



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

۱۱۴

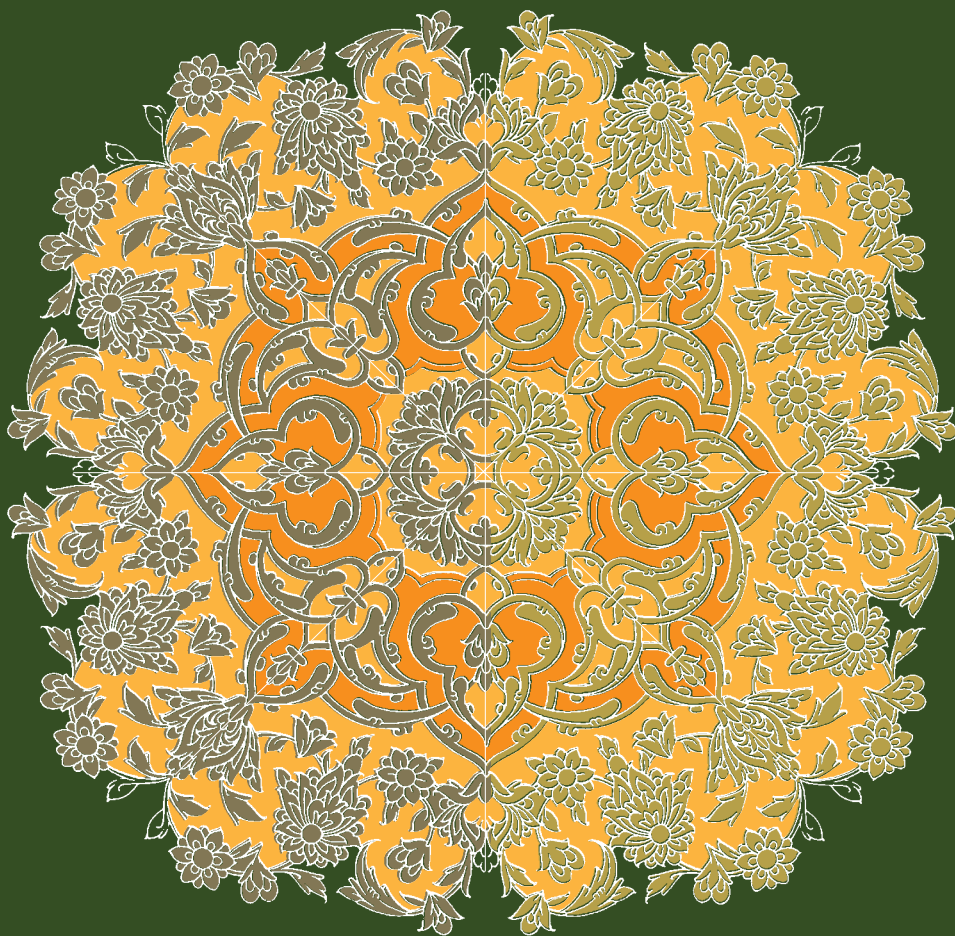
آشنایی با روش

روش

دوره سی و یکم، شماره ۱۱۴، زمستان ۱۳۹۲، ۶۴ صفحه، ۸۵۰۰ ریال

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

www.roshdmag.ir ISSN: 1606-9226



- مأموریت جدید دانشگاه فرهنگیان مبارک باد!
- تاریخ شفاهی برنامه درسی ریاضی
- بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در درک مفهوم تابع
- نگاه کردن به پیتزا با چشم ریاضی

نگاه کردن به پیتزا با چشم ریاضی
مقاله صفحه ۳۶ را بخوانید



شکل ۳ پ: جوزف آلبرز ۱۹۶۴



شکل ۳ پ: فرانک استلا ۱۹۷۸



شکل ۱۲: مجسمه دو نیم کره حول ۲ محور، مکس بیل ۱۹۶۵-۶

آموزش ریاضه

دوره سی و یکم، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۲
فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

- | | | |
|----|--|------------------------------------|
| ۲ | یادداشت سر دبیر: مأموریت جدید دانشگاه فرهنگیان مبارک باد! | زهرا گویا |
| ۴ | گفت و گو: تاریخ شفاهی برنامه درسی ریاضی | بیژن ظهوری زنگنه |
| ۱۴ | مقاله: استفاده از محور اعداد برای کنکاش در حل معادلات خطی | پل دیکینسون، فرانک اید/ شیوا زمانی |
| ۲۴ | مقاله: بازنمایی ها و نقش آن در درک مفهوم تابع | زهرا گویا، علی امامی |
| ۳۶ | مقاله: نگاه کردن به پیتزا با چشم ریاضی | ماریون والتر/ سهیلا غلام آزاد |
| ۴۴ | روایت معلمان: گزارش از یک کلاس درس ریاضی ششم دبستان | زهرا منتظری و سرور شیدانی |
| ۵۱ | روایت معلمان: آموزش مدل میله ای برای حل مسائل ریاضی | مهسا خدایاری |
| ۵۸ | پیوند بین توسعه کلاس درس، توسعه حرفه ای معلمان و توسعه مدرسه | نرگس مرتاضی مهربانی |
| ۶۰ | گزارش: یادگیری ریاضی در طول عمر | سمیرا مهر آیین |
| ۶۳ | نامه های رسیده | |

مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایران شهر شمالی، پلاک ۲۶۶ صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۵۵ ● تلفن: ۸۸۲۱۱۶۱-۹ (داخلی ۳۷۴) ● نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ● وبگاه: www.roshdmag.ir
● پیام نگار: riyazi@roshdmag.ir ● تلفن پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ● کد مدیر مسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۳ ● کد امور مشترکین: ۱۱۴ ● نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱ ● تلفن امور مشترکین: ۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۳۳۶۶۵۵ ● چاپ: شرکت افست (سهامی عام) ● شمارگان: ۸۰۰۰

● مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. ● شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه مطلب نیز مشخص شود.
● نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود. ● برای ترجمه مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستنده مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه مقاله را به مترجم دیگری بدهد. ● در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود. ● بی نوشته ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره صفحه مورد استفاده باشد. ● چکیده ای از اثر و مقاله ارسال شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
● در مقاله های تحقیقی یا توصیفی، واژه های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. ● هم چنین: ● مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است. ● مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبنی نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. ● مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی شود.



از زمان تأسیس آموزش عمومی در ایران، «فرهنگی» نامی بود که عمدتاً به معلمان اطلاق می‌شد و گاهی با اندکی تساهل و تسامح، همه دست‌اندرکاران عرصه تعلیم و تربیت و از جمله، تمام کسانی که در نهادهای آموزشی کار می‌کردند، به «فرهنگی» بودن شناخته می‌شدند و به آن افتخار می‌کردند.

هدفم از طرح این بحث این است که «فرهنگی» بودن با «کادر آموزشی» یا «کادر اجرایی» بودن یک مؤسسه آموزشی فرق دارد. «فرهنگی» با خودش، بار معنایی عمیقی را یدک می‌کشد که مسئولیت‌آور است، هر چند این واژه در گذر زمان و اغلب به دلایل غیرعلمی، دچار فراز و فرودهایی بوده و تبدیل به «کارمند آموزش و پرورش» شده و زمان دیگری، نامی مثل «مربی» بر وی نهاده شده است.

مأموریت جدید دانشگاه فرهنگیان مبارک باد!



حالا بعد از بارها تغییر واژه و تغییر انتظارات از «فرهنگی» ها، اتفاق بزرگی افتاده است که اگر خوب از آن استفاده شود، فرصت بی‌بدیلی برای ارتقای «معلمان» یا همان «فرهنگیان» خواهد بود. اگر هم به حساسیت‌ها و ظرافت‌های «فرهنگیان» توجه نشود، می‌تواند تهدیدی برای سرمایه‌های بالقوه انسانی باشد. بدین سبب، این دانشگاه با سرنوشت همه ما فرهنگیان گره خواهد خورد و لازم است که نسبت به آن، دغدغه داشته باشیم و با طرح ایده‌های قابل اجرا، به اعتلای دانشگاه کمک کنیم و از درافتادن آن به دام افراط و تفریط‌های احتمالی که از بعضی ماده‌های اساسنامه ممکن است استنباط شود، جلوگیری کنیم. اما قبل از آن، باید این اساسنامه را بشناسیم تا بتوانیم از تجارب عمیقی که حاصل خرد جمعی جهانیان است، در جهت اعتلای این دانشگاه، بهره بگیریم.

اساسنامه دانشگاه فرهنگیان^۱ که مشتمل بر ۳۱ ماده است، در ششم دی‌ماه ۱۳۹۰، به تصویب «شورای عالی انقلاب فرهنگی» رسید. در ماده ۱- کلیات، آمده است که «دانشگاه فرهنگیان، دانشگاهی است: برای تأمین، تربیت و توانمندسازی منابع انسانی وزارت آموزش و پرورش ...» و در ادامه این ماده، صفات برجسته این «منابع انسانی» را با جزئیات، بیان کرده است. به این ترتیب، دانشگاه فرهنگیان پا به عرصه وجود گذاشته است و با این که تنها دو سال از تولدش می‌گذرد، با سرعت اعجاب‌آوری، رشد کمی داشته است. برای اطلاع، این دانشگاه در سال تحصیلی ۹۳-۱۳۹۲، حدود ۶۴۰۰۰ نفر دانشجو از طریق سازمان سنجش آموزش کشور گرفته و در تکمیل ظرفیت نیز، قرار است حدود ۲۰۰۰۰ نفر دیگر بگیرد که این تعداد وسیع دانشجو، در حدود ۹۰ پردیس شبانه‌روزی پسرانه و دخترانه در تمام استان‌های ایران، مشغول به تحصیل می‌شوند.

در هر صورت، لازم است که از این فرصت پیش آمده، برای بازسازی و ارتقای معلمان - بخوانید فرهنگیان - در تمام سطوح، به بهترین شکل استفاده شود و در اجرا، هر کجا به مشکلی برخورد شد، تغییر مناسب ایجاد شود. زیرا به نظر می‌رسد که در سراسر اساسنامه، آگاهانه و عامدانه، از کلماتی که «باز» و «قابل تفسیر» اند، استفاده شده است. بدین جهت، گروه‌های قوی کارشناسی می‌توانند بدون درگیر شدن با مسائل غیرضروری، و با توجه به چشم‌اندازی که برای تربیت نیروی انسانی آموزش و پرورش ترسیم شده، بخش‌های مختلف این اساسنامه را مطابق با دانش و نیازهای روز، تعبیر و تفسیر کنند. یعنی، اگر صرف این که اساسنامه به تصویب رسیده و نعل به نعل، پس اجرای آن ضروری است، تصویری، خطرناک و جفا در حق فرهنگیان است. این اساسنامه هم مثل هر مصوبه دیگری، به اندازه کافی انعطاف دارد و تغییرات ضروری در آن، پیش‌بینی شده است. بدین سبب، به خود اجازه داده‌ام که به عنوان یک فرهنگی، پیشنهادی برای برنامه درسی و جهت‌گیری فعالیت‌های آن بدهم. بدیهی است که بررسی هر پیشنهادی در این زمینه، نیازمند کار کارشناسی است.

به‌طور تاریخی، آموزش معلمان در جهان، از مدرسه‌ها شروع شد و به خصوص مدارس متوسطه، نیروهای مورد نیاز خود را در همان‌جا، آموزش می‌دادند. بعدها با توسعه آموزش عمومی و گسترش آموزش عالی، در ایران نیز «دارالمعلمین»^۲ و دانش‌سراهای مقدماتی و دانش‌سراهای عالی تأسیس شدند و مسئولیت اصلی تربیت معلم، به آن‌ها واگذار شد. «دارالمعلمین» یک نهاد رسمی دانشگاهی بود، اما دانش‌سراها ماهیت مستقلی داشتند و به دو صورت شبانه‌روزی و غیرشبانه‌روزی اداره می‌شدند. در واقع، «شبانه‌روزی» بودن، امتیازی برای کسانی بود که غیربومی بودند و امکان تهیه مسکن و غذا نداشتند و بدون این پشتیبانی، نمی‌توانستند معلم شوند. در غیر این صورت، اقامت «شبانه‌روزی» برایشان الزامی نبود. هم‌چنین، دانشجو - معلمان به طور مستمر، هفته‌ای یک روز در مدرسه‌ها، «تدریس عملی» داشتند و اغلب، مسئولیت کلاسی را که می‌رفتند، به‌تنهایی به‌عهده می‌گرفتند.

به مرور که دانشگاه‌ها گسترش یافتند، به کسانی که می‌خواستند معلم شوند، امتیازهای ویژه‌ای دادند که یکی از آن‌ها، استخدام با پایه ۷ به جای پایه ۶ بود. بعداً که دوره‌های دبیری یکی پس از دیگری در دانشگاه‌های سراسر کشور تأسیس شد، درس‌های علوم تربیتی و از همه مهم‌تر، «تدریس عملی» که به درس «تمرین دبیری» تغییر نام یافت، جزو درس‌های الزامی این دوره‌ها بود. در دوره‌های دبیری، معمولاً همه درس‌های تربیتی، توسط دانشکده‌های علوم تربیتی ارائه می‌شد. اما بعد از انقلاب و بسته شدن سه ساله دانشگاه‌ها و تشکیل ستاد انقلاب فرهنگی، در دوباره‌نگری برنامه‌ها، گروه ریاضی ستاد موفق شد که برای رشته‌های دبیری ریاضی، مسئولیت اجرای درس‌های

تمرین دبیری را جزو وظایف گروه‌های ریاضی تعریف کند. این کار باعث شد تا زمینه‌های مناسبی که در گذشته و در دانش‌سراهای تربیت معلم برای تعامل دانشجو - معلم با معلم ریاضی شاغل به تدریس در کلاس درس واقعی داشت، دوباره احیا گردد و در این مورد، گروه ریاضی، پیش‌قدم بود. این دوبارنگری‌ها، زمینه را برای کاهش دانش‌سراهای تربیت معلم و تقویت رشته‌های دبیری فراهم کرد. اما به دلایلی که استنادات زیادی درباره آن‌ها منتشر نشده و کارهای پژوهشی چندانی در این ارتباط صورت نگرفته است، گروه‌ها و دانشکده‌های ریاضی با تصمیمی نانوشت، شروع به بستن رشته‌های دبیری ریاضی کردند و در این کار، آن‌چنان گوی سبقت از هم ربودند که حتی دانشگاه تربیت معلم که با مأموریت تربیت معلم آغاز به کار کرده بود، کلاً رشته‌های دبیری را تعطیل کرد و نام دانشگاه هم که دیگر موضوعیت نداشت، تغییر یافت. هم‌چنین، حدود ۸۰ درصد ظرفیت دانشگاه تربیت دبیر فنی دانشگاه شهید رجایی نیز که وابسته به آموزش و پرورش است، اخیراً به اصطلاح، آزاد شد! بالاخره، با تجمع مراکز باقی‌مانده تربیت معلم، مجتمع پیامبر اعظم تأسیس شد و همه این اتفاقات، بستر مناسبی برای تأسیس دانشگاه فرهنگیان ایجاد نمود. نیوتن گفته بود که اگر آینده را دورتر می‌بیند، به این علت است که بر شانه‌های غول‌ها ایستاده است. این سخن نغز، انگیزه‌ای شد تا اشاره بسیار کوتاهی به تاریخ تربیت معلم در ایران داشته باشم که بدانیم چه تلاش‌هایی انجام شده و از آن خرد جمعی و دستاوردهایی که متعلق به ملت ایران است، چگونه می‌توانیم بیاموزیم و به نفع ارتقای دانشگاه فرهنگیان، از آن‌ها بهره بگیریم. تجزیه و تحلیل مستندات تاریخی و پژوهش‌های انجام شده در حوزه آموزش معلمان و در این خصوص، آموزش معلمان ریاضی، نشان می‌دهد که پیشرفت این حوزه، در گرو تعامل معنادار بین مدرسه و دانشگاه یعنی بین آموزش عالی و آموزش عمومی بوده و هست. البته در طول تاریخ، به سبب تأثیرپذیری شدید این حوزه از تغییرات اجتماعی، فرهنگی، اقتصادی، سیاسی، جمعیت‌شناسی و ده‌ها عامل دیگر، شکل و نحوه این تعامل در زمان‌های گوناگون، تغییر یافته است.

مطالعه برنامه‌های تربیت معلم در کشورهای دیگر نیز نشان می‌دهد که آن‌ها هم بر چنین تعاملی تأکید داشته و دارند. نمونه بارز این تعامل این است که در کشورهای آمریکای شمالی و اروپا، دانشکده‌های علوم تربیتی، عمدتاً در دوره کارشناسی، به دوره آموزش معلمان اختصاص دارد و خروجی‌های آن‌ها، مدرک «صلاحیت معلمی^۲» یا «گواهی معلمی» دریافت می‌کنند. برای نمونه، روند کار در اکثر استان‌های کانادا این گونه است که دانشجویان، ابتدا در دانشکده‌های دیگر، در یک رشته خاص، آموزش‌های موضوعی را می‌بینند و پس از گذراندن سه سال یا پس از اخذ مدرک کارشناسی (چهار سال) و متخصص شدن در یک حوزه موضوعی مثلاً ریاضی، برای دوره معلمی درخواست می‌کنند. جالب اینجاست که به دلیل امنیت شغلی

نسبتاً بالایی که حرفه معلمی دارد، متقاضیان آن زیادند و رقابت جدی برای ورود به این دوره‌ها وجود دارد. دانشجوی پذیرفته شده، می‌تواند وارد یک برنامه دو ساله - بدون تابستان - یا یک دوره ۱۲ ماهه فشرده شود و پس از گذراندن این دوره «پیش از خدمت^۴»، گواهی صلاحیت حرفه‌ای دریافت نماید. ویژگی مهم این دوره‌ها، «تدریس‌های عملی^۵» است که بخش اعظم دوره را به خود اختصاص می‌دهند. در تدریس‌های عملی که چندین هفته طول می‌کشد، دانشجو - معلم در جوار معلم ثابت کلاس، در تدریس مشارکت می‌کند و در همان حال، ناظر دانشجو^۶ که یک آموزشگر حرفه‌ای است، همراه دانشجو - معلم در کلاس حضور دارد. بالاخره، موقع ارزشیابی، استاد درس، ناظر دانشجو و معلم کلاس درس به‌طور مشترک، با هم تبادل نظر می‌کنند و بر سر نمره دانشجو - معلم به توافق می‌رسند.

همین وضعیت، برای «آموزش ضمن خدمت^۷» نیز برقرار است که عمدتاً به دوره‌های «توسعه حرفه‌ای معلمان^۸» معروفاند. برای این کار، مراکز ویژه‌ای مانند دانشگاه فرهنگیان هستند که مسئولیت اصلی آن‌ها، علاوه بر دوره‌های مختوم به اعطای گواهی حرفه‌ای و صلاحیت معلمی، برگزاری مستمر دوره‌های توسعه حرفه‌ای، به منظور به‌روز کردن و ارتقای توانایی‌های حرفه‌ای معلمان است و یک نمونه از این مراکز، در همین شماره معرفی شده است.

به گفته شولمن (۱۹۸۷)، انواع دانش‌های ضروری برای معلمان - و در این مورد، معلمان ریاضی - به‌خصوص دانش محتوایی - پداگوژیکی^۹، ترکیب خاصی از دانش و پداگوژی است که به طور منحصر به فردی، جزو قلمرو معلمان است و همان شکل خاص فهم و درک حرفه‌ای آن‌هاست. برای تولید چنین دانشی، لازم است به این مهم توجه شود که حرفه معلمی، حرفه‌ای غیرقطعی و نیازمند اصلاح و به‌روزشدن مستمر است. ایجاد و اصلاح مستمر این آموزش، از طریق توسعه حرفه‌ای معلمان، قبل و ضمن خدمت، امکان‌پذیر است. معلمانی که در دانشگاه‌ها محتوای موضوعی - تخصصی را آموزش می‌بینند، لازم است که در مراکز مانند دانشگاه فرهنگیان، نیمه دوم و بخش اصلی حرفه معلمی را نیز آموزش ببینند و در طول خدمت خود، به طور مستمر، حرفه خود را اعتلا و ارتقا بخشند. چنین همکاری معنادار و اثربخشی بین دانشگاه‌ها و مراکز توسعه حرفه‌ای معلمان در تمام دنیا، مثبت بوده و استنادات آن موجود است. اما تقریباً در جایی مستند نشده که این مراکز، خواسته باشند که به اصطلاح، چرخ را از نو اختراع کرده و مثلاً، خود را درگیر برگزاری دوره‌های تحصیلات تکمیلی موضوعی و تأسیس رشته‌های جدید کرده باشند. در عوض، این مراکز فعالانه، به تولید دانش حرفه‌ای و نوآوری‌های تدریس، می‌پردازند. با چنین نگاهی، ظرفیت به وجود آمده به نام «دانشگاه فرهنگیان»، می‌تواند فرصت مغتنمی برای نظام آموزشی ایران ایجاد کند. مأموریت جدید دانشگاه فرهنگیان، مبارک باد!

زهرا گویا



پی‌نوشت‌ها

۱. علاقه‌مندان می‌توانند با کلید واژه «اساسنامه دانشگاه فرهنگیان» توسط یکی از موتورهای جست‌وجوگر، آن را مطالعه کنند.

2. Teachers' Colleges
3. Teacher Certificate
4. Pre- service Teacher Training
5. Practicum
6. Faculty Supervisor
7. In- service Teacher Training
8. Teachers' Professional Development
9. Pedagogical Content Knowledge (PCK)

گفتگو

تاریخ ستفاه برنامه درسی ریاضه

دکتر بیژن زنگنه - دانشگاه صنعتی شریف

پای صحبت میرزا جلیلی، دبیر بازنشسته ریاضی و پیشکسوت تغییرات کتاب‌های درسی ریاضی در ایران



کلیدواژه‌ها: برنامه درسی، کتاب درسی، تألیف کتاب درسی، دوره ریاضیات جدید، سیر تحول برنامه درسی

اشاره

پیش‌کسوتان هر حوزه‌ای، از شأنیت ویژه‌ای برخوردارند و پای صحبتشان نشستن، فرصت مغتنمی برای شناخت عمیق‌تر تاریخ پر فراز و فرود آن حوزه فراهم می‌کند. در حوزه تألیف، میرزا جلیلی یکی از پیش‌کسوتان ریاضی مدرسه‌ای است که هنوز، حرف‌های بسیاری برای شنیده شدن دارد. اعضای هیئت تحریریه لازم دانستند که به عبادت میرزا جلیلی بروند و با استفاده از این فرصت، گپ‌وگفتی با ایشان داشته باشند. آنچه در پی می‌آید، خلاصه‌ای از آن جلسه است که با سلام و احوال‌پرسی اعضای تحریریه با میرزا جلیلی و خانواده محترمشان آغاز شد. سپس ایشان شروع کردند.

بسم الله الرحمن الرحيم. با عرض تشکر از شما دوستان و همکاران مجله رشد آموزش ریاضی که زحمت کشیدید. بنده توقع نداشتم که با گرفتاری‌هایی که شما همکاران دارید، زحمت بکشید و به دیدنم بیایید. اما لطف کردید. بنده در حال حاضر، حالم بعد از کسالت و عمل جراحی بهتر است و مشکلی ندارم. آنچه دوست دارم خدمت همکاران عرض کنم این است که من، تقریباً ۶۰ سال پیش وارد خدمت آموزش و پرورش شدم. سال‌های اول خدمتم را در شهرستان کازرون گذراندم که در آنجا، در حقیقت بعد از اینکه دوره به اصطلاح تعهد دانش‌سرایم تمام شد، به دانش‌سرای عالی رفتم و در آنجا، دوره لیسانس را گذراندم و دوباره، برگشتم به کازرون.

حاضران در جمع، از آقای جلیلی راجع به پیشینه تحصیلی و ارتباطشان با برنامه درسی به اصطلاح «ریاضیات جدید» پرسیدند و ایشان چنین گفت:

من تحصیلات ابتدایی‌ام را در دبستان فردوسی بوشهر گذراندم، یعنی دوره ۶ ساله ابتدایی را. بعد وارد دبیرستان سعادت بوشهر شدم که تقریباً، هم‌زمان با تأسیس دارالفنون در بوشهر تأسیس شده بود. بعد از دوره اول دبیرستان - تا پایان کلاس نهم - امتحان ورودی دانش‌سرای مقدماتی شیراز را دادم و پس از قبولی، وارد آنجا شدم. بعد از اتمام دوره دانش‌سرای مقدماتی، به‌عنوان معلم به شهرستان کازرون اعزام شدم. در آن موقع، چون در کازرون دبیر لیسانس ریاضی نبود، مشغول تدریس ریاضی در دبیرستان شدم. در سال ۱۳۴۰ در کازرون، با دو آمریکایی که در آنجا کار می‌کردند، آشنا شدم که خانم یکی از آن‌ها معلم ریاضی بود. برای او یک مجله ریاضی می‌فرستادند که چون علاقه داشتم، به من می‌داد که مطالعه کنم. در یکی از شماره‌های آن مجله، راجع به «ریاضیات

جدید» که در آمریکا شروع به تدریس آن کرده بودند، مقاله‌ای خواندم. در آن مقاله، درباره «مجموعه‌ها»، «منطق ریاضی» و «ماتریس» توضیح داده بود و گفته بود که در سطح دبیرستان، این‌ها مطالبی است که در آمریکا تدریس می‌شود. این مطالب در ذهن من خوب جا گرفت و علاقه‌مند شدم که با آن‌ها بیشتر آشنا شوم و در این زمینه، سؤالات مکرری از آن دو نفر آمریکایی می‌کردم. تا اینکه در سال ۱۳۴۸، از طرف بخش فرهنگی سفارت انگلستان، مسابقه‌ای گذاشتند تا افرادی را برای ادامه تحصیل، به آن کشور اعزام کنند. من در آن مسابقات شرکت کردم و پس از قبولی در امتحان کتبی، در مصاحبه از من پرسیدند که برای چه می‌خواهم به انگلستان بروم و در چه حوزه‌ای می‌خواهم کار کنم. من هم گفتم که «می‌خواهم بروم ریاضیات جدید را یاد بگیرم و بیایم در ایران تدریس بکنم». بالاخره، در این مسابقه انتخاب شدم و به انگلستان اعزام شدم. در آنجا در دانشکده ریاضی امپریال کالج لندن، یک دوره یک ساله ریاضیات جدید را گذراندم که در سطح تقریباً فوق لیسانس بود. در آن دوره، منطق و نظریه جبر و این مطالب را یاد گرفتم. طی این دوره، با علاقه‌مندی، کتاب‌های درسی ریاضی را که در دبیرستان‌های آنجا تدریس می‌شد، با دقت مطالعه کردم. برای مثال، مجموعه کتاب‌های «پروژه ریاضیات مدرسه^۱» را مطالعه کردم و بعد، پس از بازگشت از انگلستان، تعداد زیادی از آن‌ها را به همراه آوردم و گزارش مفصلی در این زمینه به وزیر آموزش و پرورش وقت دادم. در آن گزارش نوشتم که در حال حاضر، وضع ریاضیات ما در دبیرستان‌ها به‌روز نیست و به مطالبی که در کشورهای غربی تدریس می‌شد اشاره کردم و منابعی را که آورده بودم، معرفی کردم. با پیگیری‌هایم، بالاخره وزیر وقت آموزش و پرورش از من دعوت کرد که از کازرون به تهران بیایم و در به اصطلاح دفتر برنامه‌ریزی مشغول به کار شوم. من در سال ۱۳۵۰

دبیرهای تازه فارغ‌التحصیل ریاضی که این مسائل را در دانشگاه خوانده بودند، آمدند و این کتاب‌ها را خیلی خوب در کلاس‌ها تدریس کردند. به‌طوری که در برنامه‌ریزی بعدی، تصمیم گرفته شد که این ریاضی جدید، با ریاضیات سنتی ترکیب شود. بدین ترتیب، کتاب‌هایی نوشته شد و تا قبل از تغییر نظام آموزش متوسطه، آن کتاب‌ها تدریس می‌شد و ما، مشکلی از نظر ریاضی نداشتیم. در حقیقت، می‌شود گفت که ریاضیاتی که در ایران تدریس می‌شد، معادل ریاضی در سطح جهانی بود، طوری که در سال ۶۲ یا ۶۳ که ما با آقای دکتر نجفی، دانش‌آموزان المپیاد ریاضی را برای مسابقات جهانی به کوبا بردیم، دانش‌آموزان ما در سطح بین‌المللی نشان دادند که از دیگران عقب نیستند. در آنجا، یک نفر از تیم دانش‌آموزی ما، رتبه سوم شد مدال برنز گرفت. این مطالب کاملاً نشان داد که سطح ریاضیات ایران، معادل سطح ریاضیات بین‌المللی است و هیچ نوع عقب‌افتادگی نداریم.

سؤال شد که برای تدریس «اولین کتاب ریاضیات جدید» و آموزش معلمان آن، چگونه تصمیم‌گیری شد.

بحث اولیه این بود که «ریاضیات جدید» را به‌صورت کتاب‌هایی برای معلمان ریاضی بنویسیم و برای آن‌ها دوره بگذاریم تا خُرد خُرد یاد بگیرند و بعد که برای معلمان جا افتاد، این کتاب را به دبیرستان‌ها ببریم. اما یک نظریه دیگر وجود داشت که کتاب ساده نوشته شود و از همان ابتدا، به دبیرستان برده شود.

وارد دفتر برنامه‌ریزی و تألیف شدم و بلافاصله جزو به اصطلاح شورای برنامه‌ریزی دفتر تحقیقات برای برنامه درسی ریاضی دبیرستان قرار گرفتم. در آنجا عرض کنم که افرادی مثل مرحوم بیرشک، مرحوم پرویز شهریاری، دکتر مرتضی انواری، دکتر ثقفی و دکتر بهزاد بودند که اعضای شورای ریاضی را تشکیل می‌دادند. در آن شورا، با مطالعه ریاضیات جهانی و آنچه که در کشورهایمانند انگلستان و فرانسه و آمریکا می‌گذشت، برنامه جدید ریاضی تنظیم شد. در آن شورا، راجع به اینکه ابتدا کتاب «ریاضیات جدید» جدا باشد یا آنکه با یکی از کتاب‌های ریاضی آن وقت مانند جبر یا آنالیز ترکیب شود، بحث‌های زیادی صورت گرفت. بالاخره تصمیم گرفته شد که کتاب‌های قبلی را به همان صورت سابق ارائه دهیم، اما کتابی به اسم «ریاضیات جدید» در کنار این کتاب‌ها تألیف کنیم تا دبیرانی که علاقه‌مند هستند و تازه از دانشگاه فارغ‌التحصیل شده‌اند، بتوانند این کتاب‌ها را تدریس کنند. اساس تدریس این کتاب را هم بر این گذاشتیم که بسیار پرمثال نوشته شود، زیرا فکر کردیم که اگر دبیری نتواند تمرینی را حل کند و فقط برای کلاس، مثال‌های کتاب را حل کند، نظر ما تأمین می‌شود. بدین ترتیب، دانش‌آموزان دیدی از ریاضیات جدید پیدا می‌کردند، چون آن زمان، بیشتر دبیرها قدیمی و سنتی بودند و اصلاً با مطالب ریاضیات جدید و مجموعه‌ها و منطق و ماتریس آشنایی نداشتند. به هر حال این کار ادامه پیدا کرد و ما موفق شدیم که این کتاب‌های ریاضی جدید را جا بیندازیم. در ایران هم خُرد خُرد دبیرها استقبال کردند؛



جمع کنجکاو بود بدانند که با چه استدلالی، قرار شد معلم و دانش آموز، هم‌زمان با هم مطالب جدید را بیاموزند. آقای جلیلی، نظر غالب آن موقع را بیان کردند:

نظر غالب این بود که تا خود دبیر احساس نکند که وظیفه تدریس را بر عهده دارد و می‌خواهد به دیگران یاد بدهد، با دقت مطالعه نمی‌کند، آماده نمی‌شود و یاد نمی‌گیرد. به این دلیل بود که بین این دو نظر، دومی پذیرفته شد؛ یعنی اینکه تصمیم گرفته شد کتاب‌های ریاضی جدید، خیلی ساده تنظیم شوند و از همان ابتدا، وارد دبیرستان شوند. در ضمن، به رئیس سازمان کتاب‌های درسی فشار می‌آوردند که حتماً دانشگاهی‌ها که وارد هستند، این مطالب جدید را وارد کتاب‌های دبیرستانی نکنند. ولی چون سنت قبلی در ایران این بود که بیشتر خود دبیران کتاب‌های درسی را می‌نوشتند، آخر سر قرار شد که آقای دکتر مین‌باشیان، استاد دانشگاه صنعتی شریف (آریامهر سابق) که تازه از دانشگاه برکلی دکترای ریاضی خود را گرفته بود و جزوه‌ای با عنوان «آشنایی با منطق و مجموعه‌ها» برای معلمان ریاضی شاغل به تدریس تهیه نموده بود، با بنده، به دلیل اینکه آن موقع، در متن و بطن برنامه‌ها و کتاب‌ها بودم، با هم همکاری کنیم. این چنین بود که اولین کتاب درسی «ریاضیات جدید» تألیف و در سال ۱۳۵۳، وارد سال اول دبیرستان شد. این کتاب خیلی ساده و به زبان عادی نوشته شده بود، ولی دبیرها با مطالب آن، آشنایی نداشتند. دبیری برای من تعریف می‌کرد که «سر کلاس‌های شما نشستم

و مقداری جرأت پیدا کردم و رفتم سر کلاس. ولی یک روز که داشتم درس می‌دادم، وسط راه ماندم و چیزی را که می‌خواستم بگویم، یادم رفت. بلافاصله، به‌عنوان اینکه بیرون کار دارم و این‌ها، گج را انداختم و از کلاس آمدم بیرون و گفتم حالا بر می‌گردم». این همکار معلم گفت که «رفتم و دیگر اصلاً به آن دبیرستان برنگشتم». دبیرها مشکلاتی از این قبیل داشتند تا کتاب خُرد خُرد جا افتاد. در کتاب‌های بعدی، ایراد بیشتر روی کتاب‌های ریاضی جدید نبود، بیشتر روی ارائه حد و پیوستگی و این‌ها بود که در کتاب‌های جدید، حد و پیوستگی به‌صورت ϵ و δ ارائه شده بود و برای دبیرها که سابق، خیلی ساده تعریف می‌کردند و رد می‌شدند، مشکل به‌وجود آورده بود. بر سر حد و پیوستگی خیلی بحث شد تا بالاخره، مؤلفان متقاعد شدند که در سال‌های بعد، حد و پیوستگی را قدری به زبان ساده‌تر و با مثال‌های عامیانه‌تر بنویسند. نکته‌ای که در تماس با دبیران به نظرم می‌رسید این بود که به‌طور کلی، دبیران در تدریس سنت‌گرا بودند و سعی داشتند و علاقه‌مند بودند که هر چه را که خودشان یاد گرفته بودند، یاد بدهند و با هر روشی که به خودشان یاد داده بودند، تدریس کنند. مطالب جدید را به سختی می‌پذیرفتند و روش‌های جدیدی را که به آن‌ها ارائه می‌شد، نمی‌پذیرفتند؛ روش‌هایی مثل اینکه «باید شاگرد را در درس شرکت بدهید» یا «روش فعال را به‌کار ببرید». سعی تمام دبیران این بود که در مدت معینی، یک قسمت از کتاب مثلاً $\frac{2}{3}$ یا نصف کتاب را تدریس کنند، با هر سرعتی که خودشان می‌دانستند.

در کتاب‌های گذشته، تغییرات به‌خاطر تحولی بود که از غرب شروع شده بود و برای همه چالش ایجاد کرده بود. این‌ها طوفانی بود که در غرب برپا شد و به ما اصلاً ربطی نداشت. یک مرتبه یکی مثل دیودونه پیدا شد و گفت «هندسه اقلیدسی باید برود»، هدف این بود که جبرخطی و تبدیلات، جای هندسه اقلیدسی را بگیرد. اصلاً می‌خواستند هندسه اقلیدسی را محو کنند و از بین ببرند؛ همان هندسه اقلیدسی که آن همه مسائل فکری دارد و دانش آموزان را با چالش‌های فکری مواجه می‌کند

در کلاس معمولاً ۱۰۰ تا ۱۲۰ دقیقه متوالی حرف می‌زدند و درس می‌دادند و شاگرد معمولاً چیزی درک نمی‌کرد. در کلاس‌های بازآموزی، علاوه بر اینکه راجع به مفاهیم و مطالب ریاضی جدید بحث می‌شد، خیلی هم راجع به اینکه در روش تدریس و سنت تدریس نیز باید تجدیدنظر کنند و باید روش‌های جهانی را بپذیرید، بحث می‌شد. به هر حال، این مشکلات برای دبیران بود و برایشان مشکل بود که روش سنتی خود را تغییر دهند. حتی در این کلاس‌ها، دبیران به آن‌هایی که روش‌های جدید را توصیه می‌کردند اعتراض می‌کردند و می‌گفتند «خودتان بیاید سر کلاس و به جای ما درس بدهید. این کتابی که در ۲۲۰ صفحه نوشته شده را می‌توانید با این شیوه‌ای که می‌گویید، ۴ ساعت در هفته تدریس کنید و تمام کنید؟ با توجه به اینکه وزارت خانه مرتب بخشنامه می‌کند که کتاب باید تا آخر سال تمام شود و هیچ بخشی از آن باقی نماند، آیا شما می‌توانید این کار را بکنید؟»

هر چه آقای جلیلی بیشتر از گذشته می‌گفتند، جمع برای شنیدن مشتاق‌تر می‌شد و مرتب، سؤال‌های تازه‌ای در ذهن‌ها شکل می‌گرفت. ای‌کاش تاریخ و آموختن از آن، در برنامه درسی مدرسه و دانشگاه، به‌طور معناداری جدی گرفته می‌شد تا دانش‌آموزان، برای آموختن آن و آموختن از آن، به وجد می‌آمدند. حالا پرسش‌ها به سمت محتوای برنامه درسی ریاضی بود و آقای جلیلی، ادامه دادند.

بین سال‌های ۴۰ تا ۵۰، ریاضیات در ایران، ریاضیات محاسبه‌ای بود و تأکید زیادی هم بر هندسه می‌شد. همچنین، مثلثات نیز کتابی جداگانه داشت. در هر فصل از کتاب‌های هندسه‌ای که یکی توسط صفاری و قربانی و دیگری توسط مرحوم بیرشک نوشته شده بود، ۳۰-۴۰ تا مسئله مشکل بود و معلمان، دانش‌آموزان را از همان اول و می‌داشتند و فشار می‌آوردند که آن‌ها را حل کنند؛ مسائلی که ابزار حل آن‌ها محدود بود، مثل تساوی یا تشابه مثلث‌ها. آقای غیور می‌گفت من که در همدان تدریس می‌کردم، مثلاً فصل تساوی مثلث‌ها را می‌گفتم و برایش یک سری مسئله می‌دادم و می‌گفتم که «بچه‌ها! این مسائل فقط با همین چهار تا قضیه تساوی مثلث حل می‌شه»، ولی این مسئله‌ها فکری بودند. گاهی باید خطی اضافه می‌کردند؛ نیم‌سازی، میانه‌ای می‌کشیدند تا مسئله حل می‌شد، به‌طور ساده



حل نمی‌شد و این طرز تفکر هندسی و مثلثاتی بود با تمرینات مثلثاتی بسیار پیچیده، ولی به مفاهیم توجه نمی‌شد. اصلاً از این δ و ϵ ها تا سال ۵۰ هیچ خبری نبود، معلمان نه تشخیص می‌دادند و نه در بحرش بودند. فقط جبر به صورت کاملاً تکنیکی و محاسباتی بود، مثل اینکه چه طوری مشتق بگیریم یا چه طوری حد حساب کنیم. آن ریاضی فقط محاسباتی بود و استدلالی به صورت δ و ϵ نبود. اما از سال ۱۳۵۳ به بعد، با توجه به تحولی که در دنیا در آموزش ریاضی و مطالب و مفاهیم ریاضی پیش آمده بود، در آمریکا و انگلیس هم، با همین مشکلاتی که ما در پیاده کردن نظام جدید داشتیم، روبه‌رو بودند. در انگلستان، مرتب کتاب‌های «پروژه ریاضیات مدرسه» تجدید چاپ می‌شد یا آنکه کتاب‌های دیگری مشابه آن‌ها نوشته می‌شد، برای اینکه همین مشکلات تغییرات را آن‌ها هم داشتند. من در موقعی که کارگردان بودم، چیزی که به نظرم واقعاً خوب رسید این بود که فکر کردم استادان دانشگاه تربیت معلم - خوارزمی فعلی - که دبیر تربیت می‌کنند و دنبال آموزش به دبیران هستند، خوب است که آن‌ها را بیاوریم در دفتر برنامه‌ریزی تا هم برنامه بریزند و هم کتاب بنویسند، بلکه کتاب‌ها یک مقدار، با زبانی به اصطلاح دبیران، نوشته شوند. در حقیقت تا مدت زیادی هم، بیشتر اعضای شورای برنامه‌ریزی ریاضی همکاران دانشگاه تربیت معلم بودند، مثل آقای دکتر بابلیان، آقای دکتر مدقالچی، مرحوم دکتر فرزنان، آقای دیبایی، آقای دکتر بیژن‌زاده، آقای لالی. بعد هم کلاس‌های بازآموزی معلمان را واگذار کردیم به خود دانشگاه تربیت معلم. بیشتر آموزش‌ها را آقای دکتر بابلیان و آقای دکتر مدقالچی و همکارانشان به دبیران می‌دادند. به این ترتیب، ما نتیجه گرفتیم و دیدیم دبیری که می‌آمد و می‌دید همان آقای دکتر بابلیانی که توی دانشگاه ریاضی یادش داده، حالا می‌گوید این طوری نگو و این طوری بگو، از او قبول می‌کند. ولی وقتی یکی دیگر می‌گفت، از او قبول نمی‌کرد و فکر می‌کرد که می‌خواهند به او تحمیل کنند.

پرسیدیم چگونه از تغییر سریع و بی‌پشتوانه برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در غرب به وجد آمدیم و چرا از ناکامی آن و به همان سرعت تغییر آونگی و شدید آن درس نگرفتیم؟

همان‌طور که می‌فرمایید، در غرب هم در ابتدا که ریاضی جدید پیاده شد، همین سرگردانی‌های ما

را داشتند. یعنی یک مرتبه می‌خواستند مثلاً جبر خطی یا منطق ریاضی را تمام عیار پیاده کنند. شما وقتی کتاب‌های «گروه مطالعاتی ریاضیات مدرسه»^۲ در آمریکا یا کتاب‌های «پروژه ریاضیات مدرسه» در انگلستان یا کتاب‌های دیگری که نوشته شده بود را «برگ» می‌زنید، می‌بینید که همین مطالبی که ما در کتاب‌هایمان آوردیم، در حقیقت، از آن کتاب‌ها شیره‌کشی - عصاره‌کشی - کردیم. چون ما فکر می‌کردیم که آن‌ها لایذ چیزی می‌دانسته‌اند که در سطح جهانی، آن تغییر را انجام دادند. بعد که آن‌ها متوجه شدند که این همه جبر خطی و این مطالب به اصطلاح استدلالی محض و نظری را شاگرد نمی‌پذیرد، مطالبشان را رقیق کردند، ما هم به تبع آن‌ها، سال به سال، کتاب‌ها را رقیق‌تر می‌کردیم و مسائلی را که بحث برانگیز بود، برمی‌داشتیم. مثلاً، قسمت حد و پیوستگی مقداری ساده‌تر شد. ولی هر تغییر برنامه‌ای چنین است. وقتی شما به یک خانه جدید نقل و انتقال پیدا می‌کنید، تا جا بیفتید و بدانید هر چیزی کجاست، مدتی طول می‌کشد. ما هم از ریاضی سنتی قدیمی آمده بودیم تا ریاضیات جدیدی را در سطح جهان پیاده بکنیم. خوب یک مقدار سردرگمی، نارسایی و توهم وجود داشت تا اینکه به مرور، این مطالب جا افتاد.

برایمان آموزنده بود که در صورت امکان، کمی با شرایطی که تقاضا برای تغییر به وجود می‌آید، آشنا شویم.

اصلاً اولین شرط برنامه‌ریزیِ الآن که در کتاب‌های خارجی هم منعکس است، این است که برای ایجاد تغییر در یک برنامه یا کتاب، اول می‌نشینند بررسی می‌کنند که به چه دلیل و چرا باید این تغییر را ایجاد کرد. برنامه موجود چه عیب‌هایی دارد؟ چه مشکلاتی ایجاد کرده که انگیزه تشکیل شورای جدید شده است؟ یا کتاب‌های موجود چه مشکلاتی دارند؟ این‌ها اصول اصلی هر برنامه‌ریزی است. اما همان‌طور که اشاره کردید، واقعاً آن موقع، در ایران کسی که هم آموزش ریاضی و هم برنامه‌ریزی درسی ریاضی خوانده باشد، نداشتیم. من خودم یک دوره شش یا هفت ماهه را در دانشگاه تگزاس دیدم و در آنجا، با یک سری اصول کلی برنامه‌ریزی آشنا شدم. سپس در بازگشت به ایران، سعی کردم آن‌ها را در شورا مطرح کنم، مثل همین نکته که برای تدوین برنامه، شرایط کلاس و محیط درس و کتاب باید در نظر گرفته شود. اما نکات مفیدی که عرض کنم، این است که در کتاب‌های گذشته، تغییرات

به خاطر تحولی بود که از غرب شروع شده بود و برای همه چالش ایجاد کرده بود. این‌ها طوفانی بود که در غرب برپا شد و به ما اصلاً ربطی نداشت. یک مرتبه یکی مثل دیودونه پیدا شد و گفت «هندسه اقلیدسی باید برود»^۲، هدف این بود که جبر خطی و تبدیلات، جای هندسه اقلیدسی را بگیرد. اصلاً می‌خواستند هندسه اقلیدسی را محو کنند و از بین ببرند؛ همان هندسه اقلیدسی که آن همه مسائل فکری دارد و دانش‌آموزان را با چالش‌های فکری مواجه می‌کند. یا نظریه اعداد که با ۷، ۸ صفحه مقدمات که راجع به بخش‌پذیری بود، با آن همه مسئله‌های چالش‌انگیز حساب استدلالی که یک نمونه از آن، کتاب «مسائل حساب استدلالی» مرحوم حریری بود، جایگزین شد. ریاضیات تا قبل از سال ۱۳۵۰، بیشتر فکری و حل مسئله بود و تنها روی تعداد محدودی مفاهیم، توجه می‌شد، اما از همان مفاهیم محدود، برای رشته زیادی از مسائل استفاده می‌شد. مثلاً، میزان تأکیدی که نظام قدیم روی هندسه ترسیمی و رقومی و روی مخروطات و بیضی و هذلولی و یا سهمی تبدیلات و این‌ها داشت، اندک‌اندک کنار زده شد. ما هم از این طرف، به افراط افتادیم. برای نمونه، از جبر خطی یا حلقه و میدان که امثال دیودونه فکر می‌کردند می‌تواند جایگزین هندسه اقلیدسی شود و در غرب آمده بود، ما هم اقتباس کردیم و آوردیم. البته به مرور که آن‌ها حذف کردند و متوجه شدند که زیاده‌روی کرده‌اند، ما هم به مرور، حذف کردیم. یعنی این تحول در برنامه‌ریزی درسی جهانی بود و در همه جا اتفاق افتاد. همین تغییرات و به دنبالش همین مشکلات، در برنامه‌های فیزیک و شیمی ما هم در دفتر وجود داشت. یعنی مطالبی از فیزیک جدید وارد کتاب‌ها شده بود که دبیرها مشکل داشتند و نسبت به آن‌ها اعتراض می‌کردند. یا اینکه در شیمی، ما تأکید داشتیم که شاگرد، فرمول‌ها را حفظ کند. در صورتی که در همان برهه از زمان، غربی‌ها گفتند نیازی نیست که وارد جزئیات فرمول‌ها شویم و بیشتر توجه، معطوف به آزمایش و آزمایشگاه و این‌ها شد. این تحولات، نه تنها در ریاضی، بلکه در فیزیک و شیمی دفتر هم به وجود آمد و ما همه مشکل داشتیم. البته در برنامه درسی ریاضی، مشکل بیشتر بود. یادم هست که در سال ۱۳۵۲، قبل از اینکه ریاضی جدید را پیاده کنیم، کارشناس فیزیک به ما می‌گفت که «فلانی! شما باید در ریاضی، مثلاً در مورد مجموعه یا ماتریس بگید ما اینجا چیزهایی داریم

که به ماتریس شما برمی‌خورد و ما مجبوریم اینجا - در فیزیک - یک چیزهایی بگوییم». منظورم این است که همین تحولات، در کتاب‌های فیزیک هم ایجاد شده بود. من به آن کارشناس فیزیک می‌گفتم که «ما هم داریم این تغییرات را می‌دهیم و کتاب‌های جدید همین‌طور خواهد بود». البته در سال‌های ۱۳۵۳ و ۱۳۵۴ که کتاب‌های ریاضی دبیرستان به نام «نظام جدید» عوض شد، نه کسی بود که برنامه‌ریزی درسی ریاضی بداند و نه کسی بود که «آموزش ریاضی»^۴ بداند و هر چه که در آموزش ریاضی انجام می‌شد، واقعاً توسط آماتورها بود. در نتیجه، این تغییرات جز با تجربه قابل پیش‌بینی نبود. یعنی باید تجربه می‌شد و با خطا و آزمایش پیش می‌رفتیم و می‌دیدیم که مشکل وجود دارد؛ شاگرد نمی‌فهمد، معلم نمی‌رسد تا اینکه خرد خرد، کتاب‌ها را رقیق کنیم که برای دانش‌آموزان قابل درک باشد. طوری که بالاخره در سال‌های آخر - نظام جدید اسبق - دیگر کاملاً این کتاب‌های دبیرستانی و تغییر مواد برنامه درسی ریاضی، در مدارس جا افتاده بود.

باز هم فرض کنید تا همین ۱۰-۱۵ سال پیش که از من دعوت می‌کردند و می‌رفتم شهرستان‌ها تا برای دبیران صحبت کنم، می‌دیدم که آن‌ها، آن اشکالات و هیجاناتی را که سابق راجع به برنامه‌ها داشتند و بحث می‌کردند و شلوغ می‌کردند، دیگر نیست. بحث‌ها تکنیکی‌تر و سؤالات تکنیکی‌تر شده است و می‌توانستیم از نظراتشان استفاده کنیم. حتی در برنامه‌ریزی، پیشنهادهایی که می‌کردند این گونه بود. ولی آن چالش اولیه یعنی تغییر کتاب‌ها و ورود ریاضیات جدید به دبیرستان، هم برای دفتر و برنامه‌ریزها مشکل بود و هم برای معلمان. البته در تغییرات سال ۱۳۵۳ در دبیرستان، هندسه اقلیدسی را حفظ کردیم و عرض کنم که مؤلفانش هم دو تا از هندسه کارهای قدیمی ایران بودند که یکی آقای محمدطاهر معیری که مدیر کل دفتر تألیف هم بود و دیگری آقای محمدحسین غیور. در تألیف جدید، کتاب‌های هندسه یک مقدار سبک شد، ولی تقریباً قالب خودش را حفظ کرد و مقداری هم مثلثات باقی ماند که البته، باز هم مقداری سبک شد، اما نه به صورت یک کتاب مستقل. باید توجه داشت که در کشورهای غربی، تأکیدی که ما روی مثلثات داریم، ندارند. واقعاً مثلثات را در حد همان «سینوس» و «کسینوس» و «تائزانت» و «کتائزانت» و چند تا فرمول مقدماتی می‌گویند و تمام می‌کنند.

بود که یک مرتبه، آن تحولی که ملاحظه فرمودید، پیش آمد. البته همان طور که گفتم، این تحول، کمابیش در همه کشورها به وجود آمد و یک مقدار تا تجربه شد که چه قسمتی از آن باید بماند و چه قسمتی باید حذف شود، مشکل ایجاد کرد.

برای نمونه، وقتی می خواستیم برای تغییر و تحول در کتاب حساب استدلالی قبلی که داشتیم، از غرب اقتباس کنیم، دیدیم که این حساب استدلالی ما، دیگر در جهان به این شکل، اصلاً مطرح نیست و به صورت نظریه اعداد همراه با یک سری اصول و فرض و به صورت سیستماتیک ارائه شده است، نه به صورتی که ما در حساب استدلالی داشتیم. مثلاً اگر کتاب ریاضیات جدید سال چهارم دبیرستان را که در سال های ۵۵ و ۵۶ نوشته شد، با کتاب ۱۰ سال بعدش مثلاً سال ۶۸ یا ۷۰ مقایسه کنید، می بینید قسمت نظریه اعداد آن به مرور، خیلی ساده تر شده و خیلی از مطالب آن حذف شده است. همچنین، مقداری از قسمت های دیگر را مانند نظریه ماتریس ها که خیلی پیشرفته بود و راجع به محاسبه مقادیر ویژه در ماتریس ها بود، حذف کردیم و بیشتر به جنبه عملی و محاسباتی و تبدیل مثلاً بیضی به دایره یا هذلولی به دایره با استفاده از فرمول بسنده کردیم و به اصطلاح به صورت عملی، این ها را جانشین مطالب قبلی کردیم. ولی این کار زمان برد و طول کشید تا به آن درجه از سادگی رسیدیم.

دوست دارم در اینجا خاطره ای تعریف کنم. عرض کنم که من سال ۱۳۵۲ برای گذراندن یک دوره برنامه ریزی، از طرف دفتر به دانشگاه تگزاس در آمریکا رفتم. چیزی که آنجا به ما یاد می دادند، بررسی همین کتاب هایی بود که قبلاً اشاره کردم و در ایالت های مختلف آمریکا تدریس می شد. بعد ما در سال ۱۳۵۳ اولین کتاب ریاضیات

مثل ما این قدر عمیق که من یادم هست نمی گویند؛ مثلاً ۱۰۰ مسئله در مورد Arc ها و Arctan ها و مانند آن ها بود. چقدر شاگرد باید این ها را یاد بگیرد؟ این ها اصلاً در کتاب های غربی نبود، ولی بخشی از ریاضی سنتی ما بود. ما هم در آن شورای برنامه ریزی، در مقابل یک عده از دبیران و استاد های سنتی نشسته بودیم که وقتی پیشنهاد حذف می کردیم، نمی پذیرفتند و می گفتند «نه! مثلثات را ۳۰ سال، ۴۰ سال است که درس می دهیم و بچه ها خیلی خوب می فهمند. شما چرا می گوئید این ها را حذف کنیم؟» در مورد «هندسه ترسیمی و رقومی» هم با همین استدلال که «بچه ها خیلی خوب یاد می گیرند»، مقاومت می کردند. بارها در کلاس های بازآموزی ریاضیات جدید، اولین سؤالی که از من می شد این بود که «چرا هندسه ترسیمی و رقومی را حذف کردید؟» چه کسی این سؤال را می کرد؟ کسی که سال ها این هندسه در انحصارش بود و حالا یک مرتبه احساس می کرد خلع سلاح شده است. بعد به او می گفتند «بیا کتاب ریاضیات جدید را درس بده». این بود که این تغییرات، واقعاً بعضی معلمان را برمی آشت و آن را نمی پذیرفتند.

برایمان جالب بود بدانیم که چگونه، برنامه های ما از سبک فرانسوی به سبک آمریکایی تغییر کرد؟

همان طور که می فرمایید، ریاضیات ما متأثر از ریاضیات فرانسه بود و شاید فرانسوی ها، هنوز آن را تدریس می کنند. ما در برنامه ریزی سال ۱۳۵۳ و در حقیقت، از سال ۱۳۴۵ که تغییر برنامه درسی ریاضی دوره ابتدایی شروع شد تا در سال ۱۳۵۳ که به دبیرستان رسید، یک مرتبه در ایران، نه تنها «شیفت» به سمت برنامه ریاضی جدید و تحول ریاضی شد، بلکه «شیفت» از یک کشور به کشور دیگر هم شد. یعنی مؤلفان و برنامه ریزان کتاب های قدیم، کسانی بودند که تحت تأثیر فرهنگ آموزشی فرانسه بودند، مثل مرحوم پروفسور فاطمی که یک مؤلف قدیمی بود، یا خود مرحوم احمد بیرشک که تحت تأثیر برنامه ریاضی فرانسه بود و حالا، ما یک مرتبه ریاضی فرانسه را کنار گذاشتیم و اصلاً نگاهش هم نکردیم. یک مرتبه آمدیم به سمت برنامه ریاضی در آمریکای پیشگام! چنین



جدید را نوشتیم و اجرا شد. یعنی از همان سال ۱۳۵۳، کتاب‌هایی که - به عنوان منبع - استفاده کردیم، همان کتاب‌هایی بود که در آمریکا تدریس می‌شد و من همراهم آورده بودم.

سؤال شد مگر وقتی از آن کتاب‌های آمریکایی در ایران الگوبرداری کردیم، مصادف نبود با تغییر مجدد و پرشتاب آن کتاب‌ها در آمریکا؟ توصیف آن فضا توسط ایشان، آموزنده است.

وقتی که ما نوشتیم و شروع کردیم به اصطلاح با نفس گرم و خیلی با حرارت و با اعتقاد به اینکه این تغییر خیلی کار درستی است، آن‌ها کم‌کم داشتند از آن حرارت می‌افتادند و فکر کردند که دارند زیاده‌روی می‌کنند. در صورتی که ما تازه قرص ایستاده بودیم که «نه! هر چه می‌گوییم درست است». درست در همان زمان، کتاب‌های «گروه مطالعاتی ریاضیات مدرسه» را که توسط ۲۰-۳۰ نفر از دانشگاهیان از ایالت‌های مختلف نوشته شد و من آن‌ها را با خودم آورده بودم، حذف کردند و به جایشان، آن‌ها را به زبان محاسباتی در آوردند و تغییراتی چنین تند دادند که ما هم دوباره، همان روال را پیگیری کردیم.

اما راجع به هندسه و تحولات آن و کتاب‌های درسی دیگر، عرض کنم که در سازمان کتاب‌های درسی، من در مقاله‌ای تحت عنوان «تأسیس سازمان کتاب‌های درسی»، سیر تحول هندسه را نوشتیم و در آنجا گفتم که در ایران، هندسه اول را مرحوم رهنما نوشت و بعد، ما از هندسه فرانسوی که مهندس الممالک آورده بود استفاده کردیم. بالاخره در ایران، معمولاً همین‌طور است، یعنی بیشتر کارهای ما اول تجربه می‌شود و کارها را با تجربه انجام می‌دهیم، یعنی تجربه می‌کنیم و کم و زیاد می‌کنیم، تا بالاخره می‌رسیم به این هندسه‌ای که مثلاً امروز داریم. این نوع کار کردن، البته مقداری

ضرر هم می‌زند و این‌گونه، ضرر هم می‌بینیم. الآن کتاب حسابان جدید را که عوض شده، به من دادند که بخوانم. دیدم که همه‌اش به صورت همان مطالب کتاب‌های حسابان قبلی است، ولی بیشتر به صورت مثال و کاربرد و مثال عددی و شکل است و بیشتر مطالب به اصطلاح حسی و ملموس، جایگزین آن E و D ای شده که قبلاً بود. در غرب هم همین را تجربه کردند. لابد این مؤلفان هم الآن، از کتاب‌های جدید غرب استفاده کرده‌اند و این کتاب‌ها را نوشته‌اند. اگر من هم می‌خواستم بنویسم، شاید به همین شیوه عمل می‌کردم که در دبیرستان، به صورت تجسمی و تصویری و کمتر استدلالی می‌نوشتیم تا اینکه بیشتر بپردازم به استدلال و قضیه و لم و تعریف و حکم و این‌ها.

تحول و تنوع آموزش و برنامه‌ریزی در آمریکا خیلی وسیع و زیاد است. منتهی، ما در چارچوب خاص کشور خودمان و با توجه به همه بحث‌هایی که قبلاً شد، به این نتیجه رسیدیم که به جای اینکه تغییر را از برنامه دبیرستان شروع کنیم، از دوره ابتدایی آغاز کنیم. تا قبل از سال ۱۳۴۵، تمرکز برنامه ریاضیات دبستانی تنها بر چهار عمل اصلی و تعدادی مسائل مربوط به مراحله و تجنیس بود. بعدها، سری کتاب‌های ریاضیات دبستانی و راهنمایی را که کاملاً در آمریکا متحول شده بود گرفتند و با مختصر تغییرات زیر و زبری در آن‌ها، کتاب‌های ابتدایی اول تا پنجم و اول تا سوم راهنمایی نوشته شدند. این تغییرات واقعاً یک تحول کامل بود و زیربنای ریاضیات ابتدایی و راهنمایی ما عوض شد. پس از آن، ما شروع کردیم به نوشتن برنامه ریاضی و کتاب‌های ریاضی جدید و برای این مهم، اساس کار را بر مبنای کتاب‌های تازه تغییر یافته ابتدایی و راهنمایی گذاشتیم. مقدمات کار از ابتدایی فراهم شده بود. برای نمونه، در آن کتاب‌ها راجع به انواع دسته‌بندی‌ها آموزش داده شده بود، مثل اینکه



«چند تا دسته هست؟»، «کدام دسته بیشتر دارد؟»، «عدد کدام بزرگ‌تر است؟» و از این قبیل؛ یعنی تمام مراحل آشنایی با مجموعه‌ها، قبلاً در کتاب‌های دوره ابتدایی آمده بود و در کتاب‌های دوره راهنمایی نیز خیلی مفصل‌تر از «مقدمات مجموعه‌ها» آورده بودند که ما، تغییرات کتاب‌های دبیرستانی را روی کار آن‌ها بنا گذاشتیم و برنامه جدید دبیرستان را نوشتیم. اما همان‌طور که عرض کردم، این ایام برنامه‌ریزی در ایران، مصادف شد با تلاطمی که بر اثر این تغییرات، در جهان به‌وجود آمد و این تلاطم، نواقصی را هم در برنامه‌ریزی‌ها و کتاب‌های ما به‌وجود آورد که با تجربه‌های بعدی و با مطالعات بعدی، تصحیح شد و تقریباً جا افتاد که البته، همیشه همین‌طور بوده است. اما در این رهگذر، یک عده از دانش‌آموزانی که مثلاً دلشان می‌خواست رشته ریاضی بروند ولی به علت همین مشکل بودن کتاب‌ها نرفتند یا نتوانستند بروند، صدمه دیدند و عده دانش‌آموزان ورودی به رشته ریاضی، به شدت تقلیل پیدا کرد. ولی بعد به مرور جبران شد و برنامه‌ها روی روال خودش افتاد.

نکته دیگری که می‌خواهم اشاره کنم این است که من در شورای گروه، صورت جلسه‌ها را دقیق می‌نوشتیم که این هم روی تجربه بود. چون وقتی کتاب و برنامه بیرون می‌آمد، اعتراض می‌کردند که یک عده دور هم جمع شده‌اید و خودتان از ذهن خودتان، برنامه نوشته‌اید. من همه این صورت جلسه‌ها را داشتم و ای کاش این‌ها را همه کلمه کلمه می‌خواندند. متأسفانه این صورت جلسه‌ها را توی یک کمد گذاشته بودم توی دفتر. روزی یکی از مسئولان آمده بود و گفته بود که کمد باید بروید بیرون تا به جایش یک میز بیاید. تمام صورت جلسه‌ها که اسناد برنامه درسی ریاضی قبل از تغییرات نظام جدید بعد از انقلاب بود، در همین کمد نگهداری می‌شد. یک روز آمدم دیدم همه آن‌ها را دم در، توی کوچه و پیاده‌رو ریخته‌اند. همان جا نشستم و مشتی از آن‌ها را جمع کردم.^۵

علاوه بر این، خاطرم هست وقتی که مجدداً در غرب، تحولاتی در کتاب‌های درسی ریاضی به‌وجود آمد و کتاب‌ها را سبک کردند، ما هم مجبور شدیم مقداری کتاب‌هایمان را رقیق کنیم. آن موقع یادم هست که خیلی ناراحت بودم از اینکه این قدر به مدارس فشار آوردیم و به دبیران با تأکید گفتیم که این کتاب‌ها درست هستند و حتماً «موی لای درزشان نمی‌رود». اما سال بعدش مجبور شدیم همان قسمت‌هایی را که

دبیران می‌گفتند «دانش‌آموزان این‌ها را نمی‌فهمند»، حذف کنیم و این، در روحیه من خیلی اثر گذاشت. من از آن دبیر خیلی خجالت می‌کشیدم!

حالا یادم افتاد که بعد از اینکه کتاب «ریاضیات جدید» سال اول دبیرستان منتشر شد، یک بار با وزیر وقت آموزش و پرورش در مورد دوره‌های بازآموزی معلمان ریاضی برای تدریس این کتاب، مشورت کردیم. قرار شد که مدیر کل دفتر تألیف بخشنامه‌ای برای دانشگاه‌ها بفرستد و از آن‌ها بخواهد تا برای دبیران ریاضی، کلاس‌های بازآموزی بگذارند. حالا دقیق یادم نیست که خود دفتر نامه‌ای نوشت یا از طرف خود وزیر نامه‌ای به دانشگاه‌ها ارسال شد و در آن، درخواست شده بود که همه دانشگاه‌هایی که امکان برگزاری این دوره‌ها را دارند، طبق ریزموادی که همراه نامه فرستاده شد، برای دبیران ریاضی کلاس‌های بازآموزی بگذارند. دانشگاه صنعتی شریف، دانشگاه تهران و دانشگاه تربیت معلم (خوارزمی)، هر یک جداگانه این دوره‌ها را گذاشتند.

برای حسن ختام، باید بگویم که ما، قبل از اینکه کتاب‌های دبیرستانی بیرون بیایند، فکر کردیم که اگر یک برنامه بازآموزی در دانشگاه‌ها گذاشته شود، برای دبیران مفید است. با توجه به اینکه کتاب سال ۱ شامل مجموعه‌ها و منطق بود، بخشنامه کردیم، یعنی نامه نوشتیم به دانشگاه‌ها که دوره‌های بازآموزی بگذارند. برای دبیران سال ۱۳۵۱، کلاس‌های بازآموزی گذاشته شد و کتاب‌ها صفحه به صفحه، آموزش داده شدند.

در پایان این جلسه، بحث‌ها تازه داغ شده بود و با ورق خوردن این برگ از تاریخ تغییر و تحولات برنامه درسی ریاضی در ایران، ده‌ها سؤال جدید و جدی در ذهنمان شکل گرفت. هر یک از این سؤال‌ها می‌تواند موضوع یک پایان‌نامه با ارزش کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی باشد.

پی‌نوشت‌ها

1. School Mathematics Project: SMP
2. School Mathematics Study Group: SMSG
3. Euclid Must Go!
4. Mathematics Education
۵. در اینجا، من (زهره گویا) به ایشان مژده دادم که به سبب علاقه‌ای که به سیر تحول برنامه درسی ریاضی در ایران داشتم، بخشی از آن صورت جلسه‌ها را کنار آسانسور و توی خیابان دیدم و با اشتیاق، جمعشان کردم و خوشحالم که این منبع قوی تحقیقی را به‌دست آوردم. عجب تصادفی!

این تغییر سطح در پیچیدگی به خوبی ثبت شده است و گاهی اوقات به عنوان «برش آموزشی^۲» به آن اشاره می‌شود (فیلوی و روحانو، ۱۹۸۵، ۱۹۸۹؛ هرکوویکس و لینچوسکی، ۱۹۹۱، ۱۹۹۶). به نظر می‌رسد مبنای این «برش»، تعبیر علامت مساوی به عنوان «سیگنال انجام کاری» (بهر و دیگران، ۱۹۷۶؛ کی‌ران، ۱۹۸۱) باشد به جای در نظر گرفتن آن به عنوان «یکی بودن کمی» (بولتون-لویس و دیگران، ۱۹۹۷؛ سانز-لودلو و والدگراو، ۱۹۹۸) دو طرف. یعنی، عبارت سمت چپ معادله یک فرایند دیده می‌شود، و در نتیجه سمت راست باید نتیجه (حسابی) این فرایند را نشان دهد. به این ترتیب، $3x+2=11$ با معکوس کردن یا «خنثی کردن^۳» عملیات داده شده حل می‌شود و هیچ نیازی نیست که مستقیماً روی مجهول کار کنیم. اما برای حل $3x+2=5x-9$ ، «خنثی کردن» کافی نیست، حال لازم است که مستقیماً روی مقدار مجهول عمل کنیم. اسفارد (۱۹۹۱) این تمایز را بین درک عملیاتی (به عنوان فرایندها) یا ساختاری (به عنوان اشیاء) نمادهای جبری توصیف می‌کند و «یک شکاف عمیق هستی‌شناسانه^۴» (ص ۴، تأکید از مرجع است) بین این دو می‌بیند.

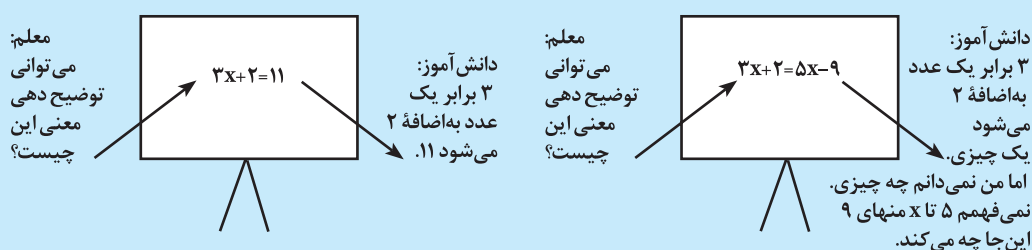
کلیدواژه‌ها: محور اعداد، حل معادلات خطی، توسعه فهم جبری

برنامه درسی (DfEE, 2001) دانش آموزان یازده ساله بریتانیا، که در حال حاضر در اغلب مدارس اجرا می‌شود، شامل حل معادلات خطی است با یک مجهول، تنها در یک طرف، که در سال‌های بعد، به معادلاتی که مجهول آن در دو طرف تساوی است، می‌رسد. دو پیشنهاد در چارچوب تدریس ریاضی^۱ داده شده است:

اولی؛ با استفاده از عملیات معکوس (ص ۱۲۲)

دومی: آغاز به فهمیدن اینکه یک معادله می‌تواند ترازویی تصور شود که در آن، به شرط آنکه عملیاتی در هر دو طرف انجام شود، معادله حاصل درست باقی می‌ماند. (ص ۱۲۵)

در این توصیه‌ها، به طور ضمنی این باور وجود دارد که وقتی از یک نوع از معادلات به نوع دیگر حرکت می‌کنیم، یک تغییر سطح معنادار در پیچیدگی، و بنابراین نیاز به مجموعه‌ای متفاوت از راهبردهای حل، وجود دارد. بحث کلاسی زیر (شکل ۱ را ببینید) که اخیراً توسط نویسندگان مشاهده شده است، این نکته را تأیید می‌کند.



شکل ۱: بحث کلاسی در مورد معادلات خطی

استفاده از محاسبه

از تصویری است که دانش‌آموزان با آن راحت‌اند، تا از توسعه فهم آن‌ها از معادلات خطی از طریق دست‌یابی به راهبرهای حل موجود، پشتیبانی شود. این یک تمایز جدی است و در طول مقاله، چند بار به آن اشاره می‌شود.

آغاز

ما چند سال پیش در همایشی در مورد رویکرد «مدل» شرکت کردیم که در مدارس سنگاپور، برای کمک به حل مسائل جبری «مرتب‌بالا» توسط دانش‌آموزان دبستانی استفاده می‌شد (فونگ و چونگ، ۱۹۹۵). شکل ۲ مثالی از این رویکرد را نشان می‌دهد.

یک خط‌کش و دو مداد ۱,۴۰ دلار قیمت دارند. قیمت یک خط‌کش ۲۰ سنت بیشتر از یک مداد است.

قیمت یک خط‌کش را بیابید.

	P	
	P	
R	P	۲۰

\$ ۱,۴۰

شکل ۲:

استفاده از رویکرد مدل سنگاپوری برای حل یک مسئله. (فونگ و چونگ، ۱۹۹۵، ص ۳۴)

در حالی که بسیاری از معلم‌ها مشغول پل زدن روی این شکاف و معنا دادن به این معادلات و راهبردهای حل آن‌ها هستند، مثلاً، با استفاده از استعاره ترازو (ولاسیس، ۲۰۰۲) را برای ارزیابی جدیدی از این راهبرد ببینید)، شواهد نشان می‌دهد که برای بسیاری از دانش‌آموزان حل معادلات، مسئله یادگیری قواعد و انجام دست‌ورزی‌ها، کورکورانه باقی می‌ماند. در بهترین حالت، آن‌ها «قصه‌ای» (پیم، ۱۹۹۵، ص ۸۹) می‌سازند تا این معادلات را حل کنند، مانند «آن را ببر به طرف دیگر و علامتش را عوض کن».

کتاب‌های درسی مدرسه‌ای نیز برای برقراری تعادلی بین توسعه فهم جبری و تمرین مهارت‌های جبری تقلا می‌کنند (ویجرز، ۲۰۰۱).

در این مقاله، تلاشی را شرح می‌دهیم که به منظور تشویق دانش‌آموزان به بهره‌گیری از یک تصویر آشنا، یعنی محور اعداد، برای حل مشکلاتی است که در بالا توضیح دادیم. اما چیزی که باید روی آن تأکید شود این است که ما، مطالبی را که در ادامه می‌آید به هیچ‌وجه روش جدیدی برای حل معادلات یا صورت جدیدی برای نمایش آن در نظر نمی‌گیریم. این تنها بهره‌گیری

مقاله

رور اعداد

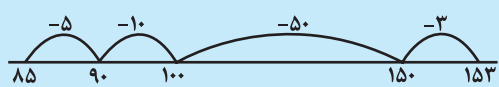
برای کنکاش در حل معادلات خطی

نویسندگان: پل دیکینسون و فرانک اید
مترجم: شیوا زمانی — دانشیار دانشگاه صنعتی شریف

و کپی کارهای دانش‌آموزان را نگه دارند. از بعضی از درس‌ها برای جمع‌آوری بهتر داده‌ها نوار ویدیویی تهیه شد. نتایجی که در این جا گزارش می‌شود، نتایج ادغام شده تجربه‌های تمام کلاس‌هاست.

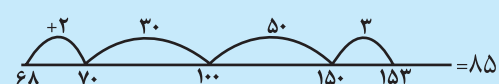
درس‌های اول

به‌نظر می‌رسید که آشنایی با محور حقیقی برای دانش‌آموزان مهم باشد. به این ترتیب، وقتی این ایده برای اولین بار به کلاس‌های درس برده شد، از معلم‌ها درخواست شد که چند تمرین آماده‌سازی (اغلب یک‌سری از دست‌گرمی‌های ذهنی) روی محور اعداد برای حل مسائل جمع و تفریق انجام دهند. برای مثال، مسئله ۶۸-۱۵۳ می‌تواند مانند شکل ۵ یا ۶ نمایش داده شود.



▲ شکل ۵: پرش‌های منهای برای حل ۶۸-۱۵۳.

▼ شکل ۶: پرش‌های جمع برای حل ۶۸-۱۵۳.



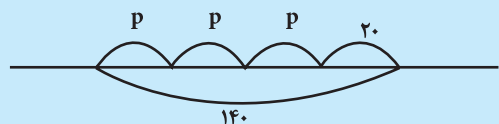
اگر چه در ابتدا واضح نیست، اما بعدها برای دانش‌آموزان مفید خواهد بود که ذهن خود را از پرش روی محور، به‌عنوان نمایشی از اندازه‌های واقعی، رها کنند. اوایل دیده می‌شد که پرش‌های مثلاً بیست، به‌طور منظم با اندازه‌ای دو برابر پرش‌هایی به اندازه ده رسم می‌شدند. اما، سرانجام به‌نظر می‌آمد که دانش‌آموزان از رسم نمودارهایی مانند شکل ۷ راضی بودند.



شکل ۷: عبور از دیدن پرش‌ها به‌عنوان «مدلی از» به سمت «مدلی برای» چیزی.

این می‌توانست نشانه‌ای ابتدایی باشد از اینکه دانش‌آموزان شروع کرده بودند به عبور از دیدن پرش‌های محور اعداد به‌عنوان «مدلی از» چیزی، به سمت «مدلی برای» آن چیز؛ حرکتی که اولین بار توسط استریفلند (۱۹۹۱) شناسایی شد. اگرچه همان‌طور که بعداً در این مقاله بحث می‌شود، این تغییر سطح ممکن است لزوماً دائمی نباشد. اما مهم این است که دانش‌آموزان بتوانند به‌طور موفقیت‌آمیز از روش‌های غیررسمی به دانش ریاضی رسمی‌تر عبور کنند (گراونمیچر ۱۹۹۰).

وقتی ما تلاش کردیم مسائل پیچیده‌تری حل کنیم، با این مشکل مواجه شدیم که اگر می‌خواستیم این رویکرد جدید را به‌طور کامل کشف کنیم، باید دانستنی‌های جبری موجود خود را کنار می‌گذاشتیم. در این مرحله، برخی از افراد گروه همایش کم‌کم احساس کردند راحت‌ترند که به‌جای استفاده از یک سری از بلوک‌ها، از یک محور اعداد خالی استفاده کنند (شکل ۳ را برای این نمایش جدید ببینید).

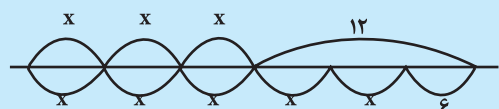


شکل ۳: استفاده از یک محور اعداد برای حل مسئله.

از این جا، دیگر به‌نظر می‌رسید که گام کوچکی تا نمایش معادلاتی مانند

$$3x + 12 = 5x + 6$$

روی یک محور اعداد دوپل مانده باشد (شکل ۴ را ببینید).

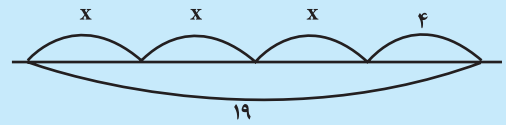


شکل ۴: استفاده از محور اعداد برای حل معادلاتی با مجهول در دو طرف.

کتاب‌های درسی مدرسه‌ای نیز برای برقراری تعادلی بین توسعه فهم جبری و تمرین مهارت‌های جبری تقلا می‌کنند

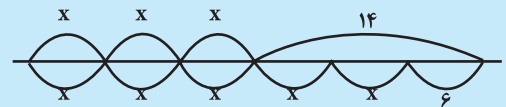
به این جا که رسیدیم، از مشاهده بلافاصله (برای ما) $2x + 6 = 12$ یکه خوردیم، و تصمیم گرفتیم این نمایش را، به‌عنوان موضوعی برای تحقیق، برای گروهی از معلم‌ها ارائه دهیم. اعضای گروه تحقیق شامل حدود ده معلم ریاضی بودند از تعدادی از مدارس نزدیک به دانشگاه، که ما به‌عنوان کارآموزان معلمی در آن‌ها کار می‌کردیم. آن‌ها تا آن موقع هم به‌طور منظم جلساتی داشتند تا در مورد تجارب کلاس‌های خود بحث کنند. این جلسات، از بازتاب نوشته‌های علمی مرتبط، تا بحث روی روش‌های کار در کلاس را شامل می‌شد. این مقاله، کار اولیه گروه را در ارتباط با این موضوع شرح می‌دهد. از معلم‌ها خواسته شد تا این ایده‌ها را به روشی یکسان معرفی کنند، از درس‌ها یادداشت‌برداری کنند

به دنبال این دست گرمی‌ها، معلم‌ها به سادگی با نوشتن $3X+4=19$ روی تخته و سپس (آرام آرام) کشیدن نمایش شکل ۸ معادلات را معرفی کردند.



شکل ۸: نمایش $3X+4=19$.

در ابتدا از دانش‌آموزان خواسته شد به معلم بگویند چه چیزی می‌بینند. یک نتیجه فوری این کار، تعداد مشکلات شناخته شده‌ای بود که این سؤال کمک کرد تا برجسته شوند. به‌ویژه که تعدادی از دانش‌آموزان گفتند که «تمام Xها یکی هستند»، و عده‌ای پرسیدند که «آیا چنین چیزی درست است؟». پاسخ‌های دیگر شامل این‌ها بود: «۳ برابر یک عدد به اضافه چهار، برابر نوزده است»، «۳ تا X باید پانزده باشد»، و «X پنج است». این آخری پاسخی بسیار متداول بود که اگر چه به وضوح مفید بود، همان‌طور که در زیر روشن‌تر می‌شود، بارها علیه ما عمل کرد.



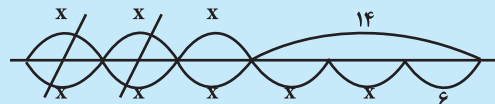
شکل ۹: نمایش $3X+14=5X+6$.

در دسترس بودن واضح این مدل، به کلاس‌ها اجازه داد که تقریباً به سرعت به سمت مسائلی که دارای مجهول در دو طرف بودند حرکت کنند و در همان جلسه دوم، معلم‌ها مسئله شکل ۹ را به دانش‌آموزان معرفی کردند و باز آن‌ها را برای گفتن اینکه چه می‌بینند به چالش کشیدند.

قابل توجه بود که در یکی از کلاس‌ها، بعضی از دانش‌آموزان نوشتند $3X+14=5X+6$ و $5X+6=$ ، پاسخی که از خیلی جهات شبیه نظر دانش‌آموزان ابتدای مقاله بود: ۳ برابر یک عدد به اضافه ۲ می‌شود یک چیزی. اما من نمی‌دانم چه چیزی. نمی‌فهمم ۵ تا X منهای ۹ این‌جا چه می‌کند.

پاسخی مانند این می‌توانست نشان دهد که دانش‌آموز احتمالاً به یافتن دو مقدار مختلف برای X فکر می‌کند که در معادله صدق کنند (اسفارد و لیچوسکی، ۱۹۹۴ را ببینید). اما، خیلی از دانش‌آموزان دیگر، به روشنی تساوی مستتر در شکل را که گاهی اوقات «طول برابر» می‌نامیدند، تشخیص دادند. چیز

دیگری که قابل توجه بود، تعداد دانش‌آموزانی بود که $2X+6=14$ را به عنوان چیزی که می‌توانستند ببینند شناسایی کردند، و خیلی‌های دیگر که مستقیماً به «X برابر ۴ است» رسیدند. گزاره اخیر با چک کردن پرش‌های روی محور به دست آمده بود، که باز برای اکثریت دانش‌آموزان به نظر دست‌یافتنی می‌آمد. قابل توجه بود که حتی در این مرحله، تعدادی از دانش‌آموزان، وقتی از آن‌ها درخواست شد ایده‌هایشان را ساده بیان کنند، شروع کردند به پوشاندن یا خط زدن Xها تا مسئله را ساده کنند. نمایش‌هایی مانند شکل ۱۰ را می‌شد تقریباً به‌طور متداول در کتاب‌های تمرین دانش‌آموزان دید.



شکل ۱۰: خط کشیدن روی Xها برای ساده کردن مسئله

گزاره‌هایی مانند $2X+6=14$ ، و در صورتی که معلم‌ها دانش‌آموزان را به آن سوق می‌دادند $3X+6=14+X$ ، به‌ویژه جالب بود، زیرا مانند علامت‌های امیدبخشی بودند از طرف دانش‌آموزانی که دیدن عبارات جبری را به عنوان اشیاء و نه فقط فرایندها، آغاز کرده بودند (برای بحثی پیرامون اهمیت این تمایز، برای مثال کرولی و دیگران را ببینید (۱۹۹۴)). به این نکته بعداً در این مقاله با جزئیات بیشتری برمی‌گردیم.

اما، این «دسترسی» واضح، برای بسیاری از دانش‌آموزان خطراتی را ایجاد کرد، و اولین باری که به آن‌ها با تصاویر تدریس شد، خیلی از معلم‌ها این احساس را گزارش کردند که دانش‌آموزان در حقیقت با سرعتی بیش از حد به سمت مسائل پیچیده‌تر حرکت می‌کنند. وقتی موضوع برای بار دوم تدریس شد، معلم‌ها تلاش کردند کاری کنند که بحث بیش‌تر روی برابری دو طرف محور متمرکز شود، و توجه دانش‌آموزان به جای حل معادلات، به این برابری معطوف شود. اما این کار در برخی از کلاس‌ها به فشار تبدیل شد، زیرا دانش‌آموزان همین که «جواب» معادله را می‌فهمیدند دیگر تمایلی برای درگیر شدن در این موضوعات از خود نشان نمی‌دادند. این، البته چیز جدیدی نیست و حتی در مواردی که تلاش می‌شود به برخی دانش‌آموزان راهبردهای حل پیچیده‌تری (مثل معادل کردن) برای معادلاتی معرفی شود، که بسیاری از آن‌ها می‌توانند

آن‌ها را ذهنی حل کنند، متداول‌تر است (بیشتر «معادلات حسابی» در این رده هستند).

توسعه ریاضی

دیدن اینکه دانش‌آموزان یازده‌ساله با توانایی در حد متوسط، معادلاتی مانند:

$$3X + 17 = 8X + 7$$

را «حل می‌کنند» و قادرند کاری را که انجام می‌دهند توضیح دهند، ما را، برای تأیید در دسترس بودن این مدل، تقریباً تا آخر راه می‌برد. باز تأکید می‌کنیم که در نظر گرفتن این مدل به‌عنوان ابزاری که دسترسی به راهبردهای حل را تضمین می‌کند، و نه به‌عنوان راهبردی به‌خودی‌خود، اهمیت دارد. در این مرحله از توسعه کار، خیلی راحت (و متأسفانه متداول) است که یا با مثال‌های مشابه بسیار، تنها در مرحله امتحان «روش» باقی بمانیم، یا مدل را کنار بگذاریم و به سراغ «معادلات سخت‌تر» برویم. اما هدف، هیچ یک از این دو نیست. هدف، استفاده از ایده‌هایی است که دانش‌آموزان توسعه داده‌اند، و تشویق آن‌ها برای رسمیت بخشیدن به این ایده‌هاست.

این «باور» که دانش‌آموزان می‌توانند این کار را انجام دهند، همراه با این اعتقاد که ما این‌جا نیامده‌ایم تا روش جدیدی را یاد بدهیم، بلکه فقط می‌خواهیم به دانش‌آموزان اجازه دهیم تا راهبردهای ممکن را کشف کنند، یک باور کلیدی است. این نکته تأثیرات معناداری روی روشی دارد که معلم‌ها از این به بعد، کار را با آن پیش می‌برند

این «باور» که دانش‌آموزان می‌توانند این کار را انجام دهند، همراه با این اعتقاد که ما این‌جا نیامده‌ایم تا روش جدیدی را یاد بدهیم، بلکه فقط می‌خواهیم به دانش‌آموزان اجازه دهیم تا راهبردهای ممکن را کشف کنند، یک باور کلیدی است. این نکته تأثیرات معناداری روی روشی دارد که معلم‌ها از این به بعد، کار را با آن پیش می‌برند. ما معتقدیم که در این‌جا، تمایز ترفر (۱۹۸۷) بین ریاضی‌سازی افقی و عمودی مهم است؛ در این مورد، «افقی» را توانایی نمایش یک معادله روی محور اعداد و حل آن، و «عمودی» را توسعه و رسمیت بخشیدن به راهبردهای حل تعبیر می‌کنیم که نهایتاً، قابل‌تعمیم هستند. در این مرحله، سؤالاتی که از دانش‌آموزان شد اهمیت فوق‌العاده‌ای داشت و

معلم‌هایی که در درس‌های قبلی توانسته بودند توجه دانش‌آموزان را از جواب‌های واقعی پرت کنند، حال موفقیت بیشتری داشتند. برای مثال، در مورد

$$3X + 14 = 5X + 6$$

یک رویکرد مشترک این بود که از دانش‌آموزان بخواهیم تعدادی گزاره را که می‌دانستند باید درست باشند ارایه دهند و آن‌ها را توجیه کنند. برخی از دانش‌آموزان به $5 = X + 1$ که می‌رسیدند، می‌گفتند «چون می‌دانیم X ، ۴ است»، و وقتی چنین چیزی بارها اتفاق افتاد، بعضی از معلم‌ها لازم دیدند برای اینکه بتوانند ادامه دهند، باید از معادلاتی شروع کنند که جواب آن‌ها غیرصحیح باشد.

مرحله بعد این بود که به دانش‌آموزان تعدادی گزاره بدهیم و از آن‌ها بخواهیم دلیل بیاورند که آیا می‌توان آن را از معادله اصلی استنتاج کرد یا خیر. این گزاره‌ها به‌صورت زیر بودند (با استفاده از $5X + 5 = 3X + 14$ به‌عنوان معادله اصلی):

$$14 + 3X = 5X + 6$$

$$3X + 20 = 5X + 12$$

$$X + 14 + 3X + 6$$

$$5X + 14 = 7X + 6$$

$$6X + 28 = 10X + 12$$

$$14 = 8X + 6$$

$$6X + 14 = 10X + 5$$

و معادله چالشی‌تر

و معادله مهم

و از این قبیل.

کلاس‌ها با دانش‌آموزانی که برای یافتن عبارات «متفاوت» و مواجه کردن هر باره آن‌ها به چالش کشیده می‌شدند، خیلی زود پر از عبارات معادل شد. چنین «تولیدات آزاد»ی در مورد نوع راهبردهایی که در حال حاضر دانش‌آموزان به کار می‌گیرند، اطلاعات زیادی می‌داد (استریفیلند، ۱۹۹۰ و ۱۹۹۱ را برای بحث بیشتری در مورد ارزش درخواست از دانش‌آموزان برای تولید چنین کاری، ببینید). در حالی که دانش‌آموزان ممکن بود در این مرحله، بیشتر با آزمون عملیات رویه‌ای مربوط به حل معادلات درگیر شوند، توجیهات آن‌ها به شکلی یکسان به وجوهی اشاره داشت که بیشتر ساختاری بودند. چنین چیزی در تجربه ما، تقریباً نادر بود و بعداً در جمع‌بندی این مقاله، روی آن بیشتر بحث می‌شود.

به‌عنوان مثال، اضافه کردن $2X$ به دو طرف، تقریباً با اعتماد کاملی روبه‌رو می‌شد، با دانش‌آموزانی که به‌طور منظم نظراتی از این قبیل می‌دادند که

«تا وقتی که شما یک تعداد x را به دو طرف اضافه می‌کنید، طول‌های (روی محور) هم‌چنان یکی است». هم‌چنین، خاصیت‌های تقارنی تساوی به‌نظر بسیاری از دانش‌آموزان بدیهی می‌آمد. در واقع در این مرحله، به‌ندرت دانش‌آموزانی را می‌توان پیدا کرد که جدل کنند یا با مفهوم تساوی مشکلی داشته باشند.

در این تجربه‌ها، بحث در مورد اینکه چه راهبردهایی «مجاز» هستند، متداول بود. هم‌چنین، روشن شد که دانش‌آموزان تولید چنین راهبردهایی را با اشاره به معادله و نه محور اعداد شروع کرده بودند (صورت جبری هر معادله همیشه همراه با مدل در تمام جلسات درس ارائه شده بود). شروع به عمل کردن دانش‌آموزان بر روی نمادها، به‌عنوان اشیاء، به‌وضوح یک گام بلند بود، اگرچه هنوز مهم بود که معلم‌ها به‌طور منظم، مطمئن شوند که دانش‌آموزان برای اینکه به توجیه راهبردهایشان ادامه دهند، می‌توانند از تصویر اصلی استفاده کنند. در حقیقت، در تمام طول کنکاش، اینکه این نمایش در دسترس باشد و دانش‌آموزان بتوانند در هر زمانی به آن برگردند، محور اصلی بود.

یکی دیگر از راهبردهایی که در این زمان به‌کار گرفته شد، پرسیدن سؤالاتی به‌صورت زیر بود:

$$48x + 24 = 27x + 87$$

این صورت از معادله، اطلاعات ارزشمندی از میزان پیشرفت دانش‌آموزان فراهم کرد. پاسخ‌ها از آن‌هایی که می‌خواستند ۴۸ پرش تکی برای x بکشند، بعضی‌ها که ۴۸ را به‌صورت چهار تا ده و یک ۸ نمایش دادند، تا آن‌هایی که (به‌طور تأثیربرانگیزی) نمایش شکل ۱۱ را کشیدند، تغییر می‌کرد.

اما این هم قابل توجه بود که بسیاری از دانش‌آموزان سؤال کردند که آیا باید یک محور اعداد بکشند، با ادعای اینکه «می‌توانند ببینند» که $21x + 24 = 87$ و وقتی باز هم به چالش کشیده می‌شدند، برخی عنوان می‌کردند که در «ذهن خود»، محور اعداد را «تصور کردند»، در حالی که دیگران فقط روی معادله عمل می‌کردند.

ما معتقدیم که قسمت اعظم کارهای بالا، مشابه ایده «انجام یک کار در هر دو طرف» است، و بعضی از

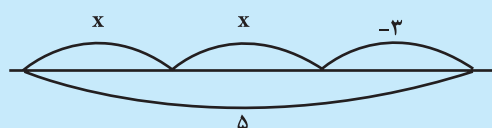
دانش‌آموزان شروع کردند به شفاف‌سازی راهبردهایشان با همین نوع عبارات، یعنی گاهی با اشاره به «دو طرف محور»، و گاهی «دو طرف معادله». مهم این است که به‌جای آنکه معلمان به دانش‌آموزان بگویند از رویه‌های مکانیکی استفاده کنند، خودشان در حال توسعه رویه‌ها

مهم این است که به‌جای آنکه معلمان به دانش‌آموزان بگویند از رویه‌های مکانیکی استفاده کنند، خودشان در حال توسعه رویه‌ها و توضیحات خود برای آن‌ها هستند. آن‌ها یک تصویر پایه‌ای دارند که اگر نیاز به اطمینان دوباره یا ارزشیابی مجدد یک راهبرد خاص داشتند، به آن بازگردند. نتیجه نهایی ممکن است یکی باشد، اما سطح درک بسیار متفاوت است

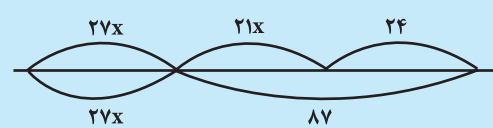
و توضیحات خود برای آن‌ها هستند. آن‌ها یک تصویر پایه‌ای دارند که اگر نیاز به اطمینان دوباره یا ارزشیابی مجدد یک راهبرد خاص داشتند، به آن بازگردند. نتیجه نهایی ممکن است یکی باشد، اما سطح درک بسیار متفاوت است. این ایده، در یادگیری ریاضیات از طریق گذار از ساخت و سازهای ریاضی غیررسمی خود به ریاضیات رسمی‌تر، در رویکرد آموزش ریاضی واقع‌گرا (RME)^۷ نیز که در هلند توسعه‌یافته، به‌طور بسیار موفقی استفاده شده است (ترفر ۱۹۹۱ را ببینید).

استفاده از اعداد منفی

اینکه کی و چگونه اعداد منفی معرفی شوند، موضوعی است که در تحقیق آتی به آن نگاه شده است. اما نمایش واقعی معادلاتی که شامل آن‌ها هستند، جالب است. زمانی که این مدل در کلاس‌ها استفاده شد، نمایش‌های ممکن متعددی ظاهر شد. چهار نمایش زیر برای معادله $5 = 3 - x$ مورد بحث قرار گرفته است. ۱. بسیاری از دانش‌آموزان در ابتدا می‌خواستند که از نمادگذاری شکل ۱۲ استفاده کنند. این نمایش چون قرارداد مورد پذیرش روی محور اعداد را رعایت نمی‌کرد، اگرچه اجازه حل بعضی از معادلات را می‌داد، حذف شد. در این‌جا، انجام کارهای قبلی برای سؤال‌های جمع و تفریق روی محور اعداد به دانش‌آموزان کمک کرد.

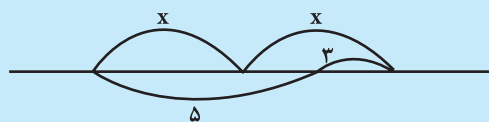


شکل ۱۲: اولین نمایش برای $5 = 3 - x$.



شکل ۱۱: نمایش دانش‌آموز از $48x + 24 = 27x + 87$.

۲ و ۳. شکل‌های ۱۳ و ۱۴ توسط بسیاری از دانش‌آموزان استفاده شد، و به‌نظر می‌رسد بازتاب روشی است که در اکثر مدارس، تفریق را روی یک محور اعداد نمایش می‌دهند.



▲ شکل ۱۳: نمایش دوم برای $2x - 3 = 5$

▼ شکل ۱۴: نمایش سوم برای $2x - 3 = 5$

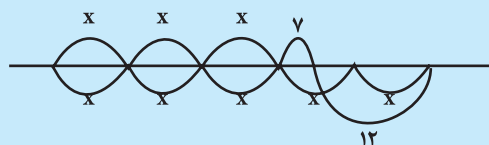


این نمایش‌ها باز هم به دانش‌آموزان اجازه می‌دادند که به راهبردهای حل دست یابند. برای مثال،

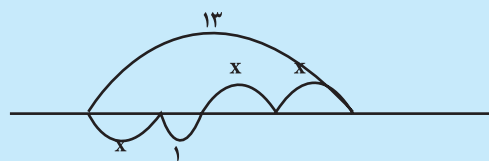
$$3x + 7 = 5x - 12$$

اکنون مانند شکل ۱۵ دیده می‌شود که از آن، سؤالاتی مشابه قبل می‌تواند مطرح شود، یا یک «جواب» از روی $2x - 12 = 7$ ، یا مستقیماً با دیدن $2x = 19$ می‌تواند به‌دست آید.

به‌طور مشابه، $13 - 2x = x + 1$ می‌تواند مانند شکل ۱۶ نمایش داده شود.

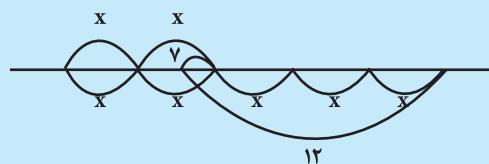


شکل ۱۵: نمایش معادله‌ای با یک مجهول در هر دو طرف و یک عدد منفی.



شکل ۱۶: نمایش $13 - 2x = x + 1$

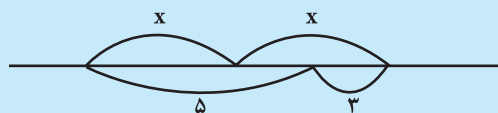
و $2x - 7 = 5x - 12$ مانند شکل ۱۷.



شکل ۱۷: نمایش $2x - 7 = 5x - 12$

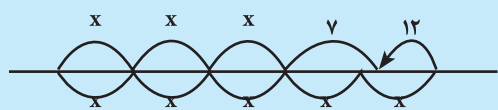
یک مانع ممکن برای این نمایش، ظهور مجدد موضوع اندازه پرش‌ها روی محور بود. برای مثال، در معادله بالا، دانش‌آموزان نگران این بودند که برای $7 -$ «چقدر باید به عقب برگردند»، و آیا پرشی به اندازه ۷ بزرگ‌تر از پرشی به اندازه x است یا نه. جالب بود که حتی برای دانش‌آموزانی که موفقیت‌های بالایی هم داشتند، این دغدغه وجود داشت. آن‌ها در پرسش‌های قبلی، به وضوح به اینکه مدل را تنها به‌عنوان نمایشی «برای» معادله ببینند، رسیده بودند. این گام عقب‌گرد را می‌توان به‌عنوان مثال خاصی از پدیده‌ای دید که در موقعیتی مشابه، توسط فیلولی و روحانو (۱۹۸۹) شناسایی شده و آن را «از دست دادن موقت توانایی‌های قبلی، همراه با رفتارهایی که روی مدل تثبیت شده‌اند» (ص ۲۱) توصیف کرده است. اما واضح است که این مانع، غیرقابل عبور نیست و بحثی را موجب می‌شود که به‌خودی‌خود مفید است.

۴. اولین باری که شکل ۱۸ دیده شد، وقتی بود که یک دانش‌آموز آن را به‌عنوان بخشی از یک تکلیف کشید. معلم در ابتدا مطمئن نبود که آن را بپذیرد یا نه، اما تقریباً قانع شد. زیرا بلافاصله بسیاری دیگر از دانش‌آموزان خواستند که آن را به‌کار گیرند.



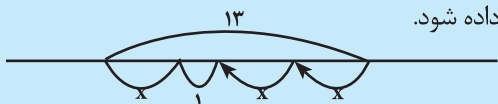
شکل ۱۸: نمایش چهارم برای $2x - 3 = 5$

به این ترتیب، برای مثال، این نمایش $3x + 7 = 5x - 12$ را مانند شکل ۱۹ نشان می‌دهد.



شکل ۱۹: نمایش $3x + 7 = 5x - 12$

و $13 - 2x = x + 1$ می‌تواند مانند شکل ۲۰ نمایش داده شود.



شکل ۲۰: نمایش $13 - 2x = x + 1$

جالب بود که در مدرسه‌ای که این نمایش ظاهر شد، دانش‌آموزان شروع به توصیف انتقال‌های دیگری روی معادلات کردند که قبل از آن، در نظر گرفته نشده بود. برای مثال، $13 - 2x = x + 1$ به وضوح معادل است با $13 = x + 1 + 2x$ و ناگهان تصویر «عبور جملات از علامت تساوی» شروع به ظاهر شدن کرد.

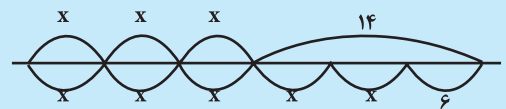
وقتی این اتفاق افتاد، به نظر رسید که مهم است به پرسش‌های قبلی بازگردیم. نمایش $3x + 14 = 5x + 6$ که در شکل ۲۱ نشان داده شده است، به عباراتی مانند:

$$3x + 14 - 6 = 5x$$

$$3x + 14 - 6 - 2x = 3x$$

$$5x + 6 - 14 - 3x = 0$$

منتهی شد. این اکتشاف‌ها، به بحث‌های زیادی در این باره منجر شد که چیزی که دارد اتفاق می‌افتد، چگونه با مفهوم «دو طرف» که در جلسات درس قبل در ذهن‌ها بود، مقایسه می‌شود.



شکل ۲۱: بازگشت به یکی از نمایش‌های قبلی، $3x + 14 = 5x + 6$.

نتایج و محدودیت‌های مدل

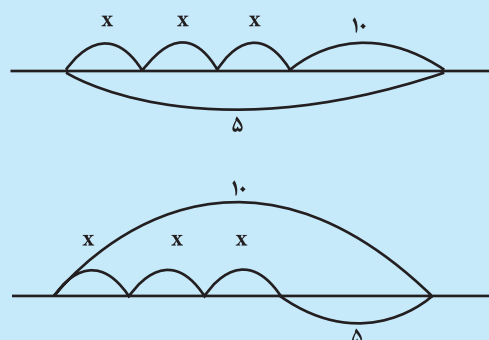
برخی از دانش‌آموزان ما، حالا آزمون‌های مدرسه‌ای و نیز ملی را که در سنین چهارده و شانزده گرفته می‌شود داده‌اند. نتایج اولیه امیدبخش است. مطمئناً تصویر محور در ذهن تعداد نسبتاً زیادی از دانش‌آموزان نقش بسته است، و ما به‌طور منظم دیدیم که بیش از ۵۰ درصد از یک کلاس، نموداری می‌کشیدند تا به آن‌ها در حل یک معادله کمک کند. این احساس متفاوت با تجربه ما، در کار با تصاویر دیگری مانند ترازو بود که دانش‌آموزان پس از آن که یک‌بار مدل را «کنار گذاشتند»، به‌ندرت آن را به‌کار می‌گرفتند (بولتون-لویس و دیگران، ۱۹۹۷ را برای شواهد دیگری از آن ببینید).

این هم درست بود که معلم‌ها، بیش از آنچه قرار بود، با محور اعداد ماندند، در حالی که تلاش می‌کردند مثال‌هایی خلق کنند که دانش‌آموزان را تشویق کند از محور دور شوند و در همان حال، به دیگرانی که می‌خواستند با آن باقی بمانند، این اجازه را بدهند. خیلی از معلم‌ها، وقتی در این مورد از آن‌ها سؤال شد،

به در دسترس بودن و ماندگاری مدل، به‌عنوان دلیلی برای این تغییر رویکرد، اشاره کردند.

به‌نظر می‌رسد که مدل، اجازه حرکات نسبتاً طبیعی را هنگام سروکار داشتن با صورت‌های مختلف یک معادله می‌دهد. برای مثال، $1 + 2x = 5$ همان‌قدر دست‌یافتنی به‌نظر می‌آمد که $2x + 1 = 5$ و $5 = 2x + 1$. اما $3x + 2 = 5x + 1$ از نوع معادلاتی مثل $3x + 2 = 5x + 1$ دیده می‌شد، و وقتی به‌صورت $2 + 3x = 5x + 1$ نوشته می‌شد، دانش‌آموزان به «باز مرتب کردن» معادله، برای رسم آن راحت بودند. این با برخی مدل‌های دیگر که یک ترتیب مجدد، یا حرکت به‌سمت ضرایب منفی، موانعی جدی برای فراگیران به‌وجود می‌آورد یا حتی به شکست کامل مدل منجر می‌شود در تضاد است (فیلوی و روحانو، ۱۹۸۹). از این نظر، محور اعداد ممکن است دید بهتری از خواص تساوی (مثل تقارن و تراگذاری) بدهد، و بنابراین، فرصت‌های ارزشمندی برای درگیر کردن دانش‌آموزان به بحث در مورد چنین خواصی پدید آورد. ما در جمع‌بندی به این نکته برمی‌گردیم.

ما قدرت این مدل را در این واقعیت می‌دانیم که می‌تواند راهبردهای حل ممکن را در دسترس قرار دهد و به دانش‌آموزان ابزاری برای تصمیم‌گیری در مورد اینکه کدام یک عملی است، می‌دهد. این مدل ممکن است حتی آغازی باشد برای معنا بخشیدن به چیزی که برای بسیاری از دانش‌آموزان، قبلاً عملیاتی بی‌معنی بود. این روش تمام معادلات را با موفقیت مدل‌سازی نکرد، که قرار هم نبود چنین کند. برای مثال، وقتی x در معادله‌ای مانند $3x + 10 = 5$ یک جواب منفی دارد، ما امکانات نمایشی مانند شکل ۲۲ داریم.



شکل ۲۲: نمایش‌هایی برای وقتی که x در معادله‌ای جواب منفی دارد، در این مورد، $3x + 10 = 5$.

می‌تواند در طیف وسیعی از کلاس‌ها مفید باشد، وزن بیشتری داد.

اما، ویژگی اصلی این مدل که در تمام کلاس‌های ما مشهود بود، در دسترس بودن ابتدایی آن برای دانش‌آموزان بود، و از این نظر این مدل، می‌تواند اثر «برش آموزشی» را که قبلاً به آن اشاره شد، محدود کند. اسفارد (۱۹۹۱) تأکید کرده است که قبل از اینکه مفاهیم رویه‌ای بتوانند به مفاهیم ساختاری تبدیل شوند، به دوره‌ای طولانی از تجربه نیاز است. ما به‌طور آزمایشی ادعا می‌کنیم که هنگام استفاده از محور اعداد، دانش‌آموزان می‌توانند به‌طور منظم، از یکی به دیگری تغییر وضعیت دهند. برای مثال، وقتی دانش‌آموزی یک نمایش محور اعداد از مثلاً $6 + 5x = 14 + 3x$ می‌کشد، احتمال دارد که این یک نگاه عملیاتی («رویه‌ای») را نمایش دهد. اما وقتی آن‌ها توضیح می‌دهند که $6 + 2x = 14$ را می‌بینند، یا از آن‌ها خواسته می‌شود که توجیه کنند که چرا $6 + 9x = 14 + 7x$ ، در این صورت ما معتقدیم که این نمایش، در قلمرو ساختاری کار می‌کند. ما راحت بودن با صورت‌های «مختلف» یک معادله واحد را نیز شاهد دیگری از این می‌بینیم که دانش‌آموزان، شروع به دیدن گزاره‌های جبری به‌عنوان اشیا و همچنین فرایند می‌کنند. به‌عنوان مثال، حرکت از $5 + 2x = 14$ به $5 = 14 - 2x$ پیچیدگی بیشتر و گاهی اوقات یک مشکل جدی برای دانش‌آموزان است. این انعطاف‌پذیری که قادر باشیم $1 + 2x$ را هم به‌عنوان یک فرایند (که باید ارزشیابی شود) و هم به‌عنوان یک شیء (که باید دست‌ورزی شود) تعبیر کنیم، برای پیشرفت جبری بسیار مهم است و به‌نظر می‌رسد این مهارت، در دانش‌آموزان ما توسعه پیدا کرده است.

علاوه‌براین، در این‌جا نقش معلم و سؤالاتی که مطرح می‌کند بسیار مهم است، و این از بسیاری جهات، اصل موضوع است. ما محور اعداد را، هم به‌خاطر در دسترس بودن آن، هم به‌خاطر ماندگاری آن، و هم برای این حقیقت که برای بسیاری از دانش‌آموزان ما تصویری موجود و آشناست، دوست داریم. از این نظر، این مدل می‌تواند اهدافی مشابه با محتوا و مدل‌هایی را که در رویکرد «آموزش ریاضی واقع‌گرا» از آن‌ها استفاده شده است، برآورده کند. چنین تحقق اهدافی، نه‌تنها دسترسی اولیه به ریاضیات را فراهم می‌کند، بلکه توسعه از طریق ریاضیات را نیز پشتیبانی می‌کند (گراونمیجر، ۱۹۹۰). اما فکر کردن در مورد موافق یا مخالف بودن با این رویکرد، یا شروع به مقایسه مزایای نسبی آن با دیگر مدل‌ها، دور شدن از اصل مطلب است. در واقع، تعداد بیش از حدی

اولی از نظر ریاضی رضایت‌بخش به‌نظر نمی‌رسد؛ دومی ممکن است برای بسیاری از دانش‌آموزان تعمیم دشواری از ایده باشد. بعضی معلم‌ها هنوز روی این کار می‌کنند، اما این کار، اگر چه ممکن است به لحاظ علمی جالب باشد، موضوع واقعاً مهمی نیست. بحث اصلی این مقاله این است که از طریق به‌کارگیری مدل محور اعداد، دانش‌آموزان می‌توانند در زمانی که نیاز به حل معادلاتی پیدا می‌کنند که جواب منفی دارند، راهبردهای مناسبی برای کار روی تمام معادلات ساده پیدا یا تبیین کنند. اگر دانش‌آموزان، کاملاً وابسته به محور هستند، می‌توان چنین نتیجه گرفت که برای حرکت به‌سمت چنین معادلاتی، هنوز آماده نیستند.

ما قدرت این مدل را در این واقعیت می‌دانیم که می‌تواند راهبردهای حل ممکن را در دسترس قرار دهد و به دانش‌آموزان ابزاری برای تصمیم‌گیری در مورد اینکه کدام یک عملی است، می‌دهد. این مدل ممکن است حتی آغازی باشد برای معنا بخشیدن به چیزی که برای بسیاری از دانش‌آموزان، قبلاً عملیاتی بی‌معنی بود

بحث

چیزی که در این‌جا توصیف کردیم، آزمون‌های اولیه‌ای در تعداد کمی از مدارس بود. ما خود را تنها به توصیف مختصری از نوع راهبردهایی که معلم‌ها استفاده می‌کردند، و پاسخ‌های اولیه دانش‌آموزان به این راهبردها، محدود کردیم. در آینده، روی مطالعات موردی با جزئیات بیشتری از یادگیری دانش‌آموزان کار می‌کنیم.

اما در همین آزمون‌های اولیه، دانش‌آموزان از کار با معادلات به این روش لذت بردند و مطمئناً پیشرفت کردند. بعضی از دانش‌آموزان تواناتر، توانستند خیلی سریع راهبردهای کارایی را برای حل یک گروه کامل از معادلات توسعه دهند، و به وضوح شروع کردند به فرمول‌سازی برای رویه‌های مجردتر مورد نیاز برای حل مسائل سطح بالاتر. شاید، تکان‌دهنده‌تر از همه، دسترسی دانش‌آموزان متوسط یا ضعیف به مسائلی بود، که تجربه نشان می‌داد معمولاً با آن‌ها کشمکش دارند. یکی از ویژگی‌های کار ما این بود که معلم‌ها به دلیل شباهت تجارب و نتایجشان در کلاس‌ها و مدارس متفاوت، می‌توانستند با آنچه دیگران می‌گفتند، ارتباط برقرار کنند. این موضوع باعث شد که وقتی معلم‌ها یکدیگر را می‌دیدند، بحث‌های مولد بسیاری با هم داشته باشند، و بدون شک به آن‌ها کمک کرد راهبردهای تدریس خود را بهبود بخشند. این رویکرد جمعی به تحقیق کلاسی، وجه با ارزشی از کار ما بود، و به بحث اصلی ما که این رویکرد به تدریس معادلات،

5. Filloy, E. and Rojano, T. (1989) 'Solving equations: the transition from arithmetic to algebra', *For the Learning of Mathematics* 9(2), 19- 25.
6. Fong, H. and Chong, T. (1995) 'Solving algebraic word problems', *mathematics Teaching* 151, 34- 35.
7. Department for Education and Employment (2001) *Framework for teaching mathematics: Key Stage 3 National Strategy*, London, UK. DfEE.
8. Gravemeijer, K. (1990) 'Context problems and Realistic Mathematics Instruction', in Gravemeijer, K., van den Heuvel, M. and Streefland, L. (eds), *Contexts free productions tests and geometry in Realistic Mathematics Education*, OW & OC, The Netherlands, pp. 10- 32.
9. Herscovics, N. and Linchevski, L. (1991) 'Pre-algebraic thinking: range of equations and informal solutions used by seventh graders prior to any instruction', in Furinghetti, F. (ed), *Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, Assisi, Italy, pp. 173- 180.
10. Herscovics, N. and Linchevski, L. (1996) 'Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra', *Educational Studies in Mathematics* 30 (2), 39- 65.
11. Kieran, C. (1981) 'Concepts associated with the equality symbol', *Educational Studies in Mathematics* 12, 317- 326.
12. Pimm, D. (1995) *Symbols and meaning in school mathematics*, London, UK, Routledge.
13. Saenz- Ludlow, A. and Waldgrave, C. (1998) 'Third graders interpretations of equality and the equal symbol', *Educational Studies in Mathematics* 35 (2), 153- 187.
14. Sfard, A. (1991) 'On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin', *Educational Studies in Mathematics* 22, 1- 36.
15. Sfard, A. and Linchevski, L. (1994) 'The gains and pitfalls of reification the case of algebra', *Educational Studies in Mathematics* 26, 191- 228.
16. Streefland, L. (1990) 'Free productions in teaching and learning mathematics', in Gravemeijer, K., van den Heuvel, M. and Streefland, L. (eds) *Contexts free productions tests, and geometry in Realistic Mathematics Education*, OW & OC, The Netherlands, pp. 32- 52.
17. Streefland, L. (1991) *Fractions in Realistic Mathematics Education: a paradigm of developmental research*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
18. Treffers, A. (1987) *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction- The Wiskobas Project*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
19. Treffers, A. (1991) 'Realistic Mathematics Education in The Netherlands 1980- 1990', in Streefland, L. (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary Schools*, Utrecht, The Netherlands, Freudenthal Institute, Utrecht University, pp. 21- 57.
20. Vlassis, J. (2002) 'The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown', *Educational Studies in Mathematics* 49 (3), 341- 359.
21. Wijers, M. (2001) 'How to deal with algebraic skills in realistic mathematics education?', in Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. and Vincent J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The future of the teaching and learning of algebra* 2, Melbourne, Australia, Department of Science and Mathematics Education, University of Melbourne, pp. 649- 654.

متغیر برای مبادرت به چنین مقایسه‌ای وجود دارد و هیچ شکی وجود ندارد که در دست‌های غیرماهر، مدل محور اعداد در پوشه «ایده‌های جدید جذاب» سر به مهر می‌ماند. چیزی که ما واقعاً به آن علاقه‌مندیم، راهبردهایی است که می‌تواند به کار گرفته شود تا به دانش‌آموزان کمک کند به متفکران جبری کارتری تبدیل شوند، و محور اعداد می‌تواند در این مورد نقش جدی بازی کند. اگر محور اعداد نقشی دارد، احتمالاً به‌خاطر این است که دسترسی به این مدل اجازه می‌دهد معادلاتی با مجهول در هر دو طرف، خیلی زودتر از آنچه در ساختار برنامه درسی فعلی ماست معرفی شوند. به این ترتیب، وقت بیشتری برای توسعه مفاهیم و مهارت‌های مهم، بدون فشار چارچوب‌ها و آزمون‌هایی که بیشتر اوقات یک نقطه پایان تثبیت شده (اغلب یک الگوریتم یا رویه بی‌معنی) را به معلم‌ها تحمیل می‌کند، می‌ماند. شروع کار از دانش‌آموزان یازده‌ساله (و به‌نظر می‌رسد امکان استفاده از مدل حتی قبل از این هم باشد) به دانش‌آموزان متوسط، حداقل سه‌سال برای کار به‌سوی روش‌های صوری‌تر و مجردتر، و معنا دادن به راهبردهای حل استاندارد، وقت می‌دهد.

پی‌نوشت‌ها

1. Framework for Teaching Mathematics
2. Didactic cut
3. undoing
4. Ontological
5. Cover stories
6. Mental starters
7. Realistic Mathematics Education

عنوان اصلی مقاله

Using the number line to investigate the solving of linear equation.

منابع

1. Behr, M., Erlwanger, S. and Nichols, E. (1976) *How children view equality sentences (PDMC Technical Report No.3)* Tallahassee, FL, Florida State University.
2. Boulton - Lewis, G., Cooper, T., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, H. and Mutch, S. (1997) 'The transition from arithmetic to algebra: a cognitive Perspective', in Pehkonen, E. (ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lahti, Finland, University of Helsinki, Lahti Research and Training Centre, 2, pp. 185- 192.
3. Crowley, L., Thomas, M. and Tall, D. (1994) 'Algebra, symbols, and translation of meaning', in da Ponte, J. and matos, J. (eds), *Proceeding of Mathematics Education*, Lisbon, Portugal, University of Lisbon, 2, pp. 240- 247.
4. Filloy, E. and Rojano, T. (1985) 'Operating the unknown and models of teaching', in Damarin, S. and Shelton, M. (eds), *Proceedings of the 7th Annual Meeting of PME-NA*, Columbus, OH, Ohio State University, pp. 75- 79.

کلیدواژه‌ها: مفهوم تابع، بازنمایی، یادگیری، استاندارد، ارتباط و اتصال بین مفاهیم.

اسکمپ^۱ (۱۹۸۹) بیان می‌کند که «تعداد زیادی از مطالعات تحقیقی کامل در سال‌های اخیر، نشان‌دهنده، ناپیوستگی بین ریاضی کلاس درس و ریاضی مورد استفاده در فعالیت‌های روزمره است». وی ادامه می‌دهد که «اگر یکی از مقاصد ما در آموزش ریاضی این است که دانش‌آموزان را به ریاضیاتی که بعد از مدرسه نیاز دارند تجهیز کنیم، شواهد زیادی وجود دارد که در این راه موفق نبوده‌ایم یا حداقل راه سرراستی نداریم که ما را امیدوار کند». به گفته وی، «برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای ما، واقعاً

براساس این فرض استوار است که ریاضی یک نهاد رسمی دانش است؛ موضوعی شامل اشیای ریاضی با مفاهیمی بدون کاربرد در خارج از آن. چنین ریاضیاتی، می‌تواند کاملاً از جهان تجربی جدا باشد و فقط به خاطر خودش مورد مطالعه قرار گیرد. اگرچه ما هم‌چنان، انتظار داریم کودکان آن را در زندگی آینده خود به کار ببرند».

بازنمایی‌های چندگانه در ریاضی

کلود ژانویه^۲ (۱۹۸۷)، از محققان پیش‌تاز در «بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در یاددهی و یادگیری ریاضی» بود. به اعتقاد وی، منظور از یک بازنمایی این است که برای درک بهتر یک مفهوم، ممکن است از تمثیل یا چیز دیگری استفاده شود. گاهی این بازنمایی‌ها مربوط به ساخت‌های ذهنی‌اند که در این صورت، «بازنمایی‌های داخلی» نامیده می‌شوند و گاهی به ساخت‌های فیزیکی اشاره

دارند که به آن‌ها، «بازنمایی‌های خارجی» گفته می‌شود. برای مثال، وقتی شخصی یک نمودار را یک بازنمایی برای مفهوم تابع در نظر می‌گیرد، تصور ذهنی او از این نمودار (بازنمایی خارجی) و تابع، یک بازنمایی داخلی است. پس از ژانویه، تحقیقات قابل توجهی در رابطه با بازنمایی‌ها در حوزه آموزش ریاضی انجام شد. برای نمونه، کستبرگ^۳ (۲۰۰۲) بازنمایی یک دانش‌آموز از یک مفهوم ریاضی را، شامل نشانه‌ها و علامت‌هایی می‌داند که وی از آن‌ها، برای فکر کردن به یک مفهوم و ارتباط دادن آن با سایر مفاهیم استفاده می‌کند. از نظر کستبرگ (۲۰۰۲)، بازنمایی‌ها به چهار شکل نوشتاری^۴، تصویری^۵، جدولی^۶ و گفتاری^۷ تقسیم می‌شوند. او توضیح می‌دهد که بازنمایی نوشتاری، از مجموعه‌ای

از نوشته‌ها و اعداد تشکیل شده است، در حالی که بازنمایی تصویری شامل حداقل یک تصویر است. بازنمایی جدولی نیز جمع‌آوری داده‌های عددی در یک جدول است و بالاخره، بازنمایی گفتاری، شامل توصیفات گفته شده است. کستبرگ (۲۰۰۲) برای آشنایی بیشتر با این چهار نوع بازنمایی، برای هر یک مثال‌های ملموس ارائه می‌دهد.

از نظر وی، **بازنمایی‌های نوشتاری**، نمادگذاری‌هایی هستند که دانش‌آموزان، آن‌ها را برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی در نوشتن، به کار می‌برند و شامل نام‌ها، نمادگذاری‌ها، اصول و توصیفات‌اند. نام‌ها، اصطلاحاتی هستند که برای اشاره به اشیای ریاضی یا رویه‌ها یا مجموعه‌ای از هر دو، استفاده می‌شوند (به‌طور مثال، اصطلاح مبنای). همچنین، نمادگذاری‌ها،

توضیحات ویژگی‌ها و نمونه‌هایی از مفاهیم نوشتاری ریاضی هستند که با نمادهای ریاضی بیان می‌شوند (مانند $\log^1 = 0$). از این‌ها گذشته، اصول، اظهارات کوتاهی‌اند که به‌عنوان قوانین و راهنمایی‌های ریاضی به کار می‌روند (مثل این که لگاریتم‌ها توابع نمایی هستند). بالاخره، توصیفات، توضیحاتی درمورد رویه‌ها، نتایج و فواید رویه‌ها، اشیای ریاضی و رابطه‌ها هستند (به‌طور مثال یک تابع، مجموعه‌ای از نوشته‌ها و اعداد است).

اما **بازنمایی‌های تصویری** تصاویری هستند که دانش‌آموزان از آن‌ها برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی

به‌طور شهودی استفاده می‌کنند. **بازنمایی‌های جدولی** که از داده‌های عددی تشکیل شده‌اند، ابزاری هستند که دانش‌آموزان از آن‌ها برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی، استفاده می‌کنند. همچنین **بازنمایی‌های شفاهی**، کلمات گفته شده و توضیحاتی هستند که دانش‌آموزان برای صحبت کردن در مورد یک مفهوم ریاضی به کار می‌برند و مانند **بازنمایی‌های نوشتاری**، شامل نام‌ها، نمادگذاری‌ها، اصول و توصیفات هستند که در آن‌ها، اگرچه تعریف‌ها شبیه تعریف‌های نوشتاری‌اند، اما تنها گفته می‌شوند و به‌صورت نوشته در نمی‌آیند (مثل اینکه به‌طور شفاهی بگوییم «لگاریتم عدد ۱، صفر است»).

بازنمایی‌ها

زهرا گویا- عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی
علی امامی - کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی کهریزک - تهران بزرگ

ونقش آن‌ها در درک مفهوم تابع

را از منظرهای متفاوت ببینند و با استفاده از برقراری ارتباط بین آن‌ها، به درک بهتری از یک مفهوم دست یابند. با چنین استدلالی، «شورای ملی معلمان ریاضی» (۲۰۰۰) (NCTM)^{۱۲} در آمریکا و کانادا، بازنمایی را یکی از «استانداردهای فرایندی» برنامه درسی ریاضی اعلام نمود. بدین سبب، پرداختن به آن، توجیه قوی‌تری برای استفاده از بازنمایی‌ها در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای عرضه می‌کند.

بازنمایی از دیدگاه شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (NCTM)

یکی از پنج استاندارد فرایندی که در سند شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM, ۲۰۰۰) به آن اشاره شده، «بازنمایی» است. در این سند، درمورد استاندارد بازنمایی چنین گفته شده است:

برنامه درسی ریاضی در همه پایه‌های تحصیلی (از پیش‌دبستانی تا پیش‌دانشگاهی)، باید همه دانش‌آموزان را به گونه‌ای آماده کند تا قادر به انجام موارد زیر شوند:

۱. خلق و استفاده از بازنمایی‌ها برای سازماندهی، ثبت و ارتباط دادن ایده‌های ریاضی؛
۲. انتخاب کردن، به کار بردن و تفسیر بازنمایی‌های ریاضی در حل مسائل؛
۳. استفاده از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و تغییر پدیده‌های ریاضی، اجتماعی و فیزیکی (ص ۳۶۰).

این شورا، ریاضی را به تعبیر استین^{۱۳} (۱۹۸۸)، «علم الگوها» می‌داند و بدین سبب معتقد است که بازنمایی‌ها، ابزارهایی هستند که به وسیله آن‌ها آن الگوها ثبت

دیگری را دارد، ولی این کار ضروری نیست. هر بازنمایی شامل دو وجه درونی و بیرونی است که تقریباً از اهمیت برابری برخوردارند و جدایی ناپذیرند، اما لزوماً به جای یکدیگر قرار نمی‌گیرند. وجه خارجی آن برای افراد از طریق حواسشان قابل درک است ولی وجه درونی آن خیر؛ یعنی درک دانش‌آموزان از یک مفهوم، لزوماً همان بازنمایی خارجی نیست. به عبارتی دیگر، وجه خارجی لزوماً فقط وجه داخلی را منعکس نمی‌کند، بلکه اثر متقابل آن‌ها روی هم، به دانش‌آموز اجازه می‌دهد تا به‌طور مؤثری از این ابزار، برای درک مفهوم استفاده کند.

از این گذشته، گلدین^۹ و کاپوت^{۱۰} (۱۹۹۶) و گلدین (۱۹۹۸)، نگاه منسجم‌تری به بازنمایی‌ها دارند و آن‌ها را نظامی می‌دانند که افراد برای یادگیری ریاضی، به شکل‌های مختلف از آن استفاده می‌کنند. برای مثال، آنان به این نتیجه رسیدند که یک مفهوم جدید، معمولاً از طریق بازنمایی‌ها به دانش‌آموزان معرفی می‌شود و به تدریج، بازنمایی‌های بیرونی بر درک و فهم دانش‌آموزان تأثیر گذاشته و آنان را قادر می‌سازد تا به توسعه بازنمایی‌های درونی آن مفهوم بپردازند. این باور، همسو با نظرات ازل^{۱۱} (۲۰۰۸) است که معتقد است توانایی نشان دادن یک مفهوم با شیوه‌های گوناگون، درک عمیقی از آن مفهوم را در ذهن ایجاد می‌کند. بدین سبب، بازنمایی‌های ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا مفاهیم ریاضی

بازنمایی‌ها در همه ارتباطات ریاضی نقش ایفا می‌کنند و هر یک به نوعی، در نشان دادن جنبه‌هایی از تفکر انسان سهیم‌اند. درواقع، کستبرگ (۲۰۰۲) معتقد است که اگرچه درک فرد نسبت به یک مفهوم ریاضی در ذهن وی شکل می‌گیرد، اما به تعبیر ژانویه (۱۹۸۷)، چگونگی استفاده کردن یک یادگیرنده ریاضی از نمادها برای نمایش دادن یک مفهوم، نوعی بازنمایی درونی وی از آن مفهوم است. برای مثال، اگر دانش‌آموزی برای تقریب زدن $\log_2$ از نمودار استفاده کند، می‌تواند نشان‌دهنده این باشد که از نظر او، مفهوم لگاریتم با نمودار تابع لگاریتمی پیوند خورده است. به گفته کستبرگ، یک دانش‌آموز وقتی درمورد یک مفهوم فکر می‌کند یا با آن ارتباط برقرار می‌کند، احتمالاً از ترکیبی از چهار بازنمایی مورد بحث استفاده می‌کند که چنین استفاده‌ای، نشان‌دهنده درک او از یک مفهوم ریاضی است.

این در حالی است که به گفته مارکوس^۸ (۲۰۰۶)، یک بازنمایی ابزاری است برای فکر کردن به چیزی که به واسطه استفاده از ابزار ساخته شده است. یک بازنمایی، قابلیت قرار گرفتن به جای چیز

شده و تجزیه و تحلیل می‌شوند و هنگامی که دانش‌آموزان از لحاظ ریاضی خبره می‌شوند، به‌طور گسترده‌ای تعداد بازنمایی‌های ریاضی و دانش استفادهٔ ثمربخش از آن‌ها را توسعه می‌دهند. شورا، این دانش را شامل انتخاب بازنمایی‌های مناسب برای رسیدن به دیدگاه‌های خاص جهت حصول اهداف مورد نیاز می‌داند. مثلاً در جبر، بازنمایی‌ها به‌طور فراگیری وجود دارند و نمودار حامل اطلاعات شهودی خاصی است، در حالی که توضیحات نمادین ممکن است برای دست‌ورزی، تحلیل و تبدیل آسان‌تر باشند. همین‌طور در مدل‌سازی ریاضی، استفاده از روش‌های متنوع برای نمایش داده‌ها، اهمیت بازنمایی‌ها را بیشتر مشخص می‌کند. این شورا معتقد است که به‌وسیلهٔ بازنمایی‌های گوناگون، دانش‌آموزان می‌توانند راه‌حل‌های مختلفی برای حل یک مسئله پیدا کنند و آن‌ها را با هم مقایسه کنند. همچنین، بازنمایی‌ها استدلال کردن را که یکی دیگر از پنج استاندارد فرایندی است، تسهیل می‌کنند و ابزاری برای اثبات هستند. علاوه بر این‌ها، بازنمایی‌های گوناگون، راه‌های متفاوتی برای فکر کردن و دست‌ورزی با اشیای ریاضی فراهم می‌کنند و یک شیء ریاضی، وقتی از دیدگاه‌های مختلف دیده می‌شود، بهتر فهمیده می‌شود. هنگامی که دانش‌آموزان موضوع جدیدی را مطالعه می‌کنند، با بسیاری از بازنمایی‌های جدید برای مفاهیم ریاضی آشنا خواهند شد. آنان نیازمندند تا با انعطاف بیشتری بین بازنمایی‌های گوناگون ارتباط برقرار نمایند و این در حالی است که بخش عظیمی از توانایی ریاضی

دانش‌آموزان، با مشاهده و کارکردن با موضوعات متفاوت ریاضی از دیدگاه‌های مختلف، ایجاد می‌شود. برای مثال، دانش‌آموزان خردسال در پایه‌های اول ابتدایی، اغلب برای درک و فهم مفاهیم ریاضی، از بازنمایی‌های ملموس و شهودی استفاده می‌کنند و به تعبیر برونر (۱۹۶۳)، در مرحله «مجسم» قرار دارند.

در پایه‌های بالاتر (معادل سه پایهٔ آخر ابتدایی)، دانش‌آموزان به تدریج، آمادگی ابداع و استفاده از بازنمایی‌های «نیمه‌مجسم» را برای اشیای ریاضی، مانند اعداد گویا که تجسم شهودی آن‌ها ساده نیست، پیدا می‌کنند. در دورهٔ دبیرستان و سال‌های پایان آموزش مدرسه‌ای، دانش‌آموزان به‌طور فزاینده‌ای با مفاهیم مجردی مانند تابع، معادلات، مثلثات، ماتریس‌ها و مانند این‌ها کار می‌کنند تا توانایی تجریدی‌شان افزایش یابد. بدین سبب در این دوره، نوع بازنمایی‌ها تغییر می‌یابد و بر میزان تجریدشان افزوده می‌شود تا دانش‌آموزان را قادر به تشخیص ساختارهای ریاضی مفاهیم نماید. به‌طور مشخص، در این مرحله، از دانش‌آموزان انتظار می‌رود تا چگونگی استفاده از یک نماد را در مقوله‌های مختلف تشخیص دهند و به‌عنوان نمونه، بتوانند از نماد (a, b) به‌عنوان زوج مرتب، یک نقطه در دستگاه مختصات، یک بازه و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه دو عدد استفاده کنند. درواقع،

دانش‌آموزان دبیرستانی به کمک بازنمایی‌های مناسب، ویژگی‌های ساختاری پدیده‌های ریاضی را تشخیص می‌دهند و روابط ریاضی بین این ویژگی‌ها را درک می‌کنند. این کار باعث می‌شود که بتوانند به تبیین و تفسیر مدل‌های پیچیده‌تر و کارآمدتری برای درک مفاهیم ریاضی بپردازند. به‌عنوان مثال، پدیده‌هایی با ویژگی تناوب، اغلب با توابع مثلثاتی مدل‌سازی می‌شوند؛ یا اینکه تابع نمایی، بازنمایی مناسبی برای رشد جمعیت است و بازنمایی‌های تکراری و بازگشتی برای توصیف برخی پدیده‌های واقعی کارآمد هستند. برای ایجاد چنین توانایی‌هایی در دانش‌آموزان، معلمان نقشی اساسی دارند و می‌توانند به دانش‌آموزان کمک کنند تا تصورات شخصی خود را به بازنمایی‌های شناخته شدهٔ ریاضی پیوند دهند. البته این شورا به استناد پژوهش‌های انجام شده، به این جمع‌بندی رسیده است که اهمیت استفاده از بازنمایی‌های چندگانه، بایستی در طول دورهٔ آموزشی دانش‌آموزان، مورد توجه قرار گیرد و استفاده از بازنمایی‌های مختلف برای درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی، بخش مهمی از فرایند یاددهی-یادگیری ریاضی را تشکیل دهد.

تمام دانش آموزان باید بتوانند ارتباطات ریاضی وار برقرار کرده و ریاضی وار استدلال کنند و ریاضی را قدر بدانند تا دانش آموزانی شوند که بر قابلیت ها و توانایی های خود در انجام تکالیف ریاضی اعتماد پیدا کرده و در نهایت، توانایی حل مسائل ریاضی را پیدا کنند

درواقع، دانش آموزان پایه های ابتدایی از بازنمایی های متنوع و ارتباط و اتصال بین مفاهیم، برای ساخت و ساز دانش ریاضی و بیان ایده های ریاضی خود استفاده می کنند و با این کار، فرایند حرکت به سمت تجرید را تسریع می کنند. آن ها همچنین، از بازنمایی ها برای سازماندهی تفکرشان استفاده می کنند. در نتیجه، با حرکت بین بازنمایی های مختلف یک ایده یا مفهوم، درک و استفاده از مفاهیم و رویه های ریاضی افزایش می یابد و ویژگی های مسئله های ریاضی بهتر دیده می شود. بدین سبب، استفاده دانش آموزان از بازنمایی ها - به خصوص آن هایی که برایشان ملموس تر است، امری ضروری در یادگیری ریاضی محسوب می شود.

ارتباط بین بازنمایی ها و نقش آن ها در یادگیری

از دیدگاه شورای ملی معلمان ریاضی، مهم ترین اهداف آموزش ریاضی این است که تمام دانش آموزان یاد بگیرند که برای ریاضی ارزش قائل شوند و به اهمیت ریاضی در جریان زندگی و در پرورش ذهن و اندیشه واقف شوند. همچنین، تمام دانش آموزان باید بتوانند ارتباطات ریاضی وار برقرار کرده و ریاضی وار استدلال کنند و ریاضی را قدر بدانند تا دانش آموزانی شوند که بر قابلیت ها و توانایی های خود در انجام تکالیف ریاضی اعتماد پیدا کرده و در نهایت، توانایی حل مسائل ریاضی را پیدا کنند (گویا، ۱۳۷۵).

می شود، یا اینکه همان ارتباطات قبلی جرح و تعدیل می شوند. زمانی که تفکر فعال و بازتابی وجود داشته باشد، طرحواره ها دائماً جرح و تعدیل می شوند یا تغییر می یابند، به طوری که ایده های جدید بهتر بتوانند با آنچه از قبل ساخته شده است، جفت و جور شوند. درواقع، فهمیدن را می توان به صورت میزان کیفیت و کمیت ارتباط هایی که یک ایده با ایده های قبلی برقرار می کند، تعریف کرد.

به گفته مارکوس (۲۰۰۶)، ارتباطات و اتصالات و وابستگی های بین بازنمایی ها و اجزای دانش، همچنین توانایی حرکت، تغییر و ترجمه بین بازنمایی ها، از مشخصه های مهم یادگیری و حل مسئله است (هیبرت و لُفور، ۱۹۸۶؛ هاپاسالو و کدیجویچ، ۲۰۰۰؛ تال^{۱۴} و وینر^{۱۵}، ۱۹۸۱؛ گلدین، ۱۹۹۸؛ دریفوس^{۱۶}، ۱۹۹۱؛ هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲؛ زیمرمن^{۱۷}، ۲۰۰۵). از نظر شورای ملی معلمان ریاضی، مطالعه ریاضی باید شامل فرصت های زیادی برای ایجاد ارتباطات و اتصالات ریاضی باشد تا دانش آموزان بتوانند:

- اجسام فیزیکی، تصورات و نمودارها را به یکدیگر و به ایده های ریاضی مرتبط کنند؛
- تفکرشان را در مورد ایده ها و موقعیت های ریاضی نشان دهند، یعنی بین زبان روزانه و زبان و نمادهای ریاضی، ارتباط برقرار کنند.
- درک کنند که تولید و استفاده از بازنمایی ها، بحث کردن، خواندن، نوشتن و گوش دادن به ریاضی، بخش های حیاتی یادگیری ریاضی هستند.

استفاده از بازنمایی های گوناگون و مرتبط کردن آن ها به یکدیگر، باعث درک بهتر دانش آموزان از مفاهیم ریاضی می شود. تحقیقات صورت گرفته در این حوزه نشان می دهد اگر بازنمایی ها به صورت مؤثری با هم متصل شوند، زمینه درک موضوعات ریاضی فراهم می شود. در نتیجه، ایجاد ارتباط و اتصال بین بازنمایی های فیزیکی، تصویری، نمادین، نموداری، شفاهی و ذهنی از یک ایده ریاضی، نقشی کلیدی در درک عمیق تر آن ایفا می کند. مثلاً، وقتی دانش آموزان می بینند که یک بازنمایی، مثل یک معادله، می تواند وضعیت های زیادی را توصیف کند، به قدرت ریاضی پی می برند و وقتی می فهمند که بعضی از بازنمایی ها برای نمایش یک مسئله مفیدتر از بعضی دیگرند، آن وقت، فایده و انعطاف پذیری ریاضی را می بینند.

این، مشابه ایده ای است که قبلاً اسکمپ (۱۹۸۹)، به عنوان شبکه های تلفیقی یا طرحواره های شناختی مطرح کرده بود و معتقد بود که آن ها، هم محصول ساخته شدن دانش و هم ابزاری برای ساختن دانش جدید هستند. یعنی همان طور که یادگیری رخ می دهد، آن شبکه ها نیز آرایش مجدد می یابند و ارتباطاتی به آن ها اضافه

۲. بین بازنمایی‌های درونی و بیرونی دانش، یک رابطه وجود دارد؛
۳. بازنمایی‌های داخلی، به هم متصل‌اند.

علاوه بر این، هیبرت و کارپنتر توضیح داده‌اند که بازنمایی‌های داخلی و ارتباط‌هایشان، از روی تحلیل بازنمایی‌های خارجی و ارتباط‌های آن‌ها، مشخص می‌شوند. اما شناخت این بازنمایی‌های ذهنی و ارتباط‌ها ساده نیست. با اینکه آموزشگران ریاضی نمی‌دانند یک دانش‌آموز چگونه مفاهیم ریاضی را به‌طور ذهنی بازنمایی می‌کند یا ماهیت این بازنمایی‌ها چیست، اما معتقدند که حل دانش‌آموز از یک مسئله، تحت تأثیر بازنمایی‌های بیرونی (اشیای فیزیکی، تصاویر، نمادها و مانند این‌ها) قرار دارد. به‌طور مثال، مسائل حل‌شده در بیرون و درون مدرسه بر بازنمایی‌های درونی اثر می‌گذارند و به‌وسیله شبکه‌های مفهومی حمایت می‌شوند (نقل شده در کتسرگ، ۲۰۰۲). هیبرت و کارپنتر (۱۹۹۲) ادعا می‌کنند که برای «تفکر درمورد ایده‌های ریاضی» این بازنمایی‌ها مورد نیازند. به گفته آن‌ها، ارتباط‌ها یا با توجه کردن به شباهت‌ها و تفاوت‌ها یا به‌وسیله شمول و دربرگیری شکل می‌گیرند، بدین ترتیب که یک ایده جدید، با ایده‌های دیگری که تاکنون به‌صورت ذهنی بازنمایی شده‌اند، مقایسه می‌شود، یعنی یک بار دیگر، شباهت‌ها و تفاوت‌ها در ذهن فهرست می‌شوند و یادگیرنده، می‌تواند بازنمایی ذهنی خود را از یک ایده، با ساختارهای موجود مرتبط کند.

این توصیه‌ها نشان می‌دهد که از نظر این شورا، بازنمایی‌ها از راه‌های مهم ایجاد ارتباط بین ایده‌های ریاضی در همه سطوح‌اند. این ارتباط‌ها هم به دو دسته، شامل «مدل‌سازی ارتباطات و اتصالات بین شرایط مسئله‌ای که از دنیای واقعی یا از یک موضوع غیرریاضی و بازنمایی ریاضی آن نشأت گرفته» و «ارتباطات و اتصالات ریاضی بین دو بازنمایی هم‌ارز و فرایندهای متناظر با هم» تقسیم می‌شود.

هیبرت و کارپنتر (۱۹۹۲)، یک نظریه شناختی برای درک ریاضی دانش‌آموزان ارائه کرده‌اند که در آن، وجود شبکه‌هایی از بازنمایی‌های درونی پیش‌بینی شده است که تعداد و قدرت ارتباط‌های بین بازنمایی‌ها، به‌عنوان معیاری برای میزان یادگیری در نظر گرفته شده است. برای مثال، طبق این نظریه، دانش‌آموزی که در ذهن خود، یک بازنمایی داخلی برای تابع ایجاد کرده است که با تعریف تابع و نمودار آن مرتبط است، درک بهتری از تابع دارد تا دانش‌آموزی که به‌طور ساده، تنها مطالبی درمورد تابع شنیده است. این نظریه بر سه فرض زیر استوار است:

۱. دانش به‌صورت درونی نمایش داده می‌شود و این نمایش‌های درونی، ساختاری هستند؛

از نظر مارکوس (۲۰۰۶)، ارتباطات و اتصالات به دو شکل **بازتابی**^{۱۸} و **شراکتی**^{۱۹} هستند. وقتی کسی از یک بازنمایی به جای بازنمایی دیگری استفاده کند، ارتباط **شراکتی** بین دو بازنمایی برقرار کرده است و اگر از یک بازنمایی برای توضیح دیگری استفاده کند، یک ارتباط **بازتابی** بین دو بازنمایی ایجاد نموده است. این مشخصه‌ها، ماهیت بازنمایی‌ها را به‌عنوان ابزاری برای فکرکردن برجسته‌تر می‌کنند. در حل مسئله، اغلب تعویض بین بازنمایی‌ها اهمیت دارد و معمولاً لازم است به کمک توضیح یک بازنمایی به‌وسیله یک بازنمایی دیگر، استدلال کنیم. به‌علاوه، مارکوس (۲۰۰۶) ابراز می‌دارد که در یک اتصال بازتابی، تشخیص اینکه کدام بازنمایی برای توضیح استفاده شده و کدام یک توضیح داده شده‌اند دشوار است و بیشتر اوقات به نظر می‌رسد که بازنمایی‌ها، دو به دو یکدیگر را توضیح می‌دهند. همچنین، او تأکید کرده است که این اتصال، در ساختارهای ذهنی شخص تثبیت نشده، بلکه در عمل وی هنگام حل مسئله و بحث‌هایی که برای فهمیدن و کمک به فهمیدن دیگر می‌کند، نمود پیدا

یک تابع می‌تواند به وسیله توضیح نوشتاری، فرمول جبری، جدولی از مقادیر ورودی-خروجی و بالاخره با یک نمودار توصیف شود. در نتیجه، لازم است دانش آموزان فرصت داشته باشند از طریق فعالیت‌های گوناگون مانند توصیف روابط بین پدیده‌ها در جهان واقعی، بازنمایی‌های

مختلف تابع از جمله نمایش نمودار توابع و خواندن و تفسیر و توضیح، آن‌ها را یاد بگیرند

از نظر این شورا (۱۹۸۹)، تمام موضوعات مدرسه‌ای، زمینه مناسبی برای آموزش تابع هستند. تابع‌ها در حساب، به عنوان اعمال روی اعداد ظاهر می‌شوند، مثل عمل جمع که یک زوج از اعداد را به مجموع آن‌ها نسبت می‌دهد. در جبر، توابع روابطی بین متغیرهایی هستند که اعداد را نمایش می‌دهند. در هندسه، توابع مجموعه نقاط را به تصویرهایشان تحت تبدیلاتی از قبیل انتقال و دوران نظیر می‌کنند و در احتمال، توابع پیشامدها را به احتمال وقوع آن‌ها نسبت می‌دهند (ص ۵۷).

به گفته این شورا، یک تابع می‌تواند به وسیله توضیح نوشتاری، فرمول جبری، جدولی از مقادیر ورودی-خروجی و بالاخره با یک نمودار توصیف شود. در نتیجه، لازم است دانش آموزان فرصت داشته باشند از طریق فعالیت‌های گوناگون مانند توصیف روابط بین پدیده‌ها در جهان واقعی، بازنمایی‌های مختلف تابع از جمله نمایش نمودار توابع و خواندن و تفسیر و توضیح، آن‌ها را یاد بگیرند. برای مثال، دانش آموزان باید بتوانند شکل‌هایی مانند شکل ۱ را رسم کنند و در مورد اینکه چه پدیده‌های واقعی-مثلاً دمای یک کوره-می‌توانند با چنین نموداری رسم شوند، بحث کنند؛ سؤال‌هایی مانند اینکه مقدار تقریبی A چقدر

اولویت‌های محاسباتی دانش آموزان برای بازنمایی‌های مختلف توابع، به وسیله مقایسه کاربردهای ترکیبی و غیرترکیبی تابع، که قبلاً آزمون شده، انجام می‌شود. این بدان معناست که مثلاً دانش آموزان در شرایط ریاضی محض، استفاده از معادله را ترجیح می‌دهند، در حالی که برای حل مسائل ترکیبی و انجام فعالیت‌های مفهومی مربوط به تابع، استفاده از جدول و نمودار را ترجیح می‌دهند. در هر صورت، تابع یکی از اصلی‌ترین مفاهوم‌های برنامه درسی ریاضی است که در «دوره ریاضی جدید»، به عنوان یک مفهوم هماهنگ کننده عمل می‌کرد و در برنامه‌های درسی اخیر، ابزاری قوی برای مدل سازی است (شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا؛ ۱۹۸۹ و ۲۰۰۰). به گفته این شورا، در دوره دبیرستان، برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای باید شامل مطالعه مداوم توابع به نحوی باشد تا همه دانش آموزان بتوانند:

- پدیده‌های جهان واقعی را با توابع متنوع مدل سازی کنند؛
 - روابط بین جدول‌ها، قوانین شفاهی، معادلات و نمودارها را بازنمایی و تحلیل کنند؛
 - هم‌زمان بتوانند از بازنمایی‌های مختلف جدولی، نمادی و نموداری توابع استفاده کنند؛
 - موقعیت‌های گوناگون مسئله را با تابع‌های مختلف مدل سازی کنند؛
- تغییرات پارامتری را روی نمودار تابع‌های مختلف تجزیه و تحلیل کنند (ص ۵۷).

می‌کند. به اعتقاد گلدین و کاپوت (۱۹۹۶)، دو بازنمایی بیرونی، ممکن است به صورت درونی در ذهن شخصی که آن‌ها را ساخته و درک کرده، به هم وصل شوند.

گویا و سرشستی (۱۳۸۵)، از تال (۱۹۹۱) نقل می‌کنند که فرایند یادگیری ریاضی، دارای چهار مرحله است که عبارت‌اند از:

- ✓ استفاده از یک نوع بازنمایی؛
- ✓ استفاده از بیش از یک نوع بازنمایی به صورت موازی؛
- ✓ ایجاد ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌های مختلف؛
- ✓ تلفیق بازنمایی‌ها و حرکت منعطف بین آن‌ها.

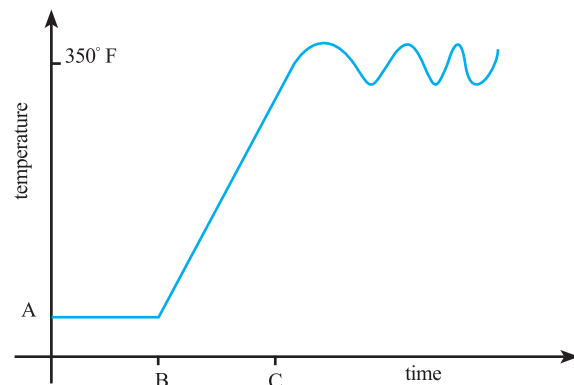
آن‌ها از قول تال (۱۹۹۱)، بیان می‌کنند که تشخیص ارتباط بین بازنمایی‌های معادل و تشخیص خواص مشترک آن‌ها، منجر به تشکیل مفهوم مجرد اشیاء و فرایندهای ریاضی می‌شود.

نقش بازنمایی‌ها

در درک مفهوم تابع

به اعتقاد یروشالمی^{۲۰} (۱۹۹۱)، کارکردن بین چندین بازنمایی مرتبط جهت یادگیری یک مفهوم جدید، برای دانش آموزان بسیار سخت است. بعداً، کلر^{۲۱} و هیرش^{۲۲} (۱۹۹۸)، نقل شده در آکووک، (۲۰۰۳) دریافتند که با ایجاد شرایط یادگیری مناسب، ارتباط بین یک مفهوم و بازنمایی‌هایش، براساس بازنمایی‌های اولویت‌بندی‌شده توسط دانش آموزان ساخته می‌شود. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که

شکل ۱
دمای کوره به عنوان یک تابع از زمان (NCTM، ۱۹۸۹)



- ساختاری که به عنوان یک شیء در نظر گرفته می شود؛
- عملیاتی که به عنوان یک فرایند فهمیده می شود.

در اولی، تابع مجموعه ای از زوج های مرتب است و در دومی یک فرایند محاسباتی یا یک روش دقیق تعریف شده است. برای نظیر کردن یک مجموعه به مجموعه ای دیگر. این دوره یادگیری تابع، هر چند ظاهراً مانع فهم هم می شوند (ممکن است یادگیری یکی، از فهم دیگری جلوگیری کند)، اما باید یکدیگر را کامل کنند و مثل دو روی یک سکه، یک مفهوم منسجم و مرتبط به هم را تشکیل دهند.

برای مثال، $f(x) = 2x + 3$ در یک زمان، دو مفهوم را بیان می کند:

- چگونه مقدار تابع را برای مقادیر خاص محاسبه کنیم (ویژگی فرایند بودن)؛

- کل مفهوم تابع را برای هر متغیر معین معرفی می کند (ویژگی شیء بودن).

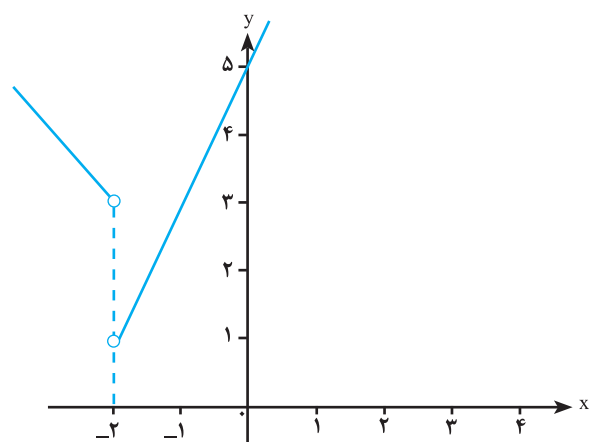
مثل اینکه $f(x)$ ، هم نام تابع و هم مقدار تابع را معرفی می کند. به اعتقاد آن ها، اگرچه دانش آموزان تعریف تابع را حفظ می کنند، اما بیشترشان قادر به ایجاد ارتباط با این کلمات نیستند. سارایوا و تکسیرا (۲۰۰۷) در انجام یک تحقیق، از دانش آموزان خواسته بودند به دو سؤال زیر جواب دهند. ۱. شکل هایی را که معرف یک

تابع هستند مشخص کنید و دلیل خود را توضیح دهید.
۲. به زبان ساده خود بگویید تابع چیست؟

فوق العاده است و به این دلیل، در فرایند آموزشی توجه بسیاری به آن شده و زمان زیادی برای آن صرف شده است. با این حال از نظر وی، تابع همچنان مفهومی پیچیده و مشکل باقی مانده است و با وجودی که ماهیت دوگانه فرایند-شیء و بازنمایی های مختلف، ظرافت و پیچیدگی مفهوم تابع را نشان می دهند، دانش آموزان اغلب تنها بر ایده های شهودی روابط تابعی متکی هستند. او یکی از مشکلات اساسی دانش آموزان را در یادگیری تابع، همین ماهیت دوگانه آن می داند.

است؟ در بازه B تا C، چه اتفاقاتی می افتد؟ و نوسانات نمودار بعد از زمان C، چگونه می تواند باشد؟ چنین فعالیت هایی به دانش آموزان فرصت می دهد تا نمودار توابعی را که به صورت ضابطه ای داده شده اند، رسم کنند و بین بازنمایی نموداری و بازنمایی نمادین تابع، به سهولت رفت و برگشت داشته باشند. برای مثال، تجزیه و تحلیل شکل (۲)، می تواند به تعریف تابع دوضابطه ای منجر شود.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x > -2 \\ -x + 1, & x < -2 \end{cases}$$



شکل ۲- یک تابع دوضابطه ای

در حقیقت به گفته اسفارد^{۲۴} (۱۹۹۱)، نقل شده در سارایوا^{۲۵} و تکسیرا^{۲۶} (۲۰۰۷)، تابع می تواند به دو روش اساسی فهمیده شود:

بدین سبب به گفته سایکا^{۲۳} (۲۰۰۳)، تابع یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که در گوناگونی تفسیرها و بازنمایی ها

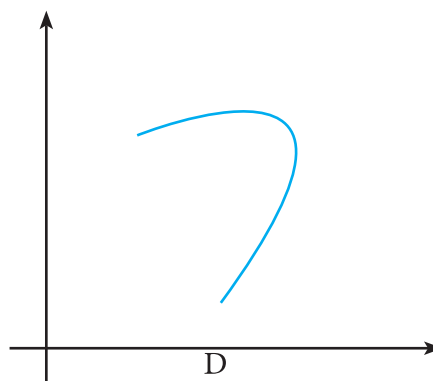
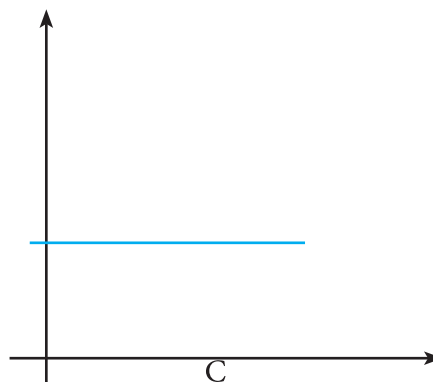
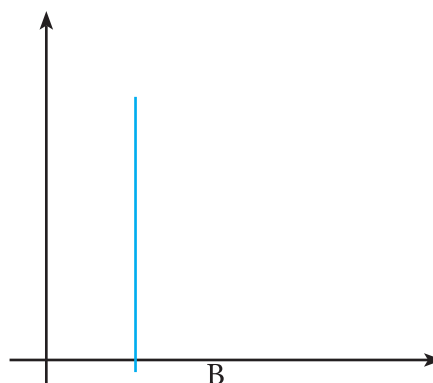
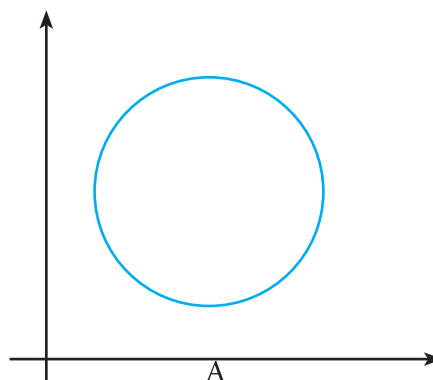
ریاضی‌دان‌ها این تعریف نه تنها ساده است بلکه زمینه دست‌یابی به مجموعه پیچیده‌ای از ایده‌های ریاضی را فراهم می‌کند.

اما جونز^{۲۸} (۲۰۰۶) به این نتیجه رسید که در توسعه مفهوم تابع، همیشه بازنمایی‌های متنوعی برای معرفی آن ابداع شده‌اند که هر یک از این بازنمایی‌ها، در یادگیری جنبه‌ای خاص از این مفهوم، مهم‌اند و هر یک قویاً، به سایر بازنمایی‌های تابع گره خورده‌اند، لذا معرفی تابع تنها به‌عنوان یک مجموعه، ممکن است دانش‌آموزان را گیج و سردرگم کند. **جونز** (۲۰۰۶) درک درست تابع را، فقط توانایی بیان تعریف رسمی آن نمی‌داند و با استناد به دوبینسکی^{۲۹} و هارل^{۳۰} (۱۹۹۲)، سه سطح درک حاصل شده توسط دانش‌آموزان را شناسایی کرده است که اگرچه با هم کاملاً متفاوت نیستند، اما مانند یک زنجیر، به ترتیب، سطوح تجرید را نشان می‌دهند. این سه سطح عبارت‌اند از: عمل، فرایند و شیء.

عمل

پایه‌ای‌ترین درک از تابع، تصور آن به‌عنوان یک عمل است که دوبینسکی و هارل، آن را یک تکرارپذیری ذهنی یا دست‌ورزی فیزیکی از اشیاء نامیده‌اند. در این مرحله از یادگیری، دانش‌آموزان تشخیص می‌دهند که چه چیزی یک تابع است. آن‌ها تابع را به‌عنوان یک قانون صریح می‌بینند که یک ورودی را می‌گیرد و سپس یک خروجی می‌دهد. با چنین درکی از تابع، دانش‌آموزان دو تا از متداول‌ترین بازنمایی‌های تابع یعنی بازنمایی نموداری و بازنمایی ضابطه‌ای را بهتر می‌فهمند. آن‌ها نمودارها را قابل فهم‌ترین

آن‌ها مشاهده کردند تعدادی از دانش‌آموزان، تعریفی را که از تابع نوشته بودند، با انتخابشان از شکلی که معرف تابع است، مرتبط نکردند. برای مثال، چند دانش‌آموز برای تفسیر نمودارهای B و C، از تعریف «هر شیء به یک و فقط یک تصویر نظیر می‌شود» استفاده کردند. در این تحقیق، یکی از جنبه‌هایی که در تعریف‌های دانش‌آموزان زیاد به چشم می‌خورد، وابستگی بین متغیرها بود. مثلاً «در تابع، یک متغیر وابسته (Y) و یک متغیر مستقل (X) وجود دارد» یا اینکه «در تابع، Y بر حسب X تغییر می‌کند و هر X، یک و فقط یک مقدار برای Y به دست می‌دهد». اما برای اکثر دانش‌آموزان، مفهوم تابع محتوایی ثابت دارد و بیان‌کننده تغییر نیست. برای نمونه، با توجه به شکل (۳) که بیانگر میزان آب پشت یک سد بر حسب زمان طی یک سال است، از دانش‌آموزان خواسته شد متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنند. تعدادی از دانش‌آموزان، روزها (نه تعداد روزها) را متغیر مستقل و آب (نه میزان آب) را متغیر وابسته در نظر گرفته بودند. به اعتقاد سایکا (۲۰۰۳)، توانایی دانش‌آموزان در انجام دست‌ورزی و به کار بردن نمادها، الزاماً به معنای درک ساختاری دانش‌آموزان از تابع نیست. این در حالی است که تال و آکوک^{۲۷} (۲۰۰۲) معتقدند که از نظر ریاضی‌دان‌ها، درک تابع نمونه‌ای از سادگی است، زیرا چیزی ساده‌تر از اینکه «دو مجموعه داریم و هر عنصر از اولی به دقیقاً یک عنصر از دومی مرتبط می‌شود وجود ندارد». به گفته آن‌ها، برای



بازنمایی‌های تابع می‌دانند و اظهار می‌دارند که اگرچه در ذهن دانش‌آموزان، بازنمایی‌ها همیشه، مستقیماً با ایده اصلی تابع مرتبط نمی‌شوند، ولی اغلب، چند سال قبل از اینکه مفهوم رسمی تابع در ذهن یادگیرنده شکل گرفته باشد، نمودارها به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا اطلاعات مفیدی در مورد تابع‌ها مثل نقاط اکسترمم، صعودی بودن و نزولی بودن به دست آورند. آیزنبرگ^{۳۱} نیز نظرش این بود که لازم است مفهوم «تک‌مقداری بودن توابع حقیقی»، با روشی که ماهیتاً با یک بازنمایی نموداری گره خورده، فهمیده شود و همه اجزای اصلی تابع، در یک شکل بصری معین تعریف شوند. آنان تأکید نمودند که وقتی دانش‌آموزان با توابع آشنا می‌شوند، ضروری است که بازنمایی ترسیمی، به‌طور ویژه‌ای مورد توجه قرار گیرد تا مهارت‌های بصری یادگیرندگان تقویت شود. با وجود این، بسیاری از دانش‌آموزان برای توسعه مهارت‌های بصری خود، به‌خصوص وقتی با توابع ناشناخته‌ای مثل تابع دریکله^{۳۲} مواجه می‌شوند، با دشواری‌های زیادی روبه‌رو هستند زیرا برای آن‌ها، در نظر گرفتن توابع چندضابطه‌ای به‌عنوان یک تابع،

سخت است و گاهی منجر به ایجاد یک بدفهمی در مورد موجودیت توابع ناپیوسته در آن‌ها می‌شود (جونز، ۲۰۰۶).

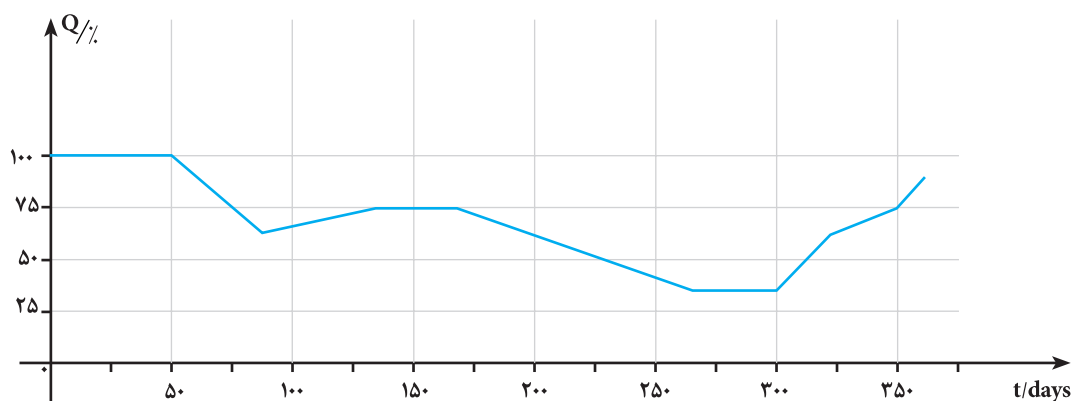
بالاخره، بازنمایی ضابطه‌ای نیز یکی دیگر از بازنمایی‌های مهم مفهوم تابع است و تصور تابع از این راه، مشابه تعریف اولیه اوایلر^{۳۳} از تابع است. این بازنمایی، مخصوصاً برای آموزش حساب و قبل از حساب مفید است. اما لازم است دانش‌آموزان بدانند که توابع، نه لزوماً بازنمایی فرمولی دارند و نه همواره با اعداد ارتباط دارند.

فرایند

سطح بعدی درک مفهوم تابع، فرایند است. این مفهوم درک عمیق‌تری از یک تابع، به‌عنوان چیزی که یک شیء را می‌گیرد، آن را تبدیل می‌نماید و یک شیء کاملاً جدید تولید می‌کند، به‌دست می‌دهد و شامل یک فرمول یا قانون صریح است. در این سطح از یادگیری، دانش‌آموزان مایلند توابعی را قبول کنند که شامل تبدیلات مبهمی هستند (مثلاً خیلی از دانش‌آموزان، تابع ثابت را به‌عنوان یک تابع در نظر نمی‌گیرند). ایده ماشین تابع، یک ابزار متداول است که معلمان از آن

برای کمک به دانش‌آموزان جهت درک تابع از منظر فرایندی، استفاده می‌کنند. این تکنیک، تابع را به‌عنوان ماشین یا جعبه‌ای که یک ورودی را می‌گیرد و یک خروجی تولید می‌کند، معرفی می‌کند. در حالی که با درک فرایندی، دانش‌آموزان نیازی به دانستن محتوای جعبه ندارند و وجود یک ماشین به‌تنهایی، کافی است تا دانش‌آموزان متقاعد شوند که در حال کار کردن با یک تابع هستند (تال و همکاران، ۲۰۰۰). آن‌ها توصیه می‌کنند که استفاده از این بازنمایی مفید است، زیرا ماشین تابع، یک پایه قدرتمند و یک ریشه شناختی برای توسعه یادگیری مفهوم تابع است و جنبه‌های دیداری و شکل ماشین تابع، هم در برگیرنده وضعیت تابع به‌عنوان شیء و هم جنبه فرایندی تابع از ورود تا خروج است.

دومین دیدگاه فرایندی به تابع، کارکردن با بازنمایی نمودار و ن تابع به‌عنوان تناظر بین دو مجموعه است. این دیدگاه به تابع، مشابه تعریف دیریکله (۱۸۳۷) از تابع است که تابع را به‌عنوان تناظری بین دو مجموعه بیان می‌کند، به‌طوری که هر عضو از مجموعه اول، فقط به یک عضو از مجموعه



شکل ۳- میزان آب پشت یک سد بر حسب زمان طی یک سال (تکسیرا و سارایوا، ۲۰۰۷)

تحقیق روی بازنمایی‌های مختلف توابع نشان می‌دهد که اگر دانش‌آموزان بتوانند بازنمایی‌های متنوع را به هم مرتبط کنند، می‌توانند درک بهتری از مفهوم تابع پیدا کنند. به گمان آن‌ها، هر بازنمایی به یادگیری بخشی از مفهوم تابع و ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف، به یادگیری کامل مفهوم کمک می‌کند

دوم نظیر می‌شود. ایده تناظر، دانش‌آموزان را به جای استفاده از الگوریتم‌ها، به سمت تمرکز روی نگاشت یک مجموعه بر مجموعه دیگر سوق می‌دهد.

شیء

پیشرفته‌ترین درک از تابع، شیء انگاشتن آن است که با استفاده از بازنمایی زوج مرتبی، به بهترین نحو بیان می‌شود. به گفته جونز (۲۰۰۶)، در سال ۱۹۳۹ یک گروه از ریاضی‌دانان با نام مستعار بورباکی^{۳۴}، تابع را به شیوه زیر تعریف کردند:

فرض کنید که E و F دو مجموعه مجزا یا غیرمجزا باشند. یک رابطه بین یک متغیر x از E و یک متغیر y از F ، یک رابطه تابع گونه در Y است، هرگاه برای هر x در E ، یک y در F وجود داشته باشد که با x جفت شده باشد.

وی، این تعریف را اولین تعریف تابع به‌عنوان یک مجموعه از زوج‌های مرتب می‌داند که از نظر ریاضی، دقیق‌ترین تعریفی است که معرف ماهیت تابع است.

از این گذشته، اسفارد^{۳۵} (۱۹۹۱)، دیدگاه تابع به‌عنوان شیء را مفهوم ساختاری خوانده و اظهار می‌دارد که این دیدگاه برای ریاضی‌دانان اهمیت دارد، زیرا فرایندهای شناختی را مؤثر می‌کند. اسفارد استدلال می‌کند که لازم است دانش‌آموزان، ابتدا تابع را به‌عنوان عملیات (فرایند) یاد بگیرند تا طبیعی‌تر بتوانند آن را به‌عنوان شیء توسعه دهند.

این در حالی است که به گفته آکووک (۲۰۰۳)، تحقیق روی

مفاهیم نمی‌توانند از بازنمایی‌ها جدا باشند زیرا نمی‌توان قبل از نمایش دادن مثلث، توضیح داد که مثلث چیست و دارای چه ویژگی‌هایی است. تامپسون^{۳۷} (۱۹۹۴)، استفاده از بازنمایی‌های مختلف را برای ایجاد درک عمیق‌تر از تابع، چنین نقد کرده است.

«ایده بازنمایی‌های مختلف به تعبیر فعلی و برای ساخت اولیه، نیازمند توضیح و تفسیر آن ایده‌هاست. هسته اصلی مفهوم تابع، به‌وسیله هر آنچه که عموماً بازنمایی نامیده می‌شود، معرفی نمی‌شود. بلکه در عوض، ارتباط برقرار کردن بین انواع بازنمایی‌ها، زمینه را برای ایجاد یک درک معقول و با ثبات از تابع به‌وجود می‌آورد» (تامپسون، ۱۹۹۴، ص. ۳۹).

به عقیده گویا و سرشتی (۱۳۸۵)، «توانایی در استفاده از بازنمایی‌های مختلف و مرتبط کردن آن‌ها، باعث به‌وجود آمدن مشکلاتی در فهم اشیای ریاضی می‌شود. مثال‌هایی وجود دارند که در آن‌ها، با استفاده از یک بازنمایی گرافیکی، مسئله به سادگی می‌توانسته حل شود، ولی دانش‌آموزان از بازنمایی‌های عددی یا نمادین استفاده کرده بودند که با تجربه‌های قبلی آن‌ها سازگارتر بوده و به میزان بیشتری، مورد تأکیدشان قرار گرفته بود.

در مجموع، تامپسون (۱۹۹۴) پیشنهاد می‌کند که بهتر است پیش از معرفی نمودارها، توضیحات شفاهی و جدول‌ها به‌عنوان نمایش‌های تابع یا بازنمایی‌های مختلف آن ابتدا بر نمایش‌هایی که توسط دانش‌آموزان قابل درک و بیان است، تمرکز کنیم. بنا به اظهار وی، اگر دانش‌آموزان هنگام استفاده از بازنمایی‌های مختلف

بازنمایی‌های مختلف توابع نشان می‌دهد که اگر دانش‌آموزان بتوانند بازنمایی‌های متنوع را به هم مرتبط کنند، می‌توانند درک بهتری از مفهوم تابع پیدا کنند. به گمان آن‌ها، هر بازنمایی به یادگیری بخشی از مفهوم تابع و ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف، به یادگیری کامل مفهوم کمک می‌کند. در همین راستا، گلدنبرگ^{۳۶} (۱۹۹۸) به نقل از کاپوت، (۱۹۹۸)، ابراز می‌کند که برقراری ارتباط بین بازنمایی‌های متنوع یک مفهوم، میزان تجرید آن مفهوم را کاهش می‌دهد و یک دید منسجم‌تر و یکپارچه‌تر نسبت به آن فراهم می‌کند.

با این وجود، اخیراً دیدگاه استفاده از بازنمایی‌ها، مورد بعضی انتقادات قرار گرفته است. برای مثال، از نظر اسفارد (۲۰۰۰) این خطر وجود دارد که بازنمایی‌ها، صرفاً نمایش برخی اشیاء و مجزا از مفهوم آن‌ها تصور شوند. این وضعیت می‌تواند برای یادگیرنده، توجیهی باشد بر اینکه اشیاء و مفاهیم، از بازنمایی‌های آن‌ها مهم‌تر هستند و باید قبل از نشانه‌ها و نمادها یاد گرفته شوند. در تأیید این نگرانی، مارکوس (۲۰۰۶) بیان می‌کند که مثلاً تصویر یک مثلث، یک مثلث نیست، بلکه فقط نمایشی از آن است و مثلث چیزی است که با این شکل معرفی شده است؛ یعنی

یک مفهوم، ندانند که همگی آن‌ها، به بیان یک مفهوم می‌پردازند تا درک واحدی از آن مفهوم ایجاد شود، این نگرانی وجود دارد که دانش‌آموزان، هر بازنمایی را موضوعی مجزا تصور کنند و آن را مستقل از مفهوم اصلی یاد بگیرند (نقل شده در آکووک، ۲۰۰۳).

جمع‌بندی

در این مقاله، ابتدا دیدگاه بازنمایی‌های مختلف از منظر محققان آموزش ریاضی معرفی شد. سپس نقش بازنمایی‌ها در یادگیری ریاضی مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه، به تابع به‌عنوان موضوعی که با استفاده از بازنمایی‌ها معرفی می‌شود، پرداخته شد و در این زمینه تلاش شد تا به اختصار، به بازنمایی‌های مختلف تابع اشاره شود. در نهایت، به اجمال، به بعضی از انتقادات مطرح شده در رابطه با نقش بازنمایی‌های مختلف در یادگیری تابع پرداخته شد.

پی‌نوشت‌ها

1. Skemp
2. Janvier
3. Kastberg
4. Written
5. Pictorial
6. Tabular
7. Oral
8. Markus
9. Goldin
10. Kaput
11. Ozel
12. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
13. Steen
14. Tall
15. Vinner
16. Dreyfus
17. Zimmermann
18. Reflective
19. Associative
20. Yerushalmy
21. Keller
22. Hirsch
23. Sajka
24. Sfard
25. Saraiva
26. Teixeira
27. Akkoc
28. Jonesa
29. Dubinsky
30. Harel
31. Theodore Eisenberg
32. Dirichlet
33. Euler
34. Bourbaki
35. Anna sfard
36. Goldenberg
37. Thompson
1. Akkoc, H. & Tall, D. (2005). A mismatch curriculum design and student learning: the case of the function concept, in D. Hewitt and A. Noyes (Eds.), Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick
2. Tall, D. (1991). (ed.): Advanced Mathematical Thinking.
3. Jonesa, M. (2006). Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the concept of the Function.
4. Principles and Standards for School Mathematics, Key Curriculum Press; 1st edition; National Council of Teachers of Mathematics (2000).
5. Saraiva, M. J. and Teixeira, A. M. (2007). Secondary School Students' Understanding of the Concept of Function. msaraiva@mat.ubi.pt, anamadalenabt@hotmail.com
6. Hahkioniem, M. (2006). The Role of Representations in Learning the Derivative.
7. Kastberg, S. E. (2002). Understanding Mathematical Concepts: The Case of The Logarithmic Function.
8. Thompson, p. w. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.)
9. NCTM (2000), Principles and Standards for School Mathematics.
10. NCTM (1989), Principles and Standards for School Mathematics; Curriculum Standards for Grades 9- 12; Standard 6-Functions.
11. Gooya, Z. (1988). Students' Conceptual of Calculus.
12. Skemp, R. (1989). Mathematics in The Primary School.
۱۳. جوادی، مهدی (۱۳۸۷). **تصورات مفهوم و تعاریف مفهوم از مفهوم تابع**، پایان‌نامه منتشر شده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.
۱۴. حاجی‌بابایی، جواد. (۱۳۷۵). **در باب برنامه درسی ریاضیات دبیرستان**.

- مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۴۶، صص ۲ تا ۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۵. دافعی، حمید. (۱۳۸۹). **بازنمایی‌های چندگانه در آموزش ریاضی**. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۱۰۰، صص ۷۰ تا ۷۵. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۶. ریحانی، ابراهیم. (۱۳۸۴). **آموزش تابع برخی رویکردها و چالش‌ها**. ۱۷. غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۸۰). **دوباره‌نگری به برنامه جبر دبیرستانی**. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۶۳، صص ۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۸. گویا، زهرا و پرهیزگار، بی‌بی‌زکیه (۱۳۸۹). **درک دانش‌آموزان از مفهوم اصلی تابع**. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۹۹، صص ۲۴ تا ۳۳. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۹. گویا، زهرا و سرشتی، حمیده. (۱۳۸۵a). **آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی**. قسمت اول. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۸۴، صص ۲۸ تا ۳۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۲۰. گویا، زهرا و سرشتی، حمیده (۱۳۸۵b). **آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی**. قسمت اول. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۸۵، صص ۲۰ تا ۲۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۲۱. گویا، مریم. (۱۳۸۲). **مفهوم تابع و بدفهمی دانش‌آموزان**. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۷۲، صص ۲۳ تا ۳۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۲۲. گویا، زهرا و فدایی، محمدرضا. (۱۳۷۸). **مدل‌هایی برای برنامه درسی ریاضی**. قسمت اول. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۵۶، صص ۴ تا ۲۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

اولین مسائل

تصور کنید با دو نفر از دوستان خود در یک رستوران هستید و سفارش یک پیتزای بزرگ و یک پیتزای کوچک را داده‌اید. پیش خدمت آن‌ها را می‌آورد و متوجه می‌شود که شما بر سر اینکه چطور پیتزاها را به‌طور عادلانه بین خودتان تقسیم کنید، مشغول بحث هستید. او می‌گوید:

خوب! چون پیتزای بزرگ دو برابر پیتزای کوچک است و شما سه نفر هستید، می‌توانید فقط پیتزای بزرگ را نصف کنید و به این ترتیب، هر کدام مقدار یکسانی پیتزا خواهید داشت.

است. می‌دانم اگر قبل از بیانشان، شرح دهم که چطور به ایده‌ی طرح این مسائل رسیدم، اشاره‌ای به راه‌های احتمالی حل کردن آن‌ها خواهد شد. در نتیجه، با بیان اولین مسئله در این زنجیره، شروع خواهیم کرد. به این ترتیب، شما به‌عنوان خواننده، فرصتی خواهید داشت که آن‌ها را بدون راهنمایی‌های من حل کنید. بعد از آنکه نخستین مسئله را خواندید، و قبل از آنکه به خواندن ادامه دهید، ببینید به چند راه مختلف می‌توانید آن را حل کنید. این شما هستید که باید درمورد دقتی که از خود انتظار دارید، تصمیم بگیرید.

کلیدواژه‌ها: حل مسئله،

مدل‌سازی، راه‌حل‌های متنوع، راهبردهای حل مسئله، تقسیم عادلانه پیتزا

راه‌های زیادی برای تولید مسائل ریاضی از یک نقطه شروع وجود دارد. در اینجا می‌خواهم افکاری را شرح دهم که مرا به تولید تعدادی از این مسائل هدایت کرد. در حین کار روی این مسائل، به‌طور آگاهانه تلاش کردم تا حد امکان، مراحل عمل را یادداشت‌برداری و پیگیری کنم.

دامنه این مسائل، که بسیاری از آن‌ها برای من جدید هستند، از سطح پیش‌دبستان تا دانشگاه

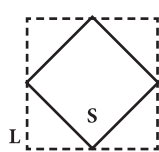
نگاه کردن به پیتزا با چشمه ریاضی

نویسنده: ماریون والترا
ترجمه: سهیلا غلام‌آزاد
پژوهشگاه مطالعات
آموزش و پرورش

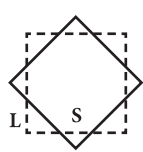


حال شرح خواهیم داد که چگونه به مسئله اول رسیدیم، که آن نیز به نوبه خود منجر به طرح تعداد دیگری مسئله شد. در گذشته، در کلاس‌های درس و در سخنرانی‌ها می‌پرسیدم که اگر اندازه‌گیری ضلع مربع‌ها مجاز نباشد، چگونه کسی می‌تواند به سرعت چک کند که آیا مساحت یک مربع بزرگ (L) دو برابر مساحت مربع کوچک (S) است؟

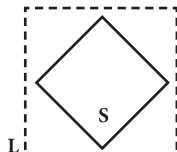
بعضی اوقات، برای ایجاد انگیزه در مورد این سؤال، با استفاده از طلق رنگی روی آورده، دنباله‌ای از مربع‌های تودرتو را نشان می‌دادم و سؤال می‌کردم که کدام یک



L دو برابر S است



L زیادی کوچک است

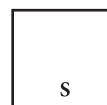
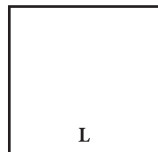


شکل ۴: L زیادی بزرگ است

آوریم (برای آنکه تا حدی شما را از نگاه زیر چشمی به راه حل منصرف کنم!) مسائل استاندارد پیتزا، معمولاً با قیمت پیتزا یا تعداد انتخاب‌های مختلف آن سروکار دارد. دو مثال عمومی آن‌ها عبارت‌اند از:

کدام معامله بهتری است: یک پیتزا به قطر ۱۴ اینچ به قیمت ۱۳ دلار یا دو پیتزای ۱۰ اینچی هر یک به قیمت ۷ دلار؟

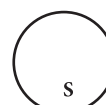
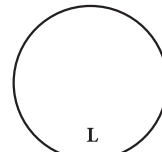
اگر پنج ماده غذایی^۲ مختلف برای روی پیتزا در دسترس باشد و در یک فروش ویژه، انتخاب هر سه‌تای آن‌ها مجاز باشد، به چند راه مختلف، می‌توان یک پیتزا سفارش داد؟



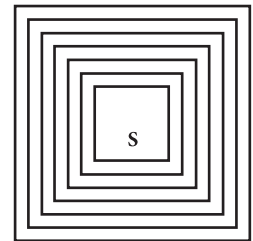
شکل ۲: آیا مساحت مربع بزرگ (L) دو برابر مساحت مربع کوچک (S) است؟

چطور می‌توانید درست بودن حرف پیش خدمت را بررسی کنید؟ شما نه با خودتان متر یا خط‌کش آورده‌اید و نه می‌توانید به آشپزخانه بروید و پیتزاها را وزن کنید. نیازی هم نیست که نگران خمیر پیتزاها باشید، آن‌ها تا لبه‌ها به‌طور یکنواخت هستند (البته، اگر بعدها لبه خمیری ملاحظه کردید، می‌تواند مشکل ایجاد کند). بنابراین، حالا قبل از آنکه به خواندن ادامه دهید، سعی کنید راه‌های متنوع نشان دادن آنکه $L=2S$ را بیابید.

قبل از تشریح آنکه چگونه به این مسئله رسیدیم، مکث می‌کنم تا انواع متداول مسائل پیتزا را به یاد



شکل ۱: دو پیتزا: پیتزای بزرگ L و پیتزای کوچک S



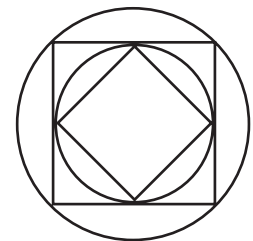
شکل ۳ الف:
با استفاده از طلق رنگی: مساحت
کدام مربع دو برابر مساحت مربع
S است؟

از این مربع‌ها، دو برابر مساحت
کوچک‌ترین آن‌ها را دارد؟

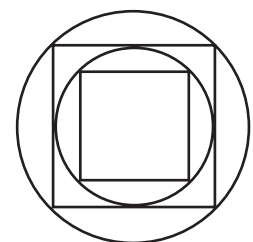
همچنین، نقاشی فرانک استلا^۳
یا جوزف آلبرز^۴ را هم به همراه
مسئله نشان می‌دهم. (شکل‌های
۳ب و ۳پ را ببینید) (مراجعه شود
به صفحه ۲ جلد)

یک راه ساده برای بررسی آنکه
آیا مربع L دو برابر مساحت مربع S را
دارد، در شکل ۴ نشان داده شده است.
بعد از اثبات آنکه مربع L
مساحتی دو برابر مساحت مربع S
دارد، غالب اوقات دایره‌ای به دور
مربع S و دایره‌ای به دور مربع L
محیط می‌کنم و هر یک از مربع‌ها
را می‌چرخانم تا همان‌گونه که در
شکل‌های ۵ الف- پ نشان داده
شده است مربع‌هایی با اضلاع
موازی به‌دست آید.

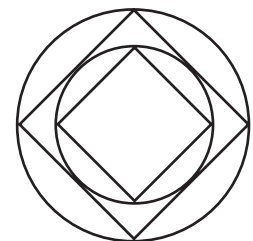
داشتم برای یک سخنرانی
آماده می‌شدم- ناخودآگاه، موقعیت
مربع بالا را در نظر گرفتم- اما واقعاً
نمی‌خواستم دیگر از این مسئله
استفاده کنم. من قبلاً شکل ۵ الف را
کشیده بودم، پس از خودم پرسیدم
شاید بتوانم این مسئله را تغییر شکل
بدهم. صدای قدرتمند پولیا را شنیدم
که می‌گفت «به مسئله مرتبط فکر
کن^۵» و «به مسئله نگاه کن^۶». [۱]
پس دوباره به شکل ۵ الف نگاه کردم
و آن را نه به‌عنوان مسئله‌ای که با
دو مربع سروکار دارد، بلکه به‌عنوان
مسئله‌ای که با دو دایره سروکار دارد
دیدم. آها! اینجا یک مسئله تغییر
شکل یافته ایجاد شد- چطور کسی
می‌تواند به‌سرعت بگوید که آیا یک
دایره دو برابر بزرگ‌تر از دایره‌ای
دیگر است؟ اما حالا دیگر نقاشی
استلا یا آلبرز را نداشتیم که با آن‌ها،
درمورد مسئله ایجاد انگیزه کنم یا آن
را زینت دهم. چطور می‌توانستم این
مسئله را ارائه کنم؟



شکل ۵ الف:
رسم دایره‌های محیطی



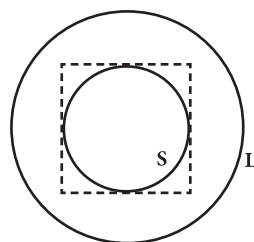
شکل ۵ ب:
چرخاندن مربع کوچک



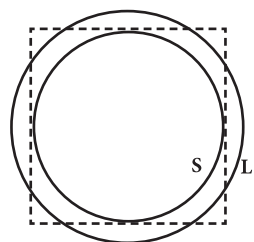
شکل ۵ پ:
چرخاندن مربع بزرگ

تصمیم گرفتم آن را به مسئله
پیتزا برگردانم. پس اینجا مسئله
اولی بود که با آن شروع کردم -
چطور می‌توانی بگویی که پیتزای
L دو برابر بزرگ‌تر از پیتزای S
است؟ امیدوارم تا الآن، این مسئله
را از چندین راه مختلف حل کرده
باشید.

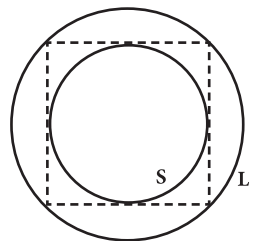
در اینجا برخی از روش‌هایی که
به آن‌ها فکر کردم و همه به هم ربط
داشتند، آورده شده است. [۲]
۱. یکی از پیتزاها را طوری روی
دیگری بگذار که مرکزشان روی
هم قرار بگیرد سپس با چشم (یا با
استفاده از انگشتانت) به‌طور ذهنی،
چهار مماس بر پیتزای کوچک رسم
کن و ببین که آیا مربعی محاط



S زیادی کوچک است



S زیادی بزرگ است

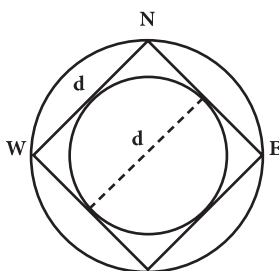
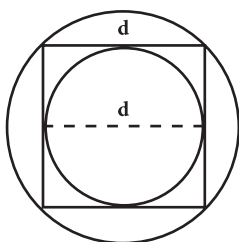


S درست و مناسب است
شکل ۶

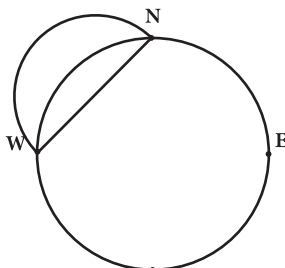
در پیتزای بزرگ تشکیل می‌دهد.
(شکل ۶ را ببینید.)

۲. متوجه شدم که قطر دایره
کوچک برابر یکی از پاره‌خط‌های
مماس است که دو انتهای آن روی
دایره بزرگ قرار دارد. (شکل ۷ را
ببینید.)

پس اگر پیتزای کوچک را
نصف کنیم به‌وسیله آن می‌توانیم
ببینیم که آیا قطرش دقیقاً بین
نقاط قطب‌نمای دایره بزرگ^۷ قرار
می‌گیرد. (شکل ۸ الف را ببینید.)
۳. اگر نمی‌خواهید پیتزای
کوچک را نصف کنید، قطر پیتزای
کوچک را چک کنید تا ببینید که
آیا بین نقاط قطب‌نمای دایره بزرگ
امتداد دارد. (شکل ۸ ب را ببینید)



شکل ۷



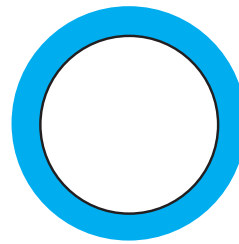
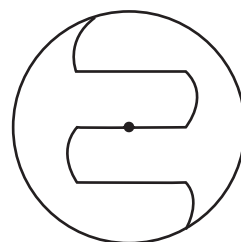
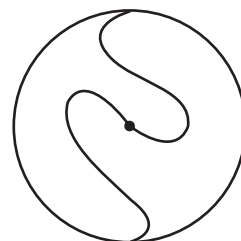
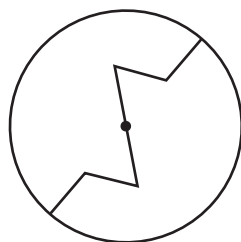
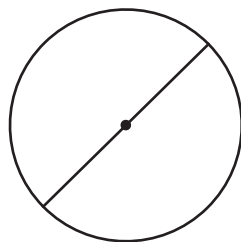
شکل ۸ الف:
با استفاده از نصف پیتزای کوچک

اغلب اوقات عکس‌های مجسمه نیم‌کره مکس بیل^۸ را استفاده کرده‌ام. به‌طور خاص، از شرکت‌کنندگان خواسته‌ام که یک سیب را مانند مجسمه‌ای که در شکل ۱۲ نشان داده شده است ببرند. (مراجعه شود به صفحه ۲ جلد)

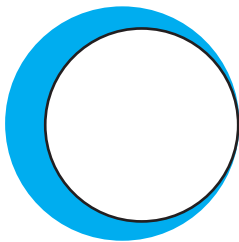
پس برمی‌گردیم به این سؤال که به چند راه می‌توانید دایره‌ای را نصف کنید؟ ممکن است علاوه بر موارد داده شده در شکل ۱۳، پاسخ‌های «بدیهی» بسیار زیاد دیگری تولید کنید.

با استفاده از ایده «اگر نه چه؟»^۹ [۴] در اولین تصویر شکل ۱۳، با تمرکز بر ویژگی «برش مستقیم»، اول پرسیدم: «چه می‌شود اگر برش

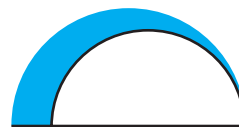
شکل ۱۳:
بعضی نصف کردن‌های
معمول و غیرمعمول دایره



شکل ۱۰:
آیا قسمت سایه‌دار برابر نصف دایره بزرگ
است؟



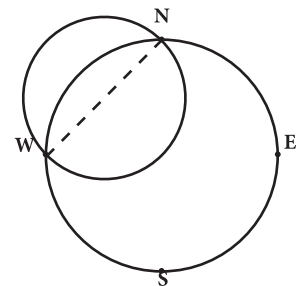
شکل ۱۱الف:
نصف پیتزای جالب دیگر



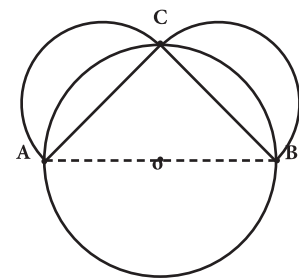
شکل ۱۱ب:
ربع پیتزای بزرگ

اگر در ابتدا سؤال را از این راه از خودم پرسیده بودم، شاید رویکرد دیگری برای حل آن به کار می‌برد. اما همین‌که پی بردم این راهی جالب برای تقسیم پیتزا به دو نیمه است، به جهت دیگری کشانده شدم. در اینجا توانستم دایره داخلی را حرکت دهم و بر دایره بزرگ مماس داخل کنم و قسمت سایه‌دار را به‌صورت هلال ماه نشان بدهم. (شکل ۱۱الف را ببینید.) اگر این شکل به‌طور متقارن به دو نیم شود، به شکل جالبی از ربع دایره بزرگ می‌رسیم. (شکل ۱۱ب را ببینید.)

حال رسیدم به اینکه: به چند راه مختلف می‌توان یک پیتزا را نصف کرد؟ من دفعات زیادی با نصفه‌های دو بعدی و سه بعدی برخورد داشتم.



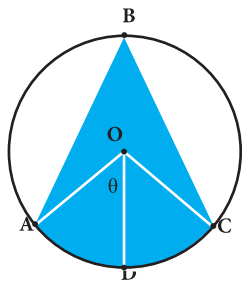
شکل ۸:
با استفاده از کل پیتزای کوچک



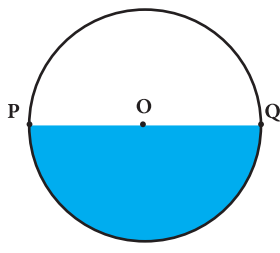
شکل ۹:
دو نصفه پیتزا ساق‌های یک مثلث قائم‌الزاویه
را شکل می‌دهد

بعد چند تا کاغذ روغنی را به شکل دایره می‌برم، زیرا به‌دلیل شفاف بودن، برای استفاده روی آورده مناسب هستند. دایره کوچک را نصف می‌کنم و هر نصفه از آن را در یک دستم می‌گیرم. به‌طور طبیعی، همان‌طور که در شکل ۹ نشان داده شده است، آن‌ها را روی دایره بزرگ می‌گذارم تا ببینم که آیا نقاط انتهایی قطر دایره کوچک روی نقاط انتهایی قطر دایره بزرگ قرار می‌گیرد؟

چون به‌نظر می‌رسد که AB از مرکز دایره بزرگ می‌گذرد، زاویه C قائم‌الزاویه است و در نتیجه تعمیم قضیه فیثاغورس قابل اعمال است. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که مساحت دو نیم‌دایره کوچک برابر مساحت نیم‌دایره بزرگ است. [۳] با قرار دادن مرکز دو دایره کاغذی روی هم فهمیدم که می‌توانستم مسئله اصلی را از راه دیگری ببرسم. نشان دهید که قسمت سایه‌دار نصف پیتزای بزرگ است. (شکل ۱۰ را ببینید.)

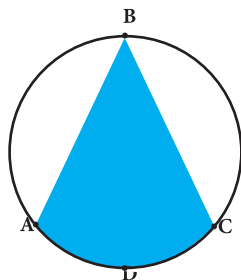


الف

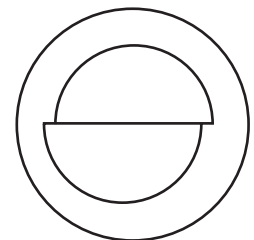


ب
شکل ۱۸:
دو حالت اکستريم (و متقارن)

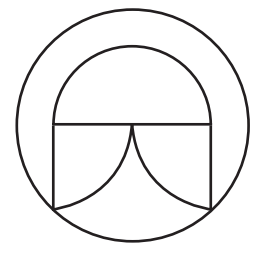
نتیجه تصمیم گرفتیم این مسئله را بدون استفاده از حسابان حل کنیم. مشابه شکل ۱۵b در مربع، قطعه‌ای با یک خط تقارن BD - (شکل ۱۶) کشیده بودم. پس اگر می‌دانستم نقاط A و C کجا بودند، برش مشخص می‌شد. پس اینجا مسئله بعدی من مطرح شد: اگر ABCD نصف پیتزایی



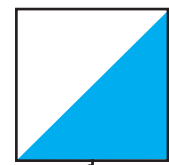
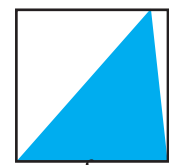
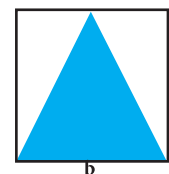
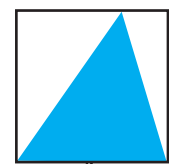
شکل ۱۶:
نصف پیتزا به شکل یک برش کیک است و نصف دیگر دو قطعه است



شکل ۱۴الف:
ترکیب دوباره دو نیم دایره کوچک



شکل ۱۴ب:
ترکیب دوباره ربع دایره‌های نیم دایره



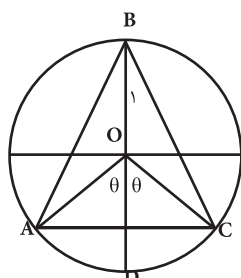
شکل ۱۵:
نصفش را در نظر بگیر

الزاماً مستقیم نباشد؟» پس از آن راه‌های نامحدودی برای نصف کردن مربع پیدا می‌شود. بعد به ویژگی «دو قسمت مساحت مساوی داشته و هم‌نهشت هستند» فکر کردم و پرسیدم چه می‌شود اگر قسمت‌ها الزاماً هم‌نهشت نباشند؟ خوب ممکن است تصویری از حلقه‌های متحدالمرکز به دست آورید. در این نقطه، من شکل‌های دیگر را بررسی نمی‌کنم. فقط وقتی بالاخره داشتم این مقاله را تایپ می‌کردم، به فکر نصف کردن، از راه‌هایی که در شکل‌های ۱۴الف- ب نشان داده شده است افتادم.

در عوض، روی ویژگی «هر نیمه در یک قطعه» تمرکز کردم و از خودم پرسیدم: چه می‌شود اگر لازم نباشد در یک قطعه باشد؟ در اینجا، پوستری به یاد آمد که راه‌های نصف کردن یک مربع را نشان می‌دهد. (شکل ۱۵ را ببینید.) و آن ایده من را به رسم شکل ۱۶ سوق داد و طرح این سؤال که چه می‌شود اگر یک نیمه به شکل یک برش کیک (پای) باشد و نیمه باقیمانده دو قطعه باشد؟

چطور می‌توانم این برش را مشخص کنم؟ من این مسئله را دوست داشتم، چون قبلاً آن را ندیده بودم و در نتیجه، تصمیم گرفتم بعد روی آن کار کنم. من می‌توانستم نصف آن شکل هندسی را در نظر گرفته و بپرسم: «نیم دایره‌ای به قطر BD مفروض است، نقطه C را چنان بیابید که BC نیم دایره را نصف کند». اولین فکر من «که خیلی هم دوام نداشت» این بود که «مجبورم از حسابان استفاده کنم». اما به سرعت نظرم عوض شد، زیرا اقرار بود برای شنوندگانی صحبت کنم که شامل معلمان متوسطه اول (دوره راهنمایی) نیز می‌شد. در

به شعاع ۱ باشد (منوط به سلب مسئولیت معمول بدون از دست دادن کلیت)، زاویه مرکزی AOC چقدر است، چون اگر اندازه زاویه مرکزی را می‌دانستم، آنگاه A و C مشخص می‌شدند. (به شکل ۱۷ نگاه کنید.) معادله‌ای که برای θ به دست آوردم، از نوعی بود که قبلاً ندیده بودم. بدون داشتن ماشین حساب



شکل ۱۷

لوکس، آن را از طریق تکرار^۱ حل کردم. [۵]

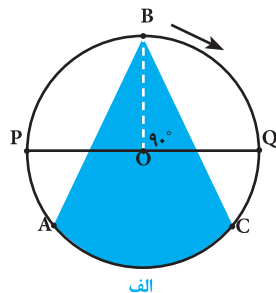
بعدها وقتی دوباره به شکل برش کیک نگاه کردم و شروع به نوشتن این مقاله کردم، دیدم دو

ترسیم (شکل‌های ۱۸الف و ۱۸ب) روی میز در مقابل خودم داشتم و از خودم این سؤال را پرسیدم که «چی می‌شد اگر این شکل برش کیک، خط تقارن نداشت؟»

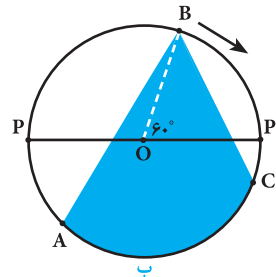
به عبارت دیگر، چه می‌شد اگر AB برابر CB نبود؟ فکر کردم B را روی محیط دایره حرکت بدهم، به طوری که ABCD برابر نصف مساحت دایره باقی بماند. واضح است که AC نیز مجبور به جابه‌جایی می‌شد. برای آنکه من دو حالت اکسترم در مقابل خود داشتم و درسی که در فیلم انیمیشن داشتم - و کتاب تصاویر هندسی (بینی و همکاران^{۱۱}، ۱۹۸۲) نیز به ذهنم آمد - از خودم پرسیدم داستان‌پردازی برای فیلم متحرکی که در آن برش پای شکلی که نصف مساحت دایره را دارد (شکل ۱۸الف) بخواهد به نیم دایره (شکل ۱۸ب) تغییر شکل پیدا کند چگونه باید باشد. باید اقرار کنم که چندین

از خودم پرسیدم «مساحت ناحیه روی هم افتاده چقدر است؟» بعد از خودم پرسیدم «آیا می‌توانم آن‌ها را جوری قرار دهم که یکی بتواند دو پیتزا را بین سه نفر تقسیم کند؟» خوب اگر مساحت‌ها آن‌گونه باشد که در شکل ۲۲ پ نشان داده شده است، دو نفر می‌توانند

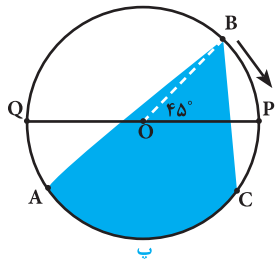
شکل ۲۱:
طرح‌هایی به شکل برش کیک
که هر یک مساحتی برابر نصف
مساحت دایره را دارد



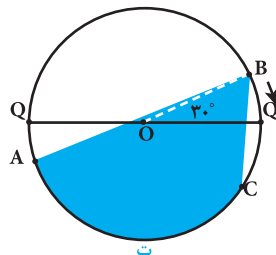
الف



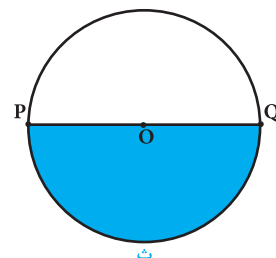
ب



پ

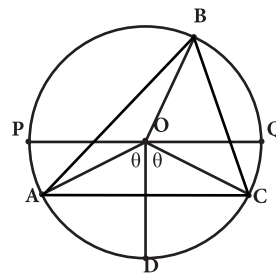


ت



ث

نیست مساحتی برابر نصف مساحت یک دایره را دارد؟ (شکل ۱۹ را ببینید). اگر چه گوه $ABCD$ دیگر متقارن نیست، هنوز می‌توانستیم نصف زاویه مرکزی را تعیین کنیم، چون OA و OC هنوز نسبت به عمودمنصف OD از AC متقارن هستند. مثل حالت متقارن، مساحت



شکل ۲۰:

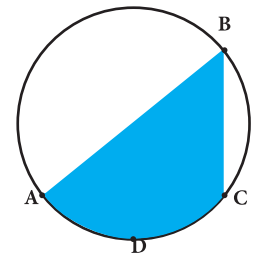
OD هنوز نسبت به AC به‌طور متقارن قرار گرفته است

گوه را با در نظر گرفتن مساحت مثلث ABC به‌اضافه مساحت قطاع AOC منهای مساحت مثلث AOC ، محاسبه کردم - حالا این مساحت گوه را برابر $\pi/2$ ، یعنی نصف مساحت دایره قرار می‌دهیم. من موقعیت‌هایی را از نقطه B انتخاب کردم که OB زاویه‌ای زیبا با قطر PQ می‌ساخت. برای مثال، زاویه‌هایی که سینوس و کسینوس آن‌ها را می‌دانستیم - $(30^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$ - شکل‌های ۲۱ الف - ث - را ببینید. من انجام محاسبات را به‌عهده خواننده می‌گذارم.

مسئله سه‌راپیش‌تر ببریم

اما من هنوز کارم با مسئله پیتزا تمام نشده است. چند کاغذ دایره‌ای شکل یک اندازه برایم باقی مانده بود. شروع کردم به حرکت دادن آن‌ها و در جایی، دو تا از آن‌ها روی هم قرار گرفتند. (شکل‌های ۲۲ الف - ت را ببینید).

بار شروع نادرست داشتم تا اینکه بالاخره، روی قطر PQ دایره تمرکز کردم و از آنچه که برای خط AC رخ می‌داد وقتی B از بالاترین نقطه حرکت می‌کرد و پایین می‌آمد تا اینکه روی نقطه انتهایی قطر PQ دایره منطبق می‌شد، اطمینان یافتم.



شکل ۱۹:

قسمتی که به شکل برش کیک است، مساحتی برابر نصف مساحت دایره را دارد، اما $AB \neq BC$

همچنین، درمورد قضیه‌ای که بیان می‌کند که برای نقاط ثابت A و C ، وقتی نقطه B روی کمان مربوطه‌اش روی دایره حرکت می‌کند، زاویه ABC ثابت باقی می‌ماند، فکر کردم. من خودم را سرزنش کردم که همه این سال‌ها، حتی یک‌بار هم از خودم نپرسیدم که درمورد مساحت $ABCD$ ، برای نقاط ثابت A و C وقتی نقطه B روی کمان دایره حرکت می‌کند، چه چیز دیگری غیر از اینکه مساحت آن به‌سمت مساحت ACD می‌رود، می‌توانست گفته شود. (شکل ۱۹ را ببینید). اما اکنون، به حرکت دادن B به‌طوری که مساحت برش $ABCD$ ثابت باقی بماند (نصف مساحت دایره) علاقه‌مند شده بودم. اگر قرار باشد مساحت ثابت بماند، AC نیز مجبور به حرکت خواهد بود.

سومین مسئله پیتزای من

چگونه می‌توان تعیین کرد که یک گوه 12 به شکل برش کیک، که متقارن

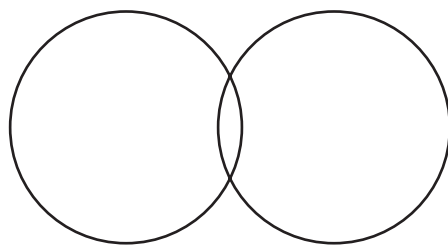
درجه آسان است. مساحت هر ناحیه چقدر است؟ دوباره، دنباله فیلم به ذهن می‌آید که مساحت ناحیه‌ها، وقتی دایره‌ها روی هم (به سوی هم) حرکت می‌کنند را نشان می‌دهد. مساحت ناحیه روی هم رفته، به‌عنوان تابعی از فاصله بین مرکزها، چقدر است؟

در این حین، داشتم مقالات متنوعی را که طی سال‌ها در مورد قضیه فیثاغورس جمع کرده بودم، مرتب می‌کردم که به مقاله‌ای رسیدم که آن را به‌دلیل عنوانش کپی کرده بودم، اما در حقیقت هنوز آن را نخوانده بودم (مک نیل، ۱۹۹۹). در یک لحظه، متوجه شکل‌های دایره در صفحه دوم آن شدم و بلافاصله آن را خواندم! ضمن طرح مطالب متنوع، این مقاله چگونگی یافتن مساحت دایره‌ای را که مساحت آن برابر تفاضل مساحت دو دایره داده شده باشد، مورد بحث قرار داده بود. من روی حالتی که مجموع دو مساحت، برابر مساحت بزرگ‌تر شود متمرکز شده بودم. البته یک نفر می‌تواند روی آن برحسب تفاضل فکر کند- هر چند که من تا قبل از خواندن مقاله، این کار را نکرده بودم. بنابراین، اینجا هنوز یک مسئله پیتزا دیگر هست.

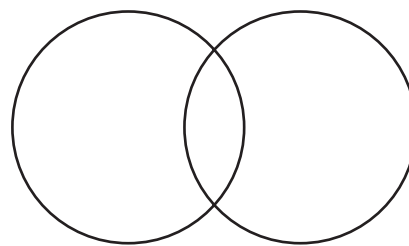
مسئله پنج پیتزا

قطر پیتزایی را بیابید که مساحت آن برابر تفاضل مساحت دو پیتزای داده شده باشد.

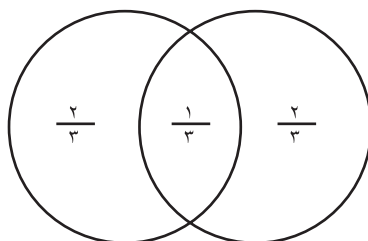
دو مقاله دیگر هم هست که من باید به آن‌ها اشاره کنم. در پوشه دیگری که کاملاً هم نامرتب نبود، به مقاله‌ای برخورددم (پنر^{۱۳}، ۱۹۷۸) حاوی مسئله زیر که منسوب به کروتسکی^{۱۴} (۱۹۷۶، ص. ۳۰۹) بود. اگر شعاع هر یک از دایره‌ها $r=1$ باشد و مساحت ناحیه‌های سایه‌دار مساوی باشد، فاصله OO_1 را بیابید. (شکل ۲۳ الف را ببینید.)



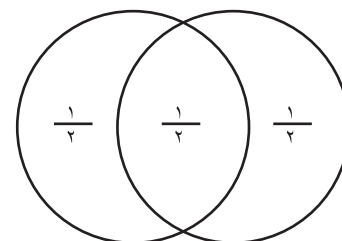
الف) هم پوشانی کم



ب) هم پوشانی بیشتر



پ) هنوز هم بیشتر



ت) نصف هر پیتزا

شکل ۲۲

پس مسئله به اینجا ختم می‌شود که بپرسیم مرکز آن‌ها تا چه اندازه باید از هم فاصله بگیرند.

عایدی من از انجام این محاسبات این بود که پی بردم این مسئله به‌خوبی در مجموعه رو به گسترش مسائل پیتزای من جایی گیرد.

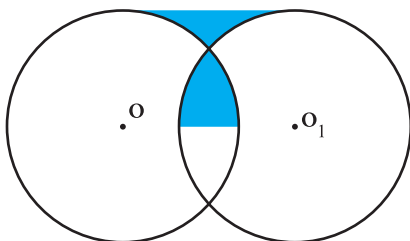
مسئله چهار پیتزا

چگونه می‌توانید دو پیتزای هم اندازه را بین چهار نفر تقسیم کنید؟ البته نه با نصف کردن هر پیتزا با استفاده از یک خط راست (یا با برش‌های فانتزی مانند شکل ۱۳)، بلکه با روی هم قرار دادن آن‌ها و بریدن دور روی هم رفتگی‌ها.

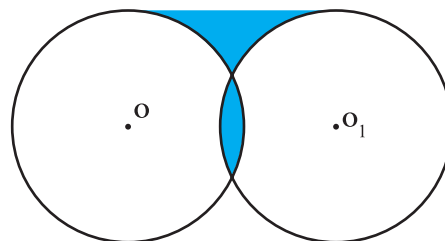
برای انجام محاسبات آسان، به حالت متفاوتی نگاه کنید که در آن، هر دایره از مرکز دایره دیگر عبور می‌کند. این حالت به‌دلیل زاویه‌های شصت

دو سوم یک پیتزا را در قالب یک تکه بگیرند و نفر باقی‌مانده دو تکه را که هر کدام به اندازه یک سوم پیتزاست، بگیرد. محاسبات این حالت را به‌عهده خواننده می‌گذارم. در عوض، من به حرکت دادن دایره‌ها ادامه دادم (شکل ۲۲) و دریافتم که اگر هر ناحیه نصف مساحت دایره را داشته باشد، دو پیتزا را می‌توان به شکل جالب‌تری، به غیر از نصف کردن پیتزاها از وسط، بین چهار نفر تقسیم کرد!

تا چه حد باید دو دایره روی هم قرار بگیرند، یا تا چه حد باید مرکز دو دایره هم‌نهمشت از هم دور باشند تا هر یک از ناحیه‌های نشان داده شده نصف مساحت دایره را داشته باشد؟ برای کشیدن یک شکل آراسته، ابتدا از خودم پرسیدم مرکز این دایره‌ها کجا باید بیافتد. خود را متقاعد کن که آن‌ها در ناحیه وسط قرار می‌گیرند.



الف) نمودار، همان‌طور که در مقاله داده شده



ب) نمودار نادرستی که من کشیدم

شکل ۲۳

دلیل آوردن این مسئله در اینجا آن بود که این تنها مسئله مورد بحث من در کنفرانس ATM بود که آن را خودم نساخته بودم و بدون نگاه کردن به نوشته‌هایم، شکل نادرستی برای آن کشیدم. از این رو یک مسئله زیبای ساده که با یک آه! قابل درک بود، تبدیل شد به یک مسئله سخت و ناجور که افراد برای حل آن تقلای زیادی کردند، زیرا به آن‌ها گفته بودم که راه حل ساده زیبایی برای آن وجود دارد!

کما بیش این مقاله را تمام کرده بودم که جان شارپ، یکی از شرکت‌کنندگان در سخنرانی من در ATM، با ارسال پیام زیر، مرا از وجود مقاله‌ای که ممکن بود مورد علاقه‌ام باشد، مطلع ساخت:

مقاله‌ای در مجله ریاضی^{۱۵} مربوط به اوایل دهه ۱۹۶۰ پیدا کردم. این مقاله در مورد بُزی بود که در یک مزرعه دایره‌ای شکل، با طناب، به گونه‌ای به نرده‌ها بسته شده که می‌تواند نصف علف‌های آنجا را بخورد. و پرسیده شده بود که طول طناب چقدر است؟ در این مقاله، پیشینه مسئله که به دهه ۱۸۹۰ برمی‌گردد، به شکل‌های مختلف ارائه شده است. من به جان شارپ جواب دادم: فکر کنم مسئله مربوط به بز را قبلاً دیده‌ام. اما آن مسئله، مرا جذب نکرد.

او جواب داد: نکته را نگرفته‌اید. این دقیقاً همان مسئله تو با داستانی متفاوت است. پس من هم آن را در اینجا آوردم (فریزر، ۱۹۸۲)، زیرا این مقاله بر مبنای منابع تاریخی زیاد، به‌طور دلپذیری نوشته شده است.

نگاه به عقب با نگاهی به یک مسئله قدیمی مربع شروع کردم. در ابتدا هیچ

ایده‌ای نداشتیم که من را به کجا سوق خواهد داد. حال متعجبم که تا چه حد مرا از مسئله مربع دور کرده است؛ حتی بدون مطرح کردن سؤالات مربوطه در حالت سه بعدی.

حتماً می‌پرسید از چه روش‌هایی برای خلق این مسائل استفاده کردم؟ من ذهنی باز برای دیدن مشابهت‌ها و دیدن ارتباط بین ایده‌ها داشتم و اجازه دادم که مسائل قبلی با طرح این سؤال که «چطور می‌توانم آن را تغییر قیافه بدهم؟» مسائل جدید را به من نشان دهند. من سؤالات بسیاری پرسیدم، مانند: آیا بیش از یک راه وجود دارد؟ آیا می‌توانم شکل‌ها را حرکت بدهم؟ اگر نه چه؟ کاغذهای دایره‌ای نیز کمک کرد. هنوز هم فکر نمی‌کنم که شییره مسئله پیتزا کاملاً کشیده شده باشد. پس امیدوارم خوانندگان به کار کردن روی آن ادامه دهند.

یادداشت‌ها

[۱] من این بخت خوب را داشتم که بیش از چهل سال پیش، در مؤسسه تابستانی NSF در دانشگاه استنفورد، درسی با پروفیسور پولیا داشته باشم، و هنوز هم می‌توانم صدای او را بشنوم که می‌گفت «به مسئله نگاه کن».

[۲] آخرین باری که از این مسئله استفاده کردم، در گردهمایی انجمن معلمان انگلستان در آوریل ۲۰۰۱ بود و در آنجا، چند نفر نیم‌دایره‌های کاغذی را به راه‌هایی غیر از راه من مورد استفاده قرار دادند و بعضی‌ها نیز از ربع دایره‌ها استفاده کردند. من قصد داشتم آن روش‌ها را به همراه نام مؤلفانشان در اینجا بنویسم، اما چون گزارش

دقیقی از آنچه انجام دادند ندارم، تصمیم گرفتم این کار را نکنم.

[۳] این روش می‌تواند این حقیقت را تقویت کند که قضیه فیثاغورس (و عکس آن) حالت خاصی است که در آن سه شکل روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه مربع هستند. فقط ضروری است که سه شکل روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه متشابه باشند. حالا می‌توانستم همه را دوباره شروع کنم و بیرسم چطور یک نفر می‌تواند به سرعت بگوید که یک بیسکویت زنجبیلی دو برابر بزرگ‌تر از یک بیسکویت کوچک‌تر با همان شکل است. حتی بیشتر از آنی که فکر می‌کردم طول کشید تا بفهمم به مسئله‌ای برگشتم که اولین بار در دهه ۱۹۶۰ آن را مطرح کردم که من و همکارم از آن در کلاس استفاده می‌کردیم. براون و والتر (۱۹۹۰، ص. ۱۰۷) را ببینید.

[۴] برای توضیح کامل تکنیک «اگر نه چه؟» و بقیه، براون و والتر (۱۹۹۰، ۱۹۹۳) را ببینید.

[۵] من مساحت گوه را با در نظر گرفتن مساحت مثلث ABC به علاوه مساحت قطاع AOC منهای مساحت مثلث AOC محاسبه کردم و سپس این مساحت را برابر $\frac{\pi}{2}$ قرار دادم، یعنی نصف مساحت دایره. از کی بایلر، دانشجوی تحصیلات تکمیلی خواستم که راه حل مرا که منجر به معادله زیر شد، با استفاده از ماشین حسابش چک کند.

$\sin(\theta) + \theta/\pi - 1/2 = 0$
اگر چه این کار فقط ده ثانیه طول کشید، دوست دارم از او تشکر کنم! [۶] این کاری است که احتمالاً بیش از اندازه انجام می‌دهم و بعضی از دوستانم را کلافه می‌کند، اما می‌تواند خیلی مفید باشد!

پی‌نوشت‌ها

1. Marion Walter
2. Toppings
3. Frank Stella
4. Josef Albers
5. Think of a related problem
6. Look at the problem
۷. در اینجا نقاط قطب‌نما معادل نقاط نشان‌دهنده شمال، جنوب، مشرق و مغرب روی یک قطب‌نما در نظر گرفته شده است.
8. Max Bill
9. What-If-Not?
10. iteration
11. Beene et al.
12. wedge
13. Penner
14. Krutetskii
15. Mathematics Magazine

منبع

Walter M. (2003). Looking at a pizza with a mathematical eye. For the Learning of Mathematics 23(2), 3- 10.

گزارشی از یک کلاس ریاضی ششم دبستان

زهره منتظری - دانشجوی کارشناسی ریاضی
سرور شیدانی - دانشجوی کارشناسی ریاضی

عکاس: اعظم لاریجانی

جلسه قبل آموزش داده شده بود و دانش آموزان، تمرین‌ها را از قبل در خانه حل کرده بودند.

در ابتدا، معلم مبحثی از درس جلسات قبل را مجدداً توضیح داد - ضرب عدد مخلوط - که به دو روش در کلاس تدریس شد.

$$1\frac{2}{3} \times 1\frac{4}{5} =$$

	1×1		$1 \times \frac{2}{3}$	
	$1 \times \frac{4}{5}$		$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$	

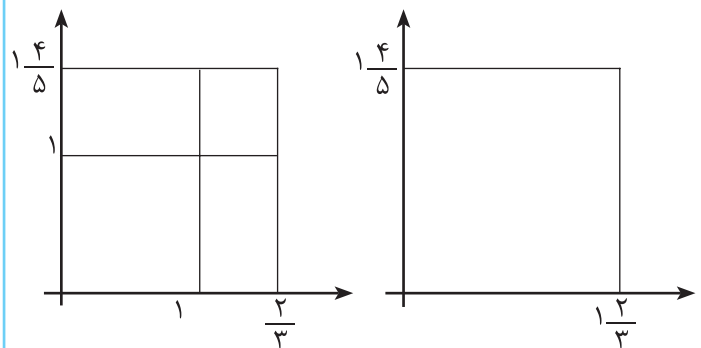
$$1 \times 1 + 1 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = 3$$

کلیدواژه‌ها: تدریس ریاضی
ششم دبستان، تقسیم اعشاری، روش تدریس، مشاهده از کلاس درس

ساعت ۸ صبح بود که به دبستان دولتی پسرانه* رسیدیم. در ابتدا، آقای مدیر با حضور ما در مدرسه موافق نبود، چون از اداره آموزش و پرورش نامه نداشتیم اما وقتی توضیح دادیم که با معلم هماهنگ کرده‌ایم و اجازه خواستیم خانم معلم را ببینیم موافقت شد و ما را به کلاس ۶/۱ سرکار خانم** معرفی کردند. برایمان دو صندلی اضافه آوردند و ما در انتهای کلاس نشستیم. دانش آموزان ۳۵ نفر بودند و پشت نیمکت‌هایی که شبیه میز کنار هم گذاشته شده بود، نشسته بودند. دانش آموزان پشت به تخته، مجبور بودند صندلی خود را مایل به سمت تخته بگذارند یا کامل برگردند (تعداد ساعات درسی مقرر شده برای ریاضی دانش آموزان



روش دوم: با استفاده از محورهای مختصات:



$$1 \times 1 + 1 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = 3$$

مستطیل‌های کوچک‌تر را به دست آورده و با هم جمع کنیم.

تقسیم عدد اعشاری

(سؤال ۱، قسمت دوم، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: پاسخ تقسیم‌های زیر را تا ۲ رقم اعشار به دست آورید.)

معلم یکی از دانش‌آموزان را پای تخته صدا می‌کند. سؤال این بود که تقسیم‌های زیر را تا ۲ رقم

معلم: حالا می‌بینیم که حاصل ضرب: $1\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ برابر با مساحت مستطیل بالاست، از آنجایی که ما فقط ضرب اعداد رُند و اعداد کسری را بلدیم، مستطیل بالا را به مستطیل‌هایی می‌شکنیم که مساحت آن‌ها را با چیزهایی که یاد گرفته‌ایم، می‌توانیم حساب کنیم. این کار را با این روش انجام می‌دهیم: اعداد رُند روی محور را با خطوط عمودی و افقی به هم وصل می‌کنیم، سپس خطوط را ادامه می‌دهیم. اکنون می‌توانیم مساحت

اعشار حساب کنید. دانش‌آموز بلند خواند و پای تخته نوشت:

$$89/94 \mid 23$$

قبل از اینکه دانش‌آموز چیزی بنویسد، معلم گفت: در این صورت، فرض کن ممیز وجود ندارد و می‌خواهیم حاصل تقسیم ۸۹۹۴ بر ۲۳ را به دست آوریم.

معلم: اول چی کار می‌کنیم؟! دانش‌آموزان: (همه با هم) خط می‌کشیم!

دانش‌آموز: (یک خط از زیر ممیز رو به پایین کشید.)

معلم: برای اینکه وسط تقسیم، حواسمون به جای ممیزمون باشه، حالا دستمونو روی ۹ و اونور روی ۳ می‌ذاریم. توی ۸ تا چند تا ۲ تاست؟ دانش‌آموز: ۴ تا.

این دانش‌آموز می‌خواست در گوشه تخته، ضرب را بنویسد که معلم به او گفت دور و بر تقسیمش

$$\begin{array}{r}
 9 \overline{) 43/4} \\
 \underline{-36} \\
 7/4 \\
 \underline{-7/2} \\
 00/20 \\
 \underline{-00/18} \\
 00/2
 \end{array}$$

یکی از دانش‌آموزان پرسید: وقتی داشتیم ۰۰/۰۱ چرا این صفر دوم رو نخوندیم؟ و معلم جواب داد: که صفرهای طرف چپ ممیز مهم نیست که چند تا باشند. صفر در قسمت صحیح، فقط در جلو و وسط عدد مهم است. هنگامی که دانش‌آموز نشست، یکی دیگر از دانش‌آموزان پرسید: اگه بخوایم ۲ رو بر ۳ تقسیم کنیم چی؟ یکی از دانش‌آموزان گفت نمی‌شه! معلم نوشت:

$$3 \overline{) 20}$$

یکی از دانش‌آموزان گفت: غلطه خانوم! خط اعشارشو نداشتین. اینکه یهو شد ۰۲۰! و معلم اشاره کرد که: من این صفر رو اضافه کردم که توی خارج قسمت و باقی‌مانده، اعشارشو بزنم. **شماها هم تا حرفه‌ای نشدین، این صفری که اضافه می‌کنین رو رنگی بنارین.** معلم تقسیم را انجام می‌داد و در هر مرحله، صفر اضافه می‌کرد. بعد از چهار مرحله توضیح داد که: معلم: بچه‌ها! من هرچقدر هم ادامه بدم باز هم خارج قسمت همین ۶ می‌شه. برای همین می‌نویسم ۰۰/۶ و یه خط می‌کشم اینجا. اسمش چی بود؟ دانش‌آموزان: **دوره گردش** معلم: یعنی تقسیمون همه‌ش همینه.

اون، که مقسومه، اونم مقسوم‌علیه، اون هم باقی‌مانده. پس عدد ۶۹ که زیر ۸۹، اسمش چیه؟ معلم جواب داد که اسمی ندارد و بخشی از تفریق اون قسمت است و ادامه داد: خب بچه‌ها! دیدین این تقسیم چقدر مبحث داشت؟ هم جمع داشت، هم تفریق، هم ضرب.

(سؤال ۱، قسمت سوم، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: پاسخ تقسیم‌های زیر را تا ۲ رقم اعشار به دست آورید.) تقسیم بعدی

$$9 \overline{) 43/4}$$

است. یکی دیگر از دانش‌آموزان آمد تا تقسیم را حل کند و صورت آن را نوشت. معلم به او گفت که یک صفر به انتهای مقسوم اضافه کند و گفت که دلیلش این است که از ما خواسته شده تا دو رقم اعشار حساب کنیم. سپس گج را از دست دانش‌آموز گرفت و به او گفت: چي باید بنویسم؟ (بقیه این تقسیم را معلم حل کرد). بعد از دو بار ضرب کردن و تفریق به ۰/۲ که رسیدند، دانش‌آموز از معلم پرسید:

صفری را که اضافه شده بیارم پایین؟

معلم گفت: مطمئنی؟ و دانش‌آموز سؤال کرد: نمره‌ام کم نشه؟ آن‌گاه معلم به دانش‌آموزان توضیح داد که: اگر تا دو رقم اعشار از ما خواسته نشده بود، تقسیممون همین‌جا تموم می‌شد. بعد تقسیم را تا دو رقم ادامه داد و حل این مسئله را تمام کرد.

را شلوغ نکند. وقتی دانش‌آموز عمل ضرب را انجام داد، متوجه شد که از ۸۹ بیشتر شد.

معلم توضیح داد که: بچه‌ها! ما اول از عدد بزرگ‌تر شروع می‌کنیم. اگر درست نبود، یک عدد می‌آییم پایین‌تر. پس گفت: حالا ۳ رو ضرب کن.

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 89/94} \\
 \underline{-69} \\
 20/9 \\
 \underline{-20/7} \\
 00/24 \\
 \underline{-23} \\
 00/01
 \end{array}$$

پس از پایان محاسبه، معلم پرسید: حالا نوبت چیست؟ و دانش‌آموزان با هم گفتند: **عبارت درستی.** معلم گفت: عبارت درستی‌ات رو بنویس. بچه‌ها اینو می‌نویسیم که ببینیم کارمون تا الان درست بوده یا نه. دانش‌آموز پای تخته این‌طور نوشت:

$$0/01 \overline{) 3/91} \quad 23$$

معلم پرسید: **بچه‌ها فارسیش چی می‌شه؟ یعنی چی ضرب در چی به علاوه چی می‌شه چی؟**

دانش‌آموزان جواب دادند: خارج قسمت ضرب در مقسوم‌علیه به علاوه باقی‌مانده، باید مساوی مقسوم باشه.

دانش‌آموز روی تخته نوشت: $89/94 = 23 \times 3/91 + 0/01$ و نشست. یکی از دانش‌آموزان دستش را بلند کرد و پرسید: خانوم



یکی از دانش‌آموزان پرسید که
 فرق $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{2}$ چیست؟ و معلم
 گفت که فرقی نمی‌کنن. $\frac{2}{3}$ کسر
 است اما $\frac{3}{2}$ عملیات داره. بعد
 از اینکه دانش‌آموزان اصرار داشتند
 که این دو یکی نیستند، معلم گفت
 نمی‌خواسته این را الان بگوید و
 نوشت $\frac{2}{3} \approx \frac{1}{2}$ و افزود این علامت
 ($\approx$) یعنی تقریباً. مثلاً $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$
 چون در این تقسیم باقیمانده نداریم
 یکی از دانش‌آموزان پرسید: پس
 چون تقسیم $\frac{2}{3}$ بر $\frac{3}{2}$ باقی‌مانده داشت
 تقریباً نوشتیم؟ و معلم گفت که
 همین‌طور است.

روزی دیگر

(سؤال ۲، قسمت اول،
 تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی:
 تقسیم‌های زیر را تا ۳ رقم اعشار در
 خارج قسمت به دست آورید.)
 معلم: تقسیم‌های زیر رو تا ۳ رقم
 اعشار در خارج قسمت حل کنین.
 دانش‌آموزی روی تخته شروع به
 نوشتن عبارات زیر و حل سؤال کرد.

$$\begin{array}{r} 14/700 \overline{) 17} \\ 14 \\ \hline 300 \\ 280 \\ \hline 120 \\ 105 \\ \hline 150 \\ 140 \\ \hline 100 \\ 70 \\ \hline 30 \end{array}$$

معلم هم‌چنان توضیح می‌داد:
 توی ۱۴ تا، ۱۷ تا نیست، یه رقم
 دیگه برمی‌داریم.

$$\begin{array}{r} 14/700 \overline{) 17} \\ 14 \\ \hline 300 \\ 280 \\ \hline 120 \\ 105 \\ \hline 150 \\ 140 \\ \hline 100 \\ 70 \\ \hline 30 \end{array}$$

اینکه بعد از ۷ دو تا صفر
 خودش گذاشته برای اینه که
 غیرمستقیم به ما بگه اگه مثل اینجا
 بود، دو تا صفر باید بذاریم.

دانش‌آموز نوشت:

$$\begin{array}{r} 14/700 \overline{) 17} \\ 14 \\ \hline 300 \\ 280 \\ \hline 120 \\ 110 \\ \hline 10 \end{array}$$

معلم اضافه کرد: دیگه نباید
 خط بنزیم کم کنیم، توی رانندگی
 باید آینه بغل‌ها را هم مواظب
 باشیم. از ۱۱۰ تا پرتقال نمی‌تونیم
 ۱۱۹ تا برداریم.
 دانش‌آموز نوشته خود را
 تصحیح کرد:

$$\begin{array}{r} 14/700 \overline{) 17} \\ 14 \\ \hline 300 \\ 280 \\ \hline 120 \\ 110 \\ \hline 10 \end{array}$$

معلم: ۲ از ۸۱۰، گفتیم ۲ از
 ۱۰ به‌خاطر اینکه هی خط بنزیم،
 رقم سمت راست که برابر صفره، اگه
 خط بنزیم دوباره می‌خواد بشه ۱۰.

$$\begin{array}{r} 14/700 \overline{) 17} \\ 14 \\ \hline 300 \\ 280 \\ \hline 120 \\ 110 \\ \hline 10 \end{array}$$

یکی از دانش‌آموزان پرسید:
 حالا که باقی‌مانده ۸ شد، می‌شه
 یه صفر توی خارج قسمت گذاشت؟
 معلم: اصلاً با صفر شوخی
 نکنید (با اشاره به صفر دوم در
 ۱۴/۷۰۰ در صورت سؤال که روی
 تخته بود). اینجا ما ۸۰ داریم، ۸
 نداریم. توی ۸۰، چند تا ۱۷ تایی
 هست؟

دانش‌آموز به حل سؤال ادامه داد:

$$\begin{array}{r} 14/700 \overline{) 17} \\ 14 \\ \hline 300 \\ 280 \\ \hline 120 \\ 110 \\ \hline 10 \end{array}$$

دانش‌آموز بعداً علامت اعشار
 باقی‌مانده و خارج قسمت را گذاشت:

$$\begin{array}{r} 14/700 \overline{) 17} \\ 14 \\ \hline 300 \\ 280 \\ \hline 120 \\ 110 \\ \hline 10 \end{array}$$

معلم: چرا سه رقم اعشار زدی؟
 بچه‌ها اعشارو آخر می‌زنیم. با توجه
 به چی؟

دانش‌آموز: با توجه به مقسوم!
 معلم: اگه ما ۱۴/۷۰ داشتیم، با
 توجه به اینکه تا ۳ رقم می‌خوایم،
 باید صفر رو اضافه می‌کردیم یا نه؟
 (با اندکی مکث) اینجا می‌خواست
 راهنمایمون کنه، باید می‌داشتیم!
 (سؤال ۲، قسمت دوم،
 تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی:
 تقسیم‌های زیر را تا ۳ رقم اعشار در
 خارج قسمت به دست آورید.)

یکی از دانش‌آموزان پای تخته
 آمد و تمرین بعد را روی تخته نوشت:

$$\begin{array}{r} 35/5 \overline{) 3} \\ 35 \\ \hline 50 \\ 35 \\ \hline 15 \end{array}$$

معلم: (با اشاره به عبارت بالا روی
 تخته) این، چند رقم بعد از اعشار داره؟

معلم: این غلطه! عدد اولیوم نشد (با اشاره به رقم سمت راست عدد بالا)، یک رقم هزارم بیشتر داریم.

(سؤال ۲، قسمت سوم، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: تقسیم‌های زیر را تا ۳ رقم اعشار در خارج قسمت به دست آورید.)

دانش‌آموز دیگری روی تخته شروع به نوشتن حل سؤال کرد:

$$\begin{array}{r} 22/500 \overline{) 7} \\ - 21 \\ \hline 1/5 \\ - 1/4 \\ \hline 0/10 \\ - 7 \\ \hline 0/03 \end{array}$$

معلم گفت که ۰/۰۳ باقی‌موند، حالا صفر بعدو می‌آریم پایین و دانش‌آموز ادامه داد:

$$\begin{array}{r} 22/500 \overline{) 7} \\ - 21 \\ \hline 1/5 \\ - 1/4 \\ \hline 0/10 \\ - 7 \\ \hline 0/030 \\ - 0/028 \\ \hline 0/002 \end{array}$$

$$3/214 \times 7 = 22/498$$

$$22/498 + 0/002 = 22/500$$

(سؤال ۴، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی)

معلم صورت سؤال را با صدای بلند خواند: در همه تقسیم‌های بالا، چه رابطه‌ای بین تعداد رقم‌های اعشار خارج قسمت و باقی‌مانده برقرار است؟ و دانش‌آموزان جواب

$$\begin{array}{r} 35/500 \overline{) 3} \\ - 3 \\ \hline 11/823 \\ - 05 \\ \hline 3 \\ - 025 \\ \hline 24 \\ - 010 \\ \hline 9 \\ - 010 \\ \hline 9 \\ - 001 \\ \hline 0/001 \end{array}$$

معلم: حالا عبارت درستی رو بنویس و امتحان کن.

دانش‌آموز:

$$11/823 \times 3 = 35/499 + 0/001$$

معلم: (در حال پاک کردن ۰/۰۰۱ از روی تخته) بعداً یاد می‌گیرین که حق نداریم در ریاضی، عملیات این جوری رو پشت هم بنویسیم.

خطی بنویسین یا زیر هم فرقی نمی‌کنه! ولی باید جدا جدا بنویسیم

دانش‌آموز:

$$35/499 + 0/001 = 35/500$$

معلم: حالا که جمع داریم، همون موقع اعشارشم بذاریم یا نه؟ می‌ذاریم ولی اعشار توی ضرب رو آخر می‌ذاریم.

$$35/499 + 0/001 = 35/500$$

معلم: (رو به دانش‌آموزان) فکر کن اونجا ۳۵/۴۹۹ رو درمی‌آوردیم، به جای اینکه توی باقی‌مانده صفر و پشت ۱ بنویسیم، جلوش می‌نوشتیم. امتحان می‌کنیم ببینیم فرق می‌کرد یا نه.

$$\begin{array}{r} 35/499 \\ + 0/01 \\ \hline 35/509 \end{array}$$

دانش‌آموزان: ۱ رقم.

معلم: پس دو تا صفر با رنگی می‌ذاریم. این بار خط نمی‌کشیم، ببینیم اگه خط اعشار نکشیم باز هم بلدیم کارمونو انجام بدیم یا نه؟ دانش‌آموز: (عبارت زیر را نوشت.)

$$\begin{array}{r} 35/5 \overline{) 3} \\ - 3 \\ \hline 11 \end{array}$$

یک دانش‌آموز: خانوم توی ۳۵ تا، ۹ تا ۳ تایی هست. چرا نوشت ۱۱؟

معلم: (با اشاره به عدد ۳ در مقسوم‌علیه) نه! این ۳ مگه یک رقم نیست؟ شما وقتی می‌تونن ۳۵ جدا کنی که مقسوم‌علیه ۲ رقم باشه. اینجا چون ۳ یک رقمیه، ما یک رقم جدا می‌کنیم.

دانش‌آموز: (به حل سؤال روی تخته ادامه داد)

$$\begin{array}{r} 35/500 \overline{) 3} \\ - 3 \\ \hline 05 \\ - 3 \\ \hline 025 \\ - 24 \\ \hline 010 \\ - 9 \\ \hline 010 \\ - 9 \\ \hline 01 \end{array}$$

معلم: (با اشاره به سمت راست عدد ۰۱ در باقی‌مانده) حالا خارج قسمت رو تا سه رقم اعشار می‌زنیم نمای اینجا صفر جلوش بزاری (با حالت هشدار!) به خاطر اینکه صفر جلوی عدد بزاری اصلاً معنی نداره. باقی‌مانده می‌شه ۰/۰۰۱



دادند مساوی اند. دانش آموزی پرسید: اگه صفراشو اول نذاریم ایراد داره؟ و معلم جواب داد اول بذارین بهتره. چون بعداً یادتون می ره. (سؤال ۴، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: ضخامت ۲۰۰ برگ کاغذ ۱۲ میلی متر است. ضخامت یک برگ چند میلی متر است؟) (پاسخ را تا دو رقم اعشار به دست آورید.)

دانش آموز روی تخته نوشت:

$$\begin{array}{r} 12/00 \quad | \quad 200 \\ - 6 \\ \hline 000 \\ - 0 \\ \hline 0 \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

معلم نوشته های دانش آموز را پاک کرد و گفت چون باقی مانده مون صفر می شه، اعشار زدن معنی نداره، و خودش حل سؤال را به صورت زیر نوشت:

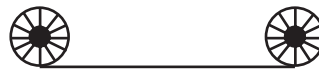
$$\begin{array}{r} 12/00 \quad | \quad 200 \\ - 12/00 \\ \hline 0000 \end{array}$$

سپس علامت اعشار خارج قسمت را نوشت:

$$\begin{array}{r} 12/00 \quad | \quad 200 \\ - 12/00 \\ \hline 0000 \end{array}$$

(سؤال ۵، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: وقتی یک چرخ روی زمین یک دور می زند، به اندازه یک محیط خود جلو می رود. یک چرخ ۶۰ دور چرخیده و ۱۱۳/۰۴ متر روی زمین به جلو رفته است.

محیط چرخ را تا دو رقم اعشار حساب کنید.)



محیط چرخ

دانش آموزی روی تخته شروع به نوشتن کرد:

$$\begin{array}{r} 113/04 \quad | \quad 60 \\ - 60 \\ \hline 0530 \\ - 480 \\ \hline 504 \\ - 480 \\ \hline 0/24 \end{array}$$

(سؤال ۶، تمرین صفحه ۳۵ کتاب درسی: نمره های یک دانش آموز به صورت زیر است. معدل او را حساب کنید.)
(۱۵/۷-۱۶/۲۵-۱۷/۲۵-۱۸/۵-۱۹/۵)
معلم یادآوری کرد که معدل یعنی همون میانگینی که پارسال خوندم. چون تقسیم اعشار نخونده بودیم، یه جوری می دادن که رُند در بیاد.

دانش آموز روی تخته نوشت:

$$\begin{array}{r} 15/75 \\ + 16/25 \\ + 17/25 \\ + 18/5 \\ + 19/5 \\ \hline 87/25 \end{array}$$

یک دانش آموز: چرا رقم رقم جمع بزنیم؟! دو تا نیم داریم می شه ۱، اون ۰/۲۵ هم با ۰/۷۵ می شه ۱!)

دانش آموز دیگر: چه جالب! معدلش شد ۸۷! معلم: این شد جمع نمره. حالا تقسیم بر تعداد!

دانش آموز:

$$\begin{array}{r} 87/25 \quad | \quad 5 \\ - 5 \\ \hline 37 \\ - 35 \\ \hline 22 \\ - 20 \\ \hline \end{array}$$

معلم: (با اشاره به علامت اعشار در ۲/۲ و ۲/۰ این ممکنه ما رو به اشتباه بندازه! پاکش کن! توی عملیات، نیازی به اعشار نداریم. دانش آموز: (نوشته خود را تصحیح کرد و نوشت:)

$$\begin{array}{r} 87/25 \quad | \quad 5 \\ - 5 \\ \hline 37 \\ - 35 \\ \hline 22 \\ - 20 \\ \hline 025 \\ - 025 \\ \hline 0/00 \end{array}$$

پس از حل تمرین های بالا، دانش آموزان اصرار زیادی بر حل تمرین های بخش ماشین حساب داشتند. بالاخره نوبت به حل بخش «حل مسئله» رسید که چند صفحه قبل تر در کتاب درسی گنجانده شده بود. چون انجام این تمرین ها نیاز به ماشین حساب داشتند، به صورت جداگانه بررسی شدند.

حل مسئله، صفحه ۳۰ کتاب درسی

سؤال ۱، الف: پاسخ ضرب های زیر را با ماشین حساب به دست آورید. طبق معمول، یکی از دانش آموزان برای حل سؤال پای

پنجم دبستان است که در بعضی موارد، حتی با روشی دیگر در این کتاب نیز وجود دارد. بخشی دیگر هم متشکل از مطالبی است که سال بعد در پایه بالاتر نیز تدریس خواهد شد. همچنین، ایشان اشاره‌ای به گنگ بودن بعضی روش‌های این کتاب درسی داشتند که باعث می‌شد هنگام تدریس مطالب، حتی از چهره دانش‌آموزان نیز مشخص باشد که در فهم آن‌ها با مشکل مواجه هستند. ایشان سخنان دیگری نیز از این قبیل داشتند که از ذکر بقیه آن‌ها خودداری می‌کنیم. از آنجایی که زمان کمی تا پایان زنگ استراحت باقی مانده بود، خداحافظی کردیم و از مدرسه به سمت دانشگاه به راه افتادیم. با تشکر از کادر دفتری دبستان و معلم محترم که ما را در کلاس خودشان پذیرفتند و اجازه دادند که شاهد تدریستان باشیم.

یه دونه می‌ره جلو (و با دست در عدد ۲/۲۳۲ جهت را از چپ به راست نشان داد). سپس روی تخته نوشت:

$$۲/۲۳۲ \times ۱۰ = ۲۲/۳۲$$

معلم اعلام نمود که درس تا ابتدای تقسیم یک عدد بر عدد اعشاری داده شد.

پایان تدریس

صدای زنگ استراحت در کلاس شنیده شد. دانش‌آموزان با اجازه معلم، از کلاس بیرون رفتند و بعضی دیگر برای پرسیدن اشکال‌هایی که در کتاب کمک درسی داشتند، در کلاس ماندند. در زنگ استراحت، قدری با معلم درمورد کتاب درسی و میزان رضایت‌مندی ایشان از تدریس این کتاب صحبت کردیم. از حرف‌هایشان فهمیدیم که بخشی از مطالب، تکرار مطالب کتاب ریاضی

تخته آمد و معلم هم‌زمان با حل دانش‌آموز، توضیح می‌داد:

$$۳/۱ \times ۱۰ = ۳۱$$

$$۰/۲۳۱ \times ۱۰۰ = ۲۳/۱$$

معلم: عدد صحیحش رو می‌نویسیم تعداد صفرها رو از اعشار کم می‌کنیم. ۱۰۰، دو تا صفر داره. پس جوابمون یه اعشار می‌خوره می‌شه ۲۳/۱.

دانش‌آموز ادامه داد:

$$۴/۵۷ \times ۱۰ = ۴۵/۷$$

$$۱۴/۲۱ \times ۱۰۰ = ۱۴۲۱۰$$

$$۲/۲۳۲ \times ۱۰ = ۲۲/۳۲۰$$

معلم: تا وقتی با انگشت می‌شمریم، اول یه صفر می‌ذاریم؛ بعد از سمت راست می‌شمریم می‌ریم جلو اعشار می‌زنیم. اینجا چون ۲/۲۳۲ سه رقم اعشار داره، سه تا می‌ریم جلو. وقتی یاد گرفتیم، می‌گیم عدد صحیح چون ۲ و یک صفر داره، صفر یه اعشار شو می‌خوره. اعشارمون

تاریخ مراجعه به دبستان برای تهیه گزارش، چهارشنبه ۱۳۹۱/۰۸/۱۰ و شنبه ۱۳۹۱/۰۸/۱۴ بود.



آموزش مدل مسئله‌های

برای حل مسائل ریاضی

مهسا خدایاری

دبیر ریاضی منطقه نوبران استان مرکزی و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

اشاره

حل مسئله ریاضی، یکی از مؤلفه‌های مهم در فرایند یاددهی - یادگیری ریاضی است. توانایی به کارگیری آموخته‌ها در موقعیت حل مسئله، از نشانه‌های یادگیری مؤثر ریاضی دانش آموزان به حساب می آید، به طوری که ایجاد توانایی حل مسئله یکی از چشم اندازهای آموزش ریاضی است. اینجانب در جریان رویارویی دانش آموزان با مسائل ریاضی مربوط به کسرها، مشاهده نمودم که توانایی‌های محاسباتی و استدلالی آنان اندک است و تنها تعداد محدودی از آن‌ها، به طور نسبی، توانایی‌های لازم برای حل مسائل کسر را به دست آورده‌اند. در بحث و تبادل نظر با همکارانم، متوجه شدم دانش آموزان کلاس‌های دیگر نیز، در حل مسائل ریاضی به ویژه در حوزه کسر، با مشکل مواجه‌اند. همچنین، در یک ارزیابی ملی از دانش آموزان دوره راهنمایی در ایران در سال تحصیلی ۹۰-۹۱ که خودم نیز در بخشی از آن مشارکت داشتیم، شاهد عملکرد ضعیف دانش آموزان در حل مسائل مربوط به حوزه کسر بودم. نتایج سومین مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم - تیمز - نیز، مؤید این یافته‌ها بود. همه این‌ها، مرا ترغیب نمود تا به جست‌وجوی راه‌حلی به منظور ارتقای توانایی حل مسئله کسر در دانش آموزان پایه دوم راهنمایی بپردازم؛ به خصوص که مسائل این حوزه، دربرگیرنده مفاهیم درصد و تناسب نیز هستند و نتایج مطالعات مختلف و نیز تجارب همکارانم، ضعف دانش آموزان ایرانی را در رابطه با این مسائل، تأیید می‌کنند.

کلیدواژه‌ها: حل مسئله، یاددهی - یادگیری، روش تدریس، مدل میله‌ای، دوره راهنمایی

سنگاپور توجهم را به خود جلب کرد، چون دریافتیم عملکرد موفقیت‌آمیز دانش‌آموزان این کشور در چندین مطالعه تیمز، در حل مسائل چندمرحله‌ای ریاضی، بسیار قابل ملاحظه بوده است. بنابراین، تصمیم گرفتیم به مطالعه روند آموزش حل مسائل ریاضی به دانش‌آموزان در کشور سنگاپور بپردازیم.

در دو مقاله با عنوان‌های **ریاضی سنگاپور: ساده یا پیچیده؟** و **از ریاضی سنگاپور یاد بگیریم**^۲ که به بررسی دلایل موفقیت دانش‌آموزان سنگاپوری در مطالعات بین‌المللی ریاضیات و علوم - تیمز - پرداخته بودند، تأکید بر نقش مؤثر استفاده از **مدل میله‌ای**^۳ در درک و فهم مسائل ریاضی، چشمگیر بود. ضمن اینکه از مزایای دیگر آموزش مدل میله‌ای، موارد زیر بیان شده بود:

➤ مدل میله‌ای، الگویی تصویری برای جزءها و کل‌ها در جمع، تفریق، ضرب و تقسیم و کسرها، نسبت‌ها و درصد است و وجه تصویری بودن آن، شهود را در دانش‌آموزان تقویت می‌کند؛

➤ دانش‌آموزان سنگاپوری در سومین مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم - تیمز - در مواجهه با دشوارترین مسائل کسر از این مدل استفاده نموده و موفقیت چشمگیری داشته‌اند؛

➤ مدل میله‌ای، فرصت استفاده از بازنمایی‌های چندگانه تصویری و انتزاعی را هنگام حل مسائل کسر ایجاد می‌کند (لین‌وُند و گینزبرگ، ۲۰۰۷، ص ۳۵).

بنابراین، تصمیم گرفتیم مدل میله‌ای در حل مسائل ریاضی در کتاب‌های درسی ریاضی سنگاپور را، که پژوهش‌های متعدد آن را تأیید می‌کردند (هوون و گارلیک، ۲۰۰۷؛ لین‌وُند و گینزبرگ، ۲۰۰۷؛ استین، ۲۰۰۸) به دانش‌آموزان خود آموزش دهیم. بدین منظور، آموزش حل مسائل ریاضی با استفاده از مدل میله‌ای را از مفاهیم ساده جمع و تفریق در دوره ابتدایی آغاز کردیم تا دانش‌آموزان فرایند تکوین حل مسئله را، از مفاهیم اولیه تا مفاهیم پیچیده ریاضی، درک کنند و اعتمادبه‌نفس آن‌ها نیز در مواجهه با مسائل ریاضی افزایش یابد. در نهایت، فرایند آموزش این مدل در کلاس درس، سه جلسه ۸۰ دقیقه‌ای به طول انجامید.

جلسه اول

در ابتدای جلسه، به معرفی **مدل میله‌ای** به کلاس پرداختیم. ضمن این معرفی، بسیاری از دانش‌آموزان ابراز

حل مسئله ریاضی در کلاس درس

یکی از مباحثی که در کتاب ریاضی پایه دوم راهنمایی مطرح شده، مسائل حوزه درصد است. یکی از سرفصل‌های مطرح شده در این کتاب، طرح مسئله از «مفهوم درصد» است که حداقل یک جلسه از جلسات کلاس را به خود اختصاص می‌دهد. زمانی که من، در سال تحصیلی ۹۱-۹۲، اولین مسئله را در این حوزه روی تخته کلاس نوشتم، با اظهار نظرهای مایوس‌کننده‌ای از سوی دانش‌آموزان مواجه شدم:

■ خانم، ما بلد نیستیم مسئله حل کنیم؛

■ خانم، تو رو خدا تمرین حل کنیم، مسئله نه!

■ خانم، مسئله‌های ریاضی اصلاً حل نمی‌شن!

■ خانم، این مسئله‌ها خیلی سختن و ...

تعداد زیادی از دانش‌آموزان، حتی تمایلی به فکر کردن درمورد روش حل مسئله‌ها نداشتند و هیچ اعتمادبه‌نفسی در مواجهه با مسائل برای حل آن‌ها نداشتند.

در آزمون ترم اول سال تحصیلی ۹۱-۹۲ نیز، مسئله زیر را، از مبحث درصد مطرح کردم:

مریم کتابی را با ۵ درصد تخفیف، ۴۰۰۰ تومان خرید. قیمت اولیه کتاب چقدر بوده است؟

از ۳۰ دانش‌آموز کلاس، فقط ۴ نفر به این مسئله پاسخ صحیح دادند. این رقم، بسیار نگران‌کننده بود و مرا به ارائه راهکاری به‌منظور برطرف نمودن آن ترغیب نمود؛ ضمن اینکه می‌دانستم بررسی عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در مطالعات و ارزیابی‌های متعدد، مؤید ناتوانی اکثر دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی است.

بدین منظور، به مطالعه مقالات و کتب متعدد در حوزه حل مسئله ریاضی پرداختم و روشی را برای حل مسائل جست‌وجو کردم که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

■ به زبانی ساده بیان شود؛

■ به درک مسئله کمک کند؛

■ در انواع مختلفی از مسائل، قابلیت کاربرد داشته باشد؛

■ از حل مسائل ساده، به مسائل چند مرحله‌ای و دشوار، قابل تعمیم باشد.

در بررسی مطالعات بین‌المللی ریاضیات و علوم - تیمز - کسب رتبه‌های اول توسط دانش‌آموزان کشور

عدم تمایل به حل مسائل کسری نمودند و این مسئله‌ها را «دشوار» یا حتی «حل‌نشده» دانستند. این در حالی بود که از آن‌ها خواستیم:

«اجازه بدید تا این روش رو ببینیم؛ شاید نظرتون عوض شد و با کمک هم تونستیم مسئله‌های خیلی سخت رو هم حل کنیم.»

پس از آن، جلسه را با مسئله زیر، شروع کردم:

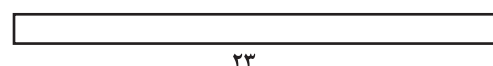
۱. حسین ۲۳ تیله داشت. ۹ تای آن‌ها را به دوستش داد. چند تیله برای او باقی مانده؟

همه دانش‌آموزان با هم ابراز داشتند «اینکه خیلی راحت» و همگی خواستار آمدن پای تابلو برای حل آن شدند. زهرا^۴ مسئله را روی تخته چنین حل کرد:

زهرا: چون از ۲۳ تیله ۹ تاش رو به دوستش داده، پس باید ۲۳ رو منهای ۹ کنیم که می‌شه ۱۴.

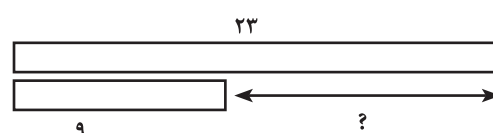
$$23 - 9 = 14$$

معلم: شما که گفتین مسئله سخته و نمی‌شه حلش کرد ولی الان همتون این مسئله رو حل کردین. پس مسئله‌ها سخت نیستن. خودمون فکر می‌کنیم سختن و حل نمی‌شن! حالا ما می‌خوایم با اون روشی که گفتیم، مسئله رو حل کنیم. فرض می‌کنیم این میله، تعداد تیله‌های حسین رو به ما نشان بده. پس این میله چه عددی رو به ما نشان می‌ده؟



دانش‌آموزان: ۲۳.

معلم: درسته! حالا چطوری می‌تونیم نشون بدیم حسین ۹ تا از تیله‌هاش رو به دوستش داده؟
مریم: می‌تونیم یک میله به اندازه ۹ تا تیله بکشیم و بگیم این قسمت رو داده به دوستش. جواب می‌شه همون ۲۳ منهای نه.



این مسئله را از دوره ابتدایی مطرح کردم تا انگیزه دانش‌آموزان برای حل مسئله برانگیخته شود. همچنین، آسانی مسئله باعث شد تا تمام دانش‌آموزان به حل مسئله بپردازند و همگی برای نوشتن پاسخ خود روی تخته کلاس داوطلب شوند. باز خورد ارائه این مسئله به

کلاس، به‌ویژه برای دانش‌آموزانی که باور عدم توانایی حل مسئله را به خود تلقین کرده بودند، بسیار مثبت بود و باعث شد تا آن‌ها انگیزه زیادی برای حل مسئله بعدی داشته باشند. سپس، مسائل زیر را به ترتیب مطرح کردم که تمام آن‌ها با استفاده از مدل میله‌ای توسط دانش‌آموزان حل شدند.

۲. محمد ۳۰ دوست دارد. احمد ۴۳ دوست دارد. احمد چند دوست بیشتر از محمد دارد؟
۳. مینا ۶ شکلات داشت. پدرش ۴ شکلات دیگر به او داد. او چند شکلات دارد؟
۴. هدی ۲۰۰۰ تومان پول داشت. او با نصف پولش برای خودش و دوستش بستنی خرید. چقدر از پول هدی باقی مانده است؟
۵. آریا ۳۰ آب‌نبات داشت. او ۳ آب‌نبات‌هایش را خورد. چند آب‌نبات برایش باقی مانده است؟

اولین جلسه از آموزش مدل میله‌ای در حل مسائل ریاضی، پس از آشنا کردن دانش‌آموزان با مدل میله‌ای، با طرح پنج مسئله مربوط به کسر دوره ابتدایی برگزار شد. دانش‌آموزان به دلیل برخورداری از توانایی حل این مسائل، انگیزه خوبی برای حل مسئله کسب کردند. همچنین، واگذاری حل مسئله و ترسیم مدل میله‌ای در حل آن‌ها، باعث ایجاد حس رقابت برای حل سریع‌تر مسائل در آن‌ها شد و می‌توان گفت تمام دانش‌آموزان در این جلسه، به‌طور کامل درگیر حل مسئله شدند بدون اینکه متوجه گذر زمان باشند. در مجموع، این جلسه از بازدهی خوبی برخوردار بود. این نتایج مرا به ادامه روند آموزش ترغیب نمود.

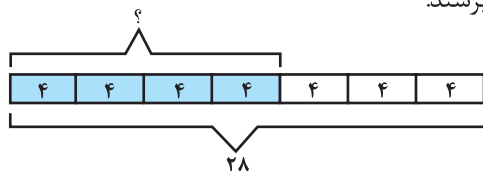
جلسه دوم

در این جلسه، به‌منظور سنجش یادگیری دانش‌آموزان از جلسه قبل، دو مسئله زیر را مطرح کردم که تمام دانش‌آموزان به آسانی آن‌ها را حل کردند.

۱. مریم ۱۳ کتاب داستان بیشتر از زهرا دارد. اگر تعداد کتاب داستان‌های مریم ۳۰ جلد باشد، زهرا چند کتاب داستان دارد؟
۲. احمد ۲۳ دوست داشت. در سال تحصیلی جدید، او ۱۵ دوست دیگر نیز پیدا کرد. الان احمد چند دوست دارد؟

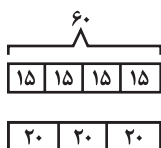
برای حل این مسئله به ذهنشان می‌رسد، آن را در کلاس مطرح کنند تا سایر دانش‌آموزان آن را بررسی کنند.
نگین: ما می‌تونیم بگیم اینجا دو تا نسبت داریم. یکی ۳ و اون یکی ۴. در واقع به ما می‌گه اگه ما هفت تا قسمت داشته باشیم چهار تاشون دانش‌آموزی ورزشکار و سه تاشون ورزشکار نیستن.

فاطمه: درسته! وقتی به ما گفته نسبت اونا سه به چهاره، پس یعنی ما هر چند تا قسمت که داشته باشیم باید ۴ تا رو ورزشکار بدونیم و ۳ تا از قسمت‌ها رو غیر ورزشکار. که روی هم می‌شه هفت قسمت. پس میله‌ای که می‌کشیم باید به هفت قسمت، تقسیم بشه.
سایر دانش‌آموزان نیز این استدلال‌ها را قبول کردند و درستی آن را تأیید نمودند. آن‌ها با رسم میله و تعیین تعداد افراد هر قسمت، توانستند به پاسخ نهایی برسند.



پس از پرسیدن چند سؤال پیرامون نحوه حل مسئله ۵ و پاسخ صحیح دانش‌آموزان به آن‌ها که بیانگر درک کامل آن‌ها از روند حل این مسئله بود، مسئله بعدی را مطرح کردم.

۶. دو گروه ایرانگردی هر کدام شامل ۶۰ نفر هستند. اگر $\frac{3}{4}$ افراد گروه اول و $\frac{2}{3}$ افراد گروه دوم به موزه بروند، از گروه اول چند نفر بیشتر برای بازدید از موزه رفته‌اند؟

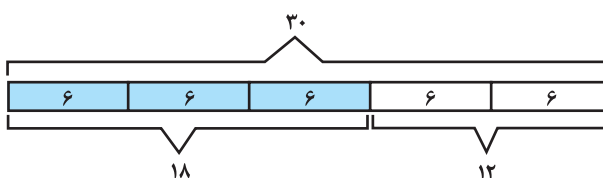


روند حل این مسئله نیز، همانند مسائل قبل، توسط دانش‌آموزان ارائه و توجیه شد. آن‌ها کشیدن دو میله را این‌طور استدلال کردند که «چون دو گروه ایرانگردی داریم، پس باید دو تا میله بکشیم» و راه‌حل را مرحله به مرحله انجام دادند و همه دانش‌آموزان، به جز یک نفر، روش فوق را به‌عنوان راه‌حل ارائه کردند.

آن دانش‌آموز در پاسخ به این سؤال، استدلال جالبی داشت. او برای محاسبه اینکه چند نفر از گروه اول بیشتر از گروه دوم به موزه رفته‌اند، ابراز کرد:

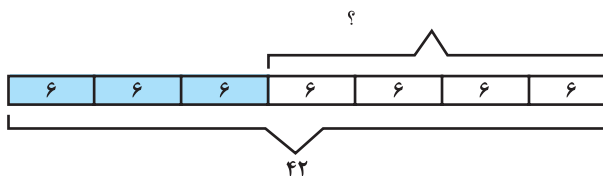
حل موفقیت‌آمیز دو مسئله فوق توسط تمام دانش‌آموزان کلاس، بیانگر این بود که دانش‌آموزان در حل مسئله ریاضی از توانایی نسبی برخوردار شده‌اند. بنابراین، مسائل چند مرحله‌ای زیر را مطرح کردم:

۳. آریا ۳۰ آب‌نبات داشت. او $\frac{3}{5}$ آب‌نبات‌هایش را خورد. چند آب‌نبات برایش باقی مانده است؟



مسئله ۳، نیز توسط تمام دانش‌آموزان حل شد. آن‌ها ابتدا به محاسبه سهم هر قسمت پرداختند و سپس تعداد آب‌نبات‌های باقی‌مانده را محاسبه کردند. بعضی از دانش‌آموزان هم، با محاسبه دو قسمت ۶ تایی به جواب نهایی رسیدند و محاسبات کمتری را انجام دادند. در حل این سؤال نیز، کسی ابراز مشکل نکرد.

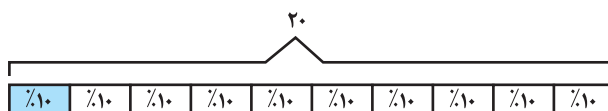
۴. آقای رضایی در مغازه میوه فروشی خود ۴۲ کیلو سیب دارد. اگر $\frac{3}{7}$ سیب‌ها قرمز و بقیه سیب‌ها زرد باشند، چند کیلو سیب زرد در مغازه وجود دارد؟



مسئله فوق، مشابه مسئله قبلی بود ولی مخرج آن، ملموس نبود (منظور مخرج‌هایی شامل اعداد متداول ۲، ۳، ۴ و ۵ است) و تمام دانش‌آموزان آن را حل کردند.

۵. تعداد دانش‌آموزان یک کلاس ۲۸ نفر است. از دانش‌آموزان سؤال شد چند نفر عضو تیم‌های ورزشی مدرسه هستند و مشخص شد که نسبت آن‌ها به سایر دانش‌آموزان ۴ به ۳ است. چه تعداد از دانش‌آموزان این کلاس عضو تیم‌های ورزشی مدرسه هستند؟

مسئله ۵، برای تعدادی از دانش‌آموزان چالش‌برانگیز بود و آن‌ها نتوانستند به آسانی مسائل قبلی به آن پاسخ دهند. برای حل این سؤال، از آن‌ها خواستم اگر ایده‌ای



تمام مسائل مطرح شده، داوطلب بودند و با نوشتن هر مسئله بر روی تخته، به سرعت به حل آن می پرداختند. آن‌ها راه حل‌های ارائه شده را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دادند و زمانی که در حل مسئله با مشکلی مواجه می شدند، سعی می کردند با کمک یکدیگر و بررسی راه حل‌های پیشنهادی به پاسخ مسئله برسند. بررسی درستی راه حل‌های بچه‌ها توسط خودشان، بسیار قابل توجه و بیانگر به چالش کشیده شدن تفکر دانش آموزان برای حل مسائل بود. این جلسه نیز از بازخورد خوبی برخوردار بود و دانش آموزان با حل هر مسئله، ابراز شادی می کردند و با کسب انگیزه بیشتری به حل مسائل بعدی می پرداختند.

جلسه سوم: کار گروهی

در این جلسه از دانش آموزان خواستم به صورت گروهی بنشینند و گروه بندی آن‌ها را براساس نمرات ترم اول درس ریاضی دانش آموزان انجام دادم و سعی کردم تا در هر گروه، دانش آموزانی از سطوح متفاوت قرار بگیرند و گروه‌ها به صورت تقریبی از نظر میانگین نمره درس ریاضی، در یک سطح باشند. در نهایت، دانش آموزان در هفت گروه قرار گرفتند. همچنین در این مرحله، از مسائل چند مرحله‌ای دشوار از کتاب‌های درسی سنگاپور و مطالعه بین المللی تیمز استفاده کردم تا دانش آموزان درگیر فرایند حل مسئله شوند و به آسانی، پاسخ سؤالات را به دست نیاورند و مجبور به ارائه بازنمایی‌های جدیدی از مدل میله‌ای در حل مسئله شوند.

دانش آموزان در ابتدا، در گروه‌های خود به بحث و تبادل نظر برای حل مسائل پرداختند. خود نیز بر کار آن‌ها نظارت داشتم و در مواقعی که گروهی در پاسخ گویی به سؤالات، با مشکلی در روند حل مسئله مواجه می شد، با طرح چند پرسش پیرامون راه حل ارائه شده، سعی می کردم تا آن‌ها را متوجه اشتباهشان کنم. پس از گذشت چهل دقیقه، پاسخ‌های هر گروه را توسط تمام دانش آموزان، مورد نقد و بررسی قرار دادم و هر گروه، پس از توضیح راه حل خود به سؤالات دانش آموزان دیگر، درمورد روش به کار برده شده، توضیح داد. آنچه که در این جلسه بسیار قابل توجه بود، روش‌های به کار برده شده در حل مسائل بود که تنوع زیادی داشت.

«هر قسمت گروه دو ۵ تا بیشتر از گروه اوله. پس بدون ۳ مرحله آخر، می‌تونیم بگیریم تعداد افرادی که از گروه دو نرفتن، ۵ نفر بیشتره. یعنی گروه اول ۵ نفر بیشتر رفتن.»

این استدلال قوی بود و بیانگر آنکه این دانش آموز، در سطح بالاتری از تفکر برای حل مسئله قرار دارد. او نرفتن تعداد افراد گروه دوم را به موزه با تعداد افرادی از گروه اول که به موزه رفته‌اند، مقایسه کرد و به پاسخ نهایی رسید و محاسبات کمتری را انجام داد. سپس مسئله بعدی را مطرح کردم.

۷. فاطمه ۱۰ درصد شکلات‌های خود را خورد. اگر او در ابتدا ۲۰ شکلات داشته باشد، چند شکلاتش را خورده است؟

دانش آموزان برای پاسخ گویی به این سؤال، با مشکل مواجه شدند. آن‌ها ابراز داشتند «ما که نمی‌تونیم ۱۰۰ قسمت رو اینجا بکشیم. خیلی زیاد می‌شه. اصلاً تو دفترمون جا نمی‌شه!». در این بین، چند نفر از دانش آموزان به این فکر کردند که با رسم قسمت‌های کمتر، میله متناسب با داده‌های مسئله را نشان دهند. آن‌ها در نهایت، با همفکری یکدیگر به این نتیجه رسیدند که از یک میله ۱۰ قسمتی برای حل مسئله استفاده کنند و این طور استدلال کردند که:

«چون ۱۰ درصد یعنی ۱۰ قسمت از ۱۰۰ قسمت و چون $\frac{1}{10}$ مساویه با $\frac{1}{10}$ پس ما یک نمودار میله‌ای می‌کشیم که ۱۰ قسمت باشه. ۱۰ تا خانه ۱۰ قسمتی به دست می‌یاد. یک قسمت از ۱۰ قسمت ۱۰ درصد شکلاتای مینا می‌شه و یک قسمت اون، ۲ تا شکلات می‌شه؛ یعنی تو هر قسمت ۲ تا شکلات وجود داره.»

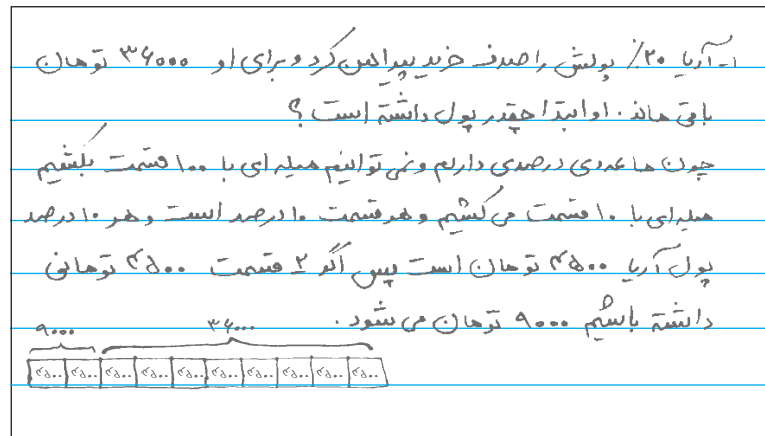
و پس از حل مسئله گفتند: «مشکل ما این بود که اولش به این دقت نکردیم که می‌تونیم از کسر مساوی با ۱۰ درصد، یعنی همون $\frac{1}{10}$ مساوی $\frac{1}{100}$ هست استفاده کنیم و به جای صد تا قسمت، ده قسمت بکشیم». توجه دانش آموزان به کاربرد تساوی کسرها برای حل این مسئله، باعث درک عمیق تر روند حل و ایجاد ارتباط بین آموخته‌هایشان شد.

در مجموع می‌توان گفت جلسه دوم نیز همانند جلسه اول آموزش مدل میله‌ای در حل مسئله، از شور و هیجان خاصی برخوردار بود. دانش آموزان برای حل

دانش‌آموزان از تقسیم‌بندی‌های متفاوتی در مدل‌های میله‌ای برای حل استفاده کرده بودند. در ادامه، هر یک از سؤالات مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

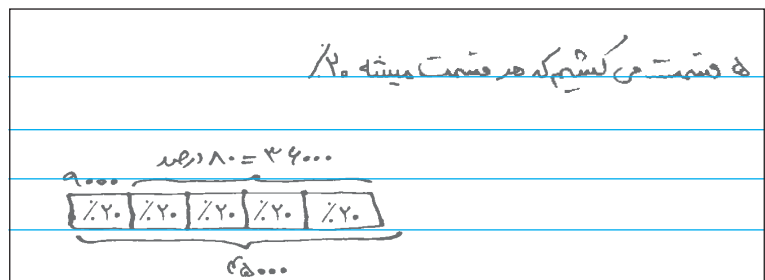
۱. آریا ۲۰ درصد پولش را صرف خرید پیراهن کرد و برایش ۳۶۰۰۰ تومان باقی ماند. او ابتدا چقدر پول داشته است؟

تمام گروه‌ها به این سؤال، پاسخ صحیح دادند و از مدل میله‌ای برای حل مسئله استفاده کردند. گروه‌ها در پاسخ‌گویی به مسئله، میله‌ها را به ۵، ۱۰ و یا ۲۰ قسمت تقسیم کردند و با محاسبه هر قسمت، توانستند پول اولیه آریا را محاسبه کنند. در شکل‌های ۱ و ۲، تصویر تعدادی از این پاسخ‌ها را می‌بینید.



شکل ۱: نمونه‌ای از پاسخ گروه‌ها به سؤال ۱ در کار گروهی با استفاده از میله ۱۰ قسمتی

در شکل ۱، دانش‌آموزان از یک میله ۱۰ قسمتی برای حل مسئله استفاده کردند. آن‌ها ابتدا با در نظر گرفتن دو قسمت از این قسمت‌ها به عنوان ۲۰ درصد پول آریا، تشخیص دادند که عدد مربوط به هر قسمت برابر است با ۴۵۰۰ و با به دست آوردن میزان پول خرج شده، به جواب نهایی رسیدند.



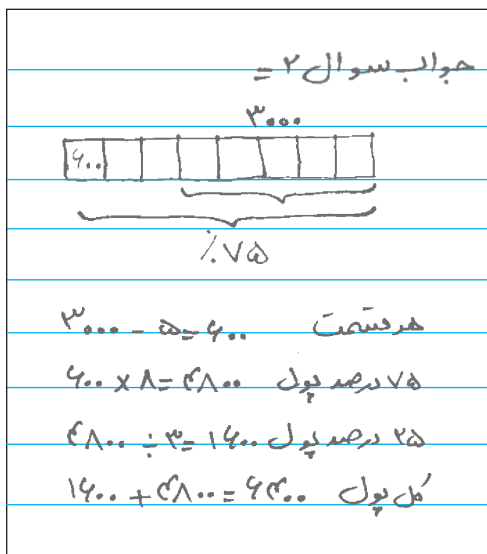
شکل ۲: نمونه‌ای از پاسخ گروه‌ها به سؤال ۱ در کار گروهی با استفاده از میله ۵ قسمتی

این گروه در توضیح روند حل مسئله بیان کردند: «۲۰ درصد یعنی همون ۱- . به خاطر همین، ما یک میله پنج قسمتی کشیدیم. بعد گفتیم چون آریا ۲۰ درصد پولش رو خرج کرده، پس یکی از قسمت‌ها خرج شده و ۳۶۰۰۰ تومنی که مونده مال چهار قسمته. به خاطر همین، ۳۶۰۰۰ رو به چهار تقسیم کردیم و چون همه قسمت‌ها با هم مساوی‌اند، پس هر قسمت میشه ۹۰۰۰ تومن و کل پول می‌شه جمع ۳۶۰۰۰ تومنی که خرج کرده با این یک قسمت که ۹۰۰۰ تومنه و جواب می‌شه ۴۵۰۰۰.»

توضیح تمام مراحل حل مسئله توسط اعضای گروه، حاکی از درک عمیق آن‌ها از فرایند حل مسئله بود. آن‌ها به خوبی قسمت‌های مختلف را به یکدیگر مرتبط کردند و توانستند با محاسبه عدد مربوط به هر قسمت، به پاسخ نهایی دست یابند.

۲. مینا ۲۵ درصد پولش را دفتر خرید. او با باقی‌مانده پولش، مداد و خودکار خرید و ۳۰۰۰ تومان برایش باقی ماند. او در ابتدا چند تومان پول داشته است؟

چهار گروه توانستند به طور کامل به این سؤال پاسخ دهند و بقیه گروه‌ها نیز تا حدودی به جواب نزدیک شدند. گروه‌ها برای حل این مسئله، از میله‌های هشت قسمتی استفاده کردند. سپس با تشخیص درصد باقی‌مانده از پول و رابطه آن با عدد ۳۰۰۰، موفق به محاسبه کل پول شدند.

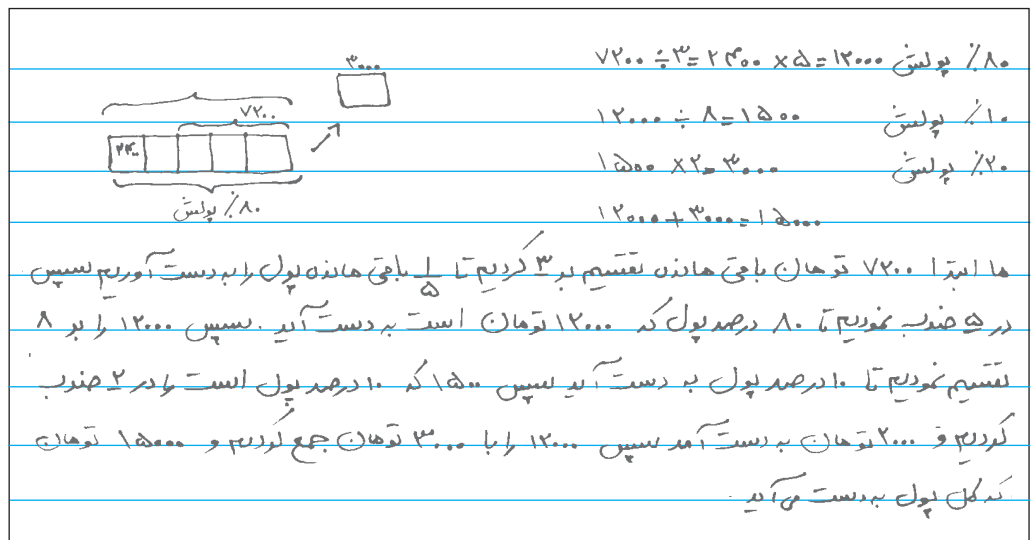


شکل ۳: پاسخ یکی از گروه‌ها به سؤال ۲ در کار گروهی

۳. علی ۲۰ درصد پولش را میوه خرید. سپس با ۲ باقی مانده پولش، یک کتاب خرید و ۷۲۰۰ تومان ۵ بایش ماند. او در ابتدا چقدر پول داشته است؟

۳ گروه به مسئله فوق پاسخ صحیح دادند. هر سه گروه برای پاسخ به این سؤال، از میله‌ای که به پنج قسمت تقسیم شده بود، استفاده کردند و با مشخص کردن کسر مربوط به باقی مانده پول که ۷۲۰۰ تومان بود، ابتدا مقدار پول باقی مانده پس از خرید میوه یعنی ۸۰ درصد را به دست آوردند و با توجه به آن، کل پول را محاسبه نمودند.

همچنین، اجرای کار گروهی موجب بروز ایده‌های مختلف برای حل مسئله شد. افراد هر گروه، نظراتشان را مورد بحث و بررسی قرار دادند و از نظر خودشان، بهترین ایده را به عنوان راه حل برگزیده و به مسئله پاسخ دادند. آن‌ها به بررسی علل انتخاب خود پرداختند تا بتوانند به سؤالات سایر گروه‌ها در مورد راه حل انتخابی، توضیح دهند که این امر، موجب تعمیق یادگیری در دانش آموزان شد. یکی دیگر از مزایای اجرای کار گروهی در این جلسه، ایجاد چالش در دانش آموزان بود، زیرا سطح مسائل مطرح شده، پیچیده و دشوار بوده و مسئله‌های دو و سه، نیازمند به کار بردن استدلال



شکل ۴. نمونه‌ای از پاسخ گروه‌ها به سؤال ۳ در کار گروهی

جمع‌بندی

با توجه به طرح مسائل چند مرحله‌ای و دشوار در جلسه سوم، دانش آموزان در گروه‌های خود، برای حل مسائل به چالش کشیده شدند، ایده‌های مختلف را مورد بررسی قرار دادند و تمام مراحل حل مسئله را نیز تجزیه و تحلیل کردند. در پایان جلسه نیز ابراز داشتند که:

«مدل میله‌ای خیلی خوبه. ما با این مدل، می‌تونیم به روشی که خودمون دوست داریم مسئله‌ها رو حل کنیم و میله‌ها را تقسیم‌بندی کنیم. انگار کشیدن میله به ما در تشخیص راه حل کمک می‌کنه و به ما می‌گه تو هر مرحله باید چه کار کنیم. مهم‌تر اینه که یک قاعده اجباری برای حل نداره».

این امر، نشان دهنده این بود که حس اعتماد به نفس در دانش آموزان تقویت و قدرت استدلال آن‌ها ارتقا یافته بود.

برای حل بودند. دانش آموزان برای پاسخ به هر سؤال، براساس عددی که بر حسب درصد بیان شده بود، شکل مناسبی کشیدند و با استفاده از چندین مرحله محاسبه، توانستند به پاسخ نهایی دست یابند. برقراری ارتباط بین قسمت‌های مختلف روند حل مسئله، از عوامل بسیار مهم و تأثیرگذار در روند حل مسئله بود که دانش آموزان با کمک مدل میله‌ای، توانستند از عهده این کار برآیند. ابراز «مفید بودن این روش در حل مسائل دشوار» در پایان جلسه، بیانگر مقبولیت این مدل در دانش آموزان بود که موجب ایجاد انگیزه و ذوق و شوق فراوانی در آن‌ها برای حل مسائل شد. در پایان، به معلمان ریاضی پیشنهاد می‌کنم برای آموزش حل مسئله در کلاس درس، زمان کافی اختصاص دهند و با به کارگیری شیوه‌های مختلف و ایجاد فضایی امن، به خلاقیت دانش آموزان خود، فرصت بروز دهند.

پی‌نوشت‌ها

1. Singapore Math: Simple or Complex?
2. Learning from Singapore Math
3. Bar Model
۴. تمام اسامی به کار رفته در این مقاله مستعار است.

منابع

1. Hoven, J.; & Garelick B. (2007). Singapore Math: Simple or Complex? **Educational Leadership**. Vol. 65, Number3, PP. 28-31. Association for Supervision and Curriculum Development.
2. Leinwand, S.; & Ginsburg, A. L. (2007). Learning from Singapore Math. **Educational Leadership**. Vol. 65, Number3, PP. 32-36. Association for Supervision and Curriculum Development.
3. National Council of Teachers of Mathematics. (1981). An Agenda for Action. **Recommendations for School Mathematics**. Reston, VA: Author.

۴. استین، لین آرتور (۲۰۰۸).

چگونه ریاضیات مورد توجه

قرار می‌گیرد؟ ترجمه مانی

۱. رضایی (۱۳۸۸). نشریه چشم‌انداز آموزشی، شماره ۴، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، صص ۱۳-۴.
۵. غلام‌زاد، سهیلا (۱۳۹۱).

ارزشیابی پایانی از برنامه درسی ریاضی دوره راهنمایی تحصیلی.

۱. پروژه ارزشیابی پایانی از چهارده برنامه درسی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، پژوهشکده برنامه‌ریزی و نوآوری‌های آموزشی، پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۶. گیامنش، علیرضا (۱۳۸۰).

سنجش و اندازه‌گیری در ریاضی همراه با سؤال‌های

ریاضی TIMSS در دوره

۱. راهنمایی، شرکت چاپ افست، چاپ اول، وزارت آموزش و پرورش، پژوهشکده تعلیم و تربیت.

کلیدواژه‌ها: پداگوژی، روش تدریس موضوعی،
معلمان اتریش، توسعه حرفه‌ای معلمان، تحقیق
محل

تا دهه ۹۰ میلادی، معلمان ریاضی اتریشی،
مانند بسیاری از معلمان کشورهای دیگر، تلاش
می‌کردند تا محتوایی از پیش تعیین شده را
تدریس و براساس آن عملکرد دانش‌آموزان را
ارزیابی کنند. با ظهور اندیشه‌هایی مانند ساختن
دانش و ارتباط مدارس با محیط بیرون از مدرسه،
این فرهنگ ایستای تدریس و یادگیری مدرسه-
مدار دچار تغییراتی شد. این در حالی بود که با
تغییر شرایط کار و استخدام، از فارغ‌التحصیلان
دانشگاهی انتظار می‌رفت تا دارای مهارت‌های
چندبعدی باشند، بتوانند گروهی کار کنند، به‌طور
مستقل تصمیم بگیرند، از دانش خود استفاده
کنند و به خود متکی باشند. علاوه بر این، در آن
دهه، خانواده‌ها فرزند کمتری داشتند و فرزندان،
نقش محوری‌تری در خانواده بازی می‌کردند. این
امر باعث شد تا رابطه بین فرزندان و والدین تغییر
کند. آن‌چه در محیط خانواده مجاز یا ممنوع
اعلام می‌شد، بیشتر حاصل گفت‌وگوی والدین و
فرزندان بود. با این تجارب بود که بزرگسالان
به‌عنوان معلم، و فرزندان به‌عنوان دانش‌آموز
وارد مدرسه می‌شدند. این تجارب با فرهنگ
حاکم بر مدرسه، که در آن همیشه بزرگسالان
تصمیم‌گیرنده هستند، ناسازگار بود؛ بنابراین،
حرفه تدریس با چالش‌های مهمی روبه‌رو شد که
به تبع آن صلاحیت‌های حرفه‌ای جدیدی را برای
معلمان تقاضا می‌کرد. بدین ترتیب در برنامه‌های



توسعه کلاس درس

توسعه حرفه‌ای معلمان و توسعه مدرسه

پداگوژی و روش تدریس موضوعی برای معلمان (PFL) ^۱

نرگس مرتاضی مهربانی
دبیر ریاضی و دانشجوی دکتری آموزش ریاضی

آموزش معلمان در اتریش به ناچار تغییراتی به وجود آمد تا بتواند پاسخگوی این نیازها باشد (راش، ۲۰۱۰). یکی از این برنامه‌ها، پداگوژی و روش تدریس موضوعی برای معلمان (PFL) بود. این برنامه، یک دوره دانشگاهی دوساله است که به عنوان آموزش ضمن خدمت برای معلمان دبیرستان در اتریش برگزار می‌شود. این برنامه، مبتنی بر این فرض است که در صورتی می‌توان از یادگیری و ابتکارات معلمان به خوبی حمایت نمود که معلمان به طور مستقیم، با عمل تدریس درگیر باشند و برای درک بهتر عمل تدریس خود، با معلمان دیگر و نیز با جامعه دانشگاهی، شبکه‌های انتقادی مناسبی تشکیل دهند (راش، ۲۰۱۰). هدف این برنامه، «تأسیس انجمن دوستان منتقد» است که در آن، دریافت بازخورد مشترک و منظم از عمل تدریس خود و دیگران به عنوان جنبه‌ای حیاتی از رشد حرفه‌ای معلمان محسوب می‌شود (کرینر، ۲۰۰۰). از سال ۱۹۸۲، دوره‌های PFL برای ریاضی و علوم و چندین دوره برای دیگر موضوع‌های درسی تشکیل شده است. هسته اصلی این دوره‌ها، تحقیق کارورز/تحقیق عمل است. معلمان، عمل‌های تدریس خود را مورد بررسی قرار می‌دهند تا بتوانند دانش و صلاحیت‌های تدریس و نیز درک نظری خود را توسعه دهند. برای حفظ تعادل بین نظر و عمل، اکثر دوره‌های PFL توسط یک تیم ۵ نفری میان‌رشته‌ای شامل آموزشگران، متخصصان موضوع‌های درسی و کارورزان، هدایت می‌شود. در هر دوره، ۳۰ نفر به صورت داوطلب شرکت می‌کنند و طول دوره چهار نیم‌سال تحصیلی است که دو نیم‌سال آن به بیان مبانی نظری مربوط به آموزش ریاضی و دو نیم‌سال به ارائه کارهای عملی معلمان، مبتنی بر مباحث نظری مطرح شده در دوره، اختصاص دارد. با این که دوره در خارج از محیط مدرسه برگزار می‌شود، اما مدرسه محل اصلی یادگیری معلمان محسوب می‌شود. این دوره از نوع خوبی برخوردار است. برای مثال، هر دوره شامل

پی‌نوشت‌ها

۱. PEL، علامت اختصاری برای عبارت آلمانی Pädagogik und Fachdidaktik für Lehrerinnen است.

منابع

1. Krainer, K. (2000). Teacher Education as Research – A Trend in European Mathematics Teachers Education. University of Klagenfurt. Lecture at ICME 9, WGA 7, Tokyo, August 2000.
2. Rauch, F. (2010). Practitioner Research and In-Service University Courses: Theoretical Concepts and Evaluation. In M. Khine and I. M. Saleh (Eds.) **Practitioner Research: Teachers' Investigations in Classroom Teaching**. pp.51-66.

سه سمینار یک هفته‌ای، پنج نشست گروهی ناحیه‌ای به مدت یک روز و نیم، و کار عملی فردی و نوشتن گزارش‌های بازتابی است. به گفته کرینر (۲۰۰۰)، یک جنبه ویژه PFL آن است که تمام معلمان، تدریس خود را مورد تحقیق قرار داده و در نهایت، شروع به نوشتن یک مورد مطالعاتی می‌کنند که گویای یک بازتاب انتقادی و منظم بر عملکردهای خودشان است و این، همان ویژگی تحقیق عمل است. از این گذشته، سؤال تحقیق به انتخاب خود معلم و برگرفته از چالشی است که در عمل تدریس برای وی ایجاد شده است. طبق گفته معلمان شرکت‌کننده در PFL، از جمله آن چالش‌ها، می‌توان به نیاز معلمان به معرفی روش‌های جدید تدریس یا احساس تنش در رویارویی معلمان ریاضی با اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان اشاره کرد. معلمان شرکت‌کننده از حمایت‌های سایر همکاران و یک یا دو آموزشگر معلمان، بهره می‌برند. این حمایت، بدین گونه است که هر شرکت‌کننده برای مدت دو سال، عضو یک گروه شامل ده همکار و یک یا دو آموزشگر معلمان می‌شود. این تأثیر متقابل بین عمل و بازتاب، استقلال در کلاس خود و شبکه‌سازی با گروه، به اسناد مکتوب تحقیقات معلمان منجر شده است که به طور کلی، به گونه‌ای تدوین شده‌اند تا معلمان دیگر بتوانند با خواندن آن‌ها، از این تجارب استفاده کنند. در نتیجه، انواع بیشتری از شبکه‌سازی ایجاد می‌شود.

کرینر (۲۰۰۰)، اشاره می‌کند که ارزیابی‌های مستمر برنامه PFL نشان می‌دهند که این پروژه، در ارتقای توسعه حرفه‌ای معلمان و در ایجاد انجمن دوستان منتقد موفق بوده است. با این حال، نتایج پروژه نشان داده است که به طور میانگین، شرکت‌کنندگان به میزان کمی توانسته‌اند تأثیر مناسبی بر توسعه حرفه‌ای گروه درسی مدارس خود داشته باشند و اغلب فعالیت‌های آن‌ها، مورد مخالفت آشکار یا غیرآشکار مدرسه قرار گرفته است که این خود، نشان‌دهنده نیاز به حمایت‌های اجرایی، در انجام هر تغییر آموزشی است.



یادگیری ریاضی در ط

چنین گفت پیغمبر راستگوی
ز گهواره تا گور دانش بجوی

(فردوسی، شاهنامه)

• ترویج و تقویت تحقیقات میان رشته‌ای؛
• پیشبرد درک عمیق‌تر و بهتر از لحاظ روحی و
روانی و دیگر جنبه‌های آموزش و یادگیری ریاضیات و
پیامدهای آن.

سی و هفتمین کنفرانس گروه بین‌المللی
روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME 37) در شهر کیل،
از ۲۸ جولای تا ۲ آگوست ۲۰۱۳ - ۶ تا ۱۱ مرداد
۹۲- برگزار شد.

برگزارکننده این کنفرانس، مؤسسه تحقیقاتی
لایپنیتس^۴ برای آموزش علوم و ریاضیات^۵ (IPN)
بود. این مؤسسه، در سال ۱۹۹۶ تأسیس شده و تا
سال ۲۰۰۸، شامل سه گروه پژوهشی آموزش علوم،
آموزش زیست‌شناسی و آموزش شیمی و فیزیک بود.
در سال ۲۰۰۸، گروه پژوهشی آموزش ریاضی نیز با
هدف توسعه تحقیقات و ارتقای آموزش ریاضی از طریق
پژوهش، به آن اضافه شد. در این مؤسسه، بسیاری از
دانشمندان، کارشناسان و روان‌شناسان، با یکدیگر
همکاری می‌کنند.

شهر کوچک کیل، در شمال شرقی کشور آلمان و
نزدیک هامبورگ قرار دارد. کیل همان شهری است که

گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی^۱
(PME)، زیرگروه رسمی کمیسیون بین‌المللی
تدریس ریاضی^۲ (ICMI) است که در سومین کنگره
بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME 3)، که در شهر
کارلسروهه^۳ آلمان در سال ۱۹۷۶ برگزار شد، به وجود
آمد.

قانون اساسی این گروه، در مجمع عمومی سالانه در
۱۷ آگوست ۱۹۸۰ به تصویب رسید و در مجمع‌های
عمومی سالانه بعدی و با اکثریت آرا، به ترتیب در ۲۴
جولای سال ۱۹۸۷، ۱۰ جولای ۱۹۹۲، ۲ آگوست
۱۹۹۴، ۱۸ جولای ۱۹۹۷، ۱۴ جولای ۲۰۰۵ و
بالاخره ۲۱ جولای ۲۰۱۲، دچار تغییراتی شد. اهداف
اصلی کنفرانس‌های سالانه این گروه به قرار زیر است:

• ترویج ارتباط‌های بین‌المللی و تبادل اطلاعات
علمی در زمینه آموزش ریاضی؛



اول عمر

سمیرا مهر آیین

کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهر کرمان

و بدون وقفه ادامه داشت. البته در هر روز، دو فرصت کوتاه ۲۰ دقیقه‌ای به میان‌وعده و تقریباً یک ساعت به ناهار اختصاص داده شده بود.

روز اول کنفرانس روز ثبت‌نام و آشنایی بود. افرادی با لباس‌های یک رنگ آبی و آرم کنفرانس روی آن‌ها، در قسمت‌های مختلف سالن ایستاده و مسئولیت ثبت‌نام افراد را برعهده داشتند. در کنار دید و بازدیدها، کریستینا ریس^۱ از دانشگاه مونپخ، یک سخنرانی با عنوان «شما نمی‌توانید حقه جدیدی را به سگ قدیمی آموزش بدهید» ایراد کرد که هدف آن، این بود که نشان دهد یادگیری ریاضی، یک تجربه‌ای است که هر فرد، در طول عمر خود می‌تواند از ریاضی داشته باشد. بعد از آن، برنامه‌های فرهنگی متعلق به شهر کیل توسط دانشجویان، دانش‌آموزان و گروهی از ملوانان این شهر اجرا شد.

روز دوم کنفرانس، دوشنبه ۲۹ جولای، با سخنرانی داگ کلارک^۲ از دانشگاه کاتولیک استرالیا (ویکتوریا) شروع شد که عنوان آن، «تفاهم، ارزیابی و توسعه تفکر ریاضی کودکان» بود و به لحاظ روشی، تأکید بر مصاحبه مبتنی بر تکلیف به‌عنوان ابزار قدرتمندی در دست معلم برای ارزشیابی بود. این تحقیق توسط یک

در سال ۱۹۳۶، بازی‌های المپیک قایقرانی در آن برگزار شد که جزو افتخارات آن شهر محسوب می‌شود.

موضوع اصلی کنفرانس، «یادگیری ریاضی در طول عمر» بود و پیامش این بود که یادگیری ریاضی، تنها متعلق به دوران مدرسه نیست، بلکه نیاز به آن، در طول عمر هر فرد احساس می‌شود، پس نیازمند پژوهش است.

در این کنفرانس، همه چیز مرتب بود و طبق برنامه پیش می‌رفت. گروهی از دو روز قبل از کنفرانس، در محل ورود شرکت‌کنندگان یعنی فرودگاه هامبورگ و ایستگاه قطار کیل و هامبورگ اسکان داشتند و مسئول راهنمایی بودند. در محل کنفرانس هم دانشجویان، با لباس‌های آبی آسمانی و آرم کنفرانس حضور داشتند و راهنمایی افراد را برعهده داشتند. در این کنفرانس، ۶۸۶ نفر از حدود ۵۴ کشور دنیا شرکت کرده بودند که حدود نیمی از آن‌ها از کشورهای غیراروپایی بودند. در مجموع در این کنفرانس، ۱۶۵ گزارش تحقیقی ۴۰ دقیقه‌ای، ۷۴ پوستر، ۲۰۰ سخنرانی کوتاه ۱۰ دقیقه‌ای، ۳ جلسه کاری و ۴ مجمع پژوهشی برگزار شد. تقریباً هر روز، از ساعت ۸ صبح تا ۸ شب برنامه‌های علمی، پشت سر هم



و بعد از ناهار برنامه تفریح از طرف کنفرانس برای شرکت کنندگان در نظر گرفته شده بود.

روز پنجشنبه در نوبت صبح، ادامه سخنرانی‌های کوتاه و بلند و بعد از ناهار در سالن اصلی کنفرانس، طبق معمول همه کنفرانس‌های PME، میزگردی برگزار شد که عنوان آن، «آموزش‌ها و کارهایی که دانشجویان دوره دکتری آموزش ریاضی باید در دوره آموزش خود انجام دهند» بود. مسئول جلسه پتر لیلیدال^{۱۱} از دانشگاه سایمون فریزر^{۱۲} کانادا بود. چهار شرکت کننده در این میزگرد از کشورهای ایتوبی، فنلاند، برزیل و استرالیا بودند که هریک به نوبه خود، به سؤالات در کمال آرامش و به طور کامل پاسخ می دادند. از هر یک، سه سؤال پرسیده شد و در نهایت، توسط مسئول جلسه جمع بندی شد. بعد از آن، جلسه مجمع عمومی برگزار و توسط کمیته بین المللی کنفرانس ۲۰۱۳، در مورد فرایند چاپ گزارش کنفرانس و حمایت های مالی از طریق بنیاد اسکمپ به تعدادی از ارایه دهندگان مقالات از کشورهای مختلف، توضیحاتی داده شد. بعد هم طبق روال، چهار عضو کمیته بین المللی که دوره چهار ساله آن ها تمام شده بود با چهار نفری که در همان جلسه و با رأی گیری انتخاب شدند، تعویض شدند. پس از رأی گیری مجدد برای انتخاب رئیس، باربارا یاورسکی برای سه سال، برگزیده شد.

آخرین سخنرانی عمومی را فیلیپ ماتوس^{۱۳} از دانشگاه لیسبون^{۱۴} پرتغال با عنوان «روش ها و فرصت هایی برای روش شناسی پژوهش» ایراد نمود. وی به استناد به تحقیقات ارایه شده در PME 36، این پژوهش را انجام داده بود، یعنی با فراتحلیلی که از مقالات پذیرفته شده در کنفرانس قبلی صورت داده بود، به این یافته ها رسیده بود.

پی نوشت ها

1. Psychology of Mathematics Education (PME)
2. International Congress on Mathematical Education (ICME)
3. Karlsruhe
4. Leibniz Institute
5. Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
6. Kristina Reiss
7. Doug Clarke
8. MarjaVan den Heuvel-Panhuizen
9. Iddo Gal
10. Number Sense
11. Peter Liljedahl
12. Simon Fraser University
13. Filipe Matos
14. Lisbon

تیم تحقیقی در دانشگاه کاتولیک استرالیا و همکاران وی از دانشگاه موناش در سال ۱۹۹۹ انجام شد و در آن، همکاری نزدیکی بین معلمان و پژوهشگران صورت گرفت. در واکنش به این سخنرانی، ماریا فن دن هول پَن هویزن^۸ نظرات خود را بیان کرد. بعد از آن، پوسترها در محل سالن دانشگاه ارایه شدند. هم چنین بعد از ناهار، ابتدا بحث های گروهی به طور موازی و در ادامه، سخنرانی ها یا همان گزارش های تحقیقی به موازات هم برگزار شدند. سخنرانی عمومی روز سوم، توسط ایدو گال^۹ و با عنوان «مهارت های ریاضی فراتر از سال تحصیلی: یک دیدگاه پیمایشی از مهارت های بزرگ سالان و یادگیری آن ها» انجام شد که در آن، بیان شد که «اگر می خواهید بهبودی در وضعیت آموزش ریاضی و درک چالش های ریاضی در قرن ۲۱ به وجود آید، این موضوع باید در طول عمر و همیشه، مورد بررسی و پیگیری قرار گیرد.» در مقابل، ردلف استرسیر از آلمان، به نقد این سخنرانی پرداخت. بعد از آن، در همان سالن، قسمت اول مجمع های پژوهشی شکل گرفت. هدف از این مجمع ها، ایجاد بحث و گفت و گو، ایراد سخنرانی های شفاف تر، واکنش ها و بحث در مورد موضوعاتی مانند درک عددی^{۱۰} بود که تحقیقات قابل توجهی در آن حوزه انجام شده نمود. در این قسمت، مدت ۱۵-۱۰ دقیقه به مقدمه و سازماندهی افراد در گروه های مختلف و توضیحات اولیه اختصاص داده شد و ۲۵-۲۰ دقیقه اعضای هر گروه، به بحث و تبادل نظر در مورد موضوع مربوط پرداختند، ۴۰-۳۵ دقیقه هم بحث و نتیجه گیری توسط مسئول هر گروه، برای سایر گروه ها انجام شد و در نهایت، ۲۰-۱۵ دقیقه، رئیس جلسه به نتیجه گیری پرداخت. حدود ۹۰ دقیقه به هر مجمع پژوهشی اختصاص داده شده بود. در این روز بعد از ناهار، جلسه سیاست گذاری برگزار شد. بحث این جلسه، در مورد تغییر قانون چاپ مقالات در گزارش این کنفرانس بود.

روز چهارشنبه برنامه های کنفرانس در نوبت صبح شامل سخنرانی ها و قسمت دوم انجمن های پژوهشی

اصلاحیه

در مقاله نقد و بررسی فصل ۳ حسابان تازه تألیف در صفحه ۴۰ (رشد ۱۱۲) ستون دوم، سطر پنجم معادله قسمت ب به صورت زیر می باشد:

$$\tan x \times \tan^2 x = 1$$

مجله رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله ها، روایت معلمان، دیدگاه ها، نقد و بررسی کتاب از سوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شد. تا پایان مهر ۱۳۹۲، نامه ها و مطالب دوستان زیر، به دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن ها، منتظر دریافت نامه های شما هستیم.

نامه های رسیده

- ◆ بهنام آیتی پور، از هرمزگان؛
- ◆ هادی دهقان، از کرمان؛
- ◆ ملیحه سادات یاسیدی، از تهران؛
- ◆ فریده کمالی محمدزاده، از تهران؛
- ◆ رحیمه قربانیان، از تبریز؛
- ◆ نسرين مهدوی، از تبریز؛
- ◆ نرگس اصلانی، از تبریز؛
- ◆ نوشین فرامرزی پور، از کرمان؛
- ◆ حسین مددی، از ساوه؛
- ◆ زهرا محتشم، از بوشهر؛
- ◆ نسرين نیکدل، از رشت؛
- ◆ پری مسلمی پور لالمی، از رشت؛
- ◆ فؤاد نظری، از کرمانشاه.



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

با مجله های رشد آشنا شوید

مجله های رشد توسط دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می شود.

مجله های دانش آموزی

(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شوند):

- رشد کودک (برای دانش آموزان آمادگی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی)
- رشد نوجوان (برای دانش آموزان پایه های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی)
- رشد دانش آموز (برای دانش آموزان پایه های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی)
- رشد نوجوان (برای دانش آموزان دوره آموزش متوسطه اول)
- رشد جوان (برای دانش آموزان دوره آموزش متوسطه دوم)

مجله های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شوند):

- ◆ رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد آموزش متوسطه ◆ رشد تکنولوژی آموزشی
- ◆ رشد مدرسه فردا ◆ رشد مدیریت مدرسه ◆ رشد معلم

مجله های بزرگسال و دانش آموزی تخصصی

(به صورت فصل نامه و چهار شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شود):

- ◆ رشد برهان آموزش متوسطه اول (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره متوسطه اول)
- ◆ رشد برهان آموزش متوسطه دوم (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره متوسطه دوم)
- ◆ رشد آموزش قرآن ◆ رشد آموزش معارف اسلامی ◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد آموزش مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش تربیت بدنی ◆ رشد آموزش علوم اجتماعی ◆ رشد آموزش تاریخ ◆ رشد آموزش جغرافیا ◆ رشد آموزش زبان ◆ رشد آموزش ریاضی ◆ رشد آموزش فیزیک
- ◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش زیست شناسی ◆ رشد آموزش زمین شناسی
- ◆ رشد آموزش فنی و حرفه ای و کار و دانش ◆ رشد آموزش پیش دبستانی

مجله های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش جویان مراکز تربیت معلم و رشته های دبیری دانشگاه ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می شود.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.

◆ تلفن و نمابر: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۷۸

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications & Teaching Technology Office

114 Roshd
Mathematics
Education Journal

رشد

آشنایی با ریاضیات

vol.31 no.2 2013 ISSN:1606-9226

2. Editor's note: Congratulation to the new mission of
Farhangian University! by: Z. Gooya

4. Verbal history of Mathematics curriculum
by: B. Z. Zangeneh

14. Using the number line to investigate
the solving of linear equation
by: P. Dikenson & F. Aide Trans. by S. Zamani

24. Representations and the Concept of Function
by: Z. Gooya & A. Emami

36. Lookig at a pizza with a mathematical eye
by M. Walter Trans. S. Gholamazad

44. Teachers' Narrative: A report from one grade 6
math class by: Z. Montazeri & S. Sheidaie

51. Teachers' Narrative: Teaching bar model for
math problem solving by: M. Khodayari

58. Connection between classroom development,
teachers' professional development &
school development by: N. M. Mehrabani

60. Report: Lifelong math learning
by S. Mehraien

63. Letters!

Managing Editor: Mohammad Naseri

Editor: Zahra Gooya

Executive Director: Pari Hajikhani

Editorial Board:

Sayyed Hasan Alamolhodaei, Esmail Babolian, Mohammad

Reza Fadaie, Soheila Gholamazad, Mirza Jalili, Mehdi

Radjabalipour, Mani Rezaie, Shiva Zamani, Bijan Zangeneh.

Cover Designer: Mehdi Karimkhani

Graphic Designer: Parisa Sondosi

www.roshdmag.ir

e-mail: riyazi@roshdmag.ir

P. O. Box: Tehran 15875 - 6585



حماسه سیاسی و حماسه اقتصادی

برگ اشتراک مجله های رشد

نحوه اشتراک:

شما می توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سهراب آزمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.

۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگهدارید).

♦ نام مجلات درخواستی:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

♦ اگر قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

.....

امضا:

♦ نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۶۵۹۵/۱۱۱

♦ وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir

♦ اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶/۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۹۷۱۳-۱۴

♦ هزینه اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال

♦ هزینه اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

شیر خانہ ریاضیات

مجموعہ سائنس

مجموعہ عمومی

teachers and university staff have enhanced opportunities throughout the country. The by using various media. These present studies, applications, the history and teaching mathematics and the sciences and engineering.

www.icsm3.org/eng/Service

Edward J. Barbeau
Peter J. Taylor
Editors

Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom

The 16th ICM Study

University of Cambridge
The Botanical Garden

محل برگزاری :

خانه ریاضیات اصفهان



شورای خانه‌های
ریاضیات ایران



خانه ریاضیات
اصفهان

با مشارکت خانه های ریاضیات:

اصفهان، بابل، بجنورد، بروجن، پندر انزلی، بندرعباس، تبریز، تربیت حیدریه، تهران، خمین، خلیجان، زنجان، سامان، سبزوار، سمنان، شاهین شهر، شهرکرد، صحنه، فردوس، قزوین، کاشمر، کرج، کرمان، گنبد کاووس، محلات، نجف آباد، نیشابور، همدان، یزد

WWW.CIMH91.ORG

روشن



مجلات فصلنامه رشد ویژه معلمان، مربیان و مشاوران مدارس متوسط اول و دوم

www.roshdmag.ir

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید سلیمی)

تلفن: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۲۲۸ فاکس: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۷۸