

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

شاهد

متوسطه

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



دوره‌ی نوزدهم / شماره‌ی ۴ / تابستان ۱۳۸۹

♦ مدیر مسئول: محمد ناصری ♦ سردبیر: حمیدرضا امیری
♦ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ♦ طراح گرافیک: شاهرخ خرده‌غالی
♦ هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی،
احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمد رضا
هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی پور و با تشکر از همکاری
ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ♦ ویراستار ادبی: کبری محمودی

♦ پایگاه اینترنتی: www.roshd mag.ir

♦ رایانامه: Borhanm@roshdmag.ir

♦ پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

♦ تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲

♦ تلفن امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۵-۷۷۳۳۶۶۵۵

♦ شمارگان: ۸۰۰۰ نسخه

♦ چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

- حرف اول ۲
- ریاضی دان و شاعر خطه‌ی خراسان ۳
سردبیر
حسن نصیرنیا
- اتحادها و تجزیه ۸
احمد قندهاری
- مسابقه‌ی طراحی با رابطه‌های ریاضی ۱۲
فرزاد حمزه‌پور
- تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران ۱۶
غلامرضا یاسی پور
- ریشه‌ی خارجی معادله ۱۹
عنایت‌الله راستی‌زاده
- رویکرد هندسی و جبری - مختصاتی در آموزش هندسه (۱۱) ۲۳
محمد هاشم رستمی
- المپیاد ریاضی در کشور انگلستان سال ۱۹۹۹ ۲۹
هوشنگ شرقی
- بی‌نهایت ۳۴
غلامرضا یاسی پور
- رشد و زوال ۳۸
میرشهرام صدر
- نظریه‌ی مجموعه‌های فازی (۸) ۴۱
دکتر محمدعلی فریبرزری عراقی
- مختصات قطبی و رسم نمودارها ۴۴
صدیقه بابایی
- بخش پذیری ۴۸
احمد قندهاری
- معرفی سایت‌های ریاضی جهان ۵۳
احسان یارمحمدی
- تئوری پروانه ۵۴
روزبه یوسف‌نژاد
- اتحادی دیگر ۵۵
فرهاد جعفری یقین
- با راهبان المپیادهای ریاضی (۱۷) ۵۶
غلامرضا یاسی پور
- هم‌نهستی و کاربردهای آن (۱۰) ۵۹
سید محمد رضا هاشمی موسوی

شاهد متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- ♦ نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- ♦ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- ♦ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- ♦ طرح معماهای ریاضی
- ♦ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

شاهد متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجله در حکم، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

مقاله‌های وارده، نباید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

ریاضیات کاربردی - ریاضیات محض

ریاضیات در دوره‌های متفاوت تاریخی، به دلیل ویژگی‌های تمدنی و اجتماعی هر دوره، همواره تحت تأثیر دو عامل قرار داشته و پیشرفت کرده است: یکی عامل درونی که همان زیبایی‌ها و ویژگی‌های خاص و جذاب ریاضیات است و حس کنجکاوی بشر را پاسخ گو بوده و هست، و دیگری عامل بیرونی که همان احتیاجات و کاربردهای آن در زندگی روزمره و علوم دیگر است.

در دوره‌ای که هم‌اکنون در آن به سر می‌بریم، گرچه هر دو عامل باعث دگرگونی و پیشرفت در ریاضیات بوده‌اند، اما شاید بتوان گفت کاربرد ریاضیات در علوم و دانش‌های دیگر، هم‌چون فیزیک و مکانیک، شیمی، زیست‌شناسی، اقتصاد و... بیشتر باعث رشد و تنوع در پیدایش شاخه‌های متفاوت ریاضیات شده است که در این فرصت به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنم.

«کاربردهای ریاضیات، بی‌اندازه زیاد و بسیار گوناگون است. در واقع به کار بردن روش‌های ریاضی مرزی نمی‌شناسد. همه‌ی شکل‌های متنوع حرکت ماده را می‌توان با روش ریاضی بررسی کرد. البته، نقش و اهمیت روش ریاضی در حالت‌های گوناگون، متفاوت است. هیچ طرح معین ریاضی نمی‌تواند از عهده‌ی بیان همه‌ی ویژگی‌های پدیده‌های حقیقی برآید. وقتی می‌خواهیم پدیده‌ای را بررسی کنیم، شکل خاصی از آن را در معرض تحلیل منطقی قرار می‌دهیم. در ضمن تلاش می‌کنیم نقطه‌هایی را بیابیم که در این شکل جدا شده از پدیده‌ی واقعی وجود ندارد و شکل‌های تازه‌ای پیدا کنیم که بیشتر و کامل‌تر، دربرگیرنده‌ی پدیده‌ی ما باشد.»^۱ مکانیک آسمانی، به‌خصوص مطالعه روی حرکت سیاره‌ها و کهکشان‌ها، نمونه‌ی موفقی از کاربرد روش‌های ریاضیات است. هم‌چنین، قانون جاذبه‌ی عمومی مدلی ریاضی است برای بیان یک پدیده‌ی طبیعی که به خوبی آن را تشریح می‌کند و توضیح می‌دهد. کاربردهای ریاضی در فیزیک در حدی پیشرفته و فراگیر است که اگر فقط مفهوم مشتق را از ریاضی حذف کنیم، از ابتدایی‌ترین معادلات در فیزیک و مکانیک که همان معادله‌ی حرکت باشد به بعد، چیزی باقی نمی‌ماند!

از نظریه‌ی احتمال، در بررسی جابه‌جایی تصادفی و میکروسکوپی ذره‌ها، تحت تأثیر مولکول‌های ماده‌ی حلال استفاده می‌شود و چون تعداد ذره‌های در حال انتشار بسیار زیاد است، قوانین توزیع احتمال ما را به سمت کشف یک قانون معین و غیرتصادفی برای مواد قابل انتشار سوق می‌دهد.

هم‌چنین در دانش زیست‌شناسی، روش‌های ریاضی توانسته‌اند در علم ژنتیک نقش مهم و به‌سزایی را ایفا کنند و نیز در علوم اجتماعی و انسانی، نقش آمار ریاضی غیرقابل انکار و چشم‌پوشی است. امروزه، توسط روش‌های آماری بسیاری از پدیده‌های اجتماعی قابل توجیه و تجزیه و تحلیل هستند و برنامه‌ریزی بدون استفاده از علم آمار تقریباً غیرممکن است. خلاصه، دانشی از دانش‌های بشری را نمی‌توان یافت که به نوعی، مستقیم یا غیرمستقیم، از دانش ریاضی بهره نبرد.

شاعر خطه‌ی خراسان و ریاضی‌دان

سه یار دبستانی

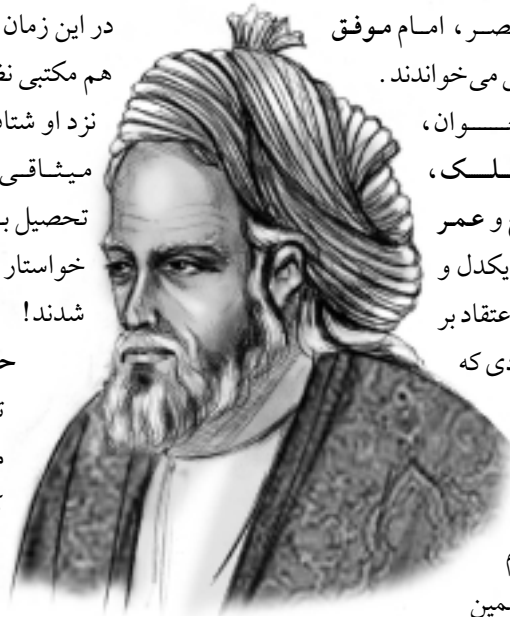
در نیمه‌ی دوم قرن پنجم هجری قمری، سه جوان ایرانی که هر یک شاگردی ممتاز بود، هم‌زمان در محضر یکی از بزرگ‌ترین فرزندان خراسان، فقیه بزرگ عصر، امام موفق نیشابوری، درس می‌خواندند.

این سه جوان، نظام‌الملک، حسن بن صباح و عمر خیام، دوستانی یکدل و یکرنگ بودند. اعتقاد بر این بود که شاگردی که در مکتب امام تحصیل کند، نیک‌بخت و نیک‌فرجام خواهد شد. از همین

روی، روزی حسن به دوستان خویش پیشنهاد کرد که هر سه تن پیمان ببندند، اگر هر یک به مقام و منصب والایی رسید، مراتب فضل و برتری را منحصرآز آن خود نداند و دویار دیگر را نیز به تساوی از آن بهره‌مند کند. با گذشت زمان، معلوم شد که بخت بلند با نظام‌الملک یار بوده است، چرا که او وزیر سلطان آلب ارسلان شد.

در این زمان، دویار دیگر هم مکتبی نظام‌الملک، نزد او شتافتند و بنا بر میثاقی که در دوران تحصیل بسته بودند، خواستار سهم خویش شدند!

حسن صباح، تقاضای منصبی دیوانی کرد که بنا به استدعای وزیر، سلطان



سلجوقی آن را به او تفویض کرد. اما وی که شخصی خودخواه و ناسپاس بود، بر آن شد که دوست خود نظام‌الملک را از مقام صدارت به زیر کشد و جانشین او شود. ولی سرانجام پس از بر ملا شدن خیانت، مورد غضب واقع و تبعید شد.

اما عمر خیام نه مقامی می‌خواست و نه عنوانی. تنها خواسته‌اش این بود که به او رخصت داده شود تا در پناه و سایه‌ی وزیر بتواند به اشاعه‌ی علم و ریاضیات پردازد و به پاس این نعمت، برای دوام عمر و سعادت دوست خویش دست به دعا بردارد. وزیر که سخت تحت تأثیر فروتنی و اخلاص هم‌مکتبی سابق خود قرار گرفته بود، برای او مقرری سالانه تخصیص داد.

حسن صباح پس از تحمل دربه‌دری و بدبختی‌های بسیار، رهبر فرقه‌ای متعصب مذهبی شد که در سال ۴۸۳ هجری قمری بر قلعه‌ی الموت، واقع در کوهستان‌های مرتفع جنوب دریای خزر تسلط یافتند. برخلاف زندگی پرآشوب حسن صباح، زندگی خیام با آرامش و سادگی توأم بود. وی در طول سال‌ها عمر مسالمت‌آمیز خویش، خدمات ارزنده‌ای به ادبیات و فرهنگ علمی آن عصر کرد.

چکیده

مقاله‌ی حاضر، به یکی از دستاوردهای برجسته‌ی ریاضی این اندیشمند پژوهشگر (دستاوردی که در زمره‌ی لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات^۱ قرار می‌گیرد) اختصاص یافته است. نخست برای روشن‌تر شدن موضوع، اندکی درباره‌ی مقدمات آن سخن می‌گوییم.

کلیدواژه‌ها: خیام، ریشه‌ی معادله، چندجمله‌ای حقیقی، ریشه‌های حقیقی مثبت.

مقدمه

مفهوم معادله و حل آن

منظور از معادله‌ی چندجمله‌ای حقیقی با یک مجهول x هر معادله‌ای به شکل زیر است:

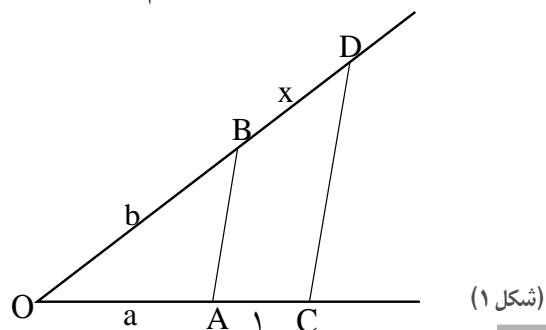
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

که در آن n یک عدد صحیح مثبت و a_n, \dots, a_1, a_0 اعداد حقیقی با شرط $a_n \neq 0$ هستند. هر مقدار x که در معادله صدق کند، ریشه‌ی آن معادله خوانده می‌شود. یکی از هدف‌های اصلی دانش جبر در آغاز پیدایش، آن بود که روش‌های کلی برای به دست آوردن ریشه‌های این‌گونه معادلات را بیابد. این کار را حل کردن معادلات می‌نامیدند. چون در آن روزگار تنها اعداد شناخته شده، اعداد مثبت حقیقی بودند، طی صدها سال، حل کردن معادله، به مفهوم یافتن ریشه‌های حقیقی مثبت آن معادله بود؛ در صورتی که ریشه‌ای می‌داشت. معادلات بر حسب این‌که درجه‌ی آن‌ها مساوی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و... باشد، به ترتیب معادلات خطی، درجه دو، درجه سه، درجه چهار، درجه پنج و... نامیده می‌شوند.

امروزه مشکلی در راه حل معادله‌ی خطی وجود ندارد، زیرا می‌توان آن را از راه هندسی یا جبری به راحتی حل کرد.

معادلات درجه اول و درجه دوم

اگر یک معادله‌ی چند جمله‌ای خطی با یک مجهول x یک ریشه‌ی مثبت داشته باشد، می‌توان این معادله را همواره به شکل $ax=b$ نوشت که در آن a و b هر دو عددهای مثبت اند. ریشه‌ی معادله از راه جبری $x = \frac{b}{a}$ و از راه هندسی عبارت است از چهارمین جزء تناسبی که سه پاره‌خط به طول‌های a ، b و 1 سه جز دیگر آن هستند. به این معنی که $\frac{a}{b} = \frac{1}{x}$ و مقدار x را می‌توان از شکل ساده‌ی زیر توسط پرگار یا خط کش مشخص کرد. در این شکل، $\angle COD$ زاویه‌ای دل‌خواه است و $OA=a$ ، $OB=b$ و $AC=1$ ، و CD موازی AB رسم شده است.



جالب توجه است که مصریان عهد باستان، معادلات خطی را به شیوه‌ای حل می‌کردند که بعدها در اروپا به عنوان قاعده‌ی تصحیح و خطا^۳ معروف شد. بنا بر این شیوه، برای حل معادله‌ی $x + \frac{x}{y} = 24$ باید از قاعده‌ای که در پی می‌آید، استفاده کرد. فرض کنیم، x معادل مقداری دل‌خواه باشد؛ مثلاً $x=7$ که به ازای آن مقدار $x + \frac{x}{y}$ مساوی ۸ می‌شود نه ۲۴. چون ۸ باید در ۳ ضرب شود تا عدد مطلوب یعنی ۲۴ به دست آید، مقدار واقعی x باید از رابطه‌ی $3(7)=21$ حاصل شود. نکته‌ی شایان تأمل این است که از یک حدس محض، پاسخ صحیح به دست آمده است.

هرچند که حالات معادلات درجه دوم مشکل‌تر از مورد معادلات خطی است، ریاضی‌دانان روزگار قدیم، این مورد را نیز، هم از راه هندسه و هم از راه جبر حل می‌کردند. راه حل جبری، اعم از این‌که به روش مربع کامل کردن یا به روش جای‌گزینی در فرمول کلی ریشه‌ی معادله‌ی درجه دوم صورت گیرد، باید برای تمام کسانی که مقدمات جبر را در درس‌های دوران مدرسه فرا گرفته‌اند، آشنا باشد. بابلی‌ها در تقریباً ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد، شیوه‌های مشابهی را برای راه حل جبری هر دو معادله‌ی مذکور می‌شناختند.

معادلات درجه سوم و راه حل خیام

مورد معادلات درجه سوم به مراتب دشوارتر از دو مورد یاد شده است. البته بابلی‌ها برخی معادلات درجه سوم خاص را به کمک یک جدول حاوی مقادیر n^3+n^2 نظیر مقادیر n حل می‌کردند و بنا بر آن‌چه در یکی از آثار به جا مانده از ارشمیدس آمده است، این ریاضی‌دان یونانی از شرایطی بحث می‌کند که تحت آن، یک معادله‌ی درجه سوم ممکن است ریشه‌ی مثبت و حقیقی داشته باشد.

بحث در این باره، در دوره‌های بعد نیز ادامه یافت تا این‌که در قرن شانزدهم، یک ریاضی‌دان ایتالیایی، سرانجام راه حل جبری کلی برای معادلات درجه سوم ارائه داد. با این حال، در حدود پانصد سال پیش از این واقعه، شاعری ریاضی‌دان از اهالی ایران، موسوم به عمر خیام، یک راه حل هندسی برای معادلات درجه سوم یافت. این همان لحظه‌ی مهم در تاریخ ریاضیات است که در بالا بدان اشاره شد و حال پس از ذکر

مقدماتی چند درباره‌ی تاریخچه‌ی آن، به بحث در مورد راه حل خیام خواهیم پرداخت:

دوران بین نیمه‌ی قرن پنجم تا قرن یازدهم میلادی، به قرون تاریک اروپا مشهور است، زیرا طی این دوره، آموزش و تمدن در اروپای غربی تا سطح بسیار نازلی افول کرد. از سوی دیگر در این دوران، امپراتوری اسلامی به نقطه‌ی اوج ترقی خود رسید. در طول یک دهه پس از هجرت حضرت محمد(ص) از مکه به مدینه در سال ۶۲۳ میلادی، قبایل بادیه نشین پراکنده و از هم گسیخته‌ی شبه جزیره‌ی عربستان، به برکت شور و شوق ناشی از مذهبی مقتدر، در قالب امت قدرتمندی متحد شدند. پس از گذشت یک قرن از هجرت، حکومت ستاره و هلال^۱ مسلمانان در قلمروی وسیع از هند تا سرتاسر ایران، بین النهرین، آفریقای شمالی و اسپانیا گسترده شد.

یکی از کارهای مهم در حفظ بخش بزرگی از میراث فرهنگ جهانی، تلاش خستگی ناپذیر و مجدانه‌ی مسلمانان در بارور کردن دستاوردهای علمی و تحقیقی یونانیان و هندیان بود. در ضمن این فعالیت‌ها، بسیاری از آثار هندی و یونانی در زمینه‌های پزشکی، نجوم و ریاضیات، با جدیت تمام به زبان عربی ترجمه شدند. بدین ترتیب، این آثار مدت‌ها از دستبرد حوادث زمانه در امان ماند تا این که بعدها دانشمندان اروپایی توانستند آن‌ها را بار دیگر به زبان لاتین و سایر زبان‌های اروپایی برگردانند. اما اگر فعالیت‌های مجدانه‌ی پژوهشگران اندیشمند اسلامی نبود، بسیاری از علوم یونانی و هندی در خلال دوران طولانی قرون تاریک، به گونه‌ای جبران‌ناپذیر از میان می‌رفت. مسلمانان نه تنها پاس‌داران شایان تحسین بسیاری از سرمایه‌های فکری و معنوی قلمداد می‌شوند، بلکه توانستند خود نیز بر غنای آن‌ها بیفزایند. از جمله کارهای بسیار اصیل و ارجمند در این زمینه، ارائه‌ی راه‌حل هندسی معادلات درجه سوم توسط عمر خیام بود.

عمر خیام (که در نیمه‌ی دوم قرن چهارم و نیمه‌ی اول قرن پنجم هجری قمری می‌زیست)، شاعر، منجم و ریاضی‌دان ایرانی بود که در نیشابور زاده و دانش آموخته شد. اما شهرت خیام نزد مردم جهان غرب که به او سخت مهر می‌ورزند، بیشتر ناشی از رباعیات نغز اوست که توسط شاعر دل‌باخته‌ی ایرلندی، ادوارد فیتز جرالده، به گونه‌ای استادانه و شیوا به انگلیسی ترجمه شده است. عمر خیام در جهان علم نیز شهرت دارد؛ چه او توانسته است تقویم را به خوبی اصلاح و تقویم

جلالی را تدوین کند. برخورد انتقادی او نسبت به اصل توازی اقلیدس نشان می‌دهد که خیام در این باره، مقدم بر ساکری است که ایده‌ی او سرانجام به آفرینش هندسه‌ی ناکلیدی منجر شد. از این‌ها گذشته، خدمت برجسته‌ی او به جهان علم و جبر دنیای اسلام، این بود که برای حل همه‌ی معادلات درجه سوم - یافتن ریشه‌های مثبت این معادلات - راه‌حل هندسی ارائه داد.

برای نشان دادن شیوه‌ی ابداعی عمر خیام از معادله‌ی درجه سوم خاص، یعنی معادله‌ی

$$x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$$

کمک می‌گیریم که در آن a ، b ، c و x به عنوان طول‌های چندپاره خط فرض شده‌اند. خیام این نوع معادله‌ی درجه سوم را با

اصطلاحات خاص آن دوره، چنین

مطرح می‌کند: «یک مکعب، چند

ضلع و چند عدد که مساوی

چند مربع هستند.»

اما مسئله‌ی مذکور از

نظر هندسی این‌طور بیان

می‌شود: به فرض داشتن

یک پاره خط واحد و چند

پاره خط a ، b و c ، پاره خط

x را چنان بکشید که رابطه‌ی

بالا بین a ، b ، c و x برقرار باشد.

هدف آن است که تا سر حد امکان،

پاره خط x تنها با استفاده از خط کش و پرگار رسم شود. یافتن

یک راه‌حل صرفاً متکی به استفاده از خط کش و پرگار به‌طور

کلی ناممکن است؛ چه در قسمتی از کشیدن شکل باید مجاز

باشیم از منحصرأ یک مقطع مخروطی خاص مفروض استفاده

کنیم.

یک راه اساسی ترسیم شکل که چندین بار در حل معادله‌ی

درجه سوم به کار گرفته شده، منوط به آن است که چهارمین

جزء از تناسبی را بیابیم که سه پاره خط مفروض، سه جزء معلوم

آن باشند. این یک مسئله‌ی قدیمی است که راه‌حل آن بر یونانیان

عهد باستان معلوم بوده است.

فرض کنیم u ، v و w سه پاره خط معین باشند و ما بخواهیم

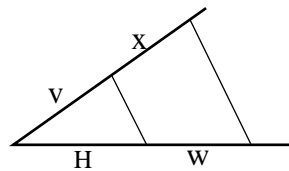
طول پاره خط x را طوری تعیین کنیم که $\frac{u}{v} = \frac{w}{x}$ باشد. شکل

۲ که شبیه شکل ۱ است، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با

کمک خط کش و پرگار، پاره خط x مورد نظر را رسم کرد.

یکی از کارهای مهم
در حفظ بخش بزرگی از
میراث فرهنگ جهانی، تلاش
خستگی ناپذیر و مجدانه‌ی
مسلمانان در بارور کردن
دستاوردهای علمی و
تحقیقی یونانیان و
هندیان بود

EF را در K و BC را در L قطع می‌کند. اگر GH با EF در M برخورد کند، خواهیم داشت:
چون J و H روی هذلولی هستند، داریم:



(شکل ۲)

$$(EK)(KJ) = (EM)(MH) \quad (1)$$

چون $\frac{ED}{BE} = \frac{AB}{BG}$ است، داریم:

$$(BG)(ED) = (BE)(AB) \quad (2)$$

بنابراین، از دو رابطه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که:

$$(EK)(KJ) = (EM)(MH) = (BG)(ED) = (BE)(AB) \quad (3)$$

حل:

$$\begin{aligned} (BL)(LJ) &= (EK)(BE + KJ) = \\ (EK)(BE) &+ (EK)(KJ) = \\ (EK)(BE) &+ (AB)(BE)(3) = \\ (BE)(EK + AB) &= (BE)(AL) \end{aligned} \quad (4)$$

$$(BL)^2(LJ)^2 = (BE)^2(AL)^2$$

و از آن‌جا:

$$(LJ)^2 = (AL)(LC) \quad (5)$$

بنابراین، از رابطه‌های ۴ و ۵ نتیجه می‌گیریم:

$$(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC) \quad (6)$$

$$یا (BE)^2(BL + AB) = (BL)^2(BC - BL)$$

$$با قرار دادن $BE = b$ ، $AB = \frac{a^2}{b^2}$ و $BC = C$$$

در رابطه‌ی ۶ داریم:

$$b^2(BL + \frac{a^2}{b^2}) = (BL)^2(C - BL) \quad (7)$$

با بسط آخرین معادله در رابطه‌ی ۷ و مرتب کردن جمله‌ها

داریم:

$$(BL)^3 + b^2(BL) + a^2 = C(BL)^2 \quad (8)$$

و از این‌جا $BL = X$ یعنی یک ریشه‌ی معادله‌ی درجه سوم مفروض به دست می‌آید.

باید اذعان کرد که روش خیام ماهرانه و بدیع است و ضرورت ایجاد می‌کند که هر معلم دبیرستان بتواند علاقه‌ی برخی از دانش‌آموزان خود را نسبت به آن برانگیزاند. ترسیم

حال دنباله‌ی راه حل هندسی معادله‌ی درجه سوم $x^3 + b^2x + a^2 = cx^2$ عمر خیام را شرح می‌دهیم: نخست با استفاده از راه اساسی ترسیم شکل، پاره خط z را چنان می‌یابیم که $\frac{b}{a} = \frac{a}{z}$ باشد. سپس بار دیگر با استفاده از راه اساسی ترسیم

شکل، پاره خط m را چنان می‌یابیم که $m = \frac{a^2}{b^2}$ باشد. حال در

شکل $AB = m = \frac{a^2}{b^2}$ و $BC = c$ را رسم می‌کنیم. آن‌گاه

نیم دایره‌ای به قطر AC می‌کشیم و از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا نیم دایره را در D قطع کند. سپس روی BD، مقدار $BE = b$ را جدا می‌کنیم و از E خط EF را موازی AC می‌کشیم. باز با توجه به راه اساسی ترسیم شکل، G را روی BC چنان

می‌یابیم که $\frac{ED}{BE} = \frac{AB}{BG}$ باشد و مستطیل DBGH را

کامل می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد، یک

هذلولی قائم را از H طوری رسم می‌کنیم

که EF و ED خطوط مجانب آن باشند

(به این معنی که معادله‌ی هذلولی

گذرنده بر نقطه‌ی H نسبت به

محورهای EF، به عنوان محور طول

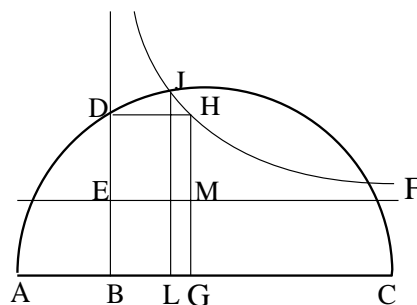
و ED، به عنوان محور عرض، به شکل

$xy = a$ باشد که a عدد ثابت است).

این هذلولی، نیم دایره را در J قطع می‌کند

و خطی که از J موازی DE رسم شود، خط

شهرت خیام نزد مردم جهان غرب که به او سخت مهر می‌ورزند، بیش‌تر ناشی از رباعیات نغز اوست که توسط شاعر دل‌باخته‌ی ایرلندی، ادوارد فیتز جرالده، به گونه‌ای استادانه و شیوا به انگلیسی ترجمه شده است



(شکل ۳)

**برخورد انتقادی
خیام از اصل توازی
اقلیدس نشان می‌دهد که
او در این باره، مقدم بر
ساگری است که ایده‌ی او
سرانجام به آفرینش
هندسه‌ی نااقلیدسی
منجر شد**

سال بعد از این گفت و گو که خیام جهان را به درود گفته بود، شاگردش به نیشابور می‌رود و پس از یافتن آرامگاه خیام، درمی‌یابد که قبر او درست در مجاورت باغی قرار گرفته و شاخه‌ی درختان میوه از دیوارهای باغ به طرف خارج سرازیر شده و شکوفه‌های گل‌های آن‌ها آن قدر بر آرامگاه استاد فرو ریخته‌اند که سنگ مزارش را کاملاً پوشانیده‌اند.

وقتی ادوارد فیتز جرالده - شاعر ایرلندی

دل‌باخته‌ی رباعیات خیام که خیام شاعر را به اروپا شناساند - در سال ۱۸۸۳ در گذشت، در یک کلیسای کوچک انگلیسی در سنفلک به خاک سپرده شد. ویلیام سیمپسون، هنرمند تصویرگری یکی از نشریات لندن، در سال ۱۸۸۴ به نیشابور رفت و از آرامگاه خیام دیدن کرد. در کنار سنگ

مزار او چندین بوته گل سرخ یافت و مقداری از تخم آن‌ها را که بر شاخه مانده بود، چید و آن‌ها را در بازگشت به انگلستان آورد. سیمپسون تخم گل‌ها را به مسئول «باغ‌های گیاه‌شناسی کیو» سپرد و او پس از کاشتن آن‌ها

موفق

شد، بوته‌های

گل سرخ به عمل

آورد. در ۱۷ اکتبر

۱۸۹۳ یکی از

این بوته‌های

گل، به آرامگاه

فیتز جرالده منتقل و در آن‌جا

کاشته شد.



نقطه به نقطه‌ی هذلولی (با استفاده از ترسیم در حالت کلی شکل) کار آسانی است، زیرا اگر N هر نقطه‌ای روی EF باشد و اگر عمود بر EF از نقطه‌ی N ، هذلولی را در p قطع کند، داریم:

$$(EM)(MH) = (EN)(NP)$$

و از آن‌جا $\frac{EN}{EM} = \frac{MH}{NP}$ و NP چهارمین پاره خط متناسب با

پاره خط‌های مفر و ض EN ، EM و MH است.

به این ترتیب، نخست می‌توان تعدادی از نقطه‌های روی هذلولی را مشخص کرد و سپس با ترسیم یک منحنی بر نقاط به دست آمده، هذلولی را کامل کرد. ممکن است معادله‌ی درجه سوم $5x^2 + 2x + 8 = 0$ را به دانش‌آموزان پیشنهاد کرد. در این جا $a = 5$ ، $b = 2$ ، $c = 8$ است. سه ریشه‌ی این معادله عبارت‌اند از: 2 ، 4 ، و -1 . دانش‌آموزان باید بتوانند دو ریشه‌ی مثبت معادله را به روش خیام بیابند. شاید آن‌ها بتوانند با مختصر تعمیم این روش، ریشه‌ی منفی را هم به دست آورند. حل این مسئله می‌تواند برای یک طرح تحقیقاتی عالی برای دانش‌آموزان سال سوم، سرآغاز خوبی باشد.

عمر خیام در سال ۵۱۵ یا ۵۱۷ هجری قمری در نیشابور درگذشت. یکی از شاگردان وی موسوم

به نظامی سمرقندی، نقل کرده است که بر حسب

معمول، او با استادش (خیام) در باغی به

گفت و گو می‌نشست و

خیام در یکی از این

جلسات به او گفته

بوده است که

آرزو دارد

مدفنش در

نقطه‌ای بنا

شود که باد شمال برگ‌های گل

سرخ را بر آن بگستراند. چند

پی‌نوشت:

۱. این نشان عثمانی‌ها و ترکیه‌ی فعلی است که البته از قرن ۱۶ میلادی پرچم عثمانی‌ها بوده است، نه در قرن‌های اول یا دوم هجری.

۲. ادوارد فیتزجرالد ایرلندی، مترجم رباعیات خیام، در مقدمه‌ای که به زبان انگلیسی بر این کتاب نگاشته است، صحت انتساب این روایت افسانه‌آمیز به خیام را تأیید می‌کند. م.

۳. پروفیسور هاور ایوز (نگارنده‌ی این مقاله)، استاد برجسته‌ی معاصر و صاحب‌نظر در تاریخ ریاضیات و هندسه، مجموعه سخن‌رانی‌های خویش را در دو کتاب به نام‌های «لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات قبل از سال ۱۶۵۰» و «لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات بعد از سال ۱۶۵۰» تنظیم و منتشر کرده است. مقاله‌ی حاضر، از کتاب

نخست انتخاب و ترجمه شده است.

۴. «قاعده‌ی تصحیح و خطا» یا rule of false position در واقع روشی است برای تخمین زدن ریشه‌های یک معادله‌ی جبری و تعیین کمیت نزدیک به صحت. (م.)

منبع

Eves, Howard, Great Moments in Mathematics Before 1650, Washington, D.C. The Mathematical Association of America, 1983.

اتحادها و تجزیه

حل:

$$P = x^4 + 4y^4$$

$$P = \underbrace{x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2}_{\text{بنابر اتحاد اول}}$$

$$P = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = \underbrace{(x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2}_{\text{بنابر اتحاد مزدوج}}$$

$$\Rightarrow P = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$

اتحاد چهارم (اتحاد جمله مشترک):

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

تعریف اتحاد: هر تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای جميع مقادیر متغیرهای تعریف شده، در دو طرف تساوی همواره برقرار باشد، اتحاد نامیده می شود. برای مثال، تساوی $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ یک اتحاد است، زیرا به ازای هر مقدار عددی از x و a ، دو طرف تساوی با هم برابرند.

اتحادهای جبری

اتحاد اول (مربع مجموع دو جمله ای): $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

اتحاد دوم (مربع تفاضل دو جمله ای): $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

نتایج:

الف) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

ب) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

ج) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

د) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 4ab$

مسئله ۱. اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند، حاصل $(2x\sqrt{x} + \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2 - (2x\sqrt{x} - \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2$ را بیابید.

حل: فرض می کنیم $a = 2x\sqrt{x}$ و $b = \sqrt{3}y^2\sqrt{y}$ پس

مسئله به صورت زیر است:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2$$

بنا به نتیجه ی (د) داریم: $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$$\Rightarrow (2x\sqrt{x} + \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2 - (2x\sqrt{x} - \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2$$

$$= 4(2x\sqrt{x})(\sqrt{3}y^2\sqrt{y}) = 8xy^2\sqrt{3xy}$$

اتحاد سوم (اتحاد مزدوج):

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مسئله ۲. عبارت $P = x^4 + 4y^4$ را به حاصل ضرب

عوامل تجزیه کنید.



مسئله ۳. عبارت $P = (x^2 - 1)^2 - 11x^2 + 35$ را تجزیه کنید.

حل:

$$P = (x^2 - 1)^2 - 11x^2 + 35$$

$$P = (x^2 - 1)^2 - 11(x^2 - 1 + 1) + 35$$

$$P = (x^2 - 1)^2 - 11(x^2 - 1) - 11 + 35$$

$$P = (x^2 - 1)^2 - 11(x^2 - 1) + 24$$

$$P = a^2 - 11a + 24 \quad a = x^2 - 1 \text{ فرض می‌کنیم}$$

حال دو عدد می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۱- و حاصل ضرب آن‌ها ۲۴ باشد.

این دو عدد (-۳) و (-۸) هستند. پس:

$$P = (a - 3)(a - 8) \quad a = x^2 - 1$$

$$P = (x^2 - 1 - 3)(x^2 - 1 - 8)$$

$$P = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$$

اتحاد پنجم (اتحاد مربع مجموع سه جمله):

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

اتحاد ششم (اتحاد مکعب مجموع دو جمله):

$$\begin{cases} (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \\ (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \end{cases}$$

اتحاد هفتم (اتحاد مکعب تفاضل دو جمله):

$$\begin{cases} (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 \\ (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \end{cases}$$

مسئله ۴. اگر $x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $P = x^3 - 3x$ را بیابید.

حل:

$$x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$x = a + b \Rightarrow x^3 = (a + b)^3 \Rightarrow$$

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$x^3 = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}(x)$$

$$x^3 = 6 + 3\sqrt[3]{9 - 8}(x) \Rightarrow x^3 = 6 + 3x \Rightarrow P = x^3 - 3x = 6$$

مسئله ۵. اگر $x = \sqrt[6]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[6]{\sqrt{5} - 2}$ ، آن‌گاه $P = (x^3 + 3x)^2$ را بیابید.

حل:

$$x = \sqrt[6]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[6]{\sqrt{5} - 2}$$

$$x = a - b \Rightarrow x^3 = (a - b)^3 \Rightarrow$$

$$x^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$x^3 = (\sqrt[6]{\sqrt{5} + 2})^3 - (\sqrt[6]{\sqrt{5} - 2})^3 - 3\sqrt[6]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}(x)$$

$$x^3 = \sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2} - 3\sqrt[6]{\sqrt{5} - 2}x$$

$$x^3 = \sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2} - 3x$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x = \sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

$$\Rightarrow (x^3 + 3x)^2 = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5 - 4} \Rightarrow$$

$$P = (x^3 + 3x)^2 = 2\sqrt{5} - 2$$



مسئله ۶. ثابت کنید

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc)$$

حل: عبارت های سمت راست را در هم ضرب می کنیم.

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc) = a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - a^2c - abc + a^2b + b^3 + bc^2 - ab^2 - abc - bc^2 + a^2c + b^2c + c^3 - abc - ac^2 - bc^2 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

پس همواره داریم:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc)$$

اگر $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ یا $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 & \text{یا} \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \Rightarrow a = b = c \end{cases}$$

نتیجه ی مهم: (اتحاد اولر یا لاگرانژ)

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \text{یا} \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

مسئله ۷. حاصل کسر $\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}$ را بیابید.

حل: عبارت مخرج را ساده می کنیم

$$\begin{aligned} & (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2xy + y^2 + z^2 - 2yz - z^2 + x^2 - 2xz \\ &= 2x^2 = 2y^2 + 2z^2 - 2(xy + yz + xz) \\ \text{کسر} &= \frac{(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)}{2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)} = \frac{x+y+z}{2} \end{aligned}$$

مسئله ۸. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P = \sqrt{2(2-\sqrt{2})} \cdot \sqrt{2(3+2\sqrt{2})}$$

حل:

$$P = \sqrt{4(2-\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{2(3+2\sqrt{2})}$$

$$P = \sqrt{4(4+2-4\sqrt{2})} \cdot \sqrt{2(3+2\sqrt{2})} = \sqrt{4(6-4\sqrt{2})} \cdot \sqrt{2(3+2\sqrt{2})}$$

$$P = \sqrt{8(3-2\sqrt{2})} \cdot \sqrt{2(3+2\sqrt{2})} = \sqrt{16(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{16(9-8)} = \sqrt{16(1)} = 2$$

مسئله ۸. اگر $n \in \mathbb{N}$ و n عددی فرد باشد و داشته باشیم

$$a^n + b^n + c^n = a + b + c = 0$$

$$P = a^n + b^n + c^n \text{ را بیابید.}$$

حل:

$$\text{بنابر اتحاد اولر} \quad a^n + b^n + c^n = 3abc \quad \text{داریم: } a + b + c = 0$$

$$\text{داریم: } a^3 + b^3 + c^3 = 0 \Rightarrow 3abc = 0 \Rightarrow abc = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0 \text{ یا } c = 0$$

فرض می کنیم $c = 0$. در نتیجه، از رابطه ی

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$P = a^n + b^n + c^n = (-b)^n + b^n + 0 = -b^n + b^n + 0 = 0$$

$$\Rightarrow P = 0$$

مسئله ۹. حاصل عبارت $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

را بیابید.

حل:

$$x = a - b \text{ و } y = b - c \text{ و } z = c - a \text{ فرض می کنیم}$$

$$x + y + z = a - b + b - c + c - a = 0$$

$$\Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow \text{بنابر اتحاد اولر} \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\Rightarrow P = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 - 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

آزمون

آزمون ۱. اگر $x^2 + x + 1 = 0$ ، آن گاه $(x^3 + \frac{1}{x^3})$ کدام

است؟

الف) ۲ ب) -۲ ج) ۸ د) -۸

حل: گزینه ی الف.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \text{بر } x \neq 0 \text{ تقسیم می کنیم} \Rightarrow x + 1 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$$

$$x + \frac{1}{x} = -1 \text{ دو طرف را به توان ۳ می رسانیم}$$

هر تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای جميع مقادیر متغیرهای تعریف شده، در دو طرف تساوی همواره برقرار باشد، اتحاد نامیده می شود

عبارت $\frac{a^n + b^n}{a^6 + b^6}$ کدام است؟

- الف) ۱ ب) ۴ ج) ۱۶ د) ۱۲۸

حل: گزینه ی الف.

دو طرف فرض را در ۲ ضرب می کنیم:

$$2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a - 2b + 2 = 0$$

$$(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) = 0$$

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = b = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^n + b^n}{a^6 + b^6} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

آزمون ۵. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$(\sqrt{2}-1)^n (\sqrt{2}+1)^{n+4} (3-2\sqrt{2})^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

- الف) ۴ ب) ۱ ج) $4\sqrt{2}$ د) $16\sqrt{2}$

حل: گزینه ی ب.

$$(\sqrt{2}-1)^n (\sqrt{2}+1)^{n+4} (3-2\sqrt{2})^2$$

$$= (\sqrt{2}-1)^n (\sqrt{2}+1)^n (\sqrt{2}-1)^4 (3-2\sqrt{2})^2$$

$$= [(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^n \times [(\sqrt{2}+1)^2]^2 (3-2\sqrt{2})^2$$

$$= (2-1)^n \times (3+2\sqrt{2})^2 (3-2\sqrt{2})^2 = [(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})]^2$$

$$= 1 \times (9-8)^2 = 1 \times 1 = 1$$

آزمون ۶. اگر $a+b=3$ ، آن گاه حاصل عبارت

$$P = a(a^2 + a + 1) + b(b^2 + b + 1) + ab(3a + 3b + 2)$$

است؟

- الف) ۱۸ ب) ۲۷ ج) ۳۹ د) ۴۹

حل: گزینه ی ج.

$$P = a^3 + a^2 + a + b^3 + b^2 + b + 3a^2b + 3ab^2 + 2ab$$

$$P = (a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2) + (a^2 + b^2 + 2ab) + (a + b)$$

$$P = (a^3 + b^3) + (a + b)^2 + (a + b) = (3)^3 + (3)^2 + 3$$

$$= 27 + 9 + 3 = 39$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x)(\frac{1}{x})(x + \frac{1}{x}) = -1$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} - 3 = -1 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 2$$

آزمون ۲. اگر $x^2 + x + 1 = 0$ ، آن گاه $(x^6 + \frac{1}{x^6})$ کدام

است؟

- الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۶ د) ۱۸

حل: گزینه ی د.

دو طرف را $x \neq 0$ تقسیم می کنیم

$$\Rightarrow x + 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$$

دو طرف را به توان ۳ می رسانیم $x - \frac{1}{x} = -1$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x(\frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) = -1$$

دو طرف را به توان ۲ می رسانیم:

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} + 3 = -1 \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = -4$$

$$\Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} - 2 = 16 \Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = 18$$

آزمون ۳. اگر $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -\sqrt[3]{z}$ ، آن گاه $(x + y + z)^6$ برابر

است با:

ب) $729xyz$

الف) $81x^2y^2z^2$

د) $-81x^2y^2z^2$

ج) $729x^2y^2z^2$

حل: گزینه ی ج.

$$\Rightarrow \text{بنا به اتحاد اولر } \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$$

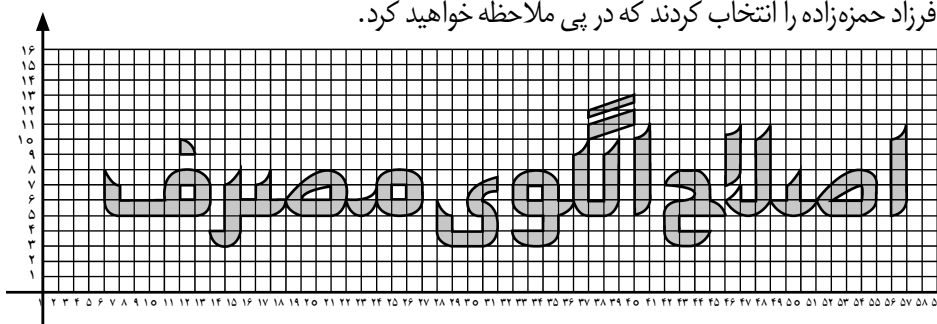
دو طرف را به توان ۶ می رسانیم: $x + y + z = 3\sqrt[3]{xyz}$

$$(x + y + z)^6 = 3^6 (x^2y^2z^2) = 729x^2y^2z^2$$

آزمون ۴. اگر $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 = 0$ ، آن گاه حاصل

مسابقه‌ی طراحی با رابطه‌های ریاضی

اشاره: در برهان شماره‌ی ۶۳ - پاییز ۸۸، عنوان «اصلاح الگوی مصرف» را به عنوان مسابقه‌ی طراحی با رابطه‌های ریاضی آورده بودیم. هیئت تحریریه مجله از بین پاسخ‌های رسیده، پاسخ آقای فرزاد حمزه‌زاده را انتخاب کردند که در پی ملاحظه خواهید کرد.



۱) انتهای سهمی $A \begin{bmatrix} 54 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $B \begin{bmatrix} 51 \\ 6 \end{bmatrix}$ رأس سهمی

$$(y - 6)^2 = \frac{4}{3}(x - 51)$$

از نوشتن معادلات سهمی صرف نظر و فقط به رأس سهمی و انتهای سهمی افقی اشاره کرده‌ام که از کلیت کار نیز نمی‌کاهد.

برای طراحی این عنوان ابتدا عنوان مورد نظر را به صورت دستی نوشتم، سپس با استفاده از معادلات خط، نامعادلات، سهمی‌های افقی و یک چهارم و نصف دایره، معادلات و نامعادلات مربوطه را به طور کامل نوشتم. ترتیب نوشتن را کاملاً رعایت کرده‌ام تا راحت‌تر بررسی شود. در ضمن قسمتی‌هایی از سهمی افقی را برای راحتی کار در نوشتن معادلات به این صورت آورده‌ام:

۴) $x = 56 \quad 5 \leq y \leq 10$

۱) انتهای سهمی $A \begin{bmatrix} 54 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $S \begin{bmatrix} 51 \\ 6 \end{bmatrix}$ رأس سهمی

$$(y - 6)^2 = \frac{4}{3}(x - 51)$$

۲) $(x - 54)^2 + (y - 7)^2 = 1 \quad 54 \leq x \leq 55 \quad 7 \leq y \leq 8$

۳) $x = 55 \quad 6 \leq y \leq 7$

۴) $(x - 54)^2 + (y - 6)^2 = 1 \quad 54 \leq x \leq 55 \quad 5 \leq y \leq 6$

۵) $x = 5 \quad 52 \leq x \leq 54$



روابط ریاضی کلمه‌ی

اصلاح

۱) $(x - 56)^2 + (y - 11)^2 = 1 \quad 56 \leq x \leq 57 \quad 10 \leq y \leq 11$

۲) $x = 57 \quad 6 \leq y \leq 11$

۳) $(x - 56)^2 + (y - 6)^2 = 1 \quad 56 \leq x \leq 57 \quad 5 \leq y \leq 6$

۱۲) $x = 41 \quad 4 \leq y \leq 5$

۱۳) $(x - 42)^2 + (y - 5)^2 = 1 \quad 41 \leq x \leq 42 \quad 5 \leq y \leq 6$

۱۴) $y = 6 \quad 42 \leq x \leq 42\frac{1}{2}$

۱۵) $(x - 42\frac{1}{2})^2 + (y - 6\frac{1}{2})^2 = 1 \quad 42\frac{1}{2} \leq x \leq 43 \quad 6 \leq y \leq 7$

۱۶) $y = 7 \quad 41 \leq x \leq 42\frac{1}{2}$



۱) $(x - 39)^2 + (y - 11)^2 = 1 \quad 39 \leq x \leq 40 \quad 10 \leq y \leq 11$

۲) $x = 40 \quad 6 \leq y \leq 11$

۳) $(x - 39)^2 + (y - 6)^2 = 1 \quad 39 \leq x \leq 40 \quad 5 \leq y \leq 6$

۴) $x = 39 \quad 5 \leq y \leq 10$

۱) $(x - 37)^2 + (y - 10)^2 = 1 \quad 37 \leq x \leq 38 \quad 9 \leq y \leq 10$

۲) $x = 38 \quad 6 \leq y \leq 10$

۳) $(x - 37)^2 + (y - 6)^2 = 1 \quad 37 \leq x \leq 38 \quad 5 \leq y \leq 6$

۴) $y = 5 \quad 36 \leq x \leq 37$

۵) $(x - 36)^2 + (y - 6)^2 = 1 \quad 35 \leq x \leq 36 \quad 5 \leq y \leq 6$

۶) $x = 35 \quad 6 \leq y \leq 9$

۷) $(x - 35)^2 + (y - 10)^2 = 1 \quad 35 \leq x \leq 36 \quad 9 \leq y \leq 10$

۸) $x = 36 \quad 6 \leq y \leq 10$

۹) $y = 6 \quad 36 \leq x \leq 37$

۱۰) $x = 37 \quad 6 \leq y \leq 9$

۱۱) $x = 36 \quad 10 \leq y \leq 11$

۱۲) $A \begin{bmatrix} 36 \\ 10 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 39 \\ 11 \end{bmatrix} : y - 10 = \frac{10 - 11}{36 - 39}(x - 36)$

۱۳) $x = 39 \quad 11 \leq y \leq 12$

۱۴) $A \begin{bmatrix} 39 \\ 12 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 36 \\ 11 \end{bmatrix} : y - 12 = \frac{12 - 11}{39 - 36}(x - 39)$

۱۵) $x = 36 \quad 11\frac{1}{2} \leq y \leq 12$

۶) $(x - 52)^2 + (y - 6)^2 = 1 \quad 51 \leq x \leq 52 \quad 5 \leq y \leq 6$

۷) انتهای سهمی $A \begin{bmatrix} 54 \\ 7 \end{bmatrix}$ و رأس سهمی $S \begin{bmatrix} 52 \\ 6 \end{bmatrix}$

۸) $x = 54 \quad 6 \leq y \leq 7$

۹) $y = 6 \quad 52 \leq x \leq 54$

۱۰) $y = 6 \quad 50 \leq x \leq 51$

۱۱) $x = 50 \quad 6 \leq y \leq 8$

۱۲) $(x - 49)^2 + (y - 8)^2 = 1 \quad 49 \leq x \leq 50 \quad 7 \leq y \leq 8$

۱۳) $x = 49 \quad 6 \leq y \leq 7$

۱۴) $y = 6 \quad 48 \leq x \leq 49$

۱۵) $(x - 49)^2 + (y - 6)^2 = 1 \quad 48 \leq x \leq 49 \quad 5 \leq y \leq 6$

۱۶) $y = 5 \quad 49 \leq x \leq 50$

۱۷) $(x - 50)^2 + (y - 6)^2 = 1 \quad 50 \leq x \leq 51 \quad 5 \leq y \leq 6$

۱) $(x - 47)^2 + (y - 11)^2 = 1 \quad 47 \leq x \leq 48 \quad 10 \leq y \leq 11$

۲) $x = 48 \quad 6 \leq y \leq 11$

۳) $(x - 47)^2 + (y - 6)^2 = 1 \quad 47 \leq x \leq 48 \quad 5 \leq y \leq 6$

۴) $y = 5 \quad 46 \leq x \leq 47$

۵) $(x - 46)^2 + (y - 6)^2 = 1 \quad 45 \leq x \leq 46 \quad 5 \leq y \leq 6$

۶) $(x - 45)^2 + (y - 7)^2 = 1 \quad 45 \leq x \leq 46 \quad 6 \leq y \leq 7$

۷) $x = 46 \quad 6 \leq y \leq 7$

۸) $y = 6 \quad 46 \leq x \leq 47$

۹) $x = 47 \quad 6 \leq y \leq 10$

۱۰) $(x - 45)^2 + (y - 11)^2 = 1 \quad 45 \leq x \leq 46 \quad 10 \leq y \leq 11$

۱۱) $x = 46 \quad 8 \leq y \leq 11$

۱۲) $(x - 45)^2 + (y - 8)^2 = 1 \quad 45 \leq x \leq 46 \quad 7 \leq y \leq 8$

۱۳) $y = 45 \quad 7 \leq y \leq 10$

۱) $(x - 42)^2 + (y - 7)^2 = 1 \quad 41 \leq x \leq 42 \quad 7 \leq y \leq 8$

۲) $y = 8 \quad 42 \leq x \leq 43$

۳) $(x - 43)^2 + (y - 7)^2 = 1 \quad 43 \leq x \leq 44 \quad 7 \leq y \leq 8$

۴) $x = 44 \quad 6 \leq y \leq 7$

۵) $(x - 44)^2 + (y - 5)^2 = 1 \quad 44 \leq x \leq 45 \quad 5 \leq y \leq 6$

۶) $y = 5 \quad 42 \leq x \leq 45$

۷) $x = 42 \quad 4 \leq y \leq 5$

۸) $y = 4 \quad 42 \leq x \leq 44$

۹) $(x - 43)^2 + (y - 4)^2 = 1 \quad 43 \leq x \leq 44 \quad 3 \leq y \leq 4$

۱۰) $y = 3 \quad 42 \leq x \leq 43$

۱۱) $(x - 42)^2 + (y - 4)^2 = 1 \quad 41 \leq x \leq 42 \quad 3 \leq y \leq 4$

۸) $x=26 \quad 4 \leq y \leq 6$

۹) $(x-27)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 26 \leq x \leq 27 \quad 5 \leq y \leq 6$

۱۰) $x=27 \quad 4 \leq y \leq 5$

۱۱) $y=4 \quad 27 \leq x \leq 29$

۱۲) $x=29 \quad 4 \leq y \leq 5$

۱۳) $(x-29)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 28 \leq x \leq 29 \quad 5 \leq y \leq 6$

۱۴) انتهای $A \begin{bmatrix} 30 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $S \begin{bmatrix} 28 \\ 6 \end{bmatrix}$ رأس سهمی



۱) $y=8 \quad 23 \leq x \leq 24$

۲) $(x-24)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad 24 \leq x \leq 25 \quad 7 \leq y \leq 8$

۳) $x=25 \quad 6 \leq y \leq 7$

۴) $(x-24)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 24 \leq x \leq 25 \quad 5 \leq y \leq 6$

۵) $y=5 \quad 23 \leq x \leq 24$

۶) $(x-23)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 22 \leq x \leq 23 \quad 5 \leq y \leq 6$

۷) $x=22 \quad 6 \leq y \leq 7$

۸) $(x-23)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad 22 \leq x \leq 23 \quad 7 \leq y \leq 8$

۹) $y=7 \quad 23 \leq x \leq 24$

۱۰) $x=24 \quad 6 \leq y \leq 7$

۱۱) $y=6 \quad 23 \leq x \leq 24$

۱۲) $x=23 \quad 6 \leq y \leq 7$

۱۳) $(x-21)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad 21 \leq x \leq 22 \quad 6 \leq y \leq 7$

۱۴) $y=6 \quad 20 \leq x \leq 21$

۱۵) $(x-21)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 20 \leq x \leq 22 \quad 5 \leq y \leq 6$

۱) انتهای سهمی $A \begin{bmatrix} 19 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $S \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \end{bmatrix}$ رأس سهمی

۲) $(x-19)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad 19 \leq x \leq 20 \quad 7 \leq y \leq 8$

۱۶) $A \begin{bmatrix} 36 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 39 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} : y - 12 \frac{1}{2} = \frac{12 \frac{1}{2} - 11 \frac{1}{2}}{39 - 36} (x - 39)$

۱۷) $x=39 \quad 12 \frac{1}{2} \leq y \leq 13$

۱۸) $A \begin{bmatrix} 39 \\ 13 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 36 \\ 12 \end{bmatrix} : y - 12 = \frac{12 - 13}{36 - 39} (x - 36)$

۱) $y=6 \quad 34 \leq x \leq 35$

۲) $(x-34)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 34 \leq x \leq 35 \quad 5 \leq y \leq 6$

۳) $x=34 \quad 4 \leq y \leq 5$

۴) $(x-33)^2 + (y-4)^2 = 1 \quad 33 \leq x \leq 34 \quad 3 \leq y \leq 4$

۵) $y=3 \quad 32 \leq x \leq 33$

۶) $(x-32)^2 + (y-4)^2 = 1 \quad 31 \leq x \leq 32 \quad 3 \leq y \leq 4$

۷) $y=4 \quad 31 \leq x \leq 33$

۸) $x=33 \quad 4 \leq y \leq 5$

۹) $y=5 \quad 32 \leq x \leq 33$

۱۰) $(x-32)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 31 \leq x \leq 32 \quad 5 \leq y \leq 6$

۱۱) $x=31 \quad 6 \leq y \leq 7$

۱۲) $(x-32)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad 31 \leq x \leq 32 \quad 7 \leq y \leq 8$

۱۳) $y=8 \quad 32 \leq x \leq 33$

۱۴) $(x-33)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad 33 \leq x \leq 34 \quad 7 \leq y \leq 8$

۱۵) $x=34 \quad 6 \leq y \leq 7$

۱۶) $y=7 \quad 32 \leq x \leq 33$

۱۷) $x=33 \quad 6 \leq y \leq 7$

۱۸) $y=6 \quad 32 \leq x \leq 33$

۱۹) $x=32 \quad 6 \leq y \leq 7$

۱) $x=30 \quad 6 \frac{1}{2} \leq x \leq 7 \frac{1}{2}$

۲) انتهای سهمی $A \begin{bmatrix} 30 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $S \begin{bmatrix} 29 \\ 6 \end{bmatrix}$ رأس سهمی

۳) $(x-29)^2 + (y-5)^2 = 1 \quad 29 \leq x \leq 30 \quad 5 \leq y \leq 6$

۴) $x=30 \quad 4 \leq y \leq 5$

۵) $(x-29)^2 + (y-4)^2 = 1 \quad 29 \leq x \leq 30 \quad 3 \leq y \leq 4$

۶) $y=3 \quad 27 \leq x \leq 29$

۷) $(x-27)^2 + (y-4)^2 = 1 \quad 26 \leq x \leq 27 \quad 3 \leq y \leq 4$

- ۱) $y = 8 \quad 9 \leq x \leq 10$
- ۲) $(x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad 10 \leq x \leq 11 \quad 7 \leq y \leq 8$
- ۳) $x = 11 \quad 6 \leq y \leq 7$
- ۴) $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 10 \leq x \leq 11 \quad 5 \leq y \leq 6$
- ۵) $y = 5 \quad 5 \leq x \leq 10$
- ۶) $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 4 \leq x \leq 5 \quad 5 \leq y \leq 6$
- ۷) $x = 4 \quad 6 \leq y \leq 8$
- ۸) $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 1 \quad 4 \leq x \leq 5 \quad 7 \leq y \leq 8$
- ۹) $x = 5 \quad 6 \leq y \leq 7$
- ۱۰) $y = 6 \quad 5 \leq x \leq 8$
- ۱۱) $x = 8 \quad 6 \leq y \leq 7$
- ۱۲) $(x-9)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad 8 \leq x \leq 9 \quad 7 \leq y \leq 8$
- ۱۳) $y = 7 \quad 9 \leq x \leq 10$
- ۱۴) $x = 10 \quad 6 \leq y \leq 7$
- ۱۵) $y = 6 \quad 9 \leq x \leq 10$
- ۱۶) $x = 9 \quad 6 \leq y \leq 7$
- ۱۷) $x = 9 \quad 9 \leq y \leq 10$
- ۱۸) $(x-9)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad 9 \leq x \leq 10 \quad 9 \leq y \leq 10$
- ۱۹) $y = 9 \quad 9 \leq x \leq 10$

- ۳) $x = 20 \quad 6 \leq y \leq 7$
- ۴) $(x-19)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 19 \leq x \leq 20 \quad 5 \leq y \leq 6$
- ۵) $y = 5 \quad 17 \leq x \leq 19$
- ۶) $(x-17)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 16 \leq x \leq 17 \quad 5 \leq y \leq 6$
- ۷) انتهای سهمی $A \left[\begin{matrix} 19 \\ 7 \end{matrix} \right]$ و $S \left[\begin{matrix} 17 \\ 6 \end{matrix} \right]$ رأس سهمی
- ۸) $x = 19 \quad 6 \leq y \leq 7$
- ۹) $y = 6 \quad 17 \leq x \leq 19$
- ۱۰) $y = 6 \quad 15 \leq x \leq 16$
- ۱۱) $(x-15)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad 15 \leq x \leq 16 \quad 5 \leq y \leq 6$
- ۱۲) $y = 5 \quad 13 \leq x \leq 15$
- ۱۳) $x = 13 \quad 4 \leq y \leq 5$
- ۱۴) $(x-12)^2 + (y-4)^2 = 1 \quad 11 \leq x \leq 13 \quad 3 \leq y \leq 4$
- ۱۵) $y = 4 \quad 11 \leq x \leq 12$
- ۱۶) $x = 12 \quad 4 \leq y \leq 5$
- ۱۷) $(x-12)^2 + (y-8)^2 = 1 \quad 12 \leq x \leq 13 \quad 7 \leq y \leq 8$
- ۱۸) $x = 13 \quad 6 \leq y \leq 8$
- ۱۹) $y = 6 \quad 13 \leq x \leq 14$
- ۲۰) $x = 14 \quad 6 \leq y \leq 7$
- ۲۱) $(x-14)^2 + (y-8)^2 = 1 \quad 14 \leq x \leq 15 \quad 7 \leq y \leq 8$
- ۲۲) $x = 15 \quad 6 \leq y \leq 8$

غرض که چون بنده همچنین جایی درآمد و هر کس چشم و گوش برگماشتند که معلوم کنند که این کس در چه نصاب است، هر چند روز بندگی حضرت سلطنت پناهی در حلقه‌ی درس حاضر می‌شود و چون حاضر شد. یکی از امتحان طلبه این است که هر کس به حلقه‌ی درسی درآید غافل است از آن که چه مسئله در میان خواهد بود و اصحاب مدرسه آن را به تجدید مطالعه بلیغ کرده‌اند، چون آغاز بحث می‌شد هربار به عنایة اللہ تعالی و یمن همت آن خداوندی این بنده دخل کاملی کرده چنانکه چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده گفته و اعتراضات وارده بر سخن ایشان کرده و نکته‌های لطیف بیرون آورده که همه حیران مانده‌اند. پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود و در میان یکدیگر انداخته و هیچکس بیرون آوردن آن نتوانسته است. مثلاً خواسته‌اند که اسطربلابی که یک گز قطر آن باشد بسازند... همه‌ی مستخرجان فرمودند که به اتفاق عمل کنند... و در مانده بودند. ریاضی دان را اشارت فرموده بودند که به قوت قوانین هندسی تحقیق و تصحیح آن بکنند. هیچ کس نتوانسته است که تحقیق آن بکنند... هر چند عمل می‌کرده‌اند و فکر در آن می‌نموده‌اند راست نمی‌آمده. چون این بنده رسید در روز این مسأله در حضرت سلطنت پناهی پیش آورده‌اند و این بنده در فور و هم در مجلس تصحیح یکی از آن کرده و منشأ غلط ایشان بیان کرده و تطبیق کلام بر این بیان کرد.

از نامه‌ی غیاث‌الدین جمشید کاشانی به پدرش

گوشه‌ای از تاریخ ریاضی دان‌ها

از: کاشانی نامه، ابوالقاسم قربانی



تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران

در شماره‌ی ۳۲ مجله‌ی یکان، در مقاله‌ای با عنوان «پژوهشگر امروز، پژوهشگر فردا» چنین می‌خوانیم: «ما خوش داریم بگوییم که قرن بیستم قرن دانش است. به‌راستی هم، حضور دانش در زندگی ما روزبه‌روز محسوس‌تر می‌شود. دانش به ما امکان می‌دهد تا موادی را که در زندگی مان به‌کار می‌آید، به‌وجود آوریم. پدیده‌های شگرفی در جهان پیرامون خود کشف کنیم و برای ساختن ماشین‌ها که کار را بر ما آسان می‌کنند، اصول نوینی بیابیم. با این همه می‌توان گفت که دانش خدمت‌گزار بشر است؟» البته چنین سخنی درست نیست. دانش، خودآدمی است. کشش و گرایش اوست به رشد و گسترش بی‌پایان، کار جست‌وجوی اوست و کنجکاوی بی‌حد اوست، عطش مبرا از سودجویی اوست برای دانستن و قابلیت شور شگفتی اوست.

اگر به دقت به دانش بنگریم، نه تنها قدرت آدمی، بلکه هم‌چنین ضعف او را در آن بازمی‌یابیم و نه تنها هوش و زیرکی، بلکه قلب و احساس او را. دانش مانند خود آدمی وابسته‌ی الزامات فخر و شرف است و معتقدات اخلاقی. و شاید هم دچار برخی پنداشت‌ها. و احتمالاً هم همین است که آن را جذاب و گیرامی‌کند و کسانی که دوستش می‌دارند، می‌گویند که دانش نه یک خدمت‌گزار ماشینی، بلکه چیزی زنده و شگرف است. اکنون همه دانش را محترم می‌شمارند و خواستار آن‌اند. فیزیک، ریاضیات، زیست‌شناسی، پزشکی و پیشه‌ی مهندسی را هر کس که خواسته باشد، فرامی‌گیرد.

در بخشی از همین شماره، با عنوان: «بی‌آن‌که عصبانی شوید، این مسئله را حل کنید»، چنین آمده است: «جک لندن، نویسنده‌ی معروف آمریکایی، درباره‌ی یکی از مسافرت‌هایش به نواحی قطبی نقل می‌کند که یک‌دفعه، در خارج از اقامتگاه خبر می‌شود که هم‌سفرش که در اقامتگاه بستری است، در حال نزاع است. جک لندن تصمیم می‌گیرد هر چه زودتر به اقامتگاه برگردد. سورت‌مه‌ای فراهم می‌کند که پنج سگ آن را می‌کشند. حرکت می‌کند. اولین ۲۴ ساعت را بدون حادثه‌ای می‌گذراند و حساب می‌کند، اگر با همین سرعت پیش برود، در رأس موعدی که پیش‌بینی کرده است، به مقصد می‌رسد. متأسفانه در پایان نخستین ۲۴ ساعت، دو سگ از پنج سگ سورت‌مه، افسار را پاره و فرار می‌کنند. جک لندن مجبور می‌شود بقیه‌ی راه را با کمک سه سگ بپیماید و در نتیجه ۴۸ ساعت دیرتر از زمانی که پیش‌بینی کرده بود، به مقصد می‌رسد.

جک لندن ضمن این روایت توضیح می‌دهد، اگر دو سگ فراری ۵۰ میل دورتر افسار را پاره می‌کردند، تأخیر وی فقط ۲۴ ساعت می‌شد.

کل مسافتی را که جک لندن پیموده است، حساب کنید.

این شماره بخشی دارد با عنوان: «از هر جایی یادداشتی» که در آن این دو خبر بسیار خواندنی هستند:

شهرت جهانی لاپلاس به خاطر فرضیه‌ی وی درباره‌ی پیدایش منظومه‌ی شمسی است که به فرضیه‌ی لاپلاس معروف است. بنا به این فرضیه، خورشید و سیارات از یک سحابی اولیه جدا شده‌اند

خبر اول:

«بعضی تعاریف هندسی» که در «فرهنگ آکادمی فرانسه» چاپ هفتم ۱۸۷۷ بیان شده است: (خواننده به سادگی درمی‌یابد، تعاریف زیر نه تنها دقیق نیست، بلکه صحیح هم نیست و از این لحاظ، فرهنگ آکادمی هیچ قابل توجه نیست).
خط^۱: خیلی ساده، با ملاحظه‌ی این که نه پهنا دارد و نه عمق.

خط^۲: خطی که با قلم رسم می‌شود.

سطح: رویه، خارج، قسمت خارجی یک جسم.

رویه: سطح یا گسترش یک جسم صلب که فقط از لحاظ درازا و پهنا سنجیده می‌شود؛ بدون این که عمق یا ضخامت آن مورد نظر باشد.

حجم: فضا، بزرگی یک جسم یا یک تنه یا یک بسته.

زاویه: گشادی دو خط که در یک نقطه متلاقی باشند، میلی که هر یک نسبت به دیگری دارد.

میل: بیان ریاضی نسبت انحنا (؟)

انحنا: میل یک خط یا یک سطح نسبت به دیگری.

محدب: وضع متقابل مقعر، سطحی که به طور کروی برآمده باشد (چرا به طور کروی؟)
برآمدگی: محدب شدن.

مقعر: وضع متقابل محدب، سطحی که به طور کروی تو رفته باشد.

متوازی الاضلاع: چهار ضلعی که ضلع‌های روبه‌رویش مساوی و موازی باشند (برای تعریف متوازی الاضلاع، توازی ضلع‌های روبه‌رو یا تساوی آن‌ها کفایت می‌کند).

نکته- در چاپ ششم این فرهنگ، تعریف متوازی الاضلاع از این قرار است: شکل مسطحی که ضلع‌های روبه‌رویش موازی باشند (!).

مربع: شکل مسطحی که چهار ضلع و چهار زاویه‌ی قائمه دارد (!)

کمان: از لحاظ هندسی، قسمتی از دایره که از نصف آن

کمتر باشد (!)

استوانه: شکل دراز و گرد، مخصوصاً با بزرگی برابر (!!؟)
[نقل از کتاب: Curiosités Géom]

خبر دوم:

در مورد «اطلاعاتی مقدماتی از علم تنجیم» است که در آن چنین آمده است:

احوال کواکب: زحل و مریخ نحس‌اند، زحل نحس اکبر و مریخ نحس اصغر. مشتری و زهره سعدند، مشتری سعد اکبر و زهره سعد اصغر. عطارد با سعد سعد باشد و با نحس نحس. نیرین (خورشید و ماه) از تثلیث و تسدیس سعد باشند، از مقابله و تربیع و مقارنه نحس.

کواکب علویه و شمس مذکرند، زهره و قمر مؤنث... زحل سرد و خشک، مریخ و شمس گرم و خشک، مشتری و زهره گرم و تر، قمر سرد و تر، عطارد با هر کوبی طبیعت او گیرد... مدلولات کواکب: زحل کوب پیرمردان و دهقانان و

گوشه‌نشینان و ارباب خاندان‌های قدیم و مردمان سیاه و صفاران و یهودان و آن‌ها که کارهای سخت کنند. مشتری کوب قضات

و علما و اشراف و اصحاب مناصب و ارباب نوامیس و ترسایان. مریخ کوب، امرا و ترکان و اهل سلاح و خداوندان لشکر و سپاه‌سالاران و عیاران و دزدان و بت پرستان و اهل شر و فتنه. شمس کوب پادشاهان و بزرگان و ملوک و خداوندان امر و نهی و آتش پرستان. زهره‌ی کوب، زنان و خادمان و ارباب لهو و طرب و اهل عشرت و مسلمانان. عطارد کوب،

دبیران و خواجگان و بزرگان و اهل دیوان و علما و اکابر و حکیمان و شاعران و زیرکان و منجمان. قمر کوب، رسولان و پیکان و صاحب‌خبران و مسافران و اطفال و چهارپایان و

دانش مانند خود آدمی وابسته‌ی الزامات فخر و شرف است و معتقدات اخلاقی. و شاید هم دچار برخی پنداشت‌ها. و احتمالاً هم همین است که آن را جذاب و گیرا می‌کند

سیاحان. [از کتاب سی فصل خواجه نصیر]

در شماره‌ی ۳۳، در پاسخ معمای شماره‌ی قبل چنین آورده شده است:

از توضیح جک لندن مبنی بر این که اگر با پنج سگ ۵۰ میل دیگر می‌پیمود، فقط ۲۴ ساعت تأخیر داشت، نتیجه می‌گیریم که اگر با پنج سگ ۱۰۰ میل دیگر را می‌پیمود، ابتدا تأخیر نداشت. بنابراین از محلی که دو سگ فرار کرده‌اند، یعنی از پایان ۲۴ ساعت اولیه، ۱۰۰ میل تا مقصد فاصله داشته است.

اگر مدت زمانی که این فاصله را با سه سگ پیموده است، با پنج سگ طی می‌کرد، مسافتی برابر با $\frac{100 \times 5}{3} = 166\frac{2}{3}$ میل را می‌پیمود و یا این که فقط ۱۰۰ میل پیموده بود، در برابر $66\frac{2}{3}$ میل، مدت ۴۸ ساعت از وقت صرفه جویی می‌کرد.

بنابراین سرعت اولیه‌ی وی $33\frac{1}{3}$ میل در ۲۴ ساعت بوده و کل مسافتی که پیموده، برابر است با:

$$100 + 33\frac{1}{3} = 133\frac{1}{3}$$

در این شماره و در مقاله‌ای با عنوان «مراحل مهم علم نجوم» در شرح زندگی لاپلاس، دانشمند معروف فرانسوی، چنین می‌خوانیم:

نام لاپلاس با بزرگ‌ترین فرضیه‌های مربوط به کیهان‌شناسی همراه است. پیر سیمون لاپلاس از خانواده‌ای کشاورز، اما مرفه در کالوادو به دنیا آمد. بعد از این که در ادبیات مطالعاتی به عمل آورد، به تحصیل ریاضیات علاقه مند شد و به پاریس آمد و از دالامبر خواست تا در حل بعضی مسائل مربوط به مکانیک، وی را راهنمایی کند. دالامبر این مسائل را بسیار جالب یافت و از آن به بعد، لاپلاس را تحت حمایت خویش قرار داد و وی را برای تدریس ریاضیات مدرسه‌ی نظامی پیشنهاد کرد. لاپلاس در سال ۱۷۷۲ رساله‌ای را که درباره‌ی حساب فاصله (دیفرانسیل) تألیف کرده بود، برای آکادمی شهر تورن فرستاد. این موضوع موجب شد که یک سال بعد، به عضویت آکادمی علوم برگزیده شود. هم چنین به عضویت دفتر طول جغرافیایی، مؤسسه‌ی ناسیونال و آکادمی فرانسه انتخاب شد و بعد از اعاده‌ی سلطنت، مؤسسه‌ی پر دو فرانس را

تأسیس کرد.

شهرت جهانی لاپلاس به خاطر فرضیه‌ی وی درباره‌ی پیدایش منظومه‌ی شمسی است که به فرضیه‌ی لاپلاس معروف است. بنا به این فرضیه، خورشید و سیارات از یک سحابی اولیه جدا شده‌اند. فرضیه به نوعی است که عظمت منظومه‌ی شمسی، گذشته، حال و آینده‌ی آن را نیز معلوم می‌کند. در این جا از این فرضیه صحبت نمی‌کنیم و شرح و تفصیل آن را به فصلی جداگانه موکول می‌کنیم.

لاپلاس که هم دانشمند ریاضی بود و هم نویسنده‌ای ظریف، فرضیه‌ی خود را چنان تنظیم کرده که در عین حال که همه‌ی قوانین جاذبه‌ی جهانی را متضمن است، از لحاظ نگارش هم یک شاهکار به حساب می‌آید. وی در خاتمه‌ی اثر خود این عبارت را به کار برده است که نه تنها هر علاقه‌مند به علم نجوم باید آن را بیاموزد، بلکه باید آن را با آب طلا زینت سردر هر رصدخانه‌ای ساخت:

«علم نجوم، به خاطر شکوه و عظمت موضوع آن و به خاطر فضیلت تئوری‌های مربوط به آن، عالی‌ترین بنای مجلل فکر انسانی و شریف‌ترین معیار هوش وی است.»

لاپلاس کلیه‌ی مسائل پیچیده‌ی مربوط به علم نجوم را بررسی و بسیاری از آن‌ها را حل کرده و نسبت به بقیه هم راه حل را هموار ساخته است. وی فرورفتگی قطبین زمین را از روی تأثیری که در حرکات ماه دارند، تعیین کرد. علت جزر و مد را که نیوتن فقط طرحی از آن را ارائه داده بود، به طور کامل توضیح داد و از راه محاسبات مربوط به آن‌ها، جرم ماه را حساب کرد. درباره‌ی اهتزازات زمین نظریه‌ای بیان داشت، اجزای سیاره‌ی اورانوس را که توسط هرشل کشف شده بود، اندازه گرفت و درباره‌ی اختلالات حرکت آن، مطالعات دقیقی انجام داد. و بالاخره اغتشاشات حرکات سیاره‌ی مشتری و حلقه‌ی زحل را بررسی کرد. در فیزیک هم مطالعاتی انجام داد؛ جدول‌های مربوط به انکسار جوی را تنظیم کرد و فرمول کامل تعیین ارتفاعات را از روی فشارسنج به دست آورد.

صرف نظر از اثر مهم وی «بیان سیستم جهان»، سایر آثار وی که عبارت‌اند از: «رساله‌ای درباره‌ی مکانیک سماوی»، «نظریه‌ی مربوط به حرکت و شکل بیضوی سیارات»، هنوز هم از آثار اساسی و مورد مراجعه‌ی طالبان علم نجوم هستند.

پی‌نوشت.....

ریشه‌ی خارجی معادله

اشاره

در حل مسائل گوناگون معادلات، از جمله معادلات اصم، معادلات شامل لگاریتم و بعضی نمونه‌های دیگر، دانش‌آموزان پیش از شروع به حل معادله، به یافتن حدود قابل قبول برای متغیر می‌پردازند. در پایان و پس از حل معادله، جواب‌های به دست آمده را با دامنه‌ای که در ابتدا یافته‌اند، مقایسه می‌کنند. در این مقاله می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که آیا این کار کافی است؟!

x قرار دارد. ولی آیا جواب معادله است؟ اگر در معادله آزمایش کنیم، داریم: $\frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{25}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$. پس در معادله صدق نمی‌کند و $x = \frac{2}{\sqrt{7}}$ نیز قابل قبول نیست؛ با وجودی که در دامنه صدق می‌کرد!

به این ترتیب، در این نمونه دیدیم که هر جوابی که در دامنه‌ی تغییر x قرار داشته باشد، لزوماً جواب معادله نیست.

نمونه‌ی ۲. معادله‌ی زیر را حل کنید. آیا معادله جواب حقیقی دارد؟

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+7} = \sqrt{2x-1}$$

حل: ابتدا دامنه را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+7 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -\frac{7}{2} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

لذا دامنه $\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2}\right\}$ است.

برای حل معادله، دو طرف برابری را مجذور می‌کنیم. به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

نمونه‌ی ۱: معادله‌ی رادیکالی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{2x}$$

حل: ابتدا دامنه یا مقدارهای قابل قبول برای x را می‌یابیم. داریم:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

لذا دامنه $x \geq 0$ است.

برای حل معادله، دو طرف برابری را مجذور می‌کنیم:

$$x+1+2x+3+2\sqrt{(x+1)(2x+3)} = 2x$$

و به این معادله می‌رسیم:

$$2\sqrt{(x+1)(2x+3)} = -(x+4)$$

دو طرف برابری را دوباره مجذور می‌کنیم:

$$4(x+1)(2x+3) = (x+4)^2$$

$$7x^2 + 12x - 4 = 0$$

بنابراین: $7x^2 + 12x - 4 = 0$

این معادله‌ی درجه دوم، دو جواب دارد: $x = -2$ و $x = \frac{2}{7}$

$x = -2$ بیرون از دامنه است. ولی $x = \frac{2}{7}$ در دامنه‌ی تغییر

پس از انجام محاسبات خواهیم داشت:

$$26t^2 - 3t - 5 = 0 \quad \text{و از آنجا: } t = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad t_2 = -\frac{5}{13}$$

در این صورت:

$$\log_x 2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

و هم چنین:

$$\log_x 2 = -\frac{5}{13} \Rightarrow x = 2^{-\frac{13}{5}} = 2^{-3} \times 2^{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt[5]{4}}{8}$$

هر دو جواب $x = \frac{\sqrt[5]{4}}{8}$ و $x = 4$ در محدوده هستند و در

معادله صادق اند. اما تنها جواب های معادله این ها نیستند.

$x = 1$ هم جواب معادله است. شاید بتوان $x = 1$ را ریشه ی

فراموش شده نامید!

در واقع، استفاده ی صوری از دستور مربوط به تغییر مبنای

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$$

به از دست رفتن جواب منجر شده است. چرا که سمت

چپ و سمت راست تساوی فوق، می تواند دامنه های تعریف

متفاوتی داشته باشد.

اینک به سراغ مثلثات می رویم. وقتی یک برابری بین

زاویه ها داشته باشیم و از دو طرف برابری، سینوس یا کسینوس

بگیریم، غالباً با وضع مشابهی روبه رو می شویم. برای نمونه،

زوج بودن تابع کسینوس، به معنای آن است که می تواند موجب

ورود ریشه های خارجی شود.

نمونه ی ۴. معادله ی زیر را حل کنید:

$$\text{Arc cos } x - \text{Arc cos } \frac{\sqrt{2}}{2} x = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

حل: این معادله، برای مقدارهایی از x که با شرط

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{ (دامنه) سازگار باشند، معنی دارد:}$$

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} x \leq 1 &\Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

اکنون از دو طرف معادله کسینوس می گیریم:

$$\cos(\text{Arc cos } x - \text{Arc cos } \frac{\sqrt{2}}{2} x) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$2\sqrt{(x+3)(2x+7)} = -(x+11)$$

دو طرف برابری را دوباره مجذور می کنیم:

$$4x^2 + 30x - 37 = 0$$

معادله ی درجه دوم اخیر، دو جواب دارد: $x = 1$ و

$$x = \frac{-37}{4}$$

در دامنه ی جواب قرار ندارد و قابل قبول نیست.

اما $x = 1$ با وجودی که در محدوده ی دامنه قرار دارد، با

آزمایش آن در معادله ی داده شده، خواهیم دید که در آن صدق

نمی کند. اگر $x = 1$ را در معادله قرار دهید، برابری نادرست

$$2 + 3 = 1 \quad \text{در واقع } x = 1 \text{ ریشه ی معادله ی}$$

$$-\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+7} = \sqrt{2x-1}$$

است.

در نمونه ی بعدی، به سراغ لگاریتم می رویم. در این جا با

وضع متفاوتی روبه رو خواهیم شد.

«ریشه ی از دست رفته!»

نمونه ی ۳. معادله را حل کنید:

$$2 \cdot \log_{4x} \sqrt{x} + 7 \log_{16x} x^3 - 3 \log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0$$

حل: دامنه ی تعریف معادله را پیدا می کنیم:

$$x > 0, x \neq \frac{1}{4}, x \neq \frac{1}{16}, x \neq 2$$

حال داریم:

$$1 \cdot \log_{4x} x + 21 \log_{16x} x - 6 \log_{\frac{x}{2}} x = 0$$

با توجه به:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

داریم:

$$\frac{1}{\log_x 4x} + \frac{21}{\log_x 16x} - \frac{6}{\log_x \frac{x}{2}} = 0 \quad (x \neq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2\log_x 2} + \frac{21}{1+4\log_x 2} - \frac{6}{1-\log_x 2} = 0$$

$t = \log_x 2$ می گیریم، به این معادله می رسیم:

$$\frac{1}{1+2t} + \frac{21}{1+4t} = \frac{6}{1-t}$$

چون

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

خواهیم داشت :

$$(x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \sqrt{1-\frac{3}{2}x^2 + \frac{x^4}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^4}{2} = \frac{1}{2}(1 + x^4 - 2x^2)$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

با وجودی که هر دو مقدار $x = 1$ و $x = -1$ در مجموعه ی مقادیر قابل قبول برای x (یعنی در دامنه ی معادله) قرار دارند، $x = 1$ ریشه ی خارجی معادله ی ۱ است، زیرا به ازای $x = 1$ ، مقدار سمت چپ معادله ی ۱، برابر $-\frac{\pi}{4}$ می شود و نه $\frac{\pi}{4}$.

در این مثال هم دیدیم که صدق کردن مقدار به دست آمده در دامنه کافی نیست، بلکه باید جواب ها را آزمایش کرد.

حال به نمونه ی جالب توجه زیر می پردازیم؛ یک معادله ی رادیکالی با ریشه های سوم. ظاهراً به توان ۳ رساندن نمی تواند ریشه ی خارجی پدید آورد. به جای هرگونه اضافه گویی، به سراغ مسئله می رویم:

نمونه ی ۵. معادله ی زیر را حل کنید :

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2} = \sqrt[3]{x-2} \quad (2)$$

حل: مجموعه مقادیر قابل قبول x در این معادله (یعنی دامنه ی آن)، عبارت است از تمامی R .

دو طرف معادله ی ۲ را به توان ۳ می رسانیم:

$$x + 3x - 2 + 3\sqrt[3]{x(3x-2)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2}) = x - 2 \quad (3)$$

در معادله ی ۳، می توانیم به جای $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2}$ ، مقدارش از معادله ی ۱، یعنی $\sqrt[3]{x-2}$ را قرار دهیم. به دست می آید:

$$\sqrt[3]{x(3x-2)}(x-2) = -x$$

دوباره دو طرف را به توان ۳ می رسانیم:

$$x(3x-2)(x-2) = -x^3 \Rightarrow x^3 + x(3x-2)(x-2) = 0$$

$$x(x^2 + 3x^2 - 8x + 4) = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 8x + 4) = 0$$

که از آن جا به دست می آید:

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad (4)$$

و در نتیجه: $x = 1$ و $x = 0$

با آزمایش (امتحان جواب) معلوم می شود که $x = 1$ (با آن که بیرون از دامنه نیست!) یک ریشه ی خارجی است و فقط $x = 0$ قابل قبول است. در این نمونه هم دیدیم که صرف صدق کردن جواب در دامنه کافی نیست!

کار تمام نشده است! حوصله کنید تا ببینیم اشکال کار در کجاست؟ به توان ۳ رساندن، چه بار اول و چه بار دوم، نمی تواند مشکلی به وجود آورد. اما در این بین، یک عمل می ماند که می تواند موجب تردید شود. این عمل به آن جا مربوط می شود که سمت چپ معادله ی ۲ را با سمت راست آن



عوض کردیم؛ یعنی به جای $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2}$ ، مقدار $\sqrt[3]{x-2}$ را گذاشتیم. باید در همین جا باشد که ریشه‌ی خارجی فرصتی برای ورود یافته باشد. همه‌ی بحث به همین تبدیل ارتباط دارد.

درواقع اگر برابری $a + b = c$ (۵) را در نظر بگیریم و دو طرف آن را به توان ۳ برسانیم، به این برابری می‌رسیم:

$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3abc = c^3$ (۶)
واضح است، تمام عددهای حقیقی که در تساوی ۵ صدق کنند، در تساوی ۶ هم صادق‌اند. اما عکس این حکم درست نیست. برابری ۶ به ازای $a = b = -1$ و $c = 1$ برقرار است، درحالی‌که برابری ۵، یعنی $a + b = c$ ، به ازای همین مقادیرها برقرار نیست.

نمونه‌ی ۶. معادله‌ی زیر را حل کنید. آیا معادله جواب دارد؟

$$2 \operatorname{Arc} \cos x + \operatorname{Arc} \sin(1-x) = -\frac{\pi}{2} \quad (7)$$

حل: این معادله برای مقادیرهایی از x که در شرایط زیر سازگار باشند، معنی دارد:

(الف) $-1 \leq x \leq 1$

(ب) $-1 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

در نتیجه، دامنه‌ی معادله (اشتراک الف و ب) عبارت است از:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

حال داریم:

$$2 \operatorname{Arc} \cos x = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \sin(1-x)$$

از دو طرف معادله کسینوس می‌گیریم:

$$\cos(2 \operatorname{Arc} \cos x) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \sin(x)\right)$$

$$2 \cos^2(\operatorname{Arc} \cos x) - 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arc} \sin(1-x)\right)$$

$$2x^2 - 1 = -\sin(\operatorname{Arc} \sin(1-x))$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 1 = -(1-x) \Rightarrow 2x^2 - 1 = -1 + x$$

پس داریم:

$$2x^2 - x = 0$$

و بنابراین جواب‌های معادله عبارت‌اند از:

$$x = 0, x = \frac{1}{2}$$

هر دو جواب به دست آمده در دامنه قرار می‌گیرند، اما هیچ‌کدام در معادله‌ی ۷ صدق نمی‌کنند!

کافی است جواب‌ها را در معادله‌ی داده شده آزمایش کنیم:
 $x = 0 : 2 \operatorname{Arc} \cos 0 + \operatorname{Arc} \sin(1-0) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$

$$x = 1 : 2 \operatorname{Arc} \cos 1 + \operatorname{Arc} \sin 0 = 2(0) + (0) = 0 \neq -\frac{\pi}{2}$$

بنابراین، معادله‌ی اخیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی جواب ندارد. به نقش بی‌بدیل آزمایش کردن جواب‌های به دست آمده در معادله توجه کنید.

راه دیگری نیز می‌توان ارائه داد. بدون حل معادله‌ی

$$2 \operatorname{Arc} \cos x + \operatorname{Arc} \sin(1-x) = -\frac{\pi}{2}$$

می‌توان نشان داد که معادله جواب ندارد. توجه کنید که:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arc} \sin(1-x) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad 0 \leq 2 \operatorname{Arc} \cos x \leq 2\pi$$

حاصل جمع دو عبارت $2 \operatorname{Arc} \cos x$ و $\operatorname{Arc} \sin(1-x)$ در

صورتی برابر $-\frac{\pi}{2}$ خواهد شد که هر دو کمترین مقدار خود را

بگیرند. در حالی که هیچ‌کدام از آن‌ها نمی‌توان یافت که هم

$$2 \operatorname{Arc} \cos x = 0 \quad \text{و هم} \quad \operatorname{Arc} \sin(1-x) = -\frac{\pi}{2}$$

نمونه‌های بالا کافی است تا قانع شویم که در پایان حل معادله، جواب را آزمایش کنیم. حوزه‌ی تعریف (یا مجموعه‌ی مقادیرهای قابل قبول برای مجهول یا به زبان ساده، دامنه) و بیرون نبودن جواب‌ها از دامنه، ما را از آزمایش جواب‌هایی که به دست می‌آوریم، بی‌نیاز نمی‌کند.

تمرین

۱. معادله را حل کنید:

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}$$

۲. معادله را حل کنید:

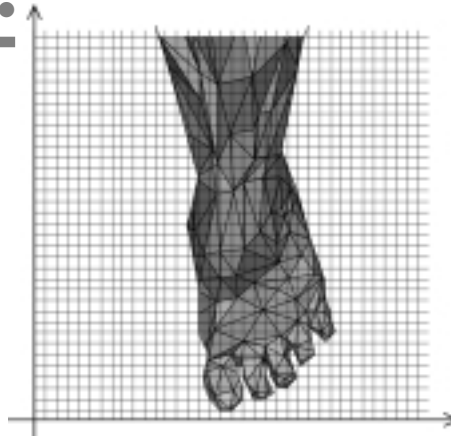
$$\operatorname{Arc} \sin x - \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

۳. آیا این معادله جواب دارد؟

$$\sqrt{|x+5|} - \sqrt{|x+2|} = 1$$

۴. این معادله چند ریشه دارد؟

$$1 \circ \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{4}} x - 3 \log_{16} x^y = 0$$



رویکرد هندسی و جبری - مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره

یکی از مهم ترین پیوندها و اتصال ها در همه ی ریاضیات ، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است .
از استانداردهای موضوعی NCTM

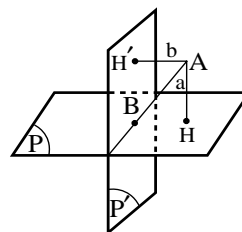
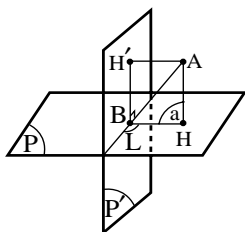
در این شماره نیز اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم .
نکته ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی ، رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه ، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله های هندسه مانند «تحدید یا کوچک تر کردن مسئله ، مسئله را حل شده فرض کردن ، به کارگیری مسئله های خویشاوند برای حل یک مسئله ، چگونگی به کارگیری مکان های هندسی و استفاده از روش های متفاوت حل یک مسئله» را مطرح می کنیم تا دانش آموزان به دیدگاه های جدیدی برای حل مسئله های هندسه دست یابند . در ضمن لازم است گفته شود ، مسئله هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری - مختصاتی حل می کنیم ، کلیدی هستند و از کتاب های درسی هندسه ی (۱) و هندسه ی (۲) انتخاب شده اند تا دانش آموزان بتوانند مسأله های دیگر این کتاب ها ، هم چنین مسأله های دیگر از کتاب های هندسه را با استفاده از این دو رویکرد ، به راحتی حل کنند .

حل:

الف) روش هندسی

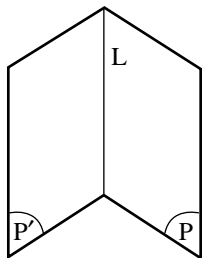
فصل مشترک دو صفحه ی P و P' را L ، پای عمود وارد از A بر صفحه ی P را H و پای عمود وارد از A بر صفحه ی P' را

مسئله ی ۱۳. اگر دو صفحه ی P و P' برهم عمود باشند و نقطه ی A از دو صفحه ی P و P' به ترتیب به فاصله های a و b باشد ، ثابت کنید فاصله ی نقطه ی A تا فصل مشترک این دو صفحه برابر است با $\sqrt{a^2 + b^2}$.



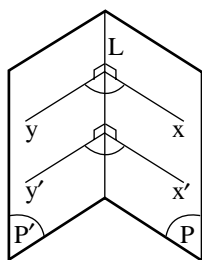
نکته: اگر نقطه‌ی A روی خط L باشد، فاصله‌ی A از L را مساوی صفر تعریف می‌کنیم.

زاویه‌ی مسطحه‌ی یک فرجه. هرگاه دو صفحه‌ی P و P' در خط L یکدیگر را قطع کنند، چهار فرجه پدید می‌آید که دو به دو متقابل به رأس اند. در واقع، هر دو نیم صفحه با مرز مشترک L یک فرجه پدید می‌آورند که شکل، یکی از این فرجه‌ها را نشان می‌دهد.



این فرجه را به صورت P-L-P' نمایش می‌دهند. L را یال فرجه و P و P' را دو وجه فرجه می‌نامند. به همین دلیل، فرجه را زاویه‌ی دو وجهی نیز می‌نامند.

اکنون اگر از نقطه‌ی O واقع بر L دو خط Ox و Oy را به ترتیب در دو صفحه‌ی P و P' عمود بر L رسم کنیم، یعنی $Ox \perp L$ ، $Oy \perp L$ و $Ox \subset P$ ، $Oy \subset P'$ ، در این صورت زاویه‌ی xoy را زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P-L-P' می‌توانیم از یک نقطه‌ی اختیاری مانند O واقع بر L، صفحه‌ای بر L عمود کنیم تا صفحه‌های P و P' را به ترتیب در فصل مشترک Ox و Oy قطع کند. زاویه‌ی xoy زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P-L-P' است. بدیهی است که اندازه‌ی این زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه، به جای نقطه‌ی O روی یال L بستگی ندارد. یعنی اگر از نقطه‌ی دیگری مانند O' واقع بر L، صفحه‌ای بر L عمود کنیم تا در صفحه‌ی P و P' را در O'x' و O'y' قطع کند، زاویه‌ی x'o'y' نیز زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P-L-P' است. یعنی $x'o'y' = xoy$ است.

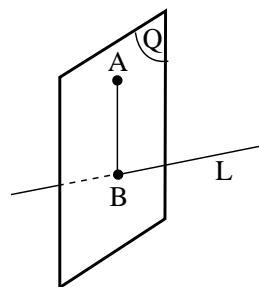


نکته: از تعریف بالا نتیجه می‌شود که اگر فرجه‌ی P-L-P' درون این فرجه و غیر واقع بر

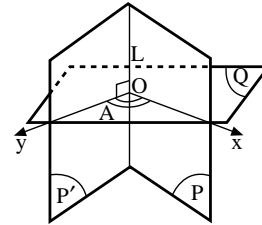
H' می‌نامیم. بر دو خط متقاطع AH و AH' یک صفحه می‌گذرد که آن را صفحه‌ی Q می‌نامیم. این صفحه بر خط L، یعنی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' عمود است، زیرا L بر AH عمود است. چون خط AH که بر صفحه‌ی P عمود است، بر تمام خط‌های صفحه‌ی P و از جمله بر خط L عمود می‌باشد، هم چنین L بر خط AH' نیز عمود است. زیرا به دلیل این که AH' بر صفحه‌ی P' عمود است، بر تمام خط‌های این صفحه و از جمله بر خط L که یک خط از صفحه‌ی P' می‌باشد نیز عمود است. « در نتیجه، خط L بر صفحه‌ی Q عمود است. اکنون نقطه‌ی برخورد صفحه‌ی Q با خط L را B می‌نامیم و از B به H و H' وصل می‌کنیم. چون خط L بر صفحه‌ی Q عمود است، پس بر تمام خط‌های این صفحه و در نتیجه بر AB عمود است. در نتیجه، پاره خط AB فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' است. یعنی پاره خطی است که می‌خواهیم ثابت کنیم اندازه‌ی آن $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ است.

از عمود بودن صفحه‌ی Q بر خط L، فصل مشترک دو صفحه‌ی عمود بر هم P و P' نتیجه می‌شود که زاویه‌ی $\widehat{HBH'}$ زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی حاصل از دو صفحه‌ی P و P' است. چون این دو صفحه بر هم عمودند، پس $\widehat{HBH'} = 90^\circ$ است. از طرف دیگر، در چهارضلعی $AHBH'$ ، $\widehat{H} = 90^\circ$ ، $\widehat{H'} = 90^\circ$ و $\widehat{HBH'} = 90^\circ$ پس زاویه‌ی چهارم این چهارضلعی یعنی $\widehat{HAH'} = 90^\circ$ و چنین معنی می‌دهد که چهارضلعی مورد نظر مستطیل است. در این مستطیل، بنا به فرض مسئله، دو ضلع $AH = a$ و $AH' = b$ هستند. بنابراین، اندازه‌ی قطر آن $AH = \sqrt{a^2 + b^2}$ و حکم مسئله درست است.

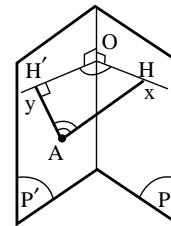
تعریف فاصله‌ی نقطه از خط. نقطه‌ی A و خط L را که بر A نمی‌گذرد، در نظر می‌گیریم. اگر از A صفحه‌ی Q را که منحصر به فرد است، بر خط L عمود کنیم تا این خط را در نقطه‌ی ثابت B قطع کند، اندازه‌ی پاره خط AB را فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L می‌نامند.



دو صفحه‌ی P و P' داده شده باشد و از این نقطه صفحه‌ای مانند Q بر L رسم کنیم تا یال L را در O و صفحه‌های P و P' را در Ox و Oy قطع کند، زاویه‌ی xOy همان زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P-L-P' است.



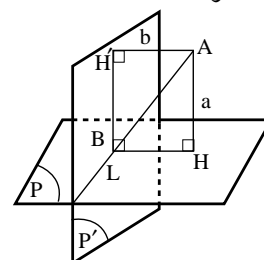
نتیجه: اگر از A عمود AH بر صفحه‌ی P و عمود AH' بر صفحه‌ی P' فرود آوریم، صفحه‌ی HAH' همان صفحه‌ای است که از A عمود بر یال L رسم می‌شود و اگر فصل مشترک این صفحه با صفحه‌های P و P' را به ترتیب Ox و Oy بنامیم، زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P-L-P' است.



به علاوه، به دلیل محاطی بودن چهارضلعی HAH'B، چون $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ و در نتیجه $\hat{H} + \hat{H}' = 180^\circ$ است، پس $\hat{H} + \hat{H}' = 180^\circ$ ، یعنی دو زاویه‌ی $\hat{H}AH'$ و $\hat{H}OH'$ مکمل یکدیگرند.

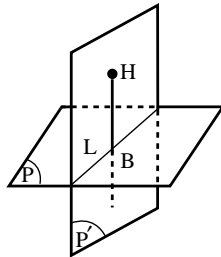
اثبات هندسی با روشی دیگر

فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' را L می‌نامیم. از نقطه‌ی A صفحه‌ی Q را عمود بر خط L رسم می‌کنیم و محل تلاقی Q با L را B می‌نامیم. طول پاره خط AB همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از L، فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' است. خط L دو صفحه‌ی P و P' است، پس صفحه‌ی Q هم بر صفحه‌ی P' عمود است.



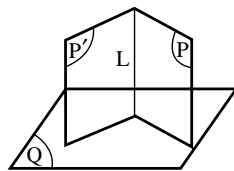
(شکل الف)

از نقطه‌ی A عمود AH بر صفحه‌ی P و عمود AH' بر صفحه‌ی P' رسم می‌کنیم. می‌دانیم که بنا به فرض $AH = a$ و $AH' = b$ است (شکل الف). در صفحه‌ی Q قرار دارند، زیرا می‌دانیم اگر دو صفحه‌ی بر هم عمود باشند و از یک نقطه واقع در یک صفحه، عمودی بر صفحه‌ی دیگر رسم کنیم، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد (شکل ب).



(شکل ب)

فصل مشترک دو صفحه‌ی Q و P' خط H'b است که بر صفحه‌ی P عمود است، زیرا P, P', Q سه صفحه‌ی دو به دو عمود بر هم هستند و می‌دانیم که اگر دو صفحه بر یک صفحه عمود باشند، فصل مشترکشان هم بر آن صفحه عمود است (شکل پ).



(شکل پ)

از عمود بودن H'b بر صفحه‌ی P نتیجه می‌شود که $\hat{H}'BH = 90^\circ$ است. چهارضلعی AHBH' که در صفحه‌ی Q است، سه زاویه‌ی قائمه دارد که عبارت‌اند از $\hat{H}'BH = \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$. پس این چهارضلعی مستطیل است. ضلع‌های مجاور این مستطیل $AH = a$ و $AH' = b$ هستند. پس اندازه‌ی قطر آن $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ است که همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' است و حکم مسئله درست است.

مثال ۱. دو صفحه‌ی عمود بر هم P و P' و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۸ از صفحه‌ی P و به فاصله‌ی ۶ از صفحه‌ی P' قرار دارد. فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک این دو صفحه را تعیین کنید.

حل: با توجه به مسئله‌ی حل شده، $a = 8$ و $b = 6$ است. پس فاصله‌ی خواسته شده برابر است با:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

مثال ۲. دو صفحه‌ی عمود بر هم P و P' داده شده‌اند. نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۲۵ از خط L ، فصل مشترک این دو صفحه محسوب می‌شود و به فاصله‌ی ۲۴ از صفحه‌ی P واقع است. فاصله‌ی این نقطه از صفحه‌ی P' را تعیین کنید.

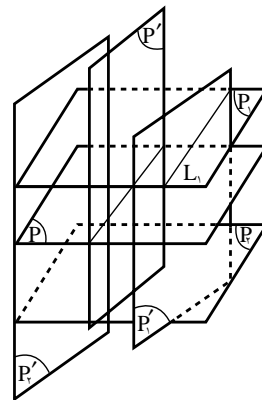
حل: با توجه به مسئله‌ی حل شده (مسئله‌ی ۱۳)، $a = 24$ و $\sqrt{a^2 + b^2} = 25$ است.

بنابراین داریم:

$$\sqrt{24^2 + b^2} = 25 \Rightarrow 576 + b^2 = 625 \Rightarrow b^2 = 49 \Rightarrow b = 7$$

فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P'

مثال ۳. دو صفحه‌ی عمود بر هم P و P' با فصل مشترک L داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی معلوم a و از صفحه‌ی P' به فاصله‌ی معلوم b باشد.

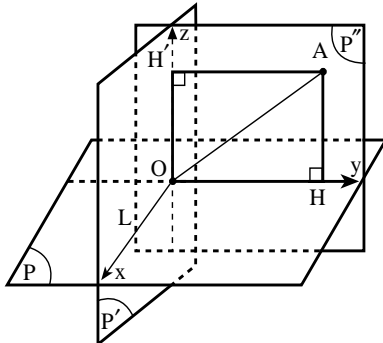


حل: می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از یک صفحه‌ی داده شده مانند P به فاصله‌ی معلوم a قرار دارد، دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P و به فاصله‌ی a از آن است. که در دو طرف این صفحه قرار دارند. این دو صفحه را P_1 و P_2 می‌نامیم. هم‌چنین، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از صفحه‌ی داده شده‌ی P' به فاصله‌ی معلوم b واقع است، دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P' به فاصله‌ی b از آن و در دو طرف آن است. این دو صفحه را P'_1 و P'_2 می‌نامیم. فصل مشترک‌های این چهار صفحه را که دو به دو عمود بر هم نیز هستند، L_1 ، L_2 ، L_3 و L_4 می‌نامیم. این چهار خط جواب مسئله‌اند که با خط L فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' نیز موازی هستند.

(ب) اثبات به روش جبری - مختصاتی

دو صفحه‌ی عمود بر هم P و P' و نقطه‌ی A به فاصله‌ی a

از صفحه‌ی P و به فاصله‌ی b از صفحه‌ی P' داده شده‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم که فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' که آن را L می‌نامیم، مساوی $\sqrt{a^2 + b^2}$ است.



برای حل مسئله یا رویکرد جبری - مختصاتی، نخست باید یک دستگاه مختصات مناسب در فضا انتخاب کنیم. برای این کار، صفحه‌ی گذرنده بر AH (خطی که از A بر P عمود شده است) و AH' (خطی که از A بر صفحه‌ی P عمود شده است) را P'' می‌نامیم. این صفحه، بر دو صفحه‌ی P و P' عمود است. در واقع P ، P' و P'' سه صفحه‌ی دوجه‌دوی عمود بر هم هستند. نقطه‌ی برخورد P'' با خط L را O می‌نامیم و خط‌های OH و OH' را رسم می‌کنیم. سه خط L ، OH' و OH را روی این سه خط در نظر می‌گیریم. برای مثال Ox را روی خط L ، Oy را روی خط OH و Oz را روی OH' می‌گیریم. در این صورت، نقطه‌ی A به مختصات $A = (x, y, z)$ است. با توجه به این که پاره‌خط AO همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L ، فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' است، پس داریم:

$$A = (x, y, z), O = (0, 0, 0) \Rightarrow AO = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow AO = \sqrt{a^2 + b^2}$$

پس حکم مسئله درست است.

نکته‌ی ۱. اگر در روش اثبات جبری - مختصاتی، صفحه‌های P و P' را به ترتیب صفحه‌ی xoy و xoz اختیار کنیم، اما صفحه‌ی yoz را صفحه‌ای غیر از HAH' اختیار کنیم، یعنی صفحه‌ای مانند P'' بگیریم (شکل ۱) نقطه‌ی A به مختصات زیر خواهند بود:

$$A = (x, y, z)$$

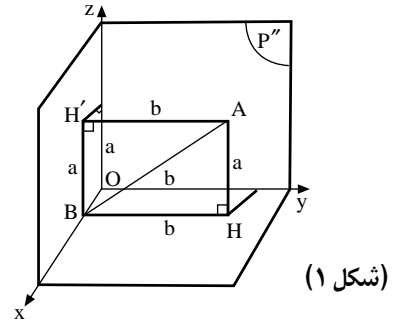
در این صورت، اگر پای عمود رسم شده از A را که روی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' است XB

بنامیم، نقطه‌ی B به مختصات زیر خواهد بود:

$$B = (x, 0, 0)$$

و از آن جا، طول پاره خط AB برابر است با:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x - x)^2 + (b - 0)^2 + (a - 0)^2} \\ \Rightarrow AB &= \sqrt{0 + b^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$



به طوری که دیده می شود، محاسبه کمی طولانی تر و مشکل تر می شود.

نکته‌ی ۲. اگر دستگاه مختصات قائم را در حالت کلی

در نظر بگیریم، یعنی هیچ یک از صفحه‌های مختصات بر صفحه‌های P و P' منطبق نباشند، محاسبه طولانی تر و مشکل تر خواهد بود. در این حالت، A(x₁, y₁, z₁) و دو صفحه‌ی P و P' به معادله‌های:

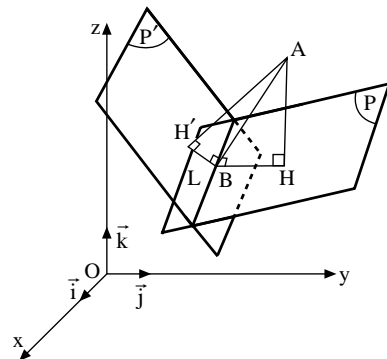
$$P: ax + by + cz + d = 0, \quad P': a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

با شرط $aa' + bb' + cc' = 0$ خواهند بود.

با این فرض خط d فصل مشترک دو صفحه‌ی P و

P' به معادله‌ی زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ aa' + bb' + cc' = 0 \end{cases}$$



در این حالت، فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = a$$

$$AH' = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} = b \quad P' \text{ از صفحه‌ی } A$$

خواهد بود.

از طرف دیگر، مختصات نقطه‌ی B، محل برخورد صفحه‌ی HAH' (یا همان صفحه‌ی Q که در راه حل هندسی دیدیم) باید محاسبه شود و سپس طول پاره خط

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ به دست آید و ثابت شود که}$$

است. اما برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی Q، باید نمودار نرمال این صفحه را به دست آوریم. این بردار قائم، از دستور زیر محاسبه‌ی بار $\vec{V}_P \wedge \vec{V}_{P'}$ است.

یعنی داریم:

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_P \wedge \vec{V}_{P'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

البته شرط $aa' + bb' + cc' = 0$ را نیز همواره باید

در نظر داشته باشیم.

به طوری که دیده می شود، حل مسئله با انتخاب این دستگاه مختصات قائم در فضا، خیلی طولانی تر و مشکل تر از اولین راه حل جبری مختصاتی است که در آن صفحه‌های P و P' و صفحه‌ی Q (صفحه‌ای که از A بر دو صفحه‌ی P و P' عمود می شود) را به عنوان صفحه‌های مختصات اختیار کرده بودیم.

به طوری که دیده می شود، انتخاب دستگاه مختصات در

راه حل جبری - مختصاتی، از اهمیت فراوانی برخوردار است.

برای هر یک از روش‌های ذکر شده‌ی جبری - مختصاتی،

مثال‌هایی می توان مطرح کرد. ما برای آخرین حالت، یعنی

حالتی که دستگاه مختصات را در حالت کلی گرفته ایم، مثالی

ذکر می کنیم.

مثال: دو صفحه‌ی

$$P': x - 2y + 4 = 0, \quad P: 2x + y - 2z - 2 = 0$$

داده شده اند، اگر نقطه‌ی A = (2, -1, 4) و فاصله‌ی

نقطه‌ی A از صفحه‌ی P را با a و فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی

P' را با b نمایش دهیم، ثابت کنید. فاصله‌ی نقطه‌ی A از

$$\Rightarrow \vec{AM} = (2, -3, 4), \vec{L} = (4, 2, 5)$$

$$\Rightarrow \vec{AM} \wedge \vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -23\vec{i} - 6\vec{j} + 16\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} \wedge \vec{L} = (-23, -6, 16)$$

$$\Rightarrow \vec{AM} \wedge \vec{L} = \sqrt{(-23)^2 + (-6)^2 + (16)^2} = \sqrt{821},$$

$$|\vec{L}| = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{821}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{821}{45}}$$

اکنون فاصله‌های نقطه‌ی A از صفحه‌های P و P' را به دست می‌آوریم:

$$AH = a = \frac{|4 - 1 - 8 - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{7}{3}, \quad AH' = b = \frac{|2 + 2 + 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{64}{5}} = \sqrt{\frac{821}{45}} = AB$$

پس حکم درست است.

خط L، یعنی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' برابر $\sqrt{a^2 + b^2}$ است.

حل: شرط عمود بودن دو صفحه برقرار است، زیرا داریم:

$$\vec{V}_P = (2, 1, -2), \quad \vec{V}_{P'} = (1, -2, 0) \Rightarrow \vec{V}_P \cdot \vec{V}_{P'} = (2)(1) + (1)(-2) + (-2)(0) = 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{V}_P \perp \vec{V}_{P'} \Rightarrow P \perp P'$$

اکنون معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' را به دست می‌آوریم. داریم:

$$P: \begin{cases} 2x + y - 2z - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow L: \frac{x}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{5}$$

برای به دست آوردن فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L، از دستور

$$AB = \frac{|\vec{AM} \wedge \vec{L}|}{|\vec{L}|}$$

هادی خط L و M نقطه‌ای دل‌خواه متعلق به L است. داریم:

$$M = (0, 2, 0) \in L, \quad A = (2, -1, 4)$$

۱. در استخری یک قایق لاستیکی باد شده انداخته‌ایم. کدام عمل سطح آب را بالاتر می‌آورد: انداختن سکه‌ای درون قایق، یا انداختن سکه‌ای در آب؟

تفریح اندیشه

۲. اسماعیل قصاب، رئیس کمیته‌ی مغازه‌داران خیابان، که شامل بقال، نانوا، و سیگار فروش نیز هست، می‌باشد. تمام آن‌ها دور میزی نشسته‌اند.

- اسماعیل سمت چپ اسمال نشسته است.
- اصغر سمت چپ بقال نشسته است.
- اصلان که مقابل اسمال است نانوا نیست.
- اصغر چه دکانی دارد؟

۳. این بازیچه‌ها و اسباب‌بازی‌ها را در دست راست یا چپ اسمال نشسته‌اند:

اسباب‌بازی - اسباب‌بازی - اسباب‌بازی

اسباب‌بازی - اسباب‌بازی - اسباب‌بازی

اسباب‌بازی - اسباب‌بازی - اسباب‌بازی

اسباب‌بازی - اسباب‌بازی - اسباب‌بازی

اسباب‌بازی - اسباب‌بازی - اسباب‌بازی

اسباب‌بازی - اسباب‌بازی - اسباب‌بازی



مسائل مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان



المپیاد ریاضی در کشور انگلستان سال ۱۹۹۹

کشور، به همراه مطالبی درباره‌ی نحوه‌ی برگزاری این مسابقات، در کتابی به قلم تونی گاردینر، سرپرست کمیته‌ی المپیاد ریاضی این کشور، گردآوری و توسط نگارنده ترجمه شده است که انتشارات مدرسه آن را منتشر کرده است.^۱ در این شماره، مسائل سال ۱۹۹۹ (منتخبی از مسائل دوره‌های اول و دوم) را همراه با راه‌حل آن‌ها می‌آوریم.

درباره‌ی المپیادهای ریاضی انگلستان، پیش از این توضیحاتی داده‌ایم و مسائلی از آن‌ها را در شماره‌های ۵۲ و ۶۰ آورده‌ایم. در شماره‌ی ۵۲، مسائل المپیاد ریاضی سال ۲۰۰۰ و در شماره‌ی ۶۰، منتخبی از مسائل سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ را آوردیم. هم‌چنین، توضیحاتی نیز در مورد چگونگی برگزاری المپیاد ریاضی این کشور دادیم. یادآور می‌شوم، مسائل المپیادهای ریاضی این

مسائل

۱. من چهار فرزند دارم. سن هر یک از آن‌ها به واحد سال، عددی طبیعی، بین یا مساوی ۲ و ۱۶ است و وعدد سن همه‌ی آن‌ها متمایز است. یک سال قبل، مربع سن بزرگ‌ترین بچه، مساوی مجموع مربع‌های سن سه‌تای دیگر بود و یک سال بعد، مجموع مربع‌های سن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین بچه‌ها، مساوی مجموع مربع‌های سن دو بچه‌ی دیگر خواهد شد. آیا با این اطلاعات، می‌توان سن بچه‌ها را به صورت یکتا مشخص کرد و همه‌ی حالت‌های ممکن برای سن آن‌ها را به دست آورد.

۲. دایره‌ای به قطر AB مفروض است و X نقطه‌ی ثابتی روی AB و بین A و B است. نقطه‌ی متغیر p (متمایز از A و B) روی

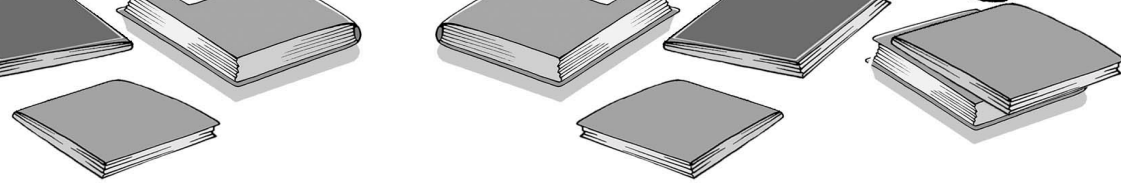
نیم‌دایره‌ی به قطر AB قرار دارد. ثابت کنید به ازای هر نقطه‌ی p ، نسبت $\frac{\tan \angle APX}{\tan \angle PAX}$ همواره مقدار ثابتی دارد.

۳. مقداری ثابت و طبیعی برای C بیابید که معادله‌ی زیر دقیقاً سه جواب در مجموعه‌ی اعداد طبیعی به صورت (x, y) داشته باشد:

$$xy^2 - y^2 - x + y = c$$

۴. برای هر عدد طبیعی n فرض کنید، S_n مجموعه‌ای شامل نخستین n عدد طبیعی باشد:

$$S_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n\}$$



به ازای چه مقدار n می توان S_n را به صورت اجتماع دو زیرمجموعه‌ی جدا از هم و ناتهی نشان داد، به طوری که مجموع اعضای زیرمجموعه‌ی یکسان باشد؟

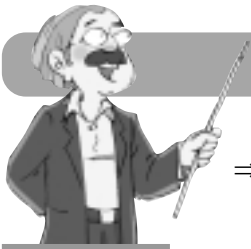
۵. عددهای حقیقی و نامنفی p, q, r و صادق در رابطه‌ی $p+q+r=1$ مفروض اند. ثابت کنید:

$$\sqrt{(pq+qr+rp)} \leq \sqrt{2+9pqr}$$

۶. همه‌ی عددهای طبیعی به فرجه‌ی $3n^2+n+1$ را در نظر بگیرید.

کوچک‌ترین مقدار برای مجموع ارقام (در مبنای ۱۰) این گونه عددها چیست؟

حل مسائل



$$\Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2 - (b-1)^2 = (c-1)^2 + 4 \\ (a+1)^2 - (b+1)^2 = (c+1)^2 - 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [(a-1)-(b-1)][(a-1)+(b-1)] = (c-1)^2 + 4 \\ [(a+1)-(b+1)][(a+1)+(b+1)] = (c+1)^2 - 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a+b-2) = (c-1)^2 + 4 \\ (a-1)(a+b+2) = (c+1)^2 - 16 \end{cases}$$

و با فرض $a-b=x$ و $a+b=y$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x(y+2) = (c+1)^2 - 16 \\ x(y-2) = (c-1)^2 + 4 \end{cases}$$

و با توجه به فرض $6 \leq c \leq 14$ کافی است مقادیر متفاوتی به c بدهیم و از آن‌جا x, y, a, b را بیابیم؛ مثلاً به ازای $c=6$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x(y+2) = 22 \\ x(y-2) = 29 \end{cases}$$

و از تقسیم دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{y+2}{y-2} = \frac{23}{29} \Rightarrow 23y - 66 = 29y + 58 \Rightarrow y = 31, x = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=31 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow a=16, b=15$$

و جواب $(a, b, c, d) = (16, 15, 6, 3)$ به دست می‌آید که قابل

قبول است.

به ازای $c=7$ نتیجه می‌شود:

۱. اگر سن بچه‌ها را به ترتیب از بزرگ به کوچک، a, b, c, d و در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$16 \geq a > b > c > d \geq 2$$

$$\begin{cases} (a-1)^2 = (b-1)^2 + (c-1)^2 + (d-1)^2 \\ (a+1)^2 + (d+1)^2 = (b+1)^2 + (c+1)^2 \end{cases}$$

و با تفریق رابطه‌ی پایین از بالا نتیجه می‌شود:

$$4a + d^2 + 2d + 1 = 4b + 4c - d^2 + 2d - 1$$

$$\Rightarrow 2d^2 + 2 = 4(b+c-a) \Rightarrow d^2 + 1 = 2(b+c-a)$$

بنابراین، $d^2 + 1$ زوج و در نتیجه d^2 فرد و لذا d هم فرد

است. هم‌چنین، نتیجه می‌شود $b+c-a = \frac{d^2+1}{2}$

چون $a > b$ پس $c > b+c-a$. در نتیجه: $c > \frac{d^2+1}{2}$ و چون

d فرد است، پس حداقل مقدار d مساوی ۳ است. از آن‌جا

$$c > \frac{9+1}{2} = 5$$

$$\text{حالی که } d=5 \text{ باشد، } c > \frac{25+1}{2} = 13 \text{ و لذا } c=14$$

و برای a و b نیز عددی به غیر از $b=15$ و $a=16$ باقی

نمی‌ماند. پس در این حالت، جواب منحصر به

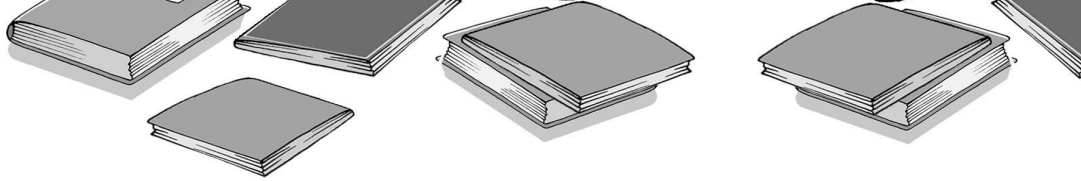
فرد $(a, b, c, d) = (16, 15, 14, 5)$ به دست می‌آید که در معادلات

بالا سوق نمی‌کنند.

پس، تنها جواب قابل قبول برای $d=3$ است و از آن‌جا

نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} (a-1)^2 = (b-1)^2 + (c-1)^2 + 4 \\ (a+1)^2 + 16 = (b+1)^2 + (c+1)^2 \end{cases}$$



$$\frac{BX}{PX} = \frac{\sin \theta}{\sin B} = \frac{\cos \alpha}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \quad (2)$$

و از تقسیم رابطه‌ی ۱ بر رابطه‌ی ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{AX}{PX} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{tg \alpha}{\cos \alpha} = \frac{AX}{PX} = \text{مقدار ثابت}$$

۳. با فرض $x = t + 1$ رابطه به صورت زیر ساده‌تر می‌شود:

$$\begin{aligned} (t+1)y^2 - y^2 - (t+1) + y &= c \\ \Rightarrow ty^2 - t - 1 + y &= c \Rightarrow t(y-1)(y+1) + (y-1) = c \\ \Rightarrow (y-1)(ty+t+1) &= c \end{aligned}$$

حال با فرض $c = 1$ نتیجه می‌شود $(y-1)$ و t هر دو

نامنفی اند:

$$\begin{cases} y-1=1 \\ ty+t+1=1 \end{cases} \Rightarrow y=2, t=0 \Rightarrow x=1$$

به این ترتیب، تنها یک جواب برای (x, y) به دست می‌آید.

با فرض $c = 2$ ، تنها یک جواب قابل قبول $(1, 3) = (x, y)$ به دست می‌آید.

پس باید c را طوری اختیار کنیم که سه جواب متمایز برای $y-1$ و $ty+t+1$ به دست آید و از آن جا سه جواب متمایز برای (x, y) پیدا شود. یعنی باید c طوری انتخاب کرد که حداقل به سه صورت به حاصل ضرب دو عامل قابل تبدیل باشد. به ازای $c = 4$ داریم:

$$\begin{cases} y-1=1 \\ ty+t+1=4 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} y-1=2 \\ ty+t+1=2 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} y-1=4 \\ ty+t+1=1 \end{cases}$$

که از اولی جواب $(2, 2) = (x, y)$ و از سوی جواب $(1, 5) = (x, y)$ به دست می‌آید، ولی از دومی جواب قابل قبولی

به دست نمی‌آید: $(t = \frac{1}{4})$. به ازای $c = 6$ داریم:

$$(1) \begin{cases} y-1=6 \\ ty+t+1=1 \end{cases} \text{ یا } (2) \begin{cases} y-1=3 \\ ty+t+1=2 \end{cases}$$

$$\text{یا } (3) \begin{cases} y-1=2 \\ ty+t+1=3 \end{cases} \text{ یا } (4) \begin{cases} y-1=2 \\ ty+t+1=6 \end{cases}$$

که از جواب $(1, 7) = (x, y)$ به دست آمده است و از بقیه

جواب قابل قبولی به دست نمی‌آید. به ازای $c = 8$ داریم:

$$(1) \begin{cases} y-1=8 \\ ty+t+1=1 \end{cases} \text{ یا } (2) \begin{cases} y-1=4 \\ ty+t+1=2 \end{cases}$$

$$\text{یا } (3) \begin{cases} y-1=2 \\ ty+t+1=4 \end{cases} \text{ یا } (4) \begin{cases} y-1=1 \\ ty+t+1=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y+2) = 48 \\ x(y-2) = 40 \end{cases} \Rightarrow \frac{y+2}{y-1} = \frac{6}{5} \Rightarrow y = 22, x = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=22 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow a=12, b=10$$

و جواب $(a, b, c, d) = (12, 10, 7, 3)$ به دست می‌آید که آن

هم قابل قبول است.

به ازای $c = 8$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x(y+2) = 65 \\ x(y-2) = 53 \end{cases} \Rightarrow \frac{y+2}{y-2} = \frac{65}{53} \Rightarrow y = \frac{59}{3}$$

که غیر قابل قبول است، زیرا باید $y \in \mathbb{N}$ به ازای $c = 9$

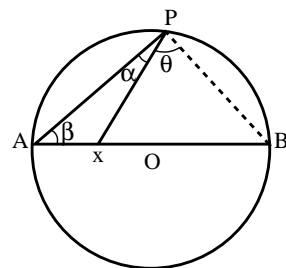
خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x(y+2) = 84 \\ x(y-2) = 68 \end{cases} \Rightarrow \frac{y+2}{y-2} = \frac{21}{17} \Rightarrow y = 19, x = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=19 \\ a-b=4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{23}{2}, b = \frac{15}{2}$$

که غیر قابل قبول است، زیرا باید a و $b \in \mathbb{N}$ به همین ترتیب، به ازای هیچ مقدار دیگر از c ، جواب قابل قبولی به دست نمی‌آید و جواب‌ها با یکی از شرایط اصلی مسئله، یعنی طبیعی بودن a, b, c, d, x, y و نیز شرط $a > b > c > d$ تناقض دارد. پس مسئله تنها دو دسته جواب دارد و بچه‌ها به ترتیب ۱۶ و ۱۵ و ۶ و ۳ سال، یا ۱۲ و ۱۰ و ۷ و ۳ سال دارند.

۲. مطابق شکل $\hat{P}AX = \beta$ و $\hat{P}XB = \alpha$ نام گذاری شده‌اند.



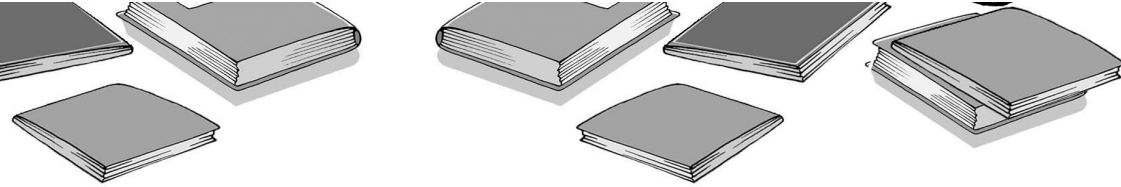
مطابق قضیه‌ی سینوس‌ها، در مثلث APX داریم:

$$\frac{AX}{PX} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (1)$$

هم چنین، واضح است که $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$ و در نتیجه:

$$\theta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sin \theta$$

و به کمک قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث PXB داریم:



وارد A و 1 را از آن خارج کنیم. یعنی:

$$A = \{3, 5, 7, \dots, k, \dots, 4k-1, k+1\}$$

حال مجموع اعضای A ، $4k^2 + k$ است (چرا؟) و در نتیجه

$B = S_n - A$ و B به دست می‌آیند. در حالت دیگر که

$n = 4k - 1$ باشد، به طریق مشابه، مسئله حل می‌شود. در این

حالت، مجموع تمام اعضای $S_n = \{1, 2, 3, \dots, 4k-1\}$ برابر

است با: $\frac{n(n+1)}{2} = 2k(4k-1) = 8k^2 - 2k$ و بنابراین، مجموع اعضای

A و B باید مساوی $k(4k-1)$ یا $4k^2 - k$ باشد و می‌توان

نوشت: $4k^2 - k = (2k-1)^2 + 3k - 1$ و با توجه به تساوی

$$n^2 = (2n-1) + 1 + 3 + 5 + \dots$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (4k-3) = (2k-1)^2$$

حال اگر $3k-1$ زوج باشد (یعنی k فرد باشد)، کافی است

تمام عددهای فرد S_m به غیر از $4k-1$ را به همراه عدد $3k-1$

در یک مجموعه قرار دهیم:

$$A = \{1, 3, 5, \dots, 4k-3, 3k-1\}$$

اکنون روشن است که مجموع اعضای A مساوی $4k^2 - k$

است. در نتیجه با فرض $B = S_n - A$ ، A و B دو

زیرمجموعه‌ی مطلوب هستند. اگر هم $3k-1$ فرد باشد k

زوج باشد، در این صورت کافی است عدد 1 را از A خارج و

عدد زوج $3k$ را جای‌گزین آن کنیم:

در این صورت، با فرض $B = S_n - A$ ، A و B

زیرمجموعه‌های مطلوب هستند (چرا؟)

بنابراین، پاسخ مسئله این است که به ازای $n = 4k$ و

$n = 4k-1$ مسئله همواره جواب دارد. لازم به ذکر است،

جواب‌هایی که به این روش پیشنهادی ما به دست می‌آیند، تنها

جواب‌های ممکن نیستند و ممکن است A و B مناسب، به

صورت‌های دیگری هم به دست بیایند. برای مثال، برای

$$S_8 = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 2\} \quad B = \{4, 6, 8\}$$

ولی جواب دیگری نیز به صورت زیر وجود دارد:

$$A = \{8, 7, 3\} \quad B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

آیا جواب دیگری می‌توانید بنویسید؟

۵. به کمک روش بازگشتی می‌نویسیم:

$$V(pq + pr + qr - pqr) \leq 2 + 2pqr$$

هم چنین داریم:

که باز هم فقط از دستگاه جواب قابل قبول $(x, y) = (1, 9)$

پیدا می‌شود. به ازای $c = 9$ نیز تنها یک جواب به دست می‌آید.

ولی به ازای $c = 10$ داریم:

$$(1) \begin{cases} y-1=1 \\ ty+t+1=10 \end{cases} \text{ یا } (2) \begin{cases} y-1=2 \\ ty+t+1=5 \end{cases}$$

$$\text{یا } (3) \begin{cases} y-1=5 \\ ty+t+1=2 \end{cases} \text{ یا } (4) \begin{cases} y-1=10 \\ ty+t+1=1 \end{cases}$$

از دستگاه، جواب قابل قبول $(x, y) = (4, 2)$ ، از دستگاه ۲

جواب قابل قبول $(x, y) = (2, 3)$ و از دستگاه جواب قابل قبول

$(x, y) = (1, 11)$ به دست می‌آید. ولی از دستگاه ۳ جواب قابل

قبولی به دست نمی‌آید $(t = \frac{1}{y})$. به این ترتیب نتیجه می‌شود که

$$c = 10$$

۴. بدیهی است، مجموع اعضای S_n مساوی $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

پس اگر $S_n = A \cup B$ ، با توجه به شرط مسئله، مجموعه

اعضای هر دو مجموعه‌ی A و B باید مساوی $\frac{n(n+1)}{4}$ باشند.

پس باید یکی از دو عدد n و $n+1$ مضرب ۴ باشند. یعنی

$n = 4k$ یا $n = 4k-1$ (و $n+1$ هر دو نمی‌توانند زوج

باشند). نشان می‌دهیم به ازای هر دوی این حالت‌ها، همواره

می‌توان S_n را به صورت اجتماع دو مجموعه‌ی مناسب A و B

نوشت. اگر $n = 4k$ باشد، در این صورت مجموع اعضای A

باید مساوی $\frac{4k(4k+1)}{4} = 4k^2 + k$ باشد و

$S_n = \{1, 2, 3, \dots, 4k\}$. حال با توجه به اتحاد

$n^2 = (2n-1) + 1 + 3 + 5 + \dots$ (که به سادگی به کمک قضیه‌ی

استقرای ریاضی ثابت می‌شود)، داریم:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (4k-1) = (2k)^2 = 4k^2$$

یعنی مجموع همه‌ی افراد فرد عضو S_n مساوی $4k^2$ است.

حال اگر k خود زوج باشد، مجموع اعضای مجموعه‌ی

$A = \{1, 3, 5, \dots, 4k-1, k\}$ مساوی $4k^2 + k$ است و در نتیجه

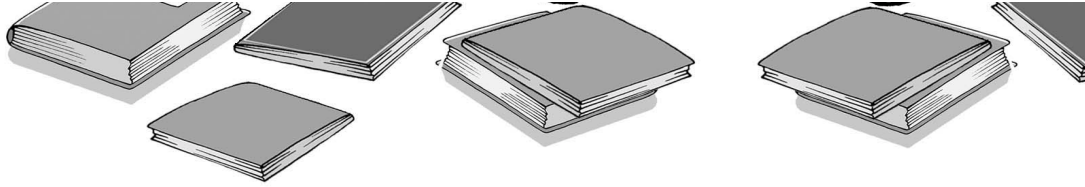
با فرض $B = S_n - A$ ، مجموعه‌ی اعضای B هم مساوی

$4k^2 + k$ می‌شود (چرا؟) و A و B زیر مجموعه‌های مطلوب

هستند. اما اگر k فرد باشد، یعنی جزو عددهای

$1, 3, 5, \dots, 4k-1$ باشد، چه باید کرد؟ در این حالت نیز جای

نگرانی وجود ندارد و کافی است عدد $k+1$ را که زوج است،



بنابراین، مجموع ارقام $f(n)$ مساوی ۳ است و به نظر می‌رسد که این کمترین مجموع ارقام برای $f(n)$ ها باشد. اما درستی این موضوع را اثبات هم می‌کنیم. اگر مجموع ارقام $f(n)$ بخواهد از این کمتر باشد، باید مساوی ۱ یا ۲ شود. مجموع ارقام $f(n)$ نمی‌تواند مساوی ۱ باشد، زیرا در این صورت باید $f(n) = 10^k$ باشد و این ناممکن است، زیرا $f(n)$ همواره عددی فرد است (چرا؟). اما مجموع ارقام $f(n)$ مساوی ۲ هم نمی‌تواند باشد، زیرا با توجه به فرد بودن $f(n)$ ، رقم سمت راست آن نمی‌تواند صفر باشد. پس در صورتی می‌تواند مجموع ارقام آن مساوی ۲ شود که دو رقم ۱ در دو طرف آن و بقیه‌ی رقم‌های بین این دو رقم، مساوی صفر باشد؛

یعنی: $f(n) = 100\dots 01 = 10^k + 1$
و از آن‌جا نتیجه می‌شود $3n^2 + n = 10^k$ و در نتیجه:

$$n(3n+1) = 2^k \cdot 5^k$$

اگر n زوج باشد، $3n+1$ فرد است و در نتیجه $5^\alpha \cdot 2^k = n$ و $3n+1 = 5^{k-\alpha}$ و $0 \leq \alpha \leq k$ ولی با این فرض نتیجه می‌شود.

$$3 \times 2 \cdot 5^\alpha + 1 = 5^{k-\alpha}$$

و عبارت سمت راست تساوی بر ۵ بخش پذیر است، اما عبارت سمت چپ، در تقسیم بر ۵ باقی مانده‌ی ۱ دارد. بنابراین $\alpha = 0$ و در نتیجه:

$$3 \times 2^k + 1 = 5^k, \quad n = 2^k, \quad 3n+1 = 5^k$$

اما به سادگی و مثلاً به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که همواره $5^k > 3 \times 2^k + 1$ و در نتیجه تساوی بالا هرگز برقرار نمی‌شود. اما اگر n فرد باشد، $3n+1$ زوج است و در نتیجه، به طریق مشابه داریم:

$$3n+1 = 2^k, \quad n = 5^k \Rightarrow 2^k = 3 \times 5^k + 1$$

و این تساوی نیز هرگز برقرار نمی‌شود (چرا؟) بنابراین، به ازای هیچ مقدار n ، $3n^2 + n$ مساوی توانی از ۱۰ نمی‌شود و لذا مجموع ارقام $f(n)$ ها هرگز مساوی ۲ نخواهد شد. سپس کمترین مقدار مجموع ارقام $f(n)$ ها مساوی ۳ است.

پی‌نوشت
۱. گاردینز. راهنمای المپیاد ریاضی. ترجمه‌ی هوشنگ شرقی. انتشارات مدرسه. چاپ دوم. ۱۳۸۴.

$$(1-p)(1-q)(1-r) = 1 - \underbrace{(p+q+r)}_1 + (pq+pr+qr) - pqr$$

$$= pq + pr + qr - pqr$$

بنابراین، نامساوی حکم به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\forall (1-p)(1-q)(1-r) \leq 2 + 2pqr$$

و با توجه به متساوی $p+q+r=1$:

حال با فرض $p+q=x$, $p+r=y$, $q+r=z$ خواهیم

داشت: $x+y+z=2(p+q+r)=2$ و نیز:

$$\begin{cases} p+q=x \\ p+r=y \\ q+r=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q-r=x-y \\ q+r=z \end{cases} \Rightarrow q = \frac{x+z-y}{2}$$

$$\Rightarrow q = \frac{2-y-y}{2} = (1-y)$$

و به همین ترتیب:

$$p=1-z, \quad r=1-x$$

و از آن‌جا، نابرابری حکم به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$x, y, z \geq 0, \quad x+y+z=2 \Rightarrow$$

$$\forall xyz \geq 2 + 2(1-x)(1-y)(1-z)$$

و با ضرب و ساده کردن دو طرف خواهیم داشت:

$$xyz \leq 2 + 2(1 - \underbrace{(x+y+z)}_2) + (xy+xz+yz) - xyz$$

$$\Rightarrow \forall xyz \leq 2(xy+xz+yz) - 2xyz$$

$$\Rightarrow 4xyz \leq 2(xy+xz+yz)$$

$$\overset{x+y+z=2}{\Rightarrow} 4xyz \leq (x+y+z)(xy+xz+yz)$$

$$\Rightarrow 4xyz \leq x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xyz + y^2z + xyz + xz^2 + yz^2 + yz^2$$

$$\Rightarrow x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 \geq 6xyz$$

و با تقسیم طرفین بر xyz نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 6$$

و با توجه به نابرابری‌های درست $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$

و $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$ ، درستی نابرابری بالا واضح است.

۶. با فرض $f(n) = 3n^2 + n + 1$ ، خواهیم داشت:

$$f(1) = 5, f(2) = 15, \dots, f(8) = 201$$

بی نهایت

ساده، کلکسیونی از

اشیاست). برای مثال:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

به معنی مجموعه‌ی اعداد تمام (مثبت) است. هنگامی که مجموعه‌ای داشته باشیم، می‌توانیم درباره‌ی زیرمجموعه‌هایی^۴ که داخل مجموعه‌ی بزرگ‌ترند، صحبت کنیم. واضح‌ترین زیرمجموعه‌هایی که با مثال N مان مرتبط‌اند، زیرمجموعه‌های

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \text{ و } E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

هستند که به ترتیب، مجموعه‌های اعداد فرد^۵ و اعداد زوج^۶ را تشکیل می‌دهند. در این جا، اگر این پرسش را مطرح کنیم که «آیا تعداد اعداد فرد با تعداد اعداد زوج برابر است؟» پاسخمان چیست؟ گرچه این کار را نمی‌توان با شمردن اعضای که در هر مجموعه موجود است، و مقایسه‌ی جواب‌ها انجام داد، پاسخ به‌طور مطمئن «آری» است. اما این اطمینان بر چه مبنایی است؟ شاید بر چیزی شبیه این: «نیمی از اعداد تمام فرد و نیمی زوج هستند.» کانتور با این پاسخ موافق است، اما استدلال متفاوتی به دست می‌دهد. وی چنین می‌گوید: هر بار که عددی فرد داریم، عدد زوجی در کنارش، به عنوان «جفت»^۷ خواهیم داشت. این ایده که هر دو مجموعه‌ی O و E دارای اعضای با تعداد یکسان‌اند، بر مبنای جفت کردن هر عدد فرد با یک عدد زوج قرار دارد:

$$\begin{array}{cccccccccccc} O: & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 \dots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ E: & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 22 \dots \end{array}$$

اما در صورتی که این پرسش دیگر را مطرح کنیم که «آیا تعداد اعداد تمام، برابر تعداد اعداد زوج است؟» پاسخ ممکن

بزرگی بی نهایت چه قدر

است؟ پاسخ کوتاه به این پرسش این است که ∞ (نماد بی نهایت) بسیار بزرگ است. خط مستقیمی را با اعداد بزرگ‌تر و بزرگ‌تر واقع بر امتداد آن، در حالی که تا «بی نهایت» امتداد یافته است تصور کنید. در این مورد، به ازای هر عدد بسیار بزرگی که در نظر گرفته شود، مثلاً، 10^{1000} ، همواره عددی بزرگ‌تر از آن، چون $10^{1000} + 1$ موجود است.

در مفهوم سستی، بی نهایت عددی است که تا ابد ادامه دارد. ریاضیات، بی نهایت را همه جا به کار می‌برد، اما باید توجه داشت که آن را مانند عددی معمولی در نظر نگیریم، چرا که عددی معمولی نیست.

شمارش

ژرژ کانتور^۱ ریاضی‌دان آلمانی، مفهوم کاملاً متفاوتی از بی نهایت به دستمان داده است. در این فرایند، وی دست تنها نظریه‌ای آفرید که بیش‌تر ریاضیات مدرن را به جلو رانده است. مفهومی که نظریه‌ی کانتور وابسته به آن است، با مفهوم ابتدایی شمارش سروکار دارد؛ یعنی ساده‌تر از آن‌چه که در زندگی روزمره مان به کار می‌بریم.

کشاورزی را در نظر می‌گیریم که در مورد شمارش با اعداد چیزی نمی‌داند. پس چگونه خواهد دانست چند گوسفند دارد؟ خیلی ساده، هنگامی که صبح گوسفندان را به‌چرا می‌برد، می‌تواند عصر با جفت کردن هر گوسفند با سنگی از توده‌ای که از صبح در مدخل طویله موجود است، بگوید آیا همه‌ی گوسفندان برگشته‌اند یا خیر. چه اگر گوسفندی گم شده باشد، سنگی باقی می‌ماند. به این ترتیب، کشاورزمان، حتی بدون استفاده از اعداد، ریاضی ورز بوده است. چرا که وی مفهوم تناظر یک به یک^۲ را بین گوسفندان و سنگ‌ها به کار برده است. این مفهوم، ابتدایی است، اما پیامدهای شگفت‌انگیزی دارد.

نظریه‌ی کانتور با مجموعه‌ها^۳ سروکار

دارد (مجموعه، به‌طور

به این ترتیب، اصلیت، قدر یا «اندازه‌ی» یک مجموعه است. کانتور در مورد اعداد تمام N ، و هر مجموعه‌ی در تناظر یک به یک با N ، از نماد \aleph_1 استفاده کرد. بنابراین، به زبان ریاضی می‌توان نوشت

$$\text{card}(N) = \text{card}(O) = \text{card}(E) = \aleph_0$$

هر مجموعه که بتواند در تناظر یک به یک با N قرار گیرد، مجموعه‌ی «بی‌نهایت شمارا» یا «نامتناهی شمارا»^{۱۲} نامیده می‌شود. بی‌نهایت - شمارا بودن یک مجموعه به این معنی است که می‌توانیم اعضای آن مجموعه را در یک فهرست قرار دهیم. برای مثال، فهرست اعداد فرد، به‌طور ساده عبارت است از ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ... و می‌دانیم کدام عضو اول، کدام دوم، و غیره است.

آیا کسرها بی‌نهایت - شمارا هستند؟

مجموعه‌ی کسرها یا Q ، به این معنی که می‌توان N را به عنوان زیر مجموعه‌ای از Q در نظر گرفت، بزرگ‌تر از N است. اما آیا می‌توان جمیع اعضای Q را در یک فهرست نوشت؟ یعنی آیا می‌توانیم فهرستی ارائه کنیم که هر کسر (از جمله کسره‌های منفی) جایی در آن داشته باشد؟ به نظر می‌رسد این ایده که مجموعه‌ای به این بزرگی را می‌توان در تناظر یک به یک با N قرار داد، غیرممکن باشد. با این همه، این کار را می‌توان انجام داد.

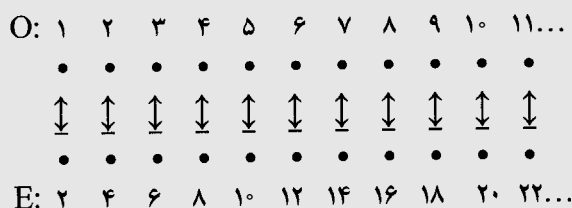
۱	-۱	۲	-۲	۳	-۳	۴	...
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$...
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$...
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$...
$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$...
:	:	:	:	:	:	:	:

است خیر

باشد، و استدلال این‌که

مجموعه‌ی N ، به خودی خود، دوبرابر مجموعه‌ی اعداد زوج عدد دارد.

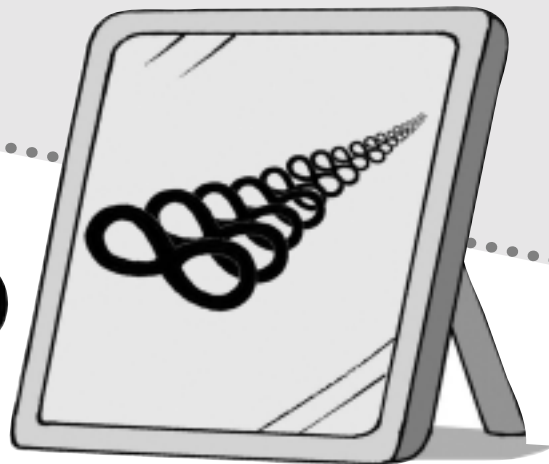
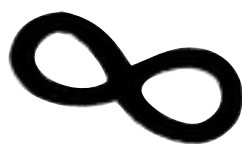
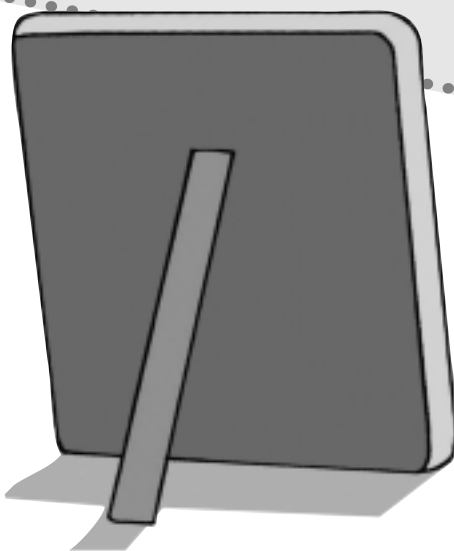
مفهوم «بیشتر»، زمانی که با مجموعه‌هایی با تعداد اعضای نامعین سروکار داریم، مفهومی مبهم است. اما این کار را می‌توانیم با مفهوم تناظر یک به یک بهتر انجام دهیم. تعجب‌آور است که بین N و مجموعه‌ی اعداد زوج (E)، نیز تناظری یک به یک موجود است:



به این ترتیب، به این نتیجه‌ی مبهوت‌کننده می‌رسیم که به «همان تعداد» اعداد تمام، عدد زوج داریم! نتیجه‌ای که با «مفهوم متعارف» اعلام شده توسط یونانیان باستان، در تناقض است؛ چه آغاز کتاب مقدمات^{۱۳} اقلیدس اسکندرانی^۹ بر این است که «کل بزرگ‌تر از جزء است».

اصلیت

تعداد اعضای یک مجموعه، به «اصلیت» یا عدد اصلی آن موسوم است. در حالت مربوط به گوسفندان، عدد اصلی ثبت شده به حساب کشاورز ۴۲ است. اصلیت مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e\}$ برابر ۵ است که آن را به صورت زیر می‌نویسیم:
 $\text{card}\{a, b, c, d, e\} = 5$

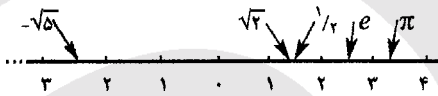


کسه از

پیکان‌ها پیروی می‌کند. هر کسر، مثبت یا منفی، در جایی از این فهرست خطی واقع است و برعکس، موقعیتش «جفتش» را در فهرست دو بعدی کسرها به دست می‌دهد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ی کسرها Q بی‌نهایت شماراست و نوشت: $\text{card}(Q) = \aleph_0$.

فهرست کردن اعداد حقیقی

در حالی که مجموعه‌ی کسرها جوابگوی اعضای بسیاری بر محور عددی حقیقی است، بعضی اعداد حقیقی از قبیل $\sqrt{2}$ و e ، π نیز موجودند که کسر نیستند. این اعداد، اعداد گنگ هستند و «رخنه‌ها را پر می‌کنند» تا محور عدد حقیقی R را به دست دهند.



به مجموعه‌ی R ، با رخنه‌های پر شده، به عنوان «پیوستار»^{۱۳} رجوع می‌شود. اما چگونه می‌توانیم فهرستی از اعداد حقیقی تشکیل دهیم؟ کانتور، در حرکتی مملو از زیرکی محض، نشان داد که حتی کوشش در قرار دادن اعداد حقیقی بین 0° و 1° در یک فهرست، محکوم به شکست است. این پاسخ، بدون شک به صورت شوکی به اشخاصی وارد شد که به فهرست‌سازی معتاد بودند، چرا که در واقع از این به حیرت می‌افتادند که چگونه نمی‌توان مجموعه‌ای از اعداد را یکی پس از دیگری نوشت.

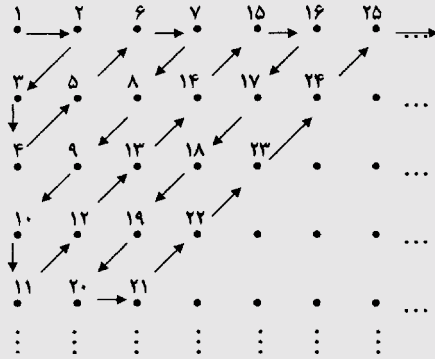
فرض می‌کنیم که به حرف کانتور اعتقاد نداشته باشید. می‌دانید که هر عدد بین 0° و 1° را می‌توان به صورت یک دهدهی گسترش‌یافته، مثلاً:

$$\frac{1}{\pi} = 0.31830988618379067153\dots$$

و

$$\frac{1}{2} = 0.5000000000000000\dots$$

طریق آغاز این کار، مجسم کردن عبارات دو بعدی است. برای شروع، ردیفی از جمیع اعداد تمام، متناوباً مثبت و منفی، می‌نویسیم. سپس در زیر آن، جمیع کسرهایی را می‌نویسیم که مخرجشان ۲ است، اما آن‌هایی را که در سطر بالا ظاهر شده‌اند (مانند $2 = \frac{6}{3}$) می‌اندازیم. آن‌گاه زیر این سطر، کسرهایی را می‌نویسیم که مخرج ۳ دارند، و بار دیگر، آن‌هایی را که قبلاً ثبت کرده‌ایم، حذف می‌کنیم. کار را به این طریق ادامه می‌دهیم، اما در مورد آن، گرچه هیچ‌گاه پایان نمی‌پذیرد، دقیقاً می‌دانیم که در نمودارمان، هر کسر در کدام مکان ظاهر می‌شود. برای مثال، $\frac{67}{92}$ در ردیف ۱۶۷ام، در حدود ۲۰۰ مکان در سمت راست $\frac{1}{67}$ قرار دارد.



با نمایش جمیع کسرها در این طریق، دست کم بالقوه می‌توانیم فهرستی یک بعدی بنا کنیم. در صورتی که از سطر بالایی شروع و در هر مرحله به راست حرکت کنیم، هرگز به سطر دوم نمی‌رسیم. اما با انتخاب یک مسیر پریپیچ و خم زیگزاگی، می‌توان به موفقیت رسید. با شروع از ۱، فهرست خطی معهود، به صورت زیر آغاز می‌شود:

$$1, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 2, -2$$

بیان کرد، پس

باید به کانتور بگویید: «بفرمایید، این فهرست من از جمیع اعداد بین ۰ و ۱ است»؛ فهرستی که آن را $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ می‌نامیم. چه، در صورتی که نتوانید چنین کنید، حق با کانتور است.

تصور کنید کانتور به فهرستان نگاه می‌کند و اعداد واقع در قطر مشخص شده را با حرف سیاه علامت می‌زند:

$r_1: 0 / a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$

$r_2: 0 / b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$

$r_3: 0 / c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots$

$r_4: 0 / d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots$

اما عدد $x = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots$ که در آن x_1 متفاوت از a_1

x_2 متفاوت از b_2 ، x_3

متفاوت از c_3 ، و به همین گونه در امتداد قطر است

کجاست؟ عدد ایکس وی از هر عدد واقع در فهرستان در یک مکان دهدهی تفاوت دارد و لذا نمی‌تواند در این فهرست باشد.

پس حق با کانتور است.

در واقع، هیچ فهرستی در مورد مجموعه‌ی اعداد حقیقی

R ممکن نیست و بنابراین R مجموعه‌ی نامتناهی «بزرگ‌تر»ی

از مجموعه‌ی نامتناهی کسرهای Q است. یعنی مجموعه‌ای با مرتبه‌ی نامتناهی بالاتر.

بیش تر بدانید (چند تاریخچه)

۳۵۰ قبل از میلاد: ارسطو، نامتناهی بالفعل را رد می‌کند.

۱۶۳۹ میلادی: ژرار دزارگ "Girard Desargues" مفهوم نامتناهی را در هندسه معرفی می‌کند.

۱۶۵۵ میلادی: جان والیس "John Wallis" اولین کسی است که نماد «گره‌ی عشق» "love knot" یعنی ∞ را در مورد نامتناهی به کار می‌برد.

۱۸۷۴ میلادی: کانتور با مشخص کردن مرتبه‌های متفاوت نامتناهی، مفهوم نامتناهی را به دقت بررسی می‌کند.

دهه‌ی ۱۹۶۰ میلادی: ابراهام رابینسون "Abraham Robinson" حساب غیر استاندارد مبتنی بر مفهوم بی‌نهایت کوچک "infinitesimal" بنا می‌کند.

پی‌نوشت

- | | | | | |
|-----------------|------------------------------|-------------|-------------------------|-----------------|
| 1. Georg Cantor | 2. one to one correspondence | 3. sets | 4. subsets | 5. odd numbers |
| 6. even numbers | 7. mate | 8. Elements | 9. Euclid of Alexandria | 10. cardinality |
۱۱. \aleph_1 یا «الف» از الفبای عبری است؛ نماد \aleph_0 به صورت «الف صفر» "aleph nought" خوانده می‌شود.
- | | |
|------------------------|---------------|
| 12. countably infinite | 13. continuum |
|------------------------|---------------|

تشدید زوال

اشاره

کمیت‌هایی که مقدار آن‌ها با گذشت زمان افزایش یا کاهش می‌یابند، از قوانینی پیروی می‌کنند که به قوانین رشد و زوال موسوم هستند.

در ابتدا آهسته آهسته رشد کند، با گذشت زمان، این رشد سریع و سریع‌تر خواهد شد.

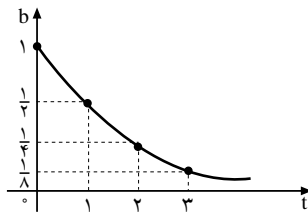
تذکره: روابطی از نوع رابطه‌ی $b = a^t$ که در آن‌ها $a > 1$ ؛ شکلی مشابه با این نمودار دارند.

هرگاه کمیت b نسبت به زمان t ، رو به رشد یا زوال برود. یعنی افزایش یا کاهش پیدا کند، معمولاً مدل تغییرات آن از معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

نمودار زوال نمایی

برای مثال؛ نمودار تابع $b = (\frac{1}{2})^t$ را با استفاده از نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

t	0	1	2	3
b	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



در نمودار بالا مشاهده می‌کنید که هرچه زمان به جلو می‌رود، b سریع‌تر و سریع‌تر به سمت صفر یا زوال یا نابودی میل می‌کند. این به دلیل آن است که پایه $(\frac{1}{2})$ کوچک‌تر از واحد است، می‌دانیم که عدد کوچک‌تر از واحد، وقتی به توان اعداد طبیعی می‌رسد، مرتب کوچک می‌شود.

تذکره: روابطی از نوع $b = a^t$ که در آن‌ها a کوچک‌تر از 1 و بزرگ‌تر از 0 است ($0 < a < 1$) شکلی مشابه با این نمودار دارند.

$$b = a^t$$

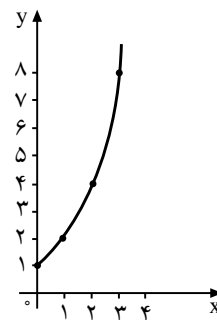
الف) اگر $a > 1$ باشد، b رشد می‌یابد.

ب) اگر $0 < a < 1$ باشد، b به زوال میل می‌کند.

نمودار رشد نمایی

برای مثال، نمودار تابع با ضابطه‌ی $b = 2^t$ را با استفاده از نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

t	0	1	2	3	4
b	1	2	4	8	16



در این نمودار مشاهده می‌کنید که هرچه زمان به جلو می‌رود، b سریع‌تر و سریع‌تر رشد می‌کند. این ویژگی یک تابع نمایی است. این نمودار نشان می‌دهد که حتی اگر یک تابع نمایی

مثال ۱. یک صفحه کاغذ سفید بردارید و آن را تا بزنید کاغذ تاخورده را تا جدیدی بزنید و این تا زدن‌ها را تا جایی که

فرمول روبه‌رو حساب می‌کنیم: $A_t = A_0(1+r)^t$

این فرمول (با مقایسه‌ی $b = a^t$)، یک تابع نمایی رشد است که در آن تابع A_t به جای b و $(1+r)$ به جای a آمده است.

تذکر: $(1+r)$ فاکتور رشد در یک واحد زمانی و $(1+r)^t$ فاکتور رشد در دوره‌ی زمانی t است.

مثال ۲. جمعیت یک شهر $3/2$ میلیون نفر است. اگر نرخ رشد جمعیت این شهر $1/2$ درصد در سال باشد، بعد از 10 سال جمعیت آن چند نفر می‌شود؟

حل:

$$A_0 = 3/2, r = 1/2\% = 0.012, t = 10, A_{10} = ?$$

$$A_t = A_0(1+r)^t \Rightarrow A_{10} = 3/2(1+0.012)^{10}$$

$$\Rightarrow A_{10} = 3/2(1.012)^{10}$$

$$\Rightarrow A_{10} = 3/6 \text{ میلیون نفر}$$

مثال ۳. فرض کنید که هزینه‌ی تحصیلات عمومی از سال 1370 خورشیدی با آهنگ سالانه‌ی 10% درصد رو به افزایش بوده است. اگر در سال 1370 که میلاد به کلاس اول رفت، هزینه‌ی تحصیل او 18000 تومان بوده باشد، این هزینه در سال 1388 (پس از 18 سال)، چه قدر شده است؟

حل:

$$r = 10\% = 0.1, A_0 = 18000, t = 18, A_{18} = ?$$

$$A_t = A_0(1+r)^t \Rightarrow A_{18} = 18000(1+0.1)^{18}$$

$$\Rightarrow A_{18} = 18000(1.1)^{18}$$

$$\Rightarrow A_{18} = 100078 \text{ تومان}$$

می‌توانید ادامه دهید.

چگونگی افزایش تعداد ناحیه‌هایی

که بر اثر تازدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند و

چگونگی تغییر مساحت‌های آن‌ها را بررسی کنید.

حل: بعد از اولین تازدن ($n = 1$)، دو ناحیه به وجود می‌آید

که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. در دومین تازدن

($n = 2$) چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آن‌ها

نصف مساحت قبلی، یعنی $1/4$ مساحت اولیه است. در سومین تا

زدن ($n = 3$)، هشت ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام

از آن‌ها، نصف مساحت قبلی، یعنی $1/8$ مساحت اولیه است و

همین‌طور... مطالب بالا را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

تعداد ناحیه‌ها	تعداد ناحیه‌ها	تعداد تازدن‌ها
$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$	$1 = 2^0$	0
$2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$	$2 = 2^1$	1
$4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$4 = 2^2$	2
$8 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$8 = 2^3$	3
\vdots	\vdots	\vdots
2^n	2^n	n

همان‌طور که در جدول می‌بینید هم‌چنان که تعداد ناحیه‌ها

بر اثر تازدن‌های متوالی بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود، مساحت

ناحیه‌ها کم‌تر و کم‌تر می‌شود! در واقع تعداد ناحیه‌ها به‌طور

نمایی رشد می‌کند و مساحت ناحیه‌ها به‌طور نمایی روبه‌زوال

می‌رود.

تذکر: با بررسی دقیق‌تر جدول بالا، مشاهده می‌کنیم

که فاکتور زوال $a = \frac{1}{2}$ است که از یک کوچک‌تر است،

در حالی که فاکتور رشد $a = 2$ است که از یک بزرگ‌تر

است.

رشد نمایی

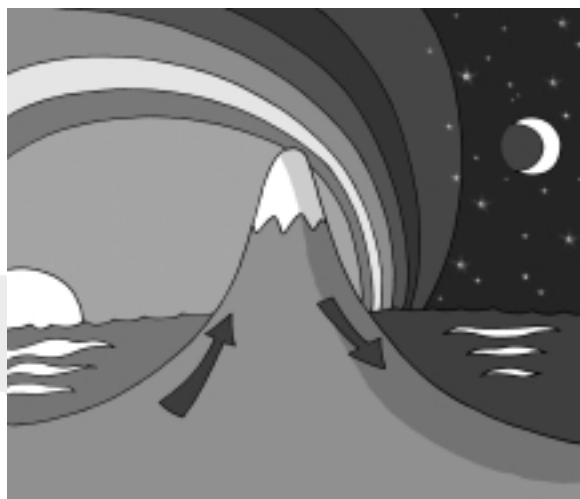
هرگاه A_0 ، برای مثال، هزینه‌ی اولیه یا سرمایه‌ی اولیه یا

جمعیت کشور در سال معینی باشد، r آهنگ رشد سالانه‌ی هزینه

یا سرمایه یا جمعیت کشور، t تعداد سال‌ها و A_t هزینه‌ی انباشته

شده یا سرمایه‌ی انباشته شده و یا جمعیت ایجاد شده بعد از t

سال باشد، این مجموع انباشته یا ایجاد شده را با استفاده از



می توانیم به جای آهنگ رشد سالانه، آهنگ رشد ماهانه و حتی آهنگ رشد روزانه را به دست آوریم که به واقعیت نزدیک تر است. به طور کلی، اگر سال را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، یعنی $\frac{1}{n}$ ، آن گاه فرمول زیر را خواهیم داشت:

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

مثال ۴. جمعیت کره‌ی زمین در ۳۵ سال بعد با توجه به جمعیت اولیه‌ی $5/2$ میلیارد نفری در سال ۱۹۹۰ و قرار دادن زمان بر حسب ماه، چند نفر خواهد شد، در صورتی که بدانیم آهنگ رشد جمعیت ۲ درصد در ماه است؟

$$A_0 = 5/2, \quad t = 35, \quad A_{35} = ?, \quad n = 12, \quad r = 0/02$$

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \Rightarrow A_{35} = 5/2 \left(1 + \frac{0/02}{12}\right)^{12 \times 35}$$

$$\Rightarrow A_{35} = 5/2 (1/001)^{420}$$

$$\Rightarrow A_{35} = 10/465 \text{ میلیارد نفر}$$

مثال ۵. شخصی مبلغ ۱۰۰۰۰ تومان با نرخ سود علی‌الحساب ۴ درصد به حساب سپرده گذاشته است. چه مبلغی (اصل و فرع) پس از ۱۰ سال دریافت می‌کند اگر سود در پایان هر سه ماه پرداخت شود؟

حل:

$$A_0 = 10000, \quad r = 0/04, \quad t = 10, \quad n = 4, \quad A_{10} = ?$$

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \Rightarrow A_{10} = 10000 \left(1 + \frac{0/04}{4}\right)^{4 \times 10}$$

$$\Rightarrow A_{10} = 10000 (1/01)^{40}$$

$$\Rightarrow A_{10} = 14888/63 \text{ تومان}$$

تمرین ۱. جمعیت شهری در دو سال آینده با توجه به جمعیت اولیه‌ی ۱۰۰۰۰۰ نفری آن، و قرار دادن زمان بر حسب روز چند نفر خواهد شد، در صورتی که بدانیم آهنگ رشد جمعیت ۰/۱ درصد در روز است؟

جواب: ۱۰۰۱۴۴ نفر

تمرین ۲. اگر با نرخ ۱۲ درصد، آخر هر ماه سود علی‌الحساب بر سرمایه اضافه شود، پس از پنج سال سرمایه‌ی فعلی در چه عددی ضرب می‌شود؟

جواب: سرمایه‌ی فعلی باید در $(1/01)^{60}$ ضرب شود.

زوال نمایی

در شیمی، به مدت

زمانی که طول می‌کشد تا مقداری

از یک ماده‌ی رادیواکتیو به نصف برسد،

نیمه عمر گفته می‌شود. برای مثال نیمه عمر

نوعی ایزوتوپ در حدود پنج دقیقه است. پس از

گذشت نیم ساعت، چه کسری از ماده‌ی اولیه باقی مانده است؟

حل: ۳۰ دقیقه شامل ۶ دوره‌ی زمانی ۵ دقیقه‌ای است.

$$1 \xrightarrow{5} \frac{1}{2} \xrightarrow{5} \frac{1}{4} \xrightarrow{5} \frac{1}{8} \xrightarrow{5} \frac{1}{16} \xrightarrow{5} \frac{1}{32} \xrightarrow{5} \frac{1}{64}$$

بنابراین، پس از نیم ساعت، $\frac{1}{64}$ از ماده‌ی اولیه باقی مانده

است.

مثال ۶. نیمه عمر ماده‌ی رادیواکتیوی ۶ ساعت است. اگر

۱۹۲ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از گذشت یک شبانه‌روز

(۲۴ ساعت) چه مقدار از این ماده باقی خواهد ماند؟

$$192 \text{ gr} \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 96 \text{ gr} \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 48 \text{ gr} \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 24 \text{ gr} \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 12 \text{ gr}$$

بنابراین، پس از یک شبانه‌روز، ۱۲ گرم از ماده‌ی اولیه

باقی مانده است.

معادله‌ی کلی زوال نمایی به صورت $A = A_0(1-r)^t$ است

که در آن A بیانگر مقدار نهایی، A_0 بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر

میزان نزول (زوال) بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال ۷. نیمه عمر ماده‌ی رادیواکتیوی ۴ ساعت است. اگر

۱۱۵۲ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از گذشت یک

شبانه‌روز، چند گرم از ماده‌ی اولیه تجزیه نشده باقی مانده است؟

حل:

$$T = \text{ثابت} \Rightarrow 24 = 4 \times t \Rightarrow t = 6$$

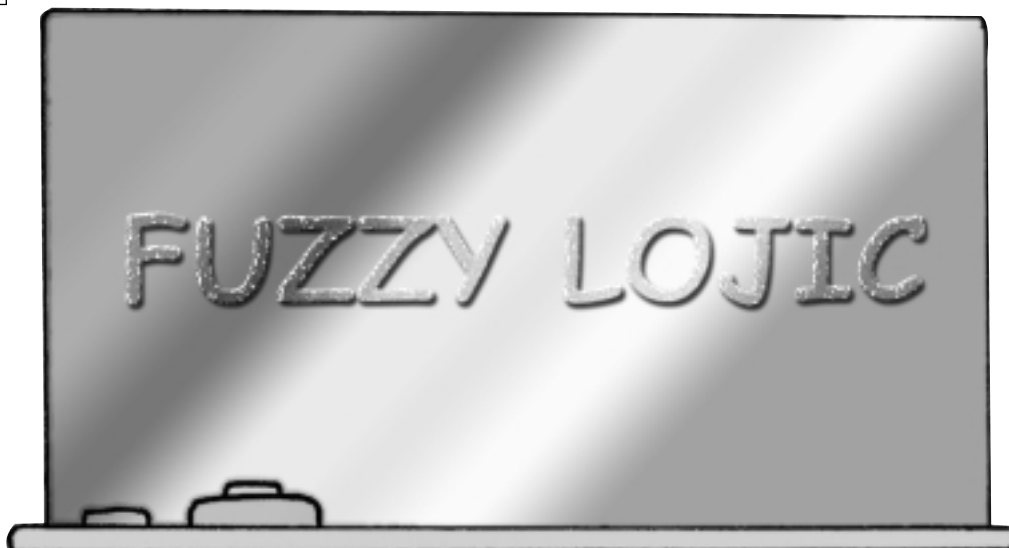
$$A = A_0(1-r)^t; \quad A_0 = 1152, \quad r = \frac{1}{4}$$

$$A = 1152 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^6 = 1152 \times \frac{1}{64} = 18 \text{ گرم}$$

بعد از گذشت یک شبانه‌روز، ۱۸ گرم از ماده‌ی رادیواکتیو

باقی خواهد ماند.

□



نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

اشاره

در بخش‌های قبل، خوانندگان محترم با مفاهیم اولیه در مجموعه‌های فازی آشنا شدند. هدف از ارائه‌ی این مجموعه از مقالات، معرفی تاریخچه، اصول تعاریف پایه‌ای در تئوری مجموعه‌های فازی برای آشنایی دانش‌آموزان و معلمان گرامی بود. هر یک از خوانندگان عزیز می‌توانند با مطالعه‌ی مراجعی که در پایان بخش معرفی شده بودند، اطلاعات کامل‌تری را در خصوص مطالب مطرح شده از مجموعه‌های فازی دریافت کنند. هم‌چنین، با استفاده از شبکه‌ی اینترنت و جست‌وجو در سایت‌های مربوط به معرفی مفاهیم فازی، می‌توان تاریخچه و کاربردهای مجموعه‌ها و منطق فازی را در علوم گوناگون ملاحظه کرد. در حال حاضر، مجلات علمی متعددی در جهان وجود دارند که مقالات علمی مربوط به شاخه‌های گوناگون علم فازی را چاپ می‌کنند و آخرین تحقیقات و دستاوردهای دانشمندان و محققان را در خصوص پیشرفت‌های این شاخه‌ی علمی جدید به چاپ می‌رسانند. از جمله مجلات معتبر خارجی که می‌توان در زمینه‌ی مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی معرفی کرد، ژورنال *Fuzzy Sets and System* است. در کشور ما نیز مجله‌ی سیستم‌های فازی ایران، با عنوان «*Iranian Journal of fuzzy System*» زیر نظر انجمن سیستم‌های فازی ایران به چاپ می‌رسد که از جمله مجلات داخلی معتبر در خصوص معرفی مقالات فازی است. سالانه در ایران و سایر کشورهای جهان، همایش‌هایی با عنوان سیستم‌های فازی برگزار می‌شود که محققان علم فازی در شاخه‌های کاری خود، با حضور در این کنفرانس‌های بین‌المللی، کارهای تحقیقاتی خود را معرفی می‌کنند. به امید آن که این چند قسمت از معرفی مجموعه‌های فازی توانسته باشد مورد استفاده‌ی خوانندگان محترم قرار گیرد و انگیزه‌ای برای مطالعه‌ی بیشتر را برای علاقه‌مندان فراهم کرده باشد، در این قسمت که آخرین مقاله در خصوص آشنایی با مجموعه‌های فازی است، به مفاهیم منطق فازی اشاره‌ی مختصری می‌کنیم.

مقدمه

که در منطق فازی، هر گزاره ارزش‌های متعددی دارد. به همین دلیل، به آن منطق چند ارزشی هم می‌گویند. در منطق کلاسیک، ارزش درستی یا نادرستی هر گزاره، به ترتیب با T و F نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر، در منطق قطعی،

منطق فازی توسعه‌ای از منطق دودویی (منطق بولی) است. در منطق کلاسیک، تنها دو ارزش مورد نظر هستند. در این منطق، ارزش هر گزاره، یا درست یا نادرست است، در حالی

مقدار درستی هر گزاره با ۰ یا ۱ بیان می‌شود. ولی در منطق فازی، مقدار درستی یک گزاره در بازه‌ی [۰ و ۱] است و به عبارت دیگر، متغیرهای منطق فازی درجه‌ای از صحت بین ۰ و ۱ دارند و تنها به دو مقدار ۰ و ۱ منحصر نیستند. این امر باعث می‌شود که بتوانیم، به جای یک استدلال قطعی، یک استدلال تقریبی را مطرح کنیم. منطق فازی به عنوان نتیجه‌ای از مجموعه‌های فازی، توسط پروفیسور لطفی زاده مطرح شد و تاکنون کاربردهای بسیار زیادی را در رشته‌های گوناگون علمی ایجاد کرده است.

گاهی در محاوره‌های روزمره، از الفاظی استفاده می‌کنیم که برای توصیف یک تغییر به کار می‌رود. مثلاً: دمای هوای امروز بالاست، سرعت وسیله نقلیه کند است و معلم درس ریاضی جوان است. به این نوع جملات، گزاره‌های فازی^۱ می‌گوییم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، نمی‌توان به این جملات، به یقین یکی از ارزش‌های درستی یا نادرستی را نسبت داد. صورت کلی هر گزاره‌ی فازی ساده عبارت است از: A, x

در این حالت، x یک متغیر زبانی^۲ و A مقدار زبانی برای متغیر x است. در واقع A مجموعه‌ای فازی است که در دامنه‌ی تعریف x معرفی می‌شود.

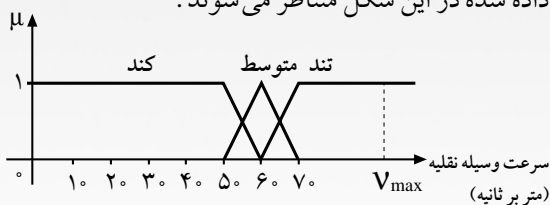
در مثال دمای هوای امروز بالاست، «دمای هوای امروز»، متغیر این گزاره‌ی فازی و «بالا» مقدار این متغیر است. این متغیر می‌تواند مقادیری نظیر $20^{\circ}C$ یا $15^{\circ}C$ را اختیار کند. وقتی یک متغیر، اعداد را به عنوان مقدار می‌پذیرد؛ آن را متغیر عددی می‌گوییم و بر اساس قوانین ریاضی آن را بررسی می‌کنیم. ولی وقتی یک متغیر الفاظ یا واژه‌ها را به عنوان مقدار می‌گیرد، به آن یک متغیر زبانی یا بیانی می‌گوییم. هر متغیر زبانی با چهار پارامتر به صورت کلی (X, T, U, M) معرفی می‌شود. این پارامترها عبارت‌اند از:

x نام متغیر زبانی است. T مجموعه مقادیر زبانی است که x اختیار می‌کند. U دامنه‌ی تعریف قطعی است که در آن متغیر زبانی x مقادیر عددی خود را اختیار می‌کند. M قاعده‌ای است که هر مقدار زبانی در مجموعه‌ی T را به یک مجموعه‌ی فازی در U نظیر می‌کند.

برای مثال، سرعت یک وسیله نقلیه، متغیری نظیر x است که مقادیری در بازه‌ی $[0$ و $v_{max}]$ را اختیار می‌کند. حال سه مجموعه‌ی فازی کند، متوسط و تند را در نظر می‌گیریم که در

این محدوده باشند. اگر x یک متغیر زبانی باشد، x یکی از واژه‌های کند، متوسط یا تند را به عنوان مقدار می‌پذیرد. مثلاً می‌گوییم x تند است. در این حالت، نام متغیر زبانی x همان سرعت وسیله نقلیه است و $U = [0$ و $v_{max}]$. v_{max} حداکثر سرعت این وسیله است.

هم‌چنین {تند و متوسط و کند} = T . در شکل ۱، مقادیر کند، متوسط و تند توسط قاعده‌ی M به توابع عضویت نمایش داده شده در این شکل متناظر می‌شوند.



شکل ۱

ملاحظه می‌کنیم، واژه‌ی فازی متوسط، با تابع عضویت زیر معرفی شده است که بیانگر یک عدد فازی مثلثی است.

$$\mu_{\text{متوسط}}(x) = \begin{cases} \frac{x-50}{10} & 50 \leq x \leq 60 \\ \frac{70-x}{10} & 60 \leq x \leq 70 \\ 0 & 70 < x \leq v_{\max}, 0 \leq x < 50 \end{cases}$$

هم‌چنین، تابع عضویت متناظر واژه‌ی فازی کند به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\mu_{\text{کند}}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 50 \\ \frac{60-x}{10} & 50 \leq x \leq 60 \\ 0 & 60 < x \leq v_{\max} \end{cases}$$

متغیرهای زبانی در علوم نقش و اهمیت زیادی دارند، چرا که این متغیرها برای اندازه‌گیری بسیاری از مفاهیم که با ابهام توأم هستند، به کار می‌روند. اجزای هر متغیر زبانی، ترکیبی از یک اصطلاح پایه^۳، شامل یک مجموعه‌ی فازی نظیر تند، یک مکمل‌کننده چون «نه»، یک رابط نظیر «یا» یا «و» و در نهایت قیود نظیر «کمی»، «خیلی»، «کم و بیش» و امثال آن است. برای مثال، نمونه‌هایی از متغیرهای زبانی در مورد درجه حرارت هوا عبارت‌اند از: خیلی سرد، سرد، تقریباً سرد، کم

سیستم‌های تهویه مطبوع، ترمز ضد قفل ABS، مونوریل، دوربین عکاسی، ماشین لباس شویی، ماکروویو، چراغ‌های راهنمایی هوشمند کنترل ترافیک، آسانسور، شبکه‌های عصبی^۵، هوش مصنوعی^۶، رباتیک، الگوریتم‌های ژنتیک، کنترل سرعت قطار، بالگردهای نظامی و... کاربرد دارد.

برای مثال، سیستم ترمز خودکار ABS، بر سیستم ترمز وسیله نقلیه نظارت دارد چه طوری که قبل از قفل شدن چرخ‌ها در سرعت‌های بالا، به رهاکردن ترمز چرخ‌ها می‌کند. یک کامپیوتر این وظیفه را برعهده دارد که بهترین زمان انجام این کار را مشخص کند. در این حالت، دو عامل مورد توجه است: یکی توجه به سرعت وسیله نقلیه، زمانی که ترمزها استفاده می‌شوند و دیگری توجه به این عامل که چه قدر ترمزها سریع فشار داده می‌شوند. به‌ویژه، زمانی این سیستم باید عمل کند که راننده با سرعت رانندگی می‌کند و به سرعت ترمزها را می‌فشارد. در این لحظه، سیستم ترمز ABS باید آن قدر هشیار باشد که اجازه ندهد چرخ‌ها قفل شوند. هم‌چنین، پلویزی که براساس منطق فازی کار می‌کند، دارای تراشه‌ای رایانه‌ای است که توانایی کنترل زمان پخت و دم‌آرد دارد. در این حالت، اطمینان خواهیم داشت که برنج به‌طور مناسب پخته می‌شود. عملکرد این منطق براساس هر گزاره‌ی فازی، به صورت شرطی اگر آن‌گاه است. مثلاً اگر برنج خیلی داغ شود و افزایش حرارت نسبتاً به سرعت ادامه یابد، آن‌گاه المنت حرارتی خاموش شود. حتی مغز انسان نیز دارای عملکردی براساس منطق فازی



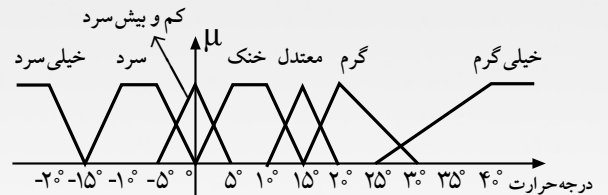
است و بر همین اساس، در مبحث شبکه‌های عصبی، از این منطق استفاده می‌شود. علاقه‌مندان می‌توانند برای کسب اطلاعات بیشتر، به مراجع زیر مراجعه کنند.

۱. لی‌وانگ. سیستم‌های فازی و کنترل فازی. ترجمه‌ی محمد تشنه‌لب و دیگران. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. ۱۳۷۸.
۲. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش‌نگار. ۱۳۸۶.

پی‌نوشت
 1. Fuzzy Proposition 2. Linguistic variable
 3. Primary term 4. Hedges
 5. Artificial intelligent 6. Neural networks

و بیش سرد، نسبتاً گرم، کمی گرم، گرم، بسیار گرم، به شدت گرم، داغ، خیلی داغ، نه خیلی گرم.

شکل ۲، نمونه‌ای از این متغیرهای زبانی را نمایش می‌دهد که توسط قاعده‌ی M به یک مجموعه‌ی فازی نسبت داده شده‌اند.



شکل ۲

ملاحظه می‌کنیم که در این حالت، برای معرفی متغیرها از اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای استفاده شده است. مثلاً تابع عضویت متغیر زبانی «خنک» به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mu_{\text{خنک}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & 0 < x < 5^\circ \\ 1 & 5^\circ \leq x \leq 15^\circ \\ \frac{15-x}{5} & 15^\circ < x \leq 15^\circ \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که این یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است.

هر گزاره‌ی فازی مرکب، ترکیبی از یک گزاره‌ی فازی ساده با رابط‌های گزاره‌ای «و»، «یا» و «نه» است که به ترتیب بیانگر اعمال اشتراک، اجتماع و مکمل (متمم) فازی هستند. سه گزاره‌ی فازی زیرا که در آن‌ها، A، B و C مجموعه‌هایی فازی هستند، در نظر می‌گیریم:

A است x، B است x، C است.

در این صورت، گزاره‌های مرکب زیر را به عنوان نمونه می‌توان از روی آن‌ها ساخت:

A یا B است x. نه A یا نه B است.

(A و C است) یا x، B است.

هر گزاره‌ی فازی مرکب می‌تواند به صورت شرطی اگر p آن‌گاه q نیز بیان شود که در آن p و q گزاره‌های فازی مفروض هستند. مثلاً اگر سرعت اتومبیل بالا باشد، آن‌گاه مقاومت بالاست. اگر دمای هوا سرد باشد، آن‌گاه طول میله کم می‌شود. اگر دما خیلی بالاست، آن‌گاه پنکه را سریع کن.

در حال حاضر منطق فازی، در طراحی و برنامه‌ریزی



سرآغاز

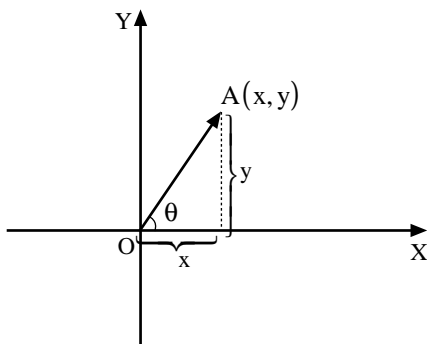
در این مقاله، علاوه بر معرفی مختصاتی جدید با عنوان «مختصات زاویه‌ای برای نقاط دکارتی» که به صورت زوج مرتب نمایش داده می‌شوند، در ابتدا برای هر زوج مرتب، برحسب طول بردار تولید شده و زاویه‌ای که با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، مختصات زاویه‌ای معرفی شده است. سپس ارتباط بین مختصات قطبی و دکارتی آمده است. در ادامه، از ویژگی‌های اساسی مختصات قطبی، به خصوص داشتن نمایش‌های متفاوت برای یک نقطه، سخن به میان آمده است.

مختصات قطبی و رسم نمودارها

$$x = |\vec{OA}| \cos \theta$$

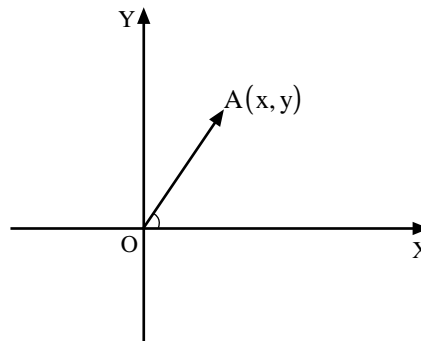
بگیریم، می‌توان نوشت:

$$y = |\vec{OA}| \sin \theta$$



مختصات زاویه‌ای یا قطبی

هر نقطه در فضای دکارتی را با دو مؤلفه‌ی x به عنوان طول و y به عنوان عرض معرفی می‌کنیم. هر زوج مرتب (x, y) در دستگاه مختصات دکارتی، برداری با ابتدای O (مبدأ دستگاه دکارتی) تولید می‌کند.



که در آن $|\vec{OA}|$ اندازه‌ی بردار \vec{OA} است. با فرض

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \text{ داریم } r = |\vec{OA}|$$

بردار $\vec{OA} \rightarrow$ زوج مرتب (x, y)

$$\text{بنابراین می‌توان به زوج مرتب } (x, y) \text{ زوج} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arc tan } \frac{y}{x} \end{cases}$$

اگر زاویه‌ای را که بردار \vec{OA} با جهت مثبت محور طول‌ها و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌سازد θ در نظر

مثال ۲. فرم دکارتی $(\sqrt{2}, \frac{4\pi}{3})$ را محاسبه کنید.

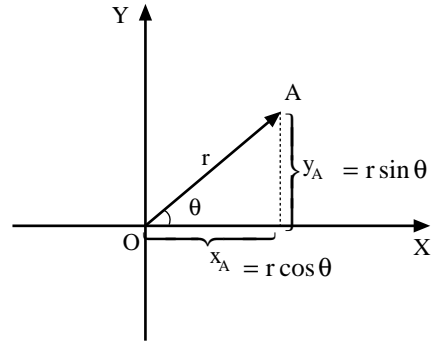
حل:

$$x = \sqrt{2} \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}}{2})$$

$$y = \sqrt{2} \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{6}}{2}$$

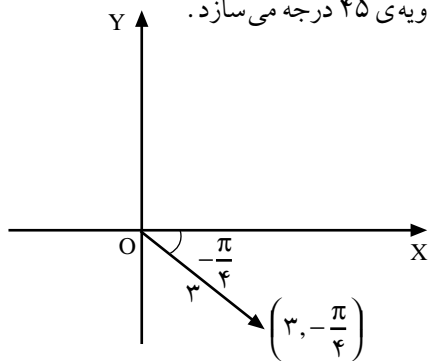
همان طور که قبلاً ذکر شد، θ زاویه‌ای است که در جهت مثبت محور طول‌ها و خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود. θ می‌تواند منفی هم باشد. علامت منفی θ نشان دهنده‌ی آن است که زاویه‌ی در نظر گرفته شده، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت تولید شده است. برای مثال،

مرتب جدید (r, θ) را نسبت داد که در آن r طول برداری است که زوج مرتب با ابتدای مبدأ مختصات ایجاد کرده و θ زاویه‌ای است که این بردار با جهت مثبت محور طول‌ها و خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌سازد.



هر مختصات دکارتی یک مختصات قطبی دارد و برعکس، مختصات قطبی هر نقطه نیز یک مختصات دکارتی دارد

نقطه‌ی قطبی $(3, -\frac{\pi}{4})$ نشان می‌دهد که نقطه‌ای در ربع چهارم دستگاه دکارتی، برداری به طول ۳ تولید می‌کند که با محور طول‌ها زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد.



$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (x, y) \longrightarrow (r, \theta) \\ \theta = \text{Arc tan } \frac{y}{x} \\ x = r \cos \theta \\ (r, \theta) \longrightarrow (x, y) \\ y = r \sin \theta \end{array} \right.$$

تعریف: برای هر زوج مرتب (x, y) در دستگاه دکارتی با

$$\text{فرض } \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arc tan } \frac{y}{x} \end{array} \right. \text{ زوج مرتب } (r, \theta) \text{ را «مختصات}$$

زاویه‌ای» یا قطبی زوج مرتب (x, y) می‌نامیم.

از آن چه بیان شد نتیجه می‌گیریم، هر مختصات دکارتی یک مختصات قطبی دارد و برعکس، مختصات قطبی هر نقطه نیز یک مختصات دکارتی دارد.

مثال ۱. فرم قطبی زوج مرتب $(3, -3)$ را بنویسید.

حل:

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\theta = \text{Arc tan } \frac{-3}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow (3\sqrt{2}, 2\pi - \frac{\pi}{4})$$

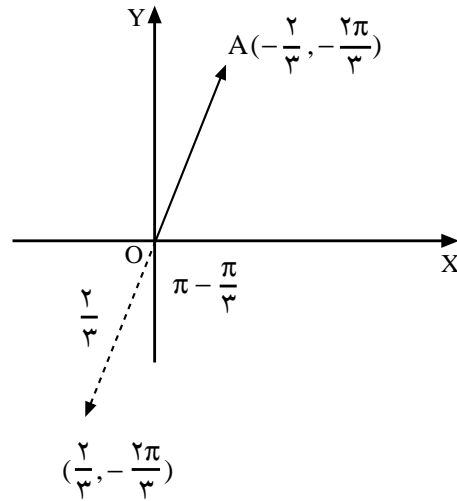
بنابراین، فرم قطبی $(3, -3)$ با $(3\sqrt{2}, 2\pi - \frac{\pi}{4})$ برابر

است. ۱

مثال ۳. الف) نقطه‌ی $(-\frac{2}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ را دستگاه دکارتی نشان

دهید.

حل:



ب) فرم دکارتی نقطه را بنویسید.

حل:

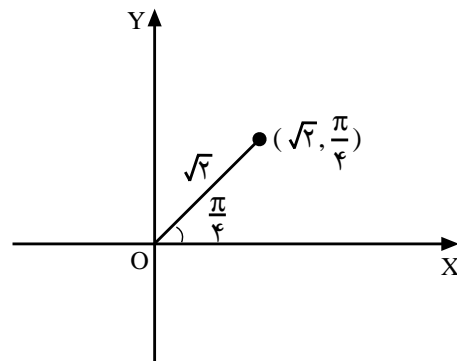
$$x = r \cos \theta = (-\frac{2}{3}) \cos(-(\pi - \frac{\pi}{3})) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$y = r \sin \theta = (-\frac{2}{3}) \sin(-(\pi - \frac{\pi}{3})) = \frac{2}{3}$$

صورت‌های مختلف فرم قطبی یک نقطه

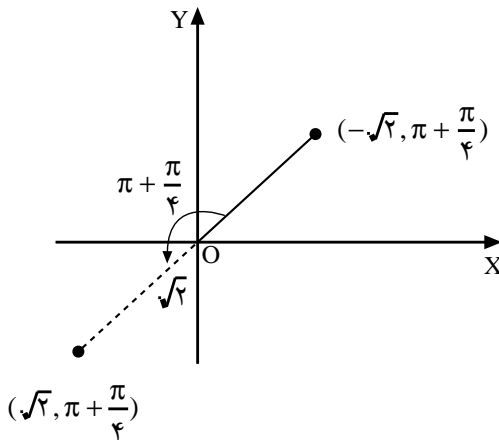
نقاط در دستگاه مختصات دکارتی نمایش منحصر به فرد (x, y) را دارند. مؤلفه‌ی اول مقدار طول و مؤلفه‌ی دوم مقدار عرض نقاط را مشخص می‌کند. با تغییر مقدار یا علامت x, y نقطه‌ی جدیدی تولید می‌شود که با نقطه‌ی اولیه تفاوت دارد. اما به دلیل آن که r, θ می‌توانند علامت منفی داشته باشند و این علامت منفی جایگاه نقاط را تغییر می‌دهد، برای فرم قطبی نقاط، نمایش منحصر به فرد نداریم. برای مثال، نقطه‌ی

$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ را در نظر بگیرید:



حال نقطه‌ی $(-\sqrt{2}, \pi + \frac{\pi}{4})$ را در دستگاه دکارتی رسم

کنید.



به روشنی آشکار است، نقطه‌ی $(-\sqrt{2}, \pi + \frac{\pi}{4})$ همان

جایگاه $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ را در دستگاه دارد. اما هر کدام به صورتی

کاملاً متفاوت نمایش داده می‌شود. اگر نقاط $(\sqrt{2}, 2\pi + \frac{\pi}{4})$ ،

$(\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{4})$ و $(-\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ را نیز ترسیم کنید، همگی

جایگاه $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ را خواهند داشت.

یک نقطه و پنج حالت متفاوت نمایش، ویژگی جالب فرم

قطبی یک نقطه است. شما می‌توانید باز هم برای $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ فرم

قطبی با r, θ های دیگری ارائه دهید. به طور کلی، برای نقطه‌ی

$p(r, \theta)$ نمایش‌های کلی $p(r, 2k\pi + \theta)$ ، $p(r, -2k\pi - \theta)$ ، $p(-r, (2k+1)\pi + \theta)$ و $p(-r, -(2k+1)\pi + \theta)$ وجود دارد.

مثال ۴. نمودار قطبی $r^2 \cos 2\theta = 1$ را رسم کنید.

حل: چون طرف اول عبارت مثبت است، باید $\cos 2\theta \geq 0$.

بنابراین $2\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و لذا $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. هم‌چنین

$r^2 = \frac{1}{\cos 2\theta}$ و این کسر برای تعریف شدن باید مخرجی مخالف

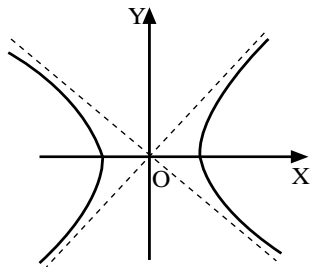
صفر داشته باشد. در یک دوره‌ی تناوب، ریشه‌های مخرج

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ هستند. از توضیحات بالا نتیجه می‌شود

که $\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

● آیا همیشه استفاده از مختصات قطبی ترسیم را آسان می‌کند؟

باید دقت کرد، هر چند استفاده از مختصات قطبی یک نمودار برای ترسیم روابط ضمنی مزایای زیادی دارد، اما در برخی موارد استفاده از فرم دکارتی برای ترسیم، مراحل کار را کمتر و ترسیم را راحت‌تر خواهد کرد. برای نمونه، می‌توان به مثال بالا اشاره کرد. با تبدیل فرم قطبی نمودار بالا به فرم دکارتی درمی‌یابیم که فرم قطبی بالا هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ با دو مجانب $y = \pm x$ است که ترسیم آن با استفاده از مباحث هندسه‌ی تحلیلی بسیار آسان‌تر است.



باید دقت کرد، هر چند استفاده از مختصات قطبی یک نمودار برای ترسیم روابط ضمنی مزایای زیادی دارد، اما در برخی موارد استفاده از فرم دکارتی برای ترسیم، مراحل کار را کمتر و ترسیم را راحت‌تر خواهد کرد

تقارن نسبت به محور طول‌ها :

$$(r, \theta) \rightarrow (r, -\theta)$$

معادله تغییر نکرده است $r^2 = \frac{1}{\cos^2(-\theta)} = \frac{1}{\cos^2\theta}$
نمودار نسبت به محور طول‌ها متقارن است، بنابراین $\theta \in [0, \pi]$

تقارن نسبت به محور عرض‌ها :

$$(r, \theta) \rightarrow (-r, -\theta)$$

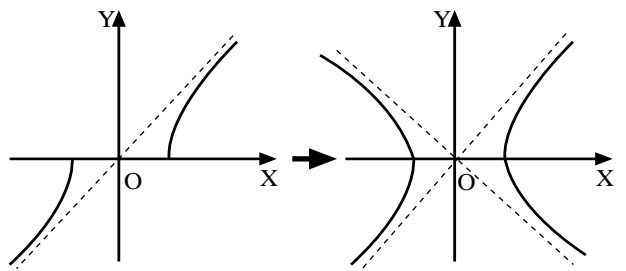
معادله تغییر نکرده است $(-r)^2 = \frac{1}{\cos^2(-\theta)} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$
نمودار نسبت به محور عرض‌ها متقارن است و این موجب

$$\text{می‌شود که } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

با اشتراک گرفتن بین شرایط موجود، برای θ خواهیم داشت $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. از طرف دیگر، به راحتی می‌توان نشان داد

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{\cos^2\theta} = +\infty$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	± 1	± 1.1	$+\infty$



تمرین

۱. نمودار $\sqrt{(x^2 + y^2)^3} - 6xy = 0$ را رسم کنید (راهنمایی: x).

۲. نمودار رابطه‌ی ضمنی $x^2 + y^2 = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ را رسم کنید (راهنمایی: α).

بی‌نوشت. $\pi - \frac{\pi}{4}$ نیز می‌تواند جواب θ باشد، اما از آن‌جا که زوج مرتب ما در ربع چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، جواب درست $2\pi - \frac{\pi}{4}$ است.

۱. لویی لیت هولدر. حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی علی اکبر عالم‌زاده.

۲. جرج توماس و راس ال فینی. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی علی اکبر عالم‌زاده و داریوش بهمدی.

بخش پذیری

اشاره

در این مقاله به تعریف بخش پذیری چند جمله ای $P(x)$ بر $(x-a)$ خواهیم پرداخت، سپس مسائل و آزمون های متفاوتی را در این زمینه طرح و حل می کنیم.

$(x-2)$ را بیابید.

حل: چون $P(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است، پس باید $P(-1) = 0$.

$$P(-1) = -1 + 4 + 5 + m = 0 \Rightarrow m = -8$$

حال، باقی مانده ی تقسیم $P(x) = x^3 + 4x^2 - 5x - 8$ بر $(x-2)$ را تعیین می کنیم.

$$R = P(2) = 8 + 16 - 10 - 8 \Rightarrow R = 6$$

۳. اگر عبارت $P(x)$ بر $(x-a)$ و $(x-b)$ و $(x-c)$... بخش پذیر باشد، آن گاه باید $P(a) = 0$ ، $P(b) = 0$ ، $P(c) = 0$ و ...

مسئله ی ۲. m و n را چنان بیابید تا عبارت

$$P(x) = mx^3 + nx^2 - 4x + 12$$

بر $(x^2 - 4)$ بخش پذیر باشد.

حل: روش اول:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8m + 4n - 8 + 12 = 0 \\ -8m + 4n + 8 + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8m + 4n = -4 \\ -8m + 4n = -20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$8n = -24 \Rightarrow n = -3, \quad 8m + 4n = -4$$

$$\Rightarrow 8m - 12 = -4 \Rightarrow 8m = 8 \Rightarrow m = 1$$

روش دوم: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ ، در عبارت $P(x)$ به

جای هر (x^2) ، عدد ۴ را قرار می دهیم. سپس باقی مانده را

۱. عبارت $P(x)$ را بر $(x-a)$ وقتی بخش پذیر گویند که باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)$ صفر باشد. اگر خارج قسمت تقسیم $Q(x)$ باشد، می توان نوشت $P(x) = (x-a)Q(x)$.

مثلاً عبارت $P(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ بر $(x-1)$ بخش پذیر است. زیرا می توان نوشت:

$$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = (x-1)(x^2 - 4x + 1)$$

$$P(x) = (x-1).Q(x)$$

۲. اگر باقی مانده ی تقسیم عبارت $P(x)$ بر $(x-a)$ ، R و خارج قسمت آن $Q(x)$ باشد، می توان نوشت

$$P(x) = (x-a).Q(x) + R$$

اگر در این رابطه به جای x ، عدد a را قرار دهیم، خواهیم

$$P(a) = R$$

نتیجه: اگر عبارت $P(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر باشد،

$$P(a) = 0$$

مثال: نشان دهید عبارت $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ بر $(x-1)$ بخش پذیر است.

$$P(1) = 1 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow P(1) = 0$$

در نتیجه $P(x)$ بر $(x-1)$ بخش پذیر است.

مسئله ی ۱. اگر عبارت $P(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + m$ بر

$(x+1)$ بخش پذیر باشد، آن گاه باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر



بر $x(x-1)(x+1)$ بخش پذیر باشد، m و n

و k را بیابید.

حل: روش اول:

$$x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + 0 + k - 5 = 0 \\ 1 + m + n + k - 5 = 0 \\ 1 - m + n + k - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = -1 \\ -m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = 0 \end{cases}$$

روش دوم:

$$x(x-1)(x+1) = x(x^2-1) = x^3 - x = 0 \Rightarrow x^3 = x$$

در عبارت $P(x)$ به جای هر x^3 ، x قرار می دهیم. سپس

باقی مانده را متحد با صفر قرار می دهیم.

$$P(x) = x(x^3) + m(x^3) + nx^2 + k - 5$$

$$R = x(x) + m(x) + nx^2 + k - 5 = x^2 + mx + nx^2 + k - 5$$

$$R = (n+1)x^2 + (m)x + (k-5) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 = 0 \\ m = 0 \\ k-5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = 0 \\ k = 5 \end{cases}$$

مسئله ۵. اگر عبارت $P(x) = x^{35} + 4x^{16} + ax^2 + bx + c$ بر

$(x^3 + 1)$ بخش پذیر باشد، a ، b و c را بیابید.

حل: در عبارت $P(x)$ ، به جای هر x^3 ، (-1) را قرار

متحد با صفر قرار می دهیم.

$$P(x) = mx(x^2) + n(x^2) - 4x + 12$$

$$R = mx(4) + n(4) - 4x + 12$$

$$R = (4m - 4)x + (4n + 12) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4m - 4 = 0 \\ 4n + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -3 \end{cases}$$

تذکر مهم: در بعضی از مسائل، روش اول مقدور

نیست. باید از روش دوم استفاده کرد.

مسئله ۳. a و b را چنان بیابید تا عبارت

$$P(x) = x^9 + ax^4 + bx^3 - 8$$

بر $(x^2 + 1)$ بخش پذیر باشد.

حل:

$$P(x) = x(x^2)^4 + a(x^2)^2 + bx(x^2) - 8$$

$$R = x(-1)^4 + a(-1)^2 + bx(-1) - 8 = x + a - bx - 8$$

$$R = (1-b)x + (a-8) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-b = 0 \\ a-8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 8 \end{cases}$$

توجه: ممکن است برای بعضی ها این سؤال پیش آید

که آیا x^2 می تواند مساوی (-1) باشد؟ در جواب باید

گفت، در ریاضی معادله $x^2 = -1$ دو ریشه ی متمایز

دارد که در حوزه ی اعداد حقیقی نیست. پس تساوی

$x^2 = -1$ اشکالی ندارد.

مسئله ۴. اگر عبارت $P(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + (k-5)$

می دهیم:

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$

$$P(x) = x^2(x^3)^{11} + 4x(x^3)^5 + ax^2 + bx + c$$

$$R = x^2(-1)^{11} + 4x(-1)^5 + ax^2 + bx + c$$

$$= -x^2 - 4x + ax^2 + bx + c$$

$$R = (a-1)x^2 + (b-4)x + c \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 & a=1 \\ b-4=0 & b=4 \\ c=0 & c=0 \end{cases}$$

۴. اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد A بر عدد t مساوی R_1 و باقی مانده‌ی تقسیم عدد B بر عدد t مساوی R_2 باشد، آن‌گاه:

الف) باقی مانده‌ی تقسیم عدد $(A+B)$ بر عدد t برابر است با باقی مانده‌ی تقسیم $(R_1 + R_2)$ بر (t) .

ب) باقی مانده‌ی تقسیم عدد $(A \times B)$ بر عدد t برابر است با باقی مانده‌ی تقسیم $(R_1 \cdot R_2)$ بر (t) .

مسئله ۷. اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد A بر ۸ مساوی ۷ و باقی مانده‌ی تقسیم عدد B بر ۸ مساوی ۶ باشد، آن‌گاه باقی مانده‌ی تقسیم $(A \cdot B)$ بر ۸ را بیابید.

حل: این مسئله را بدون در نظر گرفتن قسمت «ب» از شماره‌ی ۴ درس حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} A = 8m + 7 \\ B = 8k + 6 \end{cases} \Rightarrow A \times B = (8m + 7)(8k + 6) = 8(8km + 6m + 7k) + 42$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، باقی مانده‌ی تقسیم $(A \cdot B)$ بر عدد ۸، باقی مانده‌ی تقسیم عدد ۴۲ بر ۸ است که مساوی با ۲ است. پس: $R = 2$.

مسئله ۶. چند جمله‌ای درجه سوم بنویسید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $(x-1)$ و $(x-2)$ و $(x-3)$ عدد ۴۸ باشد و این چندجمله‌ای بر $(x+1)$ بخش پذیر باشد.

حل: چندجمله‌ای درجه سوم را به صورت $P(x) = m(x-1)(x-2)(x-3) + 48$ می‌نویسیم.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1)=0$$

$$p(-1) = m(-2)(-3)(-4) + 48 = 0$$

$$\Rightarrow -24m + 48 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\Rightarrow p(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3) + 48$$

آزمون

آزمون ۱. اگر $f(2) = f(-2) = 8$ ، آن‌گاه کدام یک از عبارات‌های زیر بر $(x^2 - 4)$ بخش پذیر است؟

$$f(x) - 4 \quad (4) \quad f(x) - 8 \quad (3) \quad f(x) + 8 \quad (2) \quad f(x) \quad (1)$$

حل: گزینه‌ی ۳. گزینه‌ای درست است که به ازای $x = 2$ و $x = -2$ حاصل آن صفر شود.

آزمون ۲. اگر $P(x)$ بر $(x - 2\sqrt{2})$ بخش پذیر باشد، آن‌گاه باقی مانده‌ی تقسیم $P(x^4 - 2x^2 + 2x)$ بر $(x - \sqrt{2})$ کدام است؟

$$-2 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad 0 \quad (1)$$

حل: گزینه‌ی ۱.

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow P((\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}) = P(4 - 4 + 2\sqrt{2}) = P(2\sqrt{2}) = 0$$

آزمون ۳. اگر باقی مانده‌ی تقسیم $ax^5 + bx^4 + cx + 7$ بر $(x-1)$ ، ۷ باشد، آن‌گاه باقی مانده‌ی تقسیم $ax^2 + bx + c$ بر $(x - \frac{c}{a})$ کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad -2 \quad (3) \quad 0 \quad (4)$$

حل: گزینه‌ی ۴.

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx + 7 \text{ و } P(1) = 7 \Rightarrow a + b + c + 7 = 7 \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{c}{a} \end{cases}$$

پس عبارت $ax^2 + bx + c$ بر $(x - \frac{c}{a})$ بخش پذیر است.

آزمون ۴. اگر باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)$ ، 7 و بر $(x-2)$ ، 5 باشد، آن گاه باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ کدام است؟

$$(1) \quad -2x + 9 \quad (2) \quad 2x - 9 \quad (3) \quad -2x - 9 \quad (4) \quad 2x + 9$$

حل: گزینه ۱

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2; \quad a=1 \text{ و } R_1=7; \quad b=2 \text{ و } R_2=5$$

$$mx + n \text{ باشد باقی مانده } \Rightarrow \begin{cases} m(a) + n = R_1 \\ m(b) + n = R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = 7 \\ 2m + n = 5 \end{cases} \Rightarrow m = -2, \quad n = 9$$

$$\Rightarrow mx + n = -2x + 9$$

آزمون ۵. اگر باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 2$ بر $(x-a)$ ، 70 باشد، باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x - \frac{a}{4})$ کدام است؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 5 \quad (4) \quad 7$$

حل: گزینه ۴

$$p(a) = 70 \Rightarrow a^3 - 6a^2 + 12a - 2 = 70$$

$$\Rightarrow a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 64$$

$$\Rightarrow (a-2)^3 = 64 \Rightarrow a-2 = 4 \Rightarrow a = 6$$

$$\Rightarrow x - \frac{a}{4} = x - 3 \Rightarrow P(3) = 27 - 54 + 36 - 2 = 7$$

آزمون ۶. اگر $2f(x) + f(-x) = x^3 - 3x$ ، آن گاه باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-3)$ کدام است؟

$$(1) \quad 18 \quad (2) \quad -18 \quad (3) \quad -5 \quad (4) \quad -6$$

حل: گزینه ۲

$$x \xrightarrow{\text{تبدیل}} -x \Rightarrow \begin{cases} 2f(-x) + f(x) = -x^3 + 3x \\ 2f(x) + f(-x) = x^3 - 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3f(x) = -3x^3 + 9x \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x,$$

$$f(3) = 27 - 9 = 18$$

آزمون ۷. اگر $f(\frac{1}{x-1}) = \frac{4x-3}{x-1}$ ، آن گاه باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-\sqrt{2})$ کدام است؟

$$(1) \quad (2 + \sqrt{2}) \quad (2) \quad (3 + \sqrt{2}) \quad (3) \quad (4 + \sqrt{2}) \quad (4) \quad (5 + \sqrt{2})$$

حل: گزینه ۳

$$f(\frac{1}{x-1}) = \frac{4(x-1)+1}{x-1} = 4 + \frac{1}{x-1}, \quad \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{تبدیل}} x$$

$$f(x) = 4 + x \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$$

آزمون ۸. باقی مانده‌ی تقسیم x^7 بر $(x^2 - x + 1)$ کدام است؟

$$(1) \quad x \quad (2) \quad 2x \quad (3) \quad -2x \quad (4) \quad 3x$$

حل: گزینه ی ۱ .

$$P(x) = x^6 = x(x^5) = x(x^5 - 1 + 1) = x(x^5 - 1) + x = x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + x$$

$$P(x) = x(x^3 - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) + x \Rightarrow R = x$$

بر $(x^2 - x + 1)$ بخش پذیر است

آزمون ۹. باقی مانده ی تقسیم $x^{111} + x^{21} - 2$ بر $(x^2 - x)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۲ ۳) $2x - 2$ ۴) $2x + 2$

حل: گزینه ی ۳ .

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x^2 = x, \quad P(x) = x^{111} + x^{21} - 2$$

در عبارت $P(x)$ به جای هر x^2 ، x قرار دهیم، به این ترتیب، هر x^n ، $n \in \mathbb{N}$ و $n > 1$ در نهایت به x تبدیل می شود. درباره ی x^9 این عمل را انجام می دهیم.

$$x^9 = x(x^2)^4 \rightarrow x(x)^4 = x(x^2)^2 \rightarrow x(x)^2 = x(x^2)$$

$$\rightarrow x(x) = x^2 \rightarrow x$$

پس درباره ی $P(x)$ ، $x^{111} \rightarrow x$ و $x^{21} \rightarrow x$ بنابراین: $R = 2x - 2$.

آزمون ۱۰. اگر $f(x+4) = x^2 - 4x$ ، آن گاه باقی مانده ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

حل: گزینه ی ۴ ، باید $f(1)$ را پیدا کرد، بنابراین با فرض $x = -3$ ، مقدار $f(x+4)$ را به دست می آوریم:

$$f(-3+4) = 9 + 12 \Rightarrow f(1) = 21$$

یکی چیست؟

آن است که یگانگی بر او افتد و بدو نام زده شود. و از تمامی وی آن است که کمی و بیشی نپذیرد و ز حال خویش به ضرب و قسمت نگردد و اندر قوت همه عددهاست و همه خاصیت های ایشان. و حال یکی اندر آن چیزها که شمرده شود بدو، هر چند یگانگی او نه به حقیقت باشد، و لکن از جهت نهادن مردمان یک دیگر [نیز همچنان است]. و این یکی ایستاده است میان آن عددها که از مانده ی او گرد آید به جمله شدن و میان آن پاره ها که از او کمترند. و این ایستادن او میان ایشان از بهر آن پاره ها که از او کمترند. و این ایستادن او میان ایشان از بهر آن است که او چون میانه ی معتدل راست است. اگر او را به مثل خویش زنی یا بر مثل خویش قسمت کنی هم یکی باشد. و دیگر عددها که از او بیشترند هر گاه که یکی ایشان را ضرب کنی بیفزاید. و قسمت کنی بکاهند. و اما اجزاها که از او کمترند هر گاه که ضرب کنی بکاهند و که قسمت کنی بیفزایند. و یکی به میان ایشان بر حال خویش است.

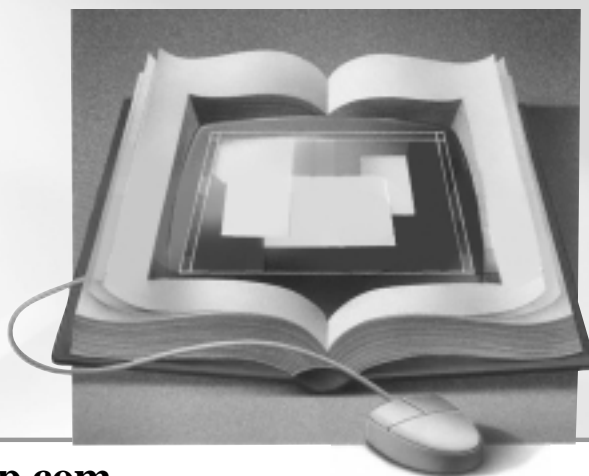
تفریح اندیشه

از: التفهیم، ابوریحان بیرونی،

به تصحیح جلال الدین همائی



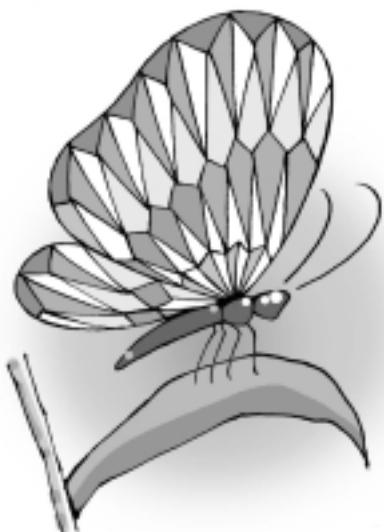
معرفی سایت های ریاضی جهان



algebrahelp.com عنوان سایت:
 http://www.algebrahelp.com نشانی سایت:

در صفحه ی اصلی این سایت ، کاربر می تواند مسائل جبری را به نرم افزار **Algebra solved** ارائه دهد و پاسخ را به صورت گام به گام دریافت کند . سایت **algebrahelp.com** دارای چهار بخش با زیر عنوان های متنوع و مطالب جالب پیرامون موضوعات جبر به این شرح است :

- | | | |
|--|--|------------------------------|
| ● ضمیمه به همراه شرح ها (Index with Description) | ● مفهومی های جبر پایه (Basic Algebra Concepts) | ● دروس (Lessons) |
| (Worksheets) | ● مختصر سازی (Simplifying) | ● محاسبه گر ها (Calculators) |
| (Basics) | ● جانشینی و ارزیابی (Substitution and Evaluating) | ● معادلات (Equations) |
| (Simplifying) | ● عامل یابی (Factoring) | ● عبارات (Expressions) |
| (Multiplication) | ● نماهای منفی (Negative Exponents) | ● توابع (Functions) |
| (Exponents) | ● معادلات - پیشرفته (Equations - Advanced) | ● اعداد (Numbers) |
| (Advanced Simplifying) | ● شرح ها و مسائل ساده (Descriptions and Sample Problems) | ● کسرها (Fractions) |
| (Negative Exponents) | | ● دیگر (Other) |
| (Advanced Equations) | | |
| (Graphing) | | |
| (Index with Descriptions) | | |
| ● هر چیز دیگر (Every Things Else) | | |
| (Math Resources) | | |
| (Advertisers) | | |



تئوری پروانه

اشاره

در این مقاله ی کوتاه کوشیده ایم شما را با نظریه ای به نام «نظریه ی پروانه» آشنا کنیم. سال ها پیش مبحث جدیدی به نام «تئوری پروانه» بیان شد که در علم ریاضیات جایگاه ویژه ای داشت. در اثبات این قضیه ی مهم، از مباحث چهارضلعی محاطی و هم نهشتی های مثلث ها و تشابه استفاده شده است که برای فهم مطلب، دانستن آن ها لازم است.

صورت قضیه

مثلث های شکل متشابه اند و نسبت تشابه آن ها را

می نویسیم:

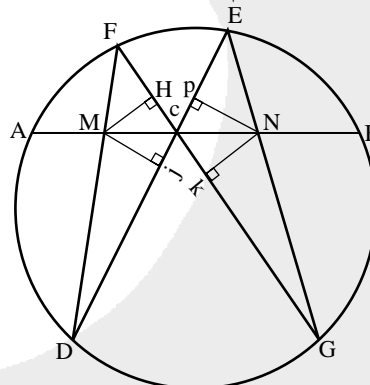
Triangles (مثلث ها)	Proportions (نسبت ها)
CMH و CNK	$\frac{CM}{CN} = \frac{MH}{NK}$ (۱)
CMJ و CNP	$\frac{CM}{CN} = \frac{MJ}{NP}$ (۲)
FMH و ENP	$\frac{MH}{NP} = \frac{FM}{EN}$ (۳)
DMJ و GKN	$\frac{MJ}{NK} = \frac{MD}{NG}$ (۴)

دایره ای فرضی به شعاعی خاص داریم و وترى از آن به نام AB را رسم می کنیم. وسط وتر را با نقطه ی C نشان می دهیم. حال دو وتر دل خواه ED و FG را رسم می کنیم، به طوری که محل برخورد آن ها در C باشد. دو سر نقاط E و G، F و D را به هم متصل می کنیم. حالا ما دو مثلث به نام های EGC و FDC داریم که دو ضلع EG و FD، وتر AB را به ترتیب در N و M قطع می کنند. حال طبق قضیه ی پروانه داریم:

$$NC=MC \leftarrow \text{قضیه ی پروانه}$$

اثبات قضیه ی پروانه

ابتدا برای اثبات، خطوط عمود MH، MJ، NP و NK را رسم می کنیم. بعد از آن، خطوط CB=CA را a، و خط MC را b و خط NC را d می نامیم.



$$(1) \times (2) \Rightarrow \frac{CM^2}{CN^2} = \frac{MH}{NK} \times \frac{MJ}{NP} = \frac{FM}{EN} \times \frac{MD}{NG} = \frac{FM \cdot MD}{EN \cdot NG}$$

$$= \text{قوت نقطه در دایره} = \frac{AM \times MB}{BN \cdot NA}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-d)(a+d)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - d^2}$$

$$\Rightarrow b^2 = d^2 \quad b, d > 0 \Rightarrow b = d \text{ حکم اثبات شد}$$

دانش آموز پیش دانشگاهی شهرستان مهاباد

اتحادی دیگر

$$(1+2+3+\dots+n+n+1)^2 - (1+2+3+\dots+n)^2 = (n+1)^2$$

اثبات: با فرض این که $a = 1+2+3+\dots+n$ ، $b = n+1$ و جایگزینی آن‌ها در سمت راست اتحاد بالا، خواهیم داشت:

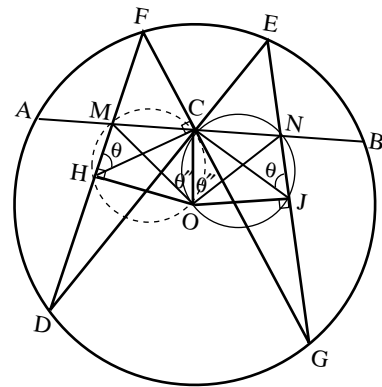
$$A = (a+b)^2 - a^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 = b^2 + 2ab \\ = (n+1)^2 + 2(1+2+3+\dots+n)(n+1) \quad (1)$$

از طرف دیگر می‌دانیم: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
با جای‌گزینی رابطه‌ی اخیر در ۱ خواهیم داشت:

$$A = (n+1)^2 + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} (n+1) \\ = (n+1)^2 + n(n+1)^2 = (n+1)^2 (n+1) = (n+1)^3$$



مسابقه: با توجه به این که روش‌های دیگری برای اثبات قضیه‌ی پروانه وجود دارند و با توجه به شکل زیر، این قضیه را اثبات کنید:



بی‌نوشت

1. Butterfly theorem

منابع

1. agutie. Home stead.com
2. www.Cut-the knot.org

برگ اشتراک مجله‌های رشد

شرایط:

- ۱- برزاق مبلغ ۵۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله‌ی درخواستی؛ به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه‌ی سه راه ارسايش (اسنخحصار) کد ۳۹۵۵ در وجه شرکت افست.
- ۲- ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده‌ی اشتراک بایست سفتاشی، آگهی فیش را از نزد خود نگه دارید.

نام مجله‌های درخواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

میزان تحصیلات:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان:

شهرستان:

کدپستی:

در صورتی که قرار شد اشتراک مجله‌ی خود را بفرستید:

امضا:

● آدرس مشترکین: ۷۳۳۶۶۵۵ - ۷۳۳۶۶۵۶ - ۲۱

● صندوق پستی اموال مشترکین: ۱۶۵۹۵۱۱۱

● پیام گیر مجله‌های رشد: ۰۲۱-۸۸۲۰۱۲۸۲

یادآوری:

- هزینه‌ی برگشت مجله در صورت خرابی و کامل نبودن نشانی و عدم حضور گیرنده، بر عهده‌ی مشتری است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان دریافت برگ اشتراک است.

مسائل تناوبی بودن

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی مسائل تناوبی بودن توضیحاتی داده شد و تعدادی مسأله بررسی و حل شد، در ادامه‌ی آن بقیه‌ی مسائل تناوبی بودن را بررسی می‌کنیم.

الف) نشان دهید به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n \leq a$.

ب) نشان دهید دنباله‌ی $\{u_n\}_n$ ، از یک مرحله به بعد،

متناوب است.

۱۰. اعداد صحیح و مثبت a_1, a_2, a_3, \dots ، که هیچ‌یک متجاوز از ۱۹۸۸ نیستند، دنباله‌ای را تشکیل می‌دهد که در این شرط صدق می‌کند: اگر m و n اعدادی صحیح و مثبت باشند، در این صورت $a_m + a_n$ بر a_{m+n} بخش پذیر است. ثابت کنید این دنباله، از یک مرحله به بعد، تناوبی است.

۱۱. فرض می‌کنیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی یکنواخت است که در مورد آن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ با $a \neq 0$ ، $c \neq 0$ چنان موجودند که به ازای جميع مقادیر x برابری‌های زیر برقرارند:

$$\int_x^{x+\sqrt{x}} f(t) dt = ax + b \quad \text{و} \quad \int_x^{x+\sqrt{x^2}} f(t) dt = cx + d$$

ثابت کنید f تابعی خطی است، یعنی به ازای

$$f(x) = mx + n \quad m, n \in \mathbb{R}$$

۶. جميع $\alpha \in \mathbb{R}$ ها را با این ویژگی بیابید که دنباله‌ی صادق

در بازگشتی

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \alpha x_n, n \in \mathbb{N}$$

دوره‌ای باشد.

۷. فرض می‌کنیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دوره‌ای و چنان باشد

که مجموعه‌ی $\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$ دارای بی نهایت عضو باشد.

ثابت کنید دوره‌ی تناوب f گنگ است.

۸. فرض می‌کنیم b_n آخرین رقم عدد زیر باشد:

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n$$

ثابت کنید دنباله‌ی $\{b_n\}_n$ متناوبی با دوره‌ی تناوب ۱۰۰ است.

۹. فرض می‌کنیم a, b اعدادی صحیح و مثبت و a فرد

باشد. دنباله‌ی $\{u_n\}_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به

$$u_n = b, n \in \mathbb{N}$$

ازای $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} u_n & \text{اگر } u_n \text{ زوج باشد} \\ u_n + a & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پرورش و پرزانه‌های آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

- مجله‌های عمومی دانش آموزی
- (به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):
- **رشد کوکب** (برای دانش آموزان ابتدایی و پایه‌ی اول دوره‌ی دبستان)
- **رشد نوجوان** (برای دانش آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی دبستان)
- **رشد دانش آموزان** (برای دانش آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی دبستان)
- **رشد نوجوان** (برای دانش آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)
- **رشد جوان** (برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه و پیش دانشگاهی)

- مجله‌های تخصصی
- (به صورت فصلنامه و ۴ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):
- **رشد پرهان راهنمایی** (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره‌ی راهنمایی)
- **رشد پرهان متوسطه** (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه و پیش دانشگاهی)
- **رشد آموزش قرآن** (رشد آموزش معارف اسلامی)
- **رشد آموزش زبان و ادب فارسی** (رشد مشاوره و مدرسه)
- **رشد آموزش تربیت بدنی** (رشد آموزش علوم اجتماعی)
- **رشد آموزش تاریخ** (رشد آموزش جغرافیا)
- **رشد آموزش ریاضی** (رشد آموزش فیزیک)
- **رشد آموزش شیمی** (رشد آموزش زیست‌شناسی)
- **رشد آموزش زمین‌شناسی** (رشد آموزش فیزیک)
- **رشد آموزش پیش دبستانی**

- مجله‌های رشد عمومی و اختصاصی برای آموزگاران، معلمان، مدیران، همکاران و مشاوران مدارس، دانش‌جویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دیگری دانشگاه‌ها و کارشناسان آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند.
- نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره‌ی ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی.
- شماره: ۰۲۱-۸۸۸۳۰۱۴۷۸
- تلفن: ۰۲۱-۸۸۸۴۹۰۹۹
- E_mail: info@roshdmag.ir
- www.roshdmag.ir



Revista Matematică din
Timisoara (Timisoara
Mathematics Review), 1981;
proposed by D. Andrica

۸. آخرین رقم عدد صحیح و مثبت n را $l(n)$ نمایش می دهیم. دنباله $\{l(n)\}_n$ دوره‌ای و با دوره‌ی تناوب ۱۰ است. نیز، به ازای ثابت $a \in \mathbb{N}$ ، دنباله $\{l(a^n)\}_n$ دوره‌ای و دوره‌ی تناوب آن برابر ۱ است، اگر a به ۱، ۵، یا ۶ ختم شود، و برابر ۲ است، اگر α به ۴ یا ۲ ختم شود، و برابر ۴ است اگر به ۲، ۳، ۷، یا ۸ مختوم باشد.

از آن جا که کوچک ترین مضرب مشترک ۱۰ و ۴ برابر ۲۰ است، اگر فرض کنیم:

$$m = (n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2} + \dots + (n+20)^{n+20}$$

در این صورت $l(m)$ به n وابسته نیست. بنابراین، آخرین رقم $20^{20} + 19^{19} + \dots + 2^2 + 1^1$ را محاسبه می کنیم. آخرین رقم این عدد، به علت دوره‌ای بودن دنباله‌های به صورت $\{l(a^n)\}_n$ ، آخرین رقم

$$1+2^2+3^3+4^4+5^5+6^6+7^7+8^8+9^9$$

$$+1+2^4+3^4+4^4+5^5+6^6+7^7+8^8+9^9$$

است. محاسبه‌ای آسان نشان می دهد که آخرین رقم مورد بحث ۴ است. در نتیجه، آخرین رقم مجموع به صورت

$$(n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2} + \dots + (n+100)^{n+100}$$

برابر

$$l(4 \times 5) = l(20) = 0$$

است. در نتیجه، b_n دوره‌ای، با دوره‌ی تناوب ۱۰۰ است. (آزمون انتخابی IMO رومانی، ۱۹۸۰)

۹. الف) فرض می کنیم $u_n > 0$. اگر u_n زوج باشد،

$$u_{n+1} = u_n / 2 < u_n$$

و اگر u_n فرد باشد، داریم $u_{n+1} = (u_n + a) / 2 < u_n$ در نتیجه، به ازای هر جمله‌ی بزرگ تر از a ، جمله‌ی تالی کوچک تری موجود است. این جملات، یک زیر دنباله‌ی نزولی را تشکیل می دهند که باید سرانجام مختوم شود و این وضع تنها اگر $u_n \leq a$ باشد، اتفاق می افتد.

ب) نشان می دهیم که بی نهایت جمله‌ی دنباله‌ی مورد بحث، کوچک تر از $2a$ هستند. فرض می کنیم چنین نباشد

۶. اگر $\alpha = 2$ ، آن گاه دنباله‌ی $x_n = n$ در رابطه‌ی بازگشتی مفروض صادق است و به طور واضح دوره‌ای نیست. بنابراین، فرض می کنیم $\alpha \neq 2$. در این حال، معادله‌ی $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ دو جواب متمایز r ، r^{-1} دارد و جمله‌ی عمومی دنباله را می توان در شکل نهایی، به صورت $x_n = Ar^n + Br^{-n}$ نوشت که در آن A و B توسط دو جمله‌ی اول دنباله مشخص شده‌اند.

اگر دنباله دوره‌ای باشد، آن گاه r باید دارای قدر مطلق برابر یک باشد، زیرا در غیر این صورت، قدر مطلق جمله‌ی عمومی به بی نهایت میل می کند.

$$x_n = Ar^n + Br^{-n} \quad \text{به این ترتیب:}$$

دنباله‌ی $\overline{x_n}$ نیز باید دوره‌ای باشد که با استفاده از جمع، مستلزم این است که $(A + \overline{B})r^n + (\overline{A} + B)r^{-n}$ دوره‌ای باشد. در نتیجه، دنباله‌ی $\text{Re}((A + \overline{B})r^n)$ دوره‌ای است (در این جا $\text{Re } z$ جزو حقیقی z را نمایش می دهد).

با نوشتن $r = \cos \pi t + i \sin \pi t$ نتیجه می گیریم که $\text{Re}(A + \overline{B}) \cos n\pi t$ دوره‌ای است که مستلزم این است که t گویا باشد. در واقع، اگر t گویا نباشد، آن گاه عددهای به صورت $2m\pi + n\pi t$ ، $m, n \in \mathbb{Z}$ ، $n > 0$ ، چگال خواهند بود. بنابراین: $\cos n\pi t$ ، در $[0, 1]$ چگال است و نمی تواند دوره‌ای باشد. نتیجه می شود که α باید به صورت $2 \cos \pi t$ ، با t گویا باشد.

(برنامه‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۶)

۷. فرض می کنیم T دوره‌ی تناوب f باشد. با استفاده از طریق تناقض، فرض می کنیم $T = p/q$ ، که در آن p و q اعدادی صحیح و مثبت و نسبت به هم اول‌اند. در این صورت، $qT = p$ نیز دوره‌ی تناوب f است. فرض می کنیم $n = kp + r$ که در آن k و r اعدادی صحیح‌اند و

$$0 < r < p - 1$$

$$f(n) = f(kp + r) = f(r)$$

در این صورت: بنابراین، به ازای جميع اعداد صحیح و مثبت n ،

$$f(n) \in \{f(1), f(2), \dots, f(p-1)\}$$

در تناقض با این واقعیت که $\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$ دارای بی نهایت عنصر است و به این ترتیب، اثبات کامل می شود.

و u_m بزرگترین جمله با این ویژگی باشد. اگر u_m زوج باشد، آن گاه

$$u_{m+1} = u_m / 2 < 2a$$

اگر u_m فرد باشد، آن گاه $u_{m+1} = u_m + a$ زوج است.

$$u_{m+2} = (u_m + a) / 2 < 3a / 2 < 2a$$

که باز هم غیرممکن است.

این موضوع نشان می دهد که بی نهایت جمله ی کمتر از $2a$ موجودند. کاربرد اصل دیریکله یا لانه ی کبوتر، با بی نهایت کبوتر، نشان می دهد که جمله ی u_n ای تکرار می شود که به دنباله ی دوره ای می انجامد.

(المپیاد ریاضی فرانسه، ۱۹۹۶)

۱۰. از آن جا که دنباله کران دار است، بعضی جمله ها باید بی نهایت مرتبه تکرار شوند. فرض می کنیم k بزرگترین عددی باشد که بی نهایت مرتبه در دنباله رخ می دهد و N عددی طبیعی، چنان که به ازای $i \geq N$ ، $a_i \leq k$ ، $m \geq N$ را چنان انتخاب می کنیم که $a_m = k$. ثابت می کنیم m دوره ی تناوبی از دنباله است. یعنی، به ازای هر $i \geq N$ ، $a_{i+m} = a_i$.

ابتدا فرض می کنیم به ازای i ، $a_{i+m} = k$. از آن جا که $a_i + a_m = k$ بر $a_{i+m} = k$ بخش پذیر است، داریم:

$$a_i = k = a_{i+m}$$

در غیر این صورت، اگر $a_{i+m} < k$ ، $j \geq N$ را چنان انتخاب می کنیم که $a_{i+j+m} = k$

از آن جا که $a_{i+j} + a_m < 2k$ حاصل می شود. از آن جا که $a_{i+j+m} = k$ بر $a_{i+j} + a_m$ بخش پذیر است، نتیجه می شود:

$$a_{i+m} + a_j = k$$

و بنابراین $a_j < k$. از آن جا که $a_{i+j+m} = k$ ، استدلال فوق مستلزم

$a_{i+j+m} = a_{i+j} = k$ است. بنابراین، k ، $a_i + a_j$ را می شمارد. نتیجه می گیریم:

$$a_i + a_j = k$$

زیرا $a_j < k$ و $a_i \leq k$. در نتیجه:

$$a_{i+m} = k - a_j = a_i$$

(المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸)

$$F = R \rightarrow R, F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

در این صورت F ، به ازای هر $x \in R$ ، در

$$F(x + \sqrt{3}) - F(x) = ax + b$$

$$F(x + \sqrt{2}) - F(x) = cx + d$$

چند جمله ای f_1 و f_2 ی درجه دو چنان یافت که به ازای هر

$$f_1(x + \sqrt{3}) - f_1(x) = ax + b, \quad x \in R$$

$$f_2(x + \sqrt{2}) - f_2(x) = cx + d$$

از این برابری ها می توان استخراج کرد که توابع $i = 1, 2$

و $g_i = F - f_i$ دوره ای هستند و دوره های تناوب آن ها به

$$\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{3}$$

نتیجه می شود که به ازای هر x ،

$$f_1(x) - f_2(x) + g_1(x) - g_2(x) = 0$$

اما از آن جا که g_1 و g_2 پیوسته و دوره ای اند، کران دارند.

در نتیجه، $f_1 - f_2$ باید ثابت باشند.

نتیجه می گیریم که به ازای $c \in R$ ،

$$g_1(x) = g_2(x) + c$$

در نتیجه، g_1 علاوه بر دوره ی تناوب $\sqrt{3}$ ، دارای

دوره ی تناوب $\sqrt{2}$ نیز هست. در این صورت، نتیجه

می گیریم که جمیع اعداد به صورت $r\sqrt{3} + s\sqrt{2}$ ، با

$r, s \in Z$ ، دوره های تناوب g_1 اند، و از آن جا که مجموعه ی

اعداد به این صورت، در R چگال است، g_1 بر مجموعه ی

چگالی ثابت است. g_1 ، با استفاده از پیوستگی، بر R ثابت

است. همین استدلال نشان می دهد که g_2 ثابت است.

دریافتیم که به ازای هر $m, n, p \in R$ داریم:

$$F(x) = mx^2 + nx + p$$

نتایج استاندارد مربوط به انتگرال ها مستلزم این است که

تابع F در هر نقطه از x که در آن f پیوسته است، مشتق پذیر

$$F'(x) = 2mx + n = f(x)$$

از آن جا که f یکنواخت است، مجموعه ی چنین نقطه هایی

در R چگال است. بنابراین، بر تابع خطی ای واقع بر

زیر مجموعه ی چگالی از R منطبق است. استدلال فشرده ای

با استفاده از یکنوایی f نشان می دهد که f در هر جا بر این تابع

خطی منطبق است و مسئله حل می شود.

(المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۹۹، طرح از M.Piticari)

هم نهشتی و کاربردهای آن

(حل معادله های هم نهشتی و معادله های سیاله به کمک جدول H.M)



اشاره

در قسمت های قبل، به بسیاری از کاربردهای هم نهشتی اشاره شد. در این شماره قصد بر این است که روش حل معادله های هم نهشتی و معادله های سیاله را توسط جدول H.M نشان دهیم و کاربرد این جدول را در پیدا کردن وارون ضربی یک عدد در هم نهشتی ارائه دهیم. در انتهای این قسمت نیز تمرین هایی نظیر مسئله های حل شده در متن طرح شده است که می توانید با دیدن مثال ها، آن ها را حل کنید. کاربردهای هم نهشتی در جبر، آنالیز، نظریه ی اعداد و دیگر شاخه های ریاضیات بر هیچ کس پوشیده نیست و این موضوع مقالات فراوانی را طلب می کند. این مقاله به معرفی روش جدید جدول H.M اختصاص دارد.

حل معادله ی هم نهشتی^۱ توسط جدول (H.M)^۲

قرارداد: در معادله ی هم نهشتی

(۱) $ax \equiv c \pmod{n}$
عدد n را سنج یا پیمانان یا هنگ (mod)، x را مجهول، a را ضریب مجهول و c را عدد ثابت هم نهشتی می نامیم. می دانیم، با فرض $(a, n) = 1$ و با توجه به معکوس ضربی a یعنی a^{-1} (وارون ضربی a در هم نهشتی) داریم:

$$a^{-1} \cdot a \equiv 1$$

معادله ی ۱ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x \equiv a^{-1} \cdot c$$

$$x = kn + a^{-1} \cdot c \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین، برای حل معادله ی ۱، کافی است معکوس a را محاسبه کنیم. می دانیم، معکوس a (وارون ضربی a) از معادله ی هم نهشتی زیر محاسبه می شود:

$$x_1 = a^{-1}; \quad ax_1 \equiv 1 \pmod{n} \quad (2)$$

در معادله ی ۲، اگر $a > n$ و r_1 باقی مانده ی حاصل تقسیم

$a: n$ باشد، می توان نوشت:

$$r_1 x_1 \equiv 1 \pmod{n} \quad (3)$$

معادله ی هم نهشتی ۳ را می توان به صورت معادله ی سیاله زیر نوشت:

$$r_1 x_1 - n x_2 = 1;$$

$$n x_2 - r_1 x_1 = -1;$$

$$n x_2 \equiv -1 \pmod{r_1} \quad (4)$$

با توجه به $n > r_1$ و با فرض این که r_2 باقی مانده ی حاصل

تقسیم $n:r_1$ باشد، می توان نوشت:

$$r_2 x_2 \equiv -1 \pmod{r_1} \quad (5)$$

مطابق مرحله ی پیش، معادله ی هم نهشتی ۵ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$r_1 x_3 \equiv 1 \pmod{r_2} \quad (6)$$

به همین ترتیب، اگر این عمل را ادامه دهیم، ضریب مجهول، برابر یک خواهد شد و با بازگشت به مرحله های پیش، به روش بازگشتی می توان x را حساب کرد (توجه: تمام

عملیات را توسط یک جدول چهار سطری انجام می‌دهیم).

مثال ۱. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید:

$$1999x \equiv 1357 \pmod{1378}$$

حل: با فرض $a=1999$ ، $n=1378$ ، $c=1357$ و با

توجه به $1=(1999, 1378)$ ، جواب معادله چنین است:

$$x = 1378k + 1357a^{-1} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین، برای حل معادله کافی است معکوس (وارون

ضربی) عدد ۱۹۹۹ را از معادله‌ی زیر حساب کنیم:

$$1999x_1 \equiv 1 \pmod{1378} \quad (x_1 = a^{-1})$$

باقی مانده‌ی تقسیم عدد ۱۹۹۹ بر ۱۳۷۸ برابر ۶۲۱ است.

بنابراین، با توجه به هم‌نهشتی:

$$1999 \equiv 621 \pmod{1378}$$

معادله‌ی مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$621x_1 \equiv 1 \pmod{1378} \quad (1)$$

معادله‌ی ۱ را با وارد کردن مجهول جدید x_2 ، می‌توان به

صورت زیر نوشت:

$$1378x_2 \equiv -1 \pmod{621}$$

باقی مانده‌ی تقسیم ۱۳۷۸ بر ۶۲۱ برابر ۱۳۶ است.

بنابراین، با توجه به هم‌نهشتی:

$$1378 \equiv 136 \pmod{621}$$

معادله‌ی ۲ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$136x_2 \equiv -1 \pmod{621} \quad (2)$$

به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$621x_3 \equiv 1 \pmod{136}$$

$$621 \equiv 77 \pmod{136} \quad (3)$$

$$136x_4 \equiv -1 \pmod{77}$$

$$136 \equiv 59 \pmod{77} \quad (4)$$

$$77x_5 \equiv 1 \pmod{59}$$

$$77 \equiv 18 \pmod{59} \quad (5)$$

$$59x_6 \equiv -1 \pmod{18}$$

$$59 \equiv 5 \pmod{18} \quad (6)$$

$$18x_7 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$3x_7 \equiv 1 \pmod{18} \quad (7)$$

$$5x_8 \equiv -1 \pmod{3}$$

$$2x_8 \equiv -1 \pmod{5} \quad (8)$$

$$3x_9 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x_9 \equiv 1 \pmod{3} \quad (9)$$

بنابراین: $x_9 = 1$

با برگشت به مرحله‌های پیش، مقدار x را به روش بازگشتی

محاسبه می‌کنیم:

$$x_8 = \frac{3x_9 - 1}{2} = \frac{3(1) - 1}{2} = 1 \quad \text{از معادله‌ی ۸}$$

$$x_7 = \frac{5x_8 + 1}{3} = \frac{5(1) + 1}{3} = 2 \quad \text{از معادله‌ی ۷}$$

$$x_6 = \frac{18x_7 - 1}{5} = \frac{18(2) - 1}{5} = 7 \quad \text{از معادله‌ی ۶}$$

$$x_5 = \frac{59x_6 + 1}{18} = \frac{59(7) + 1}{18} = 23 \quad \text{از معادله‌ی ۵}$$

$$x_4 = \frac{77x_5 - 1}{59} = \frac{77(23) - 1}{59} = 30 \quad \text{از معادله‌ی ۴}$$

$$x_3 = \frac{136x_4 + 1}{77} = \frac{136(30) + 1}{77} = 53 \quad \text{از معادله‌ی ۳}$$

$$x_2 = \frac{621x_3 - 1}{136} = \frac{621(53) - 1}{136} = 242 \quad \text{از معادله‌ی ۲}$$

$$x_1 = \frac{1378x_2 + 1}{621} = \frac{1378(242) + 1}{621} = 537 \quad \text{از معادله‌ی ۱}$$

پس، با توجه به $x_1 = a^{-1} = 537$ ، جواب‌های معادله

چنین است:

$$k \in \mathbb{Z}: x = 1378k + 1357(537) = 1378k + 728409$$

با توجه به هم‌نهشتی $1125 \equiv 728409 \pmod{1378}$ ، جواب اصلی

معادله $x = 1125$ و جواب عمومی معادله به ازای مقادیر

$$x = 1378k + 1125 \quad \text{صحیح } k \text{ چنین است:}$$

اکنون تمام عملیات فوق را توسط جدول H.M انجام

می‌دهیم.

جدول (H.M)، چهار سطر دارد که پس از چهار مرحله

کامل می‌شوند:

$$1999x \equiv 1357 \pmod{1378}$$

$\times n_i$	۱۳۷۸	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	
$\div a_i$	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	۵۳۷	۲۴۲	۵۳	۳۰	۲۳	۷	۲	۱		

در این مثال، چون $n = 1378 > a = 1999$ ، پس باید باقی مانده‌ی تقسیم $a : n$ را حساب کنیم و در دومین خانه‌ی سطر اول (از سمت چپ) کنار n پیمانه بنویسیم.

پیش از تشریح جدول، این نکته را یادآور می‌شویم که برای حل هر معادله‌ی هم‌نهشتی، ابتدا لازم است شرط $(a, n) = 1$ را بررسی کنیم. در معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \equiv c \pmod{n}$ ، اگر $(a, n) = d$ ، در این صورت معادله وقتی جواب دارد که c بر d بخش پذیر باشد $(d|c)$.

بنابراین، برای بررسی شرط $(a, n) = 1$ ، ابتدا همیشه تقسیم‌های متوالی را به صورت زیر انجام می‌دهیم و باقی مانده‌های حاصل را به ترتیب در سطر اول جدول می‌نویسیم. در صورتی که سطر اول جدول به عدد یک ختم شود، نشان‌دهنده‌ی این است که شرط $(a, n) = 1$ برقرار است. و در صورتی که به عدد صفر ختم شود و عدد پیش از صفر عددی بزرگ‌تر از یک باشد، آن عدد بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و n است.

مرحله‌ی ۱. تقسیم‌های متوالی را به صورت زیر انجام می‌دهیم و باقی مانده‌های حاصل را در سطر اول جدول درج می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 1999 \overline{) 1378} \\ \underline{1378} \\ 621 \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{r} 1378 \overline{) 621} \\ \underline{1242} \\ 136 \end{array} \quad \text{و}$$

$$\begin{array}{r} 621 \overline{) 136} \\ \underline{544} \\ 77 \end{array} \quad \text{و} \dots \quad \begin{array}{r} 3 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 1 \end{array}$$

مرحله‌ی ۲. عدد ثابت هم‌نهشتی‌ها را که به طور متناوب 1 و -1 است، در سطر دوم جدول (سطر c_i) از سمت چپ به راست می‌نویسیم.

مرحله‌ی ۳. از اولین باقی مانده (621) تا آخرین باقی مانده (1) را بار دیگر در سطر سوم (سطر a_i) نظیر سطر اول (n_i) می‌نویسیم.

مرحله‌ی ۴. آخرین خانه‌ی سطر چهارم در سمت راست جدول (سطر x_i) را همیشه برابر عدد ثابت $(+1)$ یا (-1) آن ستون، واقع در سطر دوم در نظر می‌گیریم. این توضیح لازم است که در سطر اول با شرط $(a, n) = 1$ ، عدد 1 ظاهر می‌شود و در نتیجه عمل تقسیم به پایان می‌رسد. برای تکمیل سطر چهارم (سطر x_i) از سمت راست به

شکل M متوالی (مطابق شکل و در جهت پیکان‌ها) به این ترتیب عمل می‌کنیم (عمل مربوط به هر سطر، ابتدای هر سطر نوشته شده است):

$$\frac{(1)3-1}{2} = 1, \quad \frac{1(5)+1}{3} = 2, \quad \frac{2(18)-1}{5} = 7, \\ \frac{7(59)+1}{18} = 23, \dots, *$$

آخرین عدد از سمت راست در سطر چهارم (537) را در عدد ثابت هم‌نهشتی ضرب می‌کنیم:

$$* \frac{242(1378)+1}{621} = 537, \quad 537(1357) = 728709 \equiv 1125 \pmod{1378}$$

به بیان دیگر، باقی مانده‌ی حاصل از تقسیم عدد $(537)(1357)$ یا 728709 بر 1378 ، جواب معادله‌ی هم‌نهشتی است:

$$x = 1125 \quad (\text{جواب اصلی معادله})$$

بدیهی است که جواب عمومی معادله به ازای مقادیر صحیح دل‌خواه k چنین است:

$$x = 1378k + 1125 \quad (\text{جواب عمومی معادله})$$

مثال ۲. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

$$26x \equiv 17 \pmod{19}$$

حل: چون $n = 19 > a = 26$ ، ابتدا باقی مانده‌ی حاصل از تقسیم $19 \div 26$ را در سمت راست سنج 19 می‌نویسیم. سپس تقسیم‌های متوالی را انجام می‌دهیم و باقی مانده‌های حاصل را در سطر اول جدول درج می‌کنیم:

$$19 \overline{) 26} = -1 \quad \text{یا} \quad 19 \times (-1) = -17$$

$\times n_i$	19	7	5	2	1
$+c_i$	1	-1	1	-1	
$\div a_i$	7	5	2	1	
x_i	-8	-3	-2	-1	

با توجه به هم‌نهشتی بالا، جواب اصلی معادله چنین است:

$$x = 16$$

مثال ۳. وارون عدد 1999 به پیمانه‌ی 1980 را بیابید.

حل: بیان ریاضی مسئله، معادله‌ی هم‌نهشتی زیر است:

$$1999x \equiv 1 \pmod{1980}$$

چون $n = 1980 > a = 1999$ ، باقی مانده‌ی تقسیم $1980 \div 1999$ را در سمت راست پیمانه (1980) می‌نویسیم. سپس تقسیم‌های متوالی را انجام می‌دهیم.

توجه: چون همیشه جواب مثبت معادله مورد نظر است، بنابراین کافی است عددسنج (۱۹۸۰) را به عدد (۵۲۱) بیفزاییم تا جواب اصلی معادله به دست آید:

$\times n_i$	۱۹۸۰	۱۹	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۱۹	۴	۳	۱	
x_i	-۵۲۱	-۵	-۱	-۱	

(جواب) $x = 1980 - 521 = 1459$

پس معکوس ضربی عدد ۱۹۹۹ به پیمانته‌ی ۱۹۸۰، عدد ۱۴۵۹ است.

مثال ۴. آیا معادله‌ی هم‌نهشتی زیر دارای جواب است؟ در صورت وجود آن را بیابید.

$$1313x \equiv -26 \pmod{1027}$$

حل: ابتدا حاصل (۱۳۱۳، ۱۰۲۷) را به دست می‌آوریم:

$\times n_i$	۱۰۲۷	۲۸۶	۱۶۹	۱۱۷	۵۲	۱۳	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	

با تقسیم‌های متوالی و ثبت باقی‌مانده‌های حاصل، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۱۳۱۳ و ۱۰۲۷ به دست می‌آید. چون سطر اول جدول به صفر ختم شده است، عدد پیش از آن (۱۳)، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد مورد نظر است:

$$(1313, 1027) = 13$$

بنابراین، شرط وجود جواب برای معادله این است که عدد ثابت معادله (-۲۶) بر ۱۳ بخش پذیر باشد. چون $(-2) \times 13 = -26$ ، پس معادله دارای جواب است و برای تعیین آن، معادله را به عدد ۱۳ ساده می‌کنیم:

$$101x \equiv -2 \pmod{79}$$

اکنون چون $(101, 79) = 1$ ، معادله را به کمک جدول H.M

$$(101 \equiv 22) \pmod{79}$$

حل می‌کنیم:

$\times n_i$	۷۹	۲۲	۱۳	۹	۴	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	
$\div a_i$	۲۲	۱۳	۹	۴	۱	
x_i	۱۸	۵	۳	۲	۱	

با توجه به جدول، یک جواب اصلی معادله (از بی‌شمار جواب) چنین است:

$$x = 79 + 18(-2) = 79 - 36 = 43; \quad \boxed{x = 43}$$

مثال ۵. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید:

$$441x \equiv 21 \pmod{273}$$

حل: با تقسیم‌های متوالی و درج باقی‌مانده‌های حاصل،

ابتدا (۴۴۱، ۲۷۳) را تعیین می‌کنیم:

$\times n_i$	۲۷۳	۱۶۸	۱۰۵	۶۳	۴۲	۲۱	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	

معادله را به ۲۱ ساده می‌کنیم:

$$21x \equiv 1 \pmod{13}$$

در این جا، معادله را به کمک جدول H.M حل می‌کنیم.

$\times n_i$	۱۳	۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	
$\div a_i$	۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	۵	۳	۲	۱	۱	

با توجه به جدول، یک (۲۱ ≡ ۸) جواب اصلی معادله

$$\boxed{x = 5}$$

(از بی‌شمار جواب) چنین است:

مثال ۶. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را از نظر داشتن یا عدم

جواب بررسی کنید.

$$2680x \equiv 176 \pmod{3953}$$

حل: ابتدا با تقسیم‌های متوالی و درج باقی‌مانده‌ها،

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۲۶۸۰ و ۳۹۵۳ را به

دست می‌آوریم.

$\times n_i$	۳۹۵۳	۲۶۸۰	۱۲۷۳	۱۳۴	۶۷	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	

با توجه به جدول داریم: $(2680, 3953) = 67$

چون عدد ثابت معادله (۱۷۶) بر ۶۷ بخش پذیر نیست،

معادله جواب ندارد.

مثال ۷. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

$$1378x \equiv 7 \pmod{77}$$

حل: با تشکیل جدول H.M معادله را حل می‌کنیم:

$$(1378 \equiv 69) \pmod{77}$$

$\times n_i$	۷۷	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	-۲۹	-۲۶	-۳	-۲	-۱	-۱	

یکی از جواب‌های معادله از بی‌شمار جواب چنین است:

$$x_1 = (-29)(7) = -203$$

چون جواب مثبت معادله در نظر است، بنابراین، ضریب

مثبتی از سنج را به این جواب می‌افزاییم:

$$x = 3(77) - 203 = 231 - 203 = 28 ; \boxed{x = 28} \text{ (جواب اصلی)}$$

مثال ۸. معکوس (وارون ضربی) عدد ۳۴ به پیمانه‌ی ۴۱ را

بیابید.

حل: این مسئله با هم‌نهشتی زیر معادل است:

$$34x \equiv 1 \pmod{41}$$

با تشکیل جدول H.M معادله را حل می‌کنیم: با توجه به

جدول، جواب $x_1 = -6$ به دست می‌آید که برای یافتن جواب

مثبت، کافی است عددسنج را به آن بیفزاییم:

$\times n_i$	۴۱	۳۴	۷	۶	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$+a_i$	۳۴	۷	۶	۱	
x_i	-۶	-۵	-۱	-۱	

$$x = 41 - 6 = 35 ; \boxed{x = 35}$$

بنابراین، معکوس عدد ۳۴ به پیمانه‌ی ۴۱، عدد ۳۵ است.

تمرین. معادله‌های هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

۱) $79x \equiv 1 \pmod{9}$

۲) $1378x \equiv -9 \pmod{1357}$

۳) $1999x \equiv 2000 \pmod{2999}$

حل معادله‌های سیاله خطی چند مجهولی به کمک جدول H.M

$$ax + by + cz + \dots = d$$

معادله‌ی سیاله‌ی دو مجهولی به صورت عمومی زیر را در

نظر می‌گیریم:

$$(a, b) = 1 ; ax + by = c \quad (1)$$

معادله‌ی ۱ را به صورت معادله‌ی هم‌نهشتی زیر

می‌نویسیم:

$$(x, y \in Z) ; ax \equiv c \pmod{b} \quad (2)$$

اینک معادله‌ی ۲ را از طریق جدول H.M حل و از آن‌جا

مقدار x را تعیین می‌کنیم. سپس از رابطه‌ی $y = \frac{c - ax}{b}$

مقدار y را نیز به دست می‌آوریم.

مثال ۱. معادله‌ی سیال زیر را حل کنید.

$$25x - 17y = 3 \quad (1)$$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادله‌ی هم‌نهشتی زیر

می‌نویسیم:

$$25x \equiv 3 \pmod{17} \quad (2)$$

حال در این‌جا، معادله‌ی هم‌نهشتی ۲ را توسط جدول H.M

حل می‌کنیم:

$\times n_i$	۱۷	۸	۱
$+c_i$	۱	-۱	
$+a_i$	۸	۱	
x_i	-۲	-۱	

$$x_1 = 3(-2) = -6$$

$$x = 17 - 6 = 11$$

$$x = 11 ; y = 16$$

توجه: با در دست داشتن یک جواب اختصاصی معادله‌ی

۱، می‌توانیم جواب عمومی معادله را بنویسیم. زیرا اگر

$\alpha, \beta \in Z$ یک جواب اختصاصی معادله باشد، در این صورت:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a\alpha + b\beta = c \end{cases}$$

با فرض $(a, b) = 1$ ، از تفاضل دو معادله‌ی دستگاه خواهیم

داشت:

$$y = \beta - \frac{a}{b}(x - \alpha)$$

برای این‌که $y \in Z$ ، لازم است داشته باشیم:

$$\frac{x - \alpha}{b} = t \in Z ; x = \alpha + bt$$

بنابراین، با فرض $t \in Z$ ، جواب‌های معادله‌ی ۱ از

معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$x = \alpha + bt , y = \beta - at \quad (3)$$

بنابر معادله‌های ۳، جواب عمومی معادله‌ی

$25x - 17y = 3$ ، چنین است:

$$x = 11 + (-17)t , y = 16 - 25t \quad (t \in Z)$$

مثال ۲. معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید:

$$1340x - 3953y = 469$$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادله‌ی هم‌نهشتی زیر

می‌نویسیم:

$$1340x \equiv 469 \pmod{3953} \quad (1)$$

حال باید حاصل (۳۹۵۳ و ۱۳۴۰) را به دست آوریم:

$\times n_i$	۳۹۵۳	۱۳۴۰	۱۲۷۳	۶۷	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	

چون سطر اول به صفر ختم شده است، نتیجه می شود که عددهای ۱۳۴۰ و ۳۹۵۳ دارای عامل مشترک ۶۷ هستند:

$$(۱۳۴۰, ۳۹۵۳) = ۶۷$$

از طرف دیگر، چون $۶۷ = ۶۷ \div ۴۶۹$ ، بنابراین معادله ی ۱ را می توان به ۶۷ ساده کرد:

$$۲۰x \equiv ۷ \pmod{۵۹} \quad (۲)$$

در این جا، برای حل معادله ی ۲، جدول H.M را تشکیل می دهیم:

$\times n_i$	۵۹	۲۰	۱۹	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	
$\div a_i$	۲۰	۱۹	۱	
x_i	۳	۱	۱	

با توجه به جدول می توان نوشت:

$$x = ۳ \times ۷ = ۲۱$$

با داشتن مقدار x ، می توان مقدار y را محاسبه کرد:

$$y = \frac{۲۰x - ۷}{۵۹} = \frac{۲۰(۲۱) - ۷}{۵۹} = \frac{۴۱۳}{۵۹} = ۷$$

بنابراین، جواب عمومی معادله چنین است:

$$x = ۲۱ - ۵۹t, \quad y = ۷ - ۲۰t$$

مثال: جواب های صحیح و مثبت معادله ی سیاله ی زیر را به دست آورید:

$$۷x + ۱۱y + ۲۶z = ۱۳۰ \quad (۱)$$

حل: بزرگ ترین ضریب مجهول ها، ضریب z است.

بنابراین باید داشته باشیم:

$$۷ + ۱۱ + ۲۶z \leq ۱۳۰; \quad z \leq ۴$$

پس می توان نوشت:

$$z_1 = ۱: \quad ۷x_1 + ۱۱y_1 = ۱۰۴; \quad ۷x_1 \equiv ۱۰۴ \pmod{۱۱} \quad (۲)$$

با تشکیل جدول H.M، خواهیم داشت:

$$x_1 = (-۳)(۱۰۴) = -۳۱۲$$

$\times n_i$	۱۱	۷	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۷	۴	۳	۱	
x_i	-۳	-۲	-۱	-۱	

با توجه به هم نهشتی زیر:

$$-۳۱۲ \equiv ۷ \pmod{۱۱}$$

مقادیر x_1 و y_1 چنین است:

$$x_1 = ۷ \quad \text{و} \quad y_1 = ۵$$

به همین ترتیب:

$$z_2 = ۲: \quad ۷x_2 + ۱۱y_2 = ۷۸; \quad ۷x_2 \equiv ۷۸ \pmod{۱۱} \quad (۳)$$

در این معادله ی هم نهشتی، ضریب مجهول x_2 برابر ۷ و

پیمانه ی هم نهشتی برابر ۱۱ مطابق با هم نهشتی ۲ است.

بنابراین، جواب معادله ی ۳ با توجه به جدول H.M اخیر چنین است:

$$x_2 = (-۳)(۷۸) = -۲۳۴ \equiv ۸ \pmod{۱۱}, \quad y_2 = ۲$$

معادله ی ۱ به ازای $z_3 = ۳$ و $z_4 = ۴$ ، جواب صحیح

ندارد. پس معادله دارای دو دسته جواب اختصاصی (۷, ۵, ۱)

و (۸, ۲, ۲) است که می توان با استفاده از این جواب های

اختصاصی، جواب های عمومی معادله را نیز به دست آورد.

تمرین

۱. با فرض $d = (۳۹۹, ۵۸۹)$ ، عددهای صحیح r و s را چنان بیابید که معادله ی زیر برقرار باشد:

$$۳۹۹r + ۵۸۹s = d$$

الف) $۷x + ۵y = ۱۹$

ب) $۱۰x + ۸۶y = ۵۰۰$

ج) $۴x + ۳y - ۵z = ۲$

۲. معادله های سیاله ی زیر را حل کنید.



پی نوشت:

۱. Congruence (سازگاری، موافقت و تطبیق یک شیء با شیء دیگر)

۲. این نام گذاری به دو منظور است: یکی مخفف (Hashemi Moosavi)، نام مبتکر آن و دیگر روش عمل جدول به صورت H.M.