

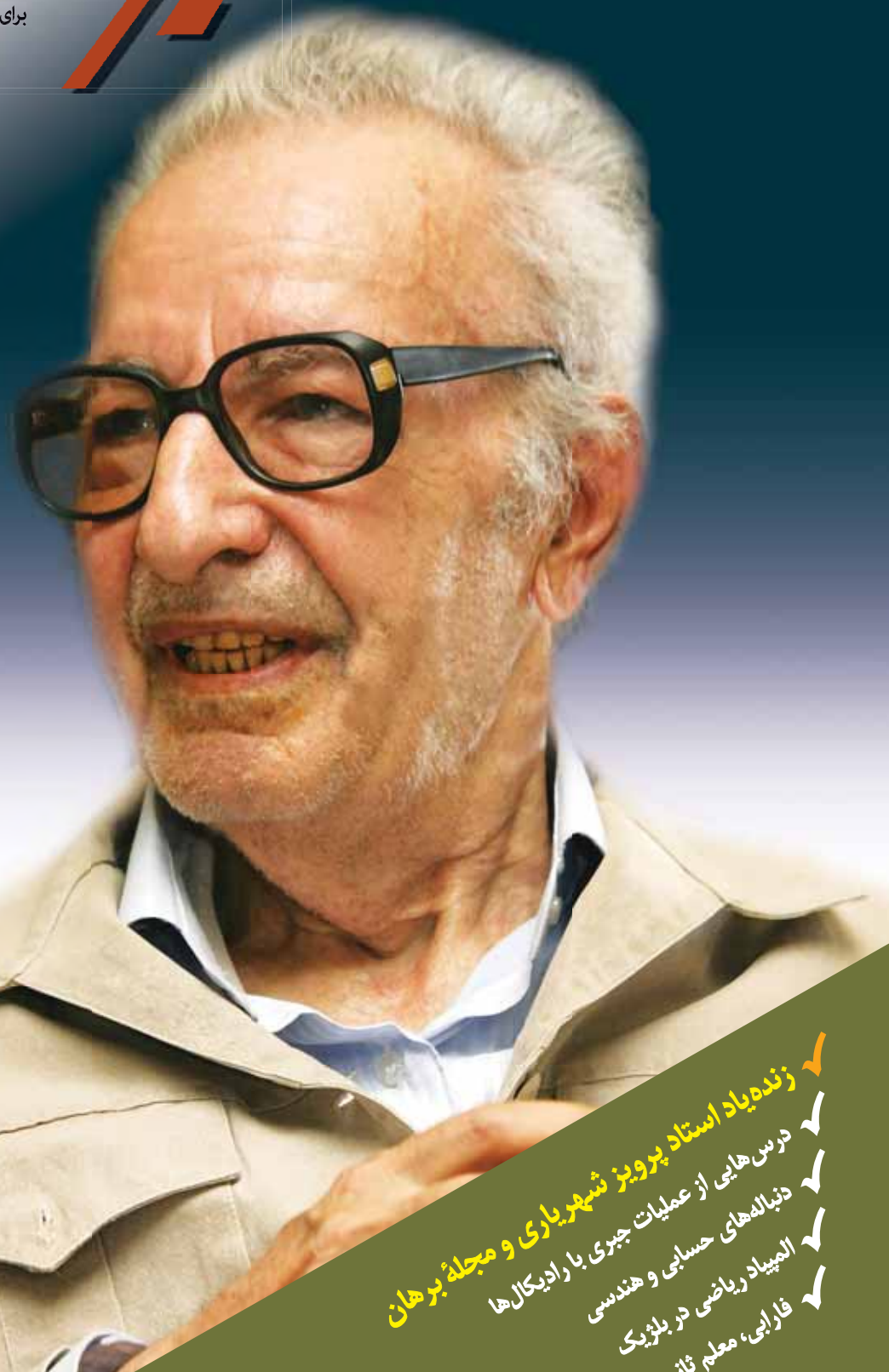
ریاضی



برای دانش آموزان دوره متوسطه

- ♦ دوره بیست و دوم
- ♦ شماره ۱
- ♦ پاییز ۱۳۹۱
- ♦ ۶۴ صفحه
- ♦ ۶۵۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و توسعه
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی



✓ زندیاد استاد پرویز شهریاری و مجله برهان
✓ درس هایی از عملیات جبری با رادیکال ها
✓ دنباله های حسابی و هندسی
✓ المپیاد ریاضی در بلژیک
✓ فارابی، معلم ثانی

فراخوان مسابقه بزرگ مقاله نویسی مجله رشد برهان ریاضی متوسطه

به اطلاع دبیران ریاضی، دانش آموزان، دانشجویان رشته ریاضی و دانشجویان تربیت معلم و سایر علاقه مندان رشته ریاضی در سراسر کشور می‌رساند که مجله «رشد برهان متوسطه»، یک مسابقه بزرگ مقاله نویسی را با شرایط زیر برگزار می‌کند:

۱. موضوع مقاله خود را از میان موضوع‌های زیر انتخاب کنید:

- ♦ موضوع‌ها و شاخه‌های ریاضیات دبیرستانی (شرح و بسط این موضوع‌ها) در قالب مقالات آموزشی؛
- ♦ کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر و مهارت‌های زندگی؛
- ♦ تاریخ و فلسفه ریاضیات؛
- ♦ بازی‌ها، سرگرمی‌ها، تفریحات و معماهای ریاضی؛
- ♦ المپیادهای ریاضی و نقش آنها در گسترش آموزش ریاضی؛

♦ منطق و استدلال‌های ریاضی.

۲. مقالات را روی صفحه A4 و حتی‌الامکان به صورت تایپ شده ارسال فرمایید. مهلت ارسال مقالات تا تاریخ ۳۰ بهمن ۹۱ است.

۳. حجم مطالب ارسالی در حد متعارف یک مقاله باشد. منابع مورد استفاده حتماً ذکر شوند.

۴. مقالات را به نشانی پستی (تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵) و یا رایانامه (Borhan@roshdmag.ir) مجله ارسال فرمائید.

۵. پس از دریافت و جمع‌آوری مقالات، هیئت داوری منتخب از سوی هیئت تحریریه مجله که مرکب از معلمان و استادان برگزیده دانشگاهی در رشته‌های

مرتبط است، مقالات را به دقت مطالعه و ارزیابی می‌کند. پس از داوری نهایی، مقاله‌های برگزیده در شماره ویژه‌ای در مهرماه ۱۳۹۲ و به مناسبت «آغاز سال تحصیلی جدید» معرفی خواهند شد.

۶. به نفرات برگزیده جوایز نفیسی به شرح زیر تقدیم خواهد شد:

- ♦ نفر اول: چهار شب اقامت در مجتمع رشد در یکی از شهرهای تنکابن یا مشهد (به دلخواه)

- ♦ نفرات دوم و سوم: سه شب اقامت در مجتمع رشد در یکی از شهرهای تنکابن یا مشهد (به دلخواه)

۷. سایر مقالات ارسالی، پس از ارزیابی و در صورت تأیید کارشناسان، در شماره‌های آینده مجله به چاپ می‌رسند.





♦ مدیرمسئول:

محمد ناصری

♦ سردبیر:

حمیدرضا امیری

♦ مدیر داخلی:

هوشنگ شرقی

♦ طراح گرافیک:

شاهرخ خره‌غانی

♦ تصویرگر:

میثم موسوی

♦ هیئت تحریریه:

حمیدرضا امیری،

محمد هاشم رستمی،

دکتر ابراهیم ریحانی

احمد قندهاری،

میرشهرام صدر،

هوشنگ شرقی،

سید محمدرضا هاشمی موسوی،

غلامرضا یاسی پور

♦ ویراستار ادبی:

بهرروز راستانی

♦ وبگاه:

www.roshdmag.ir

♦ رایانامه:

Borhan@roshdmag.ir

♦ پیام‌گیر نشریات رشد:

۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲

♦ نشانی دفتر مجله:

تهران، صندوق پستی:

۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

☎ تلفن دفتر مجله:

۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲

☎ تلفن امور مشترکین:

۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶

۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۵

♦ شمارگان:

۱۱/۰۰۰ نسخه

♦ چاپ:

شرکت افست (سهامی عام)



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دوره متوسطه



♦ دوره بیست و دوم ♦ پاییز ۱۳۹۱ ♦ شماره ۱

حرف اول	۲	سر دبیر
ویژه‌نامه در گذشت ریاضیدان معاصر، زنده‌یاد استاد پرویز شهریاری	۳	حمیدرضا امیری
فارابی، معلم ثانی	۱۵	زنده‌یاد پرویز شهریاری
درس‌هایی از عملیات جبری با رادیکال‌ها	۲۰	احمد قندهاری
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی: ایستگاه اول: جدول مشاهیر ایرانی	۲۳	
ریاضیات در سینمای جهان	۲۴	احسان یارمحمدی
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی: ایستگاه دوم (۲ و ۱): لطیفه‌های ریاضی	۲۶ و ۳۱	
دنباله‌های (۱): دنباله‌های حسابی و هندسی	۲۷	هوشنگ شرقی
رویکرد هندسی و جبری در آموزش هندسه	۳۲	محمد هاشم رستمی
بسته نرم‌افزاری متمتیکا	۳۶	دکتر محمدعلی فربرزی عراقی
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی: ایستگاه سوم: یک مسئله و سه جواب!	۴۰	
المپیاد ریاضی در بلژیک	۴۱	هوشنگ شرقی
فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای	۴۴	ابراهیم ریحانی - فهیمه کلاهدوز
تاریخچه مجلات ریاضی ایران	۴۹	غلامرضا یاسی پور
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی: ایستگاه چهارم: چندمعمای خواندنی	۵۳ و ۶۳	
یک نابرابری مرتبط با نقطه ویژه‌ای در مثلث	۵۴	ترجمه: عباس روح‌الامینی
یادداشتی درباره چند نامساوی هندسی	۵۷	ترجمه: محمدرضا نوری
دانش‌نامه ریاضی	۶۰	غلامرضا یاسی پور
با مخاطبان	۶۲	
مسائل مسابقه‌ای برهان	۶۴	

در این شماره می‌خوانید:

مجله رشد برهان متوسطه، از همه دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

• نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه) • طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان • طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان • طرح معماهای ریاضی • نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود

• مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. • مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد. • مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. • استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.



مردی که ۲۱ سال با مجله رشد برهان متوسطه زندگی کرد

دانش‌آموزان و خوانندگان مجله ریاضی «رشد برهان متوسطه» و تمام کسانی که در طول این ۲۱ سال با مجله برهان آشنا بوده و مقالات آن را مطالعه کرده‌اند و در واقع، همه افرادی که به نوعی با ریاضیات سروکار دارند، استاد پرویز شهریاری، چهره ماندگار آموزش ریاضی ایران را می‌شناسند، از کتاب‌ها و مقالات ایشان استفاده کرده‌اند و به نوعی خود را شاگرد استاد می‌دانند. استاد فرزانه‌ای که هم‌اکنون بین ما نیست و چندی است به دیار باقی شتافته و همه ما از فیض وجودش محروم شده‌ایم. استاد شهریاری از اولین شماره مجله برهان که در سال ۱۳۷۰ به چاپ رسید و البته قبل از چاپ مجله، یعنی از اواخر سال ۱۳۶۹، در برنامه‌ریزی و تعیین خط‌مشی مجله با آن همکاری مستمر و تنگاتنگی را آغاز کرد. وی علاوه بر شرکت فعال در جلسات هیئت تحریریه و حضور مؤثر در جمع اعضای این هیئت، همواره در هر شماره مقاله یا مقالاتی را نوشته است. همیشه، مقالات استاد به گفته همه خوانندگان جزو خواندنی‌ترین و بهترین مقالات برهان بوده است؛ سلسله مقاله‌هایی تحت عنوان «شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید» (که این سلسله مقاله‌ها به صورت کتاب توسط انتشارات مدرسه به چاپ رسید) «از تاریخ بیاموزیم»، «یادهای آموزشی»، «اتحاد و معادله»، «ریاضیات در ایران» و... که تعداد این مقاله‌ها در ۷۴ شماره برهان به حدود ۱۰۵ مقاله می‌رسد.

استاد شهریاری در طول ۲۱ سال همکاری مستمر با مجله ریاضی برهان، حتی در یک جلسه هیئت تحریریه تأخیر نداشتند و همیشه لااقل نیم ساعت قبل از شروع جلسه در دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی حاضر بودند. هرگاه در جلسات هیئت تحریریه روی مسئله مهمی بحث می‌شد یا اختلاف نظری بین اعضا به وجود می‌آمد، ایشان با متانت و آرامش خاص خودشان حرف آخر را می‌زدند و البته با ذکر منطق حاکم بر نظر خودشان با ذکر مثال یا تجربه‌ای در آن زمینه، بحث را خاتمه می‌دادند. وقتی در زمستان سال ۱۳۶۹ با طرح برای چاپ یک مجله ریاضی موافقت شد، به منظور معرفی اعضای هیئت تحریریه با استاد شهریاری تماس تلفنی گرفتم و جریان انتشار این مجله و اهداف آن را با ایشان در میان گذاشتم. ایشان فرمودند: «مجله‌ای شبیه به مجله یکان؟! خیلی موافقم! اولین جلسه کجا و کی تشکیل می‌شود؟»

من واقعاً باور نمی‌کردم استاد بزرگی همچون شهریاری به همین راحتی دعوت مرا پذیرفته باشند. ایشان در همان جلسه اول که با حضور آقایان غلامرضا یاسی‌پور و محمدهاشم رستمی و سیدحسین سیدموسوی تشکیل شد، نام زیبای برهان را برای مجله پیشنهاد کردند که همگی پذیرفتند. فکر می‌کنم بعد از چاپ سه یا چهار شماره از مجله ریاضی برهان، استاد شهریاری مجله «آشنایی با ریاضیات» را که خودشان سردبیری آن را به عهده داشتند، تعطیل کردند. وقتی از ایشان سؤال کردم چرا این مجله را تعطیل کردند فرمودند: «دست تنها بودم. در ضمن برهان خیلی خوب دارد پیش می‌رود و من بیشتر روی این مجله انرژی خواهم گذاشت.»

و ما در طول این ۲۱ سال همکاری، شاهد عمل به این قول استاد بودیم. مجله ریاضی برهان واقعاً برایشان در اولویت کارها، نوشته‌ها و تألیفاتشان قرار داشت.

ضایعه جبران‌ناپذیر از دست دادن استاد شهریاری نه تنها برای مجله ریاضی برهان، بلکه برای جامعه ریاضی و علمی ایران بسیار سنگین است. از خداوند متعال خواستارم که ما را در ادامه راه استاد که همان عزت و سربلندی جامعه علمی کشور و دستیابی به بالاترین حد آموزش، به‌خصوص آموزش ریاضی در ایران است، یاری بخشد تا روح زنده‌یاد پرویز شهریاری به آرامش ابدی برسد.

سردبیر

همچون آفتاب



ویژه نامه یار دیرین مجله و ریاضیدان معاصر

زنده یاد استاد پرویز شهریاری

دل می‌رود ز دستم...

گزارشی کوتاه از مراسم تشییع و مراسم بزرگداشت استاد پرویز شهریاری



آقای امیری در سخن‌رانی خود، متن پیام تسلیت آقای دکتر محی‌الدین بهرام محمدیان، معاون وزیر و رییس «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی» وزارت آموزش و پرورش را قرائت کرد و پس از آن متن این پیام را به آقای دکتر شهریاری شهریاری (فرزند استاد) تقدیم نمود.

۲. روز جمعه ۲۹ اردیبهشت ۹۱ از ساعت ۳ تا ۵ بعدازظهر مراسمی در محل «انجمن زرتشتیان تهران» واقع در «خیابان میرزا کوچک‌خان» برگزار شد. در این مراسم بسیاری از دبیران، استادان دانشگاه، مؤلفان، مترجمان و صدها نفر از چهره‌های فرهنگی و شخصیت‌های علمی حضور داشتند. حضور جناب حجت‌الاسلام سید محمود دعایی، نماینده محترم ولی فقیه در «روزنامه اطلاعات» نیز جالب توجه بود.

سخن‌ران این مراسم ضمن بیان شمه‌ای از فعالیت‌ها و تلاش‌های استاد شهریاری در ترویج دانش ریاضی بین نسل‌های گوناگون جوانان این مرز و بوم، به تجلیل از شخصیت ماندگار ایشان پرداخت. شایان ذکر است که به علت ازدحام جمعیت، حضور بسیاری از علاقه‌مندان استاد در این مراسم میسر نشد و همه نتوانستند به سالن مراسم وارد شوند.

۳. روز چهارشنبه ۳ خرداد ۹۱ نیز مراسمی در محل «فرهنگ‌سرای ابن‌سینا» واقع در شهرک قدس تهران برگزار شد.

«وداع با شهریاری ریاضیات» عنوان مطلبی بود که در یکی از نشریات صبح روز شنبه ۲۳ اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۱ در بازتاب خبر درگذشت استاد پرویز شهریاری، به چاپ رسید. استاد پرویز شهریاری در پی ناراحتی ناشی از عفونت ریه‌ها، روز چهارشنبه ۲۰ اردیبهشت در بیمارستان جم تهران بستری شد و دو روز بعد، در صبح جمعه ۲۲ اردیبهشت دارفانی را وداع گفت.

مراسم تشییع پیکر ایشان بعدازظهر همان روز و از مقابل «دبیرستان فیروز بهرام» انجام گرفت. در مراسم تدفین استاد ده‌ها نفر از چهره‌های فرهنگی کشور حضور داشتند. از جمع اعضای هیئت تحریریه مجله «رشد برهان متوسطه» نیز، آقایان حمیدرضا امیری، هوشنگ شرقی، میرشهرام صدر و سیدمحمد رضا هاشمی موسوی در این مراسم شرکت کردند. پس از آن سه مراسم به شرح زیر در بزرگداشت آن استاد فرزانه برگزار شد:

۱. روز پنج‌شنبه ۲۸ اردیبهشت ۹۱ از ساعت ۱۸ تا ۲۲ از طرف «خانه ریاضیات تهران» و به مناسبت «روز جهانی خیام» مراسم ویژه‌ای برگزار شد. در این مراسم به مناسبت بزرگداشت زنده‌یاد دکتر شهریاری نیز برنامه‌هایی به اجرا درآمد؛ از جمله: سخن‌رانی آقای حمیدرضا امیری، سردبیر مجله رشد برهان متوسطه؛ سخن‌رانی آقای محمد باقری؛ سخن‌رانی آقای دکتر ممقانی، نماینده انجمن ریاضی ایران و فیلم کوتاهی هم از زندگی استاد نمایش داده شد.





سعدیا مرد نکونام نمیرد هرگز

پیام تسلیت حجت‌السلام
والمسلمین دکتر محمدیان
معاون وزیر و رئیس سازمان
پژوهش و برنامه‌ریزی
آموزشی به مناسبت
درگذشت استاد پرویز
شهریاری

تألم و تأثر گردید.

ضمن عرض تسلیت این ضایعه غمناک و تأسفبرانگیز به شاگردان و بهره‌مندان محضر علمی آن استاد فرزانه، به‌ویژه خاندان محترم ایشان، آرزومند علو درجه و مرتبه، و آرامش و غفران در جوار رحمت حق تعالی برای روح آن استاد، و صبر و شکیبایی برای بازماندگان هستیم. امید آنکه با دوام تلاش‌های علمی، آموزشی و پژوهشی از سوی شاگردان و تربیت‌یافتگان ایشان شاهد سربلندی جمهوری اسلامی ایران در عرصه‌های علم و فرهنگ که از آرزوهای همیشگی استاد بوده است، باشیم.

سعدیا مرد نکونام نمیرد هرگز

مرده آن است که نامش به نکویی نبرد

هر ورق از تاریخ کشور ما، نام و یادی از عالمان و دانشمندان یا هنرمندانی را در خود جای داده است که آثار وجودی آنها، مایه افتخار ملک و ملت و خیر و برکت عالم انسانی است؛ کسانی که کتاب و قلم و خامه و چامه آنان روشنی‌بخش اندیشه و آرامش‌بخش دل انسان‌های مشتاق آموختن و فهمیدن برای بهتر زیستن است؛ به‌ویژه اگر آن عالم یا هنرمند معلمی در خدمت تربیت، آموزش و تألیف و ترجمه بوده باشد. استاد گرانمایه، پرویز شهریاری، معلم پیش‌کسوت و پیشرو در آموزش ریاضی برای فرزندان این مرز و بوم و چهره ماندگار این رشته، مردی که چندین نسل از دانش‌آموزان و دانش‌آموختگان کشور با کتاب‌های او، ریاضی‌خوان و ریاضی‌دان شده‌اند، شخصیتی بود که علی‌رغم چهره در نقاب خاک کشیدن، هم‌چون آفتاب در دل و جان و ذهن و یاد دانشجویان و پژوهشگران عرصه دانش ریاضیات خواهد ماند.

فقدان این استاد دانشمند که با «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» در برنامه‌ریزی، تألیف و تدوین کتاب‌های درسی، به‌ویژه مجلات رشد همکاری پایا و مانایی داشت، موجب

دل‌نوشته‌ای از دکتر مهدی بهزاد

رئیس پیشین «انجمن ریاضی ایران» و استاد ریاضی دانشگاه‌های کشور

ورای بوستان دل یک صحرا است بی‌پایان

به پای جان توان رفتن در آن صحرای حیوانی

ترا چون از تو بستاند، نمایی، جمله او ماند

تو آن که خواه انا الحق گوی و خواهی گوی سبحانی

(فخرالدین عراقی)



عظمت بارگاه شهریاری در تبریز به افتخار شهریاری در کرمان مدنظر قرار دهند. و نیز به دو «انجمن ریاضی ایران» و «ترویج علم ایران» پیشنهاد می‌کنم جایزه‌ای مشترک به نام پرویز شهریاری تعیین کنند تا همه ساله طبق آیین‌نامه‌ای خاص به مروجان برتر ریاضیات کشور اهدا شود.

یادش جاودان و راهش برهرو باد.

عنوان چهره ماندگار ریاضیات مدرسه‌ای نصیبش شود. بی‌شک بسیاری از آثارش بارها و بارها تجدید چاپ خواهند شد و منبع فیض خواهند بود، اما چون علم و ریاضیات را کم‌اهمیت‌تر از شعر و ادبیات نمی‌دانم، به جد از شاگردان مستقیم و غیرمستقیم میلیونی استاد می‌خواهم به عنوان زیارت‌گه علم و معرفت، احداث بنای یادبودی را به

یار بود که به دنبال اخذ مدرک دکتران رفت و به جای آن آثاری متنوع تولید کرد که کم و کیفشان را بزرگان به تفصیل خواهند نوشت.

در دو سفر داخلی همراهش بودم و در چند نشست علمی از وجودش کسب فیض کردم. افتخار می‌کنم که نقشی بموقع و مؤثر ایفا کردم تا به شایستگی دکترای افتخاری کسب کند و

فرهیخته نیک‌پندار، پرویز شهریاری را بیش از ۴۰ سال است می‌شناسم و با دستاوردها و توانایی‌های گوناگونش آشنایی دارم؛ معلمی شایسته، مدیری مدبر، مورخی چیره‌دست، نویسنده‌ای توانا و مترجمی پرکار و پربار بود که در آستانه ۹۰ سالگی هم از تماشای رقص قلم خسته نمی‌شد و همچنان افتخار می‌آفرید. بخت با ایران و ایرانی





یاد استاد

حمیدرضا امیری - سردبیر مجله رشد ریاضی برهان متوسطه

خیلی سخت و دشوار است که بخواهم در مورد شخصیتی بنویسم که ۲۱ سال در کنار هم بودیم و اکنون در جمع ما حضور ندارد و برای همیشه در کنار او بودن و فیض وجودش را از دست داده‌ایم. استاد شهریار عزیز، شما برایم همیشه زنده‌اید و افکار، توصیه‌ها و راهبردهای شما همواره با من و در ذهن و جان من جاری و ساری است.

استاد عزیز، هیچ‌گاه لذت لحظاتی که با شما سپری کردم، از یاد و خاطرم نخواهد رفت. روزها و ساعت‌هایی که در جمع هیئت تحریریه و یا مکان‌های دیگر بنا بر مناسبت‌های گوناگون در محضر شما بودم و از لحظه‌لحظه آن درس می‌گرفتم و شاگردی می‌کردم و شما همچون پدری مهربان برایم راهنما و سرمشق بودید، جزو بهترین ساعت‌های عمرم محسوب می‌شود.

هرگز روزهایی را که در «دبیرستان فیروز بهرام» با هم تدریس داشتیم فراموش نمی‌کنم. به‌خصوص زنگ‌های تفریح که شما از کلاس جبر سوم و بنده از کلاس ریاضیات جدید می‌آمدیم و در آن دقایقی که در خدمت شما بودم، همواره با شوخی‌های لطیف خود روحیه‌ای مضاعف به من می‌بخشیدید.

استاد عزیزم، از سال ۱۳۶۹ تاکنون هنوز طنین اولین صحبت تلفنی با شما در گوشم هست که وقتی خودم را معرفی کردم و توضیح دادم که می‌خواهم مجله‌ای مشابه «مجله یکان» راه‌اندازی کنم و به کمک شما نیاز دارم، فرمودید: «کار خیلی خوبی است. با این کار موافقم. آدرس شما کجاست تا اولین جلسه را شروع کنیم؟»

باورم نمی‌شد ای استاد که به همین راحتی و در نهایت بزرگواری دعوت مرا پذیرفته باشید. از آن پس همواره با چهره متین، آرامش‌بخش و در عین حال فکور، هر سه یا چهار هفته یک‌بار نیم ساعت قبل از شروع جلسه هیئت تحریریه در دفتر انتشارات حضور می‌یافتید و تا پایان ما را همراهی می‌کردید.

استاد شهریار عزیز، سال‌ها از آن تاریخ می‌گذرد که یک‌بار از شما سؤال کردم: «چرا پیشنهاد «دانشگاه ونکوور» را برای تدریس «تاریخ ریاضیات» با آن شرایط ایده‌آل و در کنار خانواده نپذیرفتید؟»

و شما با عبارتی کوتاه اما معنی‌دار که تا زنده‌ام آن را فراموش نخواهم کرد، فرمودید: «اگر قبول می‌کردم، الان در جمع شما عزیزان مجله برهان نبودم.»

استاد بزرگوار، روزی ویژگی‌های شغل معلمی را برایم بیان کردید و فرمودید:

«معلم یک پرونده زنده است. در جامعه حرکت می‌کند و می‌تواند نتیجه کار خود را تا زنده است، مشاهده کند.»
اینکه: «معلم همیشه در دو نسل زندگی می‌کند: یکی نسل خودش و دیگری نسل بچه‌هایی که با آنها سروکار دارد.»

و اینکه از من سؤال کردید چند ساعت در روز تدریس می‌کنم و عرض کردم حدود هشت ساعت. فرمودید: «پس هشت ساعت دروغ نمی‌گویید. این ویژگی شغل شریف شماست که تا درس می‌دهید، امکان دروغ گفتن را در حضور دانش‌آموزان ندارید.»

استاد عزیز، من از شما درس‌ها و تجربیات بسیاری را آموختم و به مصداق کلام گهربار امیر مؤمنان (علی ع) که فرمودند: «مَنْ عَلَّمَنِي حَرْفًا فَقَدْ صَيَّرَنِي عَبْدًا»، بار سنگینی را بر دوش خود احساس کرده و می‌کنم؛ اینکه بتوانم حق شاگردی را به‌جا آورم، یاد و خاطره شما را زنده نگه دارم و همه تجربیات و آموزه‌هایم را که شما در طبق اخلاص و در کمال بزرگواری در اختیارم قرار دادید، به نسل‌های بعدی منتقل نمایم.

استاد عزیزم، شما هیچ‌گاه از یاد و خاطره شاگردانتان نخواهید رفت و همواره برای همه ما زنده‌اید. از خداوند منان می‌خواهم توفیق ادامه راه استاد را که همان راه معلمی و ترویج علم و معرفت است، به ما عطا کند.

به همه شما دانش‌آموزان و دانش‌پژوهان توصیه می‌کنم که در همه دوران زندگی خود همواره قدر معلمان و استادان محترم خود را بدانید و از شمع وجود آنها فیض ببرید.





پرورش دهنده شکوفه‌های ریاضی

زهره گویا - استاد ریاضیات دانشگاه شهید بهشتی و سردبیر مجله رشد ریاضی استاد شهر یاری طی پنج سالی که مراسم «جنگ شکوفه‌ها» از طرف دانشکده علوم ریاضی «دانشگاه شهید بهشتی» برگزار می‌شد (۱۳۷۵ تا ۱۳۸۰)، در تمام آنها شرکت کرد. تقریباً هم تا آخر مراسم حضور داشت و با حوصله، سعه صدر و شوخ طبعی منحصر به فردش، با دانش آموزان دبیرستانی به گفت و گو نشست. شیرینی حضور ایشان در جمع‌های بیش از ۱۰۰۰ نفری «بچه مدرسه‌ای‌ها»، غوغایی در دانشگاهمان برپا می‌کرد که نظیرش کمتر دیده می‌شد.

شهر یاری سخنور، انسان دوست، عاشق، فهیم و آشنا با زمانه خویش بود و شخصیتی چندوجهی و چندبعدی داشت. استاد در مراسم سومین گردهمایی شکوفه‌های ریاضی، مثل همیشه راست قامت، مطمئن، سربلند و عاشقانه، خطاب به بیش از هزار دانش آموز، آنها را «معشوق‌های» خویش نامید و به این نکته اساسی اشاره کرد: «سفارشی که به جوان‌های خودم، فرزندان خودم، دارم این است که کوشش کنند چندبعدی باشند. انسان موجودی نیست که بتوان پاره پاره‌اش کرد... خودمان را از رشته‌های دیگر جدا نکنیم.» و بالاخره با توضیحات مبسوط، فرق بین «انسان» و «آدم‌واره» را بیان کردند. شهر یاری برای بسیاری از دانش آموزان ما چندان شناخته شده نیست، اما در ۱۰۰ شماره مجله، آثارش چراغ راه این عزیزان است.

هرگز نمیرد آن که دلش زنده شد به عشق ثبت است بر جریده عالم دوام ما



معلم نمونه

هوشنگ شرقی - مدیر داخلی مجله رشد برهان متوسطه

پرویز شهر یاری عزیز از میان ما رفته و حالا قرار است مطلبی به یاد او بنویسم، ولی چه می‌توانم بنویسم. صدها خاطره از او جلوی چشمانم دارم و به همین خاطر باور نمی‌کنم که از پیش ما رفته باشد. آنها که با من بوده‌اند، می‌توانند گواهی دهند که در تمام این سال‌ها چه تعلق خاطر عمیقی نسبت به او داشته‌ام و نقد و احیاناً اسائه ادب نسبت به او را به هیچ روی بر نمی‌تافتم. البته همه انسان‌ها قابل نقد هستند، اما او برای من موجود دیگری بود. به همین دلیل بود که تیتراژی اصلی ویژه‌نامه‌ای که برای بزرگداشت او در شماره ۱۲ و ۱۳ «مجله ریاضی توان» (از انتشارات مبتکران) انتخاب کردم، این بود: «هیچ کس مثل او نیست».

من بهراستی معتقد بودم و هستم که هیچ کس چون پرویز شهر یاری نبوده و نیست. هر چند نویسنده‌ای در گرامی داشت او گفت که مطمئن است پرویز شهر یاری در میان نسل‌های بعد همگانی خواهد داشت؛ که امیدوارم

چنین باشد. ولی مگر او که بود و چه بود که درباره‌اش چنین می‌اندیشم؟ گمان می‌کنم به جای هر توضیحی بهتر است پرسش و پاسخی را که خود با او داشتم و در همان شماره مجله، در قالب مصاحبه من با او، به چاپ رسید، در این جا بیاورم: «سؤال: به نظر من پرویز شهر یاری نمونه‌ای است که ثابت می‌کند، معلم ریاضی می‌تواند در حوزه ادبیات فعال باشد. می‌تواند اهل مطالعه باشد، اهل نویسندگی باشد. می‌تواند درد آشنا باشد و با دردهای کودکان و نوجوانان، دانش آموزان و دانشجویان، و طبقات مردم آشنا باشد و به راه حل آنها بیندیشد و مقاله بنویسد. می‌تواند درباره تاریخ به‌طور عام و تاریخ ریاضی به‌طور ویژه مطلب بنویسد و خلاصه موجودی چندبعدی باشد. معلم ریاضی چگونه می‌تواند چنین باشد؟

جواب: حقیقت این است که شما به من محبت دارید، ولی من معتقدم، انسان در هر زمینه‌ای که کار می‌کند، اگر با علاقه تلاش کند و با هیچ مشکلی از میدان خارج نشود، می‌تواند موفق باشد. من نه استعداد فوق العاده‌ای دارم

و نه حالت به‌خصوص دیگری داشته‌ام، ولی هیچ وقت کارم را رها نکرده‌ام. با اینکه اتفاق افتاده است که در مواقعی نتوانسته‌ام کار کنم، ولی تا وقتی که نتوانسته‌ام کار کنم، همیشه پشت میز کار بوده‌ام... آن چه باعث موفقیت انسان می‌شود، پشتکار و ادامه کار است. اگر تأثیر هوش و استعداد دو تا سه درصد باشد، ۹۷ تا ۹۸ درصد بقیه به پشتکار و علاقه‌مندی مربوط می‌شود.»

و به‌خاطر همین دیدگاه و به‌خاطر همین استقامت و مردانگی و ده‌ها خصلت انسانی دیگر بود که خیلی‌ها مثل من شیفته شخصیت والای پرویز شهر یاری بودند و تا نفسی باقی است او را فراموش نمی‌کنند.

روحش شاد و یادش گرامی باد



بار امانت

میرشهرام صدر - عضو هیئت تحریریه
مجله رشد برهان متوسطه

غمی خواهم که غم خوارش تو باشی*
دلی خواهم دل آزارم تو باشی
جهان را یک جوی ارزش نباشد
اگر یارم اگر یارم تو باشی
ببوسم چوبه دارم به شادی
اگر در پای آن دارم تو باشی
به بیماری دهم جان و سر خود
اگر یار پرستارم تو باشی
شوم ای دوست پرچمدار هستی
در آن روزی که سردارم تو باشی
کشم بار امانت با دلی زار

امانت‌دار اسرارم تو باشی
استاد شهریارِ درباره کارهای
فرهنگی «ته» نمی‌گفت. از جان مایه
می‌گذاشت. یاد می‌آید، زمستان سال
۱۳۸۳ قرار بود اولین همایش ریاضیات
شهرستان خمین برگزار شود. همکاران
گروه ریاضی آموزش و پرورش خمین
بسیار مشتاق بودند که در این همایش
استاد شهریارِ حضور داشته باشد
و سخنرانی کند. به همین دلیل مرا
واسطه قرار دادند که ایشان را دعوت
کنم. اما در آن زمان استاد به دلیل
کهنوت سن پادرد داشتند و با عصا راه
می‌رفتند و فکر نمی‌کردم با این بُعد
مسافت، آن هم با وسیله شخصی این
دعوت را قبول کنند. اما وقتی با ایشان
تماس گرفتم و ماجرا را گفتم، ایشان
قبول کردند. به جز این، هر کجا که
معلمان ریاضی دور هم جمع می‌شدند و
از ایشان دعوت می‌کردند، با هر سختی
که بود، حضور فعال پیدا می‌کردند.
معلمی «معشوق» او شده بود و در این
راه سر از پا نمی‌شناخت.

چند سالی بود که جلسات هیئت
تحریریه برهان را در منزل استاد تشکیل
می‌دادیم (به این دلیل که استاد زحمت
ایاب و ذهاب نداشته باشد). هر بار که با
ایشان تماس می‌گرفتم تا تاریخ و ساعت



جلسه را هماهنگ کنم، «نه» نمی‌گفت
و با روی باز استقبال می‌کرد.

دو موضوع خاطر استاد را آورده
می‌کرد:

یکی برگزاری آزمون‌های سراسری
به شیوه تستی بود. ایشان می‌گفت تا
وقتی کنکور به این وضع برگزار می‌شود،
تیشه به ریشه دانش می‌زند. دانش‌آموز
سال چهارم متوسطه فقط دنبال
روش‌های تستی است و معلمی از نظر
مسئولان مدرسه و دانش‌آموزان پایه
چهارم موفق است که نکته‌های تستی
بیشتری بگوید و کمتر مسئله یا قضیه
حل کند. این روش، حاصلی جز از بین
رفتن تدریجی دانش ندارد. زیرا تدریس
ریاضیات باید با کاربرد ریاضی، تاریخ
ریاضی و به‌خصوص با فلسفه ریاضی
همراه باشد. مرتب از ایشان شنیده بودم
که برای حل فلان معضل (برای مثال،
کاشت درخت آلبالو!)، چندین سمینار
برگزار می‌کنند، اما برای رفع معضل
کنکور به این روش، هیچ کسی قدم جلو
نمی‌گذارد.

دیگر اینکه بسیاری از کتاب‌های
ریاضی‌دانان ایرانی، مانند جبر و مقابله،
به زبان‌های دیگر ترجمه شده‌اند، البته
مرحوم خدیو جم این کتاب را به
فارسی ترجمه کرده است. اما برخی از

رساله‌های کاشانی به روسی، انگلیسی،
فرانسه و آلمانی ترجمه شده‌اند و اصل
رساله به زبان عربی است، اما به فارسی
ترجمه نشده‌اند، در حالی که باید به
فارسی ترجمه شوند تا هر کس که
مطالعه می‌کند، بداند کاشانی چه کسی
بوده و چه کارهایی انجام داده است.
در حال حاضر، کتاب «مفتاح الحساب»
غیاث‌الدین جمشید کاشانی به زبان
عربی، توسط دانشگاه حلب سوریه با
عنوان «تُرأثنا»، یعنی ارث و میراث ما،
به چاپ رسیده است. در واقع کتاب
مفتاح الحساب کاشانی را جزو میراث
عرب در نظر گرفته‌اند.

یکی از دلایلی که استاد «بنیاد
پرویز شهریار» را تأسیس کرد این
بود که این گونه کتاب‌ها و رساله‌ها که
میراث گذشتگان ما هستند، به نحو
مطلوبی ترجمه و در اختیار دانش‌آموزان
و محققان این مرز و بوم قرار گیرد.
ان شاء الله با این گونه تلاش‌ها شاهد
روزی باشیم که این بار امانت را به
سرمنزل مقصود رسانده باشیم و در
متون غربی‌ها دیگر نویسنده: «الکاشی،
ریاضی‌دان عرب»، بلکه بنویسند:
«کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی».

* غزل «بار امانت» از مجموعه اشعار امام
خمینی (قدس سره)



اشاعه گر دانش ریاضی



محمد هاشم رستمی - عضو هیئت تحریریه مجله ریاضی رشد برهان متوسطه از ابتدای شغل معلمی ام در سال ۱۳۴۱ تاکنون، از کتابهای ریاضی تألیف استاد شهریار استفاده کرده‌ام. برای اولین بار در نخستین جلسه‌های هیئت تحریریه مجله ریاضی برهان در سال‌های ۷۰-۱۳۶۹ که استاد هم برای شرکت در آن جلسات دعوت داشتند، با ایشان از نزدیک آشنا شدم. این فرصتی مغتنم برای من و دیگر همکاران بود که بتوانیم از رهنمودهای آموزش ریاضی و دانش ریاضی ایشان در ارتقای دانش ریاضی خود بهره‌مند شویم.

استاد شهریار هر چه از علم ریاضی می‌دانست، در اختیار دانش‌پژوهان، اعم از شاگردان و معلمان ریاضی قرار می‌داد. یادم هست که برای تألیف «دایره‌المعارف هندسه» مشغول جمع‌آوری منابع ریاضی بودم، در انتهای یکی از کتابهای تألیف استاد شهریار فهرستی از تألیفات ریاضی ایشان یافتیم. من که برای تألیف دایره‌المعارف هندسه، در جست‌وجوی کتاب‌هایی بودم که آنها را نداشتیم، در بررسی این فهرست چند کتاب هندسه دیدم که تألیف ایشان بود و من نداشتم. این مطلب را با استاد در میان گذاشتم. ایشان گفتند: من به کتابخانه‌ام مراجعه می‌کنم. اگر از هر کدام از این کتاب‌ها دو نسخه داشته باشم، یک جلد آن را به شما می‌دهم. ولی اگر تنها یک جلد داشتیم، آن را به شما می‌دهم تا کپی بگیرید و کتاب اصلی را به من برگردانید. چنین هم شد و از لطف ایشان سپاس‌گزاری کردم. ایشان همواره برای همکاران خود و دانش‌آموزان احترام فراوان قائل بودند و برای اشاعه دانش ریاضی از هیچ کوششی فروگذار نمی‌کردند. روحشان شاد باد.

نام نیکش از یاد نرود

معلم شدم نیز کتاب‌های بیشتری از او یافتیم که به کمک حرفه‌ام می‌آمد، و زمانی که با ایشان ملاقات داشتم، سرآغاز دیگری برابم بود.

استاد شهریار نخستین کتاب خود را در سال ۱۳۲۷ منتشر کرد. خودش می‌گفت: «حدود ۴۰۰ عنوان کتاب تألیف و ترجمه کرده است.» گنجینه‌ای گران‌بها برای علاقه‌مندان ریاضی و دانش‌آموزان که حاصل حدود ۷۰ سال فعالیت علمی است. برای من به عنوان معلم، بخش‌هایی از این گنجینه، دست‌مایه‌ای است تا شور و اشتیاق را به کلاس‌های درس ببرم؛ شور و اشتیاقی که در پیام‌های استاد شهریار به معلمان و دانش‌آموزان نهفته است. دو نکته مهم را می‌توان از این پیام‌ها دریافت:

۱. همه می‌توانند ریاضیات را درک کنند و از آن لذت ببرند؛
۲. باید برای همه فرصت برابر ایجاد کنیم تا ریاضی بیاموزند.

برای تحقق این دو، استاد شهریار بر اهمیت پرداختن به کاربردهای ریاضی و تاریخ ریاضیات تأکید داشت و از جنبه‌های سرگرمی و بازی ریاضی نیز غافل نمی‌ماند. به یقین می‌توان گفت تأثیر نگرش پرویز شهریار بر معلمان و دانش‌آموزان ماندنی است؛ تأثیر و نقشی که شاید غبار معاصر بودن با شهریار امکان دیدن آن را کم کرده باشد! اما بی‌شک با گذشت ایام نقش وی پررنگ و واضح خواهد شد. یاد و نام نیکش گرامی

دکتر مانی رضائی - مدیر داخلی مجله رشد آموزش ریاضی

نوشتن درباره مردی که با همه بزرگی و توانایی‌های خود، متواضع و فروتن بود، برایم دشوار است، و انتخاب نقطه‌ای برای آغاز این نوشتار، دشوارتر! پس، از آشنایی خودم با این بزرگ‌مرد می‌نویسم؛ کسی که باور داشت آموزش کاری مهم است و به آرامی اثر می‌کند.

با نام پرویز شهریار از نوجوانی آشنا شدم؛ زمانی که دانش‌آموز مدرسه‌ای بودم که او معلم آن بود. آن زمان برایم جالب بود که بسیاری از بزرگ‌ترهایی که دور و بر من بودند، او را می‌شناختند و آنها نیز با کتاب‌هایش بزرگ شده بودند. تا پیش از آنکه معلم بشوم، در دوره‌های متفاوت از کتاب‌هایش بهره‌ها بردم و انگار پایانی بر تعداد کتاب‌هایشان نبود. وقتی





به یاد پرویز شهریاری

دکتر یحیی تابش، استاد ریاضیات دانشگاه صنعتی شریف

پرویز شهریاری مجموعه‌ای از توانمندی‌های علمی و فرهنگی خود را در زمینه‌های متفاوت به منصه ظهور رسانده بود و به گونه‌ای از «فرد» به «نهاد» تبدیل شده بود. او به حرفه اصلی خود، دبیری آموزش و پرورش می‌بالید، ولی آنچه که او را به عنوان یک دبیر آموزش و پرورش متمایز و کم‌نظیر کرد، شخصیت «دانشور»^{*} او بود. دانشوران، عمیق، جامع و تأثیرگذارند. پرکاری و منظم بودن دیگر ویژگی آنان است. آنان هر چه را که می‌دانند، وسیع، پرمایه و با دقت و ظرافت فراگرفته‌اند و

به یک معنا انسان‌هایی فرهنگی‌اند. شاید این ویژگی‌ها صرفاً در میان مردان قدیم یافت می‌شد که **احمد بیرشک و پرویز شهریاری** نمودهایی قابل توجه از آنان در میان دبیران ریاضی زمان ما بودند. دغدغه اصلی آنان آموزش بود، برای پرورش استعدادها و توسعه تفکر خلاقانه بین دانش‌آموزان، متناسب با توانایی‌ها و استعداد آنان، که این مؤلفه‌ها مهم‌ترین عوامل در توسعه منابع انسانی محسوب می‌شوند. فقدان دانشوران همیشه اندوهبار و تلخ است، ولی از آن تلخ‌تر این واقعیه است که مشعل دانایی، که در دست آنان بود، دیگر نگه‌داری نیابد؛ خوشبختانه، علی‌رغم این نگرانی رشد فناوری و توسعه زیرساخت‌های ارتباطی، نسل جوان

را با فضای ذهنی جدیدی مواجه ساخته است. بر این اساس، از بین دبیران جوان نیز حتماً دانشورانی ظهور خواهند کرد که مشعل دانش را، که چندی در دست شهریاری بود، استوار و جاودانه نگه خواهند داشت و یاد پرویز شهریاری را گرمی می‌دارند.

* Scholar

پدر و معلم*

دکتر شهریار شهریاری، فرزند استاد پرویز شهریاری، استاد ریاضی دانشگاه در کشور آمریکا

استاد راهنمای من برای پایان‌نامه دکترای ریاضی، پروفیسور **مارتین آیزاکس** از «دانشگاه ویسکانسین» در آمریکا بود. او در اوایل آشنایی من از من درباره خانواده‌ام پرسید. ضمن توضیح در خصوص فعالیت‌های پدرم گفتم اکثر کسانی که در ایران تحصیل کرده‌اند و نیمه‌علاقه‌ای به ریاضیات داشته‌اند، پدر مرا می‌شناسند. او چیزی نگفت ولی معلوم بود که ادعای مرا کمی گزافه‌گویی دانسته است.

سال‌ها بعد که برای فرصت مطالعاتی به «انستیتوی تحقیقات ریاضی» در برکلی رفته بودم، آیزاکس هم آن‌جا بود. یکی از روزها که برای دیدار او به دفترش رفتم، شخص دیگری هم در دفتر او حضور داشت. آیزاکس آقای دکتر **اسدی** را به من معرفی کردند. دکتر اسدی بلافاصله به زبان فارسی رابطه مرا با پرویز شهریاری جويا شدند و بعد از پاسخ من، به آیزاکس گفت که پدر مرا می‌شناسد. آیزاکس جواب داد که این مطلب تازه‌ای نیست، چرا که همه ایرانیان پدر شهریار را می‌شناسند. او بعد به من گفت که تا آن زمان با هر ایرانی روبه‌رو شده، پدرم را می‌شناخته است!

وقتی دوره لیسانس ریاضی را در آمریکا می‌گذراندم،



استادی داشتم که نظریه عددها را تدریس می‌کرد. او به کارهای **سرپینسکی**^{**}، ریاضی‌دان لهستانی خیلی علاقه داشت و پژوهش‌های او را می‌پسندید. روزی سر کلاس به دانشجویان سفارش کرد، کتاب «نظریه عددها»^{ی سرپینسکی} را تهیه و مسئله‌های آن را حل کنند. او وقتی فهمید که من ترجمه فارسی این کتاب را در اختیار دارم، بسیار شگفت‌زده شد که چگونه ممکن است چنین کتابی به زبان فارسی ترجمه شده باشد. این کتاب را پدرم سال‌ها پیش از آن، ترجمه کرده بود که شامل پیش‌گفتاری مفصل و شرح کارهای سرپینسکی بود.

* برگرفته از یادداشت دکتر شهریار شهریاری برای کتاب «چشم‌نامه استاد پرویز شهریاری»، انتشارات فردوس، ۱۳۸۲.

** واتسلاو سرپینسکی، ریاضی‌دان معاصر لهستانی. کتاب برجسته او در نظریه اعداد را تحت عنوان «۲۵۰ مسئله حساب» استاد پرویز شهریاری در آبان‌ماه ۱۳۴۹ ترجمه کردند و «انتشارات خوارزمی» آن را منتشر ساخت.



خردگرایی در پر تو ریاضیات

استاد عبدالحسین مصحفی، سردبیر مجله ریاضی یکان (۱۳۴۲-۱۳۵۶) معلم پیشکسوت ریاضی، مترجم و مؤلف ده‌ها عنوان کتاب و مقاله

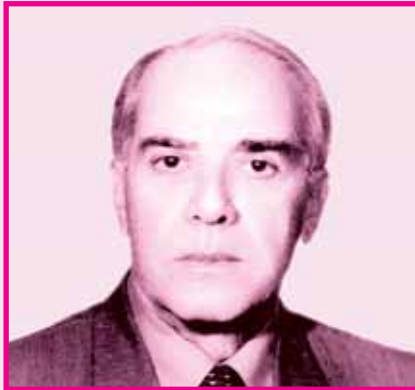


اشاره

استاد گرانقدر عبدالحسین مصحفی وضعیت جسمانی مساعدی ندارند و متأسفانه چندی است که در بستر بیماری به سر می‌برند. مطمئنم که اگر این استاد فرزانه وضعیت مناسب‌تری داشتند، حتماً مایل بودند که در این ویژه‌نامه مطلبی به یاد استاد شهریار بیاورند. اکنون به نیابت از ایشان، بخش‌هایی از مطلب ایشان در کتاب «جشن‌نامه استاد پرویز شهریار» را در این جا درج می‌کنیم.

شهریار ریاضیات ایران

ابراهیم دارابی، دبیر پیشکسوت ریاضی، عضو سابق هیئت تحریریه مجله رشد ریاضی و مؤلف کتاب‌های درسی ریاضی



استاد پرویز شهریار، شهریار ریاضیات ایران ما، تنها یک ریاضی‌دان، یک ادیب و یک مورخ نبود، آموزگاری بزرگ از آموزگاران زندگی بود که همچون ستاره‌ای همه عمر خلاق خود را در مدار خورشید مرادش چرخید و ذره ذره وجودش را «واژه» کرد و چون همه را فرو ریخت، تکثیر شد، کتاب شد، مجله شد و مقاله شد تا راه را از چاه، خیر را از شر، و زیبایی را از زشتی به ما بشناساند.

بر این اساس استاد از میان ما نرفته است. در آثارش تکثیر و ماندگار شده است. هر دانش‌آموز و دانشجویی، هر معلم و استادی، هر علاقه‌مند به علم و تاریخی، هر شیفته هنر و ادبیاتی که آثار استاد را خوانده است، و یا از این پی خواهد خواند، یک شهریار را در قلب و وجود خویش حس خواهد کرد...

از استاد بسیاری، بسیار آموخته‌اند، من نیز یکی از آنها هستم. در دوران تدریس در مدارس، هر شب که خود را برای تدریس روز بعد آماده می‌کردم، استاد با من بود. وقتی پای تخته می‌نوشتیم، با من بود. وقتی سرفراز از تدریس روز، کلاس را ترک می‌کردم، با من بود...

حالا هم که می‌نویسم، با من است: با سیمای انسانی دوست‌داشتنی احترام برانگیزشان بالای سرم ایستاده‌اند و با تبسم نوشته‌هایم را با نگاهشان سیر می‌کنند.

سال‌ها پیش از آنکه با خود آقای پرویز شهریار آشنا شوم، با نامش آشنا بودم و آن‌گاه که با خواندن یکی از مصاحبه‌هایش، سال تولدش را دانستم و دریافتم دوران کودکی را در محله دولت‌خانه کرمان گذرانده است، پی بردم که در سال‌هایی از دوران نواآموزی در دبستان، روزانه یکی دو بار از کنار هم می‌گذشته‌ایم...

نخستین دیدارم با آقای پرویز شهریار در آذرماه ۱۳۴۲ بود. امتیاز انتشار «مجله ریاضی یکان» را گرفته بودم و به دنبال فراهم آوردن مقاله برای آن، به سراغ فرهنگ دوستان می‌رفتم. شهریار آن موقع مجله سخن علمی را درمی‌آورد. گمان نداشتم با آن همه گرفتاری، همکاری با مجله یکان را هم بپذیرد. اما او با گرمی این را پذیرفت و تشویقم کرد، در کاری که در پیش دارم از پای ننشینم...

پرویز شهریار در سطح‌ها و در محیط‌های متفاوت آموزشی درس داده است و مسلماً خیلی از شاگردانش به مقام‌های بالای علمی یا اجتماعی دست یافته‌اند، اما هیچ‌گاه از او نشنیده‌ام که موردی را نام ببرد و از بابت آن به خود ببالد. خوب آموختن برای او هدف بود و رضایتش در رسیدن به این هدف برآورده می‌شد. به گفته خودش: «...معلمان خوب عاشقانی هستند که روح و جان و زندگی خود را فدای عشق خود می‌کنند...» و خود او به گواهی بسیاری از شاگردانش، یک معلم خوب بوده است...

پرویز شهریار شخصیتی خود ساخته و انسانی تلاشگر است. تلاش او در دو راه صرف شده و می‌شود: یادگرفتن و یاددادن. او زیاد می‌خواند و زیاد می‌نویسد. اگر آنچه را می‌نویسد، همه‌اش ریاضیات است، اما آنچه را می‌خواند یا ریاضیات است و یا به گفته خودش: «ریاضی‌دان نه تنها باید با هنر و ادبیات آشنا باشد، بلکه باید به این آفریده‌های زیبای روح انسانی عشق بورزد... و نه تنها هنر و ادبیات، ریاضی‌دان باید به تاریخ، فلسفه و علوم اجتماعی علاقه‌مند باشد. موسیقی را دوست داشته باشد، و از شعر خوب هم لذت ببرد... کوتاه سخن، انسان باشد. بدون این، یک ریاضی‌دان حتی ریاضی‌دان هم نیست.»



قرار گذاشته شد و من و یکی دو نفر دیگر از اعضای تحریریه، به منزل ایشان رفتیم. استقبال گرم او از ما - که گویی سال‌هاست ما را می‌شناسد - و شوقش برای شنیدن حرف‌های ما و دیدن شماره‌های ماهانه، مرا متعجب کرد. پیرمردی که این همه شهرت و تجربه داشت، چگونه با ما چند جوان کم‌تجربه به این مهربانی و راحتی ارتباط گرفت و تقاضای ما را پذیرفت؟ البته به هر حال ما به اعتبار دکتر تابش به این ملاقات رفتیم، ولی برخورد شهریاری با ما کاملاً مستقل از آن می‌نمود.

بعدها نیز که مدیر داخلی رشد آموزش ریاضی شدم و برای ویژه‌نامه‌ای برای خود او، باز هم با او ملاقات کردم، او هم چنان ماهانه را به‌خاطر داشت و پی‌گیر آن شد.

این خاطره را گفتم تا به خوانندگان برهان یادآور شوم که به راستی این مرد فروتن و صبور، از هیچ کمکی به جامعه آموزش ریاضی ایران دریغ نکرده است. شاید بد نباشد نوشتارم را با آخرین بند از همان مطلبی که شهریاری برای شماره نهم ماهنامه ریاضیات در اسفند ۱۳۸۰ نوشت، به اتمام برسانم. یادش گرامی و راهش مستدام باد:

«من درد دل‌های زیادی در زمینه آموزش ریاضی دارم که جای آن در این مختصر نیست و معتقدم تا زمانی که این کنکور را بر ندارند و دست از تست نکشند، کار آموزش از جمله آموزش ریاضی به جایی نمی‌رسد. این کنکور به شکلی که وجود دارد، از یک‌طرف سطح آگاهی جوانان را پایین نگه می‌دارد و... کنکور سال‌هاست که دانش مملکت را ویران کرده است و باید فکری عاجل برای آن کرد.»



شهریاری؛ همراه همیشگی جوانان
سپیده چمن‌آرا - سردبیر مجله رشد برهان راهنمایی تحصیلی

از نویسندگان همکار با مجله، چند سطر بنویسند و آنها را به جای سرمقاله قرار دهیم. دکتر تابش پیشنهاد داد که از پرویز شهریاری هم درخواست کنیم که برای این ویژه‌نامه، مطلبی برایمان بنویسد. همه از این پیشنهاد استقبال کردیم. من تا آن زمان نام پرویز شهریاری را بسیار شنیده بودم و کتاب‌های زیادی به قلم یا ترجمه او داشتم، ولی هرگز او را ندیده بودم. می‌دانستم با ترجمه و تألیف کتاب‌های بسیار درباره ریاضی و سرگرمی‌های ریاضی، خدمت بزرگی به رواج این علم نزد نوجوانان و جوانان کرده است. تصور اینکه ملاقاتی با شهریاری داشته باشم و ضمن اهدای شماره‌های پیشین ماهانه، از او حضوراً مطلبی برای مجله درخواست کنم، برایم غیرممکن بود. یعنی من مرد بزرگی را که این همه کتاب تألیف با ترجمه کرده است، از نزدیک می‌بینم و با او مانند یک همکار صحبت خواهیم کرد؟

پرویز شهریاری، معلم این نسل و آن نسل نبود، او معلم همه نسل‌ها بوده و هست. او در هر سنی، با سعه صدر و فروتنی کم‌نظیری، با جوانان و نوجوانانی که قصد انجام کاری در حیطه توسعه دانش ریاضی داشتند، برخورد می‌کرد. بگذارید برایتان خاطره‌ای بگویم:

زمستان سال ۱۳۸۰ بود. من با گروهی از دانشجویان ریاضی و به مدیر مسئولی دکتر یحیی تابش، برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی، نشریه‌ای به نام «ماهنامه ریاضیات» منتشر می‌کردیم؛ همان که امروز با عنوان «نشریه ریاضیات» توسط «انتشارات فاطمی» به چاپ می‌رسد.

قصد داشتیم برای نوروز ۱۳۸۱ ویژه‌نامه‌ای چاپ کنیم و برای اینکه عید نوروز را به خوانندگان جوانمان تبریک بگوییم، پس از بحث بر سر پیشنهادها، متفاوت، قرار شد هر یک از اعضای تحریریه و تعدادی



شهریاری و ظهور مجله برهان ریاضی

سید محمد رضا هاشمی موسوی - عضو هیئت تحریریه مجله
رشد برهان متوسطه

اولین بار که با نام استاد شهریاری آشنا شدم، در سال سوم رشته ریاضی - فیزیک (نظام قدیم) و در درس حساب و جبر آن زمان بود. کتاب درسی حساب و جبر ایشان بسیار متنوع و جذاب بود، به طوری که یکی از بهترین و دوست داشتنی ترین کتاب های مورد علاقه من بود. علاوه بر این، چند کتاب ایشان از جمله روش های جبر (جلد اول)، روش های مثلثات، اندیشه ریاضی، در پی فیثاغورس و... به دستم رسید. در آن زمان همیشه آرزو داشتم ایشان را ببینم که با «مجله آشتی با ریاضیات» و بعد از آن با «آشنایی با ریاضیات» (مجله آشتی با ریاضیات به آشنایی با ریاضیات تغییر نام پیدا کرد) روبه رو شدم. این مجلات چنان جذاب و تأثیر گذار بودند که مرا به نوشتن مقاله تشویق کردند. پس مصمم شدم که به دفتر مجله بروم و استاد را ملاقات کنم. بالاخره انتظار به سر رسید و در دفتر مجله واقع در خیابان جمهوری ایشان را مقالات کردم. پس از ارائه مقاله و استقبال خوب و صمیمی ایشان، به نوشتن مقالات بعدی تشویق شدم. در آن زمان که دانش آموز بودم، بیشتر پنجشنبه ها به میدان انقلاب می رفتم و در کتاب فروشی ها به دنبال کتاب جدید ریاضی ایشان می گشتم. از آنجا که پول هفتگی من کفاف خرید کتاب را نمی داد، مجبور بودم که بیشتر مسافت ها را پیاده بروم تا پول خود را برای خرید کتاب های استاد ذخیره کنم. به دنبال مقالاتی که این جانب پی در پی به دفتر مجله آشنایی با ریاضیات ارائه می کردم، ارتباط من با استاد تنگاتنگ شد تا زمانی که مجله ریاضی برهان ظهور کرد. آن زمان در دبیرستان های البرز و کمال تدریس می کردم و بیشتر وقتم صرف خواندن کتاب های ایشان، تحقیق و پژوهش، نگارش مقاله برای مجلات آشنایی با ریاضیات، رشد آموزش ریاضی و مجله های ریاضی برهان، و تألیف کتاب های ریاضی (سری کتاب های کوچک ریاضی) می شد. این جانب که از اعضای هیئت تحریریه مجله ریاضی برهان بودم، دعوت نامه ای برای همکاری از طرف مجله برای استاد شهریاری بردم.

ایشان از اولین شماره، مجله ریاضی برهان را یاری کردند. و با ارائه مقالات بسیار ارزنده، همیشه مشوق دانش آموزان برای یادگیری ریاضیات بودند. در مدت ۳۰ سالی که در محضر استاد بودم، بسیار چیزها یاد گرفتم که تا آخرین لحظات زندگی ام یاد شیرین آن لحظات همیشه جاودان است. همیشه یادش گرامی.





کنون کز برم رفته آن غمگسار دگر با که گویم غم روزگار؟ *

غلامرضا یاسی پور - عضو هیئت تحریریه مجله رشد برهان متوسطه



آن گونه که ترک زن و فرزند فرنگ مانده را کرده بودند و در دوران پیری و بیماری به تنهایی، اما در ایران، روزگار می گذرانند. روزی در زنگ تفریح جلسه تحریریه برهان تعریف کردند:

«یکی از روزها در ایامی که در کانادا بودم، خانمی زنگ زد که اگر ممکن است فردا به اداره فلان برای شنیدن پیشنهادی بیایید. من به ایشان گفتم چون خیابان های شهر را نمی شناسم، خودتان بیایید. قرار شد فردا مراجعه کنند. فردا خانم و آقای آمدند و گفتند ما از وزارت فرهنگ کانادا آمده ایم. به شما ویزای اقامت می دهیم و همه امکانات را برایتان آماده می سازیم. تنها از شما انتظار داریم که در دانشکده های ما تاریخ ریاضیات تدریس کنید. در مقدمه کتاب هایی هم که تألیف می کنید، بنویسید این کتاب ها را در کانادا نوشته اید.»

استاد می گویند: «به ایشان گفتم به اقامت نیاز ندارم و اگر کاری کنم، برای کشورم و در کشورم انجام می دهم. این مدت کوتاه را نیز برای دیدن فرزندانم به کانادا آمده ام.» باری از این خاطرات، هم ما و هم دیگران از استاد زیاد داریم و بسیار خواننده و شنیده ایم. براینکه تمام این خاطرات در ذهن من که آشنایی ۵۰ ساله ای با استاد داشتم، این است که استاد مردی خوش بخت بود. سعید زیست و سعید از دنیا رفت. از همه مهم تر، خطبه نامدار خود را به قول حسین مسرور در منبر روزگار خواند و آن گاه از آن فرود آمد.

به سر برد آن خطبه نامدار
فرود آمد از منبر روزگار

* استاد حسین مسرور

این عذر جلوگیری کرد که نام شهریار در دفتر اسامی وارد شوندگان نیست. استاد حکایت کردند که به او گفتم ممکن است اسامی دفتر را من هم ملاحظه کنم که قبول کرد. آن وقت استاد نام پرویز شهریار را که در دفتر بود به سرباز نشان می دهند و می گویند: پس این چیست؟ و سرباز ساده دل پاسخ می دهد: شما گفتید شهریار، در حالی که این پرویز شهریار است.

رسم معمول این بود که برای مدعوین برنامه وسیله آمد و رفت در نظر بگیرند. اما استاد هر بار خودشان می آمدند و خودشان می رفتند و ما هرچه اصرار می کردیم، قبول نمی کردند.

استاد در رفتار مؤدب بودند و با فعلشان به ما شاگردان درس ادب می آموختند. من در مدت ۵۰ سالی که ایشان را می شناختم، و از آن زمان ها که شاگرد ایشان بودم و بعدها که همکار ایشان شدم، هرگز اخمی بر چهره باصفایشان ندیدم. هیچ گاه هم بانگی بلند از ایشان نشنیدم. به جرئت می توانم ادعا کنم که تمام شاگردان استاد عاشقانه دوستشان داشتند و از ایشان علاوه بر ریاضی، در رفتار و کردار نیز درس می گرفتند. استاد چو آن بید معلق بهار، دست ضیمران های ضعیف را می گرفتند و نه تنها اندیشه ریاضی را می آموختند که روش انسان بودن را نشان می دادند. ریاضیات استاد ریاضیات پای در عمل بود و دست در کار. همچون کانت که فلسفه را آموختن اندیشیدن می دانست نه آموزش اندیشه ها، کار ریاضیات را آموزش انسان بودن و در خدمت انسان ها قرار گرفتن می دانستند. ریاضیات بدون عمل را چون سعدی که علم بی عمل را زنبور بی عسل می گوید، بیهوده می انگاشتند و در این راه به روش ریاضی دانان گذشته ایرانی می رفتند که ریاضیاتشان عملی و کاربردی بود.

به ایران و ایرانیان عشق می ورزیدند،

استاد شهریار از میانمان رفت و با رفتنش جمع برهانیون را که متجاوز از ۲۰ سال در هیئت تحریریه «مجله ریاضی برهان»، در حضور ایشان جمع می شدند، پربشان کرد.

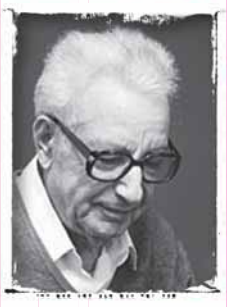
روزی که با جناب امیری، سردبیر مجله، و استاد رستمی رأی زدیم و که از تجربه استاد در تهیه مطالب مجله کمک بگیریم، روزی فراموش نشدنی در تاریخچه این مجله است. استاد همان لحظه قول همکاری داد و در مدت ۲۰ سالی که از انتشار این مجله گذشت، هیچ گاه ترکمان نکرد. همواره با رویی گشاده ما نویسفران این راه دشوار را می پذیرفت و هدایمان می کرد.

مردی از تبار جوانمردان و از قبیله جهان گردان، هیچ گاه در اجابت تقاضایی که اوقات شریفشان را نیز بسیار می گرفت، «نه» بر لب نداشت. در هر دشواری، مرد «آری» بود.

یاد دارم هر زمان برای برنامه «در جهان ریاضی» که به مدت یک سال از «رادیو فرهنگ» پخش می شد، یا برنامه «آراء» که میزگردی دو نفره بود، از ایشان دعوت می کردیم نیز سر ساعت حاضر بودند. با این که گاهی در ورود به صدا و سیما دچار اشکال می شدند، نه گله می کردند و نه شکایت می آوردند.

خودشان تعریف می کردند روزی که برای شرکت در برنامه به صدا و سیما آمده بودند، سرباز جلوی دروازه از ورود ایشان به





فارابی معلم ثانی

کلیدواژه‌ها: فارابی، فلسفه نوافلاطونی، سیف‌الدوله حمدانی، مدینه فاضله، افلاطون، آرمانشهر، ارسطو، بیکن، ابن رشد، ابوالوفای بوزجانی، مقدمات، اقلیدس

زندگی، فعالیت‌ها و دیدگاه‌ها

از زندگی خصوصی فارابی، چندان نمی‌دانیم، جز اینکه: در «فاراب» ماوراءالنهر (دقیق‌تر، در قریه، «وسیج» فاراب در کنار رود سیحون و واقع در جنوب جمهوری قزاقستان)، در سال ۲۵۹ یا ۲۶۰ هجری قمری، در خانواده‌ای یکی از سرداران سپاه سامانی به دنیا آمد، در همانجا درس خواند و به احتمالی، نزد یوحنا، فرزند حیلان مسیحی - که در مورو زندگی می‌کرد و با فلسفه نوافلاطونی فیلسوفان اسکندرانی آشنا بود - با فلسفه نوافلاطونی، آشنا شد. سپس، برای تکمیل تحصیل خود به بغداد رفت و در آنجا ضمن فراگیری زبان عربی، نزد همان استاد قبلی خود یوحنا (که او هم، از مورو به بغداد آمده بود) و استاد مسیحی دیگری به نام مستی، فرزند یونس (مترجم برخی کتاب‌های یونانی به عربی)، درس خود را ادامه داد. همچنین به حلب (در سوریه) و مصر سفر کرد. فارابی بیشتر کتاب‌های خود را در بغداد نوشت و سرانجام در سال ۳۳۹ هجری قمری، در دمشق درگذشت.

سفر او به حلب، به دعوت سیف‌الدوله حمدانی (۳۰۱-۳۵۶ هجری قمری) بود. سیف‌الدوله برای نخستین بار حکومتی مستقل در حلب (که شامل خود حلب و بسیاری از سرزمین‌های دور و بر آن می‌شد) تشکیل داده بود. او حاکمی مستبد و خون‌ریز، ولی شجاع بود. در عین حال، به دانش و ادبیات علاقه داشت و می‌کوشید دانشمندان را در دربار خود گردآورد. ابوالفرج اصفهانی، کتاب «غانی» خود را به او پیشکش کرده است.

علی، فرزند حمدان و معروف به ابوالحسن، وقتی در ۳۳۰ هجری قمری، ابن‌رائق، امیرالامرای سابق خلافت بغداد را، با همکاری برادرش کشت، از طرف متقی، خلیفه عباسی، لقب «سیف‌الدوله» گرفت. دوران زندگی فارابی، دوران ضعف و آغاز فروپاشی کامل خلافت عباسی بود. سراسر سرزمین‌های خلافت بغداد را، کشمکش، جنگ و نافرمانی فراگرفته بود. هر امیری در هر ناحیه‌ای خروج می‌کرد و دعوی استقلال داشت. حکومت بغداد که از درون پوسیده بود، قادر به حفظ خود

و نگهداری سرزمین‌های قلمرو خود نبود. یکسره در جنگ و خون‌ریزی با رقیبان و مدعیان به سر می‌برد. بغداد و سرزمین‌های اطراف، دائماً به دست سپاهیان خلیفه و یا مدعیان او غارت می‌شدند و...

چه بسا، همین ناامنی‌ها و بی‌عدالتی‌ها که زمینه‌ای ویرانگر برای هرگونه کار علمی است، فارابی را قانع کرده بود که با پذیرش دعوت سیف‌الدوله، بغداد را ترک کند و به دربار او برود.

آن‌چه مسلم است، فارابی هرگز به خدمت امیر یا خلیفه‌ای درنیامد و با آن‌که در «سیاست» صاحب‌نظر بود، خود را از هرگونه کار دولتی و دیوانی کنار نگه داشت. به دلیل اعتقادهای عرفانی خود، بسیار ساده زندگی می‌کرد و مثل صوفی‌ها لباس می‌پوشید. اگر ابن‌سینا، اصطلاح‌های عرفانی و صوفیگری را، به عنوان تئمه و ضمیمه‌ای بر فلسفه خود می‌آورد، فارابی از این اصطلاح‌ها در متن کتاب‌های خود و به عنوان اصطلاح‌های فلسفی استفاده می‌کند.

فارابی دیدگاه‌های سیاسی و فلسفی



فارابی

خود فرمان می‌برند و به زیردستان خود فرمان می‌دهند. آنها با واسطه رئیس خود، مطیع و فرمان‌بر رئیس جامعه‌اند. تنها مردم عادی هستند که هیچ خدمت‌گزاری ندارند و فقط باید کار کنند و فرمان ببرند. البته در آرمانشهر فارابی، برخی دیدگاه‌های مثبت نیز وجود دارند، او برای رئیس شرط می‌گذارد که باید فیلسوفی، آگاه، عدالت‌خواه، هوادار مظلومان، صلح‌طلب و بری از فساد، دزدی و مال‌اندوزی باشد. فارابی تعاون، هم‌فکری و کار گروهی را شرط سلامت جامعه می‌داند و جامعه‌ای را که در پی جنگ و توسعه‌طلبی است و می‌خواهد سنت‌ها و اعتقادهای خود را بر مردم سرزمین‌های دیگر تحمیل کند، در مقابل آرمانشهر خود قرار می‌دهد و آن را نفی می‌کند و...

با وجود این، فارابی نمی‌تواند چهره دل‌پذیری از شهر آرمانی خود نشان دهد که در آن، مردمی آزاد با امکان‌های برابر و امنیت فکری و مالی زندگی می‌کنند و کسی قدرت زورگویی و ستم و یا تحمیل اعتقاد خود را به دیگران ندارد. فارابی، تحت تأثیر شرایط زمان و تحت تأثیر نوشته‌های افلاطون، حکومت از بالا به پایین را توصیه می‌کند و به امکان‌های بالقوه‌ای که می‌تواند یک جامعه آزاد و «برابر حقوق» را پیش ببرد، توجه نمی‌کند. بنابراین، آثارش نمی‌توانند برای زمان ما، به جز ارزش یک اثر تاریخی، ارزش دیگری داشته باشند.

فارابی که به اعتقاد جرج سارتن (مورخ بزرگ دانش) بزرگ‌ترین فیلسوف عصر بود، از نخستین مبلغان و مفسران فلسفه ارسطویی در شرق به‌شمار می‌رود و به همین مناسبت، او را «معلم ثانی» نامیدند (معلم اول خود ارسطوست).

در واقع در سرزمین‌های خاور، به هر دو فیلسوف یونانی، افلاطون و ارسطو، اعتقاد داشتند و به هر دوی آنها احترام می‌گذاشتند. در حالی که در واقع بسیاری

زمین). سپس، هر جامعه را به یک انسان تشبیه می‌کند: در انسان، قلب رئیس و فرمانده تمامی بدن است. بعد از قلب اندام‌هایی وجود دارند که از قلب فرمان می‌برند و به نوبه خود بر اندام‌های دیگری فرمان می‌رانند. این سلسله مراتب خود را به اندام‌هایی می‌رساند که تنها فرمان می‌برند و خود بر جایی فرمان نمی‌رانند. بنابراین (فارابی نتیجه می‌گیرد)، در هر جامعه و هم در جامعه بزرگ انسانی، باید همچون «سلسله مراتب» اندام‌های آدمی، حکومتی هرمی شکل وجود داشته باشد که در رأس آن فرمانده و رئیس جامعه، و در سطح قاعده هرم، مردم عادی فرمان‌بر قرار دارند. افراد بینایی که در سلسله مراتب بین رأس و قاعده واقع‌اند، از رئیس

خود را، در رساله‌های متعددی شرح داده است که از آن جمله می‌توان از «فصوص‌الحکم» «فصول‌المدنی»، «سیاست‌المدینه» و «آراء اهل‌المدینه الفاضله» نام برد. به‌خصوص «مدینه فاضله» یا «آرمانشهر» فارابی، می‌تواند معرف نظریه‌های سیاسی و گاه فلسفی او باشد. شک نیست که فارابی، آرمانشهر خود را به تقلید از افلاطون و تحت تأثیر او - که خود تحت تأثیر شیوه تفکر ایرانی بود - نوشته است.

او جامعه‌های انسانی را به سه گروه تقسیم می‌کند: جامعه‌های کوچک (خانواده، کوی، روستا و شهر)، جامعه‌های میانه (یک کشور یا قلمروی حکومتی) و جامعه بزرگ (شامل تمامی مردم روی

از دیدگاه‌های فلسفی این دو، متناقض یکدیگرند و کمتر اشتراکی با هم دارند. فارابی بسیار کوشیده است که نظرهای افلاطون و ارسطو را به هم نزدیک کند و در این مورد، تحت تأثیر فیلسوفان و مفسران نوافلاطونی اسکندریه بود که نوشته‌های ارسطو و افلاطون، و به خصوص افلاطون را، به میل خود - و نه به صورتی که در واقع وجود داشت - تفسیر می‌کردند. به هر حال، فارابی را باید پایه‌گذار فلسفه ارسطویی در شرق دانست که بر دیدگاه‌های بسیاری از فیلسوفان و اندیشمندان بعد از خود تأثیری جدی داشت.

فارابی فلسفه و ایمان را مغایر هم نمی‌داند و معتقد است که هر دو به یک هدف خدمت می‌کنند. ولی فلسفه را برتر می‌داند، چرا که بر برهان عقلی و استدلال منطقی تکیه دارد. شاید بتوان گفت که فلسفه فارابی، برای پند از فلسفه افلاطون و ارسطو (و به خصوص ارسطو) از یک طرف، و تصوف و عرفان از طرف دیگر است.

فارابی را که ۵۰۰ سال پیش از **گالیله** و **بیکن** زندگی می‌کرد، می‌توان پایه‌گذار روش «مشاهده‌ای - تجربی» دانست که البته بیشتر در بحث‌های روش‌شناختی و آموزشی او مطرح می‌شود (بند بعدی را ببینید). او همچنین در بحث‌های فلسفی خود، روش قیاسی و استدلالی را توصیه می‌کند و از این جهت، در مقابل **زکریای رازی** قرار می‌گیرد که بر استقراء و تمثیل تکیه می‌کرد.

اگرچه فارابی - بعد از **کندی** و در تکمیل کارهای او - در جهت آشتی علم و ایمان تلاش کرده است و با وجود آن که بیشتر فیلسوفان بعد از او، نظر او را پذیرفته‌اند و زیر تأثیر اندیشه‌های او بوده‌اند، اما مورد انتقاد کسانی هم چون **ابن رشد** (در «تهافت التهافت») و **ابن طفیل** قرار گرفته است. با این همه فارابی را باید بزرگ‌ترین و با نفوذترین

فیلسوف زمان خود دانست.

فارابی به سادگی و تفسیر متن‌های دشوار معروف است. مشهور است که ابن‌سینا با آن که بارها «متافیزیک» ارسطو را خوانده بود، تنها وقتی توانست مضمون اصلی کتاب را بفهمد که با شرح فارابی درباره آن آشنا شد. هم‌چنین، به احتمال زیاد **بیرونی** کتاب «التفهیم» خود را تحت تأثیر سادگی فارابی، به زبانی ساده و قابل فهم برای همگان تنظیم کرده است.

دیدگاه‌های آموزشی، روش‌شناختی و علمی

کارهای فارابی در زمینه ریاضیات جالب و فراوان است. او به‌طور جدی درباره موضوع‌های مهم روش‌شناسی ریاضیات کار کرد، نمونه‌های عالی از کاربرد روش‌ها و نظریه‌های ریاضی را در حل مسئله‌های گوناگون دانش‌های طبیعی و صنعت (اخترشناسی، نظریه موسیقی، نور، معماری و...) ارائه داد، و بررسی‌های کاملاً تازه‌ای را در ریاضیات نظری دنبال کرد. فارابی به هر سه جنبه ریاضیات (روش‌شناسی و آموزش، کاربرد علمی، و جنبه نظری) که از دیدگاه تاریخی، همیشه در پیوند با هم پیش رفته‌اند، توجه داشت.

جالب‌ترین جنبه‌ها در آثار فارابی از نظر تاریخ ریاضیات نظری، بررسی‌های او در مثلثات و هندسه است. فارابی در کتاب «شرح المجسطی» (که در آن به شرح و تفسیر کتاب بزرگ بطلمیوس پرداخته است) «تائزانت» و «کتائزانت» را در دایره مثلثاتی وارد ساخت و قضیه سینوس‌ها و تائزانت‌ها را برای مثلث قائم‌الزاویه کروی ثابت کرد. او در این زمینه از نخستین پیشروان است. فارابی در کتابی که درباره هندسه نوشته است («کتاب

الحیل الروحانیة و الاسرار الطبیعیة فی دقایق الاشکال الهندسة»، کتابی که به احتمال زیاد الهام‌بخش ابوالوفای بوزجانی در تنظیم کتاب معروف خود، «کتاب فی مایحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسة» بوده است. این کتاب به عمل‌های هندسی لازم برای صنعت کاران می‌پردازد، برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات، به صورتی منظم، مسئله‌های مربوط به ساختمان‌های هندسی را مطرح می‌کند. از میان مسئله‌های مزبور، به ویژه مسئله‌های رسم به کمک پرگار ثابت (پرکاری که شعاع آن تغییر نمی‌کند)، رسم سهمی، رسم چندضلعی‌های منظم و هم‌چنین ترسیم‌های روی کره، جالب هستند.

فارابی در نوشته‌های خود، به بنیان‌های ریاضیات و به روش طرح مفهوم‌های اصلی و پایه‌های ریاضیات، اهمیت زیادی می‌دهد. وی از نخستین کسانی است که اثر معروف **اقلیدس**، یعنی «مقدمات» را مورد بررسی انتقادی قرار دادند. او در کتاب «شرح المستغلق من مصادرات المقالة الاولى و الخامسة من اقلیدس» به بحث درباره دو فصل اول و پنجم از کتاب مقدمات اقلیدس پرداخته است: فصل اول کتاب اقلیدس ۴۸ گزاره دارد درباره مثلث‌ها، خط‌های راست عمود برهم و موازی با هم، متوازی‌الاضلاع، مساحت شکل‌ها، و قضیه فیثاغورث و عکس آن. فصل پنجم مقدمات نیز که یکی از اساسی‌ترین فصل‌های کتاب است، به «نظریه نسبت‌ها» اختصاص دارد.

فارابی در دو اثر مشهور خود، «احصاء العلوم» و «مراتب العلوم»، دانش‌ها را برحسب جنبه‌های آموزشی آنها تقسیم‌بندی می‌کند و ریاضیات را شامل هفت شاخه می‌داند: حساب، هندسه، نور، اخترشناسی، موسیقی، مکانیک و سرانجام، علم استادی و مهارت در کارها. می‌بینیم که فارابی، وقتی از ریاضیات





صحبت می‌کند، به درستی دو جنبه نظری و کاربردی آن را با هم و در پیوند با یکدیگر در نظر می‌گیرد. او در دوره‌ای از تاریخ ریاضیات قرار دارد که ضمن بستگی کامل نظریه و کاربرد با یکدیگر، ریاضیات سمت‌گیری کاربردی داشته است.

اقلیدس در مقدمات از «روش ترکیبی» استفاده می‌کند و از مفهوم‌های ساده‌تر، خود را به تعریف مفهوم‌های پیچیده‌تر می‌رساند. فارابی از این روش اقلیدس، که به روش ترکیبی بیش از اندازه اهمیت می‌دهد، انتقاد می‌کند و برای رسیدن به نتیجه مطلوب، روش تجزیه را هم توصیه می‌کند. از زبان خود فارابی بشنویم: «... پایه‌های هندسه و حساب، با دو روش آموخته می‌شوند: روش تجزیه و روش ترکیب. ریاضی‌دانان قدیم در نوشته‌های خود این دو روش را توأم می‌کردند، ولی اقلیدس کتاب خود را تنها با روش ترکیبی نوشت...»

فارابی در تألیف کتاب عظیم خود «الموسیقی الکبیر» (که در دو جلد تنظیم شده بود و دریغ که تنها جلد اول آن به ما رسیده است)، توانست با موفقیت دو روش مذکور را با هم به کار گیرد. این موضوع را می‌توان از جمله‌های زیر که از مقدمه این کتاب آورده‌ایم، به خوبی فهمید: «... تا اینجا از تجزیه استفاده کرده‌ایم. برای اینکه هنر موسیقی را بیاموزیم، ترکیب را هم به کار می‌بریم. تجزیه به این دلیل برای ما لازم است که عناصرها را، به ردیف شناخت شده، منظم کنیم؛ یعنی به همان ردیفی که این عناصرها مورد شناسایی ما قرار گرفته‌اند. برعکس، ترکیب، این عناصرها را به همان ردیفی که در واقع وجود دارند، تنظیم می‌کند...»

فارابی، طرح مفهوم‌های بنیانی هندسه و اصل‌های هندسی را در همان کتاب «بررسی دشواری‌های مقاله اول و مقاله پنجم اقلیدس» ارائه داده است. در

این‌جا، او با اندیشه فلسفی عمیق درباره سرچشمه به وجود آمدن مفهوم‌های بنیانی هندسه، از راه انتزاع تدریجی و گام‌به‌گام آنها از دنیای واقع، گفت‌وگو می‌کند. مثلاً با اشاره به تعریف‌هایی که از اقلیدس در فصل اول مقدمات آورده است، مسیر جداشدن مفهوم‌ها را از واقعیت عینی، تجزیه و تحلیل می‌کند.

به این منظور او دو حالت را بررسی می‌کند: نخست اینکه آنچه را به احساس مستقیم نزدیک‌تر است، مقدم بدانیم. دوم اینکه آنچه را به عقل نزدیک‌تر است، در جای اول قرار دهیم. باز هم از زبان خود او بشنویم: «... جسم از همه به احساس نزدیک‌تر است، سپس سطح، بعد خط و سرانجام دورتر از همه اینها، نقطه. ولی به عقل، چیزی نزدیک‌تر است که از بخش‌های کمتری نسبت به دیگر چیزهای مشخص، تشکیل شده باشد؛ هر چیزی که ساده‌تر باشد، به عقل نزدیک‌تر است. و به این ترتیب، به آنجا می‌رسیم که درباره چیزی بیندیشیم که برای وجود آن هیچ جزئی دخالت نداشته باشد. بنابراین، از لحاظ عقلی، در ردیفی که به‌دست می‌آید، نقطه در جای نخست قرار گرفته است، سپس خط، بعد سطح و در جای آخر جسم.

با وجود این، وقتی که با یک شاگرد سروکار داریم، از آنجا که در سال‌های نخست یادگیری، بیشتر به جانبی که محسوس باشد، گرایش دارد، ما ردیفی را انتخاب می‌کنیم که متناظر با احساس است. ولی در تألیف یک اثر علمی، از ردیفی که عقلانی‌تر است، استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، آموزش از جسم محسوس و قابل لمس آغاز می‌شود. سپس این جسم، از همه آنچه که آن را محسوس می‌کند، جدا و منتزع می‌شود. بعد به سطح و خط و سرآخر، به نقطه پرداخته می‌شود. به این ترتیب، بهتر این است کار خود را از

محسوس و در مسیر تجزیه آغاز کنیم تا به نقطه برسیم و سپس دوباره به ردیفی بپردازیم که متناظر با عقل است؛ یعنی به ترکیب...»

می‌بینیم که فارابی در بررسی انتقادی خود از مقدمات اقلیدس، تأکید می‌کند که ضمن طرح مفهوم‌های بنیانی هندسه، باید فلسفه پیدایش آنها را در مسیر جداشدنشان از جسم فیزیکی و دنیای واقع، در نظر بگیریم. اقلیدس در مقدمات از تعریف «انتزاعی‌ترین» مفهوم‌ها آغاز می‌کند و سپس به تدریج به تعریف‌هایی می‌پردازد که در درجه کمتری از انتزاع قرار دارند. فارابی با تجزیه و تحلیل انتقادی روش اقلیدس، طرح محسوس و مادی سرچشمه‌های پیدایش مفهوم‌های ریاضی را ارائه می‌دهد. باید به این توصیه فارابی در مورد رعایت عینی بودن نظام آموزش در نخستین گام‌ها توجه کرد، زیرا دانش‌آموز در نخستین سال‌های آموزش «بیشتر به سمتی کشش دارد که محسوس است». **ابوریحان بیرونی**، زیر تأثیر مستقیم نوشته‌های فارابی، در کتاب «التفهیم» خود برخلاف اقلیدس مفهوم‌های اساسی هندسه را به ترتیب انتزاعی بودن آنها (از محسوس به طرف تجرید) تعریف می‌کند. فارابی در نوشته‌های خود اندیشه‌های

درست و کاملی درباره مسئله‌های نظری (و از آن جمله ریاضیات) به صورت قابل فهم و در عین حال علمی و دقیق ارائه می‌دهد. کتاب موسیقی فارابی را باید نخستین کتاب علمی درباره موسیقی نظری دانست که به کلی با آموزش‌های فیثاغورس و افلاطون درباره موسیقی – که پر از ابهام و در مسیر بحث‌های «ماوراءالطبیعه» است – فرق دارد. با پیروی از فارابی بود که بعد از او دانشمندان دیگری مثل ابن‌سینا، **جرجانی** و **قطب‌الدین شیرازی** به بررسی علمی موسیقی پرداختند.

کتاب موسیقی فارابی، مجموعه‌ای

است از بحث‌های دقیق و جالب دربارهٔ ریاضیات، فیزیک و موسیقی. به یاد داشته باشیم که فارابی، با گونه‌های اندکی از سازها (که در زمان او معمول بود)، مثل نی، تنبور و عود سروکار داشت (تنبور ۲ سیم و عود ۴ یا ۵ سیم دارد). با وجود این، توانسته است از عهدهٔ بررسی علمی موسیقی برآید. او پرده‌ها (صداها) و گام‌های متفاوت را مورد بحث قرار داده و انواع آنها را در میان قوم‌های مختلف با هم مقایسه کرده است. او به موجی و ارتعاشی بودن صوت، به احتمال قریب به یقین، برای نخستین بار پی برد. همچنین، برای جمع و تفریق فاصله‌های صوتی، طول تارهای مولد آنها را در هم ضرب و برهم تقسیم می‌کرد. یعنی به‌طور ضمنی از این قانون که جمع و تفریق فاصله‌های صوتی از قانون‌های لگاریتم پیروی می‌کنند (بدون اینکه مفهوم «لگاریتم» را بشناسد)، اطلاع داشت.

فارابی نوعی الفبای موسیقی را به کار می‌برد و «نت‌ها» را با «عدد» مشخص می‌کرد. او می‌گفت برای شناختن موسیقی باید به سرچشمهٔ آن، یعنی طبیعت رو آورد. فارابی معتقد بود که در موسیقی نمی‌توان مبدأ را تغییر داد و به دل‌خواه انتخاب

کرد (آن‌طور که مثلاً، در گرماسنج و برای تعیین درجهٔ حرارت ممکن است). برای پیدا کردن مبدأ موسیقی باید به سراغ طبیعت رفت. هم‌نوازی و هم‌آهنگی که بعدها از سدهٔ هجدهم میلادی مورد توجه قرار گرفته است، در بحث‌ها و بررسی‌های فارابی وجود دارد.

روش‌شناسی فارابی بسیار جالب و آموزنده است. او در مقدمهٔ کتاب «موسیقی» می‌نویسد: «... برای اینکه اندیشمند خوبی در تنظیم نظریه‌ها باشیم، بدون توجه به اینکه مربوط به کدام دانش است، باید سه شرط را داشته باشیم:

۱. همهٔ قاعده‌ها را به خوبی بدانیم؛
۲. توانایی نتیجه‌گیری‌های لازم را، از این قاعده‌ها و داده‌هایی که در این دانش وجود دارد، داشته باشیم؛

۳. توانایی پاسخ‌گویی به نظریه‌های نادرست را داشته باشیم و بتوانیم، اندیشه‌ها و عقیده‌های دیگران را تجزیه و تحلیل کنیم، درست را از نادرست جدا سازیم، و به اصلاح اشتباه‌ها دست بزنیم...»
فارابی، توصیه‌های مربوط به روش‌شناسی علمی خود را در کتاب‌ها و رساله‌های فراوانی که در زمینه‌های گوناگون دانش نوشته، به کار بسته است

و بهترین نمونه‌های مربوط به بررسی بنیان‌های دانش زمان خودش را، در این میان، بررسی انتقادی او از «المجسطی» بطلمیوس، جای نمایانی دارد. فارابی، در مقدمهٔ این بررسی، یادآوری می‌کند: «... تلاش کرده‌ام مضمون این نوشته را تا حدی که ممکن است قابل فهم کنم...»

بطلمیوس در «المجسطی» همه‌جا می‌کوشد به بررسی‌های مربوط به پدیده‌های اخترشناسی جنبهٔ محاسبه‌ای بدهد. او سعی می‌کند از روش‌های خالص ریاضی در مورد داده‌های عددی که از راه تجزیه به دست آمده‌اند، استفاده کند. همچنین، از شرط‌های هندسی معینی آغاز می‌کند و سپس از آنها به نتیجه‌های عددی می‌رسد.

در بررسی‌های فارابی یا اصلاً داده‌های عددی وجود ندارد و یا به عنوان بازماندهٔ نادری از روش «المجسطی» پیدا می‌شود. او با به کار گرفتن قالب‌های خطی مثلثاتی و گسترش مفهوم عدد تا عدد حقیقی مثبت، تا مرز روش‌های جبری پیش می‌رود. به برکت این روش دقیق نظری، نه تنها نوشتهٔ فارابی نسبت به «المجسطی» حجم کمتری دارد، بلکه مهم‌تر از آن، برای خواننده، ساده‌تر و قابل فهم‌تر شده است.

نتیجه

به این ترتیب می‌بینیم که اگر دیدگاه‌های فارابی دربارهٔ سیاست، جامعه‌شناسی و فلسفه (فلسفه به معنای خاص خود، یعنی پرداختن به کون و مکان، و لاهوت و ناسوت)، تنها از نظر تاریخی اهمیت دارد، کارهای علمی فارابی در چنان درجه‌ای از اهمیت است که از بسیاری از آنها حتی امروز هم می‌توان استفاده کرد. به‌خصوص بررسی و مطالعهٔ کتاب‌های «موسیقی»، «هندسه»، «شرح مجسطی»، «احصاء العلوم» و «مراتب العلوم» که با کمال تأسف بسیار کم به آنها پرداخته شده است، از نظر روش‌شناسی علمی اهمیت بسیار دارد. کتاب «موسیقی» فارابی نمونهٔ بسیار ارزنده‌ای برای دانشمندان است که نشان می‌دهد چگونه می‌توان مسئله‌های دشوار دانش‌های طبیعی را به کمک ریاضیات حل کرد!

دیدگاه‌های فارابی در زمینهٔ روان‌شناسی آموزشی و روش‌شناسی علمی، مثل بسیاری از دیدگاه‌های دیگر او، تقریباً ناشناخته مانده‌اند و شناخت آنها به بررسی‌های خاص و مجدانه‌ای نیاز دارد.

کتاب‌های فارابی با همهٔ اهمیتی که دارند، هنوز به زبان فارسی درنیامده‌اند و مشتاقان ایرانی از مطالعهٔ مستقیم نوشته‌های این اندیشمند بزرگ محرومند. وزارت‌خانه‌های ارشاد، آموزش عالی و آموزش و پرورش، و همچنین دانشگاه‌ها باید ترجمه و چاپ کتاب‌های اندیشمندان ایرانی را از وظایف‌های درجهٔ اول خود بدانند. بدون تکیه بر گذشتهٔ علمی خود و بدون تجزیه و تحلیل راه گذشته، نمی‌توان مسیر پیشرفت آینده را پیدا کرد.





درس‌هایی از عملیات جبری با رادیکال‌ها

کلیدواژه‌ها: رادیکال، تجزیه رادیکال‌ها، رادیکال مرکب، گویا کردن، مزدوج

الف) تجزیه رادیکال‌ها.....

می‌خواهیم عبارت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ را به دو رادیکال جدا از هم تبدیل کنیم. این عمل را «تجزیه رادیکال‌ها» گوییم.

برای این کار فرض می‌کنیم: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ (x, y و B مثبت‌اند).

دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = A \\ 2\sqrt{xy} = \sqrt{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = A \\ 4xy = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = A \\ xy = \frac{B}{4} \end{cases}$$

حال برای تعیین x و y، معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش x و y باشد و سپس معادله تشکیل شده را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x + y = A = S \\ x \cdot y = \frac{B}{4} = P \end{cases}$$

$$Z^2 - SZ + P = 0 \Rightarrow Z^2 - AZ + \frac{B}{4} = 0$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

فرض می‌کنیم: $C = \sqrt{A^2 - B}$ ، در نتیجه خواهیم داشت:

$$Z = \frac{A \pm C}{2} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = \frac{A+C}{2} \\ y = \frac{A-C}{2} \end{cases}$$

داشتیم:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

پس:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

نتیجه:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \quad C = \sqrt{A^2 - B}$$

توجه: اگر رادیکال مرکبی داشته باشیم و آن را به دو رادیکال ساده‌تر تبدیل کنیم، این عمل را «تجزیه رادیکال‌ها» گویند. قبل از حل، رادیکال مرکب مسئله را به $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ تبدیل می‌کنیم.

مسئله ۱. عبارت $\sqrt{37 - 2\sqrt{3}}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$\sqrt{37 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{37 - \sqrt{4 \cdot 3}} = \sqrt{37 - \sqrt{1200}}$$

با مقایسه با فرمول:

$$\begin{cases} A = 37 \\ B = 1200 \end{cases}, \quad C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{37^2 - 1200} = \sqrt{169} = 13$$

بنابر فرمول:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \quad C = 13$$

$$\sqrt{37 - \sqrt{1200}} = \sqrt{\frac{37+13}{2}} - \sqrt{\frac{37-13}{2}} = \sqrt{25} - \sqrt{12}$$

$$= 5 - 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{37 - 2\sqrt{3}} = 5 - 2\sqrt{3}$$

بنابراین:

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{288}} = \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{2}+1$$

■ مسئله ۳. حاصل $P = \sqrt{3+\sqrt{5}-\sqrt{13}+\sqrt{48}}$ را بیابید.

● حل: ابتدا $\sqrt{13}+\sqrt{48}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{13}+\sqrt{48} \begin{cases} A=13 \\ B=48 \end{cases} C = \sqrt{A^2-B} = \sqrt{169-48}$$

$$= \sqrt{121} = 11$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \quad C = \sqrt{A^2-B}$$

$$\sqrt{13}+\sqrt{48} = \sqrt{\frac{13+11}{2}} + \sqrt{\frac{13-11}{2}} = \sqrt{12}+1$$

$$P = \sqrt{3+\sqrt{5}-\sqrt{13}+\sqrt{48}} = \sqrt{3+\sqrt{5}-\sqrt{12}-1} \\ = \sqrt{2+\sqrt{5}-\sqrt{12}}$$

حال $\sqrt{4}-\sqrt{12}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{4}-\sqrt{12} \begin{cases} A=4 \\ B=12 \end{cases} C = \sqrt{A^2-B} = \sqrt{16-12} = \sqrt{4} = 2$$

پس:

$$\sqrt{4}-\sqrt{12} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3}-1$$

بنابراین:

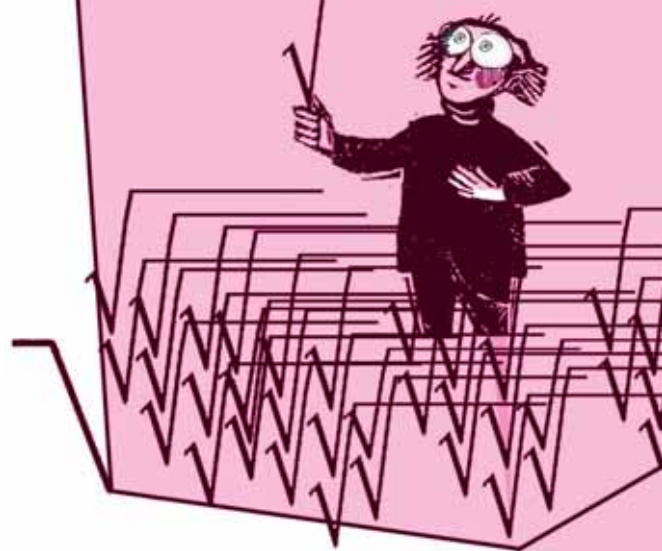
$$P = \sqrt{2+\sqrt{4}-\sqrt{12}} = \sqrt{2+\sqrt{3}-1} = \sqrt{1+\sqrt{3}}$$

$$P = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$P = \sqrt{2+\sqrt{3}} \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases} C = \sqrt{A^2-B} = \sqrt{4-3} = 1$$

$$P = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} =$$



■ مسئله ۲. حاصل $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$ را بیابید.

● حل:

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$$

ابتدا $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{17+\sqrt{144 \times 2}} = \sqrt{17+\sqrt{288}} \begin{cases} A=17 \\ B=288 \end{cases}$$

$$C = \sqrt{A^2-B} = \sqrt{17^2-288} = \sqrt{289-288} = \sqrt{1} = 1$$

داشتیم:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \quad C = \sqrt{A^2-B}$$

پس:

$$\sqrt{17+\sqrt{288}} = \sqrt{\frac{17+1}{2}} + \sqrt{\frac{17-1}{2}} = 3+\sqrt{8}$$

بنابراین:

$$\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{17+\sqrt{288}}} = \sqrt{3+\sqrt{8}}$$

حالا $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} A=3 \\ B=8 \end{cases} C = \sqrt{A^2-B} = \sqrt{9-8} = 1$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \quad C=1, \begin{cases} A=3 \\ B=8 \end{cases}$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2}+1$$



ب) گویا کردن گویا کردن مخرج یک کسر، عملی است که رادیکال مخرج

کسر را حذف می کند.

۱. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{n\sqrt{a}}$ ، $a > 0$ ، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{a}$ ضرب می کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{15}{7\sqrt{5}}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{15}{7\sqrt{5}} = \frac{15}{7\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{7 \times 5} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

۲. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[n]{a^n}}$ ، $a > 0$ ، $m, n \in \mathbb{N}$ ، $m > n$ ، صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{m-n}}$ ضرب می کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{a^7}}$ را گویا کنید ($a \neq 0$).

حل:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^7}} \times \frac{\sqrt[3]{a^{11-7}}}{\sqrt[3]{a^{11-7}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^7}} \times \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}} = \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^{11}}} = \frac{\sqrt[3]{a^4}}{a}$$

۳. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}}$ ، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج، یعنی $a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d}$ ضرب می کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}$ را گویا کنید.

حل: صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

$$\frac{1}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}} \times \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{4(3) - 9(5)} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{-33}$$

۴. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ ، صورت و مخرج را دوبار در مزدوج مخرج ضرب می کنیم ($a, b > 0$).

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \\ = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{7 - 3} \\ = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4}$$

۵. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ ، صورت و مخرج را در عبارت $(\sqrt{a^2} \mp \sqrt{ab} + \sqrt{b^2})$ ضرب می کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5^2} + \sqrt{5 \times 2} + \sqrt{2^2}}{\sqrt{5^2} + \sqrt{5 \times 2} + \sqrt{2^2}} \\ = \frac{\sqrt{25} + \sqrt{10} + \sqrt{4}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{25} + \sqrt{10} + \sqrt{4}}{3}$$

۶. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{a^2} \pm \sqrt{ab} + \sqrt{b^2}}$ ، صورت و مخرج را در $(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$ ضرب می کنیم.

مثال ۱. مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{9} - \sqrt{6} + \sqrt{4}}$ را گویا کنید.

حل:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, b^2 = 4 \Rightarrow b = 2, ab = 6$$

$$\frac{1}{\sqrt{9} - \sqrt{6} + \sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{9} - \sqrt{6} + \sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 + 2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{5}$$

مثال ۲. مخرج کسر $\frac{2}{2\sqrt{2} + \sqrt{4} + 2}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{2}{2\sqrt{2} + \sqrt{4} + 2} = \frac{2}{\sqrt{\frac{16}{a^2}} + \sqrt{\frac{4}{b^2}} + \sqrt{\frac{8}{ab}}} \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \\ = \frac{2}{\sqrt{16} + \sqrt{4} + \sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{4} - \sqrt{2}}{\sqrt{4} - \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{4} - \sqrt{2})}{(\sqrt{4})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ = \frac{2(\sqrt{4} - \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{2(\sqrt{4} - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{4} - \sqrt{2}$$

مسئله ترکیبی ۱. مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt{2}}$ را گویا کنید.

● حل: ابتدا فرجه مشترک می گیریم. یعنی، دو رادیکال مخرج را به فرجه ۶ تبدیل می کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{2^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{8}}$$

حال صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{8}} \times \frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{25^3}-\sqrt[3]{8^3}} =$$

حال بنابر شماره (۵) همین درس، مخرج کسر را گویا

می کنیم:

$$\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{25^3}-\sqrt[3]{8^3}} \times \frac{\sqrt[3]{25^2}+\sqrt[3]{25 \times 8}+\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{\frac{25^3}{a}}-\sqrt[3]{\frac{8^3}{b}}} = \frac{\sqrt[3]{25^3}+\sqrt[3]{25^2 \times 8}+\sqrt[3]{25 \times 8^2}+\sqrt[3]{8^3}}{\sqrt[3]{\frac{25^3}{a}}-\sqrt[3]{\frac{8^3}{b}}} = \frac{(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{625}+\sqrt[3]{200}+\sqrt[3]{64})}{25-8} = \frac{17}{25-8}$$

مسئله ترکیبی ۲. حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$P = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

● حل:

صورت کسر را K فرض می کنیم:

$$0 < K = \sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2} = \sqrt{K^2}$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{(\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2})^2}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2+2\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}} \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

$$K = \sqrt{2\sqrt{5}+2\sqrt{5-4}} = \sqrt{2\sqrt{5}+2}$$

$$= \sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+1}$$

$$P = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$= \sqrt{2} - (\sqrt{2}-1) = P = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 \Rightarrow P = 1$$

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول جدول مشاهیر ایرانی

در جدول واژه‌های به هم ریخته زیر، نام‌های تعدادی از مشاهیر ایران اعم از شاعر، نویسنده، ریاضی‌دان، دانشمند و... آمده است. این نام‌ها ممکن است به صورت افقی، عمودی و مورب و از هر دو طرف نوشته شده باشند. به عنوان نمونه نام‌های فارابی و رازی را مشخص کرده‌ایم. همه نام‌ها را به همین ترتیب از جدول خط بزنید. در پایان تعدادی حرف در جدول باقی می‌ماند. از ترکیب این حرف‌ها نام یکی از ریاضی‌دانان نامی ایران به دست می‌آید. نام و زندگی‌نامه مختصری از او را برای ما بفرستید و جایزه‌ای مناسب بگیرید!

ا	ط	ن	ی	ر	ی	ز	ی	ر	د
ل	ب	س	د	ا	ز	ه	ب	ج	م
د	ر	ن	ج	ع	ی	و	ل	و	م
ی	ی	ا	س	ک	ط	س	ن	م	ن
ب	د	ی	ع	ی	ب	ا	ر	ا	ف
ظ	ن	ی	م	ی	ن	ب	ر	ی	ر
ف	ج	ی	ر	ی	ح	ا	ح	خ	د
ا	خ	و	ا	ر	ز	م	ی	ر	و
ح	ن	ظ	ا	م	ی	ا	ک	م	س
ی	ی	ک	و	ش	ی	ا	ر	ع	ی

نام‌های مشاهیر:

فارابی، رازی، عمر خیام،
ابن سینا، خوارزمی، نیریزی،
بهبود، طبری، بیدل، مولوی،
حافظ، سنایی، کسایی،
فردوسی، کوشیار، بیرونی،
نظامی، خجندی، عسجدی،
عطار





نگاهی به فیلم اتاق فرما



کلیدواژه‌ها: اتاق فرما، لوئیز پیدراهیتا، کریستین گلدباخ، جرج کانتور، کورت گودل، پاسکال، هیلبرت، فیثاغورس

اسم فیلم: اتاق فرما ● کارگردانان: لوئیز پیدراهیتا^۱ و رودریگو سوپنا^۲ ● تهیه‌کنندگان: سزار بنیتز^۳، آدولفو بلانکو^۴ و خوزه ماریا ایریساری^۵ ● نویسندگان: لوئیز پیدراهیتا و رودریگو سوپنا ● بازیگران: آلیخو سآوراس^۶، النا بالستروس^۷، لوئیز هومر^۸، سانتی میلان^۹ و فدریکو لویی^{۱۰} ● موسیقی: فدریکو خوسید^{۱۱} ● فیلم‌برداری: میگوئل آنخل آمادو^{۱۲} ● تدوین: خورخه ماکایا^{۱۳} ● تاریخ اکران: هفتم اکتبر ۲۰۰۷ ● محصول: اسپانیا

بدون این اثبات، جهان خواهد ماند

حمله قرار گرفته و تمام زحماتش برای ارائه عمومی این حدس در قالب قضیه، بر باد رفته است. برای اثبات مجدد آن نیز به وقت کافی نیاز دارد و نمی‌تواند آن را در تاریخی که از پیش تعیین شده است، آماده کند.

در صحنه بعدی این فیلم که به چهار ماه بعد اشاره دارد، ریاضی‌دان کهن‌سالی را مشاهده می‌کنیم که در حال بازی شطرنج با یکی از دوستانش است و دوست او اصرار دارد که این ریاضی‌دان ریاضیات را رها کند؛ چون تعداد زیادی از ریاضی‌دانان بالاستعداد و نابغه، مانند جورج کانتور^{۱۵} (۱۸۴۵-۱۹۱۸)، یوتاکا تانیاما^{۱۶} (۱۹۲۷-۱۹۵۸) و کورت گودل^{۱۷} (۱۹۰۶-۱۹۷۸)، سرانجام دیوانه و

۴۷۹+۵۲۱=۱۰۰۰. در نهایت هم به پلاک اتومبیل خود که عددی زوج است، اشاره می‌کند و آن را به صورت ۷۱۱۲=۱۹۹۳+۵۱۱۹ برای آنها تحلیل می‌کند. در ادامه گفت‌وگو، او به دانشجویان می‌گوید که استفاده از حدس گلدباخ برای اعداد با مقادیر بزرگ کار بسیار دشواری است و نیز بی‌شماری عددها و نبود قانون و قاعده‌ای کلی برای استفاده از این حدس، به دشواری آن می‌افزاید. در واقع، ریاضی‌دان جوان روی اثبات این حدس و ارائه آن به عنوان یک قضیه کار می‌کند و قرار است در تاریخ بسیار نزدیکی از اثبات خود برای این قضیه دفاع کند. اما ناگهان با مراجعه به دفتر کارش درمی‌یابد که اتاقش مورد

فیلم با صحنه‌ای آغاز می‌شود که در آن ریاضی‌دان جوانی در حال توضیح دادن حدسی درباره نظریه اعداد است که توسط کریستین گولدباخ^{۱۴} (۱۷۶۴-۱۶۹۰) در سال ۱۷۴۲ به دنیای ریاضیات وارد شد. در این صحنه ریاضی‌دان جوان برای تعدادی از دانشجویان بیان می‌کند که هر عدد زوج را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول بیان کرد. او برای درک بهتر این موضوع، مثال‌های ۱۱=۷+۴، ۱۹=۵+۱۴ و ۳۷=۱۳+۵۰ را ارائه می‌کند. دو دانشجو نیز از او می‌خواهند که برای اعداد ۱۰۰ و ۱۰۰۰ نیز حدس گلدباخ را ارائه کند و او در پاسخ این جواب‌ها را به ایشان ارائه می‌کند: ۱۷+۸۳=۱۰۰ و

شیدا شدند. در ادامه، ریاضی‌دان کهن‌سال نامه‌ای را برای دوستش می‌خواند که دربرگیرندهٔ معمایی به امضای شخصی با نام مستعار **فرما**^{۱۸} است. در این نامه اشاره شده است که اگر او بتواند به این معما پاسخ درست و مناسب بدهد، اجازه دارد در جلسهای که در آخر هفته پیرامون مبتکرانه‌ترین نظریه‌های ریاضی تشکیل می‌شود، شرکت کند.

(معمای مطرح شده در نامه به این صورت است: رابطهٔ بین اعداد ۱، ۳، ۷، ۶، ۸، ۹، ۲، ۴، ۵ را پیدا کنید.)

در صحنه‌ای دیگر از این فیلم، ریاضی‌دان دیگری را مشاهده می‌کنیم که به سبب دریافت نامه‌ای مشابه نامهٔ مزبور، در حال بررسی معما و ارائهٔ راه‌حل برای آن است. در این هنگام همکارش به او می‌گوید اگر خواستی اتاق را ترک کنی، کتاب‌های مورد استفاده‌ات را براساس حروف الفبا مرتب کن.

این راهنمایی ناخواسته جرقه‌ای در ذهن او می‌زند: «این اعداد براساس حروف الفبا ارائه شده‌اند و بین آنها فقط همین رابطه وجود دارد» (چون این فیلم به زبان اسپانیایی است، ارائهٔ مترادف لغوی برای اعداد در این معما براساس مترادف اسپانیایی برای آنهاست).

در ادامهٔ فیلم، چهار ریاضی‌دان را مشاهده می‌کنیم که توانایی پاسخ‌گویی به این معما را داشته‌اند. آنها در دعوت‌نامه‌ای به امضای فرما به نام‌های مستعار **پاسکال**^{۱۹}، **هیلبرت**^{۲۰}، **آلیوا**^{۲۱} و **گالویس**^{۲۲} نامیده شده‌اند. در این دعوت‌نامه از آنها خواسته شده است، از آوردن تلفن همراه به جلسه و فاش کردن هویت واقعی خود برای سایر مهمانان جلسه خودداری کنند.

آنان اکنون با قایقی به نام **فیناگورس**^{۲۳} در حال عبور از رودخانه‌ای هستند تا به محل تشکیل جلسه که درون یک انباری است، برسند.

بعد از مدت کوتاهی که به محل جلسه می‌رسند، شخصی وارد می‌شود و خود را فرما معرفی می‌کند و آنها مشغول گفت‌وگو می‌شوند. دقایقی بعد تلفن همراه فرما زنگ می‌خورد! فرما بعد از پاسخ‌گویی می‌گوید که ناچار است برای رسیدگی به وضعیت دختر بستری شدهٔ خود در بیمارستان، جلسه را ترک کند. لحظاتی پس از رفتن فرما، آنها پیامی را در قالب یک پیام‌گیر دریافت می‌کنند که در آن بیان شده است:

— شما یک دقیقه وقت دارید به این معما پاسخ دهید: «فروشنده‌ای سه جعبه آبنبات دارد که یکی از آنها حاوی آبنبات نعنائی، دیگری حاوی آبنبات مغزدار و سومی دارای مخلوطی از آبنبات‌های نعنائی و مغزدار است. روی هر جعبه با برچسب نوشته شده است: آبنبات نعنائی، آبنبات مغزدار و آبنبات مخلوط نعنائی و مغزدار. البته فروشنده می‌گوید که جعبه‌ها اشتباهی نام‌گذاری شده‌اند. کمترین تعداد آبنبات‌هایی را که فروشنده می‌باید از داخل جعبه‌ها بیرون آورد تا بفهمد که محتوی هر جعبه شامل چه نوع آبنباتی است، مشخص کنید.

بعد از مطرح شدن این معما، آنها متوجه می‌شوند که اگر ظرف یک دقیقه نتوانند به آن پاسخ درست بدهند، اتاقی که در آن قرار دارند، کوچک و کوچک‌تر می‌شود و این موضوع با ارائهٔ معماهای بعدی مجدداً نیز تکرار می‌شود. در آخر هم اتاقی که در آن محبوس شده‌اند، به یک قوطی کبریت شبیه خواهد شد. در حقیقت

آنها در محصه‌ای قرار گرفته‌اند که در نهایت به از دست رفتن جان آنها می‌انجامد. با به‌وجود آمدن خطر مرگ، آنها به اقداماتی برای فرار از اتاق و یا تغییر چیدمان مبلمان و اثاثیهٔ داخل اتاق برای جلوگیری از کوچک‌تر شدن آن دست می‌زنند. ولی تمامی این کارها بی‌فایده است.

در حین رخ دادن این اتفاقات و نیز بحث و گفت‌وگوهای متنوع دربارهٔ علت و چگونگی رخداد این ماجرا، پاسکال با مطالعهٔ کتابی که از یکی از قفسه‌های کتاب برداشته است، متوجه می‌شود، اختصاص آن نام‌های مستعار به آنها دلیل داشته است: ریاضی‌دانان مشهور، **اوارسته گالویس** (۱۸۳۲-۱۸۱۱)، **لوئیس د'آلیوا** **سابوکو**^{۲۴} و **بلز پاسکال**^{۲۵} (۱۶۶۲-۱۶۲۳)، در سنی جان به جان آفرین تسلیم کرده‌اند که هر یک از آنها که در این اتاق با نام گالویس، آلیوا و پاسکال شناخته می‌شوند، در حال حاضر در آن سن قرار دارند و قرار است در همین سن و در همین اتاق بمیرند.

سپس با بررسی کارت شناسایی واقع در کت شخصی که آن را هنگام ترک اتاق جا گذاشت و نام مستعار «فرما» را با خود به یدک می‌کشید، متوجه می‌شوند که سن او با سنی که ریاضی‌دان نامی **پیر د'فرما**^{۲۶} (۱۶۶۵-۱۶۰۱) به هنگام مرگ داشته، یکی است.

در اواخر فیلم آنها متوجه می‌شوند که تمام این ماجرا و دردهای آن، متوجه ریاضی‌دانی است که با نام مستعار هیلبرت در این جلسه حضور دارد. در واقع، او همان کسی است که نظریهٔ ریاضی‌دان جوان را در ابتدای فیلم نابود کرده است. هیلبرت مدت زیادی برای اثبات حدس گلدباخ کوشیده، اما



متوجه شده است که این ریاضی‌دان جوان نیز روی آن کار می‌کند. به علاوه، تمام روزنامه‌ها و مجلات توجه خود را به این جوان معطوف کرده‌اند و عکس او را به عنوان کسی که قرار است اثباتی برای این حدس ارائه کند، به تصویر کشیده‌اند.

بعد از مرور ماجراها و واقعیات پیرامون این ملاقات، هیلبرت خود را به عنوان اولین کسی معرفی می‌کند که حدس گلدباخ را اثبات کرده است. ریاضی‌دان جوان از این موضوع عصبانی می‌شود و با مشت ضرب‌های به صورت هیلبرت می‌زند. هیلبرت به زمین می‌افتد و سرش به پایه صندلی می‌خورد و بیهوش می‌شود. پاسکال به ریاضی‌دان جوان می‌گوید که هیلبرت تا همین دقیقه آخر داشت به فرار فکر می‌کرد. علاوه بر این، تمامی ما در سنی خواهیم مرد که ریاضی‌دانان شهیر، پاسکال، آلیو



و گالویس دارفانی را وداع گفته‌اند. اما دیوید هیلبرت^{۲۷} ریاضی‌دان در سن ۸۰ سالگی بدرد حیات گفت. این در حالی است که شخص با نام مستعار هیلبرت که در بین ماست، در این سن قرار ندارد. بنابراین او قصد فرار داشته و در این جا نیز راهی برای گریز از این تنگنا که توسط وی قبلاً آماده شده است، وجود دارد. سپس آنها متوجه تخته سیاهی می‌شوند که روی آن کلمه «آزادی» نوشته شده است. قهرمانان داستان با شکستن این تخته و فرار از داخل آن اتاق پردردسر، از این ماجرا جان سالم به‌در می‌برند.

در پایان فیلم، هنگامی که پاسکال، آلیو و گالویس با قایق در مسیر برگشت هستند، پاسکال اثبات ارائه شده توسط هیلبرت را که به همراه خود دارند، به داخل رودخانه می‌اندازد و خاطرنشان می‌کند که بدون این اثبات نیز جهان همان‌گونه که بوده است، خواهد بود.

پی‌نوشت.....

1. Luis Piedrahita
2. Rodrigo Sopena
3. Cesar Benitez
4. Adolfo Blanco
5. Jose Maria Irisarri
6. Alejo Sauras
7. Elena Ballestros
8. Lluís Homar
9. Santi Millan
10. Federico Luppi
11. Federico Jusid
12. Miguel Angel Amoedo
13. Jorge Macaya
14. Christian Goldbach
15. George Cantor
16. Yutaka Taniyama
17. Kurt Godel
18. Fermat
19. Pascal
20. Hilbert
21. Oliva
22. Galois
23. Pythagoras
24. Luisa de Oliva Sabuco
25. Balse Pascal
26. Pierre de Fermat
27. David Hilbert

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: لطیفه‌های ریاضی!

بسته کنیم و ماشین را روشن کنیم و برویم!

● روزی دو نفر سوار بر بالن در آسمان پرواز می‌کردند که ناگهان ابری عظیم جلوشان سبز شد. به داخل ابر رفتند و مسیر خود را گم کردند. وقتی از ابر بیرون آمدند، بالای قله کوهی بودند و از بالا مردی را دیدند که روی قله نشسته و در حال فکر کردن است. یکی از آنها به مرد گفت: «هی آقا ما الان کجا هستیم؟»

مرد جوابی نداد و دوباره ابر آمد و آنها را در خود فرو برد. مدتی گذشت و آنها از ابر بیرون آمدند و دوباره همان مرد را در حال تفکر دیدند. باز از او پرسیدند: «آقا، ما الان کجا هستیم؟»

مرد سرش را بلند کرد و گفت: «شما در بالن هستید!» یکی از دو بال‌سوار به دیگری گفت: «شرط می‌بندم این مرد ریاضی‌دان است!»

دیگری پرسید: چرا؟ او گفت: «به سه دلیل: اولاً خیلی فکر کرد تا جواب بدهد، ثانیاً ساده‌ترین جواب ممکن را داد، ثالثاً اصلاً به کاربرد جوابی که داد فکر نکرد!»

در این جاد نیست با خواندن چند لطیفه ریاضی تغییر ذائقه دهیم! البته حتماً انتظار ندارید که این لطیفه‌ها شبیه لطیفه‌هایی باشند که در بعضی سایت‌های رایانه‌ای و یا در پیامک‌هایتان می‌بینید. ولی ظرافتی در آنها نهفته است که به یکبار خواندن آنها حتماً می‌ارزد.

● روزی سه نفر، یک مهندس مکانیک، یک ریاضی‌دان و یک مهندس رایانه، سوار بر خودرو به پیک‌نیک می‌رفتند که خودرویشان در جایی خراب شد و متوقف شدند. مهندس مکانیک گفت: «بهتر است بروم درب موتور را بزنم بالا و نگاهی به موتور بکنم، شاید بتوانم کاری بکنم.»

ریاضی‌دان گفت: «حدود یک کیلومتر مانده به اینجا، یک پمپ بنزین دیدم. بهتر است برگردیم به همان نقطه و دوباره این مسیر را بپاییم تا ببینیم علت خرابی ماشین چه بوده است.»

و مهندس رایانه گفت: «احتیاج به این کارها نیست. بهتر است همگی پیاده شویم و دوباره سوار شویم و درها را باز و



دنباله ها

دنباله های حسابی و هندسی



آموزشی

هوشنگ شرقی

کلیدواژه ها: دنباله حسابی، دنباله هندسی، قانون دنباله، جمله عمومی، دنباله بازگشتی، قدرنسبت، واسطه حسابی، واسطه هندسی

تعریف دنباله

مفهوم دنباله، یک تعریف دقیق ریاضی و یک تعریف ساده و نادقیق دارد. در این جا ترجیح داده ایم که با تعریف ساده شروع کنیم؛ «از به دنبال هم قرار دادن تعدادی (متناهی یا نامتناهی) شیء در یک ردیف، یک دنباله از اشیاء به دست می آید»؛ مانند دنباله زیر که شامل ۱۰ حرف الفبای انگلیسی است:

$a, b, a, c, d, f, e, f, g, i$

چنان چه ملاحظه می شود، اعضای دنباله می توانند تکراری هم باشند و هیچ نظم و قاعده ای هم در چینش آنها وجود نداشته باشد. حتی ممکن است همه اعضای دنباله یکسان باشند. چنین دنباله ای را دنباله ثابت می نامیم؛ مانند دنباله ثابت و نامتناهی زیر که همه اعضای آن عدد ثابت ۲ هستند:

$2, 2, 2, 2, \dots$

اگر اعضای دنباله عددهای حقیقی باشند، دنباله را «دنباله عددی» می نامیم؛ مانند دنباله عددی زیر:

$-1, 1, \sqrt{2}, 5, 3, 1, 3, 3, 2, 0, 3, 5, \sqrt{3}, -2, \frac{1}{5}$

که ۱۵ عضو (جمله) دارد. جملات دنباله را با نماد a_n یا b_n یا t_n و... نمایش می دهیم که n شماره جمله هاست. مثلاً در دنباله فوق داریم:

$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 3, \dots$

شماره جمله ها یا از روی جملات قبلی به دست آیند، دنباله دارای ضابطه است. مثلاً به دنباله متناهی زیر که ۱۰ جمله دارد، دقت کنید:

$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$

با کمی دقت روشن می شود که هر جمله دنباله، مربع شماره جمله است. یعنی جمله اول 1^2 ، جمله دوم 2^2 ، جمله سوم 3^2 و... است. پس جمله n ام دنباله، n^2 است: $a_n = n^2$. تساوی یاد شده را ضابطه یا قانون دنباله می نامیم و به جمله عمومی دنباله می گوئیم.

◀ **مثال ۱.** جمله عمومی دنباله نامتناهی زیر $\frac{1}{n}$ است:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

◀ **مثال ۲.** جمله عمومی دنباله های زیر را حدس بزنید:

(الف) $1, 8, 27, 64, \dots$

(ب) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

(ج) $0, 6, 24, 60, 120, \dots$

(د) $1, 2, 5, 12, 27, 58, \dots$

(ه) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$

● **جواب:**

(الف) $a_n = n^3$ (ب) $a_n = \frac{1}{n^2}$ (ج) $a_n = n^3 - n$

(د) $a_n = 2^n - n$ (ه) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$

قانون یا ضابطه دنباله

هر گاه اعضای دنباله با قانون یا ضابطه خاصی، از روی



نمایش دهید. ثانیاً، نشان دهید که این دنباله یک دنباله نزولی است (یعنی جملات آن مرتباً کوچک‌تر می‌شوند) و حدس بزنید که این جملات به چه عددی نزدیک می‌شوند. ثالثاً، حداقل چند جمله از این دنباله را بنویسیم تا فاصله جملات این دنباله از ۰/۰۱ کمتر شود.

● حل:

اولاً:

$$\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}, \dots$$

ثانیاً، برای اینکه نشان دهیم دنباله فوق نزولی است، کافی است نشان دهیم که هر جمله، از جمله ماقبل خود کوچک‌تر است؛ یعنی $a_{n+1} < a_n$.

و یا اینکه:

$$\frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} < \frac{2n+3}{n+1}$$

که معادل است با نامساوی $\frac{2n+5}{n+2} < \frac{2n+3}{n+1}$ و آن هم معادل است با نامساوی $(2n+5)(n+1) < (2n+3)(n+2)$ و یا $2n^2 + 7n + 5 < 2n^2 + 7n + 6$ که واضح است. با ملاحظه جملات دنباله درمی‌یابیم که این جمله‌ها به عدد ۲ نزدیک می‌شوند.

ثالثاً، برای آنکه فاصله جملات دنباله از عدد ۲ کمتر از ۰/۰۱ باشد، با توجه به اینکه جملات دنباله همگی بزرگ‌تر از ۲ هستند (چرا؟) باید داشته باشیم: $2 < a_n < 2/0.1$. بنابراین:

$$2 < \frac{2n+3}{n+1} < 2/0.1 \Rightarrow 2n+2 < 2n+3 < 2/0.1n+2/0.1$$

$$\Rightarrow 0/0.1n > 0/99 \Rightarrow n > 99$$

یعنی باید حداقل ۱۰۰ جمله بنویسیم تا به جمله‌ای برسیم که فاصله آن تا ۲ کمتر از ۰/۰۱ شود:

$$a_{100} = \frac{203}{101} \approx 2/0.99 < 2/0.1$$

دنباله‌های بازگشتی

گاهی ضابطه یک دنباله از روی جملات قبلی نوشته می‌شود. یعنی هر جمله، با قانونی مشخص برحسب جمله (یا جملات قبل) به دست می‌آید. مثلاً به دنباله زیر توجه کنید:

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots$$

با کمی دقت درمی‌یابید که هر جمله برابر است با دو برابر جمله قبل به اضافه ۱؛ یعنی: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ و $a_1 = 1$. چنین دنباله‌ای را دنباله بازگشتی می‌نامیم. با کمی

مثال ۳. جمله عمومی دنباله‌های زیر داده شده است. پنج جمله نخست هر دنباله را بنویسید و دنباله را تشکیل دهید.

الف) $a_n = \frac{n}{n+1}$ ب) $a_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1}$

ج) $n^2 - 2n$

● حل:

الف) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

ب) $0, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{17}, \frac{2}{13}, \dots$

ج) $-1, 0, 3, 8, 15, \dots$

مثال ۴. دنباله $a_n = \frac{n^2}{2n-3}$ مفروض است. اولاً، جملات دهم و بیستم این دنباله را مشخص کنید. ثانیاً، چندمین جمله از این دنباله مساوی ۴ است؟ ثالثاً، آیا این دنباله جمله‌ای مساوی ۲ دارد؟

● حل:

اولاً:

$$a_{10} = \frac{10^2}{2 \times 10 - 3} = \frac{100}{17}, \quad a_{20} = \frac{20^2}{2 \times 20 - 3} = \frac{400}{37}$$

ثانیاً:

$$a_n = 4 \Rightarrow \frac{n^2}{2n-3} = 4 \Rightarrow n^2 = 8n - 12 \Rightarrow n^2 - 8n + 12 = 0 \Rightarrow (n-6)(n-2) = 0 \Rightarrow n = 6$$

یا $n = 2$

یعنی دو جمله از این دنباله مساوی ۴ هستند.

$$a_6 = a_2 = 4$$

ثالثاً:

$$a_n = -2 \Rightarrow \frac{n^2}{2n-3} = -2$$

$$\Rightarrow n^2 = -4n + 6 \Rightarrow n^2 + 4n - 6 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(1)(-6) = 40$$

$$\Rightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -2 \pm \sqrt{10} \notin \mathbb{N}$$

ولی روشن است که باید $n \in \mathbb{N}$. بنابراین هیچ جمله‌ای از دنباله مساوی ۲ نیست.

مثال ۵. دنباله $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$ مفروض است. اولاً، پنج جمله نخست این دنباله را بنویسید و دنباله را با اعضای آن





که هر جمله آن مساوی جمله قبل به اضافه ۳ واحد است؛ یعنی $d = 3$. مقدار ثابت (d) را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. اگر $d = 0$ باشد، دنباله ما، دنباله‌ای ثابت است. اما اگر $d > 0$ باشد، دنباله صعودی و اگر $d < 0$ باشد، دنباله نزولی خواهد بود.

جمله عمومی دنباله حسابی

اگر a_1 جمله نخست و d قدرنسبت دنباله حسابی باشد، بدیهی است که داریم:

$$a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d, \dots$$

و به طریق استقرایی حدس می‌زنیم که:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

براساس این دستور مسائل زیادی را در زمینه دنباله‌های حسابی می‌توان مطرح و حل کرد.

مثال ۱. جمله عمومی دنباله زیر و جمله هزار و سیصد و نود و یکم آن را بنویسید:

$$2, 6, 10, 14, \dots$$

حل:

$$a_1 = 2, d = 4 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)4$$

$$\Rightarrow a_n = 4n - 2, a_{1391} = 4 \times 1391 - 2 = 5562$$

مثال ۲. یک دنباله حسابی تشکیل دهید که جمله هفتم آن ۲۳ و جمله دوازدهم آن ۳۸ باشد.

حل:

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d = 23 \\ a_{12} = a_1 + 11d = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5d = 15, d = 3, a_1 = 5 \\ a_7 = 23, a_{12} = 38 \end{cases}$$

$$5, 8, 11, 14, \dots$$

مثال ۳. لااقل چند جمله از دنباله زیر بنویسیم تا مطمئن شویم به جمله‌ای بزرگ‌تر از ۱۰۰۰ می‌رسیم؟

$$-2, 3, 8, 13, \dots$$

حل: $a_1 = -2$ و $d = 5$. در نتیجه:

$$a_n = -2 + (n-1)5 = 5n - 7, a_n > 1000$$

$$\Rightarrow 5n - 7 > 1000 \Rightarrow n > \frac{1007}{5} \Rightarrow \min(n) = 202$$

یعنی از جمله دویست و دوم به بعد، جملات بزرگ‌تر از هزار هستند.

دقت می‌بینیم که دنباله فوق دستور مستقیمی بر حسب n نیز دارد: $a_n = 3^n - 1$. یعنی دنباله‌های بازگشتی ممکن است به صورت مستقیم هم بر حسب n دارای جمله عمومی باشند.

مثال ۱. دنباله بازگشتی $a_1 = 2$ و $a_n = a_{n-1} + 2^n$ مفروض است. پنج جمله نخست دنباله را بنویسید.

حل:

$$a_2 = a_1 + 2^2 = 2 + 4 = 6$$

$$a_3 = a_2 + 2^3 = 6 + 8 = 14$$

$$a_4 = a_3 + 2^4 = 14 + 16 = 30$$

$$a_5 = a_4 + 2^5 = 30 + 32 = 62$$

$$2, 6, 14, 30, 62, \dots$$

مثال ۲. دنباله بازگشتی $a_1 = 1$ و $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} + 1$ مفروض است. این دنباله را تشکیل دهید.

حل:

$$a_2 = a_1 \cdot a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_2 \cdot a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_4 = a_3 \cdot a_2 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$$

$$a_5 = a_4 \cdot a_3 + 1 = 7 \times 3 + 1 = 22$$

$$1, 2, 3, 7, 22, 155, \dots$$

دنباله فیبوناچی

یکی از معروف‌ترین دنباله‌ها، دنباله بازگشتی منسوب به لئوناردو فیبوناچی (ریاضی‌دان ایتالیایی قرن سیزدهم) است. در این دنباله، جملات اول و دوم مساوی ۱ و هر جمله مساوی مجموع دو جمله ماقبل است: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ و $a_1 = a_2 = 1$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

این دنباله ویژگی‌های بسیاری دارد که در این مقاله مختصر نمی‌توان به آنها پرداخت. علاقه‌مندان را به کتاب‌ها و مقالات متعددی که در این باره وجود دارد، رجوع می‌دهیم. در اینترنت و سایت‌های ریاضی هم مطالب بسیاری درباره این دنباله وجود دارد.

دنباله حسابی

دنباله‌ای را که هر جمله آن با افزودن مقداری ثابت به جمله قبلی به‌دست می‌آید، یعنی $a_n = a_{n-1} + d$ ، «دنباله حسابی» می‌نامیم؛ مانند این دنباله:

$$2, 5, 8, 11, 14, \dots$$



مثال ۴. یک دنباله حسابی تشکیل دهید که جمله هفتم آن سه برابر جمله چهارم آن و حاصل ضرب جملات سوم و چهارم آن دو واحد بیشتر از جمله پنجم آن باشد.

حل: $a_7 = a_1 + 6d, a_4 = a_1 + 3d, a_3 = a_1 + 2d, a_5 = a_1 + 4d, a_6 = 3a_4, a_3 \cdot a_4 = a_5 + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6d = 3(a_1 + 3d) \Rightarrow a_1 + 6d = 3a_1 + 9d \\ \Rightarrow 2a_1 = -3d \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 3d) = a_1 + 4d + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{3d}{2} + 2d\right)\left(-\frac{3d}{2} + 3d\right) = -\frac{3d}{2} + 4d + 2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{2} \times \frac{3d}{2} = \frac{5d+4}{2} \Rightarrow 3d^2 = 10d + 8 \Rightarrow 3d^2 - 10d - 8 = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{6} \Rightarrow d = 4 \text{ یا } d = -\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow (d = 4, a_1 = -6) \text{ یا } (d = -\frac{2}{3}, a_1 = 1)$
بنابراین دو دنباله حسابی با ویژگی فوق می توان نوشت:

$$\begin{cases} -6, -2, 2, 6, \dots \\ 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1, \dots \end{cases}$$

واسطه های حسابی

اگر a, b, c به ترتیب جملات یک دنباله حسابی باشند، طبق تعریف داریم:

$$b - a = c - b = d \text{ (قدرنسبت)}$$

$$\Rightarrow 2b = a + c, \quad b = \frac{a+c}{2}$$

پس رابطه $2b = a + c$ همان شرط آن است که a, b, c تشکیل دنباله حسابی دهند و $b = \frac{a+c}{2}$ نیز واسطه حسابی بین a و c نامیده می شود؛ یعنی عددی که اگر بین دو عدد دیگر قرار گیرد، سه عدد دنباله حسابی تشکیل می دهند. پس واسطه حسابی بین دو عدد، همان میانگین آنهاست.

مثال ۵. m را طوری به دست آورید که سه عدد $2m-1, 3m+1$ و $7m$ دنباله حسابی تشکیل دهند.

حل: مطابق دستور گفته شده می توان نوشت:

$$2(3m+1) = 2m-1 + 7m \Rightarrow 6m+2 = 9m-1 \Rightarrow 3m = 3, m = 1$$

واسطه های حسابی بین دو عدد

هرگاه بین دو عدد a و b بتوان m عدد قرار داد که همه این عددها (همراه با a و b) یک دنباله حسابی را تشکیل دهند،

این m عدد را واسطه های حسابی بین a و b می نامیم. در این صورت به سادگی می توان ثابت کرد که قدرنسبت این دنباله از دستور $d = \frac{b-a}{m+1}$ به دست می آید.

مثال ۶. بین دو عدد ۳ و ۳۱، شش واسطه حسابی پیدا کنید.

حل: $d = \frac{31-3}{6+1} = \frac{28}{7} = 4$

در نتیجه:

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31$$

واسطه های حسابی

مجموع جملات یک دنباله حسابی

برای یافتن مجموع جملات یک دنباله حسابی با جمله نخست a_1 و قدرنسبت d ، از روش زیر که نخستین بار توسط گاوس، ریاضی دان آلمانی، به کار گرفته شد استفاده می کنیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + a_1 + (n-1)d \\ S_n = a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-3)d \\ \quad + \dots + a_1 \end{cases}$$

و از جمع جمله به جمله دو تساوی بالا نتیجه می شود:

$$2S_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots + [2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow 2S_n = n[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

و با توجه به تساوی $a_n = a_1 + (n-1)d$ می توان این دستور را به صورت $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ نیز نوشت.

مثال ۷. مجموع ۱۰۰ جمله نخست دنباله زیر را به دست آورید: $1, 4, 7, 10, \dots$ $a_1 = 1, d = 3$

حل: $S_{100} = \frac{100}{2}[2 + 99 \times 3] = 50 \times 299 = 14950$

مثال ۸. یک دنباله حسابی تشکیل دهید که مجموع ۸ جمله نخست آن ۵۰ و مجموع ۸ جمله بعدی آن ۱۴۶ باشد.

حل: $S_8 = 50, S_{16} - S_8 = 146 \Rightarrow S_{16} = 196$

$$\frac{8}{2}[2a_1 + 7d] = 50 \Rightarrow 4a_1 + 14d = 25$$

$$\frac{16}{2}[2a_1 + 15d] = 196 \Rightarrow 4a_1 + 30d = 49$$

$$\begin{cases} 4a_1 + 14d = 25 \\ 4a_1 + 30d = 49 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{3}{2}, a_1 = 1 \Rightarrow 1, \frac{5}{2}, 4, \dots$$

◀ مثال ۹. مجموع چند جمله از دنباله زیر برابر ۱۵۵ است؟
۲, ۵, ۸, ...

● حل:

$$S_n = \frac{n}{2} [2 \times 2 + (n-1)3] = 155$$

$$\Rightarrow n(3n+1) = 310 \Rightarrow 3n^2 + n - 310 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{3721}}{6} = \frac{-1 \pm 61}{6} \Rightarrow n = 10 \text{ یا } n = \frac{-31}{3} \notin \mathbb{N}$$

بنابراین، مجموع ۱۰ جمله نخست از این دنباله مساوی ۱۵۵ است.

◀ مثال ۱۰. حداقل چند عدد از نخستین عددهای طبیعی را باید جمع کنیم تا مجموع آنها از ۱۰۰۰ تجاوز کند؟

● حل:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2} [2 \times 1 + (n-1) \times 1] = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} > 1000 \Rightarrow n^2 + n > 2000$$

$$\Rightarrow (n + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} > 2000$$

$$\Rightarrow (n + \frac{1}{2})^2 > 2000 + \frac{1}{4} \Rightarrow n + \frac{1}{2} > \sqrt{2000 + \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow n > \sqrt{2000 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

و با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{2000 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ نتیجه

می گیریم که حداقل مقدار طبیعی n برای آنکه از این عدد بزرگ تر شود، n = 45 است. یعنی باید لااقل ۴۵ جمله را با هم جمع کنیم. با توجه به مقادیر S_{۴۴} و S_{۴۵} درستی عمل ما مشخص می شود:

$$S_{44} = \frac{44 \times 45}{2} = 22 \times 45 = 990$$

$$S_{45} = \frac{45 \times 46}{2} = 45 \times 23 = 1035$$

تمرین

۱. اگر a و b و c یک دنباله حسابی تشکیل دهند، ثابت کنید.

$$\text{الف) } a^2 + 8bc = (2b+c)^2 \quad \text{ب) } 3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a-b)^2 + (a+b+c)^2$$

۲. یک دنباله حسابی بنویسید که جمله اول آن ۱ و مجموع ۵ جمله اول آن $\frac{1}{4}$ مجموع ۵ جمله بعدی باشد (جواب: ...، -۵، -۲، ۱).

۳. بین دو عدد ۳ و ۲۰، پنج واسطه حسابی درج کنید.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ادامه ایستگاه دوم: الیپس های ریاضی!

● روزی گروهی از مهندسان تلاش می کردند که ارتفاع یک میله پرچم را اندازه بگیرند. آنها برای این کار فقط یک متر پارچه ای بلند داشتند که نمی توانستند آن را به بالای میله برسانند. ریاضی دانی از آن جا می گذشت. از او خواستند به آن ها کمک کند. او گفت: «این که خیلی ساده است!»

و میله را از زمین در آورد و روی زمین گذاشت و به سادگی با آن متر پارچه ای طول آن را اندازه گیری کرد. یکی از مهندسان گفت: «این ریاضی دان ها عجب موجوداتی هستند! ما گفتیم ارتفاع میله را اندازه بگیرد، او طول آن را اندازه گرفت!»

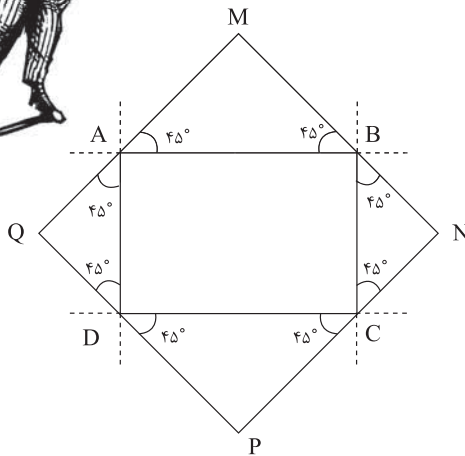
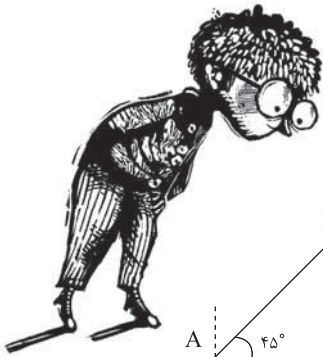


ریاضیات هنر دادن
نام های یکسان
به اشیای متفاوت
است!

هنری پوانکاره
(ریاضی دان فرانسوی
۱۸۵۴-۱۹۱۲)

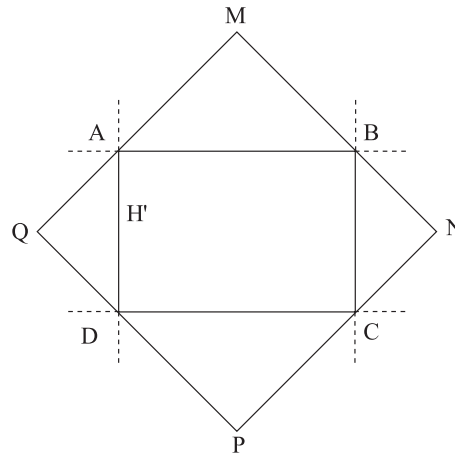


رویکرد هندسی و جبری در آموزش هندسه



کلیدواژه‌ها: رویکرد هندسی، رویکرد جبری، مختصاتی، مثلث قائم الزاویه

مسئله: مستطیل ABCD به ضلع‌های a و b داده شده است. نیم‌سازهای زاویه‌های برونی این مستطیل را رسم می‌کنیم و چهار ضلعی حاصل را MNPQ می‌نامیم.



از آنجا در مثلث‌های MAB، NBC، PCD، QAD داریم:
یعنی این مثلث‌ها در رأس‌های $\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ$.
بنابراین M, N, P, Q قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند. بنابراین
چهار ضلعی MNPQ به دلیل قائمه بودن چهار زاویه‌اش،
مستطیل است.

اکنون برای اثبات مربع بودن این چهار ضلعی کافی است
ثابت کنیم که دو ضلع مجاور آن برابرند؛ یعنی برای مثال
 $MQ = MN$ است. به این منظور توجه می‌کنیم که دو مثلث
قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین MAB و PCD به حالت برابری
وتر و زاویه‌های حاده هم‌نهشت هستند؛ زیرا:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = 45^\circ \text{ و } AB = CD = a$$

$$MA = MB = PC = PD \quad (1) \quad \text{پس داریم:}$$

همچنین، دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین NBC و
QAD به دلیل برابری وترهایشان، یعنی $BC = AD = b$ ،
هم‌نهشت هستند. بنابراین:

$$BN = NC = AQ = QD \quad (2)$$

از رابطه‌های (1) و (2) نتیجه می‌شود:

$$MA + AQ = MB + BN \Rightarrow MQ = MN$$

$$MN = NP = PQ = QM \quad \text{و به‌طور کلی‌تر:}$$

پس چهار ضلعی MNPQ مربع است.

۱. ثابت کنید که چهار ضلعی MNPQ مربع است.

۲. اندازه ضلع مربع MNPQ را بر حسب a و b تعیین کنید.

مسئله را با دو رویکرد هندسی و جبری مختصاتی حل
می‌کنیم:

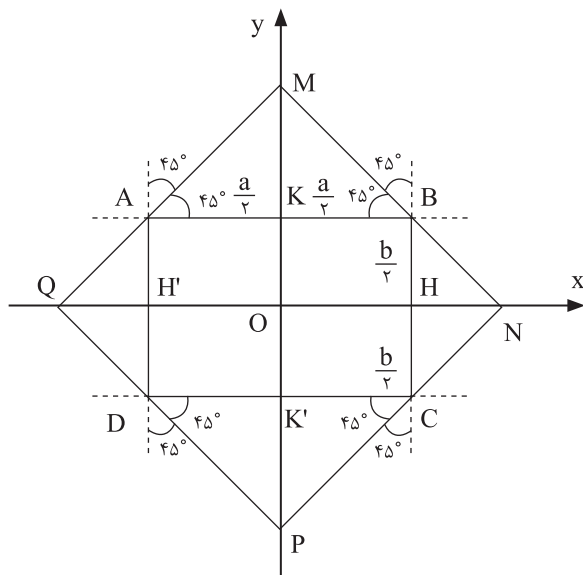
الف) حل به روش هندسی

۱. می‌دانیم که زاویه‌های درونی مستطیل 90° هستند.
پس زاویه‌های برونی آن نیز 90° اند و در نتیجه نیم‌سازهای
این زاویه‌ها آنها را به زاویه‌های مساوی 45° تقسیم می‌کند؛
یعنی داریم:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 45^\circ$$

ب) حل به روش جبری - مختصات

۱. قطره‌های مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آنها را که مرکز تقارن مستطیل است، O می‌نامیم.



دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور $x'ox$ از نقطه O بگذرد و با ضلع‌های AB و CD موازی باشد و محور $y'oy$ از نقطه O بگذرد و با ضلع‌های BC و DA موازی باشد. مبدأ این دستگاه مختصات قائم را همان نقطه O، مرکز تقارن مستطیل، اختیار می‌کنیم.

با فرض این که $AB = CD = a$ و $BC = DA = b$ باشد، اگر نقطه‌های برخورد محور xها با BC و DA را به ترتیب H و H' و نقطه‌های برخورد محور yها با AB و CD را به ترتیب K و K' بنامیم، خواهیم داشت:

$$BH = HC = AH' = H'D = \frac{b}{2}$$

$$AK = KB = DK' = K'C = \frac{a}{2}$$

و از آنجا، معادله خط‌های AB و CD به صورت:

$$AB: y = \frac{b}{2}, CD: y = -\frac{b}{2}$$

و معادله خط‌های BC و DA

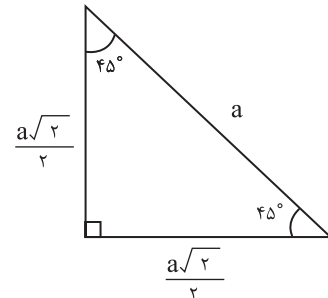
نیز به صورت:

$$BC: x = \frac{a}{2}, AD: x = -\frac{a}{2}$$

خواهد بود. واضح است که

مختصات رأس‌های مستطیل در این

۲. برای محاسبه اندازه ضلع مربع MNPQ بر حسب اندازه ضلع‌های مستطیل ABCD، یعنی بر حسب a و b، می‌دانیم که اگر وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی مساوی a باشد، اندازه هر ضلع زاویه قائمه‌اش مساوی $\frac{a}{\sqrt{2}}$ یا $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ است.



بنابراین، در مثلث‌های قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین MAB و NBC، چون $AB = a$ و $BC = b$ است، خواهیم داشت:

$$MB = MA = \frac{AB\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$NB = NC = \frac{BC\sqrt{2}}{2} \Rightarrow NB = \frac{b\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow MB + NB = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$$

و این اندازه ضلع مربع MNPQ بر حسب اندازه ضلع‌های مستطیل ABCD، یعنی بر حسب a و b است.





دستگاه مختصات قائم به صورت زیر است:

$$A = \left(-\frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right), B = \left(\frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right),$$

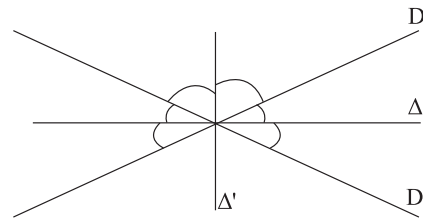
$$C = \left(\frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}, -\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right), D = \left(-\frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}, -\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right)$$

اکنون با توجه به این که معادله‌های نیم‌سازهای زاویه‌های

بین دو خط $D': a'x + b'y + c' = 0$ و $D: ax + by + c = 0$

به صورت $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$ است، معادله‌های

نیم‌سازهای زاویه‌های درونی و برونی مستطیل ABCD را می‌نویسیم. داریم:



$$AB: y - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = 0, BC: x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{y - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \pm \frac{x - \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \Rightarrow y - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \pm \left(x - \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right)$$

معادله نیم‌ساز زاویه درونی B

$$\Rightarrow y - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = x - \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \Rightarrow y - x = \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$$

معادله نیم‌ساز زاویه برونی B

$$\Rightarrow y - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = -x + \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \Rightarrow y + x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$$

$$\Rightarrow MN: y + x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$$

$$AB: y - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = 0, AD: x + \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \pm \frac{x + \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \Rightarrow y - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \pm \left(x + \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right)$$

معادله نیم‌ساز زاویه برونی A

$$\Rightarrow y - x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \Rightarrow MQ: y - x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$$

معادله نیم‌ساز زاویه درونی A

$$y + x = \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$$

به همین ترتیب، معادلات نیم‌ساز زاویه‌های درونی و برونی C و D را به دست می‌آوریم.

داریم:

$$BC: x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \text{ یا } x - \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = 0 \text{ و } CD: y = -\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \Rightarrow y + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x - \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \pm \frac{y + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \Rightarrow x - \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \pm \left(y + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow x - y = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \quad \text{معادله نیم‌ساز NP}$$

$$x + y = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \quad \text{معادله نیم‌ساز زاویه درونی C}$$

$$DC: y = -\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \Rightarrow y + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = 0 \text{ و } DA: x + \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \pm \frac{x + \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \Rightarrow y + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \pm \left(x + \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow y - x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \quad \text{معادله نیم‌ساز زاویه درونی D}$$

$$\text{معادله نیم‌ساز زاویه برونی D یا PQ, } y + x = -\frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$$

به طوری که دیده می‌شود، نیم‌سازهای زاویه‌های مجاور و برونی مستطیل دوبه دو برهم عمودند، زیرا داریم:

$$m_{NP} = m_{MQ} = 1$$

$$\Rightarrow m_{MN} \times m_{MQ} = (-1)(1) = -1$$

$$m_{MN} = m_{PQ} = -1$$

$$\Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow \hat{M} = 90^\circ$$

و به همین ترتیب داریم: $\hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ$. پس MNPQ مستطیل است.

برای اینکه ثابت کنیم این مستطیل مربع است، طول دو ضلع مجاور آن را به دست می‌آوریم که باید با هم مساوی باشند.

داریم:

$$MN: \begin{cases} y + x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \\ y - x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \end{cases} \Rightarrow M = \left(0, \frac{a+b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right)$$

$$MQ: \begin{cases} y - x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \\ y + x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \end{cases} \Rightarrow N = \left(\frac{a+b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}, 0\right)$$

$$NP: \begin{cases} x - y = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \\ x + y = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \end{cases} \Rightarrow P = \left(0, -\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right)$$

$$PQ: \begin{cases} x - y = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \\ y + x = -\frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \end{cases} \Rightarrow Q = \left(-\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}, 0\right)$$

$$NP: \begin{cases} x - y = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \\ y + x = -\frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \end{cases} \Rightarrow P = \left(0, -\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right)$$

$$PQ: \begin{cases} y + x = -\frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \\ y - x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \end{cases} \Rightarrow Q = \left(-\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}, 0\right)$$

خط D و D' هستند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: معادله‌های نیم‌سازهای زاویه‌های حاصل از برخورد دو خط $D: 3x - 4y + 12 = 0$ و $D': 5x + 12y - 30 = 0$ را به دست آورید.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} \frac{3x - 4y + 12}{\sqrt{9 + 16}} &= \pm \frac{5x + 12y - 30}{\sqrt{25 + 144}} \\ \Rightarrow \frac{3x - 4y + 12}{5} &= \pm \frac{5x + 12y - 30}{13} \\ \Rightarrow 13(3x - 4y + 12) &= \pm 5(5x + 12y - 30) \\ \Rightarrow 14x - 112y + 306 &= 0 \\ 13(3x - 4y + 12) &= -5(5x + 12y - 30) \\ \Rightarrow 64x + 8y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

نکته ۳. در این مسئله با توجه به موازی بودن ضلع‌های مستطیل با محورهای مختصات، نتیجه می‌شود که نیم‌سازهای زاویه‌های برونی B و D با نیم‌ساز ربع دوم و چهارم دستگاه مختصات، و نیم‌سازهای زاویه‌های برونی C و A با نیم‌ساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات موازی‌اند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} m_{MN} &= m_{PQ} = -1 \\ m_{NP} &= m_{MQ} = 1 \end{aligned}$$

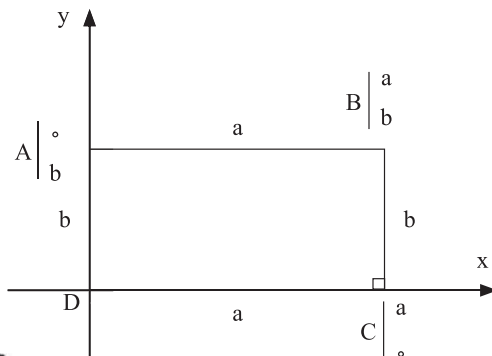
پس با داشتن مختصات رأس‌های A, B, C و D می‌توان معادله نیم‌سازهای زاویه‌های برونی A, B, C و D را نوشت. برای مثال داریم:

$$B = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{ و } m_{MN} = -1 \Rightarrow y - \frac{b}{2} = -1\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y + x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

این همان معادله MN است که با روش قبلی به دست آوردیم.

نکته ۴. دستگاه محورهای مختصات قائم xOy را می‌توان به صورت‌های دیگری نیز در نظر گرفت. مثلاً می‌توان محور x ها را روی خط CD و محور y ها را روی خط AD اختیار کرد.



محاسبه‌ها را خودتان انجام دهید.

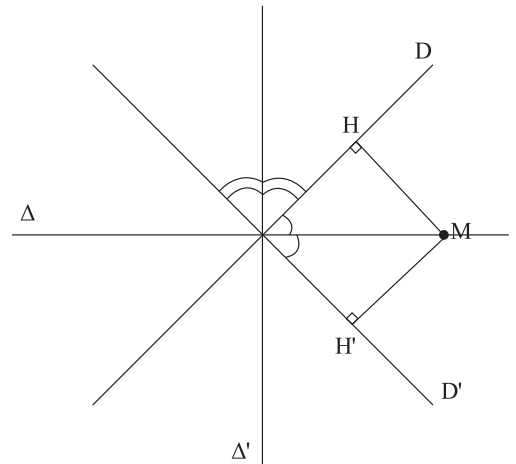
$$\Rightarrow MN = \sqrt{\left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \times \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow NP = \sqrt{\left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \times \frac{a+b}{2}$$

چهار ضلعی $MNPQ$ مربع است. $\Rightarrow MN = NP$. و طول ضلع مربع نیز بر حسب a و b به دست آمده است.

نکته ۱. می‌توانستیم مختصات رأس Q را نیز به دست آوریم و ثابت کنیم که: $MN = NP = PQ = QA$ ؛ یعنی $MNPQ$ لوزی است. سپس ثابت کنیم یک زاویه قائمه دارد که در آن صورت، هر چهار زاویه‌اش قائمه و $MNPQ$ مربع خواهد بود.

نکته ۲. معادله نیم‌سازهای زاویه‌های بین دو خط $D: ax + by + c = 0$ و $D': a'x + b'y + c' = 0$ به صورت زیر است:



$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

زیرا اگر $M = (x, y)$ یک نقطه دل‌خواه متعلق به نیم‌سازهای زاویه‌های بین دو خط و MH و MH' فاصله این نقطه از این دو خط باشد، داریم:

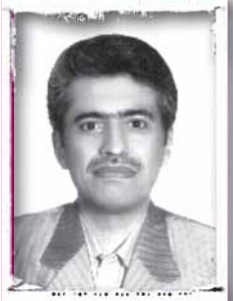
$$MH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ و } MH' = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

$MH = MH' \Rightarrow$ نیم‌ساز زاویه

$$\Rightarrow \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

و این دو معادله، معادله‌های نیم‌سازهای زاویه‌های بین دو





بسته نرم افزاری متمتیکا



کلیدواژه‌ها: مجموع ریمان، محاسبه سطح و حجم، فاکتوریل، عدد اول، مقسوم علیه، خارج قسمت، باقی مانده، ب.م.م، ک.م.م

اشاره

در این قسمت ابتدا مثال هایی از کاربرد انتگرال معین را با استفاده از «متمتیکا» حل می کنیم. در ادامه به معرفی دستورالعمل هایی از متمتیکا می پردازیم که در نظریه اعداد و حساب مقدماتی کاربرد زیادی دارند.

۱. محاسبه مجموع ریمان بالا و پایین

فرض کنیم $I = [a, b]$ یک بازه مفروض باشد. اگر این بازه به گردایه ای از زیر بازه ها به صورت $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ افزایش شود، به طوری که $x_0 = a$ و $x_n = b$ و $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ یک نقطه در زیر بازه i ام، $1 \leq i \leq n$ ، باشد و $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ طول زیر بازه i ام باشد، آنگاه مجموع ریمان f روی I نسبت به افزایش فوق به صورت $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$ تعریف می شود. مجموع ریمان یک تقریبی از مساحت زیر نمودار تابع f با محور x ها در بازه I را مشخص می کند. به عبارت دیگر، می توان گفت وقتی طول هر یک از زیر بازه ها به صفر میل کند، انتگرال معین f در $[a, b]$ تقریباً با مجموع ریمان برابر است. در حالتی که طول همه زیر بازه ها برابر با $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ باشد، می توان نوشت:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)$$

برای مثال، می دانیم: $\int_0^{\pi} \sin x dx = 1$. حال یک مجموع ریمان پایینی و یک مجموع ریمان بالایی را برای f روی $[0, \frac{\pi}{2}]$ در حالتی که $n = 100$ و طول زیر بازه ها برابر باشد، می یابیم. برای مجموع ریمان پایینی x_i^* را طوری در نظر می گیریم که نقاط انتهایی سمت چپ هر زیر بازه باشند. برای مجموع ریمان بالایی نیز x_i^* را طوری انتخاب می کنیم که نقاط انتهایی سمت

راست هر زیر بازه باشند. در حالت اول یک تقریب نقصانی و در حالت دوم یک تقریب اضافی را برای انتگرال معین فوق به دست می آوریم. نتایج با اجرا در متمتیکا به صورت زیر حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} f[x_] &= \sin[x]; \\ a &= 0; \quad b = \pi/2; \quad n = 100; \\ \Delta x &= (b-a)/n; \\ \text{xstar}[i_] &= a + (i-1)\Delta x; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n f[\text{xstar}[i]] \Delta x // N$$

۰/۹۹۲۱۲۵

$$\text{xstar}[i-] = a + i\Delta x;$$

$$\sum_{i=1}^n f[\text{xstar}[i]] \Delta x // N$$

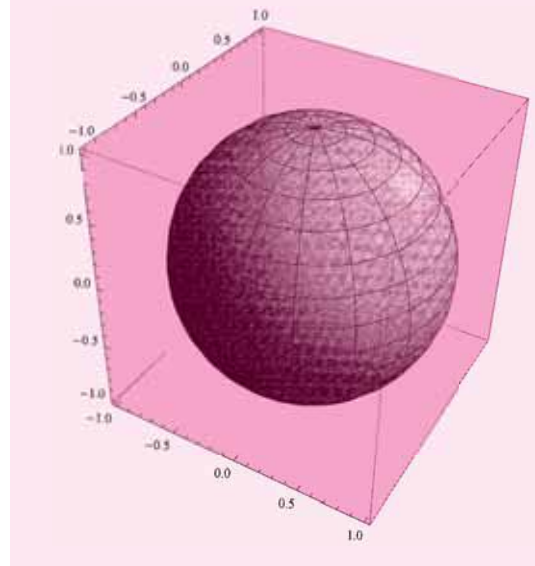
۱/۰۰۷۸۳

برای بهبود دقت تقریب حاصل می توان نقاط وسط هر زیر بازه را به عنوان x_i^* در نظر گرفت. در این حالت به دست می آید: $x_i^* = a + (i - \frac{1}{2})\Delta x$. نتیجه در این حالت به صورت زیر

$$\text{xstar}[i_] = a + (i - 0.5)\Delta x;$$

$$\sum_{i=1}^n f[\text{xstar}[i]] \Delta x // N$$

۱/۰۰۰۰۱



۴. محاسبه حجم

می‌دانیم حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی تابع f و محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور x ها از رابطه $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ به دست می‌آید. فرض می‌کنیم: $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ و $-3 \leq x \leq 3$. در این حالت نمودار f یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ است که اگر این نمودار حول محور x ها دوران یابد، کره‌ای به شعاع ۳ را مشخص می‌کند که حجم آن برابر با 36π به شکل زیر به دست می‌آید:

$$f[x_] = \text{Sqrt}[9 - x^2];$$

$$\pi \int_{-3}^3 f[x]^2 dx$$

در حالت کلی، اگر $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ، نیم‌دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r باشد، حجم کره حاصل از دوران f حول محور x ها در $[-r, r]$ برابر است با: $\frac{4}{3} \pi r^3$.

$$Y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\pi \int_{-r}^r Y^2 dx$$

$$\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\frac{4 \pi r^3}{3}$$

در ادامه چند دستورالعمل پایه‌ای را در محیط متمتیکا به کاربرد هستند، معرفی می‌کنیم.

۱. دستور مجموع

صورت کلی دستورالعمل مجموع برای محاسبه $\sum_{i=m}^n a_i$ به صورت زیر است:

$$\text{Sum}[a[i], \{i, m, n\}]$$

مثال: حاصل $\sum_{i=1}^{100} i^2$ برابر است با:

$$\text{Sum}[i^2, \{i, 1, 100\}]$$

$$338350$$

محاسبه فوق با استفاده از نماد سیگما در پنجره «Basic Math Input» به صورت $\sum_{i=1}^{100} i^2$ نیز قابل انجام است.

در این حالت، پس از کلیک کردن روی این نماد و قرار گرفتن آن در صفحه متمتیکا، داخل هر مربع خالی را پر می‌کنیم. با فشار دکمه «Tab» به راحتی می‌توان به مربع بعدی وارد شد.

$$\sum_{i=1}^{100} i^2$$

$$338350$$

توجه کنید که هر یک از دستورهای موجود در هر خط باید با علامت ; جدا و با فشار دکمه‌های Shift+Enter اجرا شود.

۲. محاسبه سطح محصور

فرض کنید بخواهیم حاصل $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ را به ازای $x = 2$ در متمتیکا به دست آوریم. در این حالت سطح زیر نمودار تابع با ضابطه $f(t) = \frac{1}{t}$ و محور افقی در بازه $[1, x]$ موردنظر است که برابر است با: Lnx (بنابراین: $F(2) = \text{Ln}2$). این امر در متمتیکا به صورت زیر قابل محاسبه است. دستور «Assumptions» فرض $x > 0$ را در محاسبه این انتگرال منظور می‌کند:

$$f[x_] = 1/x;$$

$$F[x_] = \text{Integrate}[f[t], \{t, 1, x\}, \text{Assumptions} \rightarrow x > 0];$$

$$F[2]$$

$$\text{Log}[2]$$

۳. محاسبه سطح بین دو منحنی

فرض کنید بخواهیم سطح محصور بین دو منحنی توابع با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ را محاسبه کنیم. به این منظور باید محل تلاقی این دو منحنی را پیدا کنیم و حاصل انتگرال معین اختلاف این دو تابع را از حیث قدرمطلق در بازه تلاقی آنها بیابیم. نتیجه به صورت زیر محاسبه می‌شود. یادآوری می‌شود هر سلول ورودی با فشار هم‌زمان دکمه‌های Shift+Enter باید اجرا شود:

$$f[x_] = \sqrt{x};$$

$$g[x_] = x^2;$$

$$\text{Solve}[f[x] == g[x], x]$$

$$\{\{x \rightarrow 0\}, \{x \rightarrow 1\}\}$$

$$\int_0^1 \text{Abs}[f[x] - g[x]] dx$$

$$\frac{1}{3}$$

این دستور معادل با $\prod_{i=1}^y i$ است.

مثال: حاصل $1^2 \times 2^2 \times \dots \times 7^2$ به صورت زیر به دست می آید.

$$\prod_{i=1}^7 i^2 = 25401600$$

۳. دستور حلقه

دو دستور «While» و «For» به صورت کلی زیر از جمله دستورات عمل‌های حلقه در ممتیکا هستند:

While [عبارت و شرط]

در این حالت، عبارت داده شده به صورت مکرر تا وقتی شرط مفروض برقرار باشد، محاسبه می‌شود.

For [عبارت و نمو و تست و آغازدهی]

در این حالت با اجرای این دستور، عبارت مفروض با آغازدهی و نمودار داده شده تا زمانی که دستور تست برقرار باشد، محاسبه می‌شود.

فرض کنید می‌خواهید اعداد ۱ تا ۵ را چاپ کنیم. با استفاده از هر دو دستور فوق به شکل زیر این کار قابل انجام است. منظور از $n++$ یا $i++$ در این دستورها آن است که مقادیر n یا i یکی یکی زیاد می‌شود.

```
n = ۱;
While[n < ۶, Print[n]; n ++]
۱
۲
۳
۴
۵
For[i = ۱, i ≤ ۵, i ++, Print[i]]
۱
۲
۳
۴
۵
```

حال فرض کنید می‌خواهید مقدار $10!$ را با استفاده از دستور حلقه While محاسبه کنیم. به این منظور به صورت زیر می‌توان عمل کرد. در این حالت با فرض $n = 10$ و $nfact = 1$ و به کارگیری دستور $nfact = nfact * n$ در حلقه While و استفاده از نماد $n--$ مقدار n یکی یکی کاهش می‌یابد تا در نهایت $10!$ به صورت $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9 \times 10$ محاسبه و مشخص شود.

```
n = ۱۰;
nfact = ۱;
While[n > ۰, nfact = nfact * n; n --]
nfact
۳۶۲۸۸۰۰
```

مثال: حاصل $\sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+1)}$ برابر است با:

$$\text{Sum}\left[\frac{1}{k(k+1)}, \{k, 1, 9\}\right]$$

$$\frac{9}{10}$$

توجه شود که حرف اول «Sum» باید بزرگ تایپ شود.

مثال: حاصل $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{j}$ برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{j}$$

$$\frac{65}{2}$$

در این حالت سیگمای دوم را باید داخل مربع خالی جلوی سیگمای اول تایپ کنیم و در واقع دوبار روی نماد سیگما کلیک کنیم.

می‌توان با ارائه یک نمو به دستور مجموع، حاصل جمع تعدادی از اعداد را با یک نمو مشخص محاسبه کرد. برای مثال، برای محاسبه $\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{51}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{Sum}\left[\frac{1}{i}, \{i, 15, 51, 2\}\right]$$

با اجرای دستور فوق نتیجه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{6350.1391475806044193}{96845140757687397075}$$

عدد ۲ در دستور Sum همان نمو است که اختلاف بین هر دو اندیس متوالی در این مجموع را مشخص می‌کند.

اگر بخواهیم مقدار خروجی به شکل عددی مشخص شود، از دستور «NSum» به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{NSum}\left[\frac{1}{i}, \{i, 15, 51, 2\}\right]$$

که نتیجه برابر می‌شود با:

$$0. / 6557$$

۲. دستور حاصل ضرب

صورت کلی دستورالعمل حاصل ضرب برای محاسبه عبارت است از:

$$\text{Product}[a[i], \{i, m, n\}]$$

دستور فوق برابر با $\prod_{i=m}^n a_i$ است ($n \geq m$). نماد

حاصل ضرب در پنجره «Basic Math Input» به صورت $\prod_{i=m}^n \square$

است که با کلیک کردن روی آن و پر کردن مربع‌های خالی و

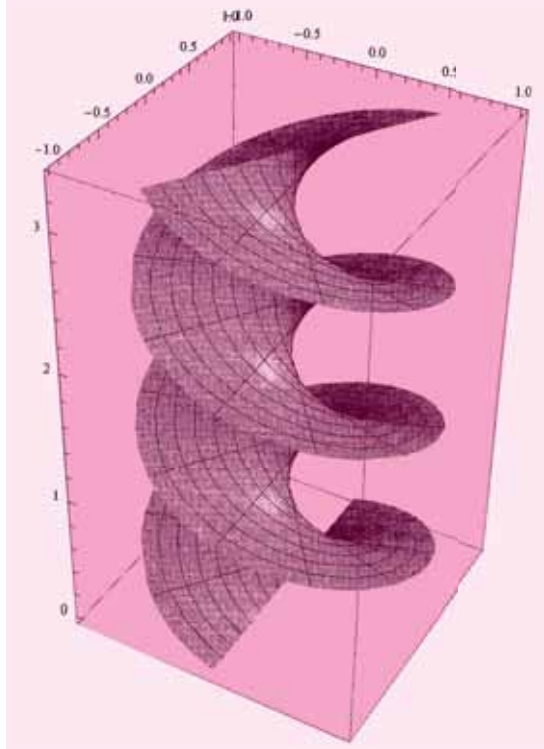
اجرای سلول مربوطه، حاصل ضرب موردنظر به دست می‌آید.

مثال: حاصل $7!$ با استفاده از دسته فوق به صورت زیر

حاصل می‌شود:

$$\text{Product}[i, \{i, 1, 7\}]$$

$$5040$$



می شود:

Factor Integer [n]

توجه کنید حروف F و I حتماً به صورت بزرگ تایپ شوند. با اجرای این دستور عامل‌های اول n به همراه تعداد آنها داخل آکلا‌د اعلام می‌شود.

مثال: دستورهای زیر عوامل اول اعداد ۸۱۰ و ۲۴۳۴۵۰۰ را مشخص می‌کنند.

FactorInteger[۸۱۰]

{ {۲, ۱}, {۳, ۴}, {۵, ۱} }

FactorInteger[۲۴۳۴۵۰۰]

{ {۲, ۲}, {۳, ۲}, {۵, ۳}, {۵۴۱, ۱} }

بنابراین:

$$۲۴۳۴۵۰۰ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵^۳ \times ۵۴۱ \text{ و } ۸۱۰ = ۲ \times ۳^۴ \times ۵$$

۷. دستور Quotient

به منظور محاسبه خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی m بر عدد طبیعی n از دستور «Quotient» به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

Quotient [m,n]

مثال: خارج قسمت تقسیم ۱۵۷ بر ۴ برابر است با ۳۹.

Quotient[۱۵۷, ۴]

۳۹

۸. دستور Mod

به منظور محاسبه باقی مانده تقسیم عدد طبیعی m بر عدد طبیعی n از دستور Mod به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

Mod [m,n]

۴. دستورهای Prime و PrimeQ

برای مشخص کردن n امین عدد اول بزرگ‌تر از یک، از دستور Prime به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

Prime[n]

مثال:

Prime[۷]

۱۷

Prime[۱۰۰۰]

۷۹۱۹

مثال: دستور زیر مجموع ۵۰ عدد اول طبیعی به صورت $۲ + ۳ + ۵ + ۷ + \dots + ۲۲۹$ را مشخص می‌کند:

Sum[Prime[k], {k, ۱, ۵۰}]

۵۱۱۷

هم‌چنین، دستور زیر حاصل ضرب ۵۰ عدد اول طبیعی به صورت $۲ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times ۲۲۹$ را مشخص می‌کند:

Product[Prime[k], {k, ۱, ۵۰}]

۶۴۶۹۶۹۳۲۳۰

برای مشخص کردن این که یک عدد مفروض طبیعی اول هست یا خیر، از دستور PrimeQ استفاده می‌کنیم. خروجی این دستور «True» یا «False» است که در حالت اول عدد اول است و در حالت دوم عدد غیر اول است.

مثال: در این مثال اول بودن عدد ۱۷۹ و غیر اول بودن عدد ۲۴۹ مشخص شده است.

PrimeQ[۱۷۹]

True

PrimeQ[۲۴۹]

False

۵. دستور Factorial

به منظور محاسبه فاکتوریل عدد طبیعی مفروض n از دستورهای زیر می‌توان استفاده کرد:

Factorial [n] یا n!

مثال: مقادیر $۱۰!$ و $\binom{۱۰}{۴} = \frac{۱۰!}{۴! \times ۶!}$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

۱۰!

۳۶۲۸۸۰۰

Factorial[۱۰]

۳۶۲۸۸۰۰

۱۰!

۴! × ۶!

۲۱۰

۶. دستور Factor Integer

به منظور مشخص کردن عوامل اول یک عدد طبیعی مفروض از دستور «Factor Integer» به صورت زیر استفاده

مثال: باقی مانده تقسیم ۱۵۷ بر ۴، یک، ۴۵ بر ۹، صفر و ۳۱۲۲ بر ۷، دو است:

$$\text{Mod}[157, 4]$$

۱

$$\text{Mod}[45, 9]$$

.

$$\text{Mod}[3122, 7]$$

۲

۹. دستور Divisors

به منظور مشخص کردن همه شمارنده‌های طبیعی یک عدد طبیعی مفروض از دستور «Divisors» استفاده می‌کنیم. مثال: دستورهای زیر همه شمارنده‌های طبیعی اعداد ۴۱، ۸۵۴ و ۱۷۲۹ را مشخص می‌کنند.

$$\text{Divisors}[1729]$$

$$\{1, 7, 13, 19, 91, 133, 247, 1729\}$$

$$\text{Divisors}[854]$$

$$\{1, 2, 7, 14, 61, 122, 427, 854\}$$

$$\text{Divisors}[41]$$

$$\{1, 41\}$$

۱۰. دستور العمل‌های GCD و LCM

به منظور محاسبه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م)

و کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد طبیعی مفروض، به ترتیب از دستورهای «GCD» و «LCM» استفاده می‌کنیم. از این دستورها برای محاسبه ب.م.م و ک.م.م چند عدد طبیعی مفروض هم می‌توان استفاده کرد. به این منظور کافی است این اعداد را داخل کروه در مقابل هر یک از این دستورها تایپ کنید.

مثال: ب.م.م اعداد ۵۳۵۵ و ۴۰۴۲۵ برابر ۱۰۵، ب.م.م اعداد ۱۲۵، ۵۰۵ و ۶۳۰ برابر ۵، ک.م.م اعداد ۴۸ و ۳۶ برابر ۱۴۴ و ک.م.م اعداد ۱۷۰، ۲۲۵، ۸۹ و ۳۴۲ برابر با ۱۲۹۳۶۱۵۰ هستند

$$\text{GCD}[5355, 40425]$$

$$105$$

$$\text{GCD}[125, 505, 630]$$

$$5$$

$$\text{LCM}[48, 36]$$

$$144$$

$$\text{LCM}[170, 225, 89, 342]$$

$$12936150$$

منبع

Mathematica, Eugene Don, Schaum's outline Series, McGraw Hill Comp, 2009.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: یک مسئله و سه جواب!

دیگر سود برد و در مجموع سه هزار تومان سود برد. جواب دوم: در ابتدا این وسیله ده هزار تومان ارزش دارد. سپس فروشنده اول در فروش نخست آن و خرید مجدد، دو هزار تومان سود برده است. اما پس او جنسی را که ده هزار تومان ارزش دارد، به نه هزار تومان می‌فروشد. سپس در معامله بعدی یک هزار تومان ضرر کرده است. لذا در مجموع سود خالص او هزار تومان است. جواب سوم: فروشنده اول از فروش نخست خود دو هزار تومان سود می‌برد. اما وقتی آن را به نفر دوم به قیمت نه هزار تومان می‌فروشد، او فقط آن را با نه هزار تومانی که می‌ارزد عوض می‌کند. لذا در معامله با فروشنده بعدی نه سود کرده است و نه زیان. بنابراین سود نهایی او دو هزار تومان است!

به نظر شما کدام جواب درست است! نظراتان را در این مورد حتماً برای ما بفرستید. این زمینه خوبی برای یک بحث سازنده ریاضی است. این نظرات و تحلیل‌مان را از آنها، در شماره بعد می‌آوریم.

یک فروشنده ابزارهای دست دوم و کار کرده، وسیله کار کرده‌ای را به قیمت ده هزار تومان به فروشنده دیگری فروخت. کمی بعد فروشنده دوم، چون نیازی به آن وسیله نداشت، آن را به فروشنده اول به قیمت هشت هزار تومان دوباره فروخت. سپس فروشنده دیگری آمد و آن را از همان فروشنده، به قیمت نه هزار تومان خرید. فروشنده اول چه قدر سود برد؟ جواب اول: فروشنده اول، از فروش اول خود دو هزار تومان سود برد، چون آن را ده هزار تومان فروخت و هشت هزار تومان خرید. اما پس از بازپس‌گیری آن به هشت هزار تومان، دوباره آن را به نه هزار تومان فروخت. پس هزار تومان



قضیه:
همه عددهای صحیح
جالب هستند!

اثبات با برهان خلف: فرض کنیم چنین نباشد و بعضی عددهای صحیح غیر جالب باشند. پس کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت و غیر جالب وجود دارد. اوه چه جالب! پس این عدد جالب است! (تناقض!)

المپیاد ریاضی در بلژیک

کلیدواژه‌ها: المپیاد ریاضی، بلژیک، اصل لانه کبوتر، هفت ضلعی



صورت مسائل

۱. ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\cos(\sin x) > \sin(\cos x) \quad (۱۹۷۶).$$
۲. ساکنان دهکده کوچک «دوران پون» را دو خانواده تشکیل می‌دهند: دوران‌ها و دوپون‌ها. دوران‌ها همواره راست می‌گویند و دوپون‌ها همواره دروغ. مسافری در خیابان اصلی این دهکده چهار نفر از ساکنان را ملاقات می‌کند و از آنها می‌پرسد که آیا دوران هستند یا دوپون. اولین نفر پاسخ می‌دهد: «همه ما دوپون هستیم.» دومین نفر می‌گوید: «نه این طور نیست، فقط یکی از ما دوپون است.» آنگاه سومین نفر اظهار می‌دارد: «گفته‌های آنها را باور نکنید. بین ما دقیقاً دو دوپون وجود دارد.» اما نفر چهارم فقط می‌گوید: «من دوران هستم.» آیا این نفر چهارم واقعاً یک دوران است؟ (۱۹۷۷)
۳. a, b و c سه عدد طبیعی هستند. اگر به ازای هر عدد طبیعی n ، مثلی وجود داشته باشد که a^n, b^n و c^n اندازه‌های ضلع‌های آن باشند، ثابت کنید که همه این مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند (۱۹۷۷).
۴. کدام عددهای طبیعی هستند که در تقسیم آنها بر ۲، ۳ و ۵، باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۱، ۲ و ۴ می‌شوند؟ (۱۹۷۸)
۵. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n ، چند جمله‌ای $x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}$ بر $x^2 + x + 1$ بخش‌پذیر است (۱۹۸۱).
۶. فرض کنید هر نقطه صفحه به یکی از دو رنگ آبی یا قرمز باشد. آیا الزاماً مثلی متساوی‌الاضلاع در صفحه وجود خواهد داشت که سه رأس آن از یک رنگ باشند؟ (۱۹۸۴)
۷. نقطه‌های A, B, C و D چهار رأس متوالی یک چندضلعی منتظم هستند. هرگاه $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ باشد، تعداد ضلع‌های این چندضلعی را مشخص کنید (۱۹۸۷).

مسابقه‌های ریاضی در بلژیک از دهه ۱۹۶۰ میلادی آغاز شده است. ابتدا همان پرسش‌های مسابقه‌های ریاضی دبیرستان‌های آمریکا در آنها مطرح می‌شد، اما از سال ۱۹۷۶، کشور بلژیک المپیاد ریاضی خاص خودش را سازمان‌دهی کرد و از سال ۱۹۸۲، این مسابقات در سه مرحله (دبیرستان، نیمه نهایی و نهایی) برگزار شده‌اند. مرحله نخست آزمون با پرسش‌های چندگزینه‌ای برگزار می‌شود که به نسبت سؤال‌های المپیادی رایج، آسان هستند، ولی گاهی هم پرسش‌های قابل تأمل و نسبتاً خوبی مانند این نمونه در آنها مطرح می‌شود:

● در دوزنقه‌ای متساوی‌الساقین، هر یک از دو ساق و قاعده کوچک به طول ثابت L هستند. مساحت این دوزنقه آن‌گاه ماکزیمم است که اندازه زاویه بین قاعده بزرگ و یک ساق آن برحسب رادیان برابر باشد با:

$$\text{الف) } \frac{\pi}{3} \quad \text{ب) } \frac{\pi}{4} \quad \text{ج) } \frac{\pi}{5} \quad \text{د) } \frac{\pi}{6}$$

اما پرسش‌های مرحله نهایی، مسائل قابل اعتنایی هستند و ما در اینجا تعدادی از آنها را همراه با راه‌حل‌هایشان می‌آوریم. لازم به ذکر است که همه این مسائل از کتاب «المپیادهای ریاضی بلژیک»، ترجمه استاد گران‌قدر، آقای **عبدالحسین مصحفی** - انتشارات فاطمی - برگرفته شده‌اند، اما راه‌حل مسائل در کتاب نیامده و همه راه‌حل‌ها از نگارنده است.

دوپون) است و لذا نفرات سوم و چهارم هر دو راست‌گو هستند. اما اگر او دروغ بگوید، آن‌گاه جمله او دروغ است. در نتیجه در آن جمع بیشتر از دو نفر دروغ گویند و لذا نفر دوم هم دروغ‌گوست. پس نفرات اول، دوم و سوم هر سه دوپون هستند. و چون نفر اول دروغ‌گوست، پس همه آنها دوپون نیستند و در نتیجه نفر چهارم دوران است. پس در هر صورت نفر چهارم دوران است.

۳. بدون آنکه به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم: $a \geq b \geq c$. اگر یکی از این مثلث‌ها متساوی‌الساقین نباشد، به ازای این یک مثلث خواهیم داشت: $a > b > c$ و در نتیجه به ازای هر عدد طبیعی n هم خواهیم داشت: $a^n > b^n > c^n$. اما اگر $a \geq 2b$ باشد، چون $b + c > a$ است، پس: $b + c \geq 2b$ و یا: $c \geq b$ که تناقض است (زیرا $b > c$). پس باید $a < 2b$ و از آنجا که به ازای هر عدد طبیعی n ، a^n و b^n اضلاع مثلثی هستند، پس با همین استدلال خواهیم داشت:

$$b^n < a^n < 2b^n$$

و در نتیجه:

$$b < a < \sqrt[n]{2} \cdot b$$

اما چون a و b عددهای طبیعی هستند و $\sqrt[n]{2}$ با زیاد شدن n مرتباً کوچک‌تر می‌شود، پس ممکن نیست که نابرابری فوق به ازای هر عدد طبیعی n برقرار باشد (زیرا بین b و $\sqrt[n]{2} \cdot b$ هیچ عدد طبیعی وجود نخواهد داشت). پس لازم است که لافل دو تا از این عددها با هم مساوی باشند و در نتیجه همه این مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند.

۴. اگر این عدد را a بنامیم، طبق فرض مسئله داریم:

$$a = 2m + 1 = 3n + 2 = 5p + 4$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$m = \frac{3n+1}{2} = n + \frac{n+1}{2} \Rightarrow n+1 = 2k \Rightarrow n = 2k-1$$

$$\Rightarrow 5p + 4 = 3(2k-1) + 2 = 6k - 3 + 2 = 6k - 1$$

$$\Rightarrow 5p = 6k - 5 \Rightarrow p = \frac{6k}{5} - 1 \Rightarrow k = 5k'$$

$$\Rightarrow p = 6k' - 1 \Rightarrow a = 5(6k' - 1) + 4 = 30k' - 1$$

یعنی این عددها به فرم $30k' - 1$ هستند (عددهایی که در

تقسیم بر ۳۰، باقی‌مانده ۲۹ دارند)؛ مانند ۲۹، ۵۹ و...

۵. از قضیه استقرای ریاضی کمک می‌گیریم:

$$n = 1: (x+1)^2 + x^2 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$= 2x^2 + 2x^2 + 2x + x^2 + x + 1 = 2x(x^2 + x + 1)$$

$$+ (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(2x + 1)$$



حل مسائل

۱. مسئله را به روش استدلال بازگشتی حل می‌کنیم. با توجه به

$$\text{اتحاد مثلثاتی } \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos \alpha \text{ می‌نویسیم:}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \sin x\right) > \sin(\cos x)$$

حال اگر انتهای کمان x در ناحیه‌های دوم و سوم باشد،

$$\cos x < 0 \text{ و در نتیجه: } \sin(\cos x) < 0. \text{ ولی چون } \sin x \leq 1,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \sin x\right) > 0 \text{ و در نتیجه: } \sin\left(\frac{\pi}{4} - \sin x\right) > \sin(\cos x) \text{ و لذا:}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \sin x\right) > \sin(\cos x)$$

اما اگر انتهای کمان x در نواحی اول و چهارم باشد، در

این نواحی $\cos x > 0$ و تابع سینوس یک تابع صعودی است.

پس از نابرابری فوق نتیجه می‌شود: $\sin x > \cos x$ و $\frac{\pi}{4} - \sin x > \cos x$

نتیجه

$$\sin x + \cos x < \frac{\pi}{4}$$

اما می‌دانیم:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

و بنابراین: $\sin x + \cos x < \frac{\pi}{4}$ و در نتیجه حکم قابل

اثبات است. استدلال اصلی را خودتان انجام دهید.

۲. بله او واقعاً دوران است، زیرا:

● اولین نفر به یقین دروغ می‌گوید، چون اگر راست‌گو باشد، طبق گفته خودش باید هر چهار نفر دوپون باشند و دروغ بگویند و این تناقض به وجود می‌آورد.

● نفر سوم یا راست می‌گوید یا دروغ. اگر او راست بگوید، آن‌گاه دقیقاً دو نفر دوپون هستند. در نتیجه نفر دوم دروغ‌گو (و

فرض:

$$n = k : (x+1)^{k+1} + x^{k+2} = P(x) \cdot (x^2 + x + 1)$$

حکم:

$$n = k+1 : (x+1)^{k+2} + x^{k+3} = Q(x) \cdot (x^2 + x + 1)$$

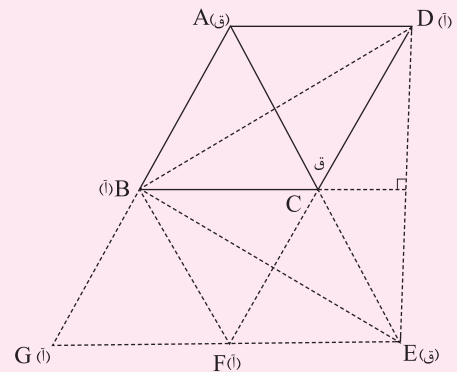
با توجه به فرض استقرا داریم:

$$(x+1)^{k+1} = P(x)(x^2 + x + 1) - x^{k+2}$$

و با جای گذاری در حکم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (x+1)^{k+2} + x^{k+3} &= [P(x)(x^2 + x + 1) - x^{k+2}](x+1) + x^{k+3} \\ &= P(x)(x^2 + x + 1)(x+1) - x^{k+2}((x+1) - x) \\ &= P(x)(x^2 + x + 1)(x+1) - x^{k+2}(x+1) \\ &= (x^2 + x + 1)[(x+1)P(x) - x^{k+2}] = Q(x)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

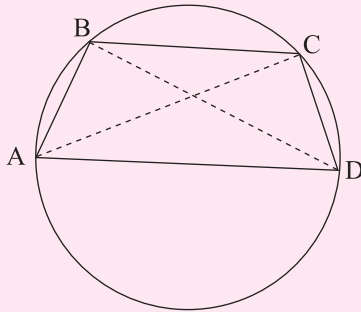
۶. این مسئله جالبی است. بدیهی است که طبق اصل لانه کبوتر، لاقل دو رأس از رئوس هر مثلث متساوی الاضلاع هم رنگ خواهند بود. فرض می کنیم دو رأس از رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع قرمز رنگ باشند؛ مثلاً رئوس A و C از مثلث ABC در شکل که با حرف ق مشخص شده اند. اگر رأس B هم قرمز باشد، مثلثی وجود دارد که سه رأس آن هم رنگ هستند. پس فرض می کنیم این رأس آبی رنگ باشد. حال مثلث متساوی الاضلاع ACD را بنا می کنیم و با همان استدلال رأس D هم باید آبی باشد.



از D بر امتداد BC عمودی رسم می کنیم و آن را امتداد می دهیم تا امتداد AC را در E قطع کند. مثلث CDE متساوی الساقین است (چرا؟) و داریم: $CF = CE = CD$. چون زوایای مثلث DBE 60° هستند، پس این مثلث هم متساوی الاضلاع است و در نتیجه E نمی تواند آبی باشد و قرمز است. بنابراین در مثلث متساوی الاضلاع AEF، F هم نمی تواند قرمز باشد و آبی است. با توجه به مثلث متساوی الاضلاع AEG، G هم باید آبی باشد و از آنجا در مثلث متساوی الاضلاع BFG هر سه رأس آبی هستند. پس در هر

حال مثلث متساوی الاضلاع وجود دارد که سه رأس آن هم رنگ هستند.

۷. اگر AB ضلع یک n ضلعی باشد، به کمک دستور محاسبه ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R داریم:



$AB = 2R \sin \frac{180}{n}$. همچنین، طول قطر AC را به کمک قضیه سینوس ها در مثلث ABC به دست می آوریم:

$$\hat{B} = 180 - (\hat{BAC} + \hat{BCA}) = 180 - 2\hat{BAC}$$

$$= 180 - \widehat{BC} = 180 - \frac{360}{n}$$

$$\Rightarrow AC = 2R \sin B = 2R \sin \frac{360}{n}$$

و به همین ترتیب داریم: $AD = 2R \sin \frac{540}{n}$ و با فرض $\frac{180}{n} = \alpha$ و فرض مسئله داریم:

$$\frac{1}{2R \sin \alpha} = \frac{1}{2R \sin 2\alpha} + \frac{1}{2R \sin 3\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha + \sin 2\alpha = \frac{\cos \alpha \sin 5\alpha - \cos 5\alpha \sin \alpha}{-2 \sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \cos 5\alpha - \cos \alpha = -2 \sin \alpha \sin 3\alpha - 2 \sin \alpha \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos 5\alpha - \cos \alpha = \cos 4\alpha - \cos 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos 5\alpha - \cos 4\alpha = \cos 3\alpha - \cos 2\alpha$$

$$\Rightarrow -2 \sin \frac{9\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = -2 \sin \frac{5\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{9\alpha}{2} = \sin \frac{5\alpha}{2} \Rightarrow \frac{9\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2} \quad (\text{و غ ق})$$

$$\frac{9\alpha}{2} = \pi - \frac{5\alpha}{2} \Rightarrow 7\alpha = \pi, \alpha = \frac{\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{7} \Rightarrow n = 7$$

یعنی چندضلعی فوق باید هفت ضلعی منتظم باشد.



فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای

قسمت
اول



کلیدواژه‌ها: اثبات، استدلال، استدلال ریاضی، شهود، خلاقیت، ریاضیات مدرسه‌ای، استدلال تجربی - دیداری، استدلال صوری



مقدمه

قضاوت در مورد درستی یک استدلال، قضیه یا گزاره‌ای در ریاضیات، از فرایندی به نام «اثبات» نشئت می‌گیرد. بسیاری از محققان آموزش ریاضی بر این باورند که فرایند استدلال و اثبات برای شناخت و انجام فعالیت‌های ریاضی و توسعه تفکر منطقی ضروری و یکی از ابزارهای مهم در آموزش و یادگیری ریاضیات است. برخی از آنان معتقدند یکی از وظایف اصلی تعلیم و تربیت، پرورش افرادی است که بتوانند به خوبی استدلال کنند و برای تصمیم‌گیری در مسائل زندگی و شرکت در بحث‌های منطقی آماده شوند.

«شورای ملی معلمان ریاضی» (NCTM، ۲۰۰۰) نیز در کتاب «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای» بیان می‌دارد که استدلال و اثبات ریاضی، درک و بینش افراد را در پدیده‌های گوناگون توسعه می‌دهد. همچنین، افرادی که استدلال می‌کنند و دارای تفکر تحلیلی هستند، قادرند که الگوها، ساختارها و نظم موجود در جهان واقعی را به خوبی درک کنند. این شورا اظهار می‌دارد که استدلال و اثبات نباید به عنوان فعالیت‌های ویژه و مخصوصی که به صورت یک موضوع جداگانه و خاص در برنامه درسی است، در نظر گرفته شوند، بلکه این مفاهیم باید به‌طور طبیعی و مداوم در همه بحث‌های کلاسی حضور داشته باشند.

علی‌رغم تأکید فراوان بر اهمیت و نقش استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، بسیاری از تحقیقات در آموزش ریاضی نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در همه سطوح تحصیلی در درک و فهم، و ساخت اثبات و استدلال‌های منطقی با مشکل مواجه می‌شوند. همچنین، پژوهشگران در تحقیقات خود به این نتیجه رسیده‌اند که برخی از دانش‌آموزان، ضرورت اثبات را درک نکرده و فقط در حد قبول شدن در امتحانات ریاضی برای آن اهمیت قائل‌اند.

با توجه به اهمیت موضوع، درک و فهم تعدادی از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان از استدلال و اثبات ریاضی و همچنین توانایی آنها در ساخت اثبات، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. بدین منظور پرسش‌نامه‌ای تهیه شد و تعدادی از دانش‌آموزان دختر و پسر که در رشته‌های ریاضی و تجربی مشغول به تحصیل بودند، آن را تکمیل کردند. در مقاله حاضر نتایج این بررسی مطرح می‌شود. در ادامه، پس از بیان ضرورت استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، نمونه‌هایی از استدلال دانش‌آموزان را در فرایند اثبات یک گزاره ریاضی، ارائه خواهیم کرد.

ضرورت و اهمیت استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای

محققان اهمیت استدلال و اثبات را در ریاضیات مدرسه‌ای مورد بحث قرار داده‌اند و در تحقیقات خود نشان

می‌دهند که درک و فهم ریاضی بدون تأکید بر استدلال و اثبات غیرممکن است. برخی از آنها معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبه ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. همچنین، آنها در

تحقیقات خود نشان می‌دهند، دانشی که فاقد توجیه کردن است، به راحتی می‌تواند غیرمنطقی و غیرمستدل باشد. هنگامی که ریاضیات به عنوان علمی مستدل به جای مجموعه‌ای از رویه‌ها

یاد گرفته می‌شود، دانش به‌دست آمده به راحتی می‌تواند بازسازی شود؛ حتی وقتی که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند. استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد که بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند. در واقع، استدلال ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند، فعالیت‌های ریاضی را به عنوان یک مجموعه منسجم و پیوسته ببینند و مفاهیمشان را به موقعیت‌های دیگر ارتباط دهند.

به‌طور کلی، اثبات در زمینه‌های گوناگون برای افراد مختلف، معانی متفاوتی دارد. داروساز ممکن است با استفاده از آزمایش روی چند نفر، خواص داروی موردنظر را برای درمان یک بیماری به اثبات برساند. برای آماردان، اثبات می‌تواند با یک احتمال معین اتفاق بیفتد. برای دانشمند تجربی، اثبات چیزی است که بتوان آن را آزمود. در زندگی روزانه نیز افراد به‌طور طبیعی از استدلال‌های غیررسمی استفاده می‌کنند که لزوماً درست نیستند؛ زیرا دقت و منطق لازم را ندارند. برای مثال، گاهی در روابط اجتماعی و زندگی روزمره از مثال‌هایی استفاده می‌کنیم که به راحتی ما را در مورد صحت یک رویداد متقاعد می‌کنند، اما ریاضی‌دان با این شواهد و مدارک قانع نمی‌شود.

در واقع ریاضی‌دانان معتقدند که اثبات ریاضی دارای شرایط و ملاک‌های دقیق‌تری است. آنها بر این باورند که استدلال از طریق مشاهده نمی‌تواند ثابت کند، زیرا چشم‌ها می‌توانند ما را منحرف کنند. اندازه‌گیری نمی‌تواند ثابت کند، زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه‌گیری، به دقت ابزار اندازه‌گیری بستگی دارد. آزمایش نیز به‌طور قطع ثابت نمی‌کند، زیرا نتایج حاصل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشد و پایدار نیست. البته در

برخی موارد، بین ریاضی‌دانان نیز نظرات و دیدگاه‌های متفاوتی در مورد نقش و اهداف اثبات و آن‌چه که یک اثبات را می‌سازد، مشاهده می‌شود. همان‌گونه که اهمیت اثبات و استدلال‌های منطقی برای ریاضی‌دانان مشخص شده است، دانش‌آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای استدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند.

از جمع‌بندی مباحث موجود در تحقیقات مرتبط با استدلال و اثبات می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت که به‌طور کلی، اثبات به معنای ارائه استدلال با استفاده از شواهد و مدارک موجود برای تأیید یا رد یک گزاره به منظور متقاعد کردن خود و یا دیگران است.

هارل و ساودر (۲۰۰۷) معتقدند معنای اثبات و نقش آن و هر آن‌چه که اثبات را می‌سازد و همچنین ملاک‌های تأیید و پذیرش اثبات، از شخصی به شخص دیگر و از جامعه‌ای به جامعه دیگر متفاوت است. بسیاری از محققان در زمینه آموزش ریاضی نیز معتقدند که برای ارائه اثبات باید به مخاطبان و جامعه موردنظر توجه داشت. برای مثال، اگر یک دانش‌آموز کلاس دوم ابتدایی بخواهد برای هم‌کلاسی‌هایش ثابت کند که حاصل جمع دو عدد، بزرگ‌تر یا مساوی با عدد بزرگ‌تر است، به احتمال زیاد باید گروهی از دانش‌آموزان را متقاعد کند که هنوز با کسرها و اعداد منفی آشنا نیستند. یا آن‌چه که به عنوان اثبات برای دانش‌آموزان کلاس پنجم مطرح و مورد قبول واقع شده، ممکن است به عنوان یک اثبات ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی مناسب نباشد.

در بحث استدلال و اثبات ریاضی، تنها جنبه منطقی مطرح نیست، بلکه کشف، شهود، خلاقیت، تحلیل، توضیح و ارتباطات، همه نقش اساسی دارند.

اهمیت اثبات در آموزش چیزی فراتر از تأیید و تصدیق است. اهمیت آن نیز بدین دلیل است که اثبات می‌تواند روش‌ها، مفاهیم و مسیرهای جدیدی را که در ریاضیات کاربرد وسیعی دارند، نشان دهد، اما نتایج ریاضی در نهایت باید به صورت دقیق اثبات شوند.

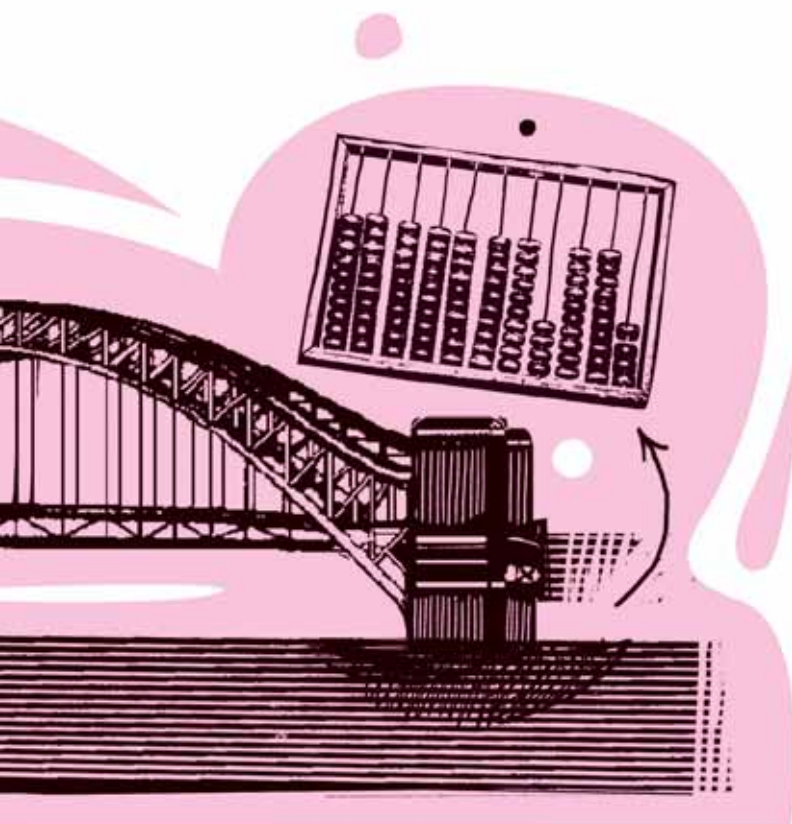
لازم به ذکر است که استفاده از مثال‌های عددی و شکل‌ها یا ابزار دیگر ریاضی در توضیح مفاهیم پیچیده در همه علوم و به‌خصوص در ریاضیات، بسیار مفید است، اما در مواردی که می‌خواهیم درستی یک گزاره ریاضی را به‌طور کلی نشان دهیم و یا به عبارت دیگر، ثابت کنیم، آن‌گاه باید محدودیت مثال‌ها و شکل‌های ریاضی را در نظر بگیریم. برای مثال، ممکن است که با بررسی چند عدد صحیح و یا اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ نتیجه بگیریم که مربع هر عدد حقیقی از خود آن عدد بزرگ‌تر است. در صورتی که اگر به اعداد بین ۰ و ۱ توجه کنیم (اعدادی که در بیشتر مثال‌ها نادیده گرفته می‌شوند)، آن‌گاه محدودیت مثال‌ها مشخص می‌شود.

بنابر ضرورت و اهمیت فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، در این مطالعه نیز عملکرد تعدادی از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان در این فرایند، از طریق توزیع و جمع‌آوری یک پرسش‌نامه بین آنها، مورد بررسی قرار گرفت که در ادامه، نمونه‌هایی از استدلال آنها برای اثبات درستی یک گزاره ریاضی ارائه خواهد شد.

دانش‌آموزان چگونه استدلال می‌کنند؟

در پرسش‌نامه از دانش‌آموزان خواسته شد که درستی گزاره زیر را ثابت کنند





حاصل جمع هر دو عدد فرد، برابر عددی زوج می‌شود.

استدلال برخی از دانش‌آموزان برای اثبات گزاره موردنظر، به شکل تجربی بود؛ یعنی استدلال‌هایی که براساس شکل (ارائه تصویر) و یا ارائه تعدادی مثال، درستی گزاره موردنظر را تأیید می‌کردند. نمونه‌ای از این استدلال‌ها در نمونه‌های ۱ و ۲ ارائه شده است.

۱. نمونه‌ای از استدلال تجربی ارائه شده توسط دانش‌آموزان

در مثال‌های زیر مشاهده می‌کنیم که جمع دو عدد فرد، عددی زوج است. هرچه مثال بیشتری بزنیم، باز هم نتیجه تغییری نمی‌کند:

$$۵+۳=۸, ۳+۳=۶, ۷+۵=۱۲$$

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که جمع دو عدد فرد یک عدد زوج می‌شود.

نظر شما در مورد این استدلال چیست؟ آیا شما آن را به عنوان یک اثبات می‌پذیرید؟

همان‌گونه که می‌دانیم، استفاده درست از مثال‌ها برای درک بهتر مطالب، روشی بسیار مؤثر و مفید است، اما آیا با ارائه چند مثال محدود می‌توانیم به یک نتیجه‌گیری کلی دست یابیم؟! حتی گاهی در زندگی روزمره نیز با ارائه چند مثال، از درستی یک موضوع، به‌طور کامل اطمینان پیدا نمی‌کنیم.

فرض کنید که ما ادعا کنیم، جمع هر دو عدد اول، عددی زوج است و با ارائه سه مثال $۳+۵=۸$ ، $۲+۷=۹$ و $۱۱+۷=۱۸$ ، درستی این ادعا را تأیید کنیم. آیا شما هم درستی آن را تأیید می‌کنید؟ با کمی دقت متوجه می‌شویم که در این مثال‌ها، وجود عدد اول را فراموش کرده‌ایم. این جاست که



از شکلی استفاده کرده است که ویژگی بارز و کلی همه اعداد فرد و اعداد زوج را نشان می‌دهد. اما به نظر می‌رسد ارائه چنین استدلالی در دوره متوسطه از طرف دانش‌آموزان رشته ریاضی و تجربی که با زبان ریاضی و شکل نمادین اعداد زوج و فرد آشنا شده‌اند و ضرورت و اهمیت استفاده از زبان ریاضی برای آن‌ها مشخص شده است، کافی نیست.

نمونه دیگری از پاسخ دانش‌آموزان را که به عنوان استدلال‌های صوری مشخص می‌کنیم، در نمونه‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌کنید. در این مطالعه، استدلال‌هایی را که صرف‌نظر از درستی یا نادرستی آنها با استفاده از نمادهای ریاضی بیان شده‌اند، استدلال صوری می‌نامیم.

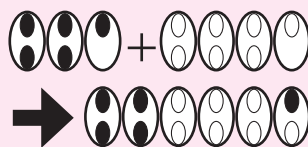
۳. نمونه‌ای از استدلال صوری ارائه شده توسط دانش‌آموزان

فرض می‌کنیم a عددی فرد باشد، آن‌گاه: $a+a=2a$. یعنی حاصل جمع بر ۲ بخش پذیر است. پس حاصل جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود.

محدودیت مثال‌ها مشخص می‌شود. به عنوان مثالی دیگر، حاصل عبارت n^2+n+41 را به ازای اعداد طبیعی $n=1, 2, 3, 4, 5$ به دست آورید. مقادیر به دست آمده اعدادی اول هستند. آیا می‌توان گفت که مقدار عبارت داده شده به ازای هر عدد طبیعی، عددی اول است؟ برای روشن شدن موضوع عدد ۴۱ را آزمایش کنید.

۲. نمونه‌ای دیگر از استدلال تجربی ارائه شده توسط دانش‌آموزان

اگر مانند شکل زیر، اعداد فرد را دسته‌بندی کنیم، حاصل جمع به صورت دسته‌های دوتایی در کنار هم قرار می‌گیرند. پس جمع دو عدد زوج نیز یک عدد زوج می‌شود.



این نوع استدلال که آن را به عنوان استدلال «تجربی-دیداری» مشخص می‌کنیم منطقی است، زیرا دانش‌آموز



دور زدن ارتباط دارد. (البته با عرض معذرت!) باید یک نکته را یادآوری کنیم که وقتی می‌گوییم استدلال‌های تجربی و استفاده از مثال‌های عددی برای اثبات گزاره‌های ریاضی کافی نیست و محدودیت دارد، منظورمان دست و پنجه نرم کردن با نمادهای ریاضی و حروف انگلیسی نیست تا شاید به جواب برسیم! همان‌طور که می‌دانیم، هدف استفاده از زبان ریاضی و نمادها در اثبات گزاره‌های ریاضی، خلاصه‌نویسی و عمومیت بخشیدن به مطلب موردنظر است.

برای مثال، وقتی بیان می‌کنیم که: $2+2=4$ و $4+4=8$ ، تنها نشان داده‌ایم که جمع عدد ۲ با خودش برابر ۴ و جمع عدد ۴ با خودش برابر ۸ است. اما وقتی فرض می‌کنیم که a یک عدد زوج است و نشان می‌دهیم که: $a+a=2a$. آن‌گاه می‌توانیم نتیجه بگیریم: «حاصل جمع هر عدد زوج دل‌خواه با خودش، عددی زوج می‌شود»، چون بر ۲ بخش‌پذیر است.

در نمونه ۶ نیز نمونه‌ای از استدلال دانش‌آموزان را که به شکل صوری ارائه شده و از لحاظ منطقی درست است مشاهده می‌کنید.

۶. و آخرین نمونه از استدلال صوری ارائه شده توسط یکی از دانش‌آموزان که صحیح است



فرض می‌کنیم $2a+1$ و $2b+1$ دو عدد فرد باشند، به‌طوری‌که: $b, a \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$2a+1+2b+1=2a+2b+2=2(a+b+1)$$

پس حاصل جمع دو عدد فرد، یک عدد زوج است، (چون بر ۲ بخش‌پذیر است) و بدین‌گونه درستی گزاره ثابت می‌شود.

در استدلال یاد شده، دانش‌آموز

متوالی، عددی زوج است.» پس این استدلال را نیز نمی‌توان به عنوان یک اثبات کلی و صحیح برای گزاره ارائه شده در نظر گرفت. این استدلال تنها برای یک موقعیت خاص درست است. گاهی دانش‌آموزان فکر می‌کنند که نمادهای ریاضی فقط جنبه تشریفاتی دارند. شاید این نوع نگاه و باور را بتوان در استدلال یکی از دانش‌آموزان مشاهده کرد (نمونه ۵).

۵. باز هم نمونه‌ای دیگر از استدلال صوری ارائه شده توسط یکی از دانش‌آموزان که تنها جنبه نمادین دارد

اگر x و y دو عدد فرد باشند و: $z=x+y$ ، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} x = z - y \\ y = z - x \end{cases} \Rightarrow x + y = z - y + z - x$$

در نتیجه: $2z = 2x + 2y$. پس حاصل بر ۲ بخش‌پذیر است. پس جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود.

شاید شما هم به این نتیجه رسیده باشید که استدلال فوق کمی بافرایند

۴. نمونه‌ای دیگر از استدلال صوری ارائه شده توسط دانش‌آموزان

فرض می‌کنیم که a عددی زوج باشد. پس $(a-1)$ و $(a+1)$ اعدادی فرد هستند و داریم: $2a = (a-1) + (a+1)$. همان‌گونه که نشان داده شد، جواب بر ۲ بخش‌پذیر است، پس زوج است.

شما چه فکر می‌کنید؟ آیا استدلال‌های فوق را به عنوان اثبات گزاره موردنظر می‌پذیرید؟ آیا این استدلال‌ها برای همه اعداد فرد برقرارند؟

با کمی دقت در نمونه ۳ متوجه می‌شویم که دانش‌آموز درستی این گزاره را ثابت می‌کند که: «حاصل جمع هر عدد فرد با خودش، عددی زوج است.» پس هنوز گزاره به‌طور کلی برای هر دو عدد فرد دل‌خواه ثابت نشده است. در نمونه ۴ نیز، وقتی $(a-1)$ و $(a+1)$ به عنوان دو عدد فرد با هم جمع می‌شوند، توجه داشته باشیم که این دو عدد فرد، متوالی (پشت سر هم) هستند. در واقع دانش‌آموز با ارائه چنین استدلالی، درستی این گزاره را نشان می‌دهد که: «حاصل جمع دو عدد فرد

به طور صحیح از نمادهای ریاضی استفاده کرده است؛ به گونه‌ای که $2a+1$ و $2b+1$ نماینده‌ای از دو عدد فرد دل‌خواه هستند و در حالت کلی، درستی گزاره مورد نظر ثابت می‌شود. البته بجاست که همانند شروع استدلال، در پایان آن نیز اشاره شود که: $(a+b+1) \in \mathbb{Z}$.

گاه حتی می‌توان بدون استفاده از نمادهای ریاضی، درستی یک گزاره را به طور منطقی ثابت کرد. در این مطالعه، استدلال‌هایی را که دانش‌آموزان صرف نظر از درستی یا نادرستی آنها برای تأیید گزاره مورد نظر به صورت توضیحی و بدون استفاده از فرمول ریاضی بیان کرده‌اند، تحت عنوان استدلال‌های روایت‌گونه مشخص کرده‌ایم. در نمونه ۷، نمونه‌ای از استدلال روایت‌گونه یک دانش‌آموز را مشاهده می‌کنید.

۷. نمونه‌ای از استدلال روایت‌گونه یکی از دانش‌آموزان

منظور از عدد فرد، عددی است که دارای چند جفت و یک تکه باشد.

مثلاً عدد ۳، از جمع ۲ و ۱ ساخته می‌شود و عدد ۵ هم برابرست با جمع ۴ و ۱. وقتی ۳ و ۵ را با هم جمع می‌کنیم، تکه‌ها کنار هم و جفت‌ها هم کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و داریم، $1+1=2$ و جمع دو عدد زوج هم زوج می‌شود، یعنی: $2+4=6$. عددهای ۳ و ۵ را برای مثال بگیریم، وگرنه این قانون برای جمع هر دو عدد فرد برقرار است.

همان گونه که در نمونه ۷ مشاهده می‌کنید، دانش‌آموز به شکل توضیحی و بدون استفاده از نمادهای ریاضی درستی گزاره مورد نظر را ثابت می‌کند. تعداد کمی از دانش‌آموزان با استفاده از زبان ریاضی و یا به صورت روایت‌گونه، گزاره ارائه شده در پرسش‌نامه را به درستی اثبات کرده‌اند. در صورتی که به نظر می‌رسید، گزاره ارائه شده در پرسش‌نامه برای دانش‌آموزان این مقطع، گزاره آشنایی باشد. علاوه بر این، دانش‌آموزان در کتاب‌های ریاضی سال اول و دوم دبیرستان با شکل نمادین اعداد زوج و فرد آشنا می‌شوند، لذا انتظار می‌رفت که عملکرد آنها در فرایند اثبات، عملکرد مناسبی باشد؛ اما

نتایج به گونه‌ای دیگر بود.

شما چگونه می‌اندیشید و دلیل عملکرد دانش‌آموزان را چگونه ارزیابی می‌کنید؟ آیا برای توسعه درک و فهم دانش‌آموزان و بهبود توانایی آنها در همه دوره‌های تحصیلی در زمینه استدلال و اثبات ریاضی پیشنهادی دارید؟

لازم به ذکر است که باور و دیدگاه افراد نسبت به مفاهیم استدلال و اثبات، می‌تواند بر توانایی آنها در اثبات درستی یا نادرستی یک ادعا تأثیرگذار باشد. همچنین، آشنایی درست با فرایند استدلال و اثبات و آگاهی از اهداف و کارکردهای آن در ریاضیات مدرسه‌ای نیز می‌تواند ما را در یادگیری بهتر این فرایند یاری رساند. در شماره‌های بعدی این مجله قصد داریم که با مفهوم استدلال و اثبات ریاضی و جایگاه آنها در ریاضیات مدرسه‌ای بیشتر آشنا شویم. تا آن هنگام از شما می‌خواهیم که روی این دو سؤال نیز فکر کنید:

۱. استدلال و اثبات ریاضی را چگونه تعریف می‌کنید؟
۲. با رعایت چه شرایطی می‌توانیم بگوییم که درستی یا نادرستی یک گزاره ریاضی را ثابت کرده‌ایم؟

منابع

۱. تال، دیوید (۱۳۸۵). ماهیت اثبات ریاضی. ترجمه عرفان صفر. مجله رشد آموزش ریاضی، ۸۳، ۱۷-۱۱.
۲. جهان‌شاهی، محمد (۱۳۸۰). اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی. انتشارات مدرسه. چاپ دوم. تهران.
۳. کلاهدوز، فهیمه (۱۳۹۰). بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، (دانشکده علوم پایه). تهران.
4. Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
5. Conner, A. (2007). *Student teachers' conceptions of proof and facilitation of argumentation in secondary mathematics classrooms*. Unpublished doctoral dissertation, The Pennsylvania State University, University Park.
6. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
7. Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
8. Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
9. NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
10. Varghese, Thomas, (2007). *Student teachers conception of mathematical proof*. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.





تاریخچه مجلات ریاضی ایران

کلیدواژه‌ها: تاریخچه مجله برهان، تقی فاطمی، مشاهیر ریاضی جهان، آدموند هالی، در باغ تجربه‌ها، ذهن ریاضی، نظریه فاجعه

اشاره

شماره ۲۱ برهان متوسطه در تابستان ۱۳۷۶ انتشار یافت. این شماره در سال هفتم نشر مجله منتشر شد. در مقاله «تاریخچه مجلات ریاضی ایران» این شماره شرح حال **پروفسور تقی فاطمی**، استاد ارجمند دانشکده ریاضی دانشگاه تهران را می‌خوانیم. در این شرح حال چنین آمده است: قبل از تحصیلات عالی، در یزد به عنوان **مفتش معارف** خدمت می‌کردم و ضمن آن در مدارس آن‌جا به تدریس اشتغال داشتم. بعد که در اصفهان مدرسه متوسطه دایر شد، به آنجا رفتم و دو سال آخر تحصیلات متوسطه را در مدرسه صارمیه گذراندم. مدیر این مدرسه آقای **ضیاءالدین جناب** بودند که هنوز هم مشغول به خدمت فرهنگ می‌باشند و اگر در کار خود توفیقی داشته‌ام، آن را مرهون تشویق‌های ایشان می‌دانم. از جمله معلمان مرحوم، **مهندس علی ریاضی** و **مرحوم غلامحسین زیرک‌زاده** بودند و دیگری **استاد جلال‌الدین‌ا‌همایی** که نه تنها حق تعالیم بر بسیاری از اشخاص را دارد، بلکه با تبحری که در بیشتر علوم و فنون دارد و با تحقیقات و تتبعاتی که در آثار گذشتگان از علمای ایرانی به عمل آورده است، فردی ممتاز می‌باشد.

در سال ۱۳۰۶ با اولین دسته محصلین که از طرف وزارت جنگ به فرانسه اعزام می‌شد، به این کشور رفتم. با وجود این که در امتحان مسابقه اعزام رتبه اول شده بودم و می‌توانستم رشته پزشکی را که آن موقع داوطلب زیاد داشت و از نظر مادی هم دورنمای خوبی داشت انتخاب کنم، اما به علت شوق باطنی، رشته معلمی را انتخاب کردم و داوطلب ورود به «دانش‌سرای

عالی» (Ecole Normale Supérieure) پاریس شدم. در فرانسه هنوز دیپلم ایران را نمی‌شناختند. مرا در کلاس پایان تحصیلات متوسطه قبول کردند. اما بعد از یکی دو هفته که معلومات مرا سنجیدند، به کلاس تهیه «*Mathematiques speciales*» دانشگاه منتقل شدم. به علاوه همین موضوع باعث شد از آن تاریخ به بعد در فرانسه دیپلم ایران را بشناسند.

سه سال در کلاس تهیه ماندم و بعد در امتحان مسابقه ورودی مدارس بزرگ شرکت کردم. در امتحان کتبی پذیرفته شدم، اما فقط در امتحان شفاهی «*کل نرمال سوپریور*» شرکت کردم و پذیرفته شدم. طبق معمول در سال اول، دروس دوره لیسانس ریاضی را تهیه کردم و گذراندم و در دو سال آخر دوره مدرسه برای تعلیم و تدریس مهیا شدم. ضمناً دیپلم هندسه عالی را گرفتم. بالاخره در آخرین مرحله، امتحان «*آگروگاسیون*» را گذراندم و قبول شدم. در این موقع، سال ۱۳۱۲، به ایران برگشتم. ابتدا دو سه ماهی منحصراً در مدارس نظام مشغول بودم. بعد با اقداماتی که از طرف وزارت فرهنگ به عمل آمد، به آن وزارت منتقل شدم و در دانشکده علوم و دانش‌سرای عالی به تدریس مشغول شدم. علاوه بر آن، در دانشکده فنی هم تدریس داشتم. در ابتدای ورود، در چند رشته تدریس می‌کردم؛ علاوه بر مکانیک استدلالی که هنوز هم درس می‌دهم، مادامی که استاد به قدر کافی نبود، در دانشکده علوم، ریاضیات عمومی و آنالیز را نیز تدریس می‌کردم.

غیر از تدریس، فقط چند ماهی در وزارت فرهنگ به عنوان مدیرکل فنی خدمت کرده‌ام. بعد آن را کنار گذاشتم؛ شغل معلمی را به هر کار دیگر ترجیح می‌دهم.

در مقاله «آموزش ریاضی با تأکید بر کاربردها» از محسن صدیقی در مورد «رفع خودناباوری» این مطلب آمده است: «یکی از مسائلی که بین دانشجویان ریاضی (و در کل علوم)، به خصوص در مقایسه با دانشجویان مهندسی و پزشکی، کاملاً محسوس است، این نکته می باشد که دانشجوی کارشناسی ریاضی مشخص ترین جایگاه خود در اجتماع را تدریس می بیند. و علی رغم این که برای شأن معلم صحبت های بسیاری مطرح می شود، در عمل یک مهندس یا پزشک از جایگاه اجتماعی بالاتری برخوردار است. این موضوع تا آن جا پیش می رود که چه بسا دانشجوی ریاضی خود را از مرتبه پایین تری نسبت به دانشجوی مهندسی و پزشکی احساس می کند. به نظر من این که دانشجو بداند چه جایگاهی در شاخه های متفاوت علوم و فناوری می تواند داشته باشد، در خودباوری او کاملاً مؤثر است.»

مقاله «مشاهیر ریاضی جهان» نیز شرحی دارد درباره زندگی نیوتن، از فرهنگ ریاضیات آکسفورد که در آن چنین آمده است: «نیوتن، ایزاک (۱۶۴۲-۱۷۲۷). نیوتن به عنوان پسر کشاورزی در لینکلن شایر تولد و رشد یافت، تا بر ریاضیات و فیزیک قرن هفدهم حکومت کند و در آنها انقلابی به وجود آورد. اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال، نظریه مکانیک، قانون جاذبه، نظریه حرکت سیاره ای، نظریه رنگ ها، سری دو جمله ای و نتایج مهم بسیاری در نظریه معادلات را به او مدیونیم. کار آنالیز عددی بدون روش نیوتن لنگ می ماند. اظهارات در خور شایستگی های نسبی ریاضی دان هایی با این درجه استعداد، همواره بحث برانگیز بوده است، اما در مورد نیوتن، از آن جا که به نظر می رسد که هم گاوس هم اینشتین مقام برتر را به نیوتن داده اند، نیاز به مجادله نیست. تنفری بیمارگونه از انتقاد، نیوتن را از نشر بسیاری از آثارش بازداشت.

در سال ۱۶۸۴، ادموند هالی^۱ که ستاره دنباله داری به نام اوست، به نیوتن پیشنهاد کرد در مورد قانون جاذبه ای که قوانین حرکت سیاره ای کپلر را به دست می دهد، تحقیق کند. نیوتن که قبلاً در مورد این موضوع کار کرده بود، بلافاصله پاسخ داد که قانون مربع معکوس است. هالی که از این واقعه تقریباً تکان خورده بود، بر آن شد که نیوتن را به چاپ نتایجش وادارد و نیوتن سرانجام این کار را انجام داد. نیوتن هنگام تصدی امور ضرابخانه مدیر بسیار قابل بود و اصلاحات عمیقی در پول



رایج بریتانیا انجام داد. مقبره و بنای یادبودش در کلیسای وست مینستر واقع است. ولتر در مورد نیوتن چنین گفت: مدفون چونان سلطانی.»

در مقاله «ترکیبیات» از سیمین اکبری زاده در مورد این شاخه مهم ریاضیات معاصر چنین می خوانیم: «ترکیبیات شاخه ای بسیار قدیمی از ریاضیات است که بیشتر هنگام مطالعه جایگشت ها و ترکیب ها با آن آشنا شده ایم. در سال های اخیر، هم به دلیل آن که رایانه ها امکان محاسبات ترکیباتی را که پیش از این ممکن نبود، فراهم ساخته اند، و هم به این دلیل که بسیاری از مسائل ریاضی که در تحقیقات علوم رایانه ای مطرح شده اند، به روش های ترکیباتی نیاز دارند، رشدی انفجرامیز در این زمینه به وجود آمده است.» در مقاله «در باغ تجربه ها» پای صحبت استاد احمد بیرشک می نشینیم. در آن چنین آمده است:

○ استاد به نظر شما فلسفه ریاضیات چیست؟ آیا فلسفه

ریاضی بخشی از ریاضیات است یا بخشی از فلسفه؟

● تعداد رشته های ریاضی در حال حاضر آن قدر زیاد است که هیچ کس نمی تواند در همه رشته های ریاضی تخصص داشته باشد. حتی در بعضی از رشته ها یک عمر لازم است تا آدم تخصص پیدا کند. فلسفه ریاضی به معنی فلسفه نیست، بلکه روش هایی که برای آسان کردن درک ریاضی و تمرینش بودن آن است، مجموعاً فلسفه ریاضی را تشکیل می دهند. کتاب های فلسفه ریاضی مرتب روی روش های متفاوت ریاضی بحث می کنند.

○ در این مرحله خوش حال می شویم از خاطرات خودتان

برایمان بگویید.

● من درباره خاطراتم نمی توانم زیاد صحبت کنم، به دلیل این که عمرم دراز بوده و سراسر خاطره است. انتخاب کردن و گلچین کردن هم مشکل است. دیگر این که خاطرات افراد خیلی به درد دیگران نمی خورد. بنابراین من فقط می توانم درباره یک خاطره ریاضی که به قول یکی از دوستان به داستان می ماند، صحبت کنم: من تحصیلاتم بسیار نامرتب بود، برای این که در خدمت پدر بودم. پدر عضو گمرک بود و مجبور بود در مرزها خدمت کند. آن وقت ها هم که من نوجوان بودم، در مرزهایمان هیچ وسیله تحصیل نبود. در نتیجه مقدمات را پیش پدر آموختم و بعد هم خودم شروع کردم پیش خودم کار کردم. بنابراین خیلی جنبه خودآموخته دارم. چیزهایی که یاد گرفتم خودم یاد گرفتم. باری در دوره



گفت: «خوب، اسم شما چیست؟»

گفتم: «اسم بنده احمد بیرشک است.»

گفت: «آقای احمدخان بیرشک جناب‌عالی هستید؟!»

گفتم: «بله بنده هستم.»

گفت: «خوب فردا صبح بیایید امتحان بدهید.»

روز بعد رفتم امتحان دادم و بالاخره رفتم کلاس پنجم. این مطلب برای من معما شده بود که چه‌طور آدمی که تهران را بلد نیست، دو تا آدم بزرگ مثل رییس و ناظم یک مدرسه با اسمش آشنا هستند و اسمش مشکل‌گشا می‌شود؟! تحقیق کردم و معلوم شد، مدرسه شرف شاگردی داشت در کلاس سوم، هم‌کلاس من که می‌خواست امتحان بدهد. این‌ها دنبال آن بودند که شاگرد اول ایران را بیرون بدهند. **عبدالرسول دبیر** که شاگردشان بود، امتحانات را داده نبود و بعد که رفته بودند نتیجه را بگیرند، دیده بودند عبدالرسول دبیر با معدل ۱۵/۸۷ شده شاگرد اول ایران. اما دو نفر معدل ۱۵/۸۷ دارند: یکی همین عبدالرسول دبیر است و یکی هم احمد بیرشک. اسم من به خاطرشان مانده بود. پس وقتی من آمدم به ایشان گفتم اسمم احمد بیرشک است، دیدند این همان کسی است که با شاگرد اولشان هم نمره است.

در مقاله «مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان» زیر عنوان «یک ذهن ریاضی حیرت‌انگیز» در شرح حال **گاوس**، ریاضی‌دان بزرگ آلمانی، چنین می‌خوانیم: «**کارل فردریش گاوس** در سال ۱۷۷۷ در **برونسویک** که اکنون در آلمان غربی است، متولد شد. پدرش بنا بود و امید داشت که

ابتدایی فقط شش ماه مدرسه رفتم و دوره متوسطه شش ساله را در دو سال طی کردم. یعنی سال‌های اول و دوم متوسطه را تابستان پیش معلمی خواندم، سال سوم را در مدرسه خواندم، سال چهارم را پیش خودم خواندم، سال پنجم را در مدرسه خواندم، و سال ششم را پیش خودم خواندم تا دوره متوسطه تمام شد.

خاطره‌ای که دارم درباره سال چهارم است. من سال سوم را که امتحان دادم، کتاب‌ها را زدم زیر بغل و رفتم خدمت پدر که تابستان را با هم باشیم. در آن‌جا تا توانستم تلاش کردم و یاد گرفتم. آمدم تهران که کلاس چهارم را امتحان بدهم و بروم کلاس پنجم. وقتی که آمدم شهریور گذشته بود و امتحانات تمام شده بود. به هر مدرسه‌ای که برای امتحان تجدیدی رفتم، گفتند امتحاناتمان تمام شده، کاری نمی‌توانیم بکنیم. اما من هم نمی‌خواستم یک سال عمرم تلف بشود. بعد از این‌که از همه جا ناامید شدم، به من خبر دادند که در خیابان امیریه، خیابان منیریه، مدرسه‌ای هست به نام «شرف مظفری». آخرین امید بود.

رفتم به مدرسه. مدیر مدرسه مردی بود خیلی جدی و با هیبت و وسط‌اتاق‌ایستاده بود. سلامی کردم و گفتم ماجرا این است. می‌خواهم امتحان بدهم. گفت: «امتحاناتمان تمام شده، نمی‌توانیم امتحان بگیریم، پسر برو.»

اصرار کردم، به دلیل این‌که آخرین امید بود. گفت: «بهت می‌گویم نمی‌توانیم. پسر اسمت چیست؟»

گفتم: «اسم احمد بیرشک است.»

گفت: «احمد بیرشک تویی؟!»

گفتم: «بله.»

گفت: «خوب برو به آن آقای ناظم که کنار استخر راه می‌روند بگو برای یک فکری بکنند.»

من با خوش‌حالی رفتم سراغ آقای ناظم. سلام کردم. آقای ناظم همان کسی بود که بعدها در وزارت آموزش و پرورش به وزارت رسید؛ **دکتر مهران**. آن وقت اسمش **صادقی** بود. رفتم سلام کردم و مطلبم را گفتم. ایشان خیلی مؤدب، نه این‌که بگویند پسر برو، گفت: «خیلی معذرت می‌خواهم. خیلی دلم می‌خواست کاری انجام بدهم، ولی امتحاناتمان تمام شده و کاری نمی‌توانیم بکنیم.»

گفتم: «آقای ناظم! آقای مدیر به من گفتند که بیایم خدمت شما برایم کاری انجام بدهید، نه این‌که بگویید نمی‌شود.»

گفت: «آقای مدیر فرمودند؟»

گفتم: «بله.»

پس‌رش بتواند در کارها به او کمک کند. هنگامی که گاوس در سه سالگی توانست محاسبات پرداخت حقوق پدرش را تصحیح کند، چنین معلوم شد که شغل اخیر شغلی است که گاوس کوچک بسیار مناسب آن است. خوش‌بختانه از لحاظ آینده ریاضیات (اگر از فیزیک و نجوم چیزی نگوییم) حاکم آن ناحیه از نبوغ کودک خردسال آگاه شد و تعلیم مرتب او را برقرار ساخت. گاوس در سن ۱۵ سالگی، در حالی که بسیار جلوتر از توانایی‌های معلمان خود بود، به کالج کارولین رفت. طی سه سال استادان این کالج هم مجبور شدند بپذیرند که آنها را نیز پشت‌سر نهاده است.»

«ادب ریاضی» این شماره درباره روش اصل موضوعی چنین می‌گوید: «روش اصل موضوعی در ریاضیات امروز گسترش و توفیق زیادی پیدا کرده است. سرچشمه این روش را باید کشف هندسه ناقلیدسی لباچفسکی دانست. این روش، در تماس و برخوردی که با دیگر اندیشه‌ها داشت، نه تنها روش‌های تازه‌ای را به‌وجود آورده، بلکه ضمناً موجب پیدایش شاخه‌های تازه‌ای در اندیشه فیزیک و ریاضی شده است. یکی از نمونه‌های حاصل از این روش، فضای هیلبرتی است که در مکانیک کوانتایی مورد استفاده قرار گرفته است. پیشرفت روش اصل موضوعی را می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد: مرحله نخست از لباچفسکی آغاز می‌شود و با کوشش‌های هیلبرت درباره اصل موضوعی کردن ریاضیات پایان می‌یابد و مرحله دوم از زمان هیلبرت تا امروز ادامه دارد. مرحله دوم عبارت است از تلفیق مضامین هندسی با آموزشی که همراه با آن تکامل یافته و به منطق صوری یا منطق ریاضی مشهور شده است.»

بعضی دیگر از مقالات این شماره عبارت‌اند از:

- شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید/ پرویز شهرباری
- رسم نمودار تابع $f/1$ روی نمودار تابع $f/احمد$ قدهاری
- در حاشیه تابع/ حمیدرضا امیری
- رادیکال/ سیدمحمد رضا هاشمی موسوی
- نامساوی‌ها در احتمال/ سیامک جعفری
- منطق خود را بیازمایید/ حسن نصیرنیا
- مکان هندسی/ محمد هاشم رستمی

بیست و دومین شماره برهان در پاییز ۱۳۷۶ انتشار یافت. در «ادب ریاضی» این شماره درباره اولین شاخه و انشعاب علمی از کتاب «تاریخ علوم» پی‌یر روسو چنین

آمده است: «اولین شاخه و انشعاب علمی، آن شعبه‌ای بود که مطلقاً به تجربه احتیاج نداشت و برای پیدایش آن حداقل توجه و علاقه‌مندی لازم بود. اما چه کسی برای این کار علاقه‌مندتر از چوپانی است که چون گله خود را به چراگاه می‌برد، شبانه‌گاه هنگام مراجعت می‌خواهد بداند که همه آنها به جای خود هستند یا نه؟ خواهید گفت که برای اطمینان از این مطلب کافی بود که چوپان گوسفندان خود را بشمارد. اما چوپان عهد حجر هنوز شمردن نمی‌دانست و با این حال طبعاً چهل و مانع آن نمی‌گردید که وی تعداد واقعی آنها را معین کند. زیرا مرغ خانگی نیز که حساب و حساب کردن نمی‌داند، هنگامی که یکی از جوجگان او غایب باشند، ناله و فریاد می‌کند و او را می‌طلبد.

اما به زودی، چه چوپان و چه آن کشاورزی که احتیاج داشت تا وسعت مزرعه خود را تعیین کند و چه بسیار کسان دیگر، در نتیجه احتیاج مجبور شدند نوعی وسیله شمارش دقیق‌تر - غیر از غریزه طبیعی خود - به‌وجود آورند و برای این کار انگشتان دست، دستگاه حساب کردن آماده و مهیایی بود.»

در مقاله «رسم منحنی‌های توابع سینوسی و کسینوسی» از میرشهرام صدر درباره حرکت تناوبی چنین می‌خوانیم: «هر حرکتی که در بازه‌های زمانی مساوی تکرار شود، حرکت تناوبی است. جهان پر از حرکت‌های تناوبی است که از آن جمله می‌توان از نوسان‌های رقاصک ساعت مچی، سیم تار مترتشی، جرم آویزان متصل به فنر در حال نوسان، عقربه کوچک ساعت که بعد از طی ۱۲ ساعت دوباره مسیر اولیه را تکرار می‌کند و پاندول ساعت که هر رفت و برگشت را در مدت یک ثانیه طی می‌کند و دوباره مسیر رفت و برگشت اولیه را تکرار می‌کند.»

در مقاله «مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان» در مورد قضایای «سِوا» و «مِنلائوس» آمده است: «قضایای سِوا و مِنلائوس که به‌زودی از آنها سخن خواهیم گفت، از جذاب‌ترین و پربارترین قضایای هندسه مسطحه مقدماتی هستند. بیان این قضایا آسان، و خود قضایا کاملاً عمومی‌اند. مثلاً قضیه منلائوس، در مورد هر مثلث و هر خط قاطع ناگذرنده از رأس آن به‌کار می‌رود. این قضایا و اثبات آنها، چنان که از نامش پیداست، قضایایی کلاسیک‌اند. منلائوس یونانی در قرن اول میلادی می‌زیست، و جیووانی سوای ایتالیایی^۲ قضیه خود (و قضیه دوباره کشف کرده منلائوس) را در قرن هفدهم میلادی انتشار داد.»

در مقاله مشاهیر ریاضی جهان درباره رنه توم، واضع

«نظریه فاجعه» این مطلب را می‌خوانیم: «توم، رنه (۱۹۲۳-). توم ریاضی‌دانی فرانسوی است که بیشتر به‌خاطر نظریه ساخت تکوینی معروف است. این نظریه که به نظریه فاجعه مشهور است، یکی از کوشش‌های جدی و معدود در به‌کار گرفتن ریاضیات در قالب‌ها و جریانات موجودات زنده است. اغلب کوشش‌های قبلی به‌طور طبیعی در مسیر کمی بودن در سنت ریاضیات کاربردی انجام گرفته‌اند، و توسط پیچیدگی محض طبیعت با شکست مواجه شده‌اند. نظریه توم از این توان برخوردار است که هم کیفی و هم دقیق است.»

در ادب ریاضی این شماره، در مطلبی درباره تاریخ ریاضی آمده است: «این قدر می‌دانیم که در حدود سال ۴۵۰ قبل از میلاد مسیح یونانیان دارای هندسه‌ای بدوی و مقدماتی بوده‌اند. موضوع این هندسه فقط طریقه‌های عملی و دستوره‌های قابل استفاده در اندازه‌گیری طول پارچه یا میزان محصول زیتون نبوده است، بلکه استدلال‌ها و براهین منطقی متصل به یکدیگر در آن دیده می‌شد که در حدود هندسه مقدماتی ما بوده‌اند. بدون شک این استدلال‌ها

چندان دقیق نبوده‌اند و بیشتر از الهام و مکاشفه استفاده می‌کردند تا از منطق و بیشتر آنها مربوط به ساختمان‌های هندسی بوده‌اند.»

بعضی دیگر از مقاله‌ای این شماره عبارت‌اند از:

- شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید/ پرویز شهریاری
 - چند نکته درباره $f(x)$ /احمد قندهاری
 - در حاشیه تابع/حمیدرضا امیری
 - ریاضیات گسسته/غلامرضا یاسی‌پور
 - هم‌ارزی قضیه‌های مقدار میانی و بولتزانو/محمدصادق عسگری
 - روش‌های عددی برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال‌های معین/سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
 - میانگین همساز/پرویز شهریاری
 - تئوری زوج خط/سیامک جعفری
 - کامپیوتر و شغل آینده/محسن صادقی مشکنانی
- مجله با حل مسئله مسابقه‌ای برهان ۲۰ و حل مسئله‌های برهان شماره ۲۱ پایان می‌پذیرد.

پی‌نوشت

1. Edmond Halley

2. Giovanni Ceva

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

چند معمای خرافه‌دستی

● این معما را برای هر کس که نقل کنید و برای نخستین بار پاسخ صحیح بدهد، به راستی انسان باهوشی است! اول خودتان امتحان کنید، بعد حتماً برای دیگران هم آن را مطرح خواهید کرد. برای حل آن اطلاعات زیادی هم نیاز ندارید، کافی است با چهار عمل اصلی و شمارش اعداد آشنا باشید. این شما و این هم معمای ویژه اول: اتوبوسی از مبدأ حرکت خود با ده مسافر به راه می‌افتد. در ایستگاه اول سه مسافر پیاده و دو مسافر سوار می‌شوند، در ایستگاه بعد دو مسافر پیاده و سه مسافر سوار می‌شوند، در ایستگاه بعد چهار مسافر سوار و دو نفر پیاده می‌شوند، در ایستگاه بعد دو نفر پیاده می‌شوند، در ایستگاه بعد پنج نفر پیاده و دو نفر سوار می‌شوند، در ایستگاه بعد تنها سه نفر سوار می‌شوند و بالاخره در ایستگاه آخر دو نفر پیاده می‌شوند. پس از آن هم اتوبوس به مقصد نهایی می‌رسد. حالا بگویید در این مسیر چند ایستگاه وجود داشت!

● این یکی کمی جدی است و به قشنگی معمای اول نیست! کاوه و شهریار دو برادر دوقلو و کاملاً شبیه به هم بودند. من سال‌ها پیش با آنها آشنا بودم و می‌دانستم که یکی از آنها همیشه دروغ و دیگری همیشه راست می‌گوید. ولی حالا یادم نیست کدام دروغ‌گو و کدام راست‌گو بود. حالا بعد از سال‌ها آنها را پیدا کرده‌ام و می‌خواهم کاوه را بشناسم، چون با او کار واجبی دارم! چه‌طور می‌توانم با یک سؤال - بله فقط یک سؤال، آن هم سؤالی که پاسخ آن فقط بله یا خیر باشد - کاوه را بشناسم؟! توجه داشته باشید فقط می‌توانم یک سؤال از یکی از آنها بپرسم. پاسخ را در شماره آینده ببینید.



یک نابرابری مرتبط با نقطه ویژه‌ای در مثلث

کلیدواژه‌ها: نقطه داخلی مثلث، نقطه فرمایی، نقطه بروکارد، نابرابری کوشی، قضیه سینوس‌ها، قضیه کسینوس‌ها

مقدمه

F را یک نقطه داخلی مثلث ABC در نظر بگیرید. آن‌گاه
F «نقطه فرمایی» مثلث نامیده می‌شود اگر:

$$\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120^\circ$$

همچنین، Ω را یک نقطه داخلی مثلث ABC در نظر
بگیرید. آن‌گاه Ω «نقطه بروکارد» مثلث نامیده می‌شود اگر:

$$\widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BC} = \widehat{\Omega CA}$$

در مورد نقطه فرما و نقطه بروکارد مثلث تعدادی مقاله
وجود دارد که این مقاله نتیجه جدیدی به آنها افزوده است.

نتیجه مهم

قضیه ۱: فرض کنید F نقطه فرمایی مثلث ABC باشد که:
 $\widehat{BCA} < 120^\circ$ ، $\widehat{ABC} < 120^\circ$ و $\widehat{CAB} < 120^\circ$.

و نیز فرض کنید Ω_a ، Ω_b و Ω_c به ترتیب نقطه‌های بروکارد
مثلث‌های FCB، FCA و FAB را مشخص کنند و بتوانید

بنویسید:

$$\widehat{\Omega_a FB} = \widehat{\Omega_a BC} = \widehat{\Omega_a CF} = \alpha$$

$$\widehat{\Omega_b FC} = \widehat{\Omega_b CA} = \widehat{\Omega_b AF} = \beta$$

$$\widehat{\Omega_c AB} = \widehat{\Omega_c BF} = \widehat{\Omega_c FA} = \gamma$$

آن‌گاه داریم:

$$\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma \geq 5\sqrt{3}$$

لیم ۱: اگر نقطه فرمایی مثلث ABC باشد و: $\widehat{BCA} < 120^\circ$
و $\widehat{ABC} < 120^\circ$ و $\widehat{CAB} < 120^\circ$ و اگر طول اضلاع CA، BC
و AB را به ترتیب با a، b و c مشخص کنیم و مساحت مثلث
ABC را با Δ نشان دهیم، آن‌گاه داریم:

$$(AF + BF + CF)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\Delta$$

اثبات: به کار بردن قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCF

نتیجه می‌دهد:

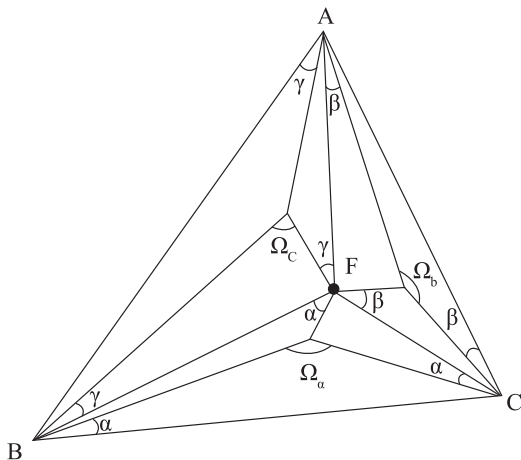
$$a^2 = BF^2 + CF^2 - 2BF \times CF \cos \widehat{BFC}$$

$$= BF^2 + CF^2 + BF \times CF$$

به‌طور مشابه:

$$b^2 = CF^2 + AF^2 + CF \times AF$$

$$c^2 = AF^2 + BF^2 + AF \times BF$$



بنابراین:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(AF^2 + BF^2 + CF^2) + AF$$

$$\times BF + BF \times CF + CF \times AF = 2(AF + BF + CF)^2$$

$$- 3(AF \times BF + BF \times CF + CF \times AF)$$

و از آنجا:

$$(AF + BF + CF)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$+ \frac{3}{4}(AF \times BF + BF \times CF + CF \times AF)$$





چون:

$$\Delta = \frac{1}{2} AF \times BF \sin \widehat{AFB} + \frac{1}{2} BF \times CF \sin \widehat{BFC} \\ + \frac{1}{2} CF \times AF \sin \widehat{CFA} = \frac{1}{2} AF \times BF \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} BF \\ \times CF \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} CF \times AF \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ما داریم:

$$AF \times BF + BF \times CF + CF \times AF = \frac{4\Delta}{\sqrt{3}}$$

و بنابراین:

$$(AF + BF + CF)^2 = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\Delta$$

لم ۲: فرض کنید Ω نقطه بروکارد مثلث ABC باشد و:

$$\widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BC} = \widehat{\Omega CA} = \omega$$

طوع اضلاع AB و CA را به ترتیب با a و b و

مشخص کنید و مساحت مثلث ABC را Δ بنامید. آن گاه داریم:

$$\cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$$

اثبات: به کار بردن قضیه سینوس ها در مثلث ΩAC نتیجه

می دهد:

$$\frac{\Omega A}{\sin \omega} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \omega - (A - \omega))} = \frac{b}{\sin A}$$

بنابراین:

$$\Omega A = \frac{b}{\sin A} \sin \omega$$

به طور مشابه:

$$\Omega B = \frac{c}{\sin B} \sin \omega \quad \Omega C = \frac{a}{\sin C} \sin \omega$$

داریم:

$$\Delta = \frac{1}{2} \Omega A \times \Omega B \sin \widehat{A\Omega B} + \frac{1}{2} \Omega B \times \Omega C \sin \widehat{B\Omega C} \\ + \frac{1}{2} \Omega C \times \Omega A \sin \widehat{C\Omega A} = \frac{1}{2} \frac{b}{\sin A} \sin \omega \frac{c}{\sin B} \sin \omega \sin B \\ + \frac{1}{2} \frac{c}{\sin B} \sin \omega \frac{a}{\sin C} \sin \omega \sin C \\ + \frac{1}{2} \frac{a}{\sin C} \sin \omega \frac{b}{\sin A} \sin \omega \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \omega \left(\frac{bc}{\sin A} + \frac{ca}{\sin B} + \frac{ab}{\sin C} \right)$$

همچنین:

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

بنابراین:

$$\Delta = \frac{1}{2} \sin^2 \omega \left(bc \frac{bc}{2\Delta} + ca \frac{ca}{2\Delta} + ab \frac{ab}{2\Delta} \right)$$

$$= \frac{\sin^2 \omega}{4\Delta} (a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2)$$

و در نتیجه:

$$\sin^2 \omega = \frac{4\Delta^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

پس:

$$\cos^2 \omega = 1 - \frac{4\Delta^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \\ = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 - 4\Delta^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

بنابراین:

$$\cot \omega = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 - 4\Delta^2}}{2\Delta}$$

چون:

$$\Delta^2 = \left(\frac{1}{2} ab \sin C \right)^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 (1 - \cos^2 C)$$

داریم:

$$4\Delta^2 = a^2 b^2 \left(1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 \right) \\ = a^2 b^2 \frac{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4} \\ = -\frac{1}{4} (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2 - 2c^2 a^2)$$

و از آنجا:

$$a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 - 4\Delta^2 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 \\ + \frac{1}{4} (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2 - 2c^2 a^2) \\ = \left(\frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) \right)^2$$

بنابراین:

$$\cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$$

لم ۳: اگر x_i اعداد حقیقی و y_i اعداد حقیقی مثبت باشند

داریم:

$$a^r + b^r + c^r \geq ab + ac + bc$$

فرض می‌کنیم $P = \frac{1}{r}(a+b+c)$ و R شعاع دایره محیطی مثلث ABC و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC باشد، به دست می‌آوریم:

$$a^r b^r + b^r c^r + a^r c^r \geq 16r^r P^r = 16\Delta^r$$

زیرا:

$$a^r b^r + b^r c^r + a^r c^r \geq ab \cdot bc + bc \cdot ac + ac \cdot ab$$

$$= abc(a+b+c)$$

$$abc = 4R\Delta$$

اما می‌دانیم که:

بنابراین:

$$abc(a+b+c) = 4R\Delta(rP) = 4(RP\Delta) \geq 4(rP\Delta)$$

زیرا: $R \geq 2r$ ، ولی: $\Delta = rp$ ، بنابراین:

$$a^r b^r + b^r c^r + a^r c^r \geq 16\Delta^r$$

از آنجا:

$$(ab+ac+bc)^r - 2abc(a+b+c) \geq 16\Delta^r$$

و:

$$(ab+ac+bc)^r \geq 2 \times 4RrP \times 2P + 16\Delta^r$$

$$= 16RrP^r + 16\Delta^r$$

با استفاده از نابرابری اولر $R \geq 2r$ داریم:

$$(ab+ac+bc)^r \geq 32r^r P^r + 16\Delta^r = 32\Delta^r + 16\Delta^r$$

$$= 48\Delta^r$$

و یا:

$$ab+bc+ac \geq 4\sqrt[3]{3}\Delta$$

و:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \geq \frac{1}{4\Delta}(a^r + b^r + c^r)$$

$$+ \frac{1}{4\Delta}(a^r + b^r + c^r + 2ab + 2bc + 2ac) + \sqrt{3}$$

$$\geq \frac{1}{4\Delta}(ab+ac+bc) + \frac{3}{4\Delta}(ab+ac+bc) + \sqrt{3}$$

پس:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \geq \frac{1}{\Delta}(ab+bc+ac) + \sqrt{3}$$

$$\geq 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \geq 5\sqrt{3}$$

یعنی:

بنابراین نابرابری (۱) ثابت شد.

پی‌نوشت.....

1. Cauchy

منبع.....

مقاله‌ای از مجله Math. Spectrum (Volume 40 Number 1)

$(i = 1, 2, 3, \dots, n, n \geq 2, n \in \mathbb{N})$ ، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^r}{y_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^r}{\sum_{i=1}^n y_i}$$

اثبات: فرض می‌گیریم: $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$ و $b_i = \sqrt{y_i}$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ و آنها را در نابرابری «کوشی» قرار می‌دهیم:

$$(\sum_{i=1}^n a_i^r)(\sum_{i=1}^n b_i^r) \geq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^r$$

به دست می‌آید:

$$(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^r}{y_i})(\sum_{i=1}^n y_i) \geq (\sum_{i=1}^n x_i)^r$$

اثبات قضیه ۱: اگر $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ مساحت‌های مثلث‌های

FAB و FCA, FBC را به ترتیب مشخص کنند، چون Ω نقطه

بروکار مثلث FBC است، بنا بر لم ۲ داریم:

$$\cot\alpha = \frac{1}{4\Delta_a}(FB^r + BC^r + FC^r)$$

به طور مشابه:

$$\cot\beta = \frac{1}{4\Delta_b}(FC^r + CA^r + FA^r)$$

$$\cot\gamma = \frac{1}{4\Delta_c}(FA^r + AB^r + FB^r)$$

و از آنجا:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{1}{4}(\frac{FB^r}{\Delta_a} + \frac{FC^r}{\Delta_b} + \frac{FA^r}{\Delta_c})$$

$$+ \frac{1}{4}(\frac{FC^r}{\Delta_a} + \frac{FA^r}{\Delta_b} + \frac{FB^r}{\Delta_c}) + \frac{1}{4}(\frac{a^r}{\Delta_a} + \frac{b^r}{\Delta_b} + \frac{c^r}{\Delta_c})$$

بنابراین، بنا بر لم ۳:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \geq \frac{1}{4} \frac{(FB+FC+FA)^r}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{(FC+FA+FB)^r}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c} + \frac{1}{4} \frac{(a+b+c)^r}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}$$

بنا بر لم ۱ و اینکه $\Delta = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c$ ، داریم:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \geq \frac{1}{4\Delta}(\frac{1}{r}(a^r + b^r + c^r) + 2\sqrt{3}\Delta)$$

$$\times 2 + \frac{1}{4\Delta}(a+b+c)^r = \frac{1}{4\Delta}(a^r + b^r + c^r)$$

$$+ \sqrt{3} + \frac{1}{4\Delta}(a+b+c)^r = \frac{1}{4\Delta}(a^r + b^r + c^r)$$

$$+ \frac{1}{4\Delta}(a^r + b^r + c^r + 2ab + 2bc + 2ac) + \sqrt{3}$$

چون:

$$a^r + b^r \geq 2ab, b^r + c^r \geq 2bc, c^r + a^r \geq 2ac$$



چند نامساوی هندسی

کلیدواژه‌ها: نامساوی هندسی، نامساوی گشی-شوارتز، دایره محیطی، دایره محاطی

پیشگفتار

در مقاله‌ای که به تازگی توسط فام هودوک^۱ و با عنوان «یک نابرابری مفید غیرمنتظره»^۲ منتشر شد، اثبات نامساوی زیر به همراه برخی از کاربردهای جبری آن ارائه شده است:

$$\forall a, b, c, x, y, z \geq 0: (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} \quad (*)$$

آنچه بر اهمیت نامساوی (*) می‌افزاید، آن است که نامساوی مذکور نه تنها دارای کاربردهایی در جبر است، بلکه کاربردهای هندسی گوناگونی نیز دارد. اکنون گفتار خود را در این زمینه با ارائه اثبات زیبایی برای نامساوی فوق براساس آن‌چه که در سایت «math links» (منبع شماره ۲) ارائه شده است، آغاز می‌کنیم:

گزاره ۱: نامساوی زیر برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, x, y, z که برای آنها داریم: $ab+bc+ca \geq 0$ و $xy+yz+zx \geq 0$ ، برقرار است:

$$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}$$

برهان:

$$\begin{aligned} & (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z \\ &= (a+b+c)(x+y+z) - (ax+by+cz) \\ &= \sqrt{[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)][x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]} \\ & \quad - (ax+by+cz) \end{aligned}$$



می‌توان دید که هرگاه، A_1, B_1, A_2, B_2 و A_3, B_3 عددهای حقیقی مثبتی باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt{(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)} \geq \sqrt{A_1 A_2} + \sqrt{B_1 B_2} \quad (1)$$

با به کار بستن نامساوی (۱) در مورد $A_1 = a^2 + b^2 + c^2$ و $A_2 = x^2 + y^2 + z^2$ و $B_1 = 2(ab + bc + ca)$ و $B_2 = 2(xy + yz + zx)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z \\ & \geq 2\sqrt{(xy + yz + zx)(ab + bc + ca)} \\ & + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} - (ax + by + cz) \end{aligned}$$

از آن‌جا که بنابر نامساوی «کشی - شوارتز» داریم:

$$ax + by + cz \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$$

حکم گزاره ۱ در همین‌جا پایان می‌پذیرد.

نامساوی زیر را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از گزاره ۱ ارائه کرد:

نتیجه ۱: برای تمام اعداد حقیقی مثبت a, b, c, x, y, z داریم:

$$\frac{a+b}{y+z}x + \frac{b+c}{z+x}y + \frac{c+a}{x+y}z \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)}$$

برهان: حکم از جایگزین نمودن (x, y, z) با

$$\left(\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}\right)$$

در گزاره ۱ و با توجه به نامساوی

$$\frac{xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{zx}{(y+z)(y+x)} \geq \frac{3}{4}$$

به دست می‌آید.

گزاره ۲: فرض کنید P نقطه‌ای در صفحه مثلث ABC باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{PB \cdot PC}{bc} + \frac{PC \cdot PA}{ca} + \frac{PA \cdot PB}{ab} \geq 1$$

که در آن a و b و c طول ضلع‌های مثلث می‌باشند.

$$(AB = c, BC = a, AC = b)$$

برهان: در میان راه‌های گوناگونی که برای اثبات نامساوی مورد نظر وجود دارد، روش اثبات با استفاده از اعداد مختلط را برمی‌گزینیم. فرض کنید عددهای مختلط متناظر با نقاط A, B, C, P در صفحه مختلط به ترتیب برابر w و z_1 و z_2 و z_3 باشند. با استفاده از اتحاد

$$\begin{aligned} & (z_2 - z_3)(w - z_1)(w - z_2) + (z_3 - z_1)(w - z_2)(w - z_3) \\ & + (z_1 - z_2)(w - z_3)(w - z_1) = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} & BC \cdot PB \cdot PC + CA \cdot PC \cdot PA + AB \cdot PA \cdot PB \\ & = |(z_2 - z_3)(w - z_1)(w - z_2)| \\ & + |(z_3 - z_1)(w - z_2)(w - z_3)| \\ & + |(z_1 - z_2)(w - z_3)(w - z_1)| \geq \quad (\text{بنابر نامساوی مثلثی}) \\ & |(z_2 - z_3)(w - z_1)(w - z_2) + (z_3 - z_1)(w - z_2)(w - z_3) \\ & + (z_1 - z_2)(w - z_3)(w - z_1)| \\ & = |(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)| = AB \cdot BC \cdot CA \end{aligned}$$

با تقسیم نمودن دو طرف نابرابری بر $AB \cdot BC \cdot CA$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{PB \cdot PC}{bc} + \frac{PC \cdot PA}{ca} + \frac{PA \cdot PB}{ab} \geq 1$$

یادداشت: می‌توان دید که نابرابری گزاره ۲ تبدیل به برابری می‌شود اگر و تنها اگر $P=H$ ، که در آن H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.

اکنون می‌توانیم با ترکیب دو گزاره پیشین، گزاره زیر را به دست آوریم:

گزاره ۳: فرض کنید P نقطه‌ای در صفحه مثلث ABC و x, y, z و $xy + yz + zx \geq 0$ حقیقی باشند به‌قسمی که $xy + yz + zx \geq 0$ آن‌گاه:

$$(y+z)\frac{PA}{a} + (z+x)\frac{PB}{b} + (x+y)\frac{PC}{c} \geq 2\sqrt{xy + yz + zx}$$

برهان: با به کار بستن گزاره ۱ برای $(\frac{PA}{a}, \frac{PB}{b}, \frac{PC}{c})$ و (x, y, z) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & (y+z)\frac{PA}{a} + (z+x)\frac{PB}{b} + (x+y)\frac{PC}{c} \\ & \geq 2\sqrt{(xy + yz + zx)\left(\frac{PB \cdot PC}{bc} + \frac{PC \cdot PA}{ca} + \frac{PA \cdot PB}{ab}\right)} \\ & \geq 2\sqrt{xy + yz + zx} \quad (\text{بنابر گزاره ۲}) \end{aligned}$$

که نتیجه مورد نظر می‌باشد.

بحث را با اثبات چند مسئله کلاسیک در نابرابری‌های هندسی، با استفاده از نتایج اثبات شده در بالا، پی می‌گیریم:

کاربردها

مسئله ۱. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحه مثلث ABC باشد. ثابت کنید:

که در آن شعاع دایره محاطی مثلث ABC می باشد.
پاسخ: قرار دهید: $x = s - a$ و $y = s - b$ و $z = s - c$ ؛
 که در آن a و b و c ضلع های مثلث ABC بوده و s برابر نصف محیط می باشد. در این صورت با به کار بستن گزاره ۳ به دست می آوریم:

$$PA + PB + PC \geq 2\sqrt{(s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a)}$$

از طرفی می توان دید:

$$(2)(s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) = r^2 + 4Rr$$

که در آن r و R به ترتیب شعاع دایره محاطی و شعاع دایره محیطی مثلث ABC می باشند.

$$\text{بنابراین: } PA + PB + PC \geq 2\sqrt{r^2 + 4Rr}$$

از آنجایی که در هر مثلث $R \geq 2r$ ، نتیجه می شود:

$$PA + PB + PC \geq 6r$$



$$\frac{PA}{a} + \frac{PB}{b} + \frac{PC}{c} \geq \sqrt{3}$$

پاسخ: با قراردادن $x = y = z = 1$ در گزاره ۳، به دست می آوریم:

$$2\left(\frac{PA}{a} + \frac{PB}{b} + \frac{PC}{c}\right) \geq 2\sqrt{3}$$

که همان نتیجه مطلوب است.

مسئله ۲. فرض کنید P نقطه ای در صفحه مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

$$a.PA + b.PB + c.PC \geq 4S_{ABC}$$

که در آن S_{ABC} مساحت مثلث ABC می باشد.

پاسخ:

قرار دهید:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

در این صورت داریم:

$$xy + yz + zx = \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{4}$$

$$= 4S_{ABC}^2$$

از این رو و با به کار بستن گزاره ۳ در مورد (x, y, z) به دست می آوریم:

$$a^2 \cdot \frac{PA}{a} + b^2 \cdot \frac{PB}{b} + c^2 \cdot \frac{PC}{c} = a.PA + b.PB + c.PC \geq 4S_{ABC}$$

مسئله ۳. فرض کنید P نقطه ای در صفحه مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

$$PA + PB + PC \geq 6r$$

پی نوشت

1. Pham Huu Duc
2. An Unexpected Useful inequality

$$2. \text{ این تساوی از روابط } r = \frac{S_{ABC}}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} \text{ و } \frac{abc}{s} = 4Rr \text{ می آید.}$$

(ن. ک به صفحات ۲۴ و ۲۶ کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه» ترجمه عبدالحسین مصحفی) به دست می آید.

۳. برای اثبات نامساوی $R \geq 2r$ روش های گوناگونی وجود دارد که در اینجا یکی از آنها را می آوریم: بنابر قضیه ای از هندسه می دانیم که «هرگاه O مرکز دایره محیطی (به شعاع R)، I مرکز دایره محاطی (به شعاع r) و d فاصله بین این دو مرکز باشد آنگاه « $d^2 = R(R - 2r)$ » (ن. ک به کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه»، صفحه ۴۳). نامساوی $R \geq 2r$ ، با توجه به مثبت بودن d^2 به دست می آید.

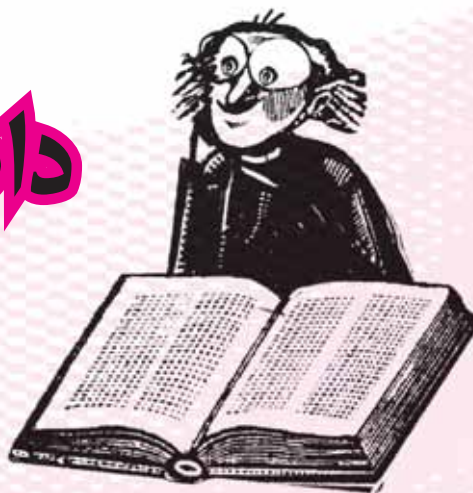
منابع

1. Pham Huu Duc, An unexpectedly useful inequality, Mathematical Reflections 2008, Issue 1.
2. Manlio, Blackmouse, Canhang, Mathlinks Forum 2007, <http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=187355>.
3. Dragoslav S. Mitrinovic, J. Pecaric, V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities.
4. Bottema, Oene; Djordjevic, R. Z.; Janic, R.; Mitrinovic, D. S.; and Vasic, P.M., Geometric Inequalities.

۵. مقاله ای که مطالعه کردید، ترجمه مقاله زیر است:

Tran Quang Hung; On Some geometric inequalities, Mathematical Reflections, 3, 2008.

دانش نامه ریاضی



معرفی کتاب

غلامرضا یاسی پور

نویسندگان: پرویز شهریاری، حمیدرضا امیری، یدالله ایلخانی پور، علاءالدین میرحبیب‌اللهی، هوشنگ شرقی، میرشهرام صدر، محمدعلی فریبرز ی عراقی، احمد قندهاری، سیدمحمد رضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی پور
ناشر: کانون فرهنگی آموزش

۱. دانش نامه یا دایرةالمعارف نویسی، آن هم به صورت جدید، به خصوص در مورد ریاضیات، سابقه چندان در ایران ندارد. از لغت نامه های ریاضی می گذریم، چرا که مورد بحث ما نیستند. از دانش نامه های عمومی، نظیر اثر ممتاز **دکتر مصاحب** هم ذکری به میان نمی آوریم؛ گرچه در آنها نیز مطالبی از ریاضیات می توان یافت. تنها به ذکر نام و نشان بعضی از دانش نامه ها اشاره می کنیم و آن گاه به معرفی مفصل تر دانش نامه مورد نظرمان، با این تذکر می پردازیم که این سخن تنها یک معرفی است و منظور نقد و بررسی آن نبوده است.

۲. یکی از دانش نامه هایی که در حد دوره ریاضی دبیرستان و سال های اولیه دوره های کارشناسی است، دایرةالمعارف آکسفورد است، که تحت نام «فرهنگ ریاضیات آکسفورد» در سال ۱۳۷۶ در ایران به چاپ رسیده است. نام و نشان این دانش نامه به صورت زیر است:

● فرهنگ ریاضیات آکسفورد. کریستوفر کلافام. ترجمه: غلامرضا یاسی پور. انتشارات مدبر. چاپ اول، ۱۳۷۶.

۳. دانش نامه ریاضی دبیرستانی دیگری با نام و نشان زیر داریم:

● فرهنگ ریاضیات. ویگودسکی. ترجمه: غلامرضا یاسی پور، مؤسسه انتشارات بهینه. چاپ اول، زمستان ۱۳۷۱.

۴. سایر دانش نامه های ریاضی موجود عبارتند از:

● دایرةالمعارف ریاضیات (در سه جلد). گروهی از استادان دانشگاه های آلمان.

ترجمه: غلامرضا یاسی پور. ناشر مهاجر. چاپ اول، ۱۳۷۸ و چاپ دوم، ۱۳۷۹.

● فرهنگ ریاضیات، عین الله پاشا، محمد هاشم رستمی، پرویز شهریاری، میرشهرام صدر، محمد عابدی، احمد قندهاری، سیدمحمد رضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی پور و حمیدرضا امیری. انتشارات مدرسه برهان. چاپ اول، ۱۳۷۹ و چاپ دوم، ۱۳۸۱.

● دانش نامه ریاضی. ترجمه گروهی از استادان ریاضی. سر ویراستار دکتر علیرضا مدقالچی. بنیاد دانش نامه نگاری ایران. چاپ اول، ۱۳۸۹.

۵. از اینها که بگذریم می رسیم به دانش نامه ریاضی مورد نظرمان که از موارد فوق جدیدتر است. این دانش نامه بیشتر به مطالب ریاضی مربوط به دوره دبیرستان پرداخته است، و در آن، آنگونه که خود می گوید، موضوعات را طوری به صورت متوالی پهلوی هم قرار داده است که ارتباط بین آنها حفظ شود. در قسمتی از مقدمه کتاب چنین



«جای خالی تألیف یک دانش‌نامه موضوعی ریاضیات، همواره در منابع و مراجع ریاضی و کلاً جامعه ریاضی کشور احساس می‌شد؛ دانش‌نامه‌ای که بتواند به صورت کاربردی به تمامی نیازهای دانش‌آموزان، دبیران ریاضی، مؤلفان و کارشناسان پاسخ دهد و شرح و تعریف دقیق و مناسبی برای هر واژه در موضوعات مختلف را شامل شود. در دسترس نبودن و البته پرکردن این جای خالی و خلق چنین اثری بسیار مشکل و نیاز به عزمی راسخ، تخصص و تجربه بالا، همدلی، هم‌فکری و کار گروهی بسیار منسجم داشت که بحمدالله این فرصت و توفیق دست داد و به انجام آن همت گماشتیم.»

در مقدمه و در توضیح کارهای انجام شده در این کتاب چنین می‌خوانیم:

● برای هر واژه به صورت مستقل حتی‌الامکان تاریخچه یا فلسفه‌ای بیان کرده‌ایم و پس از تعریف مناسب، یک مثال کلیدی آورده شده است. در مورد بسیاری از واژه‌ها یا قضیه‌ها، نکات و نتیجه‌های مهم و حتی فرمول‌ها یا رابطه‌های مربوط به آنها آمده است.

● برای هر واژه یا اصطلاح، معادل انگلیسی روبه‌روی آن ثبت شده است.

● در هر صفحه این دانش‌نامه تعدادی از کلمات داخل متن شماره خورده‌اند که معادل انگلیسی آنها در پایین به همراه شماره صفحه‌ای که آن واژه در آن قرار دارد، آورده شده است. این کار دستیابی به کلید واژه‌های هر صفحه را به آسانی میسر می‌نماید.

● در ابتدای دانش‌نامه مقدمه‌ای توسط استاد و چهره ماندگار آموزش ریاضی، جناب آقای دکتر پرویز شهریاری آورده‌ایم و سپس واژه‌ها و شاخه‌های ریاضی و بیوگرافی ریاضی‌دانان معروف دنیا به قلم استاد غلامرضا یاسی‌پور آورده شده است.

● بخش هندسه دانش‌نامه توسط جناب آقای میر حبیب‌اللهی و بقیه بخش‌های کتاب توسط حمیدرضا امیری و قسمت انگلیسی واژه‌ها توسط آقای غلامرضا یاسی‌پور ویراستاری شده است.

مؤلفان کتاب با توجه به تخصصشان، به ترتیب زیر نگارش موضوعات را برعهده داشتند:

❖ پرویز شهریاری: مقدمه

❖ غلامرضا یاسی‌پور: واژه‌ها و شاخه‌های ریاضی، ریاضی‌دانان نامی جهان و دوره اسلامی

❖ حمیدرضا امیری: نظریه مجموعه‌ها، آنالیز ترکیبی و ترکیبیات، نظریه گراف، نظریه اعداد، ماتریس، دستگاه معادلات خطی و تبدیل در صفحه

❖ یدالله ایلخانی‌پور: بردار، دستگاه اعداد حقیقی، تابع، حد و پیوستگی

❖ علاءالدین میر حبیب‌اللهی: هندسه پایه و هندسه فضایی

❖ هوشنگ شرقی: هندسه پایه و هندسه فضایی

❖ میرشهرام صدر: منطق و استدلال‌های ریاضی، آمار، احتمال، معادله‌های خط و صفحه و مقاطع مخروطی

❖ دکتر محمدعلی فریبرز عراقی: مشتق، کاربرد مشتق، دنباله و سری

❖ احمد قندهاری: حساب دیفرانسیل و انتگرال

❖ سیدمحمد رضا هاشمی موسوی: جبر، مثلثات و حساب

از محسنات کتاب یکی لغت‌نامه‌های مفصل فارسی به انگلیسی و انگلیسی به فارسی آن است، و دیگری فصل‌های مقدمه‌ای بر دانش‌نامه ریاضی، واژه‌ها و شاخه‌های ریاضی، ریاضی‌دان‌های نامی جهان و ریاضی‌دان‌های دوره اسلامی.

کل کتاب در یک پیش‌گفتار و یک مقدمه و ۲۸ فصل و دو ضمیمه و ۸۸۰ صفحه تنظیم شده است، و نام و نشان آن چنین است:

دانش‌نامه ریاضی. پرویز شهریاری، حمیدرضا امیری، یدالله ایلخانی‌پور، هوشنگ شرقی، میرشهرام صدر، محمدعلی فریبرز عراقی، احمد قندهاری، سیدمحمد رضا هاشمی موسوی، علاءالدین میر حبیب‌اللهی، غلامرضا یاسی‌پور. طراح و ناظر علمی: حمیدرضا امیری. ویراستاران: حمیدرضا امیری، علاءالدین میر حبیب‌اللهی، غلامرضا یاسی‌پور. چاپ اول، ۱۳۹۰.

دانش‌نامه ریاضی همان‌طور که در همین معرفی اندک هم ملاحظه می‌شود، کتابی جامع است که هم به کار دانش‌آموز ریاضی می‌آید هم به کار دبیر ریاضی، و به‌طور کلی به کار همه کسانی که به دانش ریاضی علاقه‌مند هستند.



پاسخ‌ها

● همکار عزیز، آقای سعدالله قصابی

مطلب شما در باب مسئله‌ای خاص از ترکیبیات به دستمان رسید. مسئله بدی نیست و در همین جا ذکر راه حل آن را درج می‌کنیم:
مسئله: ثابت کنید اگر تعداد زیرمجموعه‌های دوجزوی مجموعه‌ای m تا باشد، تعداد اعضای آن $\lfloor \sqrt{2m} + 1 \rfloor$ است.

اثبات: می‌دانیم اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد، $\binom{n}{2}$ یا $\frac{n(n-1)}{2}$ زیرمجموعه دارد. بنابراین $m = \frac{n^2 - n}{2}$ و یا $n^2 - n - 2m = 0$ از آنجا با توجه به مثبت بودن n نتیجه می‌شود: $n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}$.

حال نشان می‌دهیم که با فرض طبیعی بودن n داریم: $\frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2} \leq \sqrt{2m} + 1 < \frac{1 + \sqrt{4m + 1}}{2} + 1$

به این منظور از نامساوی $(x, y \geq 0) \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1 + \sqrt{4m + 1}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4m + 1} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\sqrt{4m} + \sqrt{1}) = \frac{1}{2} + \sqrt{m} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2m}$$

$$1 + \sqrt{2m} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4m + 1} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2m} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4m + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2m} < 1 + \sqrt{4m + 1} \Leftrightarrow \sqrt{4m} < 1 + \sqrt{4m + 1}$$

$$\text{بنابراین: } \frac{1 + \sqrt{4m + 1}}{2} \leq \sqrt{2m} + 1 < \frac{1 + \sqrt{4m + 1}}{2} + 1$$

و در نتیجه: $\lfloor \sqrt{2m} + 1 \rfloor = \frac{1 + \sqrt{4m + 1}}{2}$ و بنابراین: $n = \lfloor \sqrt{2m} + 1 \rfloor$

اشاره

این بخش از مجله در پیچه ارتباط ما با خوانندگان، همکاران معلم، دانش آموزان و به طور کلی دوست‌داران مجله است. تصمیم داریم پس از مدتی که «این مثنوی تأخیر شد!» بخش حاضر را دوباره فعال کنیم. از شما می‌خواهیم با ما بیش از پیش در ارتباط باشید تا ما هم پاسخ نامه‌ها و ایمیل‌های شما را بدهیم.

● آقای رحمان کیومرثی،

همکار محترم از شهرستان شهرکرد

با سپاس فراوان از نامه پرمهر شما و مقاله‌تان که با خط زیبا برای ما فرستاده بودید. مشابه مقاله شما، مقاله‌ای از آقای احسان یارمحمدی داشتیم، در مورد حد تابع نمایی $f(x)^{g(x)}$ در نقطه x که در شماره ۷۰ مجله به چاپ رسید. منتظر ارسال مطالب تازه‌تر شما - در چارچوب مطالب کتاب‌های درسی و یا مرتبط با آنها - هستیم.

● آقای عباس روح‌الامینی

از شهرستان سیرجان

دوست عزیز، سپاس فراوان از شما به خاطر همکاری گسترده‌تان با مجله برهان طی سال‌های متمادی. فکر می‌کنم تاریخ نخستین نامه شما به مجله، به سال ۱۳۷۱ یعنی ۲۰ سال پیش برمی‌گردد! و این علاقه خالصانه شما به دانش ریاضی ستودنی است. نامه‌تان را که همراه با ترجمه مقاله‌ای از مجله «اسپکتروم» بود دریافت کردیم و در همین شماره آن را به چاپ رسانده‌ایم.

اما دوست عزیز، شما که ادعای ارتباط با مجله اسپکتروم و ارسال مقاله برای آنها را دارید (که حتماً همین‌طور است)، چرا برای ما ایمیل نفرستاده‌اید تا لااقل آدرس شما را داشته باشیم و بتوانیم با شما در تماس آنلاین باشیم و از مطالبتان بیشتر استفاده کنیم! باز هم برای ما مطلب بفرستید.

البته توجه داشته باشید که $1+m$ باید مربع کامل باشد. یعنی برای هر m جواب ندارد. از شما دوست عزیز برای مطلب ارسالی تان سپاس گزاریم، اما تقاضا می‌کنیم که به مقالات تفضیلی بیشتر توجه داشته باشید و با مجله تان در ارتباط مستمر باشید.

● همکار محترم، خانم نجمه مؤمنی،
دبیر ریاضی از شهر کرمان

.....پی نوشت

● همکار گرامی، آقای شهریار جاوید
از شهرستان اردبیل

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

● باز هم دوقلوها! مدتی بعد، باز هم کاوه و شهریار را دیدیم. آنها رفتارشان را تغییر داده بودند و دیگر هیچ کدام همیشه دروغ یا همیشه راست نمی گفتند. این بار هم می خواستم کاوه را بشناسم. از آنها خواستم خودشان را معرفی کنند، ولی آنها خواستند که این موضوع را خودم کشف کنم!

یکی از آنها به من گفت: «برادر من کارتی در جیبش دارد که یا قرمز است، یا سیاه. اگر کارت او قرمز باشد، او یک جمله درست خواهد گفت. اما اگر کارت او سیاه باشد، جمله او نادرست خواهد بود. پدر آنها که می دانستم همیشه راست می گوید، جمله او را تأیید کرد. سپس برادر دوم به من گفت: «من کاوه هستم و کارت سیاه به همراه دارم.»

حالا به من کمک کنید تا کاوه را شناسایی کنم. پاسخ را در شماره بعد ببینید.

ایک پارادوکس
ویک سوال؟!

سؤال: آیا پاسخ این سؤال نه است؟
اگر متوجه پارادوکس موجود در سؤال نشده‌اید، توضیح ما را در شماره آینده ببینید.

تولید ملی، حمایت از کار و سرمایه ایرانی
برگ اشتراک مجله‌های رشد

بحوث استی: ۵۱

روايس زير، هسستو ك هججه نيويد:

ناشر: آگ به مهر اه ثبت مشخصات قفسه و ارزی-

• نام مجلات در خواستی:

◆ تاريخ تولد: ◆ میزان تحصیلات:

◆ تلفن:

سَمَارَةُ فَيْشٍ: مبلغ برداختی:

یلاک: سوار دہستی:

ضیاء

• نسانی: تهران، صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱ امور مسٹر کین:

• وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir

• ایشتری ۱۵ مجلد: ۳۱-۷۷۳۳۷۶۵۷/۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۹۷۱۳-۱۴

♦ هزینه اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۸۰۰۰ ریال



مسائل مسابقه‌ای برهان

کلیدواژه‌ها: جزء صحیح، وتر، مسابقه برهان، مسئله ریاضی

۴. در کشوری کوچک، همه مردم، یا شوالیه هستند و همواره راست می‌گویند و یا سربازند و همواره دروغ می‌گویند. جاسوسی وارد این کشور شد. جاسوس نه همواره راست می‌گوید و نه همواره دروغ می‌گوید (بسته به موقعیت دروغ یا راست می‌گوید). مأموران سه نفر را دستگیر کردند که می‌دانستند یکی از آنها سرباز، یکی شوالیه و یکی جاسوس است. آنها را A، B، و C می‌نامیم.

در دادگاه قاضی از A پرسید: آیا تو جاسوس هستی؟ A یا پاسخ داد بله و یا گفت خیر (نمی‌دانیم چه پاسخی داد). سپس قاضی از B پرسید: آیا A راست گفت؟ B یا پاسخ داد بله و یا خیر. در این لحظه A گفت: C جاسوس نیست و قاضی پاسخ داد: من خودم این موضوع را می‌دانستم و حالا می‌دانم چه کسی جاسوس است!

با ذکر دلیل قانع‌کننده، بگویید جاسوس کیست.

* منتظر پاسخ‌های شما به مسائل مسابقه‌ای هستیم.
پاسخ‌های خود را به آدرس پستی مجله ارسال فرمایید و یا به پست الکترونیکی ما ایمیل کنید. پاسخ صحیح را در شماره آینده ببینید

۱. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x ($x \neq k\pi$) حاصل عبارت زیر همواره مقداری ثابت است:

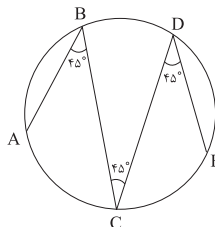
$$y = x - \pi \left[\frac{x}{\pi} \right] + \operatorname{tg}^{-1}(\cot gx)$$

([a]، جزء صحیح عدد حقیقی a می‌باشد)

۲. در شکل زیر زاویه بین وترهای متوالی مساوی 45° است:

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 45^\circ$$

ثابت کنید: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$



۳. مجموعه S و عمل * روی آن را با قاعده زیر تعریف می‌کنیم:

$$a, b \in S: (a * b) * a = b$$

ثابت کنید: $a * (b * a) = b$

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

رشد کودک

برای دانش‌آموزان ابتدایی و پایه اول دوره دبستان

رشد نوجوان

برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره دبستان

رشد دانش‌آموز

برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره دبستان

رشد نوجوان

برای دانش‌آموزان دوره راهنمایی تحصیلی

رشد جوان

برای دانش‌آموزان دوره متوسط و سن دبیرستان

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماه نامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

رشد آموزشی ابتدایی

رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدیریت مدرسه، رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی

(به صورت فصلنامه و چهار شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

رشد برهان (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره راهنمایی تحصیلی)
رشد برهان متوسطه (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه)
رشد آموزش قرآن
رشد آموزش معارف اسلامی
رشد آموزش زبان و ادبیات فارسی
رشد آموزش هنر
رشد آموزش مشاور مدرسه
رشد آموزش تربیت بدنی
رشد آموزش علوم اجتماعی
رشد آموزش تاریخ
رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش زبان
رشد آموزش ریاضی
رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش شیمی
رشد آموزش زیست‌شناسی
رشد آموزش زمین‌شناسی
رشد آموزش فلسفه و عرفان
رشد آموزش ادبیات دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جوین، مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و مراکز عالی‌تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

* نشراتی: تهران، خبازان، انتشارات شمالی، انتشارات ستاره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶ دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.

* تلفن و فکس: ۸۸۳۰۱۷۷۸ - ۲۱۱



دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
تهران، ایران

زندگی نامه استاد پرویز شهریاری



تا پایان عمر) بود. سال‌ها نیز در دبیرستان‌های تهران به معلمی ریاضی پرداخت و بسیاری از نام‌آوران عرصه علم در ایران و کشورهای بزرگ جهان از شاگردان ایشان بوده‌اند. علاوه بر اینها، استاد، ریاست هیئت مدیره «گروه فرهنگی خوارزمی» را که از مشهورترین مجموعه‌های علمی پایتخت بود، به عهده داشت.

از این استاد گران‌قدر در زمان حیاتشان تجلیل فراوانی به عمل آمد. از جمله در سال ۱۳۷۴ در بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور و در سال ۱۳۷۹ به مناسبت سال جهانی ریاضیات از ایشان تقدیر فراوان به عمل آمد. و در سال ۱۳۸۱ نیز دانشگاه کرمان به ایشان دکترای افتخاری تقدیم کرد و در سال ۱۳۸۴ عنوان «چهره ماندگار سال» در صدا و سیمای جمهوری اسلامی به ایشان اعطا شد.

این استاد فرزانه همان گونه که خود به دیگران توصیه می‌کرد، شخصیتی چندبعدی داشت و در زمینه‌های گوناگون از جمله ریاضیات، تاریخ، تاریخ علم، ادبیات و مسائل اجتماعی صاحب نظر بود. کتاب‌های متعددی هم در زمینه‌های بسیار متنوع نوشت و یا ترجمه کرد.

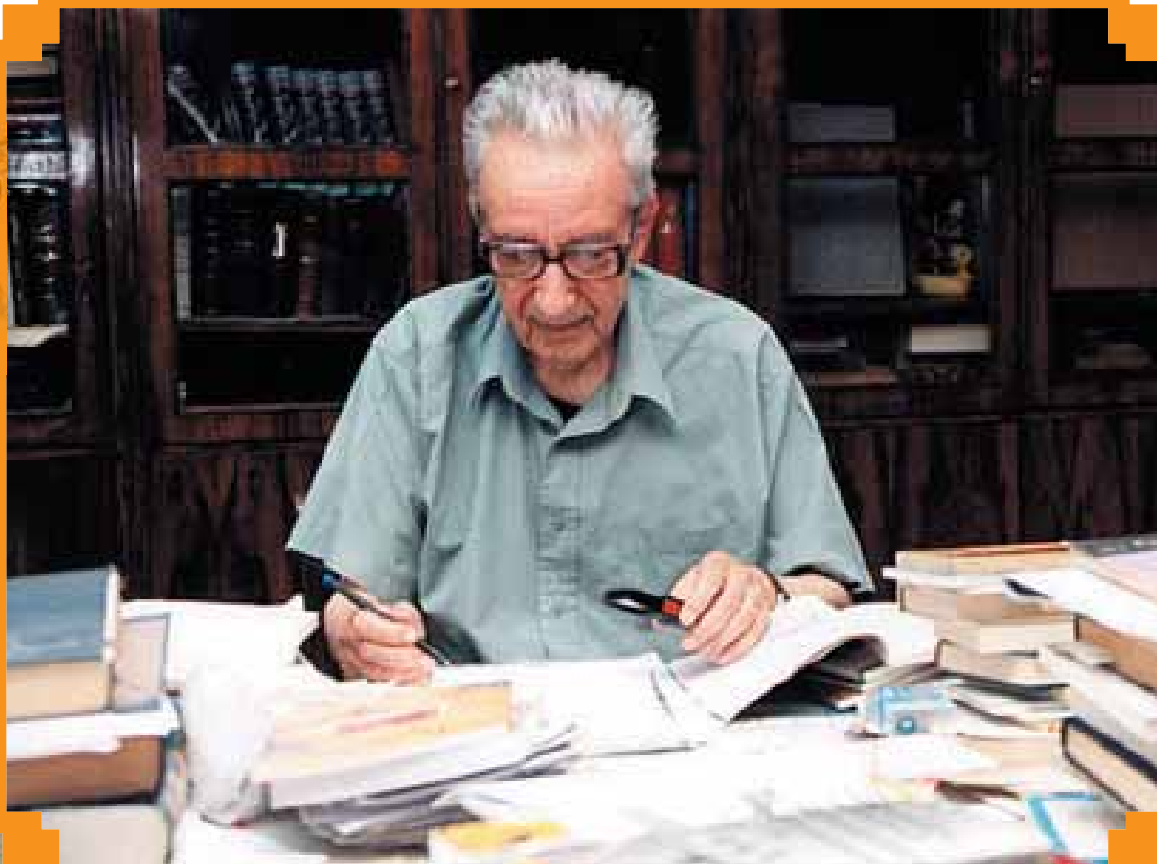
او نخستین کسی بود که با ترجمه مسائل المپیادهای ریاضی کشورهای گوناگون دنیا، جوانان کشورمان را با این مسائل آشنا ساخت. بعضی از کارهای او مانند «خلاقیت ریاضی»، «روش‌های جبر»، «در پی فیثاغورس» و... جزو آثار ماندگار ادب ریاضی کشور ماست.

چراغ پرفروغ عمر این بزرگ‌مرد تاریخ آموزش ریاضی کشورمان روز بیست و دوم اردیبهشت ۱۳۹۱ به خاموشی گرایید.

روحش شاد و یادش جاودان باد

استاد پرویز شهریاری روز دوم آذرماه ۱۳۰۵ در محله دولت‌خانه کرمان متولد شد و در مهرماه ۱۳۱۱ تحصیلات ابتدایی خود را در «دبستان کابیانی» آن شهر آغاز کرد. دوران نوجوانی او با مرگ پدر در سن ۴۶ سالگی (هنگامی که او ۱۲ سال بیشتر نداشت) آغاز شد و برای اورنج‌ها و مشقات فراوانی (از جمله کارگری در محیط‌های مختلف برای امرار معاش) به همراه داشت. در سال ۱۳۲۱ وارد دانش‌سرای مقدماتی کرمان شد و در ۱۳۲۴ به دانشکده علوم ریاضی وارد شد.

از همان بدو تحصیل در دانشگاه به فعالیت‌های فرهنگی پرداخت و به عضویت هیئت تحریریه چند نشریه درآمد. در سال ۱۳۲۷ نخستین کتاب خود، «جنبش مزدک و مزدکیان» را به چاپ رساند و از آن زمان تا آخر عمر پربركتش، نزدیک به ۳۰۰ جلد کتاب و بیش از هزار مقاله منتشر کرد. شهریاری در هیئت تحریریه چندین مجله علمی و ریاضی عضویت داشت و همچنین سردبیر مجلات «سخن علمی» (۱۳۴۹-۱۳۴۲، ۹۰ شماره)، «آشتی با ریاضیات» و «آشنایی با ریاضیات» (۱۳۷۱-۱۳۵۶، ۷۰ شماره) و چیستا (از ۱۳۶۰



نوشتاری از زنده‌یاد استاد پرویز شهریاری

ریاضیات، از یک طرف به تاریخ خود وابسته است و از طرف دیگر با زندگی ما درآمیخته است. به همین دلیل، ریاضی‌دان نمی‌تواند خود را از تاریخ ریاضیات، از جنبه‌های کاربردی ریاضیات و از فلسفه ریاضیات دور نگه دارد. به جز اینها، ریاضی‌دان پیش از آنکه ریاضی‌دان باشد، انسان است و به‌ویژه در روزگار ما، انسان «تک‌بعدی» فرصت ابراز وجود نمی‌یابد و نمی‌تواند خود را با پیشرفت‌های مادی و معنوی زمان سازگار و هماهنگ کند.

درست است که ریاضی‌دان، به دلیل تخصصی که انتخاب کرده است، کار فکری خود را بیشتر در مسیر ریاضیات متمرکز می‌کند، ولی او هم به عنوان انسانی که در عصر ما زندگی می‌کند، باید با دانش‌های دیگر و با مسئله‌های عمده علمی و اجتماعی زمان خود آشنا باشد. از هنر لذت ببرد و در زندگی خانوادگی و اجتماعی خود، مثل هر انسان دیگری، هم به رشد فکری و هنری خود علاقه‌مند باشد و هم در جست‌وجوی راه یا راه‌های نجات انسان‌ها از زشتی‌های موجود باشد. اگر ریاضی‌دان این حق را از خود سلب کند که از موسیقی لذت ببرد، به کمک شعر و رمان خوب به ژرفای روح انسان‌ها وارد شود، گل و گیاه را دوست داشته باشد، به مسئله‌های حاد اجتماعی و سیاسی زمان خود علاقه‌مند باشد، و... آن وقت، به انسانی «تک‌بعدی» تبدیل می‌شود که در این صورت، بعید می‌دانم بتواند حتی یک ریاضی‌دان خوب باشد...

ریاضی‌دان باید با عمل خود و با رفتار فردی و اجتماعی خود، این تصور نادرست را از ذهن همگان دور کند که: «ریاضی‌دان تنها با عدد و شکل سروکار دارد و به درد هیچ کار و هیچ بحث دیگری نمی‌خورد.»