



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

در این شماره می خوانید:

۲	حرف اول	سر دبیر
۳	خم ها	غلامرضا یاسی پور
۶	هم نهشتی (۱)	حمیدرضا امیری
۱۱	رمزنگاری و رمزگشایی	سیدمحمد رضا هاشمی موسوی
۱۶	رویکرد هندسی و جبری در آموزش هندسه	محمد هاشم رستمی
۲۳	مسائل مثلثات	احمد قندهاری
۲۶	ریاضیات در سینمای جهان	احسان یارمحمدی
۲۸	المپیادهای ریاضی	غلامرضا یاسی پور
۳۲	نظریه اعداد	حمیدرضا امیری
۳۶	بسته نرم افزاری متمتیکا	دکتر محمدعلی فریریزی عراقی
۴۰	سری تلسکوپی	احسان یارمحمدی
۴۴	پیوستگی تابع	سعید چتر آبنوس
۴۶	۳۱ روش برای حل معادله درجه سوم و کاربردهای آن ها	سیدمحمد رضا هاشمی موسوی
۴۹	پارادوکس های هندسی	فرزاد حمزه پور
۵۲	خیاط در کوزه	غلامرضا یاسی پور
۵۶	توپولوژی	رضا تهرانی
۶۰	معادله های کلاسیک	احمد قندهاری

♦ دوره بیست و یکم ♦ شماره ۴ ♦ تابستان ۱۳۹۱

♦ مدیر مسئول: محمدناصری

♦ سر دبیر: حمیدرضا امیری

♦ مدیر داخلی: میرشهرام صدر

♦ طراح گرافیک: شاهرخ خره غانی

♦ هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،

میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سیدمحمد رضا هاشمی موسوی،

غلامرضا یاسی پور و با تشکر از همکاری ارزنده استاد پرویز شهریاری

♦ ویراستار علمی: هوشنگ شرقی

♦ ویراستار ادبی: مرتضی حاج علی فرد

♦ وبگاه: www.roshdmag.ir

♦ پیام نگار: Borhan@roshdmag.ir

♦ پیام گیر نشریات رشد: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲

♦ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۵۸۵

♦ تلفن دفتر مجله: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۵۸۶۲

♦ تلفن امور مشترکین: ۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۵

♦ شمارگان: ۱۳/۰۰۰ نسخه

♦ چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

مجله رشد برهان متوسطه، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان • طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان • طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. • مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. • استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.

حرفاؤل

مسئله من، مسئله شما

وارد کلاس که شدم، به دانش آموزانم گفتم: «امروز می‌فواهم در طول مدتی که درس می‌دهم، کسی چیزی یادداشت نکند. فقط زمانی که من تعیین می‌کنم حق دارید بنویسید و یادداشت بردارید. می‌فواهم بینم چقدر روی موضوعات مطرح شده در کلاس تمرکز دارید و تا چه حد می‌توانید از حافظه خودتان استفاده کنید و این که چیزی یا مطلبی را که فهمیده‌اید به زبان خودتان بنویسید و البته طوری که هر دانش آموز دیگری با خواندن آن مطلب، منظور شما را درک کند!

کلاس درس را با این درخواست از بچه‌ها و طرح یک مسئله خاص در یک زمینه معین شروع کردم. نکته یا قضیه‌ای را مطرح کردم و پس از شکافتن همه ابعاد آن قضیه، به عنوان کاربرد، مسئله را طرح و حل کردم و از بچه‌ها فواستم برداشت خودشان از آن قضیه را نوشته و شرایط برقراری قضیه را یادداشت کنند و سپس مسئله‌ای شبیه به آن مسئله را خودشان طرح کنند و به حل آن بپردازند. مسئله دیگری طرح کردم و از یک زاویه دیگر به قضیه نگاه کردم و پس از حل مسئله (البته با مشارکت بچه‌ها)، مجدداً از بچه‌ها فواستم تا مسئله‌ای شبیه به مسئله حل شده را طرح و حل کنند. بچه‌ها علاقه‌مند شده بودند و به فصوص چون خودشان مسئله را طرح می‌کردند، با علاقه به حل آن مشغول می‌شدند. اتفاقات جالبی در کلاس رخ داد؛ مثلاً این که در آن کلاس که ۲۷ نفر دانش آموز داشتم، ۲۷ مسئله که همگی مراقب در اعداد و ارقام با هم فرق داشتند طرح و حل شد. دیگر این که بعضی از دانش آموزان مستعدتر مسائلی را طرح کردند که شباهتی به مسئله طرح شده از طرف من، نداشت و واقعاً از یک زاویه جدید به قضیه و کاربرد آن نگاه کرده بودند که وقتی این مسائل را می‌دیدم از آن‌ها می‌فواستم تا پای تابلو آمده و مسئله‌شان را برای دیگران مطرح کنند و خودشان نیز به حل آن بپردازند تا هم به نوعی دیگر فکر کردن را به بچه‌ها آموزش داده باشم و هم بچه‌های دیگر تشویق شده و فقط در قالبی که من مسئله طرح کرده بودم، فکر نکنند و توان طرح مسائلی جدید را در خود ایجا کنند.

دوستان خوب من، شاید معلمان مقرر شما به دلایل بسیار از این شیوه استفاده کنند، ولی شما خودتان خارج از کلاس درس و به لحاظ تعداد دانش آموزان و توان علمی آن‌ها نتوانند از این شیوه استفاده کنند، و قضیه‌ها و موضوعات تدریس شده، مسائلی متنوع و جالب برای خودتان و حتی دوستانتان طرح کنید و با استفاده از رهنمودهای معلمان و منابع کمک آموزشی مسائل مهم و حتی کاربردی، طرح و در یک دفتر یادداشت کنید.

اگر در این زمینه فعال شدید و با این شیوه به نتایج مثبتی دست پیدا کردید، با ما ارتباط داشته باشید و نتایج را برای ما ارسال کنید. حتی مسائلی را که خودتان طرح کرده‌اید برای مجله و به نشانه مجله بفرستید تا به اسم خودتان آن‌ها را چاپ کنید و دوستان دیگر شما در سراسر کشور عزیزمان از آن‌ها استفاده کنند. منتظر نامه‌های شما هستیم. ان شاء الله...

در پناه خداوند تبارک و تعالی، همیشه مؤید و پیروز باشید.

خم‌ها

غلامرضا یاسی پور

ترسیم یک خم یا منحنی^۱ آسان است. نقاش‌ها همواره آن را انجام می‌دهند؛ آرشیست‌ها گستره‌ای از ساختمان‌های جدید را در خم‌های هلالی یا منحنی مدرن قرار می‌دهند؛ بازیکن بیسبال، توپی را خمیده می‌اندازد؛ ورزشکاران در زمین بازی از مسیر خم‌دار می‌گذرند و هنگامی که توپی را شوت می‌کنند، توپ در یک مسیر خم‌دار حرکت می‌کند. اما، اگر از ما بپرسند «خم چیست؟» پاسخ آن قدرها هم ساده نیست.

کلیدواژه‌ها:

خم، منحنی، خم کلاسیک، مقاطع مخروطی، مارپیچ، مارپیچ لگاریتمی، خم جبری، خم ژوردان، خم فضا - پرکننده

می‌توانیم مخروطی را به صورت تصویر یک دایره بر یک پرده تصور کنیم. پرتوهای نورانی از لامپ واقع در یک آباژور استوانه‌ای، مخروط دوگانه‌ای تشکیل می‌دهند که در آن چراغ تصاویری از بالا و پایین لبه‌های دایره‌ای آباژور می‌اندازد. تصویر واقع بر سقف یک دایره است، اما چون چراغ را یک بر کنیم، این دایره تبدیل به بیضی می‌شود. از طرف دیگر، تصویر بر دیوار خمی دو بخشی، یعنی هذلولی را به‌دست می‌دهد.

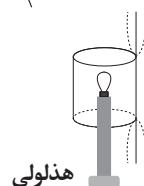
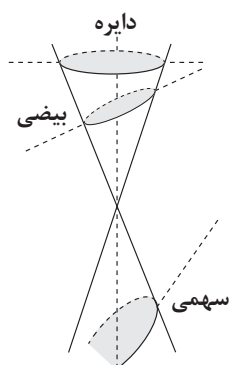
مخروطی‌ها را می‌توان از طریق حرکت نقطه بر صفحه نیز توصیف کرد. این روش موسوم به روش «مکان هندسی»^۲ محبوب یونانیان است و برخلاف تعریف تصویری مخروطی، با طول سروکار دارد. اگر نقطه‌ای چنان حرکت کند که فاصله‌اش از یک نقطه ثابت همواره یکسان بماند، دایره به‌دست می‌آوریم. اگر نقطه چنان حرکت کند که مجموع فواصلش از دو نقطه ثابت (کانون‌ها) مقداری ثابت باشد، بیضی حاصل می‌شود (آن‌جا که دو کانون یکی شوند، بیضی تبدیل به دایره می‌شود). بیضی سرخ حرکت سیارات است. در ۱۶۰۹، یوهانس کپلر^۳، ستاره‌شناس آلمانی، با رد کردن ایده قدیمی مدارهای دایره‌ای، اعلام کرد که سیارات پیرامون خورشید در مسیر بیضی شکل حرکت می‌کنند.

اما اگر نقطه‌ای چنان حرکت کند که فاصله‌اش از یک نقطه (کانون^۴ F) برابر فاصله قائمش از خطی معلوم (هادی)^۵ باشد، آن قدرها آشکار نیست. در این حالت سهمی را به‌دست

ریاضی‌دان‌ها قرن‌هاست که خم‌ها را از دیدگاه‌های بسیار مورد مطالعه قرار داده‌اند. این بررسی با یونانیان آغاز شد و خم‌های مورد مطالعه آنان، امروزه به خم‌های «کلاسیک» موسوم‌اند.

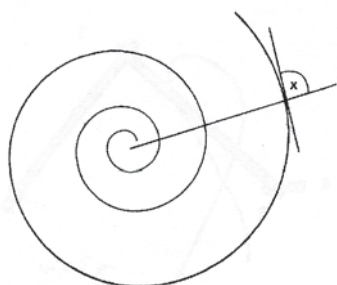
خم‌های کلاسیک

اولین خانواده در قلمرو خم‌های کلاسیک، خم‌هایی هستند که آن‌ها را مقاطع مخروطی^۶ می‌نامیم. اعضای این خانواده عبارت‌اند از دایره^۳، بیضی^۴، سهمی^۵ و هذلولی^۶. مخروط



هذلولی

ساخته شده از مخروط دویل، یعنی دو بستنی قیفی را که به هم وصل شده باشند و یکی از آن‌ها سروته قرار گرفته باشد، در نظر بگیرید. با بریدن این شکل، بسته به وضعیت صفحه با محور قائم مخروط، صفحه‌ای مسطح همچون دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی پدید خواهد آمد.



مارپیچ لگاریتمی

یکی از موارد تحقیق خم‌ها در قرن نوزدهم، خم‌هایی بود که میله‌های مکانیکی ایجاد می‌کردند. مسائلی از این دست، طرح مسئله‌ای بود که جیمز وات^{۲۴} مهندس اسکاتلندی، به‌طور تقریبی آن‌ها را حل کرده بود؛ میله‌های متصل به یکدیگر برای تبدیل حرکت دایره‌ای^{۲۵} به حرکت خطی^{۲۶}. گام مزبور در عصر بخار گامی مهم به سمت جلو بود.

ساده‌ترین این ابزارهای مکانیکی، حرکت سه میله است که در آن میله‌ها در مکان‌های ثابتی واقع در انتهای هر یک به هم وصل شده‌اند. اگر «میله اتصال»، PQ در هر طرف حرکت کند، مشخص می‌شود که مکان هندسی نقطه‌ای واقع بر آن، خمی از درجه شش، یعنی خم مسدسی یا درجه شش^{۲۷} است.

خم‌های جبری

اینک، پیرو کارهای دکارت، که با معرفی مختصات x ، y ، z و محورهای دکارتی^{۲۸} (به نام خود او) که انقلابی در هندسه به وجود آورد، مقاطع مخروطی می‌توانستند مانند معادلات جبری مورد بررسی قرار گیرند. برای مثال، دایره‌ای به شعاع ۱ دارای معادله

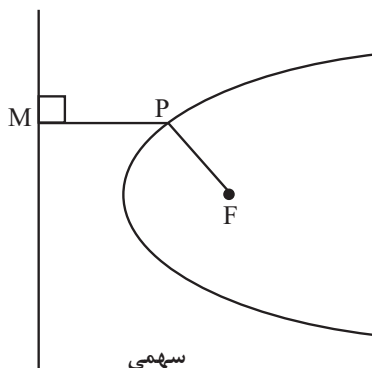
$$x^2 + y^2 = 1$$

است که مانند جمیع مخروطی‌ها، معادله‌ای از درجه دوم است. به این ترتیب، شاخه جدیدی از هندسه، موسوم به هندسه جبری^{۲۹} بالیدن گرفت.

ایزاک نیوتون در یک بررسی عمده، خم‌هایی را که با معادلات درجه سوم یا خم‌های مکعبی تعریف می‌شدند، دسته‌بندی کرد. به این ترتیب، با مقایسه با چهار مخروط اساسی، ۷۸ نوع خم یافت شد که در پنج دسته یا رده گروه‌بندی شدند. انواع مختلف خم‌های درجه چهار^{۳۰} آن قدر زیاد و ادامه‌دار است که دسته‌بندی کامل هیچ‌گاه انجام نگرفته است.

اما بررسی خم‌ها به عنوان معادلات جبری، تمام داستان نیست، زیرا خم‌های بسیاری از قبیل زنجیره‌ای‌ها، سیکلوئیدها یا چرخ‌زاده‌ها^{۳۱} (خم‌هایی که نقطه‌ای واقع بر چرخ دورانی کننده

می‌آوریم. سهمی ویژگی‌هایی دارد. اگر یک منبع نورانی در کانون F قرار گیرد، تمام پرتوهای نورانی انتشار یافته موازی PM اند. از طرف دیگر، اگر سیگنال‌های تلویزیون از ماهواره‌ای فرستاده شوند با دیش دریافت‌کننده سهمی شکل برخورد کنند، در کانون جمع می‌شوند و به تلویزیون می‌رسند.



اگر تکه چوبی را حول نقطه‌ای دوران دهیم، هر نقطه ثابت واقع بر آن، یک دایره را می‌پیماید، اما اگر بگذاریم علاوه بر دوران چوب، نقطه‌ای در امتداد آن حرکت کند، نقطه مورد بحث یک مارپیچ^{۳۱} تولید می‌کند. فیثاغورس به این مارپیچ علاقه بسیار داشت. قرن‌ها بعد، لئوناردو داوینچی ده سال از عمر خود را صرف بررسی انواع متفاوتشان کرد، در حالی که رنه دکارت^{۳۲} رساله‌ای درباره آن‌ها نوشت. مارپیچ لگاریتمی^{۳۳} به مارپیچ متساوی‌الزاویه^{۳۴} نیز موسوم است، زیرا با یک شعاع و مماس در نقطه برخورد آن شعاع و مارپیچ، زوایای برابر تشکیل می‌دهد.

ژاکوب برنولی^{۳۵} از ریاضی دانان مشهور سوئیس، به قدری شیفته مارپیچ لگاریتمی بود که دوست داشت آن را بر آرامگاهش در باسل^{۳۶} کنده کاری کنند. ایمانوئل سوئدنیورگ^{۳۷}، «مرد رُسناس»، مارپیچ مورد بحث را کامل‌ترین اشکال می‌دانست. یک مارپیچ سه‌بعدی که به دور یک استوانه می‌پیچد، به مارپیچ حلزونی^{۳۸} موسوم است. دو مورد از این مارپیچ‌ها، یعنی حلزونی‌های دوگانه، ساختار اصلی DNA را تشکیل می‌دهند.

بسیاری از خم‌های کلاسیک، همچون حلزونی^{۳۹}، پروانه^{۴۰} و بیضی شکل^{۴۱}‌های گوناگون، موجودند. دلوار^{۴۲} نام خود را از شبیه قلب بودن گرفته است. خم زنجیره‌ای^{۴۳} موضوع تحقیق در قرن هجدهم بود و به عنوان خم ساخته شده از زنجیری آویزان بین دو نقطه شناخته می‌شد. خم زنجیره‌ای، خم موجود در پل‌های معلقی آویزان بین دو دکل قائم است.

می‌پیماید) و مارپیچ‌ها را به سادگی نمی‌توان در قالب معادلات جبری بیان کرد.

یک تعریف

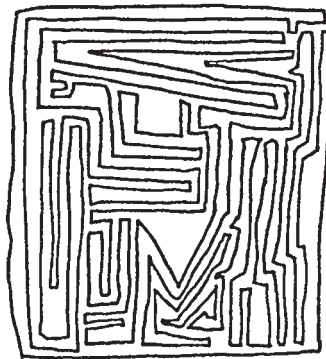
آنچه ریاضی‌دان‌ها به دنبالش بودند، تعریف خود خم بود، نه فقط مثال‌های خاصی از آن. کمیل ژوردان^{۳۳} نظریهٔ خم‌هایی را مطرح کرد که بر تعریف یک خم، بر حسب نقطه‌های متغیر بنا شده بود.

در این مورد مثالی می‌آوریم. اگر فرض کنیم $x=t^2$ و $y=2t$ ، در آن صورت به ازای مقادیر مختلف t ، نقاط بسیاری به‌دست می‌آوریم که می‌توانیم به صورت مختصات (x, y) بنویسیم. برای نمونه، اگر $t=0$ ، نقطهٔ $(0, 0)$ به‌دست می‌آید؛ $t=1$ ، نقطهٔ $(1, 2)$ را می‌دهد؛ و همین‌طور تا آخر. اگر این نقاط را بر محورهای $y-x$ رسم کنیم (نقطه‌ها را به هم وصل کنیم) یک سهمی به‌دست می‌آید. ژوردان ایدهٔ نقاط ردیابی شدهٔ مورد بحث را اصلاح کرد. از نظر وی، این روش، روش تعریف یک خم به‌شمار می‌رفت.

خم‌های ژوردان می‌توانند، حتی زمانی که شبیه دایره‌اند، از این جهت پیچیده و تودرتو باشند که «ساده» اند (یعنی خودشان را قطع نمی‌کنند) و «بسته» اند (یعنی آغاز و انجام ندارند). قضیهٔ معروف ژوردان معنادار است، چون بر این پایه

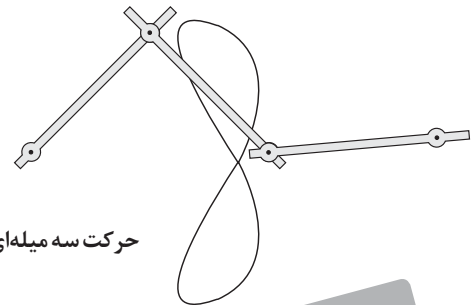
است که یک خم ساده و بسته، درون و برون دارد و وضوح ظاهری‌اش گول‌زننده است.

در ایتالیا، جوزپه پئانو^{۳۳}، در سال ۱۸۹۰ نشان داد که طبق تعریف ژوردان، یک مربع پُر - درون یک خم است. او با ارائهٔ این نظریه، شور و هیجانی به‌وجود آورد. وی توانست نقاطی را بر یک مربع چنان قرار دهد که همهٔ آن‌ها بتوانند «ردیابی شوند» و در همان حال از تعریف ژوردان پیروی کنند. این خم که به خم فضا - پرکننده موسوم شد رخنه‌ای در تعریف ژوردان به‌وجود آورد، زیرا روشن است که مربع در مفهوم قراردادی، خم نیست.



یک خم ساده و بسته ژوردان

مثال‌های خم‌های فضا - پرکننده و دیگر مثال‌های نامعقول، به این انجамید که بار دیگر ریاضی‌دان‌ها به تختهٔ رسم برگردند و در مورد پایه‌های نظریهٔ خم‌ها بیندیشند. به این ترتیب، پرسشی اساسی دربارهٔ تعریف بهتری از یک خم مطرح شد. این کار در آغاز قرن بیستم، ریاضیات را به حوزهٔ جدید توپولوژی^{۳۴} کشاند.



حرکت سه میله‌ای

چند تاریخچه

حدود ۳۰۰ قبل از میلاد: اقلیدس به تعریف مقاطع مخروطی پرداخت.

حدود ۲۵۰ قبل از میلاد: ارشمیدس دربارهٔ مارپیچ‌ها تحقیق کرد.

حدود ۲۲۵ قبل از میلاد: آپولونیوس پراگایی^{۳۵} مخروطیات^{۳۶} را انتشار داد.

۱۷۰۴ میلادی: نیوتن خم‌های مکعبی را دسته‌بندی کرد.

۱۸۹۰ میلادی: پئانو^{۳۷} ثابت کرد یک مربع صلب^{۳۸} یک خم است (خم فضا - پرکننده).

دههٔ ۱۹۲۰ میلادی: مِنگِر^{۴۰} و یوریسن^{۴۰} خم‌ها را به عنوان بخشی از توپولوژی تعریف کردند.

پی‌نوشت

1. curve
2. conic sections
3. circle
4. ellipse
5. parabola
6. hyperbola
7. locus
8. Johannes Kepler
9. focus
10. directrix
11. spiral
12. René Descartes
13. logarithmic spiral
14. equiangular
15. Jacob Bernoulli
16. Basle
17. Emanuel Swedenborg
18. helix
19. limaçon
20. lemniscate
21. oval
22. cardioid
23. catenary curve
24. James Watt
25. circular motion
26. linear motion
27. sextic curve
28. Cartesian axes
29. algebraic geometry
30. quartic curves
31. cycloids
32. Camille Jordan
33. Giuseppe Peano
34. topology
35. Apollonius of Perga
36. Conics
37. Peano
38. solid square
39. Menger
40. Urysohn

هم‌نهشتی

۱

حمیدرضا امیری

آموزش

کلیدواژه‌ها:

پیمانه، رابطه
هم‌ارزی، کلاس
هم‌ارزی، انعکاسی،
تقارنی، تعدی،
معادله سیاله، معادله
هم‌نهشتی.

تعریف: اگر a و b دو عدد صحیح و m عددی طبیعی باشد، در این صورت می‌گوییم a و b به پیمانه m با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و می‌نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$ هرگاه، $(a-b)$ بر m بخش‌پذیر باشد یا $m \mid (a-b)$ ، یعنی:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \text{ یا } a - b = mk \quad (k \in \mathbb{Z})$$

مثال: دو عدد ۶۵ و ۳۷ به پیمانه ۷ با یکدیگر هم‌نهشت‌اند، زیرا $۷ \mid (۶۵ - ۳۷) = ۲۸$.

مثال: اگر $۱۲ \equiv ۷۲ \pmod{p}$ و p عددی اول باشد، در این صورت داریم:

$$۱۲ \equiv ۷۲ \pmod{p} \rightarrow p \mid ۱۲ - ۷۲ \rightarrow p \mid -۶۰ \rightarrow p = ۲ \text{ یا } p = ۳ \text{ یا } p = ۵$$

قضیه: رابطه $\equiv \pmod{m}$ روی $\mathbb{Z}$ یک رابطه هم‌ارزی است.

این قضیه گویای این مطلب است که رابطه هم‌نهشتی به پیمانه m سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی (ترایی) دارد:

$$\text{I) } \forall a \in \mathbb{Z}, m \mid a - a \rightarrow a \equiv a \pmod{m}$$

اثبات:

$$\text{II) } \forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m \mid a - b \rightarrow m \mid b - a \rightarrow b \equiv a \pmod{m}$$

$$\text{III) } \forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m} \rightarrow m \mid b - a, m \mid b - c \rightarrow m \mid (a - b) + (b - c) \rightarrow m \mid a - c \rightarrow a \equiv c \pmod{m}$$

تذکر مهم: چون رابطه $\equiv \pmod{m}$ روی $\mathbb{Z}$ یک رابطه هم‌ارزی است، لذا این رابطه $\mathbb{Z}$ را به m کلاس هم‌ارزی به صورت زیر افراز می‌کند.

$$[0]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod{m}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk\}$$

$$[1]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod{m}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + 1\}$$

$\vdots$

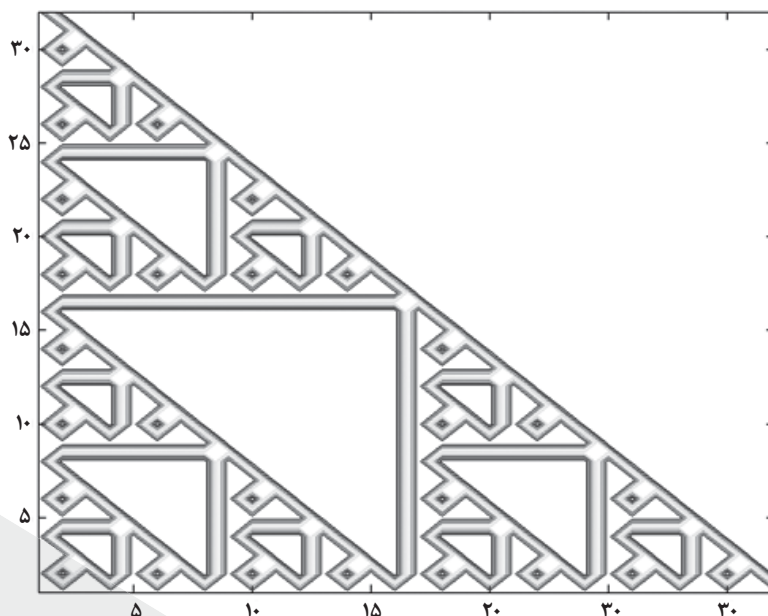
$$[m-1]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv m-1 \pmod{m}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + (m-1)\}$$

توجه داریم که از تعریف کلاس‌های هم‌ارزی و خواص آن‌ها و نیز تعریف افراز نتیجه می‌شود که:

(I) هیچ دو کلاس هم‌ارزی عضو مشترک ندارند.

(II) هر دو عضو یک کلاس هم‌ارزی به پیمانه m با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و به عکس، اگر دو عدد صحیح به پیمانه m با یکدیگر هم‌نهشت باشند این دو عدد در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند و باقی‌مانده‌های تقسیم آن‌ها بر m مساوی‌اند.

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad [a]_m = [a + mk]_m \quad \text{(III)}$$



۱. عدد ۱۳۹۱ به کدام دسته یا کلاس هم‌ارزی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟

- ۴۴ (۱)
- ۱۲۲ (۲)
- ۲۹۶ (۳)
- ۱۰۱ (۴)

حل: گزینه (۳)

$$\left. \begin{aligned} -296 &= 7(-43) + 5 \\ 1391 &= 7(198) + 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1391 \equiv -296^m$$

۲. در صورتی که داشته باشیم $[7x+2]_7 = [6x-3]_7$ ، کدام گزینه درست است؟

$$x = 4k + 3 \quad (4)$$

$$x = 4k + 2 \quad (3)$$

$$x = 4k + 1 \quad (2)$$

$$x = 5k + 1 \quad (1)$$

حل: گزینه (۴)

$$[7x+2]_7 = [6x-3]_7 \rightarrow 7x+2 \equiv 6x-3 \rightarrow 7x+2 \equiv 6x-3 \rightarrow 7x-6x \equiv -3-2 \rightarrow x \equiv -5 \equiv 3 \rightarrow x = 4k+3$$

ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی

$$1) a \equiv b \Leftrightarrow a \pm c \equiv b \pm c$$

$$2) a \equiv b \Leftrightarrow ka \equiv kb$$

$$3) a \equiv b \rightarrow ac \equiv bc$$

$$4) a \equiv b \rightarrow a^n \equiv b^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$5) a \equiv b, n \mid m \rightarrow a \equiv b$$

$$6) a \equiv b, c \equiv d \rightarrow a \pm c \equiv b \pm d, a \pm d \equiv b \pm c$$

$$7) a \equiv b, c \equiv d \rightarrow ac \equiv bd, ad \equiv bc$$

$$8) a \equiv b, a \equiv b \rightarrow a \equiv b$$

$$8) \text{ (نتیجه)} a \equiv b, a \equiv b, (m, n) = 1 \rightarrow a \equiv b$$

$$9) a \equiv b, b \equiv c \rightarrow a \equiv c$$

اگر a را بر m تقسیم کنیم و باقی‌مانده تقسیم r باشد، در این صورت a ، یعنی مقسوم، با باقی‌مانده، به پیمانه مقسوم‌علیه، یعنی m هم‌نهشت است.

$$11) a \equiv b \rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$$

(به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از دو طرف کم کرد).

$$(11) \text{ حالت خاص } a \equiv b \xrightarrow{t \cdot m} a \equiv b \pm mk$$

(می‌توانیم فقط به یک طرف رابطه $\equiv$ هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کنیم).

$$12) a \equiv b \rightarrow (a, m) \equiv (b, m)$$

$$13) ab \equiv ac, (a, m) = d \rightarrow b \equiv c$$

$$13) \text{ (نتیجه)} 1) ab \equiv ac, (a, m) = 1 \rightarrow b \equiv c$$

قضیه اصلی هم‌نهشتی‌ها: شرط لازم و کافی برای این که $a \equiv b$ باشد آن است که باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر m مساوی باشند، یعنی:

$$a \equiv b \Leftrightarrow \begin{cases} a = mq_1 + r \\ b = mq_2 + r \end{cases}$$

مثال‌ها و مسائل مهم

مثال ۱: عدد ۱۳۹۲ به پیمانه ۱۴ با کدام عدد هم‌نهشت است؟

حل: کافی است عدد ۱۳۹۲ را بر ۱۴ تقسیم کنیم. طبق ویژگی ۱۰ باقی‌مانده تقسیم جواب مسئله ماست.

$$1392 = 14 \times 99 + 6 \rightarrow 1392 \equiv 6$$

مثال ۲: اگر $a \equiv -11$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم a بر ۷ را بیابید.

حل: طبق ویژگی ۱۱ و حالت خاص آن کافی است دو برابر پیمانه را به ۱۱ اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$a \equiv -11 \rightarrow a \equiv -11 + 14 \rightarrow a \equiv 3 \rightarrow 7 | a - 3 \rightarrow a - 3 = 7k \rightarrow a = 7k + 3 \rightarrow r = 3$$

مسئله ۱: باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 49^{1391} \times 102$ را بر ۲۴ بیابید.

$$49 \equiv 1 \rightarrow 49^{1391} \equiv 1 \rightarrow 49^{1391} \times 102 \equiv 1 \times 102 \equiv 6 \rightarrow r = 6$$

مسئله ۲: باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 59^{1391} \times 7 - 290$ را بر ۲۸ بیابید.

$$59 \equiv 3 \rightarrow 59^{1391} \equiv 3^{1391}, 3^2 \equiv -1, 1391 = 3 \times 463 + 2 \rightarrow (3^2)^{463} \times 3^2 \equiv (-1)^{463} \times 3^2 \rightarrow 3^{1391} \equiv -9$$

$$\rightarrow 3^{1391} \times 7 \equiv -9 \times 7 = -63 \equiv 21 \rightarrow 3^{1391} \times 7 - 290 \equiv 21 - 290 \equiv -269 \equiv 11 \rightarrow r = 11$$

مسئله ۳: باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 53^{2013} \times 48 - 52^{2011} \times 9$ را بر ۱۷ بیابید.

$$53 \equiv 2, 2^2 \equiv -1, 2013 = 503 \times 4 + 1 \rightarrow (2^2)^{503} \times 2^1 \equiv (-1)^{503} \times 2 \equiv -2, 48 \equiv 14 \equiv -3 \rightarrow 2^{2013} \times 48 \equiv (-2) \times (-3) = 6$$

$$52 \equiv 1 \rightarrow 52^{2011} \equiv 1^{2011} \rightarrow 52^{2011} \times 9 \equiv 1 \times 9 = 9 \rightarrow A \equiv 6 - 9 = -3 \equiv 14 \rightarrow r = 14$$

قضیه‌های مهم و کاربردی

قضیهٔ اویلر: اگر a عددی صحیح و $a, m = 1, m \in \mathbb{N}$ در این صورت $a^{\varphi(m)} \equiv 1$

یادآوری: $\varphi(m)$ همان تعداد اعداد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی m است که نسبت به m اول‌اند و اگر $m = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \dots \times p_n^{k_n}$

تجزیه‌ای استاندارد برای m باشد، در این صورت $\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_n})$.

مسئله ۴: باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 17^{1202} \times 9$ را بر ۳۶ بیابید.

قضیهٔ فرما: اگر p عددی اول باشد و $(a, p) = 1, a \in \mathbb{Z}$ در این صورت، $a^{p-1} \equiv 1$.

(اگر در قضیهٔ اویلر به جای m عدد p قرار دهیم با توجه به این که اگر p اول باشد $\varphi(p) = p - 1$ حکم به دست می‌آید)

نتیجهٔ قضیهٔ فرما: اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ در این صورت $a^p \equiv a$

مسئله ۵: باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 17^{2001} - 19^{2002}$ را بر ۱۰۱ بیابید.

$$17^{2001} \equiv 17^{100} \equiv 1, 19^{2002} \equiv 19^{100} \equiv 1 \rightarrow (17^{100})^{20} \times 17 \equiv 1^{20} \times 17 = 17$$

$$(19^{100})^{20} \times 19^2 \equiv 1^{20} \times 19^2, 19^2 = 361 \equiv 58 \rightarrow A \equiv 17 - 58 = -41 \equiv 60 \rightarrow r = 60$$

مسئله ۶: باقی‌مانده تقسیم عدد $A = \sum_{k=1}^{66} k^{16} + \sum_{k=1}^{39} k^{17}$ را بر ۱۷ بیابید.

$$\sum_{k=1}^{66} k^{16} = 1^{16} + 2^{16} + \dots + 17^{16} + \dots + 34^{16} + \dots + 51^{16} + \dots + 66^{16}$$

(چون ۱۷ اول است، هر عددی که مضرب ۱۷ نباشد نسبت به ۱۷ اول است).

$$\sum_{k=1}^{66} k^{16} \equiv \underbrace{1+1+\dots+1}_{16} + \underbrace{0+0+\dots+0}_{16} + \underbrace{1+1+\dots+1}_{16} + \underbrace{0+0+\dots+0}_{16} + \dots + \underbrace{1+1+\dots+1}_{15} + \underbrace{0+0+\dots+0}_{15} \equiv 16 \times 1 = 16 \equiv -1$$

$$\sum_{k=1}^{39} k^{17} = 1^{17} + 2^{17} + \dots + 39^{17} \equiv 1 + 2 + \dots + 39 = \frac{39 \times 40}{2} = 39 \times 20 \equiv 5 \times 3 = 15 (39 \equiv 5, 20 \equiv 3)$$

$$\rightarrow A \equiv -1 + 15 = 14 \rightarrow r = 14$$

مسئله ۷: اگر a, b, c و c مضرب γ نباشند باقی مانده تقسیم عدد $A = a^{1392} + 2b^{1392} - 2c^{1392}$ را بر γ بیابید.
 $(\gamma, a) = 1 \rightarrow a^{\gamma} \equiv 1 \rightarrow (a^{\gamma})^{232} \equiv 1 \rightarrow a^{1392} \equiv 1$ فرما
و به همین ترتیب $b^{1392} \equiv 1$ و $c^{1392} \equiv 1$ ؛ بنابراین:
 $A \equiv 1 + 2 \times 1 - 4 \times 1 = -1 \equiv \gamma - 1 \rightarrow r = \gamma - 1$

قضیه ویلسون: اگر p عددی اول باشد، در این صورت، $(p-1)! \equiv (-1) \pmod{p}$.
مسئله ۸: باقی مانده تقسیم عدد $A = 18! \times 90$ را بر 19 بیابید.

$19 \nmid 18! \times 90 \rightarrow 18! \times 90 \equiv (-1) \times 14 \equiv -14 \pmod{19} \rightarrow r = 5$
قوانین یافتن باقی مانده تقسیم اعداد طبیعی بر $2, 3, 4, 5, \dots$
اگر $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0$ عددی n رقمی و بسط عدد A در مبنای 10 به شکل زیر مفروض باشد، داریم:

$$A = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10^2a_2 + 10^1a_1 + a_0$$

(I) بخش پذیری و باقی مانده تقسیم بر 3 و 9

$$10 \equiv 1 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 10^k \equiv 1 \rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + 1 \times a_{n-2} + \dots + 1 \times a_2 + 1 \times a_1 + a_0 \rightarrow A \equiv (a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0)$$

یعنی باقی مانده تقسیم هر عدد طبیعی مانند A بر 3 و 9 با باقی مانده تقسیم مجموع ارقامش بر 3 و 9 برابر است.
(II) بخش پذیری بر $4, 8, 16, \dots$ و 2^k

$$10 \equiv 2, 10^2 \equiv 0 \xrightarrow{k \geq 2} 10^k \equiv 0 \rightarrow A \equiv a_1a_0 \pmod{4} \quad (4 = 2^2), 10^3 \equiv 0 \xrightarrow{k \geq 3} 10^k \equiv 0 \rightarrow A \equiv a_2a_1a_0 \pmod{8} \quad (8 = 2^3)$$

به همین ترتیب ثابت می شود که باقی مانده تقسیم عدد A بر 2^k با باقی مانده تقسیم k رقم سمت راست A بر 2^k برابر است، یعنی:

$$A \equiv (a_{k-1}a_{k-2}\dots a_2a_1a_0) \pmod{2^k}$$

(III) بخش پذیری بر 11

$$10 \equiv -1 \rightarrow \begin{cases} 10^k \equiv 1 & (k = 2n) \\ 10^k \equiv -1 & (k = 2n+1) \end{cases}$$

$$A = a_n + 10a_{n-1} + 10^2a_{n-2} + \dots + 10^{n-1}a_1 \rightarrow A \equiv a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \dots + (-1)^{n-1}a_1$$

تمرین: باقی مانده تقسیم عدد $A = 9498324256$ را بر 11 بیابید.

$$10 \equiv 0 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} 10^k \equiv 0 \rightarrow A \equiv a_0 + 0 \times a_1 + \dots + 0 \times a_{n-1} \rightarrow A \equiv a_0$$

(یعنی باقی مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر 5 و 10 برابر است با باقی مانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر 5 و 10).
(IV) بخش پذیری بر 10 و یافتن رقم یکان اعداد توان دار

$$10 \equiv 0 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} 10^k \equiv 0 \rightarrow A \equiv a_0 \quad (a_0 < 10)$$

(یعنی باقی مانده تقسیم هر عدد بر 10 برابر است با رقم یکانش).

قضیه: شرط لازم و کافی برای $A \equiv B$ آن است که رقم یکان A و B برابر باشد.

۳. اگر دو عدد $(4a+2)$ و $(5a+3)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(7a+2)$ کدام است؟
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

حل: گزینه (۱)؛ زیرا طبق قضیه قبل، این دو عدد به پیمانه 10 با یکدیگر هم نهشت اند و داریم:

$$5a + 3 \equiv 4a + 2 \pmod{10} \rightarrow a - 1 \equiv -1 \pmod{10} \rightarrow a \equiv 0 \pmod{10} \rightarrow 7a + 2 \equiv 2 \pmod{10}$$

(پس رقم یکان عدد $7a+2$ همان 2 است).

رقم یکان اعداد توان دار به صورت A^n

(I) اگر عدد A به ۰ یا ۱ یا ۵ یا ۶ ختم شود، در این صورت A^n نیز متناظراً به صفر یا ۱ یا ۵ یا ۶ ختم می شود.

(II) اگر عدد A به ۴ ختم شود، در این صورت برای هر n زوج عدد A^n به ۶ و برای هر n فرد به ۴ ختم می شود.

(III) اگر عدد A به ۹ ختم شود، آن گاه برای هر n زوج عدد A^n به ۱ و برای هر n فرد به ۹ ختم می شود.

(IV) برای یافتن رقم یکان اعدادی به صورت A^n که در آن ها عدد A به ۲ یا ۳ یا ۷ یا ۸ ختم می شود از قضیه زیر استفاده می کنیم.

قضیه: رقم یکان توان های متوالی اعداد طبیعی هر ۴ بار یک مرتبه تکرار می شود، یعنی: $A^n \equiv A^{n+4}$ ($n \in \mathbb{N}$)

با توجه به قضیه قبل برای یافتن رقم یکان عدد A^n کافی است n را بر ۴ تقسیم کنیم. اگر $n = 4k + r$ و $r \neq 0$ در این صورت

$$A^n = A^{4k+r} \equiv A^r \equiv a^r \quad (a, \text{ رقم یکان } A) \quad \text{و اگر } n = 4k \quad (r=0) \quad \text{در این صورت } A^n = A^{4k} \equiv a^4 \equiv a^0 \equiv 1 \quad (\text{رقم یکان } A)$$

است.

مثال: مطلوب است رقم یکان عدد $1392^{1393} \times 7$.

$$\text{رقم یکان} \rightarrow 1392^{1393} \times 7 \equiv 2^{1393} \times 7 \equiv 2^1 \times 7 \equiv 14 \equiv 4 \rightarrow 1392^{1393} \times 7 \equiv 4 \rightarrow 1392^{1393} \times 7 \equiv 4 \rightarrow 1392^{1393} \times 7 \equiv 4$$

مثال: مطلوب است رقم یکان عدد $A = 499^{1342} \times 6 + 853^{1392} \times 8$.

$$1342 = 2k \rightarrow 499^{1342} \equiv 1 \rightarrow 499^{1342} \times 6 \equiv 6$$

$$1392 = 4 \times 348 \rightarrow 853^{1392} \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 1 \rightarrow 853^{1392} \times 8 \equiv 1 \times 8 \equiv 8 \rightarrow A \equiv 6 + 8 \equiv 14 \equiv 4$$

مثال: رقم یکان اعداد زیر را بیابید:

$$I) A = 216^{612} - 519^{915} \times 7 + 1393^{3931} \times 4 - 594^{79} \times 3$$

$$II) B = \sum_{k=1}^{1392} k!$$

$$III) C = [1 + 3^{1392} + 9^{1392} + 27^{1392}]^{1392}$$

$$IV) D = 453^{2013+3} + 599^{1011} \times 4 - 807^{807+2011}$$

حل:

$$I) 216^{612} \equiv 6 \Rightarrow 519^{915} \equiv 9 \Rightarrow 519^{915} \times 7 \equiv 9 \times 7 \equiv 63 \equiv 3$$

$$\Rightarrow 519^{915} \times 7 \equiv 3, 3931 = 4k + 3$$

$$\Rightarrow 1393^{3931} \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 3 \Rightarrow 1393^{3931} \times 4 \equiv 3 \times 4 \equiv 12 \equiv 2$$

$$79 = 2k + 1 \quad (\text{فرد است}) \Rightarrow 594^{79} \equiv 4 \Rightarrow 594^{79} \times 3 \equiv 4 \times 3 \equiv 12 \equiv 2$$

$$\Rightarrow A \equiv 6 - 3 + 8 - 2 = 9 \Rightarrow \text{رقم یکان } A, 9 \text{ است}$$

$$II) B = \sum_{k=1}^{1392} k! = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 1392!$$

$$\Rightarrow B \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + \dots + 0 \equiv 13 \equiv 3 \rightarrow \text{رقم یکان } B$$

(توجه دارید که $4! = 24$ و $24 \equiv 4$ و برای هر $n \geq 5$ همواره $n! \equiv 0$ است).

$$III) 27^{1392} = 3^{4k} \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 9 \Rightarrow C \equiv [1 + 1 + 1 + 9]^{1392} \equiv 12^{1392} \equiv 6^{1392} \equiv 6^0 \equiv 1$$

$$IV) n! \equiv 0 \quad (n \geq 4 \text{ هر } k! = 2n \quad (n \geq 2))$$

$$\Rightarrow 453^{2013+3} = 453^{4k+3} \equiv 3^3 \equiv 27, 599^{1011} = 599^{2n} \equiv 1 \quad (1011 \text{ زوج است})$$

$$\Rightarrow 599^{1011} \times 4 \equiv 4, 807! = 4k, 2011! = 4k' \Rightarrow 807! \equiv 0, 2011! \equiv 0$$

$$\Rightarrow 807^{807+2011} = 807^{4m} \equiv 7^4 \equiv 1$$

$$\Rightarrow D \equiv 7 + 4 - 1 = 10 \equiv 0 \rightarrow \text{رقم یکان } D$$

رمزنگاری 9 رمزگشایی

سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi_moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت قبل با مقدمه‌ای از رمزنگاری‌های متعارف در قرون گذشته به صورت توصیفی آشنا شدید. در این قسمت و قسمت‌های بعدی با اصول رمزنگاری و رمزگشایی‌های «تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم»، «رمزهای تک‌الفبایی مبتنی بر تبدیل‌های خطی» و «سیستم‌های چندحرفی» و... آشنا خواهید شد. در این قسمت به رمزهای تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم (رمز جای‌گذاری) می‌پردازیم. در آخر نیز برای آزمودن یافته‌ها، چند تمرین خواهیم آورد.

کلیدواژه‌ها:

پیام رمز، رمز
جای‌گذاری، دنباله
صریح، دنباله رمزی،
رمزهای تک‌الفبایی،
الفبای جای‌گذاری،
عدد کلیدی، کلید
رمز، فراوانی حروف.

گشودن الفباهای متعارف مستقیم از راه تکمیل دنباله صریح

اکنون که می‌دانیم چگونه می‌توان پیامی را با استفاده از یک الفبای متعارف مستقیم به رمز درآورد، گشایش رمز پیامی را که از این راه به رمز درآمده است، بررسی می‌کنیم. برای مثال، پیام زیر را در نظر می‌گیریم:

BPM VMOWBQIBQWVA NWZ I AMBBTMUMVB WN BPM ABZQSM IZM IB IV QUXIAAM
ZMKWUUMVL EM QVKZMIAM WCZ WNNMZ

حال خود را در موقعیت یک رمزگشا قرار می‌دهیم که نسخه‌ای از این پیام را به دست آورده است و می‌خواهد آن را بگشاید. به علاوه، فرض می‌کنیم که رمزگشا به طریقی (شاید با حدسی اتفاقی یا به علت آشنایی با روش‌های رمزنگاری فرستنده پیام) سیستم کلی را می‌داند، اما از کلید ویژه بی‌اطلاع است. در چنین موقعیتی، تنها کاری که او باید انجام دهد، یافتن عددی است که وی را به خواندن پیام قادر سازد؛ عددی که نشان‌دهنده میزان انتقال دنباله رمزی نسبت به دنباله صریح باشد. از این نظر، مسئله زیاد مشکل به نظر نمی‌رسد. در کل تنها ۲۵ عدد ممکن وجود دارند و هر کدام را می‌توان به نوبت امتحان کرد تا عددی به دست آید که پیام را فاش سازد. درواقع، ممکن است کار کردن با یک کلمه برای یافتن کلید ویژه کافی باشد.

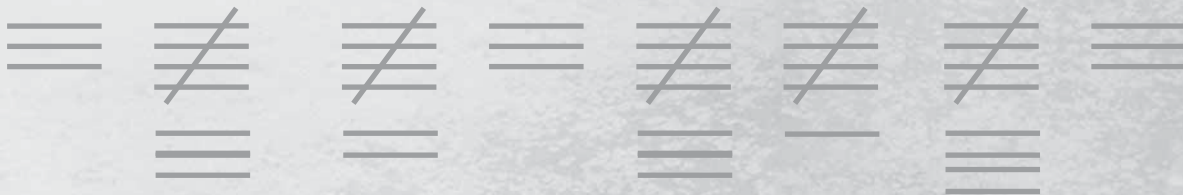
بنابراین اگر برای مثال کلمه اول پیام «BPM» را در نظر بگیریم، معادل‌های عددی حروف‌های این کلمه ۲، ۱۶ و ۱۳ هستند.

اکنون اگر عدد ۱ را از هریک از این عددها کم کنیم:

۱	۱۵	۱۲
↑	↑	↑
A	O	L

و اگر عدد ۲ را از هریک از عددهای نخست کم کنیم:

۲۶	۱۴	۱۱
↑	↑	↑
Z	N	K



این فرایند را ادامه می‌دهیم و نتیجه را به صورت یک جدول منظم می‌کنیم. از ۲، ۱۶ و ۱۳ شروع می‌کنیم و اطلاعاتی را که به دست می‌آوریم به ترتیب زیر جدول بندی می‌کنیم:

مقدار کم شده
۱
:
۸

اعداد حاصل
۱ ۱۵ ۱۲
:
۲۰ ۸ ۵

متناظر حرفی
A O L
:
T H E

وقتی به عدد ۸ می‌رسیم، کلمه THE را که مناسب به نظر می‌رسد مشاهده می‌کنیم و درواقع، اگر کلید ۸ را برای تمام پیام به کار ببریم، می‌توانیم تمام پیام را بخوانیم.

تذکر: خواننده باید روی جزئیات از رمز در آوردن بسیار تمرین کند تا بر فرایند رمز گشایی مسلط شود.

توجه کنید که اگر عمل کم کردن را با ظهور کلمه THE متوقف نکرده بودیم و کار را تا آخرین عدد، یعنی ۲۵ ادامه می‌دادیم، هریک از سه ستون سمت راست جدول، یک الفبای کامل اما به ترتیب معکوس می‌بود. در صورت تمایل، می‌توان این عددهای کلیدی را به ترتیب معکوس، امتحان کرد. یعنی اول ۲۵، بعد ۲۴، تا به آخر و در نهایت در هر ستون، الفباها به ترتیب مستقیم قرار گیرند. چنین وضعی، روشی را که اندکی با روش فوق تفاوت دارد برای جست و جوی کلید به دست می‌دهد.

تمرین: پیام‌های زیر را بگشایید.

1. VXMDUJA JARCQVNCRL LXDUM KN LXWBRMNANM
ANVJRWMA JARCQVNCRL.

2. MZVYDIB DN DJ OCZ HDIY RCVO ZSZMXDNZ
DN OJ OCZ WJYT.

(راهنمایی: برای حل تمرین‌ها: ۱. عدد کلیدی K برابر ۹ است: K=۹
۲. عدد کلیدی K برابر ۲۱ است: K=۲۱)

گشودن الفباهای متعارف مستقیم با استفاده از فراوانی حرف‌ها

در این جا به توضیح روش مبتنی بر انتقال الفبای معمولی می‌پردازیم. این روش بر یک ویژگی اساسی زبان استوار است: «فراوانی نسبی به کار رفتن حرف‌های مختلف الفبا»

یک نمونه از متنی به زبان صریح را انتخاب می‌کنیم. برای مثال، صفحه‌ای از یک کتاب یا چند سطر از یک روزنامه (به زبان لاتین) را انتخاب می‌کنیم و فراوانی هر حرف را می‌شماریم؛ یعنی معلوم می‌کنیم که هر حرف چند بار به کار رفته است. برای مثال از نمونه‌ای که به طول ۱۰۰۰ حرف انتخاب کرده‌ایم، پس از شمارش، نتیجه زیر به دست آمده است:

A	۷۳	J	۲	S	۶۳
B	۹	K	۳	T	۹۳
C	۳۰	L	۳۵	U	۲۷
D	۴۴	M	۲۵	V	۱۳
E	۱۳۰	N	۷۸	W	۱۶
F	۲۸	O	۷۴	X	۵
G	۱۶	P	۲۷	Y	۱۹
H	۳۵	Q	۳	Z	۱
I	۷۴	R	۷۷		

فراوانی نسبی هر حرف، که مورد نظر ماست، درصد تعداد دفعات ظاهر شدن آن حرف، یعنی درصد تعداد دفعات به کار رفتن آن حرف است. از آن جا که تعداد کل حروف در این نمونه ۱۰۰۰ است، فراوانی نسبی هر حرف از تقسیم فراوانی واقعی آن بر ۱۰ به دست می آید.

همان طور که انتظار می رود، فراوانی نسبی حروف مختلف فرق دارد. تعداد **E** ها ۱۳٪ کل حرف ها، تعداد **T** ها تقریباً ۹٪ کل حرف ها و تعداد هریک از حروف صدادار **A**، **I** و **O** حدود ۷٪ کل حرف هاست. بعضی حروف مانند **G**، **V** و **W** به ندرت به کار رفته اند (تعداد آن ها بین ۱ تا ۲ درصد بوده است) و حرف های **J**، **K** و **Q** تقریباً اصلاً به کار نرفته اند.

بیان این که «فراوانی نسبی **E** ۱۳٪ است» به این معناست که در یک انتخاب تصادفی از کل هزار حرف، احتمال به دست آمدن یک **E** به نسبت ۱۳ به ۱۰۰ است. از این رو، اصطلاح احتمال را که تعریف دقیق ریاضی آن مبتنی بر مفهوم فراوانی نسبی است، به کار می بریم و از نماد $P_E = 0.13$ استفاده می کنیم تا نشان دهیم که احتمال به دست آوردن یک **E** برابر ۱۳٪ است. با این نمادگذاری:

$$P_A = 0.07 \text{ و } P_T = 0.09 \text{ و } \dots \text{ و } P_Z \approx 0$$

از آن جا که مجموع همه فراوانی ها برابر تعداد همه حرف ها در نمونه است، نتیجه می شود که مجموع فراوانی های نسبی ۱۰۰ درصد، یعنی ۱ است و بنابراین مجموع احتمال برای همه ۲۶ حرف برابر ۱ است:

$$P_A + P_B + P_C + \dots + P_Z = 1$$

این عبارت را به صورت اختصاری زیر نشان می دهند:

$$\sum_{i=A}^{i=Z} P_i = 1$$

عبارت سمت چپ آن چنین خوانده می شود:

«مجموع مقادیر P_i وقتی که i به نوبت مقادیر از **A** تا **Z** را اختیار می کند.»
A، حد پایین و **Z**، حد بالای مجموع نامیده می شود.

هر متنی از زبان متداول را که به اندازه کافی طولانی باشد، بررسی کنیم، نتیجه ای مشابه با آنچه از نمونه هزار حرفی به دست آوردیم، به دست خواهیم آورد.

درصد تعداد دفعات به کار رفتن هر حرفی در نمونه های طولانی را «**فراوانی**» مشخصه آن حرف می نامند. اگر پیامی بسیار کوتاه باشد، ممکن است فراوانی نسبی بعضی از حروف در آن پیام با فراوانی مشخصه آن ها تفاوت زیادی داشته باشد. اما هر چه پیام طولانی تر باشد، احتمال کمتری وجود دارد که تفاوت های زیادی با فراوانی های مشخصه وجود داشته باشد.

در این جا اطلاعات مربوط به شمارش فراوانی ها را که یادداشت کردیم به شکل یک نمودار میله ای نمایش می دهیم. برای سادگی، مقدار هریک از فراوانی های نسبی را به نزدیک ترین عدد صحیح گرد می کنیم، به گونه ای که بتوان فراوانی مشخصه هر حرف را مانند زیر با نشان خط هایی نمایش داد:

A , **B** , **C** , **D** , **E** , **I** , ... , **X** , **Y** , **Z**

(الگوی فراوانی مشخصه هر حرف در دنباله صریح)

در این نوع نمایش، نموداری می بینیم که واضح تر از جدول ارقام، زیاد و کم بودن فراوانی مشخصه حرف ها را آشکار می سازد. در این نمودار یک الگوی با اهمیت وجود دارد. در بین حروفی که فراوانی های زیاد دارند، **A**، **E** و **I** را می بینیم که به فاصله های برابر (سه حرف در میان) قرار دارند و **E** بیشترین فراوانی را دارد. هم چنین زوج متوالی **N** و **O** و نیز سه تایی **R**، **S** و **T** را می بینیم. در بین حروفی که فراوانی های کم دارند، زوج متوالی **J** و **K** و دنباله **U**، **V**، **W**، **X** و **Y** قرار دارند.

این الگوی فراوانی های زیاد و کم با فاصله های مذکور، مشخصه الفبای معمولی در زبان صریح و یک ابزار اساسی رمزگشایی است. حال ببینیم هنگامی که پیامی از راه انتقال الفبای معمولی نسبت به خود الفبا به رمز درآید، چه اتفاقی می افتد. برای مثال، فرض کنید میزان انتقال، هشت حرف باشد. پس هر بار که هر حرف **A** در پیام صریح ظاهر می شود به جای آن **I** گذاشته می شود. برای

حال توزیع رمز را چنان انتقال می‌دهیم که $A_c = C_p$ و دو توزیع را مقایسه می‌کنیم (شکل ۴). دوباره نتیجه می‌گیریم که تناظر خوبی نداریم.

دنباله صریح:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

≠ — = ≡ ≠ = = ≡ ≠ ≡ = ≠ ≠ = ≠ ≠ ≠ = — = =

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

≠ — = ≡ ≠ = = ≡ ≠ ≡ = ≠ ≠ = ≠ ≠ ≠ = — = =

دنباله رمزی:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

≠ ≠ — — ≠ = — ≠ ≡ — = ≠ — — = ≠ ≠ — ≠

این فرایند را ادامه می‌دهیم و هر بار با تناظرهایی که رضایت‌بخش نیستند مواجه می‌شویم تا این که به حالت $A_c = S_p$ می‌رسیم (شکل ۵).

دنباله صریح:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

≠ — = ≡ ≠ = = ≡ ≠ ≡ = ≠ ≠ = ≠ ≠ ≠ = — = =

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

≠ — = ≡ ≠ = = ≡ ≠ ≡ = ≠ ≠ = ≠ ≠ ≠ = — = =

دنباله رمزی:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

≠ ≠ — — ≠ = — ≠ ≡ — = ≠ — — = ≠ ≠ — ≠

در این وضعیت مشاهده می‌کنیم که تناظر خوبی به دست آورده‌ایم، بنابراین: « $A_p = I_c$ ».

تمرین:

پیام‌های زیر را با متناظر قرار دادن توزیع آن‌ها با توزیع فراوانی زبان صریح بگشایید.

۱.

CQSOB KOHSF WG PZIS PSQOIGS RWFH DOFWHQZSG WB HVS KOHSF FSTZSQH GIBZWUVH PIH HVS
KOHSF OPGCFPG FSR OBR MSZZCK HVS UFSSBG OBR PZISG HVOH OFS ZSTH AOYS HVS RSSD PZIS CQSOB.

(پاسخ ۱. عدد کلیدی، یعنی تعداد حروف انتقال‌یافته، برابر ۱۴ است: $K=14$)

۲.

SNHPJQ NX F MJFAD XNQAJW BMNYJ RJYFQQNH JQJRJSY NY NX RFLSJYNH YFPJX F MNLM UTQNXM FSI
ITJX STY YFWSNXM TW WZXY JFXNQD.

(پاسخ ۲. عدد کلیدی، یعنی تعداد حروف انتقال‌یافته، برابر ۵ است: $K=5$)

رویکرد هندسی و جبری در آموزش هندسه

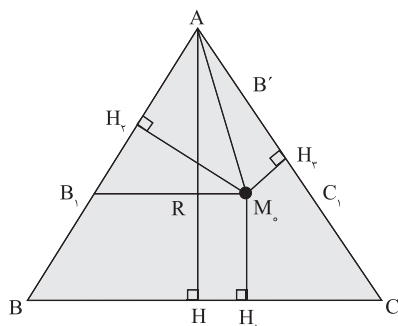
مسئله‌هایی از کتاب درسی هندسه

محمد هاشم رستمی

مسئله: با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را به دست آورید.

کلیدواژه‌ها:

رویکرد هندسی،
رویکرد جبری،
مختصاتی،
افراز، مثلث
متساوی‌الاضلاع،
دستگاه محورهای
مختصات قائم.



$$S_{\Delta M, BC} + S_{\Delta M, AB} + S_{\Delta M, AC} = S_{\Delta ABC} \quad (1)$$

اما داریم:

$$BC = AB = AC = a$$

$$S_{\Delta M, BC} = \frac{1}{2} BC \cdot MH_1$$

$$S_{\Delta M, AB} = \frac{1}{2} AB \cdot MH_2$$

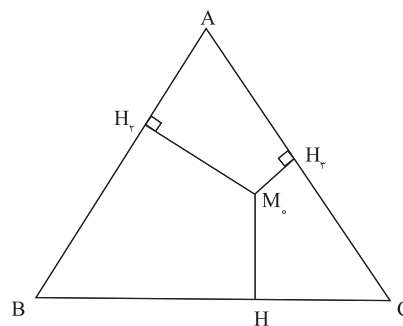
$$S_{\Delta M, AC} = \frac{1}{2} AC \cdot MH_3$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{\Delta M, BC} = \frac{1}{2} a \cdot MH_1 \quad (2)$$

$$S_{\Delta M, AB} = \frac{1}{2} a \cdot MH_2 \quad (3)$$



مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a ($AB=AC=BC=a$) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم M نقطه‌ای واقع در درون این مثلث و MH_1 ، MH_2 ، MH_3 به ترتیب فاصله‌های نقطه M از ضلع‌های BC ، AB و AC باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که $MH_1 + MH_2 + MH_3$ مقداری ثابت است و اندازه این مقدار ثابت را به دست آوریم.

مسئله را با دو رویکرد هندسی و جبری - مختصاتی حل می‌کنیم.

الف) حل به روش هندسی

راه اول: از نقطه M به رأس‌های A ، B و C وصل و ارتفاع AH از مثلث ABC را نیز رسم می‌کنیم. چون مثلث ABC به سه مثلث MAB ، MBC و MAC افراز شده است، پس می‌توانیم بنویسیم:



$$S_{\Delta M, AC} = \frac{1}{2} a \cdot M \cdot H_r \quad (4)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot AH = \frac{1}{2} a \cdot h_a \quad (5)$$

با قراردادن مقدارهای به دست آمده از رابطه‌های (۲)، (۳)، (۴) و (۵) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} a \cdot M \cdot H_1 + \frac{1}{2} a \cdot M \cdot H_r + \frac{1}{2} a \cdot M \cdot H_r = \frac{1}{2} a \cdot AH$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a (M \cdot H_1 + M \cdot H_r + M \cdot H_r) = \frac{1}{2} a \cdot AH$$

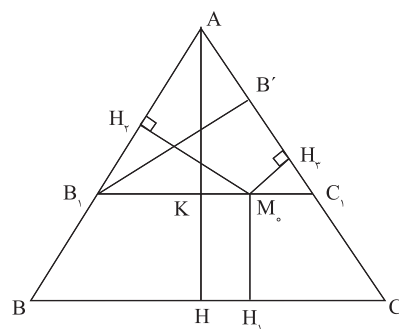
$$\Rightarrow M \cdot H_1 + M \cdot H_r + M \cdot H_r = AH = h_a$$

چون $AH = h_a$ مقدار ثابتی است، پس حکم مسئله درست است.

یعنی:

«مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مقداری ثابت است و این مقدار ثابت، اندازه ارتفاع آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.

راه دوم: ارتفاع AH از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم می‌کنیم و از نقطه M خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع‌های AB و AC را به ترتیب در B_1 و C_1 و ارتفاع AH را در نقطه K قطع کند.



از جمع کردن طرف‌های نظیر دو رابطه (۱) و (۲) داریم:
 $M \cdot H_1 + M \cdot H_r + M \cdot H_r = AK + KH = AH = h_a =$ مقدار ثابت
 پس حکم مسئله درست است.

نکته ۱: ثابت بودن $M \cdot H_1 + M \cdot H_r + M \cdot H_r$ را می‌توان با میل دادن نقطه M به سوی یکی از رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC حدس زد، بدین ترتیب که اگر نقطه M را بسیار نزدیک به رأس A در نظر بگیریم، $M \cdot H_1$ به سمت $AH = h_a$ و $M \cdot H_r$ و $M \cdot H_r$ به سمت صفر میل خواهند کرد، پس:

$$M \cdot H_1 + M \cdot H_r + M \cdot H_r \rightarrow h_a + 0 + 0 = h_a$$

این حدس زدن به حل مسئله کمک می‌کند.

نکته ۲: باید توجه کنیم، هر حکمی (هر ویژگی) که در مثلث متساوی‌الساقین برقرار است، در مثلث متساوی‌الاضلاع نیز برقرار است، اما عکس این مطلب درست نیست. برای مثال:

مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده هر مثلث

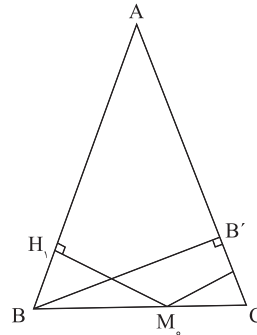
مثلث AB_1C_1 مثلثی متساوی‌الاضلاع است که ارتفاع AK وارد بر قاعده B_1C_1 از آن است و بنابراین، ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین را نیز دارد که: «مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن مقداری ثابت و مساوی طول ارتفاع وارد بر یکی از دو ساق است» که در این جا به دلیل متساوی‌الاضلاع بودن مثلث AB_1C_1 ، این مجموع، مساوی ارتفاع AK است. یعنی داریم:

$$M \cdot H_1 + M \cdot H_r = B_1B' = AK \quad (1)$$

از طرفی چهارضلعی H_1KM به دلیل قائمه بودن زاویه‌هایش مستطیل است، بنابراین:

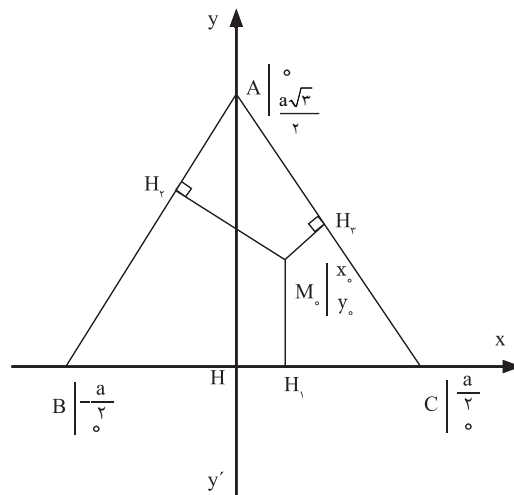
$$M \cdot H_1 = KH \quad (2)$$

متساوی الساقین از دو ساق آن مقدار ثابتی است و این مقدار ثابت مساوی اندازه ارتفاع نظیر یکی از دو ساق مثلث است.



بدیهی است که این ویژگی در مثلث متساوی الاضلاع نیز برقرار است و ما در راه دوم حل مسئله موردنظرمان از آن استفاده کردیم. اما این ویژگی که «مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون هر مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است»، در مثلث متساوی الساقین برقرار نیست. به عبارت دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون هر مثلث متساوی الساقین از سه ضلع آن، مقدار ثابتی نیست، بلکه به جای این نقطه در درون مثلث بستگی دارد.

ب) حل به روش جبری - مختصات



دستگاه مختصات قائم xOy را چنان اختیار می‌کنیم که محور x ها روی خط BC و محور y ها روی خط AH ارتفاع وارد از رأس A بر قاعده BC قرار گیرد و نقطه H همان O مبدأ مختصات باشد. در این دستگاه مختصات با توجه به این که $BC = AB = AC = a$ اختیار شده و $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ است (طول هر ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a مساوی

$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است)، مختصات رأس‌های مثلث متساوی الاضلاع ABC در این دستگاه مختصات به صورت زیر خواهد بود:

$$A = (0, \frac{a\sqrt{3}}{2}), B = (-\frac{a}{2}, 0), C = (\frac{a}{2}, 0)$$

اکنون فاصله نقطه دلخواه $M_1 = (x, y)$ واقع در درون مثلث ABC از سه ضلع AB ، BC و AC را به کمک دستور فاصله نقطه از خط، یعنی $d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ که فاصله نقطه $M_1 = (x, y)$ از خط $L: ax + by + c = 0$ را نشان می‌دهد، به دست می‌آوریم. برای این کار نخست لازم است معادله خط‌های AB ، BC و AC را با توجه به داشتن مختصات رأس‌های A ، B و C بنویسیم و سپس فاصله $M_1 = (x, y)$ از این خط‌ها، یعنی طول پاره‌های M_1H_1 ، M_1H_2 و M_1H_3 را به دست آوریم. در نتیجه داریم:

$$B = (-\frac{a}{2}, 0), C = (\frac{a}{2}, 0) \Rightarrow BC: y = 0$$

$$A = (0, \frac{a\sqrt{3}}{2}), B = (-\frac{a}{2}, 0) \Rightarrow AB: \frac{x}{-\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow AB: -x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{a}{2} = 0$$

$$A = (0, \frac{a\sqrt{3}}{2}), C = (\frac{a}{2}, 0)$$

$$\Rightarrow AC: \frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow AC: x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{a}{2} = 0$$

$$M_1H_1 = \frac{|y|}{1} = |y| \quad \text{اکنون خواهیم داشت:}$$

$$M_1H_2 = \frac{|-x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{a}{2}|}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} (x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{a}{2})$$

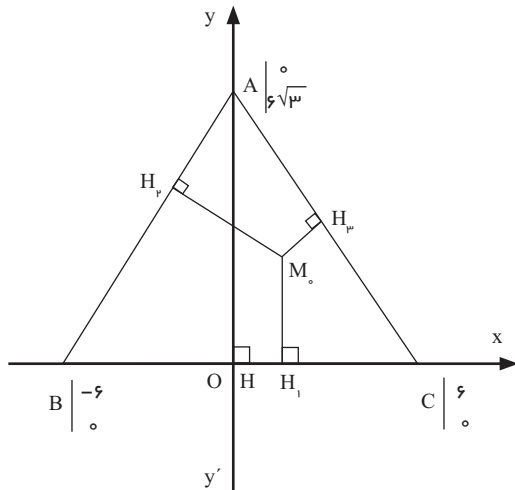
$$M_1H_3 = \frac{|x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{a}{2}|}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} (-x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{a}{2})$$

و از آن جا با توجه به این که در این دستگاه مختصات قائم اختیار شده و $y \geq 0$ است، خواهیم داشت:

$$M_1H_1 + M_1H_2 + M_1H_3 = y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

سانتی متر را رسم می کنیم. محور x ها را روی خط BC و محور y ها را روی ارتفاع AH و نقطه H پای برخورد خط AH با خط BC را مبدأ مختصات می گیریم. در این دستگاه مختصات، مختصات رأس های A، B، C و به صورت زیر است:

$$A = (0, 6\sqrt{3}), B = (-6, 0), C = (6, 0)$$



معادله ضلع های AB، BC و AC نیز به صورت زیر خواهد

$$BC: y = 0$$

$$AB: \frac{x}{-6} + \frac{y}{6\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow -x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 6 = 0$$

$$AC: \frac{x}{6} + \frac{y}{6\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 6 = 0$$

اکنون اگر $M = (x, y)$ نقطه ای دلخواه واقع در درون مثلث متساوی الاضلاع ABC باشد، M, H_1 و M, H_2 باشد، که به ترتیب فاصله های نقطه M از ضلع های BC و AB، AC هستند، برابرند با:

$$M, H_1 = |y|$$

$$M, H_2 = \frac{|-x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 6|}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| -x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 6 \right|$$

$$M, H_3 = \frac{|x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 6|}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 6 \right|$$

با توجه به نامنفی بودن y و این که $x \in [-6, 6]$ خواهیم

$$M, H_1 + M, H_2 + M, H_3$$

داشت:

$$= y + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + 6 - x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + 6 \right)$$

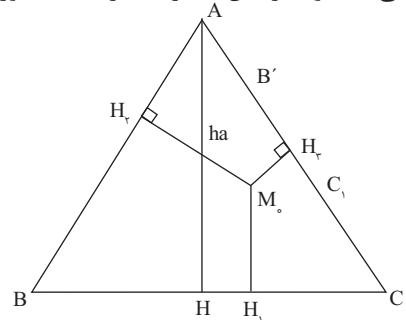
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}a = y - y + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a\sqrt{3}}{2} = h$$

پس حکم مسئله برقرار است.

نکته ۱: دستگاه محورهای مختصات قائم xoy را می توان به دو صورت مشابه نیز در نظر گرفت، چنان که محور x ها روی یکی از دو ضلع دیگر مثلث متساوی الاضلاع ABC و محور y ها روی ارتفاع نظیر آن ضلع باشد. محاسبه ها مشابه محاسبه انجام شده در بالاست.

نکته ۲: دستگاه محورهای مختصات قائم xoy را می توان در صفحه مثلث ABC به صورت های دیگر نیز در نظر گرفت، چنان که محور x ها یا y ها روی هیچ یک از ضلع های مثلث قرار نگیرد و هیچ ارتفاعی از مثلث نیز محور دستگاه مختصات قائم انتخاب شده نباشد. اما محاسبه ها در این نوع انتخاب مشکل تر خواهد شد.

مثال ۱: مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۱۲ سانتی متر داده شده است. با رویکرد جبری - مختصاتی ثابت کنید که مجموع فاصله های هر نقطه واقع در درون این مثلث از سه ضلع آن مقدار ثابتی است و اندازه این مقدار ثابت را به دست آورید.



حل: در حالت کلی ثابت کردیم که مجموع فاصله های هر نقطه واقع در درون مثلث متساوی الاضلاع ABC از سه ضلع آن مقدار ثابتی است و اندازه های این مقدار ثابت مساوی طول ارتفاع این مثلث متساوی الاضلاع است. پس اگر ضلع مثلث متساوی الاضلاع برابر a باشد، اندازه مقدار ثابت مورد نظر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است. با توجه به این مطلب، مقدار ثابت مورد نظر در این مسئله برابر است با:

$$h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

اما اگر بخواهیم مسئله را بدون استفاده از حل در حالت کلی حل کنیم، مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۱۲

نقطه $A = (p, 0)$ و $B = (0, q)$ می‌گذرد، چنین خواهد بود:

$$A \begin{vmatrix} x_1 = p \\ y_1 = 0 \end{vmatrix} B \begin{vmatrix} x_2 = 0 \\ y_2 = q \end{vmatrix} \Rightarrow y - 0 = \frac{q - 0}{0 - p}(x - p)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-q}{p}(x - p) \Rightarrow py = -qx + pq$$

$$\Rightarrow px + py = pq \Rightarrow \frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

بنابراین معادله خطی که طول از مبدأ آن مساوی p و عرض از مبدأ آن مساوی q است، به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

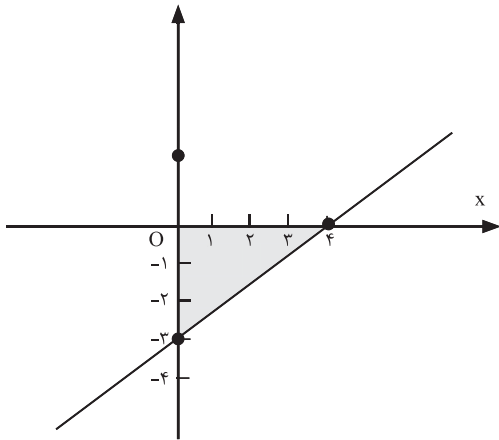
مثال ۱: معادله خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن $\frac{1}{3}$ و عرض از مبدأ آن $-\frac{1}{2}$ باشد.

حل: داریم:

$$p = +\frac{1}{3}, q = -\frac{1}{2}, \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow 2x - 3y = 1 \quad \text{معادله خط خواسته شده}$$

مثال ۲: مساحت مثلث حاصل از برخورد محورهای مختصات و خط L به معادله $3x - 4y - 12 = 0$ را تعیین کنید.



حل: مختصات نقطه‌های برخورد خط L با محورهای مختصات را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} &\text{در معادله } L \\ y = 0 &\longrightarrow 3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \\ &\Rightarrow A = (4, 0) \quad \text{نقطه برخورد با محور طول ها (x)} \end{aligned}$$

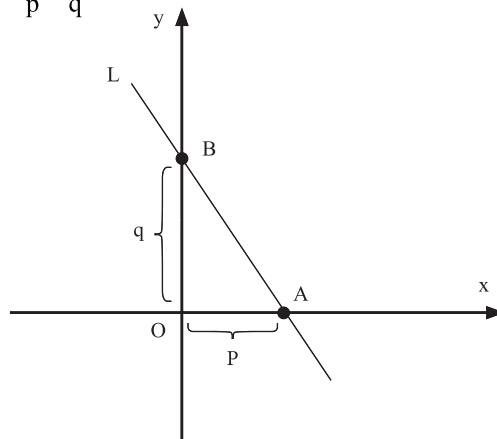
$$\begin{aligned} &\text{در معادله } L \\ x = 0 &\longrightarrow 0 - 4y - 12 = 0 \Rightarrow -4y = 12 \Rightarrow y = -\frac{12}{4} = -3 \end{aligned}$$

$$= y + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3} y + 12 \right) = y - y + 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = h_a$$

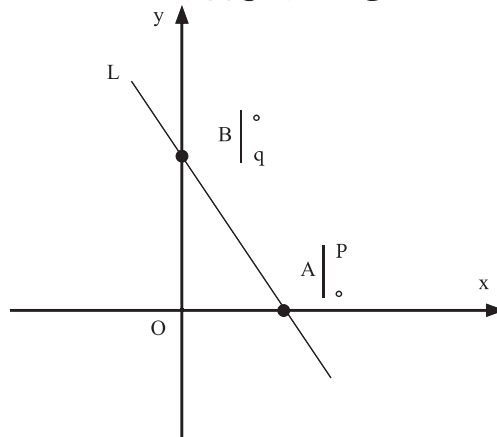
به‌طوری که دیده می‌شود محاسبه از حالت کلی خیلی ساده‌تر نیست. پس اگر در مسئله اثبات مستقیم مطلب را نخواهیم، هم‌چنان که دیدید می‌توانیم از حل مسئله در حالت کلی استفاده کنیم.

نکته مهم: اگر خط راستی مانند L محور x ها را در نقطه $A = (p, 0)$ و محور y ها را در نقطه $B = (0, q)$ قطع کند، p طول از مبدأ خط L و q را عرض از مبدأ خط L می‌نامند. در این حالت معادله خط L به صورت زیر است:

$$L: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$



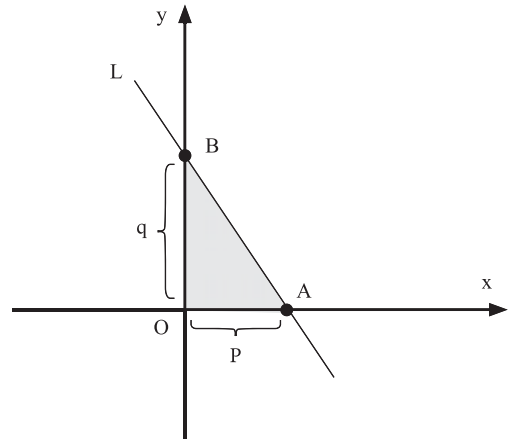
که ما از این دستور برای نوشتن معادله ضلع‌های AB و AC در روش جبری - مختصاتی استفاده کردیم. اما این دستور چگونه به دست می‌آید. به توضیح زیر توجه کنید.



می‌دانیم معادله خطی که از دو نقطه $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ می‌گذرد و به صورت $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ است. پس معادله خطی که از دو

نقطه برخورد با محور عرض‌ها (y) $B = (0, -3)$ مثلث مورد نظر، مثلث قائم‌الزاویه OAB ($\hat{O} = 90^\circ$) است. اما مساحت این مثلث برابر است.

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} |OA| |OB| = \frac{1}{2} |4| |-3| = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$



نکته: مساحت مثلث ایجاد شده بین محورهای مختصات و خط L در صورتی که طول از مبدأ این خط، یعنی نقطه برخوردش با محور طول‌ها p و عرض از مبدأ آن، یعنی عرض نقطه برخوردش با محور عرض‌ها q باشد، مساوی $S = \frac{1}{2} |pq|$ است (شکل)؛ زیرا داریم:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} |OA| |OB| = \frac{1}{2} |p| |q| = \frac{1}{2} |pq|$$

مثال ۳: خط $L: x + (m-1)y = 6$ داده شده است. مقدار m را چنان تعیین کنید که مساحت مثلث حاصل از برخورد این خط و محورهای مختصات مساوی ۹ واحد سطح باشد.

حل: می‌دانیم مساحت مثلث ایجاد شده بین محورهای مختصات و خط L که طول از مبدأ آن p و عرض از مبدأ آن q است مساوی $S = \frac{1}{2} |pq|$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$L: x + (m-1)y = 6, x = 0 \Rightarrow y = \frac{6}{m-1} = q$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 6 = p, S = \frac{1}{2} |pq|$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{1}{2} \left| 6 \times \frac{6}{m-1} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{36}{m-1} \right| = \frac{18}{|m-1|}$$

$$\Rightarrow 9|m-1| = 18 \Rightarrow |m-1| = 2 \Rightarrow m-1 = +2 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

$$m-1 = -2 \Rightarrow \boxed{m=-1}$$

مثال ۴: یک دسته خط به معادله زیر داده شده است:

$$mx + (2m-1)y = m+3$$

الف) ثابت کنید که این دسته خط از نقطه ثابتی می‌گذرد و مختصات نقطه ثابتی را که این دسته خط از آن می‌گذرد، تعیین کنید.

ب) مساحت مثلث حاصل از برخورد این دسته خط و محورهای مختصات را بر حسب پارامتر m به دست آورید.
پ) آیا می‌توانید مقدار m را چنان بیابید که مساحت مثلث حاصل از این دسته خط و محورهای مختصات کمترین مقدار ممکن یا بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل: الف) معادله خط L را نسبت به پارامتر مرتب می‌کنیم. آن‌گاه یک بار ضریب پارامتر و بار دیگر بقیه معادله را (که مستقل از پارامتر است) مساوی صفر قرار می‌دهیم و با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی حاصل مختصات نقطه ثابتی را که خط L از آن نقطه می‌گذرد (در صورت وجود) تعیین می‌کنیم. داریم:

$$mx + (2m-1)y = m+3$$

$$\Rightarrow mx + 2my - y - m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow m(x + 2y - 1) - y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow x - 6 - 1 = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow N = (7, -3)$$

نقطه ثابت خواسته شده.

نکته: مختصات نقطه ثابتی را که دسته خط از آن می‌گذرد به روش دیگری نیز می‌توان به دست آورد، به این ترتیب که به جای پارامتر m دو مقدار دلخواه قرار می‌دهیم تا معادله دو خط از دسته خط داده شده به دست آید. آن‌گاه مختصات نقطه برخورد این دو خط را به دست می‌آوریم. این نقطه در صورت وجود همان نقطه ثابت دسته خط است. بنابراین داریم:

$$m = 0 \xrightarrow{\text{در معادله دسته خط}} -y = 3 \Rightarrow y = -3$$

$$m = 1 \xrightarrow{\text{در معادله دسته خط}} x + y = 4 \Rightarrow x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow N = (7, -3)$$

ب) برای محاسبه مساحت مثلث حاصل از برخورد این دسته خط و محورهای مختصات بر حسب پارامتر m ، طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q این خط را به دست می‌آوریم و از دستور $S = \frac{1}{2} |pq|$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x = 0 \Rightarrow (2m-1)y = m+3 \Rightarrow y = \frac{m+3}{2m-1} = q$$

عرض از مبدأ

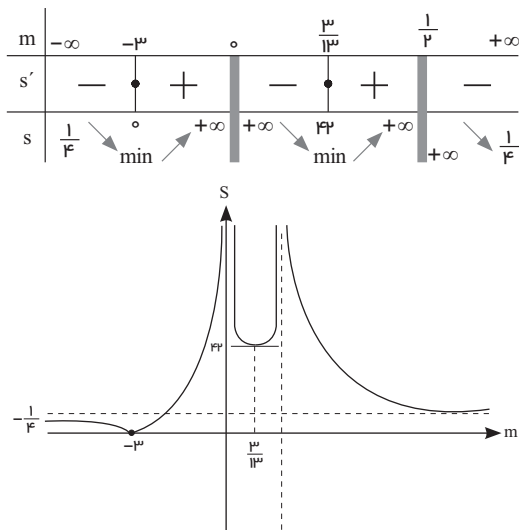
(که البته بازه $(0, \frac{1}{2})$) را باید از آن کنار بگذاریم، ولی برای درک بهتر، در جدول آمده است.)

در حالت (۲) نیز با توجه به این که ضابطه S نسبت به m قرینه شده است، بدون مشتق گیری، جدول تغییرات S نسبت به m را به صورت زیر به دست می آوریم:

m	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
s'	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
s	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$
			$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	

(که البته فقط بازه $(0, \frac{1}{2})$) آن مورد قبول است، ولی برای درک بهتر، همه جدول را رسم کرده ایم.)

از ترکیب دو جدول I و II، جدول تغییرات S را به ازای $m \in \mathbb{R}$ به صورت زیر رسم شده و نمودار S نسبت به m را نیز رسم می کنیم و از آن جا به سادگی می توانیم ماکزیمم و مینیمم های S را تشخیص دهیم:



و با توجه به این نمودار روشن است که در حالت کلی می نیمم S مساوی صفر است (که به ازای $m = -3$ حاصل می شود - در این حالت معادله خط به صورت $-3x - 7y = 0$ درمی آید و خط از مبدا مختصات می گذرد و در نتیجه S مساوی صفر می شود). ولی به ازای $0 < m < \frac{1}{2}$ یک می نیمم نسبی به ازای $m = \frac{3}{13}$ دارد که مساوی $\frac{42}{13}$ است. S دارای ماکزیمم نمی باشد (یعنی به طور بی کران قابل افزایش است و با نزدیک شدن m به $\frac{1}{2}$ و یا صفر، به $+\infty$ میل می کند) و به ازای $m = 0$ یا $m = \frac{1}{2}$ ، خط با محورهای موازی شده و مثلی تشکیل نمی شود. همچنین اگر m بی نهایت بزرگ و مثبت یا بی نهایت کوچک و منفی اختیار شود، S به $\frac{1}{4}$ نزدیک می شود.

$$y = 0 \Rightarrow mx = m + 3 \Rightarrow x = \frac{m+3}{m} = p \quad \text{طول از مبدأ}$$

$$S = \frac{1}{2}|pq| = \frac{1}{2} \left| \frac{m+3}{m} \times \frac{m+3}{2m-1} \right|$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \left| \frac{(m+3)^2}{m(2m-1)} \right| = \frac{(m+3)^2}{4m^2 - 2m}$$

$$4m^2 - 2m = 0 \Rightarrow 2m(2m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = \frac{1}{2}$$

m	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4m^2 - 2m$	$+$	0	$-$	$+$

$$\Rightarrow m < 0, m > \frac{1}{2} \Rightarrow |4m^2 - 2m| = 4m^2 - 2m$$

$$0 < m < \frac{1}{2} \Rightarrow |4m^2 - 2m| = -4m^2 + 2m$$

و از آن جا خواهیم داشت:

$$m < 0, m > \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{(m+3)^2}{4m^2 - 2m} \quad (1)$$

$$0 < m < \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{(m+3)^2}{-4m^2 + 2m} = -\frac{(m+3)^2}{4m^2 - 2m} \quad (2)$$

پ) حالت (۱) را در نظر می گیریم و مقداری از m را که به ازای آن S ماکزیمم یا می نیمم می شود به دست می آوریم. خواهیم داشت:

$$S = \frac{(m+3)^2}{4m^2 - 2m} \quad S(m) \quad (m)$$

$$\Rightarrow S' = \frac{2(m+3)(4m^2 - 2m) - (4m^2 - 2m)^2}{(4m^2 - 2m)^2}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{2(m+3)(4m^2 - 2m - 4m^2 + 11m + 3)}{(4m^2 - 2m)^2}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{2(m+3)(-13m+3)}{(4m^2 - 2m)^2}, S' = 0$$

$$\Rightarrow 2(m+3)(-13m+3) = 0 \Rightarrow m+3=0, m=-3,$$

$$-13m+3=0 \Rightarrow m = \frac{3}{13}$$

جدول تغییرات S نسبت به m در این حالت، به صورت

زیر است:

m	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
s'	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
s	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\frac{1}{4}$
			$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	

مسائل مثلثات

آموزش

کلیدواژه‌ها:

مثلثات، ریشه‌های
معادله مثلثاتی،
معادله درجه دوم،
ریشه حقیقی

دو طرف تساوی معادله

را در $(\tan x + 1)$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \tan x(\tan x + 1) + 2 \tan x + 1 = k(\tan x + 1)$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + \tan x + 2 \tan x + 1 = k \tan x + k$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + (3 - k) \tan x + (1 - k) = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - k \\ c = 1 - k \end{cases}$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\Rightarrow (3 - k)^2 - 4(1 - k) \geq 0 \Rightarrow 9 + k^2 - 6k - 4 + 4k \geq 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k + 5 \geq 0 \quad \text{یا} \quad (k^2 - 2k + 1) + 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (k - 1)^2 + 4 > 0 \quad \text{این رابطه همواره برقرار است}$$

یعنی معادله درجه دوم بر حسب $\tan x$ ، دو ریشه حقیقی

متمایز دارد.

حل ب:

$$\tan^2 x + (3 - k) \tan x + (1 - k) = 0$$

$$|\tan \alpha - \tan \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{k^2 - 2k + 5}}{1} = \sqrt{k^2 - 2k + 5}$$

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{c}{a} = 1 - k$$

$$|\tan \alpha - \tan \beta| = 1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta$$

$$\sqrt{k^2 - 2k + 5} = 1 + 1 - k \Rightarrow \sqrt{k^2 - 2k + 5} = 2 - k$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k + 5 = 4 + k^2 - 4k$$

$$\Rightarrow 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

مسئله ۱: اگر α و β ریشه‌های معادله

$$\tan^2 x - (2m + 1) \tan x + 2m = 0$$

باشند و داشته باشیم $\tan(\alpha + \beta) = -\frac{5}{3}$ آن گاه m را بیابید.

حل:

$$\tan^2 x - (2m + 1) \tan x + 2m = 0$$

$$a = 1 \quad b = -(2m + 1) \quad c = 2m$$

چون α و β ریشه‌های این معادله مثلثاتی‌اند، پس $\tan \beta$ ، $\tan \alpha$ ریشه‌های معادله درجه دوم بر حسب $\tan x$ خواهند بود. پس می‌توان نوشت:

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\frac{b}{a} = 2m + 1$$

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{c}{a} = 2m$$

$$\tan(\alpha + \beta) = -\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2m + 1}{1 - 2m} = -\frac{5}{3} \Rightarrow 6m + 3 = -5 + 10m$$

$$\Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

مسئله ۲: معادله $\tan x + \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = k$ مفروض است.

الف: به ازای چه مقادیر k این معادله ریشه‌های حقیقی دارد؟

ب: اگر α و β ریشه‌های معادله فوق باشند، k را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$|\tan \alpha - \tan \beta| = 1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta$$

حل الف:

$$\tan x + \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = k$$

$$\Rightarrow \tan x + \frac{\cos x(2 \tan x + 1)}{\cos x(\tan x + 1)} = k$$

$$\Rightarrow 3 \sin x \cdot \cos a = \sin a \cdot \cos x$$

دو طرف این تساوی را بر $\cos a \cos x \neq 0$ تقسیم

$$\frac{3 \sin x \cos a}{\cos a \cos x} = \frac{\sin a \cos x}{\cos a \cos x} \Rightarrow 3 \tan x = \tan a$$

$$\Rightarrow 3 \tan x = \tan(x+y) \quad \blacktriangle$$

مسئله ۶: اگر $\sin^2 x - \sin^3 x \cdot \sin x = -\frac{1}{4}$ ، آن گاه ثابت

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x - \sin^3 x \cdot \sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \underbrace{2 \sin^2 x - 2 \sin^3 x \cdot \sin x} = -\frac{1}{2}$$

$$1 - \cos 2x - [\cos(3x-x) - \cos(3x+x)] = \frac{1}{2}$$

$$1 - \cos 2x - (\cos 2x - \cos 4x) = -\frac{1}{2}$$

$$1 - \cos 2x - \cos 2x + \cos 4x = -\frac{1}{2}$$

$$2 \cos^2 2x - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (\cos 2x - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \quad \blacktriangle$$

مسئله ۷: اگر $\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ ، آن گاه ثابت کنید:

$$\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 x}{b} = \frac{1}{(a+b)^2}$$

$$\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 x}{b} = \frac{1}{a+b}, \sin^2 x = y$$

$$\frac{y^2}{a} + \frac{(1-\sin^2 x)^2}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{y^2}{a} + \frac{(1-y^2)^2}{b} = \frac{1}{a+b}$$

دو طرف تساوی را در $a \cdot b$ ضرب می کنیم

$$\Rightarrow \frac{y^2}{a} + \frac{y^2 - 2y + 1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

$$by^2 + ay^2 - 2ay + a = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

$$\Rightarrow (a+b)y^2 - 2ay + a = \frac{ab}{a+b}$$

دو طرف تساوی را در $(a+b)$ ضرب می کنیم

$$(a+b)^2 y^2 - 2a(a+b)y + a^2 + ab = ab$$

مسئله ۳: معادله $5 \sin x + 12 \cos x = 13$ را حل کنید و جواب های کلی آن را بیابید.

حل: داریم:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = \frac{169}{169} = 1$$

بنابراین اگر $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ فرض شود با فرض $0 < \alpha < 90^\circ$ ،

می توان نوشت $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ حال به کمک این مطلب مسئله را حل می کنیم.

$$5 \sin x + 12 \cos x = 13$$

دو طرف تساوی معادله را بر ۱۳ تقسیم می کنیم

$$\frac{5}{13} \sin x + \frac{12}{13} \cos x = 1$$

داشتیم: $0 < \alpha < 90^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ و $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

$$\sin \alpha \cdot \sin x + \cos \alpha \cdot \cos x = 1$$

پس:

$$\Rightarrow \cos(x-\alpha) = 1$$

$$\Rightarrow x - \alpha = 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

مسئله ۴: اگر $\log_2 \frac{x}{y} = a$ ، آن گاه ثابت کنید:

$$\log_2 \frac{\cos^2 x + 4 \cos x + 3}{2} = 2 + 4a$$

حل:

$$\log_2 \frac{\cos^2 x + 4 \cos x + 3}{2} = \log_2 \frac{2 \cos^2 x - 1 + 4 \cos x + 3}{2}$$

$$= \log_2 \frac{2 \cos^2 x + 4 \cos x + 2}{2} = \log_2 (\cos^2 x + 2 \cos x + 1)$$

$$= \log_2 (1 + \cos x)^2 = \log_2 \left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right)^2 = \log_2 2^2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$= \log_2 2^2 + \log_2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \log_2 2 + 2 \log_2 \cos \frac{x}{2} = 2 + 4a$$

مسئله ۵: اگر $\sin(2x+y) = 2 \sin y$ و $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ ، آن گاه

ثابت کنید:

$$\tan(x+y) = 3 \tan x$$

حل:

$$x+y=a \Rightarrow \text{فرض می شود } y=a-x$$

$$\sin(2x+y) = 2 \sin y$$

داریم:

$$\sin(x + \underbrace{x+y}_a) = 2 \sin(y)$$

$$\sin(x+a) = 2 \sin(a-x)$$

$$\sin x \cdot \cos a + \cos x \sin a = 2(\sin a \cos x - \cos a \sin x)$$

$$\sin x \cdot \cos a + \cos x \sin a = 2 \sin a \cos x - 2 \cos a \sin x$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sin^r \alpha + \cos^r \alpha) [\sin^r \alpha + \cos^r \alpha - \sin^r \alpha \cos^r \alpha]}{\sin^r \alpha \cos^r \alpha} \\
 &= \frac{\sin^r \alpha + \cos^r \alpha - \sin^r \alpha \cos^r \alpha}{\sin^r \alpha \cos^r \alpha} \\
 &= \frac{(\sin^r \alpha + \cos^r \alpha)^r - \sin^r \alpha \cos^r \alpha - \sin^r \alpha \cos^r \alpha}{\sin^r \alpha \cos^r \alpha} \\
 &= \frac{1 - \sin^r \alpha \cos^r \alpha}{\sin^r \alpha \cos^r \alpha} = \frac{1 - \sin^r \alpha \cos^r \alpha}{(\sin \alpha \cos \alpha)^r} = \frac{1 - \sin^r \alpha \cos^r \alpha}{(\frac{c}{a})^r} \\
 &= \frac{1 - \sin^r \alpha \cos^r \alpha}{(-1)^r} = \frac{1 - \sin^r \alpha \cos^r \alpha}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

$$\frac{1 - \sin^r \alpha \cos^r \alpha}{\tan^r \alpha} = \tan^r \alpha$$

مسئله ۱۰: ثابت کنید

حل:

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - \sin^r \alpha \cos^r \alpha}{\tan^r \alpha} &= \frac{1 - \sin^r \alpha \cos^r \alpha}{\frac{\sin^r \alpha}{\cos^r \alpha}} = \frac{\cos^r \alpha (1 - \sin^r \alpha \cos^r \alpha)}{\sin^r \alpha} \\
 &= \frac{\cos^r \alpha - \sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha}{\sin^r \alpha} = \frac{\cos^r \alpha - \sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha}{\sin^r \alpha} \\
 &= \frac{\cos^r \alpha - \sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha}{\sin^r \alpha} = \frac{\cos^r \alpha - \sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha}{\sin^r \alpha} \\
 &= \frac{1 - \sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha}{\sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha} = \frac{1 - \sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha}{\sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha} \\
 &= \frac{1 - \sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha}{\cos^{2r} \alpha} = \frac{1}{\cos^{2r} \alpha} - \tan^r \alpha \quad \text{(I رابطه)}
 \end{aligned}$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 \tan^r \alpha + \tan^r \alpha &= \frac{\sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha + \sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha}{\cos^r \alpha \cos^{2r} \alpha} = \frac{2 \sin^r \alpha \cos^{2r} \alpha}{\cos^r \alpha \cos^{2r} \alpha} \\
 &= \frac{2}{\cos^r \alpha}
 \end{aligned}$$

در رابطه (I) به جای $\frac{1}{\cos^{2r} \alpha}$ مساوی‌اش $(\tan^r \alpha + \tan^r \alpha)$ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{\cos^{2r} \alpha} - \tan^r \alpha = \tan^r \alpha + \tan^r \alpha - \tan^r \alpha = \tan^r \alpha \quad \blacktriangle$$

$$(a+b)^r y^r - r a(a+b)y + a^r = 0$$

$$\Rightarrow [(a+b)y - a]^r = 0 \Rightarrow (a+b)y - a = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{a+b} \Rightarrow \sin^r x = \frac{a}{a+b}$$

$$\cos^r x = 1 - \sin^r x = 1 - \frac{a}{a+b} \Rightarrow \cos^r x = \frac{b}{a+b}$$

$$\frac{\sin^r x}{a^r} + \frac{\cos^r x}{b^r} = \frac{(\sin^r x)^r}{a^r} + \frac{(\cos^r x)^r}{b^r}$$

$$= \frac{(\frac{a}{a+b})^r}{a^r} + \frac{(\frac{b}{a+b})^r}{b^r} = \frac{a^r}{(a+b)^r} + \frac{b^r}{(a+b)^r}$$

$$= \frac{a}{(a+b)^r} + \frac{b}{(a+b)^r} = \frac{a+b}{(a+b)^r} = \frac{1}{(a+b)^{r-1}} \quad \blacktriangle$$

مسئله ۸: اگر $\sin^r x \neq 0$

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x - 1} = a \sin x + b \cos x + c$$

$$a = b = c = \frac{1}{2} \quad \text{آن‌گاه ثابت کنید:}$$

حل:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x - 1} &= \frac{\sin x \cos x}{(\sin x + \cos x) - 1} \times \frac{(\sin x + \cos x) + 1}{(\sin x + \cos x) + 1} \\
 &= \frac{\sin x \cos x (\sin x + \cos x + 1)}{(\sin x + \cos x)^2 - 1} \\
 &= \frac{\sin x \cos x (\sin x + \cos x + 1)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 1} \\
 &= \frac{\sin x \cos x (\sin x + \cos x + 1)}{2 \sin x \cos x} \\
 &= \frac{\sin x + \cos x + 1}{2} = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} = a \sin x + b \cos x + c \\
 \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{2} \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

مسئله ۹: اگر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ ریشه‌های معادله $x^2 + bx - 1 = 0$

باشند، ثابت کنید: $\tan^r \alpha + \cot^r \alpha = 2$

حل:

$$x^2 + bx - 1 = 0 \quad x' = \sin \alpha, \quad x'' = \cos \alpha$$

$$\tan^r \alpha + \cot^r \alpha = \frac{\sin^r \alpha}{\cos^r \alpha} + \frac{\cos^r \alpha}{\sin^r \alpha} = \frac{\sin^r x + \cos^r x}{\sin^r \alpha \cos^r \alpha}$$

ریاضیات در سینمای جهان

اسم فیلم:
بایست و سفن بگو^۱

احسان یارمحمدی

کلیدواژه‌ها:

یایمه اسکالانت،
آموزش ریاضی،
دانش آموزان
متوسطه،
حسابان مقدماتی،
مثلثات،
آنالیز ریاضی،
حساب دیفرانسیل و
انتگرال

کارگردان: رامون میندیز^۲

تهیه کننده: تام موسکا^۳

نویسندگان: رامون میندیز و تام موسکا

بازیگران: ادوارد جیمز الموس^۵، لوداموند فیلیپس^۶، روزانا دِستو^۷ و آندی گارسیا^۸

موسیقی: کریگ سافان^{۱۰}

فیلم برداری^{۱۱}: تام ریچموند^{۱۲}

ویرایش: نانسی ریچاردسون^{۱۳}

پخش: وارنر بروس^{۱۴}

تاریخ اکران: ۱۱ مارس ۱۹۸۸

مدت فیلم: ۱۰۲ دقیقه

محصول: ایالات متحد آمریکا

زبان: انگلیسی^{۱۶}

زمانی، او با ارائه و اجرا کردن روش‌های آموزشی، ابتکاری و تازه، موفق به جلب توجه دانش‌آموزان به موارد علمی و آموزشی می‌شود. او این توانایی را دارد که حتی مسائل و موضوعات بسیار سخت و در دسرساز را به مواردی قابل درک و فهم برای دانش‌آموزان تبدیل کند. هنگامی که یایمه اسکالانت به دروس جبر^{۲۲} و میانی حساب^{۲۳} را با روشی خلاقانه برای ایشان تدریس می‌کند، به این درک و بینش می‌رسد که دانش‌آموزان وی از استعداد نهانی و بالقوه بسیار در این زمینه‌ها برخوردارند. او تصمیم می‌گیرد برای دانش‌آموزان خود حساب دیفرانسیل و انتگرال^{۲۴} تدریس کند. او در یک دوره آموزشی تابستانی برای موضوع حسابان مقدماتی^{۲۵} که درگیرنده مثلثات^{۲۶}، جبر پیشرفته^{۲۷} و آنالیز ریاضی^{۲۸}

دانش‌آموزان را برای دریافت و موفقیت بهتر و بیشتر وارد چالش و رقابت علمی و آموزشی کند. او شغل ثابت خود را برای احراز موقعیتی در قالب یک معلم ریاضی در یک دبیرستان که دانش‌آموزان آن در زمره افراد باغی و سرکش هستند، رها می‌کند. در این مدرسه تمرکز اصلی معلمان و دست‌اندرکاران آن به علت تمرّد و عصیان دانش‌آموزان بر نظم و انضباط و تأدیب دانش‌آموزان خاطلی است و نه مسائل علمی و آموزشی. یایمه اسکالانت به ابتدا برای دانش‌آموزان این مدرسه دوست‌داشتنی نیست و از جانب دانش‌آموزان طعنه‌ها، سرزنش‌ها و تهدیدهای بسیاری را تحمل می‌کند. بعد از گذشت مدت

در قسمت شرقی شهر لس‌آنجلس^{۱۹} در ایالت کالیفرنیا^{۲۰} در سال ۱۹۸۲ میلادی در محیط آموزشی که ارزش‌ها در آن براساس آموزش و یادگیری سریع و سطحی است، یک معلم ریاضی جدید و تازه‌وارد به نام یایمه اسکالانت به دبیرستان گارفیلد^{۲۱} وارد می‌شود و تصمیم می‌گیرد این سیستم آموزشی را تغییر دهد و

فیلم «بایست و سخن بگو» یک فیلم از نوع درام آمریکایی است. این فیلم براساس یک داستان واقعی از زندگی یک معلم ریاضی دبیرستان به نام یایمه اسکالانت^{۱۸} ساخته شده است. ادوارد جیمز الموس برای ایفای نقش یایمه اسکالانت در این فیلم نامزدی دریافت جایزه اسکار بهترین بازیگر مرد را به خود اختصاص داده است.



است، این کار را انجام می‌دهد. هنگام اجرای کردن تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال نگرانی‌هایی برای یایمه اسکالانت به وجود می‌آید ریشه بیشتر این نگرانی‌ها تردیدهایی است که معلمان دیگر دبیرستان بانی و باعث انتقال آن‌ها به وی هستند، زیرا آنان اعتقاد دارند که به این دانش‌آموزان بی‌سواد و درس نخوانده نمی‌توان مواردی مانند لگاریتم^{۲۹} و... را تدریس و تفهیم کرد. با وجود این، او تصمیم می‌گیرد با طراحی و تدوین یک برنامه مناسب درسی از ساعت ۷ صبح تا ظهر در طول تابستان و در تمام روزهای هفته و نیز با تقویت این دیدگاه در دانش‌آموزان که شرکت در این کلاس‌ها برای دریافت گواهینامه پایان تحصیلات دبیرستانی درخصوص دانش‌آموزان سال آخر دنبال مفید و کارآمد است، در توسعه و پیشبرد هدف خود گامی مؤثر را بردارد.

هنگامی که دانش‌آموزان دیگر در طول تابستان مشغول انجام کارهای پاره‌وقت یا سرگرم مسائل دوران نوجوانی و ورود آن به دنیای جوانی هستند، دانش‌آموزان یایمه اسکالانت به فراگیری و یادگیری قضیه‌های پیچیده و نیز فرمول‌های ریاضی می‌پردازند. البته در این میان، دانش‌آموزان با چالش دیگری مواجه‌اند و آن برقرار کردن تعادل بین انتظارات افراد بزرگسال و به‌ویژه والدین

از آن‌ها و بلندپروازی‌ها و آرزوهای جاه‌طلبانه خود آن‌هاست. با کمک‌هایی که یایمه اسکالانت به برای آن‌ها انجام می‌دهد، دانش‌آموزان سریع جرأت و جسارت لازم برای جدا کردن و تمایز بین انتظارات جامعه از آن‌ها و افزایش استانداردهای لازم برای زندگی مناسب را به‌دست می‌آورند. پس از گذراندن امتحان درس حساب دیفرانسیل و انتگرال در فصل بهار در سال آخر تحصیل، دانش‌آموزان از این که سال گذشته را با فعالیت و شیوه جالبی گذرانده‌اند، احساس راحتی و لذت بیش از حد دارند. دانش‌آموزان بعد از این که نمرات خود را دریافت می‌کنند، هیجان‌زده می‌شوند و پیش خود می‌اندیشند که توانسته‌اند همه دروس را با موفقیت پشت‌سر بگذارند.

اما بعد از تابستان یک اتهام ناجوانمردانه به کار معلم و نمرات دانش‌آموزان وارد می‌شود به گونه‌ای که مرکز برگزاری امتحانات اعلام می‌کند، که آن‌ها با بررسی نمرات دانش‌آموزان و تشابه بین پاسخ‌های درست و نادرست آنان به سؤالات امتحان پی به این موضوع برده‌اند که احتمال تقلب در این امتحان زیاد است. بعد از مطرح شدن این موضوع، یایمه اسکالانت پی می‌برد که شرایط اقتصادی و نیز نژادی باعث شده است تا مرکز برگزاری امتحانات به هوش و استعداد دانش‌آموزان وی شک و تردید کند. بنابراین برای اثبات شایستگی دانش‌آموزانش تصمیم بر این می‌شود که امتحان مجددی از ایشان به عمل آید و این در حالی است که آن‌ها تنها یک

روز برای آماده شدن در این آزمون فرصت دارند و نیز معلم آن‌ها به دانش‌آموزان گوشزد کرده است که امتحان مجدد به مراتب سخت‌تر و دشوارتر از نخستین امتحان است. بعد از اعلام نتایج امتحان مجدد که در آن تمام دانش‌آموزان موفق به گذراندن این درس شده‌اند، یایمه اسکالانت به رئیس دبیرستان می‌گوید که نمرات دانش‌آموزان در اولین آزمون را نیز برای ایشان به ثبت برساند.

یایمه اسکالانت معلم ریاضی پر تلاش با ایده‌هایی نو، که این فیلم با الهام از زندگی او ساخته شده است، سرانجام به علت بیماری سرطان مثانه^{۳۰} در منزل پسرش در تاریخ سی‌ام مارس^{۳۱} سال ۲۰۱۰ بدرود حیات گفت.

پی‌نوشت

1. Stand and Deliver
2. Director
3. Ramon Menendez
4. Tom Musca
5. Edward James Olmos
6. Lou Diamond Phillips
7. Rosanna Desoto
8. Andy Garsia
9. Music
10. Craig Safan
11. Cinematography
12. Tom Richmond
13. Nancy Richardson
14. Warner Bros
15. March
16. English
17. Jaime Escalante
18. Los Angeles
19. California
20. Garfield
21. Algebra
22. Basic Arithmetic
23. Calculus
24. Pre-Calculus
25. Trigonometry
26. Advanced Algebra
27. Math Analysis
28. Logarithm
29. Bladder Cancer
30. March

ریاضی
های
المپیاد

ماتریس ها

مسائل این بخش را می توان با استفاده از ویژگی های ماتریس هایی حل کرد که شامل ساختار سطر - ستونی نیستند. مثال زیر نمونه ای از این ماتریس هاست:

کلیدواژه ها:

المپیاد ریاضی،
ماتریس، دترمینان،
رومانی

مثال: ثابت کنید اگر A و B ماتریس های $n \times n$ باشند، آن گاه:

$$\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$$

حل: برای حل این مسئله، ابتدا B را وارون پذیر در نظر می گیریم، آن گاه خواهیم داشت:

$$(I_n - AB) = B^{-1}(I_n - BA)B$$

و در نتیجه:

$$\det(I_n - AB) = \det(B^{-1}) \det(I_n - BA) \det B \\ = \det(I_n - BA)$$

اگر B وارون پذیر نباشد، به جای آن، ماتریس $B_x = xI_n + B$ را در نظر می گیریم. از آن جا که $\det(xI_n - B)$ یک چندجمله ای بر حسب x است، ماتریس های B_x به ازای جمیع مقادیر x جز تعدادی متناهی از آن ها وارون پذیرند. بنابراین می توانیم از اولین بخش اثبات استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که به ازای جمیع مقادیر x ، به استثنای تعدادی متناهی از آن، $\det(I_n - AB_x) = \det(I_n - B_x A)$

اما این دو دترمینان چند جمله ای هایی بر حسب x اند که به ازای بی نهایت مقدار x برابرند. بنابراین باید جملات برابر باشند، به خصوص به ازای $x = 0$ ،

$$\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$$

در نتیجه، ملاحظه می کنیم اگر $I_n - AB$ وارون پذیر باشد، آن گاه $I_n - BA$ نیز وارون پذیر است. در این جا اثباتی مستقیم از این استلزام به دست می دهیم. اگر V وارون $I_n - AB$ باشد، آن گاه $V(I_n - AB) = I_n$ و در نتیجه $VAB = V - I_n$. بنابراین داریم:

$$(I_n + BVA)(I_n - BA) = I_n - BA + BVA - BVABA$$

$$= I_n - BA + BVA - B(V - I_n)A = I_n$$

در نتیجه: $I_n + BVA$ وارون $I_n - BA$ است.

مسائل

۱. فرض می کنیم A و B دو ماتریس مربع و چنان باشند که $A+B=AB$. ثابت کنید A و B تعویض پذیرند.

۲. ثابت کنید اگر A ماتریسی 5×4 و B ماتریسی 4×5 باشند، آن گاه

$$\det(AB - I_5) + \det(BA - I_4) = 0$$

۳. فرض می کنیم x, y و z ماتریس هایی $n \times n$ و چنان باشند که:

$$x + y + z = xy + yz + zx$$

ثابت کنید برابری های زیر هم ارزند:

$$xyz = xz - zx$$

$$yzx = yx - xy$$

$$zxy = zy - yz$$

۴. نشان دهید به ازای هر دو ماتریس $n \times n$ از A و B ، اتحاد زیر برقرار است:

$$\det(I_n - BA) = \det \begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

۵. فرض می کنیم N یک ماتریس $n \times n$ و چنان باشد که $A^n = \alpha A$ (عدد حقیقی و متفاوت از ۱ و -۱ است). ثابت کنید ماتریس $A + I_n$ وارون پذیر است.

۶. اگر A و B ماتریس هایی متفاوت و برقرار کننده $A^r = B^r$ و $A^s B = B^s A$ باشند، $AB = o_n$ را بیابید.



حل مسائل

۱. از آن جا که $AB - A - B = o_n$ ، با افزودن I_n به دو طرف رابطه و تجزیه به دست می آوریم:

$$(I_n - A)(I_n - B) = I_n$$

نتیجه می گیریم که $I_n - A$ وارون پذیر و وارون آن $I_n - B$ است. در نتیجه:

$$(I_n - B)(I_n - A) = I_n$$

که مستلزم $AB - A - B = o_n$ است. در

$$BA = A + B = AB$$

۲. برای به دست آوردن ماتریس های 5×5 از

A' و B' ، ماتریس ها را با صفرها تکمیل می کنیم.

ماتریس $A'B'$ برابر AB است، در حالی که، BA

$B'A'$ را در گوشه بالا و چپ دارد و هر جای دیگر

صفر است. اتحاد مربوط به دترمینان ها که در ابتدای بخش مورد بحث قرار گرفت، مستلزم این است که:

$$\det(I_5 - A'B') = \det(I_5 - B'A')$$

بنابراین داریم:

$$\det(I_5 - A'B') = \det(I_5 - AB) = (-1)^5 \det(AB - I_5)$$

نیز از آن جا که تنها عنصر ناصفر واقع در سطر آخر $I_5 - B'A'$ در گوشه راست و پایین، ۱ است، و کهاد متناظر $\det(I_5 - BA)$ است، درمی یابیم که:

$$\det(I_5 - B'A') = \det(I_5 - BA) = (-1)^5 \det(AB - I_5)$$

و نتیجه به دست می آید.

$$x + y + z = xy + yz + zx \quad \text{۳. با فرض}$$

$$xyz = xz - zx \quad \text{ملاحظه می کنیم که}$$

$$xyz + x + y + z = xz - zx + xy + yz + zx \quad \text{هم ارز با}$$

است. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} (x - I_n)(y - I_n)(z - I_n) \\ = xyz - xy - yz - xz + x + y + z - I_n \\ = -I_n \end{aligned}$$

و ماتریس های $(x - I_n)$ و $(y - I_n)$ و $(z - I_n)$ وارون پذیرند. با جایگشت دوری گرفتن از عامل ها (یعنی با ضرب در سمت راست عامل و وارون آن در چپش) برای مثال،

$$(z - I_n)(x - I_n)(y - I_n) = -I_n$$

را به دست می آوریم. بنابراین:

$$zxy - xy - zy - zx + x + y + z = o_n$$

$$zxy = zy - yz \quad \text{که هم ارز است با:}$$

۷. ثابت کنید اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه های حقیقی

باشد، در این صورت:

$$\det(A^2 + I_n) \geq 0$$

۸. نشان دهید اگر A و B ماتریس هایی $n \times n$ با درایه های

حقیقی باشند و $AB = o_n$ ، آن گاه به ازای اعداد صحیح و مثبت p و q داریم:

$$\det(I_n + A^{2p} + B^{2q}) \geq 0$$

۹. فرض می کنیم A ، B و C ماتریس هایی $n \times n$ باشند که

دوبه دو تعویض پذیرند و $ABC = o_n$ ، ثابت کنید

$$\det(A^2 + B^2 + C^2) \det(A + B + C) \geq 0$$

۱۰. فرض می کنیم p و q اعداد حقیقی و چنان باشند که

به ازای هر عدد حقیقی x داشته باشیم:

$$x^2 + px + q \neq 0$$

ثابت کنید اگر n عددی صحیح و مثبت و فرد باشد، آن گاه

به ازای جميع ماتریس های حقیقی x از مرتبه $n \times n$ داریم:

$$x^2 + px + qI_n \neq o_n$$

۱۱. فرض می کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند

و نشان دهید اگر $C = AB - BA$ هم با A و هم با B

تعویض پذیر باشد، آن گاه عدد صحیحی مانند m چنان موجود است که:

$$C^m = o_n$$

۷. می‌نویسیم

$$A^T + I_n = (A + iI_n)(A - iI_n)$$

که i آن واحد موهومی است. اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ویژه‌مقدارهای A باشند، آن‌گاه ویژه‌مقدارهای $A + iI_n$ عبارت‌اند از:

$$\lambda_1 + i, \lambda_2 + i, \dots, \lambda_n + i$$

در نتیجه داریم:

$$\det(A + iI_n) = (\lambda_1 + i)(\lambda_2 + i) \dots (\lambda_n + i)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\det(A - iI_n) = (\lambda_1 - i)(\lambda_2 - i) \dots (\lambda_n - i)$$

از آن‌جا که A دارای درایه‌های حقیقی است، ویژه‌مقدارهای مختلطش در جفت‌های اعداد مزدوج ظاهر می‌شوند. با استفاده از فرمول‌های

$$(a + bi + i)(a - bi + i) = (a^T + b^T - 1) + 2ai$$

و

$$(a + bi - i)(a - bi - i) = (a^T + b^T - 1) - 2ai$$

ملاحظه می‌کنیم که $\det(A + iI_n)$ و $\det(A - iI_n)$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب‌های جمله‌ای نوشت که مزدوج مختلط یکدیگرند. در نتیجه، خود دترمینال‌ها مزدوج‌های مختلط یکدیگرند و این مستلزم آن است که حاصل ضربشان عددی حقیقی و نامنفی باشد.

۸. بنا به مسئله پیشین داریم:

$$\det(I_n + A^{Tp}) \geq 0$$

و

$$\det(I_n + B^{Tq}) \geq 0$$

از $AB = O_n$ به دست می‌آوریم:

$$A^{Tp}B^{Tq} = O_n \quad AB = O$$

و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\det(I_n + A^{Tp} + B^{Tq}) = \det(I_n + A^{Tp} + B^{Tq} + A^{Tp}B^{Tq})$$

$$= \det((I_n + A^{Tp})(I_n + B^{Tq}))$$

$$= \det(I_n + A^{Tp}) \det(I_n + B^{Tq}) \geq 0_n$$

(M. and S. Rădulescu)

۹. فرض می‌کنیم $w \neq 1$ ریشه سوم واحد باشد. از آن‌جا که A, B و C تعویض پذیرند و

$$ABC = O_n$$

می‌توان نوشت:

$$A^T + B^T + C^T = A^T + B^T + C^T - 3ABC$$

این موضوع ثابت می‌کند که اولین برابری از گروه سه‌تایی مستلزم آخری است. با جایگشت حروف، درمی‌یابیم که سه برابری هم‌ارزند.

(مسابقه ریاضی رومانی، ۱۹۸۵: طرح از T. Andreescu و I.V. Maftai)

۴. برابری

$$\begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & -A \\ O_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ B & I_n - AB \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهد که ماتریس $2n \times 2n$ صورت مسئله را می‌توان به صورت حاصل ضرب ماتریسی با دترمینان برابر یک و ماتریسی با دترمینان برابر $\det(I_n - AB)$ نوشت. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ B & I_n - AB \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I_n & -A \\ O_n & I_n \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \det(I_n - AB) \end{aligned}$$

۵. فرض می‌کنیم $B = A + I_n$. از آن‌جا که $A = B - I_n$ ، شرط $A^n = \alpha A$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(B - I_n)^n = \alpha(B - I_n)$$

این موضوع مستلزم

$$B^n - \binom{n}{1}B^{n-1} + \binom{n}{2}B^{n-2} - \dots + (-1)^n I_n = \alpha B - \alpha I_n$$

یا

$$B^n - \binom{n}{1}B^{n-1} + \binom{n}{2}B^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1}B - \alpha B = \alpha I_n - (-1)^n I_n$$

است. به این ترتیب داریم:

$$B(B^{n-1} - \binom{n}{1}B^{n-2} + \binom{n}{2}B^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}I_n - \alpha I_n)$$

$$= ((-1)^{n+1} - \alpha)I_n$$

که به روشنی نشان می‌دهد B وارون پذیر است، زیرا

$$(-1)^{n+1} - \alpha \neq 0$$

(المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۸۰: طرح از c.cocea)

۶. داریم:

$$(A^T + B^T)(A - B) = A^T - A^T B + AB^T - B^T = O_n$$

چون $A \neq B$ ، این رابطه نشان می‌دهد که $A^T + B^T$

دارای یک مقسوم علیه صفر است. در نتیجه وارون پذیر نیست و بنابراین دترمینانش ۰ است.

(پنجاه و یکمین مسابقه ریاضی پاتنام، ۱۹۹۱)

که ادعا را به اثبات می‌رساند.

به عنوان نتیجه، به ازای هر چند جمله‌ای q داریم:

$$Aq(B) - q(B)A = q'(B)C$$

که در آن q' مشتق q است؛ به خصوص

$$o_n = A_p(B) - p(B)A = p'(B)C$$

و در نتیجه:

$$Ap'(B)C - p'(B)AC = p''(B)C^2 = o_n$$

بنابراین، به طور استقرایی به دست می‌آوریم:

$$p^{(k)}(B)C^k = o_n$$

به خصوص که:

$$n!C^n = o_n$$

و به این ترتیب، خواهیم داشت $C^n = o_n$ ؛ و کار تمام است.

(All Union University Student Olympiad, 1976)

$$= (A + B + C)(A^T + B^T + C^T - AB - BC - CA)$$

$$= (A + B + C)(A + wB + w^T C)(A + w^T B)$$

$$= (A + B + C)(A + wB + w^T C)(A + wB + w^T C)$$

در نتیجه:

$$\det(A^T + B^T + C^T) \det(A + B + C)$$

$$= \det((A + B + C)^T) \det(A + wB + w^T C) \det(A + wB + w^T C)$$

$$= (\det((A + B + C)^T))^T \det(A + wB + w^T C) \det(A + wB + w^T C)$$

$$= (\det(A + B + C))^T |\det(A + wB + w^T C)|^T \geq 0$$

۱۰. فرض می‌کنیم به ازای ماتریس $n \times n$ از x داشته باشیم:

$$X^T + pX + qI_n = o_n$$

این برابری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(X + \frac{p}{2} I_n)^T = \frac{p^T - q}{2} I_n$$

با دترمینان گرفتن از دو طرف و استفاده از این موضوع که

$$\det(AB) = \det A$$

به دست می‌آوریم

$$(\det(X + \frac{p}{2} I_n))^T = (\frac{p^T - q}{2})^n$$

سمت چپ این رابطه نامنفی است و سمت راست آن

بنا به فرض، اکیداً منفی است و این تناقض، اثبات را به پایان

می‌رساند.

(المپیاد ریاضی رومانی، طرح از I.D. Ion و T. Andreescu)

۱۱. ابتدا باید توجه داشته باشیم که اگر فرض کنیم

$$p(x) = \det(xI_n - B)$$

چند جمله‌ای مشخصه B باشد، آن‌گاه بنا به قضیه کوشی

همیلتون،

$$p(B) = o_n$$

از آن‌جا که C با هر دو مورد A و B تعویض می‌شود، داریم:

$$AB^T - B^T A = (AB - BA)B + B(AB - BA)$$

$$= BC + CB = 2BC$$

با استقرار نشان می‌دهیم که به ازای هر $k > 0$ ، رابطه زیر

برقرار است:

$$AB^k - B^k A = kB^{k-1}C$$

این رابطه به ازای $k=1,2$ ، برقرار است و با این فرض که

به ازای $k-1$ نیز برقرار باشد، داریم

$$AB^k - B^k A = (AB - BA)B^{k-1} + B(AB^{k-1} - B^{k-1}A)$$

$$= CB^{k-1} - B(k-1)B^{k-2}C = kB^{k-1}C$$

اسم وبگاه: Basic Mathematics

نشانی وبگاه: <http://www.basic-mathematics.com>



این وبگاه عناوین گوناگونی از ریاضی را به صورت درک عمیق و پایه‌ای در قالب مفاهیم و عملیات ریاضی به صورت منظم و به شکل موضوعات مرتب‌شده به کاربر آموزش می‌دهد. صفحه اصلی این سایت شامل عناوین زیر است که هر یک از آن‌ها زیرعنوان‌هایی دارند و در آن‌ها به تفصیل به یک موضوع پرداخته شده است.

■ مقدمه (Introduction)

■ حساب (Arithmetic)

■ هندسه (Geometry)

■ احتمال و آمار (Probability and Statistics)

■ دنباله‌ها و الگوها (Sequences and Patterns)

■ جبر (Algebra)

■ منابع (Resources)

■ معلمان (Teachers)

نظریه اعداد

برای دانش آموزان سال
چهارم ریاضی

حمیدرضا امیری

کلیدواژه‌ها:

استقراء،
بخش پذیری،
خوش‌ترتیبی، عاد
کردن، میناها،
شمارنده، اعداد اول.

چکیده

در این مقاله نکات مهم بخش‌هایی از نظریه اعداد، استفاده شده در کنکورهای سراسری و آزاد، همراه با کاربرد آن‌ها در حل مسائل و پرسش‌های ۴ گزینه‌ای، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نکات مربوط به اعداد مربع کامل

I) اگر عددی مربع کامل باشد، در تجزیه آن عدد به حاصل ضرب اعداد اول، همه توان‌ها زوج‌اند.

مثال: کوچک‌ترین عددی را که می‌توان در عدد ۸! ضرب کرد تا حاصل عددی مربع کامل باشد، به دست آورید.

حل: $8! = 2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7$ یا $8! = 2^8 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 2$ که اگر عدد $k = 2 \times 5 \times 7$ در آن ضرب شود، به صورت $k \cdot 8! = 2^8 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$ در می‌آید و چون توان‌ها همگی زوج‌اند، مربع کامل است.

II) اگر عددی مربع کامل باشد، باید به یکی از ارقام ۰ یا ۱ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۹ ختم شود و لذا اگر عددی به ۲ یا ۳ یا ۷ یا ۸ ختم شود، آن عدد مربع کامل نیست.

III) اگر عددی فرد و مربع کامل باشد، همواره باید به صورت $(8k+1)$ باشد. لذا اگر عددی فرد باشد و به شکل $(8k+1)$ نباشد، آن عدد مربع کامل نیست.

IV) اگر عددی زوج و مربع کامل باشد، همواره باید بر ۴ نیز بخش پذیر باشد. بنابراین اگر عددی زوج باشد و بر ۴ بخش پذیر نباشد، آن گاه مربع کامل نیست.

V) اگر عددی مضرب ۳ و مربع کامل نیز باشد همواره باید بر ۹ بخش پذیر باشد. لذا اگر عددی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۹ بخش پذیر نباشد آن گاه مربع کامل نیست.

و به طور کلی اگر «عددی بر عدد اول p بخش پذیر و مربع کامل باشد، آن گاه همواره بر p^2 بخش پذیر است؛ و لذا اگر عددی بر p بخش پذیر باشد ولی بر p^2 بخش پذیر نباشد و p اول باشد، آن گاه آن عدد مربع کامل نیست.»

VI) هر عددی که مربع کامل باشد به یکی از دو صورت $3k+1$ یا $3k$ است. بنابراین اگر عددی به شکل $3k+1$ یا $3k$ نباشد آن گاه مربع کامل نیست.

$$\begin{cases} a = 3k \Rightarrow a^2 = 9k^2 = 3t \\ a = 3k+1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3t+1 \\ \text{زیرا} \\ a = 3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4 \\ = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3t' + 1 \end{cases}$$

نکات مربوط به شمارنده‌های یک عدد

اگر عدد طبیعی m را به صورت استاندارد $m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ کنیم (p_i ها اعداد اول و α_i ها اعداد حسابی‌اند)، در این صورت:

اصل خوش‌ترتیبی:

مجموعه اعداد

طبیعی (N)

خوش‌ترتیب است.

به عبارت معادل:

هر زیرمجموعه

ناهمی N عضو

ابتدا دارد

$n!$ = تعداد عامل‌های p در $n!$ = $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots + 0 + 0 + \dots$

(چون $p \geq 2$ و n ثابت است، همواره از توانی چون k به بعد

$p^k > n$ است و $0 < \frac{n}{p^k} < 1$ و $\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$ خواهد بود).

تست: اگر $42! \parallel 5^k$ مقدار k کدام است؟

۸(۱) ۹(۲) ۱۱(۳) ۱۰(۴)

حل: گزینه ۲، زیرا:

باید بزرگ‌ترین عددی چون k را بیابیم که $42! \parallel 5^k$ ، یعنی

تعداد عامل‌های ۵ در $42!$ ؛ که طبق مطالب قبلی این تعداد برابر

$$\left[\frac{42}{5}\right] + \left[\frac{42}{25}\right] = 8 + 1 = 9$$

تست: در سمت راست عدد $73!$ چند صفر وجود دارد؟

۱۴(۱) ۱۶(۲) ۱۵(۳) ۱۳(۴)

حل: گزینه ۲، زیرا:

در یک حاصل ضرب به ازای هر ۲ و ۵ عدد ۱۰ یعنی یک

صفر در سمت راست عدد حاصل تولید می‌شود و چون $73 > 5$ ،

تعداد عامل‌های ۵ در $73!$ کم‌تر از تعداد عامل‌های ۲ است و

لذا عامل‌های ۵ همان تعداد صفرها در سمت راست عدد $73!$

است:

$$\left[\frac{73}{5}\right] + \left[\frac{73}{25}\right] = 14 + 2 = 16$$

تذکر مهم: در حالت کلی «تعداد صفرهای سمت

راست عدد $n!$ برابر است با تعداد عامل‌های ۵ در $n!$ »

و تعداد عامل‌های عدد $k = p \times q$ (و q عدد اول

هستند) که در آن $p > q$ ، در عدد $n!$ برابر است با تعداد

عامل‌های عدد p در $n!$.

برای مثال، تعداد عامل‌های عدد ۲۱ در $n!$ برابر

است با تعداد عامل‌های عدد ۷ در $n!$. ($21 = 7 \times 3$)

هم‌چنین اگر عدد k به صورت $k = p^m$ باشد، تعدادی

عامل‌های k در $n!$ را به این صورت به دست می‌آوریم

که ابتدا تعداد عامل‌های p را در $n!$ محاسبه و عدد

حاصل را بر m تقسیم می‌کنیم (هر m تا p یک عدد

k تولید می‌کند) و جزء صحیح این تقسیم جواب

مسئله است.

مثال: در عدد $69!$ چند عامل ۸۱ وجود دارد؟

حل: چون $81 = 3^4$ ، پس در این صورت داریم:

$$\left[\frac{69}{3}\right] + \left[\frac{69}{9}\right] + \left[\frac{69}{27}\right] = 23 + 7 + 2 = 32, \left[\frac{32}{4}\right] = 8$$

پس ۸ عامل ۸۱ در $69!$ وجود دارد.

(I) تعداد شمارنده‌های مثبت عدد m از رابطه $T(m) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ به دست می‌آید و بنابراین تعداد کل شمارنده‌های عدد m برابر است با $2T(m)$.

(II) حاصل ضرب شمارنده‌های مثبت عدد m از رابطه $m^{\frac{T(m)}{2}}$ به دست می‌آید و حاصل جمع آن‌ها از رابطه $\frac{P_1^{\alpha_1+1}-1}{P_1-1} \times \dots \times \frac{P_k^{\alpha_k+1}-1}{P_k-1}$ محاسبه می‌شود.

(III) اگر m مربع کامل باشد، چون همه α_i ها زوج هستند، پس همه $(\alpha_i + 1)$ ها فرد خواهند بود و بنابراین $T(m)$ فرد است و اگر m مربع کامل نباشد، حداقل یکی از α_i ها فرد است و لذا حداقل یکی از $(\alpha_i + 1)$ ها زوج است و در نتیجه $T(m)$ زوج خواهد بود.

مثال: عدد ۲۸۰۰ چند شمارنده دارد؟

$$2800 = 2^4 \times 5^2 \times 7 = 2^2 \times 7 \times 2^2 \times 5^2 = 2^2 \times 7 \times 5^2 \times 2^2$$

$$T(2800) = (4+1)(2+1)(2+1) = 30$$

$$\Rightarrow 2T(2800) = 2 \times 30 = 60$$

پس ۲۸۰۰ دارای ۶۰ شمارنده است.

تست: چند عدد طبیعی مانند x وجود دارد به قسمی که $(x+2) \mid 120$.

۱۶(۱) ۱۴(۲) ۱۲(۳) ۱۰(۴)

حل: گزینه ۲، زیرا:

$$120 = 6 \times 20 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$T(120) = (3+1)(1+1)(1+1) = 16$$

$$x \in N \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x+2 \geq 3$$

چون باید $x+2 \geq 3$ تا $x \in N$ باشد لذا $(x+2)$ نمی‌تواند

۱ یا ۲ باشد. بنابراین ۱۴ حالت برای $(x+2)$ قابل قبول است.

تعریف: اگر p عددی اول باشد و k بزرگ‌ترین توانی

باشد که $p^k \mid n$ در این صورت می‌نویسیم: $p^k \parallel n$.

مثال: اگر $5^v \parallel n$ ، در این صورت برای هر $t > v$ داریم $5^t \nmid n$ ولی همواره $5^v \mid n$ و برای هر $m > v$ نیز $5^m \nmid n$.

تعداد عامل‌های عدد اول p در $n!$

اگر p عددی اول باشد، در این صورت تعداد عامل‌های p در

$n!$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

اگر «عددی
بر عدد اول P
بخش پذیر و مربع
کامل باشد، آن گاه
همواره بر p^2
بخش پذیر است؛
و لذا اگر عددی
بر P بخش پذیر
باشد ولی بر p^2
بخش پذیر نباشد و
اول باشد، آن گاه
آن عدد مربع
کامل نیست.»

نکات مهم

(I) تعداد صفرهای سمت راست عدد $k!m!$ که در آن $k > m$ ، برابر است با تعداد صفرهای سمت راست عدد $m!$.

(II) تعداد صفرهای سمت راست عدد $k!m!$ برابر است با مجموع تعداد صفرهای سمت راست $k!$ و صفرهای سمت راست $m!$.

(III) تعداد صفرهای سمت راست عدد $\frac{k!}{m!}$ ($k > m$) برابر است با تفاضل تعداد صفرهای سمت راست $m!$ از $k!$.

(IV) اگر تعداد اعدادی چون n ($k \leq n \leq m$) را بخواهیم که مربع کامل و مضرب p (اول) باشند، این اعداد باید به شکل $n = p^2 q^2$ باشند. لذا کافی است نابرابری $k \leq p^2 q^2 \leq m$ را حل و تعداد جوابهای آن را بررسی کنیم.

مثال: چند عدد طبیعی و چهار رقمی وجود دارد که مضرب ۱۳ و مربع کامل باشند؟

حل: چنین اعدادی باید به شکل $n = 169k^2$ باشند، لذا داریم:
 $1000 \leq 169k^2 \leq 9999 \Rightarrow \left[\frac{1000}{169}\right] \leq k^2 \leq \left[\frac{9999}{169}\right]$
 $\Rightarrow 6 \leq k^2 \leq 59$
 $\Rightarrow [\sqrt{6}] + 1 \leq k \leq [\sqrt{59}] \Rightarrow 3 \leq k \leq 7 \Rightarrow k = 3 \text{ یا } \dots \text{ یا } 7$
 پس ۵ عدد ۴ رقمی، مربع کامل و مضرب ۱۳ وجود دارد.

مبناها - عددنویسی در مبناهای مختلف

قضیه زیر که در اثبات آن از قضیه تقسیم استفاده می شود، نشان می دهد که هر عدد طبیعی را می توان بر حسب عدد طبیعی مانند $b > 1$ و به شکل منحصر به فرد نمایش داد. عدد b را مبنا و نمایش عدد n می نامیم.

قضیه: اگر $b > 1$ عددی طبیعی باشد، هر عدد طبیعی n را می توان به شکل منحصر به فرد به صورت
 $n = r_k b^k + r_{k-1} b^{k-1} + \dots + r_1 b + r_0$
 در این تساوی k عددی صحیح و نامنفی است و برای هر $i = 0, 1, 2, \dots, k$ همواره $0 \leq r_i \leq b-1$ و $r_k \neq 0$ است.

به مثال های زیر توجه کنید:

$$I) A = (1391)_{10} = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 1$$

$$II) B = (2013)_7 = 2 \times 7^3 + 0 \times 7^2 + 1 \times 7 + 3 = 353$$

$$III) n = (r_k r_{k-1} \dots r_1 r_0)_b = r_k b^k + r_{k-1} b^{k-1} + \dots + r_1 b + r_0$$

تذکر: ارقام به کار رفته در هر مبنایی چون $b > 1$ کوچک تر از b هستند.

(برای مثال: در عدد نویسی در مبنای ۶، حداکثر رقمی که می توان به کار برد رقم ۵ است)، زیرا ارقام به کار رفته در مبنای b در واقع باقی مانده های تقسیم بر b هستند که همواره طبق قضیه تقسیم از b کوچک ترند.

نکات مهم

(I) برای تبدیل یک عدد از مبنای غیر از ۱۰ به مبنای ۱۰، کافی است آن عدد را در مبنای داده شده بسط دهیم.

مثال: عدد $A = (2112)_4$ را در مبنای ۱۰ بنویسید.

حل: کافی است عدد A را در مبنای ۴ بسط دهیم:
 $A = 2 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 1 \times 4 + 2 = 128 + 16 + 4 + 2 = 150$

(II) برای تبدیل عددی از مبنای ۱۰ به مبنای غیر از ۱۰، باید آن عدد را با تقسیمات متوالی در مبنای مورد نظر دسته بندی کنیم. وقتی تقسیمات متوالی انجام شد، از آخرین باقی مانده و به ترتیب از سمت چپ آن ها را کنار هم می نویسیم.

مثال: عدد ۱۳۹۱ را در مبنای ۷ بنویسید.

حل: تقسیمات متوالی بر ۷ را به صورت زیر انجام می دهیم:

$$\begin{array}{r} 1391 \div 7 = 198 \text{ با بقیه } 5 \\ 198 \div 7 = 28 \text{ با بقیه } 2 \\ 28 \div 7 = 4 \text{ با بقیه } 0 \\ 4 \div 7 = 0 \text{ با بقیه } 4 \end{array}$$

باقی مانده ها از بالا به پایین: ۵، ۲، ۰، ۴

$$1391 = (4025)_7$$

تست: چند عدد ۴ رقمی در مبنای ۵ وجود دارد؟

$$9000(4) \quad 500(3) \quad 450(2) \quad 600(1)$$

حل: گزینه ۳، زیرا:

$$5 \rightarrow \text{تعداد اعداد ۴ رقمی در مبنای ۵}$$

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

(در سمت چپ رقم صفر نمی تواند قرار گیرد و در بقیه

جایگاه ها هر رقم ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ می تواند قرار گیرد)

نکته: تعداد کل اعداد k رقمی در مبنای $b > 1$ برابر است با $(b-1) \times b^{k-1}$.

نکته: بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد k رقمی در مبنای b برابرند با:

$$\rightarrow \overline{(b-1)(b-1)\dots(b-1)}_b \rightarrow \text{بزرگ‌ترین عدد}$$

$$\rightarrow \overline{(10\dots0)}_b \rightarrow \text{کوچک‌ترین عدد}$$

نکته مهم: اگر بخواهیم عددی را از مبنای b به مبنای b^k ببریم، در این صورت هر k رقم از سمت راست آن عدد در مبنای b یک رقم از سمت راست در مبنای b^k است و برعکس، یعنی هر یک رقم از سمت راست در عددی در مبنای b^k ، k رقم سمت راست آن عدد در مبنای b را تشکیل می‌دهد.

مثال: عدد $A = (1021121)_7$ مفروض است، این عدد را در مبنای ۹ نمایش دهید.

حل: چون $9 = 3^2$ ، پس هر دو رقم در A یک رقم در مبنای ۹ است، لذا داریم:

$$(21)_7 = 2 \times 7 + 1 = 15, (11)_7 = 1 \times 7 + 1 = 8, (02)_7 = 0 \times 7 + 2 = 2, (1121)_7 = 1 \times 7^3 + 1 \times 7^2 + 2 \times 7 + 1 = 512 + 49 + 14 + 1 = 576$$

$$(1021121)_7 = (12477)_9$$

مثال: عدد $A = (210123)_4$ مفروض است. این عدد را در مبنای ۲ نمایش دهید.

حل: چون $4 = 2^2$ ، پس هر یک رقم از A دو رقم از آن عدد در مبنای ۲ را تشکیل می‌دهد. لذا داریم:

$$3 = (11)_2, 2 = (10)_2, 1 = (01)_2, 0 = (00)_2$$

$$(210123)_4 = (100100011011)_2$$

قرار داد: اگر مبنای نمایش یک عدد، عددی چون $b > 10$ باشد، در این صورت برای نمایش ارقام در مبناهای بزرگ‌تر از ۱۰ از حروف کوچک انگلیسی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$a = 10, b = 11, c = 12, d = 13, e = 14, \dots$$

مثال: عدد $A = (1b2a)_{17}$ را در مبنای ۱۰ نمایش دهید.

حل: عدد A را در مبنای ۱۲ بسط می‌دهیم که خواهیم داشت:

$$A = 1 \times 12^3 + 11 \times 12^2 + 2 \times 12 + 10 = 1728 + 1584 + 24 + 10 = 3346$$

تست: اگر $(ab)_5 + (ba)_6 = 33$ و عدد $(bab)_7$ را در مبنای ۱۰ بنویسیم، حاصل کدام است؟

$$129(1) \quad 139(2) \quad 141(3) \quad 138(4)$$

حل: گزینه ۱، زیرا:

$$(ab)_5 + (ba)_6 = 33 \Rightarrow 5a + b + 6b + a = 33$$

$$\Rightarrow 6a + 5b = 33 \Rightarrow \begin{matrix} 1 \leq a \leq 3 \\ 1 \leq b \leq 3 \end{matrix} \Rightarrow a = b = 3 \Rightarrow (bab)_7 = (333)_7$$

$$(333)_7 = 3 \times 7^2 + 3 \times 7 + 3 = 129$$

تست: اگر $(134)_{x+1} = (213)_x$ ، در این صورت $(111)_x$ کدام است؟

$$21(1) \quad 35(2) \quad 31(3) \quad 29(4)$$

حل: گزینه ۳، زیرا:

$$(213)_x = (134)_{x+1} \Rightarrow 2x^2 + x + 3 = (x+1)^2 + 3(x+1) + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ یا } x = -1$$

که $x = -1$ قابل قبول نیست (زیرا مبنای باید از یک بزرگ‌تر باشد).

$$\Rightarrow (111)_5 = 1 \times 5^2 + 1 \times 5 + 1 = 31$$

تست: اگر عدد دو رقمی $(ab)_7$ با عدد $(ba)_9$ برابر باشد، این عدد در مبنای ۱۰ به کدام رقم ختم می‌شود؟

$$1(1) \quad 2(2) \quad 3(3) \quad 7(4)$$

حل: گزینه ۱، زیرا:

$$(ab)_7 = (ba)_9 \Rightarrow 7a + b = 9b + a \Rightarrow 6a = 8b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$$

و چون $a \neq 8$ پس $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ و بنابراین $a = 4$ و $b = 3$ پس

$$(ab)_7 = 7a + b = 7 \times 4 + 3 = 31 \Rightarrow \text{یک رقم یکان}$$

$$(ba)_9 = 9b + a = 9 \times 3 + 4 = 31 \Rightarrow \text{یک رقم یکان}$$

تست: عدد $65!$ در مبنای ۶ به چند صفر ختم می‌شود؟

$$28(1) \quad 30(2) \quad 31(3) \quad 29(4)$$

حل: گزینه ۲، زیرا:

در مبنای ۶ هر حاصل ضرب ۲ در ۳ یک ۶ یعنی یک صفر تولید می‌کند (شبهه به مبنای ۱۰ که هر حاصل ضرب 5×2 یک صفر ایجاد می‌کرد)، پس کافی است بررسی کنیم در عدد $65!$ چند عامل ۳ وجود دارد (۳ > ۲) و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left[\frac{65}{3}\right] + \left[\frac{65}{9}\right] + \left[\frac{65}{27}\right] = 21 + 7 + 2 = 30$$

اگر بخواهیم عددی را از مبنای b^k به مبنای b ببریم، در این صورت هر k رقم از سمت راست آن عدد در مبنای b یک رقم از سمت راست در مبنای b^k است و برعکس، یعنی هر یک رقم از سمت راست در عددی در مبنای b^k ، k رقم سمت راست آن عدد در مبنای b را تشکیل می‌دهد

بسته نرم افزاری ممتیکا

دکتر محمدعلی فریبرز عراقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

مقدمه

مبحث انتگرال و قوانین انتگرال گیری از جمله مباحث اساسی و پرکاربرد در حسابان است. از زمانی که نیوتن و لایبنیتز به صورت منطقی به معرفی دیفرانسیل و انتگرال پرداختند و نمادهایی را برای مشتق گیری و انتگرال گیری ارائه کردند. تاکنون روش های تحلیلی و کلاسیک متفاوتی برای انجام عمل انتگرال گیری مطرح شده و کاربردهای زیادی در علوم ریاضی، فیزیک و مکانیک و علوم فنی و مهندسی برای انتگرال ارائه شده است. اهمیت موضوع محاسبه انتگرال معین و نامعین یک تابع تاحدی بالاست که نویسندگان

مختلف کتاب های بسیاری در زمینه حساب دیفرانسیل و انتگرال را در سراسر جهان به چاپ رسانده اند و بسیاری از آن ها در ایران ترجمه شده و در مقاطع مختلف تحصیلی در سطح دانشگاه تدریس می شود. در این راستا، طراحان بسته های نرم افزاری نیز تلاش کرده اند با به کار گیری روش های ساده و صریح، محاسبه انتگرال یک تابع را در حالات معین و نامعین برای کاربران خود آسان کنند تا بدون نیاز به استفاده از روش های انتگرال گیری، حاصل پادمشتق یک تابع یا مقدار انتگرال معین یک تابع را در صورت وجود به دست آورند و در کارهای علمی و تحقیقاتی خود استفاده کنند. بسته نرم افزاری ممتیکا نیز کارایی و قابلیت بالایی را در محاسبه انتگرال یک تابع مفروض داراست. در این قسمت به معرفی نمادها و دستورالعمل های اصلی محاسبه انتگرال یک تابع می پردازیم.

کلیدواژه ها:

انتگرال، پادمشتق،
انتگرال نامعین،
انتگرال معین،
دستورالعمل
انتگرال گیری

دستورالعمل Integrate

می دانیم تابع اولیه یا پادمشتق یک تابع مفروض f تابعی چون F است به طوری که $F'(x) = f(x)$. دستورالعمل Integrate به صورت کلی زیر، تابع اولیه تابع مفروض f را محاسبه می کند:

$$\text{Integrate}[f[x], x]$$

مثال ۱: تابع اولیه تابع f با ضابطه $f(x) = x^4$ را به دست آورید:

$$\text{Integrate}[x^4, x]$$

$$\frac{x^5}{5}$$

مثال ۲: تابع اولیه تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 \cos x$ را به دست آورید.

$$\text{Integrate}[x^3 \cos[x], x]$$

$$(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2})\cos[x] + x(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2})\sin[x]$$

یادآوری می شود به منظور اجرای سلول حاوی دستور فوق

به طور هم زمان دکمه های Shift+Enter را باید فشار داد.

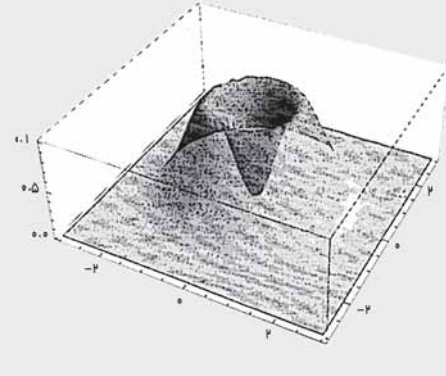
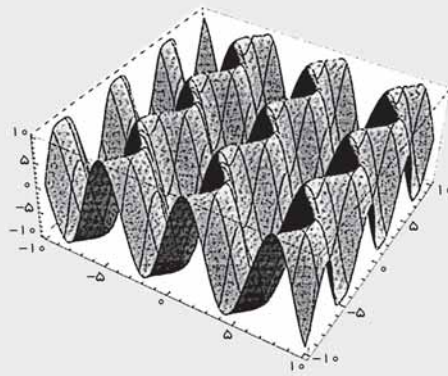
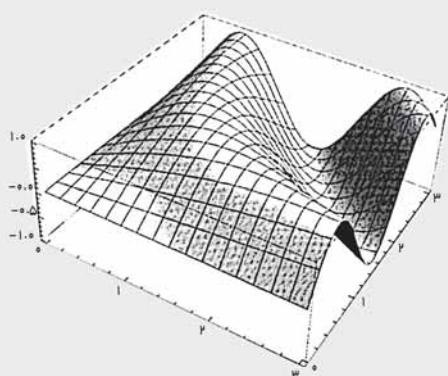
معرفی نماد $\int$: راه دیگر برای محاسبه تابع اولیه یک

تابع مفروض، استفاده از نماد $\int$ در پنجره Basic Math Input است. در این نماد باید به جای ضابطه تابع و به جای $\square$ متغیر انتگرال گیری را تایپ کرد. علامت d همان نماد دیفرانسیل است که با حرف d تفاوت دارد. برای اجرای این دستور، روی این نماد کلیک می کنیم. سپس در مربع اول ضابطه تابع موردنظر را تایپ می کنیم و با فشار دکمه Tab به مربع دوم منتقل می شویم و درون این مربع، متغیری را که عمل انتگرال گیری روی آن انجام می شود، تایپ می کنیم.

مثال ۳: حاصل $\int \sqrt{x} dx$ را مشخص کنید.

$$\int \sqrt{x} dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$



از نمادهای موجود در پنجره Basic Math Input بهره برد و با کلیک روی آن‌ها نماد موردنظر را در زیر علامت $\int$ ایجاد و در مربع‌های مربوط ضابطه تابع موردنظر را تایپ کرد.

مثال ۶: حاصل $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}$ را بیابید.

حل: ابتدا روی نماد $\int$ کلیک و سپس در $\square$ روی نماد $\frac{\square}{\square}$ کلیک می‌کنیم و در صورت ۱ و در مخرج ابتدا روی $\sqrt{\square}$ کلیک و سپس روی $\square$ کلیک و u^2 را تایپ می‌کنیم. در ادامه علامت $-$ را تایپ و مجدداً روی $\square$ کلیک و a^2 را تایپ می‌کنیم. با فشار دکمه Tab به راحتی از یک مربع به مربع بعدی می‌توان وارد شد.

در نهایت، متغیر u را در $\square$ تایپ و با فشار هم‌زمان Shift+Enter نتیجه را مشاهده می‌کنیم. توجه شود که اگر متغیر انتگرال‌گیری عوض شود، حاصل انتگرال نیز تغییر خواهد کرد.

نتیجه اجرا، $\text{Ln}(u + \sqrt{u^2 - a^2})$ است.

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du$$

$$\text{Log}[u + \sqrt{-a^2 + u^2}]$$

انتگرال معین: با استفاده از دستورالعمل Integrate به صورت زیر، می‌توان حاصل $\int_a^b f(x)dx$ را دریافت:

$$\text{Integrate}[f[x], \{x, a, b\}]$$

مثال ۷: حاصل $\int x^2 dx$ را بیابید.

مثال ۴: حاصل $\int e^x \sin x dx$ را مشخص کنید.

$$\int \text{Exp}[x] \text{Sin}[x] dx$$

$$\frac{1}{2} e^x (-\cos[x] + \sin[x])$$

گفتنی است در متمتیکا ثابت انتگرال‌گیری C نوشته شده پس از محاسبه انتگرال نامعین بیان نمی‌شود و فقط تابع اولیه تابع مفروض اعلام خواهد شد.

در مثال زیر انتگرال نامعین چند تابع مفروض محاسبه و اجرا شده است. در نتایج حاصل تابع اولیه تابع زیر علامت انتگرال چاپ می‌شود و ثابت انتگرال‌گیری قید نمی‌شود. به این ترتیب حاصل اجرای $\int \square d\square$ همان حاصل اجرای دستور Integrate است.

مثال ۵: مطلوب است $\int \sin^2 x dx$ ، $\int \frac{dx}{x}$ ، $\int x^n dx$ و $\int \tan^2 x dx$.

حل:

$$\int x^n dx$$

$$\frac{x^{1+n}}{1+n}$$

$$\int \frac{1}{x} dx$$

$$\text{Log}[x]$$

$$\int \text{Sin}[x]^2 dx$$

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \text{Sin}[2x]$$

$$\int \text{Tan}[x]^2 dx$$

$$-x + \text{Tan}[x]$$

توجه شود که $\text{Log}[x]$ همان $\text{Ln}(x)$ را بیان می‌کند. همچنین برای ورود توابع دارای کسر یا توان یا ریشه می‌توان

حل:

$$\text{Integrate}[x^r, \{x, 0, 1\}]$$

$$\frac{1}{4}$$

مثال ۸: حاصل $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ را بیابید.

$$\text{Integrate}[\sin[x], \{x, 0, \pi/2\}]$$

$$1$$

معرفی نماد $\int$: با استفاده از نماد $\int$ در پنجره

Basic Math Input می‌توان حاصل انتگرال معین یک تابع

مفروض را در بازه موردنظر یافت.

مثال ۹: حاصل $\int_1^2 |x-1| dx$ را بیابید.

حل:

$$\int_1^2 \text{Abs}[\text{Abs}[x]-1] dx$$

$$1$$

مثال ۱۰: حاصل $\int_0^1 x e^x \sin x dx$ را بیابید.

حل:

$$\int_0^1 x e^x \sin[x] dx$$

$$\frac{1}{2}(-1 + e \sin[1])$$

توجه شود که هنگام تایپ تابع مذکور باید بین x و e^x یک فاصله گذاشت. در ضمن، برای تایپ تابع e^x می‌توان از نماد عدد نپر به صورت $\text{Exp}[x]$ در پنجره Basic Math Input استفاده کرد که با حرف e معمولی کاملاً متفاوت خواهد بود. این تابع به صورت $\text{Exp}[x]$ هم قابل بیان است. همچنین با استفاده از دستورالعمل N می‌توان مقدار عددی حاصل انتگرال معین را مشاهده کرد. برای این کار کافی است پس از نماد $\int$ تابع x تایپ کنیم:

$$\int_0^1 x e^x \sin[x] dx / N$$

$$0.643678$$

//N و سپس سلول حاصل را اجرا کنیم.

مثال ۱۱: در این مثال حاصل $\int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ و

$\int_1^4 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ محاسبه می‌شوند.

حل: دستور عددی N در زیر، مقدار انتگرال معین تابع مذکور را به صورت تقریبی تا رقم اعشار مشخص می‌کند.

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$2 \sin[\sqrt{x}]$$

$$\int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$2(-\sin[1] + \sin[2])$$

$$N\left[\int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, 20\right]$$

$$-1/40.07019534960585691$$

مثال ۱۲: مطلوب است $\int_{-3}^3 \frac{dx}{9+x^2}$ و مقدار عددی $\int_{-3}^3 \frac{dx}{9+x^2}$.

حل: ملاحظه می‌کنیم تابع اولیه تابع با ضابطه

$$f(x) = \frac{1}{9+x^2} \text{ به صورت } \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} \text{ به دست می‌آید.}$$

همچنین انتگرال معین این تابع در $[-3, 3]$ برابر با $\frac{\pi}{6}$

است که مقدار عددی آن با استفاده از دستور N به صورت

$$0.523599 \text{ مشخص شده است.}$$

$$\int \frac{1}{9+x^2} dx$$

$$\frac{1}{3} \text{ArcTan}\left[\frac{x}{3}\right]$$

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{9+x^2} dx$$

$$\frac{\pi}{6}$$

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{9+x^2} dx // N$$

$$0.523599$$

مثال ۱۳: مطلوب است $\int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$.

حل: توجه می‌کنیم که تابع f با ضابطه

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ در } [-2, 2] \text{ تابعی فرد است (یعنی)}$$

$$f(x) + f(-x) = 0 \text{ به همین لحاظ حاصل انتگرال معین این}$$

تابع در بازه متقارن $[-2, 2]$ صفر می‌شود.

$$\int_{-2}^2 \text{Log} \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right] dx$$

نکته: حاصل انتگرال معین یک تابع مفروض را می‌توان در بازه‌هایی چون $[a, +\infty)$ یا $(-\infty, \infty)$ نیز یافت. به این نوع انتگرال‌ها که یکی از دو سر بازه ∞ باشد ناسره می‌گویند.

مثال ۱۴: مطلوب است $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ و $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

حل:

$$\text{Integrate}[\text{Exp}[-x^2], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\pi$$

نکته: در صورتی که مقدار انتگرال معین یک تابع در بازه انتگرال‌گیری موجود نباشد، پس از اجرای این سلول پیغام خاصی در صفحه ظاهر می‌شود.

مثال ۱۵: می‌دانیم $\int_{-2}^3 \frac{dx}{x}$ قابل محاسبه نیست، زیرا تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ در $[-2, 3]$ پیوسته نیست و در $x = 0$ تعریف نشده است. با اجرای این دستور در متمتیکا پیغامی مبنی بر همگرانبودن انتگرال فوق در این بازه نمایان می‌شود.

$$\text{Integrate} :: \text{idiv} : \text{Integral of } \frac{1}{x} \text{ does not converge on } \{-2, 3\}. >>$$

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{x} dx$$

نکته: با استفاده از دستورالعمل `N Integrate` می‌توان مقدار عددی یک انتگرال معین را یافت. این دستور معادل با این است که ابتدا دستور `Integrate` اجرا شود و سپس با دستور `N` مقدار عددی جواب حاصل به دست آید.

مثال ۱۶: تابع اولیه تابع f با ضابطه $f(x) = 2^x$ و همچنین $\int f(x) dx$ را به صورت تقریبی بیابید.

حل:

$$\text{Integrate}[2^x, x]$$

$$\frac{2^x}{\text{Log}[2]}$$

$$\text{Integrate}[2^x, \{x, 0, 1\}]$$

$$\frac{1}{\text{Log}[2]}$$

$$\text{N}[\%]$$

$$1/4427$$

$$\text{NIntegrate}[2^x, \{x, 0, 1\}]$$

$$1/4427$$

نکته: در متمتیکا می‌توان از توابع چند متغیری هم انتگرال گرفت. در صورتی که محدوده هر متغیر در دستور انتگرال‌گیری مشخص شود حاصل انتگرال معین یک تابع چند متغیری هم قابل محاسبه است.

مثال ۱۷: حاصل $\int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2) dy dx$ را بیابید.

حل: در این حالت $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq x$

$$\text{Integrate}[x^2 + y^2, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, x\}]$$

$$\frac{1}{3}$$

نکته: با استفاده از دستور مشتق‌گیری `D` می‌توان مشتق یک تابع دارای علامت انتگرال را محاسبه کرد.

مثال ۱۸: حاصل $\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\text{Sin} t}{t} dt$ را بیابید.

حل:

$$\text{D}\left[\int_0^x \frac{\text{Sin}[t]}{t} dt, x\right]$$

$$\frac{\text{Sin}[x]}{x}$$

در قسمت بعد مثال‌هایی از کاربرد انتگرال معین را با استفاده از متمتیکا معرفی می‌کنیم.

منابع:

۱. کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲ دوره پیش‌دانشگاهی رشته علوم ریاضی، ۱۳۸۹.
2. Mathematica, Eugene Don, Second edition, Schaum's outline series, Mc Graw Hill, 2009.

سری تلسکوپی

سری های تلسکوپی^۱ یکی از مباحث گنجانده

شده در کتاب درسی «حساب دیفرانسیل و انتگرال»^۲

رشته علوم ریاضی در دوره پیش دانشگاهی در فصل

دنباله ها^۳ و سری های^۴ آن است که ریاضی پژوهان می توانند

با محاسبه حد^۵ مجموع جزئی این نوع سری ها با بهره گیری

از راهکار مشهور به «قاعده ادغام»، همگرایی^۶ یا واگرایی^۷

این گونه سری ها را مورد بررسی قرار دهند. اما از آن جا که

رویگرد این کتاب تنها دربرگیرنده چند مثال و تمرین مانند

$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ و... است و این گونه مسائل

به علت داشتن ساختاری بسیار ساده برای حل کردن و کمبود

مثال هایی در این زمینه، به ریاضی پژوهان کمک می کند که

با مطالعه این مقاله پویایی ذهن خود را محک بزنند؛ به همین

دلیل در این مقاله به حل مثال ها و تمرین های گوناگون

و چالش پذیر تر می پردازیم. جمله عمومی این سری ها

دربرگیرنده عبارات پیچیده برای محاسبه شامل عبارات

کسری، رادیکالی^۸، فاکتوریلی، نمایی^۹، لگاریتمی^{۱۰}، مثلثاتی^{۱۱}،

معکوس مثلثاتی^{۱۲} ... یا تلفیقی از آن ها است. بدیهی است که

داشتن آگاهی مناسب از قوانین رادیکال ها و نماها، اتحاد های

مثلثاتی و معکوس مثلثاتی، قوانین لگاریتم، تجزیه کسرها^{۱۳}

و... کمک ارزنده ای برای درک بهتر این مقاله است.

قاعده ادغام

دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ مفروض است. داریم:

$$\sum_{n=n_0}^m (a_n - a_{n+1}) = a_{n_0} - a_{m+1}$$

هنگامی که با استفاده از آزمون همگرایی داشتن شرط لازم

همگرایی برای یک سری مفروض ثابت شود، اگر جمله عمومی

آن سری دارای ساختاری باشد که در قاعده ادغام بگنجد^{۱۴}،

می توانیم برای نهایی شدن وضعیت همگرایی یا واگرایی سری

از این قاعده استفاده کنیم. البته باید خاطر نشان کرد که با

استفاده از قاعده ادغام، در صورت همگرا^{۱۵} بودن یک سری که

این قاعده در حل آن کاربردی مؤثر دارد، می توان حد مجموع

جزئی یا مقدار آن سری را به دست آورد.

در این قسمت به ارائه نمونه های متنوع می پردازیم که به

کمک قاعده ادغام قابل حل اند تا خواننده توان خویش را در

ارتباط با حل این گونه مسائل با توجه به ساختار و مطالب بیان

شده در کتاب «حساب دیفرانسیل و انتگرال» رشته علوم

ریاضی دوره پیش دانشگاهی محک بزند.

مثال ۱. کدام یک از گزینه های زیر را در مورد سری

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{(n+1)!}$$

صحیح است؟

- (۱) همگرا به صفر
(۲) همگرا به ۲
(۳) همگرا به $\frac{1}{e}$
(۴) واگرا

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. سری بالا شرط لازم

همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{2^n(n-1)}{(n+1)!} = \frac{2^n(n+1-2)}{(n+1)!} = \frac{2^n(n+1)-2^{n+1}}{(n+1)!} \quad n(n+)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n!} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{n(n+1)-2}{n(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}\right)$$

$$= \ln((n+2)(n-1)) - \ln(n(n+1))$$

$$= \ln(n+2) + \ln(n-1) - \ln(n) - \ln(n+1)$$

بنابراین:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln(n+2) + \ln(n-1) - \ln(n) - \ln(n+1))$$

$$\Rightarrow S_n = (\ln(4) + \ln(1) - \ln(2) - \ln(3)) + (\ln(5) + \ln(2) - \ln(3) - \ln(4))$$

$$+ (\ln(6) + \ln(3) - \ln(4) - \ln(5)) + (\ln(7) + \ln(4) - \ln(5) - \ln(6))$$

$$+ \dots + (\ln(n+2) + \ln(n-1) - \ln(n) - \ln(n+1))$$

$$\Rightarrow S_n = -\ln(3) + \ln(n+2) - \ln(n)$$

$$\Rightarrow S_n = -\ln(3) + \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-\ln(3) + \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)) = -\ln(3) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

مثال ۴. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ صحیح است؟

- (۱) همگرا به $\frac{\pi}{4}$ (۲) همگرا به $\frac{\pi}{3}$
(۳) همگرا به $\frac{\pi}{4}$ (۴) واگرا

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است. این سری شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون داریم:

$$\text{Arc tan}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \text{Arc tan}(x) - \text{Arc tan}(y)$$

$$\& x > 0, y > 0, xy \neq -1$$

بنابراین:

$$\text{Arc tan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{1+n(n+1)}\right) = \text{Arc tan}\left(\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}\right)$$

$$= \text{Arc tan}\left(\frac{1}{n}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arc tan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\text{Arc tan}\left(\frac{1}{n}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = \text{Arc tan}(1) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \text{Arc tan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2^1}{1!} - \frac{2^2}{2!}\right) + \left(\frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{2^n}{n!} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right) \Rightarrow$$

بنابراین:

$$S_n = 2 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right) = 2$$

مثال ۲. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ صحیح است؟

- (۱) همگرا به $\frac{1}{24}$ (۲) همگرا به $\frac{1}{12}$
(۳) همگرا به $\frac{1}{4}$ (۴) واگرا

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)} \times \frac{n}{(n+1)(n+3)}$$

اکنون با استفاده از تجزیه کسرها، کسر $\frac{n}{(n+1)(n+3)}$ را به مجموع دو کسر تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{n}{(n+1)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} = \frac{A(n+3) + B(n+1)}{(n+1)(n+3)}$$

$$= \frac{n(A+B) + 3A + B}{(n+1)(n+3)}$$

$$\Rightarrow n(A+B) + 3A + B \equiv n \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \Rightarrow A=1-B \\ 3A+B=0 \Rightarrow 3(1-B)+B=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{3}{2} \& A = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)} \times \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{\frac{3}{2}}{n+3}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

اکنون به کمک قاعده ادغام، مقدار هریک از دو سری را محاسبه می‌کنیم و در نهایت داریم:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

مثال ۳. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$$
 صحیح است؟

- (۱) واگرا (۲) همگرا به $\ln(3)$
(۳) همگرا به $\ln(\sqrt{3})$ (۴) همگرا به $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$$\Rightarrow S_n = \left(\frac{1}{2 \ln(2)} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S = \frac{1}{2 \ln(2)} = \frac{\ln(e)}{2 \ln(2)} = \frac{1}{2} \times \frac{\ln(e)}{\ln(2)}$$

$$= \frac{\ln(e)^{\frac{1}{2}}}{\ln(2)} = \frac{\ln(\sqrt{e})}{\ln(2)} = \log_2 \sqrt{e}$$

مثال ۷. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arc cot}(n^2 + n + 1) \text{ صحیح است؟}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ به همگرا به } (1) \quad \frac{\pi}{4} \text{ به همگرا به } (2)$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ به همگرا به } (3) \quad (4) \text{ واگرا}$$

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است. سری مزبور شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون داریم:

$$\text{Arc cot}\left(\frac{1+xy}{x-y}\right) = \text{Arc cot}(x) - \text{Arc cot}(y)$$

$$\& x > 0, y > 0, xy \neq -1$$

بنابراین:

$$\text{Arc cot}(n^2 + n + 1) = \text{Arc cot}(1 + n(n+1)) = \text{Arc cot}\left(\frac{1+n(n+1)}{(n+1)-n}\right)$$

$$= \text{Arc cot}(n) - \text{Arc cot}(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arc cot}(n^2 + n + 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\text{Arc cot}(n) - \text{Arc cot}(n+1))$$

$$= \text{Arc cot}(1) - \text{Arc cot}(n+1)$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \text{Arc cot}(1) = \frac{\pi}{4}$$

مثال ۸. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!} \text{ صحیح است؟}$$

$$(1) \text{ همگرا به صفر} \quad (2) \text{ همگرا به } 1$$

$$(3) \text{ همگرا به } -1 \quad (4) \text{ واگرا}$$

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. سری مزبور شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$(-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = -\frac{(-1)^n}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

مثال ۵. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$

صحیح است؟

$$(1) \text{ همگرا به صفر} \quad (2) \text{ همگرا به } \frac{1}{4}$$

$$(3) \text{ همگرا به } 1 \quad (4) \text{ واگرا}$$

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است. سری مزبور شرط لازم

همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \times \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \right)$$

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S = 1$$

مثال ۶. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1)}{\ln(n)^n \ln(n+1)^{n+1}}$

صحیح است؟

$$\log \sqrt{e} \text{ به همگرا به } (2) \quad \log \sqrt{e} \text{ به همگرا به } (1)$$

$$\log_2 \sqrt{e} \text{ به همگرا به } (3) \quad \log_2 \sqrt{e} \text{ به همگرا به } (4)$$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. سری بالا شرط لازم

همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1)}{\ln(n)^n \ln(n+1)^{n+1}} = \frac{\ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)\right)}{n \ln(n) \times (n+1) \ln(n+1)}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \ln(n+1)}{n \ln(n) \times (n+1) \ln(n+1)}$$

بنابراین:

$$= \frac{n(\ln(n+1) - \ln(n)) + \ln(n+1)}{n \ln(n) \times (n+1) \ln(n+1)} = \frac{(n+1)\ln(n+1) - n \ln(n)}{n \ln(n) \times (n+1) \ln(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n \ln(n)} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1)}{\ln(n)^n \ln(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n \ln(n)} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \right)$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{(-1)^n}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \right) = \frac{1}{1!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1!} = 1$$

مثال ۹. کدام گزینه در مورد سری

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2-n}\right) \left(1 + \tan\left(\frac{1}{n^2-2n}\right) \tan\left(\frac{1}{n^2+n}\right)\right)$$

صحیح است؟

(۱) همگرا به $\tan\left(\frac{1}{e}\right)$ (۲) همگرا به $\tan\left(\frac{1}{e}\right)$

(۳) همگرا به $\tan\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ (۴) واگرا

با توجه به رابطه $\tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$ داریم:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{2n(n-1)} - \frac{1}{2n(n+1)}\right)}{1 + \tan\left(\frac{1}{2n(n-1)}\right) \tan\left(\frac{1}{2n(n+1)}\right)}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{2n(n-1)}\right) - \tan\left(\frac{1}{2n(n+1)}\right) = \tan\frac{1}{2} - \tan\left(\frac{1}{2n(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \tan\left(\frac{1}{2}\right)$$

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. سری بالا شرط لازم

همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم که:

$$\frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

ابتدا کسر $\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ را با کمک تجزیه کسرها به دو کسر تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1} = \frac{n(A+B) + A - B}{(n-1)(n+1)}$$

$$\Rightarrow n(A+B) + A - B \equiv 1 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2n(n-1)} - \frac{1}{2n(n+1)}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2-n}\right) \left(1 + \tan\left(\frac{1}{n^2-2n}\right) \tan\left(\frac{1}{n^2+n}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n^2-n}\right)}{1 + \tan\left(\frac{1}{n^2-2n}\right) \tan\left(\frac{1}{n^2+n}\right)} = \frac{1}{1 + \tan\left(\frac{1}{2n(n-1)}\right) \tan\left(\frac{1}{2n(n+1)}\right)}$$

پی‌نوشت..... Telescoping Series. دلیل نام‌گذاری این سری‌ها به سری‌های تلسکوپی آن است که در هنگام محاسبه این

نوع سری‌ها به علت وجود مقادیر برابر و تنها متفاوت از نظر علامت، این مقادیر با یکدیگر خنثی می‌شوند و به اصطلاح مقادیر توی یکدیگر می‌روند و بنابراین یک عبارت بزرگ از اعداد به یک عبارت کوچک تبدیل می‌شود. این موضوع را با یازشدن و جمع‌شدن تلسکوپ‌های کیهان‌شناسی در رصدخانه‌ها مقایسه کرده‌اند و نام سری‌های تلسکوپی را بر آن نهاده‌اند.

- | | | | |
|-----------------|-------------------|---------------------------|----------------|
| 2. Calculus | 3. Sequences | 4. Series | 5. Limit |
| 6. Convergence | 7. Divergence | 8. Irrational | 9. Exponential |
| 10. Logarithmic | 11. Trigonometric | 12. Inverse Trigonometric | |

۱۳. البته ممکن است خواننده برای حل سری‌های تلسکوپی در مواردی که نیاز به تجزیه کسرها دارند از روش‌های

متنوعی استفاده کنید. برای مثال در سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda n - 3)(\lambda n + \delta)}$ جمله عمومی آن را می‌توان به یکی از دو

روش زیر تجزیه کرد:
روش اول:

$$\frac{1}{(\lambda n - 3)(\lambda n + \delta)} = \frac{A}{\lambda n - 3} + \frac{B}{\lambda n + \delta} = \frac{(A+B)\delta n + \delta A - 3B}{(\lambda n - 3)(\lambda n + \delta)} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\lambda} \\ B = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

روش دوم:

$$\frac{1}{(\lambda n - 3)(\lambda n + \delta)} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{\lambda(\lambda n + \delta) - (\lambda n - 3)}{(\lambda n - 3)(\lambda n + \delta)} = \frac{1}{\lambda} \times \left(\frac{1}{\lambda n - 3} - \frac{1}{\lambda n + \delta} \right)$$

۱۴. اگر در سری $\sum_{n=n_0}^m (a_n - a_{n+1})$ با تبدیل n به $n+1$ در عبارت a_n بتوان عبارت a_{n+1} را به دست

آورد، سری مزبور یک سری تلسکوپی است که در شرایط قاعدهٔ ادغام می‌گنجد.

15. Convergent

منابع.....

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ علوم ریاضی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی

ایران، ۱۳۸۸

۲. حساب دیفرانسیل و انتگرال. تام. م. آ. پوستل. ترجمهٔ علیرضا ذکایی، مهدی رضایی دلفی، علی‌اکبر عالم‌زاده

و فرخ فیروزان، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۰

3. SCHAUMS SOLVED PROBLEMS SERIES; 3000 SOLVED PROBLEMS IN CALCULUS. Elliott Mendelson. McGraw-Hill, 1988, (ISBN: 7-07-041480-7).

پیوستگی
تابع

مقدمه

یکی از قضایایی که در مورد پیوستگی وجود دارد، قضیه پیوستگی جمع و تفریق و ضرب و تقسیم دو تابع پیوسته است. در این مقاله ابتدا این قضیه را بیان می‌کنیم و سپس به وضعیت پیوستگی جمع و تفریق و ضرب و تقسیم یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته می‌پردازیم.

کلیدواژه‌ها:

جمع دو تابع، تفریق دو تابع، ضرب دو تابع، تقسیم دو تابع، پیوستگی.

اثبات قضیه:

فرض: تابع f در نقطه a پیوسته و تابع g در این نقطه ناپیوسته است.

حکم: تابع $f + g$ در نقطه a ناپیوسته است.

برهان خلف: فرض کنیم تابع $f + g$ در نقطه a پیوسته باشد. چون تابع f نیز در این نقطه پیوسته است، بنابر قضیه ۱ تفریق این دو تابع، یعنی $f - (f + g)$ نیز در نقطه a پیوسته است، یعنی تابع g در نقطه a پیوسته است که با فرض ما تناقض دارد. پس تابع $f + g$ در نقطه a ناپیوسته است. به‌طور مشابه ناپیوسته بودن تابع $f - g$ نیز ثابت می‌شود.

مثال: پیوستگی تابع $y = [x] + \sin(2x)$ را در دامنه‌اش بررسی کنید.

حل: در نقاط صحیح تابع $y = [x]$ ناپیوسته و تابع $y = \sin 2x$ پیوسته است، پس طبق قضیه قبل، مجموع دو تابع یعنی $y = [x] + \sin 2x$ در این نقاط ناپیوسته است. در نقاط غیر صحیح هر دو تابع $y = [x]$ و $y = \sin 2x$ پیوسته‌اند، پس جمع آن‌ها یعنی تابع $y = [x] + \sin 2x$ پیوسته است.

سؤال دیگری که وجود دارد این است که آیا قضیه فوق برای ضرب دو تابع نیز قابل اثبات است. یعنی اگر تابع f در نقطه a پیوسته و تابع g در این نقطه ناپیوسته باشد، آیا تابع

تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه

می‌گوییم تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه:
الف) مقدار تابع در نقطه a موجود باشد، یعنی $f(a)$ موجود باشد.
ب) حدهای راست و چپ تابع در نقطه a موجود و با $f(a)$ برابر باشند.

قضیه ۱: اگر دو تابع f و g در نقطه $x = a$ پیوسته باشند، آنگاه:

الف) توابع $f + g$ و $f - g$ و fg نیز در نقطه a پیوسته‌اند.

ب) تابع $\frac{f}{g}$ با شرط $g(a) \neq 0$ در نقطه a پیوسته است.

حال این سؤال پیش می‌آید که اگر در نقطه $x = a$ تابع f پیوسته و تابع g ناپیوسته باشد، توابع $f + g$ ، $f - g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ در نقطه a چه وضعیتی دارند. برای این منظور قضیه زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲: اگر تابع f در نقطه a پیوسته و تابع g در این نقطه ناپیوسته باشد، توابع $f + g$ و $f - g$ در این نقطه ناپیوسته‌اند.

fg در نقطه a ناپیوسته است. برای روشن شدن مطلب ابتدا مثال زیر را بیان می‌کنیم.

مثال: تابع $f(x) = x^2$ در نقطه $x = 1$ پیوسته و تابع $g(x) = [x]$ در این نقطه ناپیوسته است و ضرب آنها یعنی $y = x^2[x]$ در این نقطه ناپیوسته است، زیرا:

$$f(1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2[x] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2[x] = 0$$

همچنین ضرب آنها یعنی $y = x^2[x]$ در نقطه صفر نیز پیوسته است، زیرا:

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2[x] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2[x] = 0$$

بنابراین می‌توانیم قضیه مربوط به ضرب یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته را به صورت زیر بیان و اثبات کنیم.

قضیه ۳: اگر تابع f در نقطه a پیوسته و $f(a) \neq 0$ باشد و تابع g در این نقطه ناپیوسته باشد، آنگاه تابع fg در نقطه $x = a$ ناپیوسته است.

اثبات: فرض: f در نقطه a پیوسته و g در این نقطه ناپیوسته است و $f(a) \neq 0$.

حکم: تابع fg در نقطه a ناپیوسته است.

برهان خلف: فرض کنیم تابع fg در نقطه a پیوسته باشد. چون تابع f نیز در این نقطه پیوسته است و $f(a) \neq 0$ ، پس طبق قضیه ۱، تقسیم آن‌ها یعنی $\frac{fg}{f}$ نیز در نقطه a پیوسته است، یعنی تابع g در نقطه a پیوسته است و این با فرض ما تناقض دارد، پس تابع fg در نقطه a ناپیوسته است. برای تقسیم دو تابع نیز می‌توانیم قضیه زیر را ثابت کنیم.

قضیه ۴: اگر تابع f در نقطه a پیوسته و $f(a) \neq 0$ و تابع g در نقطه a ناپیوسته باشد، آنگاه تابع $\frac{g}{f}$ در نقطه a ناپیوسته است.

اثبات: طبق برهان خلف، فرض می‌کنیم تابع $\frac{g}{f}$ در نقطه a پیوسته باشد و چون تابع f نیز در نقطه a پیوسته است، پس بنابر قضیه ۱ ضرب این دو تابع یعنی $\frac{g}{f} \times f$ نیز در نقطه a پیوسته است. بنابراین تابع g در نقطه a پیوسته است که با فرض قضیه تناقض دارد. پس تابع $\frac{g}{f}$ در نقطه a ناپیوسته است.

Understanding Calculus

اسم وبگاه:

نشانی وبگاه: <http://www.understandingcalculus.com>

این وبگاه یک منبع الکترونیکی مناسب آنلاین برای دروس «حسابان» و «حساب دیفرانسیل و انتگرال» است که دارای عناوین متعدد و جالب توجه این شاخه از ریاضیات به شرح زیر است:

- چرا حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه می‌کنیم (Why Study calculus)
- اعداد (Numbers)

■ توابع (Functions)

■ مشتق (Derivative)

■ دیفرانسیل گیری (Differentiation)

■ نظریه انتگرال گیری (Integration Theory)

■ توابع معکوس (Inverse Functions)

■ نماها (Exponents)

■ توابع نمایی (Exponential Functions)

■ کاربردهای توابع نمایی (Applications of Exponential Functions)

■ توابع سینوس و کسینوس (Sine and Cosine Functions)

■ حرکت نوسانی (Oscillatory Motion)

■ قضیه مقدار میانگین (Mean Value Theorem)

■ سری تیلور (Taylor Series)

■ روش‌های انتگرال گیری (Integration Techniques)



روش برای حل معادله درجه سوم و کاربردهای آنها

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

سید محمد رضا هاشمی موسوی

اشاره

کلیدواژه‌ها:

معادله درجه سوم،
چند جمله‌ای، هندسه
اقلیدسی، خیام.

از آن جا که هر روش جدید در واقع القاکننده ایده‌هایی جدید است، در این مختصر به ارائه ۸ روش عمومی آزمون و خطا، عددی (تکرار)، هندسی (تحلیلی، ترسیمی و تعبیری) جبری، آنالیزی، مثلثاتی، ماتریسی (برداری)، ترکیبی (تلفیقی) و

دیگر روش‌ها پرداخته‌ایم که هر یک از این روش‌ها علاوه بر القای ایده، نوآوری و خلاقیت، کاربردهایی را نیز دربردارند که مانند مقاله پیش (۲۹) روش برای حل معادله درجه دوم) به آن‌ها اشاره شده است و ممکن است بسیاری کاربردهای عملی یا نظری دیگر داشته باشند که به تفصیل در شماره‌های آینده به نتایج آن‌ها خواهیم پرداخت.

مقدمه

می‌دانیم از نظر تاریخی نخستین مسئله‌های جبر حل معادله‌های جبری بود، یعنی پیدا کردن ریشه‌های آن و در واقع مقدارهایی از مجهول x که به ازای آن‌ها چند جمله‌ای برابر صفر شود. از زمان‌های دور جواب‌های معادله درجه دوم معلوم بود و حل جبری معادله درجه سوم و در پی آن درجه چهارم در قرن شانزدهم میلادی پیدا شد. برای معادله عمومی ناقص $X^3 + pX + q = 0$ (که هر معادله درجه سوم می‌توان به آن تبدیل کرد) رابطه زیر داده شده است:

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{p} + \sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{p} - \sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

این رابطه را که به رابطه کاردان معروف است (اگرچه این پرسش مطرح است که آیا این رابطه را خود کاردان به دست آورده یا از دیگرانی همچون تارتاگلیا، استاد خود،

اقتباس کرده است) نمی‌توان حل کامل معادله دانست، زیرا ریشه فوق تنها در حالت $\Delta = \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ قابل قبول است و در حالت $\Delta < 0$ ریشه مذکور نمی‌تواند ریشه‌ای حقیقی برای معادله به حساب آید. در این جاست که می‌توان به اهمیت روش‌هایی غیر از روش‌های جبری، مانند روش‌های مثلثاتی، هندسی، آنالیزی و... پی برد و در واقع جبر به دنبال یاری می‌شتابد که آن را از این تنگنا و بن‌بست برهاند. همین جاست که وجود علم مستقلی احساس می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم تنها علم مستقلی که می‌تواند به یاری جبر بشتابد و آن را از این تنگنا برهاند، شاخه‌ای دیگر از ریاضیات به نام «مثلثات» است (در این جا به استقلال مثلثات اشاره شد که به تفصیل می‌توان درباره آن صحبت کرد؛ ولی در این جا فقط به این نکته بسنده می‌کنیم که پیدایش استقلال روابط مثلثاتی از هندسه اقلیدسی به کمک روابط اویلر اثبات می‌شود $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ و $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ؛ $\cos x + i \sin x = e^{ix}$).



۵: پایه لگاریتم طبیعی و $i = \sqrt{-1}$ از این زمان به بعد بود که انسان با اطمینان کامل مثلثات را برای حل مسائل غیرقابل حل با روش‌های هندسی، جبری و... برگزید.

۹. ابزار (خط‌کش، پرگار، نقاله و...) و مکانیکی
۱۰. بخش‌پذیری

* توجه: روش‌های دیگری نیز با ابزارهای دیگر شاخه‌های ریاضیات وجود دارند که در این مقاله مختصر نمی‌توانیم به بیان آن‌ها بپردازیم.

در این جا برای حل معادله درجه سوم (۱) از هر یک از روش‌های مذکور استفاده می‌کنیم و به صورتی کاملاً خلاق و همراه با نوآوری به ارائه طریق می‌پردازیم.

● تبدیل معادله درجه سوم کامل (۱) به ناقص

برای حل و بحث روی معادله درجه سوم کامل (۱)، کافی است معادله درجه سوم ناقص به صورت عمومی زیر را مورد بحث و بررسی قرار دهیم:

$$X^3 + pX + q = 0 \quad (2)$$

برای تبدیل معادله (۱) به (۲) کافی است تبدیل $X = X - \frac{b}{3a}$ را انجام دهیم:

● انواع روش‌های حل معادله درجه سوم کامل (۱)

برای حل یک مسئله ممکن است راه‌های گوناگونی وجود داشته باشد که با ابتکار، خلاقیت و نوآوری بتوان به برخی از آن‌ها دست یافت. البته ممکن است برخی از مسائل را به هریک از انواع روش‌های زیر حل کرد و حتی برای هر نوع، چندین روش مختلف وجود داشته باشد که در این جا به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

۱. آزمون و خطا

۲. عددی (تکرار)

۳. هندسی (تحلیلی، ترسیمی)

۴. جبری

۵. آنالیزی

۶. مثلثاتی

۷. ماتریسی (بردار)

۸. ترکیبی (تلفیقی از چند روش)

نشده‌اند، ولی ریاضی‌دانی از نسل بعد به نام ابوجعفر خازن، توانست آن را از تقاطع دادن به مقاطع مخروطی حل کند. سپس ریاضی‌دانان متعددی به پیروی از ابوجعفر به حل انواع خاص این معادلات که از درجهٔ سوم بودند، دست یافتند، ولی کسی دربرشمردن همهٔ معادلات ممکن از این نوع و حل همهٔ آن‌ها کوشش به‌عمل نیاورد. خیام می‌گوید که او این کار را در رساله‌اش انجام خواهد داد.

● طبقه‌بندی خیام از معادلات درجهٔ سوم

در ابتدا تأکید می‌کنیم که گرچه در این قسمت از «معادلات» و «ضرایب» صحبت می‌کنیم، خیام این‌ها را به‌طور نمادی نمی‌نویسد، زیرا او حتی برای اعداد فقط از الفاظ استفاده می‌کند.

خیام در بخش اول رساله‌اش همهٔ انواع معادلاتی را که در آن‌ها جملات بالاتر از درجهٔ سه ظاهر نمی‌شوند، فهرست می‌کند.

در معادلات خیام همهٔ جملات، ضرایب مثبت دارند به‌طوری که، گرچه از نظر ما $x^3 - 3x + 8 = 0$ و $x^3 + 3x - 8 = 0$ از یک نوع‌اند، از نظر خیام این دو متفاوت به‌حساب می‌آیند. وی اولی را به صورت «کعبی و عددی معادل جذری است» ($x^3 + 8 = 3x$) بیان می‌کرد و آن را از «کعبی و جذری معادل عددی است» ($x^3 + 3x = 8$) متمایز می‌دید. بنابراین، وی به ۲۵ نوع معادله می‌رسد و در باقی‌ماندهٔ رساله‌اش نشان می‌دهد که چگونه می‌توان ۱۱ نوع از این معادلات را با روش‌های اقلیدسی و ۱۴ نوع آن را با مقاطع مخروطی حل کرد. برای هر یک از این ۱۴ نوع، خیام بخش کوتاهی را به این امر اختصاص می‌دهد و می‌گوید چگونه می‌توان با استفاده از مقاطع مخروطی پاره‌خطی را ایجاد کرد که بتوان از آن اجسام صلبی ساخت که در رابطهٔ مطلوب صدق کنند.

* **توجه:** هرکس که ترجمهٔ انگلیسی کثیر (D.S.Kasir) از جبر خیام را بخواند، استدلال‌های خیام را بسیار روشن خواهد یافت و نیز از نکات متعدد جالب توجهی در تاریخ انواع مختلف معادلات مطلع خواهد شد.

$$a\left(X - \frac{b}{ra}\right)^r + b\left(X - \frac{b}{ra}\right)^r + c\left(X - \frac{b}{ra}\right) + d = 0$$

پس از بسط پرانتزها و اختصار لازم داریم:

$$aX^r + \left(c - \frac{b^r}{ra}\right)X + \left(\frac{rb^r}{ra^r} - \frac{bc}{ra} + d\right) = 0$$

با فرض $a \neq 0$ معادلهٔ فوق را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$X^r + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^r}{ra^r}\right)X + \left(\frac{rb^r}{ra^r} - \frac{bc}{ra} + \frac{d}{a}\right) = 0$$

در این جا اگر فرض کنیم:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^r}{ra^r} \quad \text{و} \quad q = \frac{rb^r}{ra^r} - \frac{bc}{ra} + \frac{d}{a}$$

معادلهٔ (۱) به معادلهٔ عمومی (۲) تبدیل می‌شود:

$$X^r + pX + q = 0$$

بنابراین، از این به بعد کافی است به جای معادلهٔ (۱)

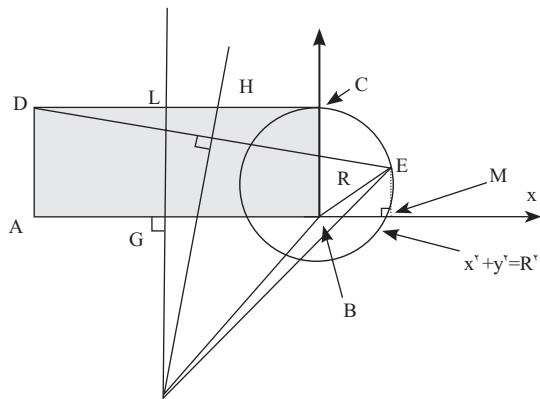
معادلهٔ تبدیل یافتهٔ (۲) را مورد بحث و بررسی قرار داد.

(۱) روش خیام

بحث خیام دربارهٔ معادلات درجهٔ سوم را می‌توان در کتاب جبر وی پیدا کرد. پیش از پرداختن به اثر خیام متذکر می‌شویم که هیچ بحث جبری در مسائلی که وی به آن‌ها می‌پردازد از پیشینیان به او نرسیده است. ولی از متأخران، نویسنده‌ای به نام ابوعبدالله ماهانی، تحلیلی جبری در مورد لمی از ارشمیدس به نگارش درآورده است. لمی که ارشمیدس در مسئلهٔ بریدن کره با صفحه (حجم دو قسمت حاصل به نسبت مفروضی باشد) به اثبات رساند بیان می‌دارد این مسئله در صورتی قابل حل است که قطعه خطی مانند a به دو قسمت b و c چنان تقسیم شود که نسبت به c به طولی مفروض مثل نسبت مساحتی مفروض بر b^2 باشد. اگر فرض کنیم $b = x$ ، خواهیم داشت $c = a - x$ و نسبت را می‌توان به صورت $x^3 + m = nx^2$ نوشت که در آن m حاصل ضرب طول و مساحت مفروض است. خیام می‌گوید، نه ثابت بن قره و نه ماهانی (بین سال‌های ۸۲۵ میلادی تا ۸۸۸ میلادی) که معاصر خوارزمی بوده‌اند، موفق به حل این معادله

نقد بر پارادکس

اشکال اثبات در این است که شیب PB را کوچکتر از شیب BE گرفته‌ایم که دقیقاً برعکس است؛ ببینید:



بدون اینکه خللی بر اثبات وارد شود فرض کنید:

$$\frac{AB}{AC} < 1$$

از عمود منصف بودن XY داریم:

$$BH_1 = CH_1 \Rightarrow \frac{BH_1}{CH_1} = 1$$

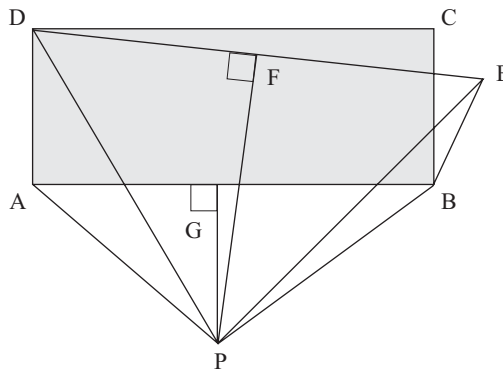
از نیمساز بودن AH_1 و قضیه نیمسازها داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BH_1}{CH_1} \Rightarrow \frac{BH_1}{CH_1} < 1$$

پس نیمساز زاویه A (خط AH_1), عمود منصف BC را در خارج از مثلث قطع می‌کند.

۲. یک زاویه قائمه با یک زاویه منفرجه برابر است؟!

فرض کنید ABCD مستطیل دلخواهی باشد (شکل زیر را ببینید). BE را خارج مستطیل و برابر با AD رسم می‌کنیم. سپس عمود منصف‌های AB و DE را رسم می‌کنیم. چون آن‌ها بر خطوط غیرموازی عمودند باید در نقطه‌ای مانند P یکدیگر را قطع کنند، و DP و EP و AP و BP را رسم می‌کنیم، در این صورت $DP = EP$ و $AP = BP$ (هر نقطه بر عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند) و می‌دانیم که $AD = BE$ ؛ بنابراین مثلث‌های APD و BPE همنهشت‌اند (ضضض). در نتیجه $\hat{DAP} = \hat{EBP}$ ؛ اما $\hat{BAP} = \hat{ABP}$ ، زیرا این زوایا، زوایای مجاور به قاعده مثلث متساوی‌الساقین APB‌اند. با تفريق، اکنون نتیجه می‌شود که زاویه قائمه $\hat{DAG}$ برابر زاویه منفرجه $\hat{EBG}$ است.



$$DC = P, \quad BM = a, \quad D \left| \begin{matrix} -p. \\ R \end{matrix} \right., \quad L \left| \begin{matrix} -p. \\ 2 \end{matrix} \right., \quad C \left| \begin{matrix} . \\ R \end{matrix} \right.$$

$$E \left| \begin{matrix} a \\ \sqrt{R^2 - a^2} \end{matrix} \right., \quad B \left| \begin{matrix} . \\ R \end{matrix} \right., \quad P \left| \begin{matrix} -p. \\ 2(R - \sqrt{R^2 - a^2}) \end{matrix} \right. \quad (@)$$

$$H \left| \begin{matrix} a - p. \\ 2 \\ R + \sqrt{R^2 - a^2} \end{matrix} \right.$$

$$m_{DE} = \frac{\sqrt{R^2 - a^2} - R}{a + p.}$$

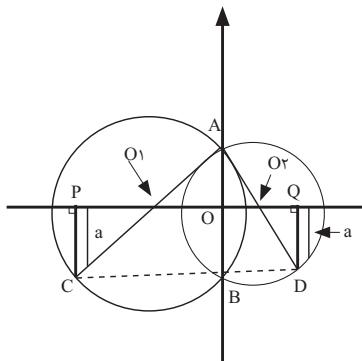
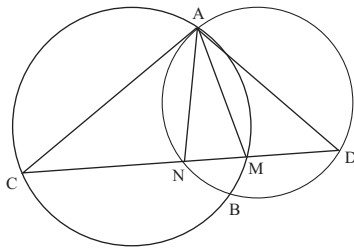
$$y - y_H = -\frac{1}{m_{DE}}(x - x_H)$$

$$\Rightarrow y - \frac{\sqrt{R^2 - a^2} + R}{2} = \frac{a + p.}{R - \sqrt{R^2 - a^2}} \left(x - \frac{a - p.}{2} \right)$$

$$y = \frac{a + p.}{R - \sqrt{R^2 - a^2}} x - \frac{a^2 - p.^2}{2(R - \sqrt{R^2 - a^2})} + \frac{\sqrt{R^2 - a^2} + R}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{a + p.}{R - \sqrt{R^2 - a^2}} x + \frac{p.^2}{2(R - \sqrt{R^2 - a^2})}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2(a + b)x + p.^2}{2(R - \sqrt{R^2 - a^2})} \quad (@)$$



نقد بر این پارادکس

اثبات: اشکال

اثبات در این است

که M و N یک

نقطه‌اند، یعنی

امتداد D به طرف C

از B می‌گذرد.

زیرا اگر وسط AB را مبدأ فرض کنیم، روابط

زیر برقرار است:

$$\triangle A O_1 O \cong \triangle O_1 P C \Rightarrow PC = AO = a$$

$$\triangle A O O_2 \cong \triangle O_2 Q D \Rightarrow QD = AO = a$$

بنابراین $y_B = y_C = y_D = a$ و در نتیجه DC از نقطه

B می‌گذرد.

$$(m_{PB})m_1 = \frac{\frac{p \cdot a}{\sqrt{R^2 - a^2}}}{\frac{p}{2}} = \frac{a}{R - \sqrt{R^2 - a^2}}$$

$$= \frac{R + \sqrt{R^2 - a^2}}{a} \quad (1)$$

$$(m_{BE})m_2 = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m_2 < m_1$$

در نتیجه مثلث BEP خارج مستطیل است.

۳. از یک نقطه می‌توان دو عمود بر خطی رسم کرد؟!

فرض کنید که دو دایره دلخواه یکدیگر را در نقطه B و A قطع کنند (شکل را ببینید).

اقطار AD و AC را رسم و فرض کنید که خط واصل بین C و D دایره‌های مربوط را M و N قطع کنند. در این صورت زوایای AND و AMC قائمه‌اند، زیرا هر یک در نیم‌دایره‌ای محاط‌اند. بنابراین AN و AM دو عمود وارد بر CD هستند.

Maths is good for you

اسم وبگاه:

نشانی وبگاه: <http://www.mathsisgoodforyou.com>

صفحه اصلی این سایت دربرگیرنده عناوین زیر است که هریک از آنها نیز زیرعنوان‌هایی دارند که به تفصیل درباره آنها مطالبی آورده است.

- دوره‌های آموزشی (Courses)
- ریاضی‌دانان (Mathematicians)
- عناوینی در تاریخ ریاضیات (Topics in the History of Mathematics)
- قضایا و حدس‌های مشهور (Famous Theorems and Conjecture)
- جبر (Algebra)
- هندسه (Geometry)
- منطق (Logic)
- مکان‌شناسی (Topology)
- مثلثات (Trigonometry)
- فیثاغورسیان (Pythagoreans)
- ریاضیات مصری (Egyptian Maths)



کوزه
در
خیاط

تاریخچه مجله ریاضی برهان

غلامرضا یاسی پور

کلیدواژه‌ها:

تاریخچه مجله
برهان، پیدایش
صفر، مشاهیر ریاضی
جهان، محاسبات
ریاضی، محاسبه
انتگرال، تابع، هندسه
فضایی، مجله
یکان، روش لاگرانژ،
روش اویلر، اعداد
فیبوناچی، اعداد
لیوویل.

در شماره هجدهم، باز هم طبق معمول، اولین مقاله، مقاله «شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید»، از استاد شهریار است. در این مقاله، پاره‌ای از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع آورده شده است که بعضی از آن‌ها عبارت‌اند از:

مثلث متساوی‌الاضلاع با همه سادگی خود، ویژگی‌های جالب زیادی دارد که اثبات برخی از آن‌ها چندان ساده نیست. برخی از این ویژگی‌ها در آغاز موجب شگفتی می‌شوند. سیاهه کوتاهی از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع را در این جا آورده‌ایم، ولی این سیاهه را می‌توانید ادامه دهید و اندیشه هندسی خود را درباره این ویژگی‌ها بیاورید و برای اثبات درستی آن‌ها تلاش کنید:

۱. مثلث متساوی‌الاضلاع تنها مثلثی است که سه محور تقارن دارد.

۲. در بین مثلث‌های با محیط برابر، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

۳. اگر طول شعاع دایره محاط در مثلث را r و طول شعاع دایره محیط بر مثلث را R بنامیم، بیشترین مقدار نسبت $\frac{r}{R}$ در مثلث متساوی‌الاضلاع

به دست می‌آید.

۴. اگر نقطه M را در درون مثلث متساوی‌الاضلاع انتخاب و عمودهای MP ، MQ و MR را بر ضلع‌های مثلث فرود آوریم (شکل ۲)، مجموع طول‌های این سه عمود، به جای نقطه M بستگی ندارد و در هر حال، برابر طول ارتفاع مثلث است.

در مقاله «تاریخچه مجلات ریاضی ایران این شماره، بخشی درباره ویژگی‌های صفر آمده است. اندکی از این مقاله را در این جا می‌آوریم:

صفری که اغلب دانش‌آموزان از آن نفرت دارند و صفر بی‌مقداری که هیچ‌کس آن را دوست ندارد، داستان و تاریخ دلپذیری دارد. بین ارقام مختلف، صفر از همه جوان‌تر است. به مقیاس انسانی، صفر را در مقابل سایر اعداد، نوزادی بیش نباید دانست. در این صورت، آیا این همه نفرت از این موجودی که (!) فرصت نداشته است آن‌طور که باید و شاید خود را نشان دهد، بیجا نیست؟ شاید اگر عمر صفر به اندازه عمر سایر اعداد بود، اکنون یکی از عزیزترین اعداد به حساب می‌آمد. قبول ندارید؟ پس شما را به خواندن این داستان،

که داستانی جز سرگذشت صفر، این طفل یک‌شبه نیست، دعوت می‌کنیم.

صفر، اولین علامت از ده علامتی است که بیانگر ارقام است؛ ارقامی که ما می‌توانیم کلیه اعداد فوق‌العاده بزرگ را به کمک آن‌ها نشان دهیم، ارقامی که تار و پود تمدن جدید بر آن‌ها استوار است. پس، اولین رقمی است که باید با آن آشنا شویم. ولی باید اذعان داشت که این اولین رقم، آخرین رقمی بود که پیدا شد، یا بهتر بگوییم این اولین عدد، آخرین عددی بود که کشف شد.

این دو واقعه، یعنی پیدایش و کشف صفر به موجب تاریخ اعداد، در یک زمان اتفاق نیفتاد. پیدایش آن قرن‌ها قبل از کشف آن اتفاق افتاد. تا سال‌های مقارن با تولد مسیح تصور صفر به عنوان یک عدد به فکر هیچ‌کس نرسیده بود. حتی در کلیه مجامع متمدنی آن زمان، شکل نوشتن هر یک از اعداد، با علامت‌های متفاوت بود. برای مثال، مصریان قدیم اشکال مختلفی برای نشان دادن اعداد به کار می‌بردند. یونانیان از حروف الفبا برای بیان اعداد استفاده می‌کردند. رومیان با چند خط

ساده که در سنگ‌نبشته‌ها دیده شده است، اعداد را نشان می‌دادند.

ایرانیان نیز علامات محدودی برای نشان دادن اعداد به خط میخی به کار می‌بردند، ولی همه آن‌ها اعداد را دسته‌بندی کرده بودند، به گونه‌ای که نوشتن اعداد بزرگ با تکرار این علامات نشان داده می‌شد.

بقیه ویژگی‌های صفر را می‌توان در همین شماره خواند.

در مقاله «مشاهیر ریاضی جهان» این شماره با پاره‌ای از ریاضی‌دان‌ها از جمله فرما، فیبوناتچی، فوریه و گالوا آشنا می‌شویم. یکی از این ریاضی‌دان‌ها گودل آلمانی است که در شرح حالش چنین می‌خوانیم:

کورت گودل^۱ (۱۹۰۶-۱۹۷۸) در سال ۱۹۳۱ مطلبی را منتشر کرد که بسیاری از امیدواری‌های منطق ریاضی جدید را بر باد داد. ریاضی‌دان‌ها در تلاش بودند تا نظریه حساب مقدماتی را بر مبنایی دقیق و صوری قرار دهند. یکی از شرایط لازم در مورد هر دستگاه صوری آن است که خود-سازگار و کامل باشد. گودل نشان داد که سازگاری حساب مقدماتی را نمی‌توان از داخل خود نظریه اثبات کرد و به این ترتیب، مفهوم اثبات‌ناپذیری را به‌عنوان مفهومی مهم که در علوم کامپیوتری جدید دارای اهمیت است به‌دست ما سپرد.

بعضی از مقاله‌های این شماره عبارت‌اند از:

رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f : احمد قندهاری

آموزش ترجمه متون ریاضی: حمیدرضا امیری

رادیکال: سید محمدرضا هاشمی موسوی

در اظهار نظر شتاب نکنیم: احمد شرف‌الدین

ریاضیات گسسته: غلامرضایاسی پور

تاریخچه مجلات ریاضی ایران: غلامرضایاسی پور

تجزیه چندجمله‌ای‌ها از طریق ریشه‌یابی: رضا پیکر

پیرامون منظومه شمسی: حسن نصیرنیا

مکان هندسی: محمدهاشم رستمی

نکته‌ای هندسی برای ساختن جوی‌ها: احمد شرف‌الدین

ناگفته نماند که این شماره با بهای ۲۰۰۰ ریال منتشر شد.

شماره نوزدهم مجله در زمستان ۱۳۷۵ با بهای ۲۰۰۰ ریال انتشار یافت.

مقاله «شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید» در این شماره

همچون شماره‌های پیشین خواندنی است. این مقاله به مفهوم حد و دقت نکردن

در کاربرد آن پرداخته و در آن به این موضوع اشاره شده است که: نخستین

کسی که از مقدارهای بسیار کوچک و حد مجموع آن‌ها استفاده کرد، ارشمیدس

بود. او با روش ابداعی خود توانست راهی برای محاسبه مساحت قطعه‌ای از سهمی

و همچنین محاسبه حجم سهموی (پارابولویید)، یعنی حجم جسمی که از

دوران یک سهمی دور محور خود به‌دست می‌آید، پیدا کند (امروزه، این محاسبه‌ها را

به یاری انتگرال‌گیری انجام می‌دهند. به همین مناسبت، ارشمیدس را باید پیشگام

در راه کشف محاسبه انتگرال دانست).

«تاریخچه مجلات ریاضی ایران»، این شماره نیز هم‌چنان در کار معرفی مقاله‌های

مجله یکان است که در آن مطلب مهم زیر را می‌خوانیم:

در نظر عموم مردم، ریاضی‌دان شخصی است که در حساب ورزیده

باشد، ولی خود ریاضی‌دانان این تعریف را قبول ندارند. ریاضی‌دانان

می‌گویند که خودشان به اندازه اشخاص دیگر در محاسبات روزانه و

در بررسی صورت حساب‌های بانکی خویش اشکال دارند و به داستان‌هایی که درباره ریاضی‌دانان معروف گفته

می‌شود، استناد می‌جویند. برای مثال، می‌گویند که نیوتن به هنگامی که رئیس ضرابخانه بود، شخصی را استخدام کرد تا محاسباتش را انجام دهد. اختراع و تکمیل خط‌کش‌های محاسبه و ماشین‌های حساب الکترونیکی نیز به‌منظور کمک به ریاضی‌دانان انجام گرفته است.

بدیهی است که مطالب فوق زیاد مستدل نیست. اگر ریاضی‌دانان را

کنار بگذاریم از چه کسانی اعداد فرد و زوج و مربع و سراسر را یاد

بگیریم؟ برای کسب اطلاع از اعداد فیبوناتچی و اعداد لیوویل و اعداد فوق

مختلط و اعداد لایتناهی به چه مقامی مراجعه کنیم؟ پس باید دانست که

ریاضیات، در حد اعلاى خود، همیشه به بازی با اعداد مربوط می‌شود.

برخف، دانشمند معروف آمریکا، بارها خاطر نشان می‌کرد که معماهای ساده

پدید آمده درباره اعداد صحیح در طی قرون متمادی، سرچشمه تجدید

حیات ریاضیات بوده است.

در **ادب ریاضی** این شماره به گفته‌ای از **لاپلاس** ۲۸ ساله خطاب به **دالامبر**

برمی‌خوریم که در آن چنین آمده است:

من همواره به اقتضای ذوق خویش به مطالعه در ریاضیات پرداخته‌ام، نه به

علت تمایل به شهرت‌های بی‌حاصل که اصلاً توجهی به آن‌ها ندارم.

بزرگ‌ترین تفریح من آن است که خط سیر مخترعان را تعقیب کنم و نبوغ

آنان را هنگام مواجهه یا موانع مشاهده کنم و موانعی را که آنان در سر راه

خویش دیدند و توانستند از آن‌ها بگذرند، در نظر آورم.

در چنین موردی سعی می‌کنم خویشتن را به جای ایشان قرار دهم و

این مسئله را مطرح کنم که در چنین مقامی من خود برای عبور از این موانع چه می‌کرده‌ام و با آن‌که در اغلب

ایرانیان نیز علامات محدودی برای نشان دادن اعداد به خط میخی به کار می‌بردند، ولی همه آن‌ها اعداد را دسته‌بندی کرده بودند، به گونه‌ای که نوشتن اعداد بزرگ با تکرار این علامات نشان داده می‌شد

موارد این جانشینی موجب توقف من می‌شود و برای من حسرت و خفت ایجاد می‌کند، ولی بر عزت نفس خود چیره می‌شوم و این مختصر خفت را با لذت استفاده از توفیق آنان با شایسته‌ترین وضع جبران می‌کنم. در موارد معدودی که اقبال با من یاری می‌کند و موفق می‌شوم که چیزی بر آثار آنان بیفزایم، همه لیاقت این توفیق را به اولین کوشش‌های آن‌ها نسبت می‌دهم و خویشتن را قانع می‌کنم که اگر آنان در وضع من قرار داشتند خیلی پیش‌تر از آن می‌رفتند که من رفته‌ام.

در مطلب «مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان» در مورد حدس گلدباخ به مطلب خواندنی زیر برمی‌خوریم: یکی از مشهورترین سؤال‌های بی‌پاسخ مربوط به اعداد اول، حدس گلدباخ است. کریستین گلدباخ در نامه‌ای به لئونهارد اویلر در سال ۱۷۴۲، حدس زد که هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ مجموع دو عدد اول است. برای نمونه:

$$4=2+2$$

$$6=3+3$$

$$8=3+5$$

$$10=5+5$$

$$12=5+7$$

تحقیقات کامپیوتری، حدس گلدباخ را به ازای جمیع اعداد زوج تا $100,000,000$ ثابت کرد، اما اثبات یا عدم اثبات کلی آن تاکنون مشخص نشده است.

مقاله «بی‌نهایت» استاد پرویز شهریاری چنین آغاز می‌شود:

«بی‌نهایت» به معنای ساده خود در ریاضیات، یعنی بزرگ‌تر از هر عددی، ولی خود بی‌نهایت، یک عدد نیست، بلکه یک مفهوم است و بیشتر معرف یک کیفیت است تا کمیتی

مشخص. به همین دلیل است که تا مدت‌ها، ریاضی‌دانان به چند و چون بی‌نهایت نمی‌پرداختند و از کنار آن می‌گذشتند. وقتی زنون، ریاضی‌دان یونانی، برای اثبات یکپارچگی جهان و نبودن حرکت در آن، با درکی ساده‌اندیشانه از «بی‌نهایت» استفاده کرد، هراس ریاضی‌دانان یونانی را از بی‌نهایت بیش‌تر کرد، زیرا می‌دیدند که با سوءاستفاده از آن، می‌توان حقیقت را وارونه جلوه داد.

تنها ریاضی‌دان دنیای کهن که برخلاف تفکر رایج زمان خود، بی‌نهایت را به مفهوم ریاضی آن (چه بی‌نهایت کوچک و چه بی‌نهایت بزرگ) بررسی کرد، ارشمیدس بود. ارشمیدس در نوشته‌های خود از روشی استفاده می‌کند که دو هزار سال بعد از او به کشف محاسبه انتگرالی منتهی شد. ساده‌ترین کاربرد این روش را در رساله «درباره اندازه‌گیری دایره» می‌بینیم. ارشمیدس در این رساله برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات، مسئله اندازه‌گیری طول محیط دایره و تعیین مقدار تقریبی عدد پی (π) را مطرح می‌کند و در ضمن، میزان خطای موجود را در هر مرحله از محاسبه به دست می‌دهد.

در مقاله «در حاشیه تابع و مفهوم تابع» از حمیدرضا امیری به این موضوع می‌رسیم که:

در شاخه‌های مختلف ریاضیات برای معرفی تابع و تعریف آن شیوه‌های مختلفی به کار می‌رود که البته همگی معنای واحدی دارند و فقط نوع گفتار یا ابزارهای معرفی تابع فرق می‌کند، اما مهم این است که مفهوم تابع با مفهوم مجموعه‌ها، همواره درهم آمیخته، به طوری که حتی می‌توان برای شروع، تابع را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تعریف کرد که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر یافت نشود.

بعضی از مقاله‌های دیگر این شماره عبارت‌اند از:

مکان هندسی:

محمدهاشم رستمی

آموزش ترجمه متون ریاضی:

حمیدرضا امیری

حل یک مسئله آنالیز با هندسه: دکتر

احمد شرف‌الدین

رادیکال: سید محمد رضا هاشمی موسوی

ماکزیمم و می‌نیمم: امیرمنصور

خان محمد و مجید اعتماد سعید

دسته خط: سیامک جعفری

ریاضیات گسسته: غلامرضا یاسی پور

شماره بیستم این مجله در بهار ۱۳۷۶ با همان بهای ۲۰۰۰ ریال انتشار یافت.

در اولین مقاله این شماره که طبق معمول از استاد شهریاری با عنوان «شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید» است در سرفصل «نقش شکل در مسئله‌های هندسه فضایی» چنین می‌خوانیم:

اگر در هندسه روی صفحه باید مراقبت کرد تا شکل درست و دقیق رسم شود و سپس با استدلال و با پیدا کردن رابطه‌های موجود بین عنصرهای شکل (زاویه‌ها و پاره‌خط‌های راست و غیره) درستی آن را تأکید کرد، در هندسه فضایی، اغلب خود رسم شکل، دشواری به وجود می‌آورد و پیدا کردن رابطه‌هایی که ممکن است بین عنصرهای شکل وجود داشته باشد، چندان ساده نیست. رسم برخی جسم‌های فضایی، مثل مکعب مستطیل، هرم یا منشور با قاعده سه ضلعی یا چهارضلعی چندان دشوار نیست، ولی رسم جسم‌هایی مثل هرمی با قاعده هفت ضلعی یا پیدا کردن شکلی که از برخورد یک صفحه با جسم فضایی یا دو جسم فضایی به دست می‌آید یا تلاش برای یافتن سایه

یک جسم (یعنی تصویر مرکزی آن)، گاهی بسیار دشوار خواهد بود. گذشته از رسم شکل، جستوجوی رابطه‌های لازم بین عنصرهای جسم هم، اغلب سردرگمی به وجود می‌آورد.

در مقاله «تاریخچه مجلات
ریاضی ایران» این شماره که هم‌چنان
در کار بررسی مجله یکان است، به
مناسبت سالروز انتشار یکان به این آگهی
برمی‌خوریم:

«اولین شماره مجلهٔ یکان در بهمن‌ماه دو سال قبل تقدیم علاقه‌مندان شد.» استقبالی که از این مجلهٔ صد درصد علمی به عمل آمد، این امکان را برایش فراهم ساخت تا قائم بالذات به حیات عملی خویش ادامه دهد و اتکای وی فقط به خوانندگان و علاقه‌مندان خویش باشد. کوشش‌هایی که تاکنون به عمل آمده، تنها در راه بهبود وضع مجله در جهت مطلوب آن و در جهت تمایلات خوانندگان آن انجام گرفته و غیر از آن، حتی برای شناساندن مجله به مقامات ذی‌نفوذ، کوچک‌ترین اقدامی به‌عمل نیامده، مگر آنچه آیین‌نامه و قانون مطبوعات ایجاب می‌کرده است.

باز در همین مقاله و با عنوان
«بی آن که عصبانی شوید این مسئله را
حل کنید» به این معما می‌رسیم:

سه نفر از دانایان یونان قدیم در باغ آکادمی استراحت می کردند و به خواب رفته بودند. رجاله‌ای که گذارش به آن‌جا افتاده بود، پیشانی هر یک از آن‌ها را با دوده سیاه کرد، بعد در اثر صدایی که از ناحیه‌ای برخاست، هر سه نفر از دانایان بیدار شدند و هر یک از دیدن پیشانی دو نفر دیگر، شروع به خنده کردند. اما بعد از لحظه‌ای، هر سه نفر از خنده باز ایستادند، زیرا هر یک دریافته بودند که پیشانی خود آن‌ها نیز سیاه است. به چه دلیل

منطقی؟

در ادب ریاضی این شماره، از قول
داوید هیلبرت، ریاضی‌دان بزرگ آلمانی،
چنین آمده است:

مشهور است که زرگر متقلبی که بنا بود تاجی از طلا برای **هیرون** بسازد، مقداری نقره در آن وارد کرده بود و پادشاه که تقلب صنعتگر را حدس زده بود، **ارشمیدس** را خواست که دربارهٔ حل این مسئله راه چاره‌ای بیابد.

امروزه هر محصل مدرسه متوسطه می‌داند که چگونه می‌تواند با تجربه‌ای ساده و با حساب مختصری دربارهٔ وزن مخصوص‌ها این مسئله را حل کند و نیز همهٔ مبتدیان جوان و مهندسان بحرپیمایی و کشتی‌سازی موارد کاربرد بی‌شمار قانونی را که به اصل ارشمیدس معروف است، می‌دانند. اما مردی که برای اولین بار توانست از تجربه‌ای عادی چنین قانونی را نتیجه بگیرد، در مقامی مافوق مشاهده‌کنندگان عادی قرار داشته است.

از این نکته اطلاعی نداریم که بالاخره زرگر را مقصر شناختند یا نه، اما با استناد به این افسانه، معمولاً به این سؤال پاسخ داده می‌شود.

در مقاله «مشاهیر ریاضی جهان»
این شماره به شرح حال لاگرانژ، ریاضی دان
فرانسوی می‌خوریم.

این شرح حال مختصر به صورت زیر است:

ژوزف لویی لاگرانژ^۲ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) و **اویلر**، شاید بزرگ‌ترین ریاضی‌دان‌های قرن هجدهم باشند. گرچه لاگرانژ در تورین تولد یافت و بخش آغازین حیات خود را در آن‌جا گذراند، اما سرانجام در پاریس اقامت گزید و معمولاً ملیت او را فرانسوی می‌دانند، اما ممکن است ایتالیایی‌ها این را عادلانه تصور نکنند. غالب کارهای مهمش در برلین، که در آکادمی آن جانشین اویلر بود، انجام گرفت. آثارش، همراه با آثار مهم‌ترین ریاضی‌دان‌های آن زمان، همهٔ مسائل ریاضیات را در بر می‌گیرد. شاید بیشتر به

عنوان پیشرو در توسعه مکانیک نظری مشهور باشد، به‌ویژه که عهددار روش‌های حساب تغییرات و روش لاگرانژی حاصل از آن در مکانیک است. در نظریهٔ ماکسیمم-می‌نیمم معمولی، باید مقدار X را که مثلاً مقدار $F(x)$ را می‌نیمم می‌کند، به‌دست آوریم. در صورت مبنایی حساب تغییرات، باید مسئلهٔ بسیار مشکل‌تر به دست آوردن تابع f ی را حل کنیم که مقدار انتگرالی چون
$$\int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx$$
 را می‌نیمم می‌کند. یکی از مسائل مشهور این موضوع مسئلهٔ یافتن منحنی و اصل دو نقطهٔ مفروض در صفحهٔ قائمی است که ذرهٔ لغزنده در امتداد آن تحت نیروی ثقل، کمترین زمان را برای رسیدن از نقطهٔ بالایی به نقطهٔ پایینی بگیرد.

پاره‌ای از مطالب این شماره به ترتیب
زیرند:

تغییرات و انتقال منحنی‌ها: احمد قندهاری

آموزش ترجمه متون ریاضی:
محمدصادق عسکری

رادیكال: سيد محمد رضا هاشمي موسوي
اصل رد و شمول: امير منصور خان محمد،
امير فرزاد

ریاضیات گسسته: غلامرضا یاسی پور
سرگرمی برای اندیشه ورزی: حسن
نصیرنیا

مکان هندسی: محمد هاشم رستمی
یک خاصیت مثلث قائم الزاویه و کاربرد

آن در صنعت: دکتر احمد شرف‌الدین
بررسی وضع دو دایره نسبت به هم:

محمد هاشم رستمی
محاسبه مساحت دایره: سید
محمد رضا هاشمی موسوی

پی نوشت.....

1. Kurt Godel

2. Joseph Louis

Lagrange

توپولوژی

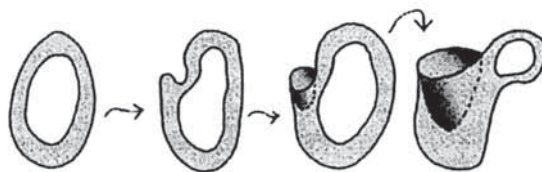
رضا تهرانی

آموزش

کلیدواژه‌ها:

توپولوژی، کیفیات
شکل‌ها، طول،
سطح، زاویه، هندسه
صفحه لاستیکی،
چندوجهی‌ها،
چندوجهی منتظم،
اجسام ارشمیدسی،
فرمول اویلر، رویه
یک‌طرفه، فضای
سه بعدی، منیفلد،
حدس پوانکاره.

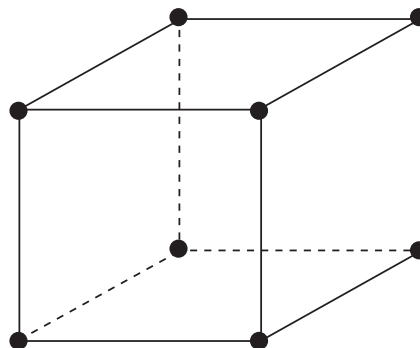
توپولوژی، شاخه‌ای از هندسه است که با ویژگی‌های سطوح و اشکال عمومی سروکار دارد، اما به اندازه‌گیری طول‌ها یا زوایا نمی‌پردازد. در این مسیر، مهم کیفیاتی هستند که هنگام انتقال شکل‌هایمان به شکل‌های دیگر بی‌تغییر می‌مانند. در این مورد مجازیم که شکل را در هر جهت فشار دهیم و بکشیم؛ و به همین دلیل است که توپولوژی را گاهی به عنوان «هندسه صفحه لاستیکی»^۱ توصیف می‌کنند. توپولوژیست‌ها افرادی هستند که نمی‌توانند تفاوت بین یک شیرینی حلقه‌ای (دونات) و یک فنجان قهوه را بیان کنند!



دونات یا شیرینی حلقه‌ای، رویه‌ای است با سوراخی در آن. فنجان قهوه هم همان است که در آن سوراخ مورد بحث، شکل دسته را اختیار می‌کند. در شکل موردنظر، چگونگی انتقال دونات به فنجان قهوه آورده شده است.

دسته‌بندی چندوجهی‌ها

اساسی‌ترین شکل‌هایی که توپولوژیست‌ها آن‌ها را



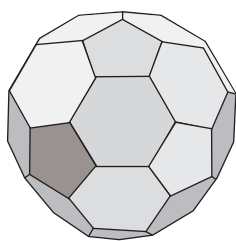
بررسی کرده‌اند چندوجهی‌ها هستند. (poly به معنای «بسیار» و hedra به معنای «وجه‌ها» یا «رویه‌ها»). مثالی از چندوجهی‌ها مکعب است با ۶ وجه^۲ مربع، ۸ رأس^۳ (نقاط واقع در اتصال وجوه) و ۱۲ یال^۴ (خط‌های وصل‌کننده رأس‌ها). مکعب، یک چندوجهی منتظم^۵ است، زیرا در آن:

- همه وجه‌ها، شکل‌های منتظم یکسان‌اند؛
- همه زوایای بین یال‌های برخوردکننده در یک رأس، برابرند.

توپولوژی موضوعی نسبتاً جدید است، اما با این همه می‌توان رد آن را تا یونانیان دنبال کرد و در واقع دست‌آورد نهایی در مقدمات^۶ اقلیدس، نشان دادن این است که دقیقاً پنج چندوجهی منتظم موجود است. این چندوجهی‌ها، اجسام افلاطونی^۸ هستند:

- چهاروجهی^۹ (با ۴ وجه مثلث‌شکل)؛
- مکعب^{۱۰} (با ۶ وجه مربع)؛
- هشتوجهی^{۱۱} (با ۸ وجه مثلث‌شکل)؛
- دوازدهوجهی^{۱۲} (با ۱۲ وجه پنج ضلعی)؛
- بیستوجهی^{۱۳} (با ۲۰ وجه مثلث‌شکل)

در صورتی که یکسان بودن وجه‌ها را حذف کنیم، در قلمرو اجسام ارشمیدسی^{۱۴} خواهیم بود که نیمه - منتظم^{۱۵}‌اند. در این مورد مثال‌ها را می‌توان از اجسام افلاطونی به دست آورد. اگر گوشه‌هایی از یک بیستوجهی را ببریم (ناقص کنیم)، شکلی به دست می‌آوریم که در



بیست وجهی ناقص

طرح توپ فوتبال مدرن به کار رفته است. در این صورت، ۳۲ وجهی که قاب‌ها^{۱۶} را می‌سازند از ۱۲ پنج ضلعی و ۲۰ شش ضلعی ساخته شده‌اند. در این مورد ۹۰ یال و ۶۰ رأس موجود است. شکل مذکور، شکل مولکول‌های باکمینستر فولرین^{۱۷} نیز

هست که به نام ریچارد باکمینستر فولر^{۱۸} خیال پرور، خالق گنبد ژئودزیک^{۱۹} نام‌گذاری شده است. این «توپ‌های باکی»^{۲۰} صورت تازه کشف‌شده کربن (C_{۶۰}) با یک اتم کربن یافت شده در هر رأس است.

فرمول اویلر

فرمول اویلر^{۲۱} این است که تعداد رأس‌های V، یال‌های E و وجه‌های F یک چندوجهی طبق رابطه زیر را به هم مرتبط‌اند:

$$V - E + F = 2$$

برای مثال در مورد مکعب، $V=8$ ، $E=12$ و $F=6$ بنابراین خواهیم داشت:

$$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$$

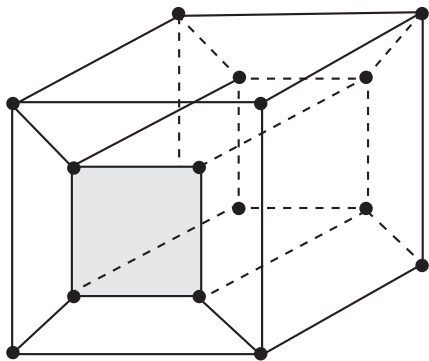
و در مورد باکمینستر فولرین داریم:

$$V - E + F = 60 - 90 + 32 = 2$$

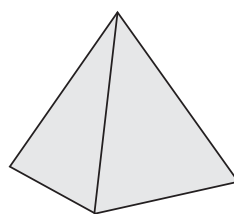
این قضیه عملاً خود مفهوم چندوجهی را زیر سؤال می‌برد.

آیا در صورتی که مکعبی، «تونلی» در میان خود داشته باشد، چند وجهی واقعی است؟ در مورد این شکل، $V=16$ ، $E=32$ و $F=16$ است و داریم:

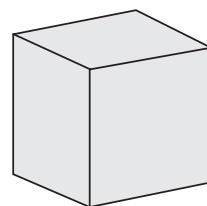
$$V - E + F = 16 - 32 + 16 = 0$$



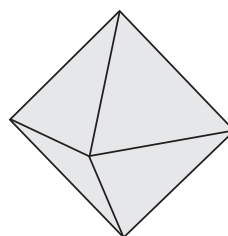
مکعبی با یک تونل



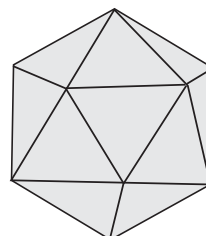
چهار وجهی



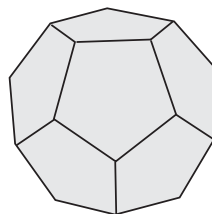
مکعب



هشت وجهی



بیست وجهی



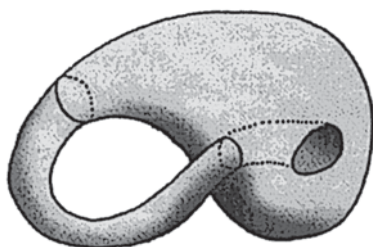
دوازده وجهی

ریاضی‌دان و منجم آلمانی در قرن نوزدهم کشف کرد. برای ساختن چنین رویه‌ای، نوار کاغذی برمی‌داریم، یک پیچ به آن می‌دهیم، سپس سرهای آن را به هم می‌چسبانیم. نتیجه نوار موبیوس^{۲۴} یعنی، رویه‌ای یک‌طرفه با یک خم مرزی است. اکنون می‌توان مدادی برداشت و شروع به کشیدن خطی در وسط آن کرد. در این صورت طولی نمی‌کشد که به نقطه آغاز برمی‌گردد.



نوار موبیوس

حتی داشتن رویه یک‌طرفه‌ای که خم مرزی نداشته باشد امکان‌پذیر است. به این رویه «بطری کلاین»^{۲۵} می‌گویند که به نام فلیکس کلاین^{۲۶} ریاضی‌دان آلمانی نام‌گذاری شده است. نکته جالب در مورد این بطری آن است که خود را قطع نمی‌کند، گرچه ساختن مدلی از بطری کلاین در فضای سه‌بعدی بدون قطع فیزیکی امکان‌پذیر نیست، زیرا این بطری دقیقاً در فضایی چهاربعدی زندگی می‌کند، جایی که در آن تقاطعی نخواهد داشت.



بطری کلاین

هر دوی این رویه‌ها، مثال‌هایی از شکلی است که توپولوژیست‌ها آن را منیفولد یا خمینه^{۲۷} می‌نامند؛ یعنی رویه‌های هندسی که اگر بخش‌های کوچک توسط خودشان در نظر گرفته شوند، مانند تکه‌هایی از کاغذ دوبعدی به نظر می‌آیند. چون بطری کلاین بی‌مرز است به ۲- منیفولد «بسته» موسوم است.

یعنی فرمول اویلر از کار می‌افتد. در این صورت، برای اصلاح صحت فرمول مزبور، نوع چندوجهی را باید محدود به موارد بدون تونل کرد، یا به طریق دیگر، فرمول را می‌توان برای دربرگرفتن این حالت خاص تعمیم داد.

دسته‌بندی رویه‌ها

گرچه توپولوژیست می‌تواند دونات و فنجان قهوه را یکسان در نظر بگیرد، اما چه نوع رویه‌ای متفاوت از دونات است؟ در این مورد، یک کاندیدا توپ لاستیکی است. یعنی هیچ طریقی برای تبدیل دونات به توپ موجود نیست، زیرا دونات یک سوراخ دارد، در حالی که توپ ندارد. این تفاوت، تفاوتی اساسی بین دو رویه است. بنابراین، یک طریق دسته‌بندی رویه‌ها، استفاده از سوراخ‌های آن‌هاست. بگذارید رویه‌ای با r سوراخ را در نظر بگیریم و آن را به نواحی محصور با یال‌های وصل‌کننده رئوس نصب‌شده به یکدیگر در آن رویه تقسیم کنیم. زمانی که این کار انجام گرفت، می‌توان تعداد رئوس، یال‌ها و وجه‌ها را شمرد. در این صورت، به ازای هر تقسیم، عبارت اویلر، یعنی $V-E+F$ همواره دارای مقدار یکسانی است که مشخصه اویلر^{۲۸} آن رویه نامیده می‌شود:

$$V-E+F=2r-r$$

اگر رویه بدون سوراخ باشد (یعنی $r=0$)، همان‌گونه که در حالت چندوجهی‌های معمولی بود، فرمول مورد بحث به فرمول اویلر، یعنی $V-E+F=2$ تبدیل می‌شود. در حالت یک سوراخ (یعنی $r=1$)، مکعب با یک تونل خواهیم داشت که در آن فرمول زیر برقرار است:

$$V-E+F=0$$

رویه‌های یک‌طرفه

یک رویه به‌طور معمول، دارای دو طرف است. بیرون یک توپ با درون آن تفاوت دارد و تنها راه عبور از یک طرف به طرف دیگر، سوراخ کردن توپ است؛ عمل برشی که در توپولوژی مجاز نیست (می‌توانیم گسترش یا کش دهیم اما نمی‌توانیم ببریم). یک تکه کاغذ، مثال دیگری از یک رویه با دو طرف است، زیرا تنها مکانی که در آن یک طرف با طرف دیگر برخورد می‌کند، در امتداد خم محصورکننده‌ای است که از لبه‌های کاغذ ساخته شده است.

ایده رویه یک‌طرفه دور از ذهن به نظر می‌رسید. با وجود این، مورد مشهوری از آن را آگوست موبیوس^{۲۹}،

حدس پوانکاره

برای بیش از یک قرن، یکی از مسائل مهم توپولوژی، حدس مشهور پوانکاره^{۲۸} بود که به نام خود او نام گذاری شده است. حدس مزبور متمرکز بر ارتباط بین جبر و توپولوژی است.

آن قسمت از حدس مورد بحث که تا چندی پیش حل نشده باقی مانده بود، در مورد ۳- منیفلدهای بسته است. این منیفلدها می توانند پیچیده باشند. بطری کلاینی را با بعدی اضافه تصور کنید. پوانکاره این حدس را زد که ۳- منیفلدهای بسته معینی که تمام مشخصات جبری کره سه بعدی را دارند، عملاً باید کره باشند. این ماجرا مانند این است که آدمی حول یک توپ عظیم قدم بزند و تمام سرنخه‌هایی که در دست دارد مقرر کنند که توپ مزبور

کره است، اما از آن جا که نمی‌تواند شکل بزرگ مزبور را مشاهده کرد، سرگردان بماند که آیا این شیء واقعاً کره است؟!

هیچ کس نتوانست حدس پوانکاره را در مورد ۳- منیفلدها به اثبات برساند. این حدس، راست است یا دروغ؟ حدس مورد بحث به ازای جمیع بُدهای دیگر به اثبات رسیده، اما حالت ۳- منیفلدی هم چنان سر سخت است. در این مورد، اثبات‌های خطای بسیاری موجود بود، تا این که در سال ۲۰۰۲ گریگوری پرلمان^{۲۹} از انستیتوی استکلوف^{۳۰} در سن پترزبورگ، آن را ثابت کرد. روش‌های حل حدس پوانکاره، مانند حل مسائل بزرگ دیگر ریاضیات، در خارج از حوزه بی‌واسطه خود، یعنی در تکنیکی مرتبط با انتشار حرارت، قرار دارد.

پی‌نوشت

1. rubber sheet geometry
2. Polyhedra
3. face
4. vertex
5. edge
6. regular
7. Elements
8. Platonic solids
9. tetrahedron
10. cube
11. octahedron
12. dodecahedron
13. icosahedron
14. Archimedean solids
15. semi-regular
16. panels
17. buckminsterfullerene
18. Richard Buckminster Fuller
19. geodesic dome
20. bucky balls
21. Euler's formula
22. Euler characteristic
23. August Möbius
24. Möbius strip
25. Klein bottle
26. Felix Klein
27. manifold
28. Poincaré
29. Grigori Perel
30. Steklov Instit
31. Listing
32. Stephen Smal
33. Michael Freedman

حدود ۳۰۰ قبل از میلاد: اقلیدس نشان داد که پنج چندوجهی منتظم موجود است.
حدود ۲۵۰ قبل از میلاد: ارشمیدس چندوجهی‌های ناقص را بررسی کرد.
۱۷۵۲ میلادی: اوایلر فرمول خود را درباره تعداد رأس‌ها، یال‌ها و وجه‌های یک چندوجهی به دست داد.
۱۸۵۸ میلادی: موبیوس و لیستینگ^{۳۱}، نوار موبیوس را معرفی کردند.
۱۹۶۱ میلادی: استفن اسمیل^{۳۲} حدس پوانکاره را در بُدهای بزرگ‌تر از ۴ به اثبات رساند.
۱۹۸۲ میلادی: مایکل فریدمن^{۳۳} حدس پوانکاره را در بعد برابر ۴ اثبات کرد.
۲۰۰۲ میلادی: پرلمان حدس پوانکاره را در مورد بُعد ۳ به اثبات رساند.

چند تاریخچه

معادله های
کلاسیک

معادله کلاسیک نوع سوم

احمد قندهاری

کلیدواژه ها:

معادله کلاسیک

نوع سوم، معادله

کلاسیک نوع چهارم.

این معادله به صورت زیر است:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d$$

روش اول حل معادله

اگر $a \neq d$ ، دو طرف تساوی معادله را بر $\cos^2 x \neq 0$ تقسیم می کنیم و به جای $\frac{1}{\cos^2 x}$ مساوی اش $(1 + \tan^2 x)$

را قرار می دهیم.

چنانچه $a = d$ ، آن گاه دو طرف تساوی معادله را بر $\sin^2 x \neq 0$ تقسیم می کنیم و به جای $\frac{1}{\sin^2 x}$ مساوی اش $(1 + \cot^2 x)$ را قرار می دهیم.برای ادامه کار فرض می کنیم، $a \neq d$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + c = \frac{d}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow a \tan^2 x + b \tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

$$\Rightarrow a \tan^2 x + b \tan x + c = d + d \tan^2 x$$

$$\Rightarrow (a - d) \tan^2 x + b \tan x + (c - d) = 0$$

شرط وجود جواب در معادله کلاسیک نوع سوم

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow b^2 - 4(a - d)(c - d) \geq 0$$

مثال ۱:

$$\text{معادله } 2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 5 \text{ را}$$

حل کنید و جواب های کلی آن را بیابید.

حل: در این معادله $a = 2$ و $d = 5$ ، پس $a \neq d$. لذا دوطرف تساوی معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم می کنیم:

$$\frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + 5 = \frac{5}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x - \sqrt{3} \tan x + 5 = 5(1 + \tan^2 x)$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x - \sqrt{3} \tan x + 5 = 5 + 5 \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 x + \sqrt{3} \tan x = 0 \Rightarrow \tan x (3 \tan x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{الف) } \tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ب) } 3 \tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\tan \frac{\pi}{6}$$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$



الف) $\cot x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

ب) $\cot x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cot x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

مثال ۳:

به ازای چه مقادیر m ، معادله زیر دارای جواب است؟

$$3 \sin^2 x + (m-1) \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 1$$

حل: این مثال معادله کلاسیک نوع سوم است و وقتی

جواب دارد که:

$$a = 3, b^2 - 4(a-d)(c-d) \geq 0$$

$$b = (m-1), c = 2, d = 1 \text{ است.}$$

$$b^2 - 4(a-d)(c-d) \geq 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(3-1)(2-1) \geq 0$$

$$(m-1)^2 - 8 \geq 0 \Rightarrow (m-1)^2 \geq 8$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

مثال ۲:

معادله $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 2$ را

حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: $a = 2$ و $d = 2$ ، پس $a = d$ ، در نتیجه، دو طرف

تساوی معادله را بر $\sin^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2 \sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sqrt{3} \sin x \cos x}{\sin^2 x} + \frac{3 \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} \cot x + 3 \cot^2 x = 2(1 + \cot^2 x)$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} \cot x + 3 \cot^2 x = 2 + 2 \cot^2 x$$

$$\Rightarrow \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 0 \Rightarrow \cot x (\cot x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2x = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{6} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\sin(\underbrace{2x - \frac{\pi}{3}}_x) = \sin(\underbrace{-\frac{\pi}{6}}_\alpha)$$

$$\text{الف) } x = 2k\pi + \alpha \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ب) } x = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

چند نکته

(۱) داریم:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

اثبات:

$$\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x)$$

$$= \cos x + \sin x \quad \blacktriangle$$

$$\sin x \cdot \cos x = \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}$$

(۲) داریم:

.....

اثبات: در نکته (۱) داشتیم:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1) \geq 2\sqrt{2} \\ \text{یا} \\ (m-1) \leq -2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 1+2\sqrt{2} \\ \text{یا} \\ m \leq 1-2\sqrt{2} \end{cases}$$

روش دوم حل معادله کلاسیک نوع سوم

در این روش از سه فرمول $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم، پس از جای گذاری و ساده کردن، معادله کلاسیک نوع سوم به معادله کلاسیک نوع اول تبدیل می‌شود که با راه‌حل‌های معادله کلاسیک نوع اول حل خواهد شد.

مثال ۴:

$$\text{معادله } (\sqrt{3}+1)\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: از سه فرمول گفته شده در درس استفاده

می‌کنیم:

$$(\sqrt{3}+1) \times \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$(\sqrt{3}+1)(1-\cos 2x) + \sin 2x + 1 + \cos 2x = \sqrt{3}+1$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2x + 1 - \cos 2x + \sin 2x + 1 + \cos 2x = \sqrt{3}+1$$

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1$$

این معادله، کلاسیک نوع اول است.

$$\sin 2x - \tan \frac{\pi}{3} \cos 2x = -1$$

$$\sin 2x - \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos 2x = -1$$



برگ اشتراک مجله‌های رشد

نحوه اشتراک:

شما می‌توانید پس از واريز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سمراه آزمايش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد: نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگه‌دارید).

نام مجلات درخواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان: شهرستان: خیابان:

شماره فیش: مبلغ پرداختی:

پلاک: شماره پستی:

در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شماره اشتراک خود را ذکر کنید:

امضا:

نشانی: تهران، سنبله پستی: ۱۵۹۵/۱۱۱

وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir

اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶/۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۹۱۲۱۴

هزینه اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۹۰۰۰ ریال
هزینه اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۶۰۰۰۰ ریال

را به توان ۲ می‌رسانیم:

اثبات: در نکته (۲) داشتیم:

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x} + 2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \quad \blacktriangle$$

$$\boxed{\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (3)$$

اثبات:

$$\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right)$$

$$= \sin x - \cos x \quad \blacktriangle$$

$$\boxed{\sin x \cos x = \frac{1}{2} - \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (4)$$

معادله کلاسیک نوع چهارم

این معادله به دو شکل زیر است:

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c \quad (\text{الف})$$

$$a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x = c \quad (\text{ب})$$

راه حل معادله (الف)

با توجه به نکات (۱) و (۲) به جای $(\sin x + \cos x)$

مساوی اش $\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ و به جای $\sin x \cos x$

مساوی اش $\cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم و معادله



دفتر انتشارات کمک آموزشی

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش آموزی

(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

رشد کودک

رشد کودک (برای دانش آموزان ابتدایی و پایه اول دوره دبستان)

رشد نوجوان

رشد نوجوان (برای دانش آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره دبستان)

رشد دانش آموز

رشد دانش آموز (برای دانش آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره دبستان)

رشد نوجوان

رشد نوجوان (برای دانش آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)

رشد جوان

رشد جوان (برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه و پیش دانشگاهی)

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

رشد آموزش ابتدایی • رشد آموزش راهنمایی تحصیلی • رشد تکنولوژی آموزشی • رشد مدرسه فردا • رشد مدیریت مدرسه • رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش آموزی اختصاصی

(به صورت فصلنامه و ۴ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

رشد برهان راهنمایی (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی) • رشد برهان متوسطه (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه) • رشد آموزش قرآن • رشد آموزش معارف اسلامی • رشد آموزش زبان و ادب فارسی • رشد آموزش هنر • رشد مشاوره مدرسه • رشد آموزش تربیت بدنی • رشد آموزش علوم اجتماعی • رشد آموزش تاریخ • رشد آموزش جغرافیا • رشد آموزش زبان • رشد آموزش ریاضی • رشد آموزش فیزیک • رشد آموزش شیمی • رشد آموزش زیست‌شناسی • رشد آموزش زمین‌شناسی • رشد آموزش فنی و حرفه‌ای • رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و اختصاصی برای آموزگاران، معلمان، مدیران و کارکنان اداری مدارس. دانش‌جویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ - ۲۱۰

حاصل را حل می‌کنیم.

مثال: معادله $2(\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cdot \cos x = -1$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

حل:

$$\sin x \cdot \cos x = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2}$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \text{ و}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 1 = -1$$

$$2\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left[\sqrt{2} + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] = 0$$

$$\text{الف) } \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ب) } \sqrt{2} + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2}$$

حل معادله (ب): با توجه به نکات (۳) و (۴) به جای

$$(\sin x - \cos x) \text{ مساوی‌اش } \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \text{ و به جای}$$

$$\sin x \cdot \cos x \text{ مساوی‌اش } \frac{1}{2} - \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \text{ را قرار می‌دهیم}$$

و معادله حاصل را حل می‌کنیم.

مثال: معادله $\sqrt{3}(\sin x - \cos x) + 2 \sin x \cdot \cos x = 1$ را حل

کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 1 - 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left[\sqrt{6} - 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] = 0$$

$$\text{الف) } \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ب) } \sqrt{6} - 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1 \text{ غیر ممکن}$$