هم فرد است. در نتیجه تعداد اعداد بین i و $i+m+۱$ نیز فرد است.

ب) $i+m$ بین دو عدد i و $i+m+۱$ نیست: به طریق مشابه حکم نتیجه می‌شود. پس باید بین هر دو عدد i و j، تعداد اعداد فرد باشد که تناقض است.

۱۲۳. ثابت کنید عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری که جملات دنبالهٔ حسابی $a+b, a+۲b, ..., a+nb$ همگی مرکب باشند. a و b دو عدد طبیعی ثابت‌اند.

متأسفانه در صورت این مسئله، اشتباهی صورت گرفته بود که به این صورت اصلاح می‌شود: جملات دنبالهٔ حسابی باید به‌صورت زیر باشند:

$na+b, (n-۱)a+۲b, (n-۲)a+۳b, ..., a+nb$

اکنون با این تغییر مسئله را خودتان حل کنید و در شماره‌های آینده حل آن را در همین قسمت ببینید.

۱۲۴. a و b دو عدد طبیعی‌اند، به‌طوری که $a^{۲}+b^{۲}$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $a^{۲}+b^{۲}$ بر ۴۴۱ بخش‌پذیر است.

چون $a^{۲}+b^{۲}$ مضرب ۲۱ است، پس $a^{۲}+b^{۲}$ هم مضرب ۳ است و هم مضرب ۷. با حالت‌بندی باقی‌مانده‌های a و b بر ۳ (و همچنین بر ۷) می‌توان ثابت کرد a و b هر دو باید مضرب ۳ و ۷ باشند (اثبات این قسمت را به‌عهده خودتان می‌گذاریم). در نتیجه $a^{۲}$ و $b^{۲}$ هر دو بر ۹ و ۴۹ بخش‌پذیرند و $a^{۲}+b^{۲}$ بر $۴۹\times۹=۴۴۱$ بخش‌پذیر است.

۱۲۵. یازده دانش‌آموز در اردویی تابستانی، پنج گروه پژوهشی تشکیل داده‌اند. ثابت کنید که می‌توان دو دانش‌آموز مانند A و B طوری پیدا کرد که هر گروه پژوهشی که شامل دانش‌آموز A باشد، شامل دانش‌آموز B هم باشد.

گروه‌های پژوهش را با اعداد ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. حال به‌هر دانش‌آموز شمارهٔ گروه‌هایی را که عضو آن‌هاست، نسبت می‌دهیم. یازده مجموعه تشکیل

می‌شود. زیرمجموعه‌های {۱,۲,۳,۴,۵} را به ۱۰ دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم. هر دسته دارای این ویژگی است که هر دو عضو یک دسته مانند A و B را که در نظر بگیریم، یا $A\subset B$ و یا $B\subset A$.

(۱) $\varnothing$, {۱},{۱,۲},{۱,۲,۳},{۱,۲,۳,۴},{۱,۲,۳,۴,۵}

(۲) {۲},{۲,۵},{۱,۲,۵},{۱,۲,۳,۵}

(۳) {۳},{۱,۳}, {۱,۳,۴}, {۱,۳,۴,۵}

(۴) {۴}, {۱,۴}, {۱,۲,۴}, {۱,۲,۴,۵}

(۵) {۵},{۱,۵}, {۱,۳,۵}

(۶) {۲,۴},{۲,۴,۵},{۲,۳,۴,۵}

(۷) {۳,۴},{۳,۴,۵}

(۸) {۳,۵}, {۲,۳,۵}

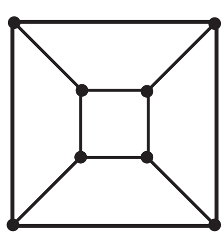
(۹) {۴,۵}, {۱,۴,۵}

(۱۰) {۲,۳}, {۲,۳,۴}

در نتیجــه با انتخاب یازده مجموعه، طبق اصل لانه کبوتر، دو تا از آن‌ها از یک دسته هستند و در نتیجه یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری خواهد بود.

۱۲۶. طول تکه ســیمی ۱۲۰ ســانتی‌متر اســت. آیا می‌تــوان بــا اســتفاده از آن (بــدون بریدن) اسکلت مکعبی را ساخت که طول هر یالش ۱۰ سانتی‌متر باشد؟

امکان‌پذیر نیســت، چرا که انجــام این کار معادل با این است که گراف مکعب (شکل زیر) اویلری باشد. یعنی بتوان از یک رأس شــروع به حرکت کرد و از همهٔ یال‌ها هر کدام دقیقاً یک‌بار گذشــت. اما در گراف اویلری همهٔ رئوس باید از درجه زوج باشند.



۱۲۷. ثابت کنید هر پنج‌ضلعی محدب، سه قطر دارد که می‌توان با آن‌ها یک مثلث رسم کرد.

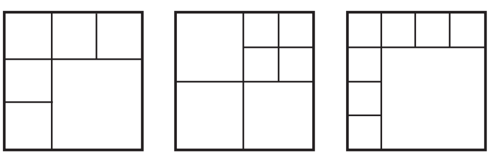
بزرگ‌ترین قطر این پنج‌ضلعی، مثلاً XY را در نظر بگیرید. دو تا از رئوس پنج‌ضلعی در یک طرف قطر قرار دارند و بنابراین دو قطر متقاطع وجود دارند که یک سر هــر یــک از آن‌ها به‌ترتیب X و Yاند. اکنون به آســانی می‌تــوان دریافت که از برخورد این ســه قطر یک مثلث تشکیل می‌شود.

۱۲۸. دو بازیکن به نوبت اسب‌هایی را روی خانه‌های صفحهٔ شطرنج می‌گذارند که هیچ‌یک از آن‌ها دیگری را تهدید نکند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی راهبرد برد دارد؟

چون اسب همیشه از خانه‌ای سیاه به خانه‌ای سفید می‌رود یــا برعکس، بازیکن دوم می‌تواند با اســتفاده از تقارن نسبت به مرکز صفحهٔ شطرنج، بازی را ببرد.

۱۲۹. فرض کنید n، عــددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۵ اســت. ثابت کنید هر مربع را می‌توان فقط با برش‌هــای افقی و عمودی، به n مربع تقســیم کرد.

برای مقادیر ۶، ۷ و ۸ شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:
حال اگر حکم برای n=k صحیح باشــد، آن‌گاه برای n=k+۳ نیز درست است. کافی است بعد از افراز مربع به k مربــع کوچک‌تر، یکی از مربع‌ها را به ۴ مربع هم‌اندازه افراز کنیم تا تعداد کل مربع‌ها برابر k+۳ باشد.



n=۸   n=۷   n=۶

۱۳۰. در جدولی از m ســطر و n ســتون، خانهٔ محل برخــورد ســطر fاُم و ســتون gاُم را علامــت گذاشــته‌ایم. چند تا از مســتطیل‌هایی که از خانه‌هــای این جدول تشــکیل شــده‌اند، این خانهٔ علامت‌دار را دربردارند؟

کافی اســت دو خط عمودی و دو خط افقی انتخاب کنیم، طوری که از تقاطع آن‌ها مستطیل مطلوب حاصل شــود. تعداد انتخاب‌ها برای این چهــار خط، برابر p، q، m−p+۱ و n−q+۱ و در نتیجــه تعداد کل مســتطیل‌ها برابر است با: N=pq(m−p+۱)(n−q+۱).

عباس قلعه‌پور اقدم
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض

شناخت عدد پی

به کمک چندضلعی‌های محیطی و محاطی

اشاره

این مقاله با خلاصه‌ای از تعریف و تاریخچهٔ عدد پی آغاز می‌شود، دانشمندانی را که در جهت شناخت این عدد تلاش کرده‌اند، معرفی می‌کند و راهکار ارشمیدس را که عبارت است از یافتن مقدار تقریبی برای این عدد، به‌وسیلهٔ چندضلعی‌های محیطی و محاطی بررسی می‌کند.

شناخت عدد پی

عدد «پی» عدد گنگی است که در بیشتر محاسبات ریاضی به نحوی حضور دارد و از مهم‌ترین اعداد در ریاضیات کاربردی در علومی مانند تئوری اعداد، آمار، ترمودینامیک، الکترومغناطیس و... محسوب می‌شود. آن را با «π» نمایش می‌دهند. در هندسهٔ اقلیدسی دوبعدی این عدد را نسبت محیط دایره به قطر آن و یا مساحت دایره‌ای به شعاع واحد تعریف می‌کنند.

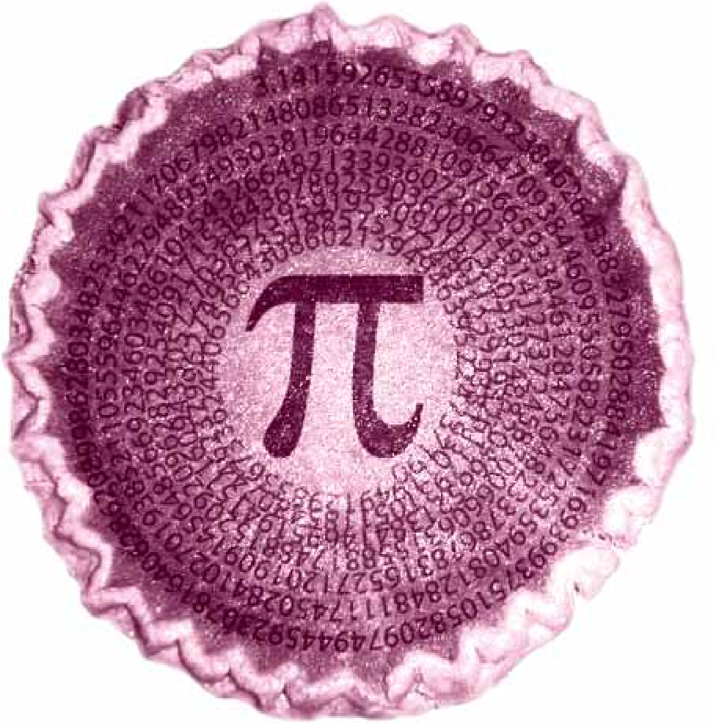
به‌نظر می‌رسد اولین مردمانی که در پی شناخت این عدد بودند، این کار را به‌طور تجربی انجام می‌دادند. شاید یک تکه نخ نازک به دور دایره‌ای می‌کشیدند و طول آن را اندازه می‌گرفتند و سپس قطر را هم‌اندازه می‌گرفتند و در آخر نسبت آن‌ها را به‌دست می‌آوردند. این اولین گام است.

اندیشمندان بسیاری به دنبال یافتن یک مقدار تقریبی برای این عدد بوده‌اند و تلاش کرده‌اند که هرچه بیشتر به آن نزدیک شوند. بابلیان مقدار تقریبی π را برابر با ۳/۱۲۵ می‌دانستند. در «پاپیروس رایند» که مربوط به مصر باستان (۱۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح) است، مقدار $(\frac{۱۶}{۹})^۲$ برای این عدد ثبت شده است که در نتیجه، مقدار تقریبی عدد پی ۳/۱۶۰۵ به‌دست می‌آید. در هند باستان در حدود ۸۰۰ سال قبل از میلاد **برهمگوتپه** تا $\sqrt{۱۰}$ به π نزدیک شد.

اولین نظریه در مورد مقدار تقریبی عدد پی توسط **ارشمیدس** (از ۲۱۲ تا ۲۷۸ میلادی)، یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همهٔ اعصار، از اهالی شهر یونانی «سیراکیوز» بیان شد. این نظریه برپایهٔ تقریب زدن محیط و مساحت شش‌ضلعی منتظم محیطی و شش‌ضلعی منتظم محاطی استوار بود که در ادامه چگونگی یافتن چنین تقریبی به‌طور کامل مطرح خواهد شد.

دومین تیزهوشی که در شناخت این موجود گنگ رکوردشکنی کرد، **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** (۷۹۰ تا ۸۳۲ هجری قمری)، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی بود. وی در کتاب «رسالهٔ محیطیه» به کمک

اولین نظریه در مورد مقدار تقریبی عدد پی توسط ارشمیدس بیان شد، اما دومین نفر در این زمینه غیاث‌الدین جمشید کاشانی بود که عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد و رکورد وی تا ۲۰۰ سال بی‌رقیب بود!



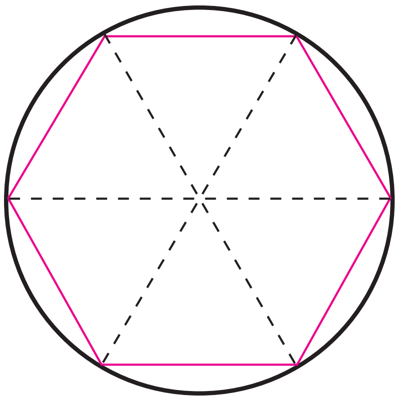
۸۰۵۳۰۶۳۶۸ ضلعی منتظم π را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد! وی در این رکوردشکنی در حدود ۲۰۰ سال بی‌رقیب بود. کاشانی یکی از نوابغ و افتخارات کشور عزیزمان ایران است.

عدد پی در سال ۱۶۶۹ میلادی تا ۷۱ رقم اعشار، در سال ۱۸۴۴ میلادی تا ۲۰۰ رقم اعشار، و در سال ۱۸۷۳ تا ۷۰۰ رقم اعشار محاسبه شد. با رایانه توانسته‌اند تا ۱۰۰۰۰۰ رقم آن را محاسبه کنند. دانشمندان قدیم ایران ارقام اعشاری عدد پی را تا ۱۱ رقم اعشار به شعر سروده‌اند: «خرد و بینش و آگاهی دانشمندان ره سر منزل توفیق به ما آموزد.» به رابطهٔ بین این کلمات و مقدار تقریبی ۳/۱۴۱۵۹۲۲۴۵۳۵ برای عدد پی بیندیشید.

راهکار ارشمیدس

الف) چندضلعی محاطی

محیط دایره را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و یک nضلعی منتظم در داخل دایره رسم می‌کنیم؛ به‌طوری که همهٔ رأس‌های nضلعی روی دایره قرار داشته باشند. چنین nضلعی منتظمی را محاط در دایره[1] نامند. محیط این nضلعی منتظم را I_n می‌نامیم. در شکل ۱ یک شش‌ضلعی منتظم محاطی دیده می‌شود.



شکل ۱

مسئلهٔ ۱. محاسبهٔ I_n: فرض کنیم AB ضلعی به طول a از یک nضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R باشد. در این صورت اندازهٔ $A\hat{O}B$ (زاویهٔ مرکزی نظیر کمان AB) با اندازهٔ کمان AB برابر خواهد بود؛ یعنی:

$$A\hat{O}B = \frac{2\pi}{n}$$

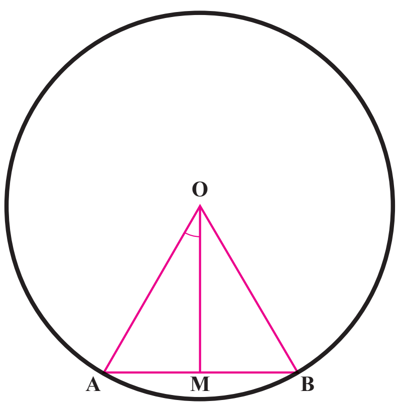
مثلث AOB متساوی‌الساقین است (زیرا: OA=OB=R). ارتفاع OM را رسم می‌کنیم. OM میانهٔ نظیر ضلع AB است. (چرا؟) از هم‌نهشتی مثلث‌های AOM و BOM درمی‌یابیم که OM نیم‌ساز زاویهٔ AOB نیز هست. در نتیجه:

$$A\hat{O}M = \frac{1}{2}A\hat{O}B = \frac{\pi}{n}\ ،\ AM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOM داریم:

$$\sin A\hat{O}M = \frac{AM}{OA} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow a = 2R\sin A\hat{O}M$$

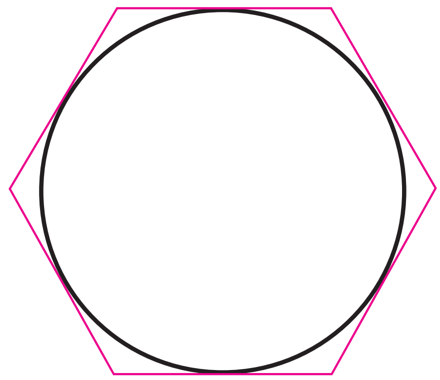
$$\Rightarrow I_n = 2nR\sin\frac{\pi}{n}$$



شکل ۲

ب) چندضلعی محیطی

محیط دایره را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. از هر کدام از n نقطهٔ روی این دایره که به فاصلهٔ مساوی قرار دارند، مماسی رسم می‌کنیم. این مماس‌ها یک nضلعی منتظم پدید می‌آورند که آن را nضلعی منتظم محیطی[۲] می‌نامیم. محیط این nضلعی را C_n در نظر می‌گیریم. در شکل ۳ یک شش‌ضلعی منتظم محیطی دیده می‌شود.



شکل ۳

مسئلهٔ ۲. محاسبهٔ C_n: AB=a ضلعی از یک nضلعی منتظم محیط بر در دایره‌ای به شعاع R است. می‌توان نوشت:

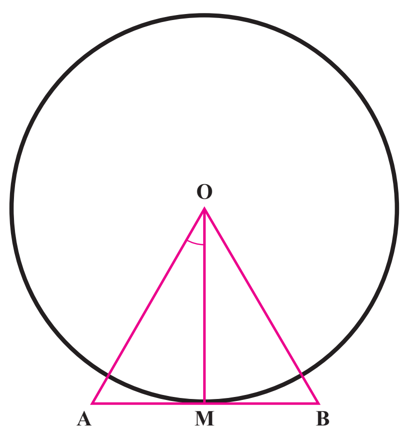
$$OM = R$$

$$AM = \frac{AB}{۲} = \frac{a}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AOM} : \tan \hat{AOM} = \frac{AM}{OM} = \frac{\frac{a}{۲}}{R}$$

$$\Rightarrow a = ۲R \tan \frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow C_n = ۲nR \tan \frac{\pi}{n}$$



شکل ۴

ارشمیدس از این حقیقت استفاده کرد که:

$$I_n \leq \text{محیط دایره} \leq C_n$$

با افزایش دادن مقدار n می‌توان $C_n - I_n$ را کوچک و کوچک‌تر کرد. ارشمیدس براساس همین موضوع تا ۹۶ضلعی پیش‌رفت و پس از آنکه بازه‌ای برای محیط دایره یافت، با توجه به معلوم بودن شعاع و این حقیقت که π × قطر = محیط، توانست نتیجه بگیرد:

$$\frac{۲۲۳}{۷۱} < \pi < \frac{۲۲}{۷}$$ و یا تقریباً

$$۳/۱۴۰۸۳ < \pi < ۳/۱۴۲۸۵$$

● **مثال:** به کمک ۱۲ضلعی‌های منتظم بازه‌ای برای عدد π بیابید.

$$n = ۱۲ \Rightarrow \frac{\pi}{n} = \frac{۱۸۰}{۱۲} = ۱۵$$

$$I_n = ۲nR \sin \frac{\pi}{n} \Rightarrow I_{۱۲} = ۲ \times ۱۲ \times R \sin ۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow I_{۱۲} \approx ۲۴R(۰/۲۵۸۸) \Rightarrow I_{۱۲} \approx ۶/۲۱۱۲R$$

$$C_n = ۲nR \tan \frac{\pi}{n} \Rightarrow C_{۱۲} = ۲ \times ۱۲ \times R \tan ۱۵$$

$$\Rightarrow C_{۱۲} \approx ۲۴R(۰/۲۶۷۹) \Rightarrow C_{۱۲} \approx ۶/۴۲۹۶R$$

$$I_{۱۲} \leq \text{محیط دایره} \leq C_{۱۲} \Rightarrow ۶/۲۱۱۲R < ۲\pi R < ۶/۴۲۹۶R$$

$$\Rightarrow ۳/۱۰۵۶ < \pi < ۳/۲۱۴۸$$

پی‌نوشت‌ها

1. Inscribed polygon
2. Circumscribed Polygon

منابع

۱. تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رستگار، آرش (بی‌تا). آموزش هنر حل مسئله. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

۲. قراگوزلو، جلیل‌الله (۱۳۷۴). مثلثات پایه. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ شانزدهم.

۳. ریاضیات ۱ سال اول دبیرستان، دفتر تألیف کتاب‌های درسی، چاپ هفتم، ۱۳۹۳.

4. Focus in High school mathematics: Reasoning and sense making: Algebra

۴ پرسش‌های پیکارجو!

در مثلث ABC، $\hat{A} = ۷۵^\circ$ و طول ارتفاع CH نصف طول ضلع AB است. زاویهٔ B چند درجه است؟

الف) ۴۵° ب) ۳۰° ج) ۶۰°

د) ۱۵° هـ) مقدار ثابتی نیست

هوشنگ شرقی

مقدمه

چنانچه دیدید، از شمارهٔ قبل بخشی را با این عنوان آغاز کردیم. در این بخش به نقد و تحلیل یافته‌هایی می‌پردازیم که به نظر مطرح‌کنندگان آن‌ها، کشف رابطه‌ای تازه بوده است. در شمارهٔ قبل، از ادعای یافتن روشی جدید برای اثبات «قضیهٔ فیثاغورس» سخن گفتیم، حال در این شماره به ادعای یکی از خوانندگان مجله برای به‌دست آوردن دستوری برای یافتن «اعداد تام» می‌پردازیم. ابتدا با هم عین نوشتهٔ ایشان را مرور کنیم:

روشی برای به‌دست آوردن اعداد تام از طریق مبنای ۲

می‌دانیم، هر عدد طبیعی که مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های کوچک‌تر از خودش باشد، تام است؛ مانند: ۶ و ۲۸ و ۴۹۶ و...

اگر اعداد تام را به مبنای ۲ تغییر مبنا دهیم، مشاهده می‌شود که:

اولاً: تعداد صفرها یک واحد کمتر از یک‌هاست.

ثانیاً: تعداد یک‌ها دنبالهٔ اعداد اول است.

۶=۱۱۰

۲۸=۱۱۱۰۰

۴۹۶=۱۱۱۱۱۰۰۰۰

۸۱۲۸=۱۱۱۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰

۲۰۹۶۱۲۸=۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۳۳۵۵۰۳۳۶=۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۸۵۸۹۸۶۹۰۵۶=۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۱۳۷۴۳۸۶۹۱۳۲۸=

۳۵۱۸۴۳۶۷۸۹۴۵۲۸=

اگر اعداد فوق را به‌ترتیب از مبنای ۲ به‌صورت زیر به مبنای ۱۰ تغییرمبنا دهیم، داریم:

جملهٔ اول $=(2^2-1)(2^1)=3\times 2=6$

جملهٔ دوم $=(2^3-1)(2^2)=7\times 4=28$

جملهٔ سوم $=(2^5-1)(2^4)=31\times 16=496$

جملهٔ‌عمومی $=(2^n-1)(2^{n-1})$ (عدد (2^n-1) اول است)

حال به نقد نوشتهٔ این دوست خواننده می‌پردازیم:

۱. نتیجه‌گیری انتهای مقاله درست است، که البته به روش استقرایی و بدون استدلال آمده است. اثبات این نتیجه‌گیری به شرح زیر است:

◆**فرض:** 2^n-1 عددی اول است.

◆**حکم:** $(2^n-1)2^{n-1}$ عدد تام است.

●**اثبات:** می‌دانیم عددی که به‌صورت $P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}...P_k^{\alpha_k}$ تجزیه شده است، به تعداد $n=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$ مقسوم‌علیه مثبت دارد. (چرا؟) از آنجا که این عدد تنها دو عامل اول ۲ و $P=2^n-1$ را دارد و به‌صورت $P\times 2^{n-1}$ تجزیه شده است، پس $2n$ مقسوم‌علیه مثبت دارد (چرا؟) که اگر از خود این عدد صرف‌نظر کنیم، $2n-1$ مقسوم‌علیه به‌صورت زیر دارد:

$$\underbrace{1,2,2^2,2^3,\dots,2^{n-1}}_{n\ \text{مقسوم‌علیه}},\underbrace{P,2P,2^2P,\dots,2^{n-2}P}_{n-1\ \text{مقسوم‌علیه}}$$

و مجموع این مقسوم‌علیه‌ها برابر است با:

$$S=(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})+P(1+2+2^2+\dots+2^{n-2})$$
$$=\frac{2^n-1}{2-1}+P\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=\underbrace{(2^n-1)}_{P}+P(2^{n-1}-1)$$
$$=P(1+2^{n-1}-1)=P\times 2^{n-1}$$

روشن است که مجموع عددهای داخل پرانتزها، با استفاده از دستور محاسبهٔ مجموع جملات دنباله‌های هندسی به‌دست آمده است. بنابراین، مجموع فوق با خود عدد برابر است و در نتیجه این یک عدد تام است.

اما نتایج مقدماتی بحث چه‌طور؟ در قسمت «اولاً» آمده است که وقتی این عددها به مبنای ۲ بروند، تعداد صفرها یک واحد کمتر از تعداد یک‌هاست. به‌صورت استقرایی به‌نظر می‌رسد که این ادعا درست است، اما چرا؟ این موضوع را هم اثبات می‌کنیم و برای این کار به‌صورت زیر این عدد را به مبنای ۲ می‌بریم:

$$P\times 2^{n-1}=2^{n-1}(2^n-1)=2^{n-1}(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})$$
$$=2^{n-1}+2^n+2^{n+1}+\dots+2^{2n-2}$$
$$=0\times 2^0+0\times 2^1+\dots+0\times 2^{n-2}+1\times 2^{n-1}+1\times 2^n+\dots+1\times 2^{2n-2}$$
$$=(\underbrace{1111\dots1}_{n\ \text{رقم}}\ \underbrace{0000\dots0}_{n-1\ \text{رقم}})_2$$

پس وقتی این عدد به مبنای ۲ برود، n رقم یک و n-۱ رقم صفر دارد. در قسمت ثانیاً ادعا شده که تعداد یک‌ها، یعنی nها، دنبالهٔ اعداد اول است و این اشتباهی فاحش است. به‌عبارت دیگر، ادعا شده که اگر n اول باشد، 2^n-1 همیشه عددی اول و در نتیجه $(2^n-1)2^{n-1}$ عددی تام خواهد بود! در حالی‌که این‌طور نیست و مثال نقض آن n=۱۱ است که به ازای آن $2^n-1=2^{11}-1=2047=23\times 89$ و لذا عدد حاصل از آن یعنی، ۲۰۹۶۱۲۸، عدد تام نیست!

پس باز هم تأکید می‌کنیم، قبل از اینکه کشفیات خود را اعلام کنید، دربارهٔ آن‌ها به‌خوبی به مطالعه و تحقیق بپردازید و در صورت امکان حتماً با متخصصان موضوع مشورت کنید!

قبل از اینکه کشفیات خود را اعلام کنید، دربارهٔ آن‌ها به‌خوبی به مطالعه و تحقیق بپردازید!

پرسش‌های پیکارجو!

تعدادی دانش‌آموز و دانشجو به‌صورت دوره‌ای با هم شطرنج بازی می‌کنند. اگر بدانیم تعداد دانشجویان سه برابر تعداد دانش‌آموزان و تعداد بردهای آن‌ها هم سه برابر تعداد بردهای دانش‌آموزان بوده است و هر دو نفر یک و فقط یک دست با هم بازی کرده‌اند و هیچ بازی مساوی نشده، حداقل تعداد بردهای دانش‌آموزان چند دست بوده است؟

الف) **۵** ب) **۷** ج) **۳**

د) **۹** هـ) **۱۱**

حسین کریمی
دبیر ریاضی از تهران

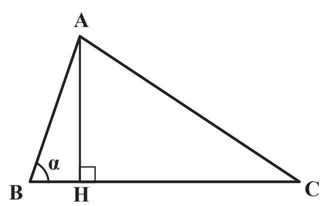
بحثی در باب مساحت چهارضلعی‌های محدب

اشاره

در فصل دوم کتاب هندسه ۱، با روش محاسبهٔ مساحت مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، لوزی و ذوزنقه آشنا شدیم. اکنون این سؤال پیش می‌آید که: «آیا می‌توانیم برای به‌دست آوردن مساحت همهٔ چهارضلعی‌های محدب، روش ثابتی معرفی کنیم؟» جواب این سؤال مثبت است و چنین امکانی وجود دارد که در ادامه به بررسی آن می‌پردازیم.

مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و مساحت آن را به‌دست می‌آوریم:

$$S_\Delta = \frac{۱}{۲} BC \times AH \qquad \text{(الف)}$$



شکل ۱

در مثلث قائم‌الزاویه ABH، داریم:

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB.\sin\alpha \quad \text{(ب)}$$

اکنون با جایگذاری (ب) در (الف) داریم:

$$S_\Delta = \frac{۱}{۲} BC.AB.\sin\alpha$$

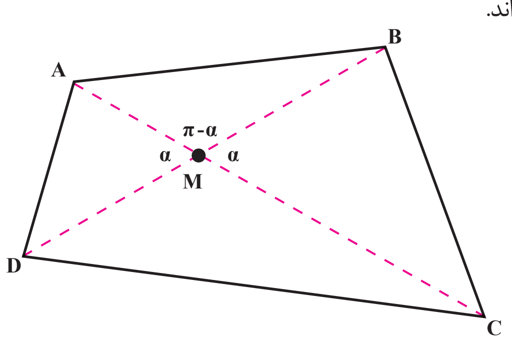
یعنی مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

● **مثال:** در مثلث ABC داریم: $AB = ۳\sqrt{۲}$ ، $AC = ۸$ و $\hat{A} = ۴۵^\circ$ مساحت مثلث را به‌دست آورید.

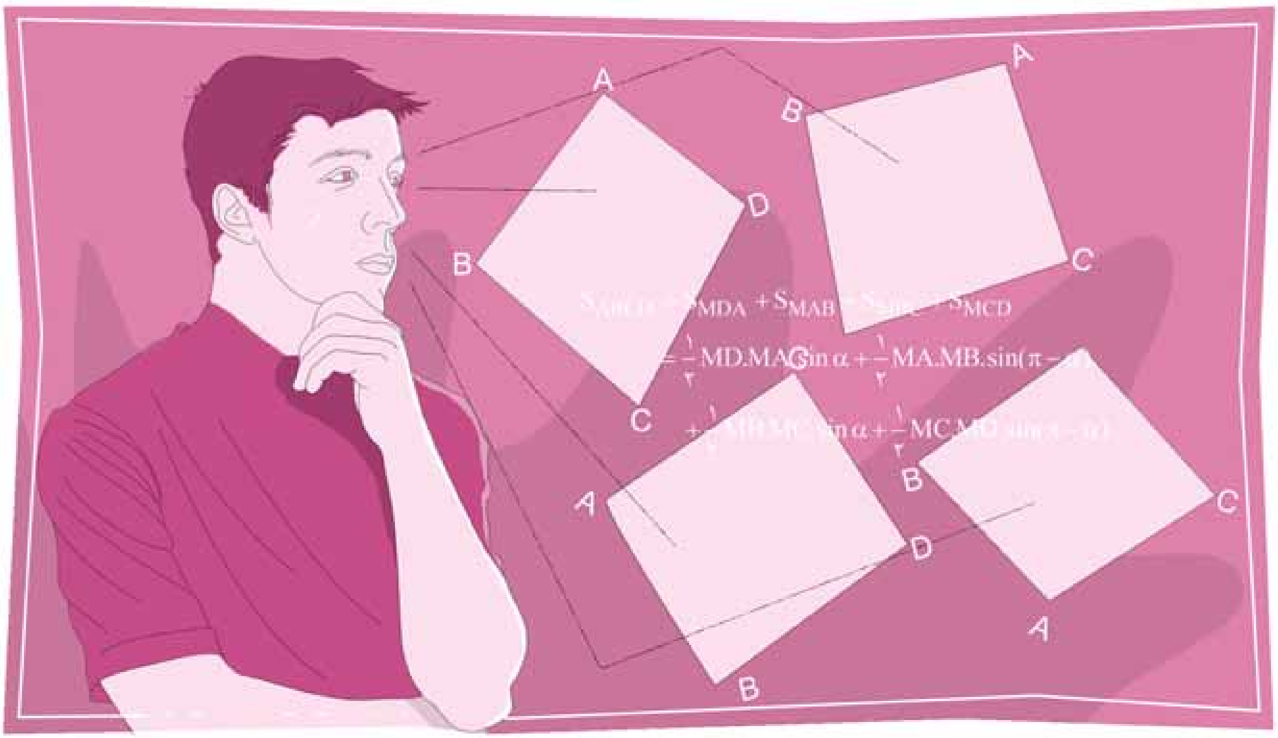
◆ **حل:** توجه داریم که اندازهٔ زاویهٔ بین دو ضلع AB و AC داده شده است. پس داریم:

$$S_\Delta = \frac{۱}{۲} AB.AC.\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲} \times ۳\sqrt{۲} \times ۸ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲$$

با توجه به مقدمهٔ فوق، حال به سراغ چهارضلعی محدب ABCD می‌رویم که دو قطر آن، یکدیگر را در نقطهٔ M و به زاویهٔ α قطع کرده‌اند.



شکل ۲



$$S_{ABCD} = S_{MDA} + S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCD}$$
$$= \frac{۱}{۲} MD.MA.\sin\alpha + \frac{۱}{۲} MA.MB.\sin(\pi-\alpha)$$
$$+ \frac{۱}{۲} MB.MC.\sin\alpha + \frac{۱}{۲} MC.MD.\sin(\pi-\alpha)$$

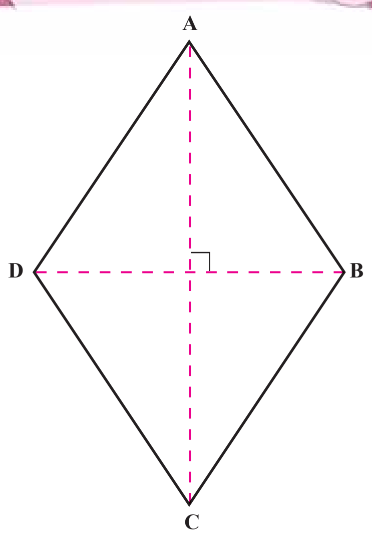
توجه داریم که سینوس هر زاویه با سینوس مکمل آن زاویه برابر است؛ یعنی: $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}\sin\alpha(MD.MA + MA.MB + MB.MC + MC.MD)$$
$$= \frac{۱}{۲}\sin\alpha\left[MA(MD+MB) + MC(MB+MD)\right]$$
$$= \frac{۱}{۲}\sin\alpha(MA.BD + MC.BD)$$
$$= \frac{۱}{۲}\sin\alpha.BD(MA+MC)$$
$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC.BD.\sin\alpha$$

نتیجه: مســاحت هر چهارضلعی محدب برابر است: با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطر در سینوس زاویهٔ بین دو قطر.

مسئلهٔ ۱. مساحت لوزی را به‌دست آورید.

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \times BD \times \sin ۹۰^\circ$$



شکل ۳

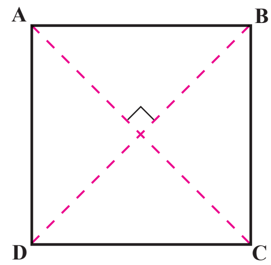
با توجه به اینکه: $\sin ۹۰^\circ = ۱$، داریم:

$$S_\lozenge = \frac{۱}{۲} AC \times BD$$

نکتهٔ مهم: مســاحت هر چهارضلعی که دو قطر آن برهم عمود باشــند، برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطر.

مسئلهٔ ۲. مساحت مربع را به‌دست آورید.

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD\times \sin 90^\circ=\frac{1}{2}(AC)^2=\frac{1}{2}(BD)^2$$



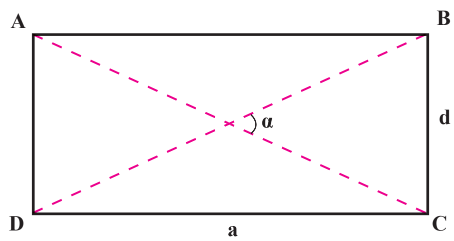
شکل ۴

نتیجه: مساحت هر مربع برابر است: با نصف مجذور اندازهٔ قطر آن.

● **مثال:** مساحت مربعی را که اندازهٔ قطر آن $2\sqrt{3}$ است، به‌دست آورید.

$$S_{\square}=\frac{1}{2}(\text{اندازهٔ قطر})^2=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2=\frac{1}{2}\times 12=6$$

مسئلهٔ ۳. در یک مستطیل به ابعاد a و b، سینوس زاویهٔ بین دو قطر را به‌دست آورید.



شکل۵

$$\Delta ABC: AC^2=a^2+b^2 \Rightarrow AC=BD=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\begin{cases} S_{\square}=a.b \\ S_{\square}=\frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow a.b=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}.\sin\alpha$$

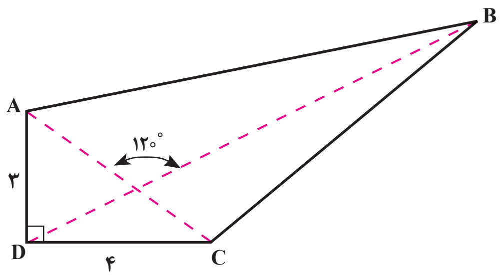
$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{2a.b}{a^2+b^2}$$

● **مثال:** در یک مستطیل به اضلاع ۱ و $2+\sqrt{3}$، اندازهٔ زاویه بین دو قطر را به‌دست آورید.

$$\sin\alpha=\frac{2a.b}{a^2+b^2}=\frac{2\times(2+\sqrt{3})\times 1}{(7+4\sqrt{3})+1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha=30^\circ$$

مسئلهٔ ۴. در چهارضلعی ABCD داریم: $BD=8\sqrt{3}$، CD=۴، AD=۳ و $\hat{D}=90^\circ$. اندازهٔ زاویه بین دو قطر نیز 120° است. مساحت چهارضلعی را به‌دست آورید و از آنجا مساحت مثلث ABC را مشخص کنید.



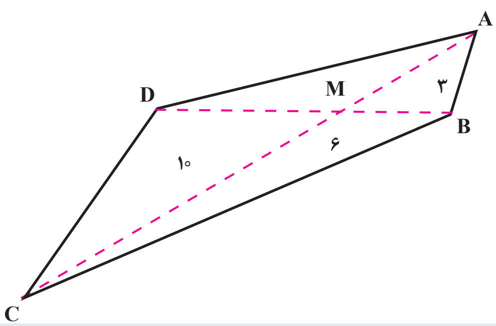
شکل۶

$$\Delta ACD: AC^2=3^2+4^2 \Rightarrow AC=5$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD\times\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times 5\times 8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30$$

$$S_{ABC}=S_{ABCD}-S_{ACD}=30-\frac{3\times 4}{2}=30-6=24$$

مسئلهٔ ۵. در چهارضلعی ABCD، داریم: AC=۱۲، BD=۸، $S_{\Delta BCM}=6$، $S_{\Delta ABM}=3$ و $S_{\Delta CDM}=10$ مطلوب است تعیین اندازهٔ زاویهٔ M.



شکل۷

$$\frac{S_{CMD}}{S_{CMB}}=\frac{DM}{MB}\Rightarrow\frac{DM}{MB}=\frac{10}{6}$$

$$\frac{S_{ADM}}{S_{ABM}}=\frac{DM}{MB}\Rightarrow\frac{S_{ADM}}{3}=\frac{10}{6}\Rightarrow S_{ADM}=5$$

$$S_{ABCD}=3+6+10+5=24$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD\times\sin\hat{M}$$

$$\Rightarrow 24=\frac{1}{2}\times 12\times 8\times\sin\hat{M}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{M}=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{M}=30^\circ$$

برای این قسمت، چند لطیفهٔ شاد با طعم ناب ریاضیات داریم! امیدواریم از خواندن آن‌ها لذت ببرید:

لطیفهٔ اول

یک فیزیک‌دان برای محاسبهٔ سرعت حرکت یک نوسانگر، چند معادلهٔ پیچیدهٔ جبری نوشت، ولی نتوانست دستگاه معادلات حاصل را حل کند. در نتیجه از دوست ریاضی‌دان خود کمک خواست. ریاضی‌دان پس از مدتی کلنجار رفتن با معادله‌ها، به دوست فیزیک‌دان خود گفت: «متأسفانه دستگاه معادلاتی که تشکیل داده‌ای ناسازگار است!»

فیزیک‌دان با ناراحتی به دفترکارش برگشت و بعد از مدت‌ها محاسبهٔ دوباره، باز به همان معادله‌ها رسید و آن‌ها را به پیش دوستش برد و گفت: «یک‌بار دیگر با دقت نگاه کن، من مطمئنم که کارم درست بوده است و هیچ اشتباهی نداشته‌ام.»

ریاضی‌دان باز هم با معادله‌ها کار کرد و پس از مدتی گفت: «البته یک‌چیز را فراموش کردم به تو بگویم: این دستگاه معادله‌ها، فقط در یک صورت جواب دارد و آن اینکه همهٔ متغیرها، حقیقی و مثبت باشند!»

لطیفهٔ دوم

در یک تست روان‌شناسی، یک ریاضی‌دان، یک فیزیک‌دان و یک مهندس را با یک ظرف بزرگ غذای کنسرو شده، بدون دربازکن، هر یک را در اتاقی جداگانه برای مدت یک شبانه‌روز محبوس کردند. ۲۴ ساعت بعد به سراغ آن‌ها رفتند. در اتاق مهندس دیدند که روی دیوارهای اتاق جای ضربه و تکه‌های کوچک غذا دیده می‌شود. ظرف خالی غذا یک گوشه افتاده و مهندس در گوشه‌ای به خواب رفته است! مهندس آن‌قدر ظرف را به دیوارها کوبیده بود تا موفق به باز کردن در آن شده و محتویات آن را میل کرده بود!

در اتاق فیزیک‌دان دیدند که فقط یک گوشهٔ دیوار ضربه خورده و تکه‌های غذا به آن چسبیده بود. فیزیک‌دان با محاسبات دقیق معلوم کرده بود که ظرف را به کجا و با چه نیرویی بزند تا در آن باز شود و سپس محتویات را خورده و خوابیده بود.

اما وقتی وارد اتاق ریاضی‌دان شدند، دیدند ریاضی‌دان نیست و ظرف غذا در بسته یک گوشه قرار دارد و صداهای عجیبی هم از توی آن می‌آید! دربازکن آوردند و در ظرف را باز کردند. ناگهان ریاضی‌دان از توی ظرف بیرون آمد و فریاد زد: «لعنتی! فقط یک مثبت و منفی را اشتباه کردم!»

لطیفهٔ سوم

دو نفر دانشجوی آمار که در یک شهر کوچک در دانشگاهی تحصیل می‌کردند، در خوابگاه دانشگاه هم‌اتاق بودند. یک شب که قرار بود فردای آن روز با خودروی یکی از آن‌ها برای تعطیلات به شهر خودشان برگردند، تا دیروقت بیدار ماندند و خیلی دیر خوابیدند. در نتیجه صبح خواب‌آلود سوار خودرو شدند. یکی از دانشجوها به دوستش که می‌خواست رانندگی کند گفت: «بهتر نیست با این حال رانندگی نکنی و بگذاری کمی استراحت کنیم؟ آخر با این وضع احتمال تصادف و خطر وجود دارد.»

و دوستش گفت: «نه اصلاً نگران نباش. آمار نشان می‌دهد که در این شهر، هر ماه یک تصادف رانندگی بر اثر خواب‌آلودگی راننده‌ها رخ می‌دهد و در این ماه، این تصادف دو هفته پیش رخ داد و راننده‌اش هم همین حالا در بیمارستان بستری است!»

هوشنگ شرقی

پاسخ به برخی ابهام‌ها درمورد ترسیم‌های هندسی

مقدمه

ترسیم‌های هندسی از بحث‌های بسیار کارامد در هندسه‌اند و می‌توانند به پرورش قوهٔ خلاقیت دانش‌آموزان کمک بسیاری کنند و در عین حال، به تفهیم مباحث گوناگون هندسه و نیز تقویت شهود هندسی در آنان بینجامند. اما به اعتقاد نگارنده، این بحث در کتاب درسی هندسهٔ ۲، به‌دلیل وجود برخی ابهام‌ها، آنچنان که باید و شاید به این امر منتهی نمی‌شود. مهم‌ترین این ابهام‌ها که در مقالهٔ حاضر به آن‌ها پرداخته می‌شود، عبارت‌اند از:

الف) منظور از ترسیم با خط‌کش غیرمدرج و پرگار چیست؟ چرا مجاز به استفاده از سایر ابزارها نیستیم؟

ب) چرا در مسائل ترسیم، در بسیاری مواقع می‌گوییم: مسئله را حل شده فرض می‌کنیم؟!

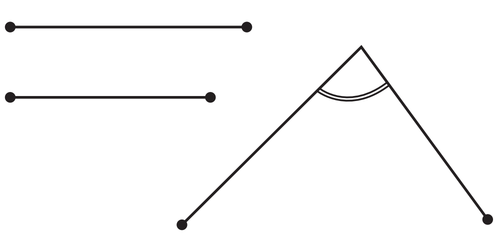
ج) اصلاً هدف از ترسیم‌های هندسی چیست؟

در این نوشتهٔ مختصر تلاش می‌کنیم از این ابهام‌ها پرده برداریم، با بحثی ساده و صادقانه با دانش‌آموزان سخن بگوییم و اهمیت بحث ترسیم‌های هندسی را برای آنان روشن سازیم.

الف) ترسیم با خط‌کش غیرمدرج و پرگار

در ترسیم‌های هندسی، مجاز به استفاده از هیچ ابزاری به غیر از یک خط‌کش غیرمدرج (وسیله‌ای برای رسم خط راست) و پرگار نیستیم. این محدودیت از آن جهت است که هرقدر وسایل ما محدودتر باشند، نیاز به خلاقیت و ابتکار بیشتر می‌شود و اهداف آموزشی بیشتری برآورده خواهند شد. فرض کنید که مسئلهٔ ما این باشد که بخواهیم مثلثی را با معلوم بودن اندازه‌های دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها رسم کنیم. اگر اندازه‌های دو ضلع با واحد معین و زاویهٔ بین آن‌ها برحسب درجه داده شده و خط‌کش مدرج و نقاله (وسیلهٔ اندازه‌گیری زاویه با واحد معینی) در اختیار باشد، دیگر کاری برای انجام دادن باقی نمی‌ماند! (با نقاله زاویهٔ معین را جدا می‌کنیم و روی اضلاع آن با خط‌کش مدرج طول‌های داده شده را مشخص می‌کنیم و انتهای دو پاره‌خط را به‌هم وصل می‌کنیم!)

پس صورت مسئله چگونه است؟ آری این موضوعی است که در کتاب درسی به شایستگی پرورانده نشده است. در واقع مسئلهٔ ما این است: «دو پاره‌خط و یک زاویه به‌صورت زیر داده شده‌اند. مثلثی بسازید که دو ضلع آن به اندازهٔ دو پاره‌خط، و زاویهٔ بین آن‌ها، به اندازهٔ این زاویه باشد.» و دیگر نیازی به نقاله و یا خط‌کش مدرج نداریم.



شکل ۱

برای آنکه بتوانیم ترسیم را به این صورت انجام دهیم، به برخی ترسیم‌های اولیه نیاز داریم. بعضی از این ترسیم‌ها در کتاب درسی آمده‌اند، اما جای بعضی دیگر خالی است. در اینجا به همهٔ آن‌ها اشاره می‌کنیم:

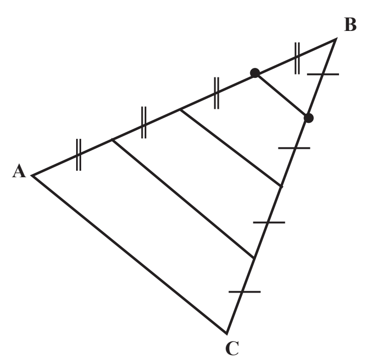
ترسیم‌های اولیه

۱. رسم پاره‌خطی مساوی پاره‌خط مفروض

روش رسم بسیار ساده است. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ پاره‌خط مفروض باز می‌کنیم و بدون تغییر، آن را در محل موردنظر قرار می‌دهیم و با خط‌کش پاره‌خط مطلوب را رسم می‌کنیم.

۲. رسم پاره‌خطی که طول آن نسبتی از پاره‌خط مفروض باشد

پاره‌خطی با طول a داریم. می‌خواهیم پاره‌خطی به طول ka (مثلاً ۲a، $\frac{a}{۲}$، $\frac{۳a}{۴}$ و...) رسم کنیم. این کار کمی پیچیده‌تر است، ولی با استفاده از «قضیهٔ تالس» و رسم خطوط موازی، کار ساده‌تر می‌شود. با یک مثال مسئله را روشن می‌کنیم. پاره‌خطی به طول a داریم، می‌توانیم آن را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم. به این منظور از انتهای پاره‌خط (یا ابتدای آن) n پاره‌خط دلخواه و مساوی و هم‌راستا (به کمک پرگار و خط‌کش) پشت سرهم رسم می‌کنیم. آن‌گاه از محل تقسیم پاره‌خط‌های مساوی، خطوطی موازی با پاره‌خط AC در شکل رسم می‌کنیم. (طریقهٔ رسم خطی موازی با خط مفروض در کتاب درسی آمده است.) این خطوط موازی، پاره‌خط مفروض AB را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. (در شکل، AB به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است.)

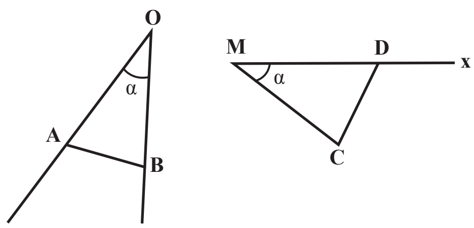


شکل ۲

با این فرایند و با داشتن پاره‌خط AB به راحتی می‌توان پاره‌خط kAB را رسم کرد. مثلاً اگر بخواهیم پاره‌خطی به طول $\frac{۳a}{۵}$ رسم کنیم، پاره‌خط به طول a را به پنج قسمت مساوی تقسیم و سپس پاره‌خطی مساوی سه‌تا از این قسمت‌ها رسم می‌کنیم.

منظور از ترسیم با خط‌کش غیرمدرج و پرگار چیست؟ چرا مجاز به استفاده از سایر ابزارها نیستیم؟

۳. رسم زاویه‌ای مساوی زاویهٔ مفروض



شکل ۳

از نقطه‌ای دلخواه در صفحه برای رسم زاویه‌ای مساوی زاویهٔ معلوم α که رأس آن نقطهٔ M در صفحه باشد، از M دو خط موازی اضلاع این زاویه رسم می‌کنیم. اما اگر یکی از اضلاع زاویه نیز داده شده باشد (در شکل Mx) که موازی هیچ‌یک از اضلاع زاویه نباشد، از ویژگی مثلث‌های هم‌نهشت کمک می‌گیریم. به مرکز O (رأس زاویهٔ α) به شعاع دلخواه دایره‌ای می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در دو نقطهٔ A و B قطع کند. حالا کافی است که مثلث متساوی‌الساقین MCD را هم‌نهشت با مثلث متساوی‌الساقین OAB بنا کنیم تا نتیجه شود: $C\hat{M}x = \alpha$. توضیح دهید که چگونه با استفاده از پرگار می‌توانیم این کار را به‌سادگی انجام دهیم.

۴. رسم خطی موازی خط مفروض، از نقطه‌ای دلخواه در صفحه

۵. رسم خطی عمود بر یک خط از یک نقطه خارج از خط

۶. رسم خطی عمود بر یک خط از یک نقطه واقع بر آن

۷. رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

۸. رسم نیم‌ساز یک زاویه

موارد (۴) تا (۸) در کتاب درسی توضیح داده شده‌اند. به کمک این ترسیم‌های اولیه، حالا آمادگی آن را داریم که ترسیم‌های بیشتری را انجام دهیم. اما برای این‌کار لازم است به‌جز آگاهی از این ترسیم‌های ابتدایی، از تمام قضیه‌ها و ویژگی‌های گوناگون شکل‌های هندسی نیز آگاه باشیم و این کار را هیجان‌انگیزتر می‌کند!

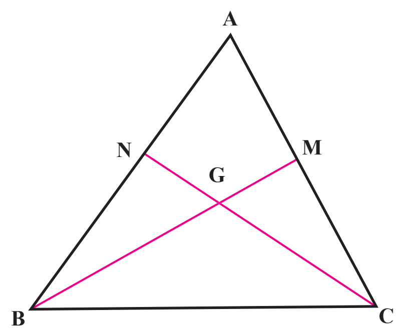
تمرین: چگونگی رسم یک مثلث با داشتن اندازه‌های دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها، دو زاویه و ضلع بین آن‌ها، و سه ضلع را بیان کنید.

ب) مسئله را حل شده فرض می‌کنیم!

وقتی در یک مسئلهٔ رسم می‌گوییم «مسئله را حل‌شده فرض می‌کنیم»، در واقع می‌خواهیم از «استدلال بازگشتی» که با آن از درس جبر و احتمال آشنایی دارید، استفاده کنیم. یعنی با اینکه شکل ما هنوز رسم نشده است، ولی آن را رسم می‌کنیم تا با توجه به شکل، راهبردی برای ترسیم بیابیم. با چند مثال، موضوع روشن‌تر می‌شود:

● **مثال ۱:** مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های BC=a، m_b و m_c (میانه‌های وارد بر اضلاع AB و AC) رسم کنید.

◆ **حل:** مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر مثلث مطلوب، مثلث ABC در شکل زیر باشد و BC=a، $BM=m_b$ و $CN=m_c$ معلوم باشند، با توجه به ویژگی نقطهٔ همرسی میانه‌ها (G) داریم:

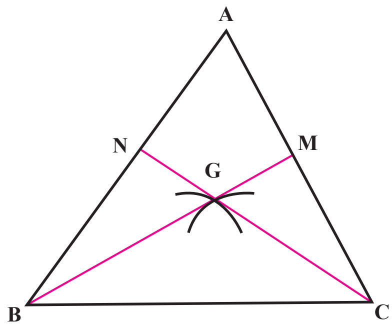


شکل ۴

$$BG=\frac{۲}{۳}BM=\frac{۲}{۳}m_b, CG=\frac{۲}{۳}CN=\frac{۲}{۳}m_c$$

پس طول‌های اضلاع مثلث GBC معلوم‌اند و می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم و از روی آن مثلث ABC را بنا کنیم. اکنون آماده‌ایم تا روش ترسیم را شرح دهیم:

روش رسم: پاره‌خطی به طول معلوم a=BC رسم می‌کنیم. آن‌گاه پاره‌خط‌هایی به طول‌های $\frac{۲}{۳}m_b$ و $\frac{۲}{۳}m_c$ می‌سازیم (چگونه؟ به ترسیم‌های اولیه رجوع کنید) و دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ $\frac{۲}{۳}m_b$ باز می‌کنیم و به مرکز B به این شعاع کمان می‌زنیم. سپس به مرکز C و به شعاع $\frac{۲}{۳}m_c$ کمان می‌زنیم. نقطهٔ برخورد دو کمان G است و مثلث GBC را رسم می‌کنیم. حال BG را از طرف G به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}m_b$ و GC را از طرف G به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}m_c$ امتداد می‌دهیم تا نقاط M و N به‌دست آیند. C را به M و B را به N وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا از برخورد آن‌ها A به‌دست آید و از آنجا مثلث ABC بنا شود.

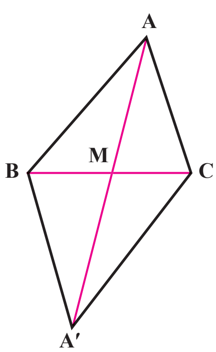


شکل ۵

شرط وجود جواب: اگر دو کمان فوق یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند (یعنی مثلث GBC وجود داشته باشد) مسئله جواب دارد، یعنی با شرط $\frac{۲}{۳}m_b+\frac{۲}{۳}m_c>a$ مسئله جواب دارد و در غیر این‌صورت جواب ندارد.

● **مثال ۲:** مثلث ABC را با معلوم بودن طول‌های AB=c، AC=b و میانهٔ $AM=m_a$ رسم کنید.

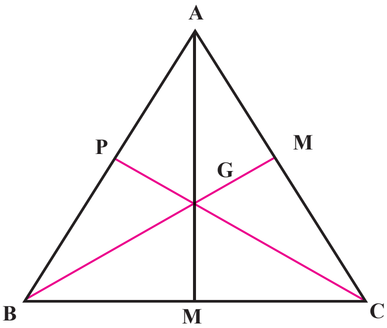
◆ **حل:** مسئله را حل‌شده فرض می‌کنیم. اگر ABC مثلث مطلوب باشد، مطابق شکل طول‌های AB و AC و AM معلوم‌اند.



شکل ۶

اگر میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ ´A امتداد دهیم و ´A را به C و B وصل کنیم، A´BAC چه نوع چهارضلعی است و چرا؟ بنابراین: A´C=AB. پس در مثلث AA´C طول‌های سه ضلع معلوم‌اند و این مثلث قابل رسم است. می‌توان ابتدا این مثلث را رسم کرد و از آنجا مثلث ABC را بنا گذاشت. روش رسم را توضیح دهید و شرط وجود جواب را بنویسید.

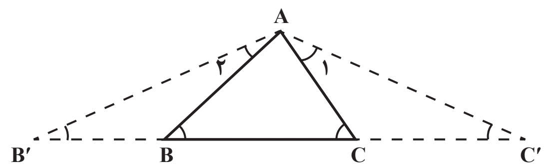
تمرین: مثلث ABC را با معلوم بودن طول‌های سه میانهٔ آن رسم کنید.



شکل ۷

راهنمایی: در مثلث GBC، طول‌های GB و GC و میانهٔ GM معلوم‌اند. ابتدا با توجه به مسئلهٔ قبل، این مثلث را رسم کنید.

● **مثال ۳:** مثلث ABC را با داشتن اندازهٔ محیط و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ رسم کنید.



شکل ۸

◆ **حل:** مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر ABC مثلث مطلوب باشد، اینکه محیط مثلث، یعنی AB+AC+BC معلوم است، به ما این ایده را می‌دهد که باید BC را از دو طرف به اندازهٔ AB و AC امتداد دهیم تا پاره‌خطی مساوی محیط مثلث بنا شود. با این کار، پاره‌خط B´C´ به‌دست می‌آید (BB´=AB و CC´=AC) که با محیط مثلث برابر است. همچنین مثلث‌های ABB´ و ACC´ متساوی‌الساقین هستند. بنابراین:

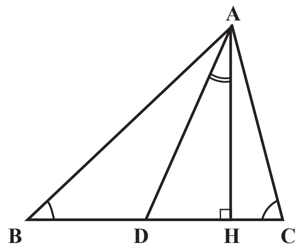
$$\hat{A}_۱ = \hat{C}', \hat{C} = \hat{A}_۱ + \hat{C}' = ۲\hat{C}' \Rightarrow \hat{C}' = \frac{\hat{C}}{۲}$$

$$\hat{A}_۲ = \hat{B}', \hat{B} = \hat{A}_۲ + \hat{B}' = ۲\hat{B}' \Rightarrow \hat{B}' = \frac{\hat{B}}{۲}$$

اکنون مثلث AB´C´ با معلوم بودن B´C´ و زوایای B´ و C´ (که از روی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ قابل رسم و بنا کردن در دو طرف B´C´ هستند ـ به ترسیم‌های اولیه مراجعه شود) قابل رسم است و از آنجا می‌توان مثلث ABC را رسم کرد. طریقهٔ رسم را توضیح دهید.

تمرین: مربعی را با معلوم بودن مجموع ضلع و قطر آن رسم کنید.

● **مثال ۴:** مثلث ABC را با معلوم بودن طول نیمساز AD، اندازه‌های زاویهٔ $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ (با شرط $\hat{C} > \hat{B}$) رسم کنید.



شکل ۹

◆ **حل:** مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر قضیه‌ای را در هندسه به‌یاد داشته باشیم که زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز در مثلث را به ما می‌گوید، کار آسان می‌شود. مطابق این قضیه، نیمساز هر رأس و ارتفاع همان رأس، زاویه‌ای مساوی نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر مثلث، با هم می‌سازند. یعنی در شکل بالا داریم: $D\hat{A}H = \frac{\hat{C}-\hat{B}}{۲}$ (ثابت کنید!) حالا کافی است AD را رسم کنید و سپس دو زاویه، مساوی $\frac{\hat{A}}{۲}$ در طرفین آن بنا کنیم. در ادامه، زاویهٔ مساوی $\frac{\hat{C}-\hat{B}}{۲}$ را در درون یکی از این دو زاویه بسازیم و از D بر ضلع این زاویه، عمودی رسم کنیم و... (راه‌حل را کامل کنید)

ج) اهمیت ترسیم‌های هندسی در چیست

حالا دیگر پاسخ دادن به این پرسش، چندان دشوار نیست. همان‌طور که در این چند مثال ساده دیدید، ترسیم‌های هندسی، اولاً بسیاری از قضایای هندسی را یادآوری می‌کنند، ثانیاً قوهٔ خلاقیت را در هندسه بسیار پرورش می‌دهند. آیا تمرینات کتاب درسی این نقش را به‌طور کامل و کافی ایفا کرده‌اند؟

برای کار بیشتر روی این مسئله‌ها هم اندیشه کنید:

۱. ذوزنقهٔ ABCD را با معلوم بودن طول‌های اضلاع آن رسم کنید.

۲. مثلث ABC را با معلوم بودن سه نقطهٔ وسط‌های اضلاع آن رسم کنید.

۳. مثلث ABC را با معلوم بودن طول‌های BC=a و AC=b و $\hat{A}-\hat{B}$ (با فرض $\hat{A} > \hat{B}$) رسم کنید. (**راهنمایی:** فرض کنید مسئله حل شده است و نقطهٔ C´ روی AB را طوری در نظر بگیرید که CC´=AC باشد.)

۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) را با معلوم بودن وتر BC و میانهٔ BM رسم کنید. (**راهنمایی:** در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.)

مسائل برای حل

ریاضی ۲

۱. در تابع خطی $f(x)=ax+b$ $(a\neq ۰)$، a و b را طوری به‌دست آورید که داشته باشیم: $f(a)=۲b$ و $f(b)=۲a$ سپس نمودار تابع را رسم کنید.

۲. از روی نمودار تابع $f(x)=x^۲$، نمودار تابع $g(x)=x^۲-x$ را رسم کنید.

۳. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۴]{\frac{x^۲-۱}{x^۲-x}}$ را به‌دست آورید.

هندسهٔ ۱

۱. در مثلث ABC، $AB=۱۰$ و $AC=۹$ و طول ارتفاع AH مساوی ۸ واحد است. مساحت مثلث را به‌دست آورید.

۲. در مثلث ABC، $\hat{A}=۹۰^\circ$، $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $BC=۸$. ارتفاع رأس A و نیمساز $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کرده‌اند. اگر D پای نیمساز رأس C باشد، مساحت مثلث ADP را به‌دست آورید.

۳. در مثلث ABC، h_a، h_b و h_c ارتفاع‌های وارد بر اضلاع BC، AC و AB هستند و: $h_a=\frac{۳}{۲}h_b=۲h_c$. اگر محیط مثلث ۲۷ واحد باشد، طول کوچک‌ترین ضلع مثلث چند واحد است؟

هندسهٔ ۲

۱. دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ و نقطهٔ ثابت A در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از $d_۱$ و $d_۲$ به یک فاصله و از A به فاصلهٔ معین k باشد (بحث کنید).

۲. ذوزنقهٔ ABCD را با داشتن طول‌های چهار ضلع آن رسم کنید.

۳. مکان هندسی نقاطی را به‌دست آورید که از آن نقاط مماس‌هایی به طول ثابت k بر دایرهٔ $C(O,r)$ بتوان رسم کرد.

حسابان

۱. تابع f با دامنهٔ $[۰,۱]$ مفروض است. دامنهٔ تابع $f(\log x)$ را به‌دست آورید.

۲. با فرض $x\neq\pm۱$ زوج یا فرد بودن تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^{x+\sin x}$ را بررسی کنید.

۳. تابع f صعودی و فرد است و نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد. ثابت کنید: $f(|x|)=|f(x)|$

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. نشان دهید: $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\tan x=+\infty$

۲. ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[x]+[۲x]+...+[nx]}{n^۲}=\frac{x}{۲}$$

۳. هرگاه $\lim_{x\to۱}\frac{a[x]-۲|x|+b}{x+۱}=۱$ مقادیر a و b را بیابید.

جبر و احتمال

۱. ثابت کنید، هر زیرمجموعهٔ ۲۶ عضوی از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,...,۵۰\}$ حداقل ۲ عضو دارد که نسبت به هم اول باشند.

۲. مجموعهٔ A دارای k عضو است. اگر سه عضو به اعضای آن اضافه شود، به تعداد زیرمجموعه‌هایش ۲۲۴ واحد اضافه می‌شود. این مجموعه چند زیرمجموعهٔ سره دارد؟

۳. هر یک از گزاره‌های زیر را در صورت صحیح بودن اثبات و در غیر این‌صورت با یک مثال نقض رد کنید (P(A) مجموعهٔ توانی A است):

الف) اگر $A\cap B=\varnothing$، آن‌گاه $P(A)\cap P(B)=\varnothing$

ج) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

د) $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ریاضیات گسسته

۱. در صورت وجود، عضو ابتدا و انتهای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $A=\left\{x\in Z \middle| -\sqrt{۱۱}<x\le\sqrt{۲۱}\right\}$

ب) $B=\left\{x\in Q \middle| x^۲\le ۳\right\}$

۲. برای هر $b>۱$ ثابت کنید: اگر $m|n$، آن‌گاه: $b^m-۱|b^n-۱$.

۳. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که در تقسیم بر ۱۹۷، باقی‌ماندهٔ تقسیم از سه برابر مربع خارج‌قسمت، ۷ واحد بیشتر باشد؟

ریاضی عمومی پیش‌دانشگاهی

۱. نمودار تابع نمایی $y=(\sin\alpha)^{\pi x-۱}$ برای چه مقادیری از x زیر خط $y=۱$ قرار می‌گیرد؟

۲. مقدار x و y را از دستگاه زیر به‌دست آورید:

$$\begin{cases}\log(x+۱)+\log(۲y+x^۲)=۲\\ ۴^x+۲^x=۷۲\end{cases}$$

۳. معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید:

الف) $\dfrac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x}=\sqrt{۳}$

ب) $\sin x-\cos x=\cos ۲x$

هندسه‌تحلیلی

۱. خط d بر خطی به معادلهٔ زیر عمود است و با محور zها زاویهٔ ۱۳۵° می‌سازد. زاویهٔ خط d را با محور xها مشخص کنید.

$L: ۲x-۲y=۸,\ z=۳$

۲. قرینهٔ $A(۳,-۳,۰)$ را نسبت به خطی به معادلهٔ زیر به‌دست آورید:

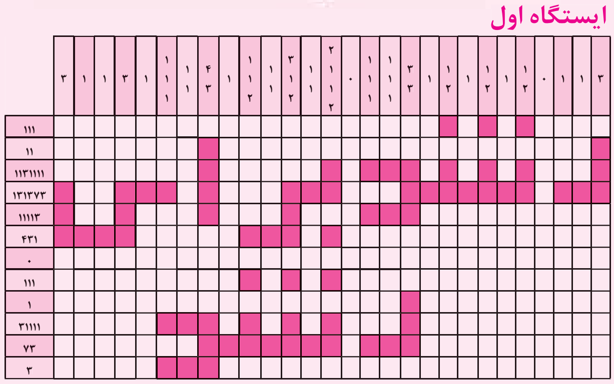
$L: x-y=۳,\ y-z=۰$

۳. دو خط به معادله‌های زیر مفروض‌اند. معادلهٔ خط نیم‌ساز زاویهٔ بین این دو خط را به‌دست آورید.

$$L_۱:\frac{x+۲}{۲}=\frac{۵-y}{۱}=\frac{z}{۲}$$

$$L_۲=\frac{x+۶}{-۴}=\frac{y-۷}{۲}=\frac{z-۱۲}{۴}$$

ایستگاه اول



رمز جدول: رشد برای رشد!

ایستگاه دوم: معماهای منطقی

◆**معمای محکوم یازدهم:** چون جملات روی جام اول و سوم، یک چیز را بیان می‌کنند، پس هر دو درست یا هر دو دروغ هستند. اگر هر دو نوشته دروغ باشند، پس فقط نوشتهٔ روی جام دوم می‌تواند راست باشد و لذا در جام دوم شربت وجود دارد و نوشتهٔ روی آن نشان می‌دهد که در جام اول زهر وجود دارد و در نتیجه جام سوم خالی است. ولی در این صورت نوشتهٔ روی جام اول راست از آب درمی‌آید و این تناقض است. زیرا نوشتهٔ روی جام حاوی زهر نمی‌تواند درست باشد. پس هر دو جمله باید راست باشند و لذا نوشتهٔ روی جام دوم دروغ است و این جام حاوی زهر است. در نتیجه جملهٔ روی آن هم نادرست است و بنابراین در جام اول زهر وجود ندارد و حاوی شربت است و جام سوم هم خالی است. پس محکوم باید جام اول را سر بکشد تا نجات یابد.

◆**معمای محکوم دوازدهم:** این دشوارترین معما از این نوع است! برای حل آن، ابتدا از اینجا شروع می‌کنیم که چون محکوم خواستار روشن شدن وضعیت (خالی یا پربودن) جام هشتم شده است و بعد از توضیح قاضی می‌تواند جام شربت را بیابد، پس ممکن نیست قاضی به او گفته باشد این جام خالی است. (زیرا در آن صورت ابهام بیشتر می‌شود ـ نوشتهٔ روی جام خالی می‌تواند درست یا نادرست باشد، در حالی‌که نوشتهٔ روی جام پر فقط می‌تواند درست یا فقط نادرست باشد.) پس قاضی گفته است که این جام پر (یعنی حاوی شربت یا زهر) است.

اما این جام نمی‌تواند حاوی شربت باشد، زیرا در این صورت نوشتهٔ روی آن درست است و این نوشته می‌گوید که در این جام زهر است و این یعنی تناقض! پس در این جام زهر وجود دارد و نوشتهٔ روی آن نادرست است. این نوشته شامل دو بخش است: «این جام حاوی زهر است» و «جام نهم خالی است.» چون یک بخش از آن درست است، پس برای آنکه کل جمله نادرست باشد، لازم است بخش دوم آن هم نادرست باشد. یعنی جام نهم خالی نیست (و پر است).

اما به‌همان دلیل، جملهٔ روی جام نهم هم نمی‌تواند درست باشد و این جام هم حاوی زهر است و در نتیجه قسمت دوم جملهٔ روی آن نادرست است و لذا نوشتهٔ روی جام ششم درست است و از آنجا نتیجه می‌شود که:

نوشتهٔ روی جام سوم نادرست است. با نگاه به جملهٔ روی جام سوم (نوشتهٔ روی جام پنجم درست است یا نوشتهٔ روی جام هفتم نادرست است) و نادرستی آن نتیجه می‌گیریم که: نوشتهٔ روی جام پنجم نادرست و نوشتهٔ روی جام هفتم درست است.

حال با نگاه به نوشته روی جام پنجم (نوشتهٔ روی جام دوم یا چهارم درست است) و نادرستی این جمله هم نتیجه می‌شود که هیچ‌یک از نوشته‌های جام‌های دوم و چهارم درست نیست و در نتیجه نوشتهٔ جام اول درست است. همچنین با نگاه به نوشتهٔ روی جام هفتم نتیجه می‌شود که شربت در جام اول نیست. پس تا اینجا نتیجه می‌شود که نوشته‌های روی جام‌های دوم، سوم، چهارم، پنجم، هشتم و نهم نادرست و نوشته‌های روی جام‌های اول، ششم و هفتم درست است و چون شربت در جام اول نیست، پس در یکی از جام‌های ششم یا هفتم است. و چون نوشتهٔ روی جام اول درست است، یعنی شربت در جامی با شمارهٔ فرد است، لذا شربت در جام هفتم است.

سؤال: آیا می‌توانید وضعیت بقیهٔ جام‌ها را مشخص کنید؟

راهنمای حل مسائل

آمادگی برای آزمون‌های مستمر

۲ ریاضی

۱.

$$f(a)=a^2+b=2b \Rightarrow a^2=b$$

$$f(b)=ab+b=2a \Rightarrow b=\frac{2a}{a+1}$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{2a}{a+1} \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} a=\frac{2}{a+1} \Rightarrow a^2+a-2=0$$

$$\Rightarrow a=1 \text{ یا } a=-2,\quad b=1 \text{ یا } b=4$$

$$f(x)=x+1 \text{ یا } f(x)=-2x+4$$

نمودار توابع را با نقطه‌یابی رسم کنید.

۲.

$$f(x)=x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$$

حال نمودار $f(x)=x^2$ را $\frac{1}{2}$ واحد در جهت مثبت محور xها و $\frac{1}{4}$ واحد در جهت منفی محور yها انتقال دهید تا رأس سهمی به نقطهٔ $(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ برود.

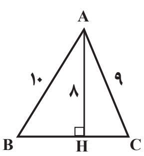
۳.

$$\frac{x^2-1}{x^2-x}\geq 0 \underset{\text{جدول تعیین علامت}}{\overset{\text{با رسم}}{\Longrightarrow}} x\leq -1 \text{ یا } x\geq 0,\ x\neq 1$$

$$D_f=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)-\{1\}$$

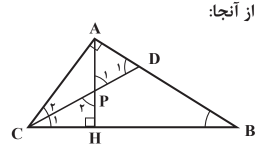
۱ هندسه

۱. به کمک «قضیهٔ فیثاغورس» در مثلث‌های ABH و ACH، طول‌های BH و CH و از آن‌جا BC را به‌دست آورید و مساحت مثلث را تعیین کنید.



جواب: $S=24+4\sqrt{17}$

۲. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ حادهٔ ۳۰° داشته باشد، ضلع مقابل به این زاویه، نصف وتر است. پس AC=4 و از آنجا:



$$AB=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

همچنین داریم:

$$\hat{C}_1=\hat{C}_2=30^\circ,\ \hat{B}=30^\circ \Rightarrow DC=DB=4\sqrt{3}-AD,$$

$$\hat{D}_1=\hat{B}+\hat{C}_1=60^\circ,\ \hat{P}_1=\hat{P}_2=90^\circ-\hat{C}_1=60^\circ$$

پس مثلث APD متساوی‌الاضلاع است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌نویسیم:

$$AC^2+AD^2=CD^2,\ C_2=30^\circ \Rightarrow AD=\frac{CD}{2}$$

$$\Rightarrow 4^2+AD^2=4AD^2 \Rightarrow AD^2=\frac{16}{3},\ AD=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$S_{APD}=\frac{\sqrt{3}}{4}AD^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{16}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۳. با توجه به مساحت مثلث داریم:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

$$\Rightarrow h_a=\frac{2S}{a},\ h_b=\frac{2S}{b},\ h_c=\frac{2S}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{2S}{a}=\frac{3}{2}\times\frac{2S}{b}=2\times\frac{2S}{c} \Rightarrow a=\frac{2b}{3}=\frac{c}{2},$$

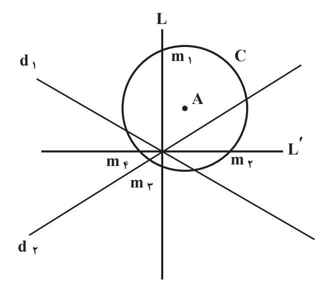
$$a+b+c=27 \Rightarrow a+\frac{3a}{2}+2a=27$$

$$\Rightarrow a=6,\ b=9,\ c=12$$

۲ هندسهٔ

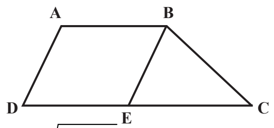
۱. مکان هندسی نقاطی که از d_1 و d_2 به یک فاصله‌اند، نیم‌سازهای زوایای بین آن‌ها و مکان هندسی نقاطی که از A به فاصلهٔ ثابت k هستند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع k است. بنابراین برای یافتن نقطه‌ای که هر دو ویژگی را داشته باشد باید محل تلاقی این دو نیم‌ساز (خطوط L و L′) و دایرهٔ C را بیابیم.

(در شکل نقاط M_1 و M_2 و M_3 و M_4 از d_1 و d_2 به یک فاصله و از A به فاصلهٔ k واقع‌اند.)



بحث: اگر دایرهٔ C هر دو خط d_1 و d_2 را در دو نقطه قطع کند، مسئله حداکثر چهار جواب دارد. اگر بر یکی از آن‌ها مماس باشد و دیگری را در دو نقطه قطع کند، سه جواب داریم و... (ادامه دهید).

۲. مسئله را حل شده فرض کنید. اگر ABCD ذوزنقهٔ مطلوب باشد، از B خطی موازی AD رسم کنید. مطابق شکل، ABED متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه: BE=AD و CE=DC−AB. پس مثلث BEC با داشتن طول‌های سه ضلع آن قابل رسم است و از آنجا می‌توانید ذوزنقه را رسم کنید. طریقهٔ رسم و بحث مربوط به آن را انجام دهید.



۳. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{k^2-r^2}$ می‌باشد.

حسابان

۱. با فرض g(x)=logx دامنهٔ تابع fog را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f=[0,1],\quad D_g=(0,+\infty)$$

$$D_{fog}=\{x\,|\,x\in(0,+\infty),\ \log x\in[0,1]\}$$

$$0\leq \log x\leq 1 \Rightarrow 1\leq x\leq 10$$

$$\Rightarrow D_{fog}=[1,10]$$

۲.

$$f(-x)=\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)^{-x+\sin(-x)}=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-(x+\sin x)}$$

$$=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+\sin x}=f(x)\Rightarrow$$ f زوج است.

۳.

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & x\geq 0 \\ f(-x) & x<0 \end{cases}=\begin{cases} f(x) & x\geq 0 \\ -f(x) & x<0 \end{cases}$$

چون f صعودی است، پس $x\geq 0$ معادل با $f(x)\geq f(0)$ و $x<0$ نیز معادل $f(x)<f(0)$ است و چون نمودار تابع از مبدأ می‌گذرد، پس: $f(0)=0$. بنابراین:

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & f(x)>0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}=|f(x)|$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. دنبالهٔ $a_n=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. بدیهی است که اگر $n\to\infty$، آن‌گاه $a_n\to\frac{\pi}{2}^-$ و با فرض $f(x)=\tan x$،

$$f(a_n)=\cot\frac{1}{n}=\frac{1}{\tan\frac{1}{n}} \text{ و } \lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}=+\infty$$

پس $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$

۲. می‌دانیم: $[a]=a-\{a\}$ ($\{a\}$ جزء اعشاری a است)

پس:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\{x\}+2x-\{2x\}+\ldots+nx-\{nx\}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}x-(\{x\}+\{2x\}+\ldots+\{nx\})}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x}{2n}-\lim_{n\to\infty}\frac{\{x\}+\{2x\}+\ldots+\{nx\}}{n^2}$$

واضح است که حد کسر اول مساوی $\frac{x}{2}$ است. با توجه به اینکه $0\leq\{a\}<1$، نتیجه می‌شود: $0\leq\{x\}+\{2x\}+\ldots+\{nx\}<n$

و در نتیجه:

$$0\leq\frac{\{x\}+\{2x\}+\ldots+\{nx\}}{n^2}<\frac{1}{n}$$

و حد $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$، پس طبق قضیهٔ فشردگی:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{x\}+\{2x\}+\ldots+\{nx\}}{n^2}=0$$

و در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n^2}=\frac{x}{2}$$

۳. چون حد راست و چپ تابع در x=۱ با هم برابرند، لذا:

$$\frac{a+b-۲}{۲}=\frac{b-۲}{۲}=۱\Rightarrow a=۰, b=۴$$

جبر و احتمال

۱. هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. لذا کافی است ۲۵ مجموعهٔ دو عضوی بسازید و از اصل لانه کبوتری استفاده کنید.

۲. معادلهٔ $۲۲۴=۲^{K+۳}-۲^K$ را حل کنید و K را بیابید.

۳. برای دو قسمت از این سه قسمت مثال‌های نقض فراوانی یافت می‌شود!

ریاضیات گسسته

۱. الف) $\min A=-۲$ و $\max A=۴$ ب) مجموعهٔ B عضو ابتدا و عضو انتها ندارد.

۲. با توجه به فرض، یعنی $m|n$، داریم: $n=mq$ و لذا می‌توان نوشت:

$$b^n-۱=b^{mq}-۱=(b^m)^q-۱=(b^m-۱)\times(\dots-)$$

۳. کافی است با توجه به فرض و شرایط قضیهٔ تقسیم، تعداد qهایی که در رابطهٔ $r=۳q^۲+۷$ صدق می‌کنند، بیابید!

هندسه تحلیلی

۱. بردار هادی خط d $\vec{U}=(\cos\alpha,\cos\beta,-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ است.
$U_L=(۱,۱,۰)$

$$d\perp L\Rightarrow\cos\alpha+\cos\beta=۰\Rightarrow\cos\alpha=-\cos\beta$$

از طرف دیگر داریم:

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\frac{۱}{۲}=۱\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۱}{۲}$$

پس خط d با محور xها زاویهٔ °۶۰ یا °۱۲۰ می‌سازد.

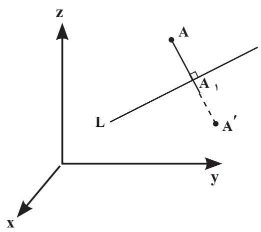
۲. ابتدا تصویر قائم A را روی L به‌دست می‌آوریم و آن را $A_۱$ می‌نامیم.

$$L:\begin{cases}y=x-۳\\y=z\end{cases}\Rightarrow L:x-۳=y=z=t$$

$$A_۱\in L\Rightarrow A_۱(t+۳,t,t)$$

$$\overline{AA_۱}\perp U_L\Rightarrow\overline{AA_۱}.U_L=۰\Rightarrow t=-۱$$

$$t=-۱\Rightarrow A_۱(۲,-۱,-۱)$$



اگر ´A قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط L باشد، داریم:

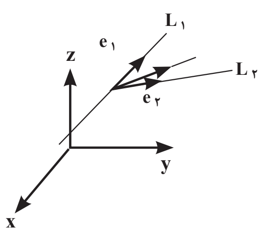
$$A'\left|\begin{array}{l}x_{A'}=۲x_{A_۱}-x_A=۴\\y_{A'}=۲y_{A_۱}-y_A=-۵\\z_{A'}=۲z_{A_۱}-z_A=۱\end{array}\right.$$

۳. نقطهٔ برخورد دو خط $L_۱$ و $L_۲$، نقطه A به مختصات (۲،۳،۴) است.

اکنون اگر $e_۱$ و $e_۲$ به‌ترتیب بردارهای واحد در راستای دو خط $L_۱$ و $L_۲$ باشند، راستای نیمساز زاویهٔ بین $L_۱$ و $L_۲$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$e_۱+e_۲=(\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})+(-\frac{۴}{۶},\frac{۲}{۶},\frac{۴}{۶})=(۰,۰,\frac{۴}{۳})$$

پس معادلهٔ نیمساز $\begin{cases}x=۲\\y=۳\end{cases}$ است.



ریاضی عمومی پیش‌دانشگاهی

۱. چون $-۱\le\sin\alpha\le۱$ و از آنجا که در تابع نهایی باید پایه مثبت باشد، در نتیجه: $۰<\sin\alpha<۱$.

در تابع نمایی $y=a^x$ که در آن $۰<a<۱$، نمودار تابع به‌صورت نزولی است، پس $y=(\sin\alpha)^{\pi x-۱}$ تابعی نزولی است. چون مقادیری از x را می‌خواهیم که نمودار زیر خط y=۱ باشد، پس داریم:

$$y<۱\Rightarrow(\sin\alpha)^{\pi x-۱}<۱=\sin\alpha\quad(۱)$$

چون تابع نزولی است، وقتی رابطهٔ (۱) برقرار است که: $\pi x-۱>۰$. در نتیجه: $x>\frac{۱}{\pi}$.

۲.

$$۴^x+۲^x-۷۲=۰\Rightarrow۲^{۲x}+۲^x-۷۲=۰$$
$$\Rightarrow(۲^x+۹)(۲^x-۸)=۰$$
$$\Rightarrow۲^x-۸=۰\Rightarrow x=۳$$

اکنون از x=۳ داریم:

$$\log(۳+۱)+\log(۲y+۹)=۲$$
$$\Rightarrow\log۴(۲y+۹)=\log۱۰۰$$
$$\Rightarrow۲y+۹=۲۵\Rightarrow y=۸$$

۳. الف) با توجه به اتحاد:

$$\cos۲x=۱-۲\sin^۲x\Rightarrow۱-\cos۲x=۲\sin^۲x$$

خواهیم داشت:

$$\frac{۲\sin^۲x}{۲\sin x\cos x}=\sqrt{۳}$$

با شرط $\sin x\neq۰$ نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{۳}\cos x-\sin x=۰\Rightarrow\tan x=\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

ب) با توجه به اتحاد

$$\cos۲x=\cos^۲x-\sin^۲x$$

خواهیم داشت:

$$\sin x-\cos x+\sin^۲x-\cos^۲x=۰$$
$$\Rightarrow(\sin x-\cos x)(۱+\sin x+\cos x)=۰$$

و با توجه به اتحاد $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ دو دسته جواب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\quad\text{و}\quad x=۲k\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}$$

پاسخ پرسش‌های پیکارجو!

۱. اگر جمله‌ای از این دنباله، مثلاً جملهٔ kام آن، عدد گویای $\frac{p}{q}$ باشد، در این صورت با توجه به ضابطهٔ دنباله داریم:

$$(a_{k+1}+k)\frac{p}{q}=1 \Rightarrow a_{k+1}=\frac{q}{p}-k=\frac{q-pk}{p}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، مجموع عددهای صورت و مخرج کسر a_{k+1} از مجموع صورت و مخرج کسر a_k کمتر است. بنابراین مجموع صورت و مخرج کسر a_{k+2} نیز کمتر از مجموع صورت و مخرج کسر a_{k+1} است و بعد از چندجمله، صورت کسر منفی می‌شود. اما این با فرض مثبت بودن جملات دنباله تناقض دارد. پس هیچ‌یک از جملات دنباله نمی‌تواند عددی گویا باشد و پاسخ صحیح گزینهٔ (هـ) است.

۲. با توجه به ویژگی‌های بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$، می‌دانیم که هر جملهٔ آن به‌صورت ka^mb^{n-m} است و $0\leq m\leq n$. بنابراین هر جملهٔ بسط $(5^{\frac{1}{20}}+5^{\frac{1}{21}})^{1395}$ به‌صورت $k(5^{\frac{1}{20}})^m(5^{\frac{1}{21}})^{1395-m}$ است که به‌صورت $k(5)^{\frac{m}{20}+\frac{1395-m}{21}}$ ساده می‌شود. برای آنکه این جمله گویا باشد، باید توان ۵، عددی صحیح باشد، یعنی:

$\frac{21m+20\times 1395-20m}{20\times 21}\in Z$ و یا $\frac{m+20\times 1386+180}{20\times 21}\in Z$ و چون ۱۳۸۶ مضرب ۲۱ است، پس باید m+۱۸۰ مضرب ۲۱×۲۰ باشد و در نتیجه: m=۴۲۰k-۱۸۰.

به ازای k=۱,۲,۳، سه مقدار قابل قبول برای m به‌دست می‌آید، (با توجه به شرط $0\leq m\leq 1395$) و پاسخ صحیح گزینهٔ (د) است.

۳. اگر تعداد اضلاع این دو چندضلعی m و n باشد، طبق فرض داریم:

$$\frac{(m-2)180}{m}-\frac{(n-2)180}{n}=9 \Rightarrow 1-\frac{2}{m}-(1-\frac{2}{n})=\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n}-\frac{2}{m}=\frac{1}{20},\frac{1}{n}-\frac{1}{m}=\frac{1}{40}\Rightarrow \frac{1}{n}=\frac{m+40}{40m},$$

$$n=\frac{40m}{40+m}=\frac{40(m+40)-1600}{40+m}=40-\frac{1600}{40+m}$$

بنابراین باید ۱۶۰۰ مضرب m+۴۰ باشد و چون ۱۶۰۰ مضرب ۱۰ است، پس باید m هم مضرب ۱۰ باشد و m≥۳. لذا نخستین مقدار قابل قبول برای m می‌شود ۱۰ و به ازای m=۱۰، n=۸ و به ازای این دو مقدار، اختلاف تعداد قطرها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{m(m-3)}{2}-\frac{n(n-3)}{2}=\frac{10\times 7}{2}-\frac{8\times 5}{2}=15$$ (گزینهٔ ب)

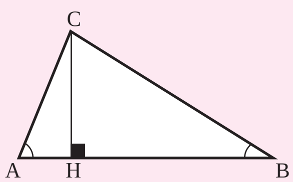
۴.

$$\hat{A}=75^\circ, CH=\frac{1}{2}AB$$

$$\cot g\hat{A}=\frac{AH}{CH}=\frac{AB-BH}{CH}$$

$$=\frac{AB}{CH}-\frac{BH}{CH}=2-\cot gB,\ \ \cot g\hat{A}=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cot gB=\sqrt{3}\Rightarrow \hat{B}=30^\circ$$ (گزینهٔ ب)



۵. فرض می‌کنیم تعداد دانش‌آموزان n و تعداد دانشجویان ۳n و تعداد بردهای دانش‌آموزان m و تعداد بردهای دانشجویان ۳m باشد. پس تعداد کل بازی‌ها ۴m است. از طرف دیگر، تعداد بازی‌ها هم $\binom{4n}{2}$ است (چرا؟) و در نتیجه:

$$\binom{4n}{2}=4m\Rightarrow \frac{4n(4n-1)}{2}=4m,\ n(4n-1)=2m$$

و چون ۴n-۱ عددی فرد و ۲m عددی زوج است، لذا باید n زوج باشد، یعنی n=۲k و در نتیجه:

$$2m=2k(8k-1),\ m=k(8k-1)$$

به ازای k=۱، حداقل مقدار m، یعنی m=۷ به‌دست می‌آید. (گزینهٔ ب)

توجه: در این حالت، تعداد دانش‌آموزان ۲ نفر، تعداد دانشجویان ۶ نفر و تعداد بردهای دانشجویان ۲۱ دست است.