بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۵ متوسطه
مجله‌ی ریاضی
دوره ی آموزش متوسطه
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی واطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره ی نوزدهم /شماره ی۳ / بهار ۱۳۸۹

◆ پایگاه اینترنتی www.roshd mag.ir
◆ رایانامه : Borhanm@roshdmag.ir
◆پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ -۰۲۱
نشانی دفتر مجلّه : تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
◆تلفن دفتر مجله : ۸۸۳۰۵۸۶۲ -۰۲۱
◆تلفن امور مشترکین : ۷۷۳۳۶۶۵۶_۷۷۳۳۶۶۵۵-۰۲۱

◆شمارگان : ۱۰۰۰۰ نسخه
■ چاپ : شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

حرف اول

امام علی (ع) به نقل از پیامبر اکرم (ص) می‌فرماید: «کسی که علم را برای خدا طلب کند، به هیچ بخشی از آن نرسد مگر تواضع‌اش بیشتر، و فروتنی‌اش در میان مردم زیادتر و خداترسی‌اش افزون‌تر و جهد و کوشش او در دین بیشتر شود، و این است آن کسی که از علم و دانایی برخوردار است. پس [تا می‌توانید بیشتر] بیاموزد» [کنزالعمال، ج ۱۰، حدیث ۲۹۳۸۴].

به راستی شما طلب علم و دانش‌آموزی را به چه منظوری و برای چه هدفی دنبال می‌کنید؟ آیا علم را برای علم یا برای عالم شدن یا برای کسب موقعیت‌های اجتماعی، یا به دلیلِ علاقه‌ی خود به یادگیری، یا برای خدمت به جامعه و افتخار و اعتبار کشور یا... می‌آموزید؟

همان‌طور که در حدیث گهرباری که در آغاز از پیامبر اکرم(ص) و به نقل از ولّی و وصّی برحقشان امیرالمؤمنین امام علی (ع) بیان شد، علم‌آموزی و طلب علم اگر برای خدا باشد، بهترین و زیباترین فایده‌ها را به دنبال خواهد داشت. البته وقتی تعلم برای رضای خدا باشد، روشن است که در سایه‌ی آن به راحتی به هر هدف مورد عنایت و تأیید حضرت حق، هم‌چون استقلال و رهایی از وابستگی‌های علمی و تکنولوژیک و صنعتی و کسب سربلندی و افتخار برای جامعه اسلامی و خدمت به مردم و... نیز می‌توان دست یافت.

از طرف دیگر، با الهام از راهنمایی‌های معصومین (علیهم السلام) درمی‌یابیم که طلب علم امری واجب است. امام علی (ع) می‌فرمایند: «بر شما باد طلب علم، زیرا طلب علم واجب است،...» [بحارالانوار، ج ۱: ۱۸۳]. اما آیا هر علمی مفید است و طلب آن را می‌توان واجب شمرد؟ کدام علم ره‌گشا و نجات‌بخش است؟ پاسخ این پرسش‌ها را نیز در کلام امام علی (ع) جست‌وجو می‌کنیم. ایشان می‌فرمایند: «بهترین علم آن علمی است که به وسیله‌ی آن راه رشد و هدایت را اصلاح کنی، و بدترین علم، علمی است که توسط آن آخرت خود را تباه کنی» [غررالحکم، فصل ۲۹، حدیث ۷۵].

سؤال دیگر آن است که فایده‌ی این علم ـ همان که مولا علی(ع) آن را بهترین علم نامیدند ـ چیست؟ ایشان می‌فرمایند: «نتیجه و فایده‌ی علم، نیکوکاری است» [غررالحکم، حرف غ].

یعنی ثمره‌ی درخت علم، عمل نیک و صالح است و این درخت به ثمر نمی‌رسد، جز با زحمت و شکیبایی در راه کسب علم و رسیدن به اهداف والای آن‌که در این راستا نیز امام متقیان علی (ع) می‌فرمایند: «ای جوینده‌ی علم، عالم و دانشمند حقیقی دارای سه نشانه است: دانایی، بردباری و سکوتِ بجا و به مورد» [الحیاة، ج ۲: ۳۱۰].

اِن‌شاءالله، با تمسک به روایات و راهنمایی‌هایی معصومین (علیهم السلام)، بتوانیم در زمره‌ی جویندگان و عاملین واقعی علم و دانش باشیم و از فواید و آثار آن بهره‌مند شویم.

سردبیر

پرویز شهریاری

معرفی ریاضی دانان ایرانی

محمد فرزند عیسی ماهانی

ابوعبدالله محمد، فرزند **عیسی ماهانی**، از مردم ماهان کرمان است. او به تقریب در سال ۲۱۰ هجری در ماهان کرمان زاده شد و در سال ۲۶۷ هجری از دنیا رفت. او در بغداد می‌زیست و دانشمندی بود در زمینه‌ی عدد اخترشناسی زبردست و مهندس. **ابوالحسن** فرزند **سعید**، مشهور به «ابن یونس» در «زیج کبیر حاکمی» رصدهایی را نام برده که ماهانی از ۲۳۹ تا ۲۵۲ هجری آن را انجام داده است.

به ظاهر، **حکیم عمرخیام** به کتاب یا کتاب‌های ماهانی دست‌رسی داشته است. زیرا به معادله‌ی $x^3 + a = cx^2$ اشاره می‌کند که بین ریاضی‌دانان به معادله‌ی ماهانی مشهور است.

ماهانی کتابی دارد که در آن، مقاله‌ی دوم کتاب ارشمیدس را تفسیر کرده است. این مقاله درباره‌ی «کره و استوانه» است که ماهانی هشت مسئله از نه مسئله‌ی آن را حل کرده و مسئله‌ای که حل نکرده است، می‌گوید: «کره را به وسیله‌ی صفحه‌ای چنان تقسیم کنید که دو حجم آن به نسبت عدد معلومی باشد.»

او کتابی در شرح مقاله‌ی اقلیدس نوشته که به **اعتقاد سوتر**، همان «رسالة فی الشکل النسبه» است که در کتاب‌خانه‌ی استانبول موجود است. کتابی دیگر درباره‌ی اقلیدس دارد که بخشی از آن در کتاب‌خانه‌ی ملی پاریس موجود است. اصلاح کتاب سنة لائوس که به ظاهر خیام آن را در اختیار داشته است.

فضل فرزند حاتم نیریزی

ابوالعباس فضل، فرزند **حاتم نیریزی**، اهل نیریز فارس بود و به لاتینی

او را «آناریوس» می‌نامند. او در نیمه‌ی دوم سده‌ی سوم و نیمه‌ی اول سده‌ی چهارم هجری کار می‌کرد و با **معتضد**، خلیفه‌ی عباسی، هم‌زمان بود. **بیرونی** در قانون مسعودی، یکی از زیج‌های نیریزی را به نام معتضد نامیده است. حسن فرزند علی، معروف به کمال‌الدین فارسی که خود ریاضی‌دان بوده است، می‌گوید: در زمان معتضد، قوس و قزحی عجیب دیده شد. این موضوع، خلیفه و اطرافیان او را نگران کرده بود. پس به فضل پسر حاتم نیریزی که خود شرحی بر مجسطی نوشته بود، مراجعه کردند و او علت این مسئله را توضیح داد.

سارتون می‌نویسد، نیریزی ظل معکوس را که هم‌ارز تانژانت است، به کار برده است.

فضل حاتم نیریزی توضیحی بر اصول اقلیدس نوشته است و در آن از نوشته‌های **هرون اسکندرانی** بهره گرفته است. ده مقاله‌ی اول این شرح را جرار دکرمونی در سده‌ی دوازدهم میلادی به لاتینی ترجمه کرده که در سال ۱۸۹۹ چاپ شده است.

هم‌چنین نیریزی کتابی دارد درباره رساله‌ی اقلیدس که نسخه‌ی خطی آن در کتاب‌خانه‌ی مدرسه‌ی عالی شهید مطهری (سپهسالار) موجود است. با وجودی که بسیاری کسان از جمله ابن‌ندیم، قفطی و بیرونی از این کتاب یاد کرده‌اند، امروز در دست‌رس ما نیست. هم‌چنین نیریزی زیج‌هایی داشته است که ابوریحان بیرونی مسئله‌هایی از آن‌ها آورده است، ولی خود زیج‌ها را در اختیار نداریم. نیریزی کتابی هم درباره‌ی استرلاب کروی داشته است که یک نسخه‌ی خطی آن در اسکوریال موجود است. مسئله‌ای در تعیین سمت قبله دارد که یک نسخه‌ی خطی آن در کتاب‌خانه‌ی ملی پاریس موجود است. یک کتاب هم درباره‌ی «ظاهرات فلک» نوشته که **نصیر توسی** آن را تحریر کرده است.

جعفر محمد
فرزند حسین خراسانی خازن

محمد فرزند **حسین خراسانی خازن**، استاد در ریاضیات و اخترشناسی، در نیمه‌ی اول سده‌ی چهارم هجری در خراسان متولد شد. در آخر عمر در ری می‌زیست و در سال ۳۵۵ هجری از دنیا رفت. او در حساب، هندسه، جبر و رصد ستارگان کار می‌کرد. حکیم عمرخیام (در کتاب جبر و مقابله‌ی خود) نوشته است، که ابوجعفر خازن معادله‌ی درجه سوم $x^3 + a = cx$ را که ماهانی در حل آن درمانده بود، به کمک مقطع‌های مخروطی حل کرد.

ابوجعفر خازن،

ماهانی کتابی دارد که در آن، مقاله‌ی دوم کتاب ارشمیدس را تفسیر کرده است. این مقاله درباره‌ی «کره و استوانه» است که ماهانی هشت مسئله از نه مسئله‌ی آن را حل کرده

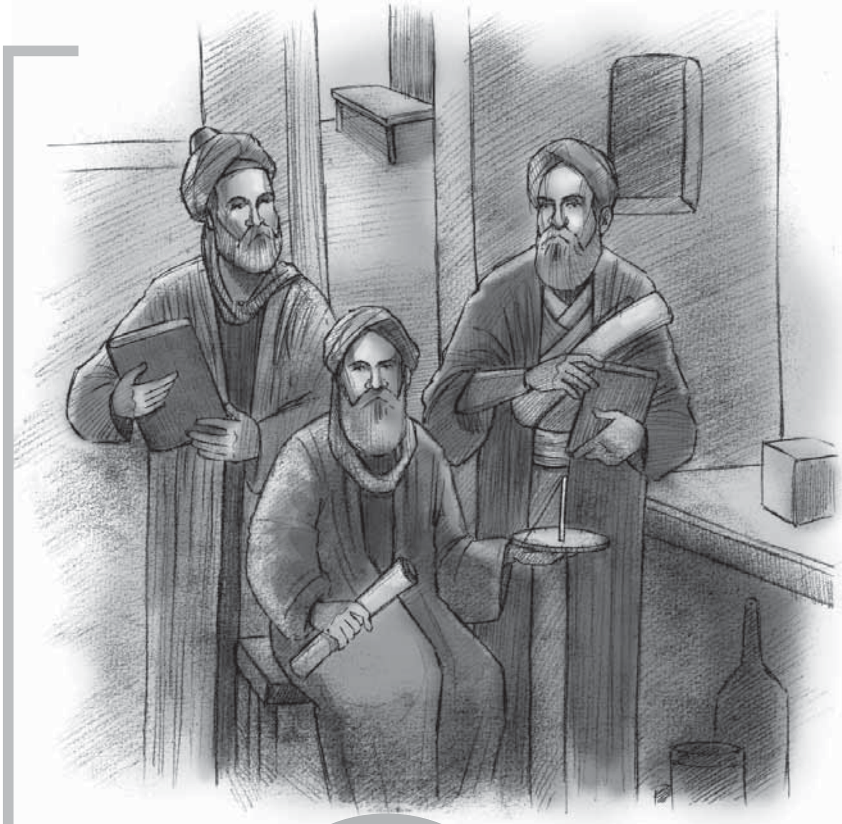
تفسیری بر مقاله‌ی اقلیدس دارد که یک نسخه‌ی خطی آن در کتاب‌خانه‌ی دانشکده‌ی ادبیات دانشگاه تهران موجود است. کتابی هم درباره‌ی زیج داشته است که قفطی درباره‌ی آن می گوید: «و آن جدیدترین و جالب‌ترین کتابی است که در آن فن نوشته شده است». اصل زیج از بین رفته، ولی دو فصل مختصر از آن باقی‌مانده است.

ابوریحان بیرونی در کتاب «قانون مسعودی» از شرحی که ابوجعفر خازن بر کتاب مجسطی نوشته، گفت‌وگو کرده است. ولی خود کتاب در دست‌رس نیست. هم‌چنین ابوریحان بیرونی در «قانون مسعودی» خود از کتابی «درباره‌ی بعدهای جرم‌ها» صحبت کرده، ولی خود کتاب از بین رفته است.

امروزه بسیاری کتاب‌هایی که و بیرونی، نصیر توسی، ابن ندیم و قفطی گفته‌اند مربوط به ابوجعفر خازن بوده است، در دست‌رس نیستند.

عبدالرحمن فرزند عمر مشهور به صوفی

ابوالحسن عبدالرحمان فرزند **عمر** مشهور به صوفی رازی، اخترشناس و از فسای فارس بود. در سال ۲۹۱ هجری در شهر ری متولد شد و در سال ۳۷۶ هجری مرد. بنابه نوشته‌ی خودش، در سال ۳۳۷ هجری در اصفهان، نزد **محمد** فرزند **حسین** مشهور به **ابن عبید**، وزیر آل‌بویه، به سر می‌برد. او در «صورالکواکب» خود نوشته است: «من در صحبت استاد ابوالفضل در اصفهان بودم. مردی نزدیک من آمد از اهل آن خطه...».



حکیم عمر خیام نوشته است که ابوجعفر خازن، معادله‌ی درجه سوم را که ماهانی در حل آن درمانده بود، به کمک مقطع‌های مخروطی حل کرد

او در سال ۳۴۹ هجری در دربار عضدالدوله‌ی دیلمی در اصفهان بود. در سال ۳۵۰ هجری در شیراز رصدی انجام داد. او در صورالکواکب می‌نویسد: «تا آن که خدای تعالی مرا به خدمت ملک جلیل عضدالدوله ابوشجاع ... مشرف گردانید، دیدم که ذکر احوال کواکب بسیار می‌کرد...».

ابوریحان بیرونی بارها از عبدالرحمان صوفی یاد کرده است و در «قانون مسعودی» نوشته است: قدرهای ستارگان ... از «صورالکواکب» ابوالحسین صوفی نقل و ثبت کردم...»

نسخه‌های خطی و چاپی بسیاری از «صورالکواکب» موجودند. مهم‌ترین ترجمه از نصیر توسی است که درسال ۶۴۷ هجری، به زبان فارسی برگرداند و عکس آن که در سال ۱۳۴۸ خورشیدی آماده شده، در تهران، به‌وسیله‌ی بنیاد فرهنگ ایران چاپ شده است. عبدالرحمن صوفی کتابی دارد در ۴۰۲ فصل درباره‌ی استرلاب که در استانبول موجود است. کتابی هم درباره‌ی استرلاب در چهل و شش فصل از صوفی شناخته شده است که نسخه‌ای از آن در دانشگاه تهران موجود است. درباره‌ی مقدمه‌ای بر اخترشناسی نیز کتابی نوشته که در ۵ مقاله و ۶۴ فصل تنظیم شده است و نسخه‌ی خطی آن در استانبول نگه‌داری می‌شود.

دکتر احمد شرف‌الدین

نگرش انتقادی درباره‌ی دو واژه‌ی ریاضی

چکیده

در سطرهای آینده، دو واژه‌ی ریاضی را با نگرش انتقادی مطرح و به‌جای آن دو واژه، برابرهایی را پیشنهاد می‌کنم که آن‌ها را مناسب‌تر می‌دانم. در برابر واژه‌ی «ذوزنقه» واژه‌ی «چانه‌دار» و در برابر دو عبارت «تصویر گنج‌نگاشتی» و «گنج‌کاری»، اصطلاح «تصویر جسم‌نما» را که پیش‌تر به‌کار می‌رفت، پیشنهاد می‌کنم. در هر دو مورد توضیح داده‌ام. در شماره‌ی ۵۹ پاییز ۱۳۸۷ مجله‌ی برهان، دو عبارت «انتگرال معین» و «انتگرال نامعین» را با توضیح کافی مورد انتقاد قرار داده بودم و به‌جای آن‌ها «انتگرال مرزدار» و «انتگرال بی‌مرز» را پیشنهاد کردم.

تصویر جسم‌نما

چند سالی است در برخی کتاب‌های هندسه که به زبان فارسی نوشته شده است، در برابر عبارت انگلیسی «Stereographic Projection» یا عبارت فرانسوی «Projection Stereographique» ترکیب فارسی «تصویر گنج‌نگاری» و «تصویر گنج‌نگاشتی» را به‌کار می‌برند. پیش‌تر، درفارسی، در برابر اصطلاح خارجی یاد شده، عبارت «تصویر جسم‌نما» رابه‌کار می‌بردند.

از نظر نویسنده‌ی این مقاله، دو اصطلاح تازه‌ای که یاد شد، مناسب نیستند. اصطلاح مناسب همان «تصویر جسم‌نما» است در این باره توضیح می‌دهم:

در کلمه‌ی Stereographic، بخشِ Stereo از کلمه‌ی یونانی Stereos به معنی «جسم» است. کلمه‌یgraphein نیز یونانی به معنی «توصیف، نگاشتن» است. واژه‌ی Stereography به معنی نگاشتن اجسام روی صفحه است.

کلمه‌ی «گنج» که در دو عبارت «گنج‌نگاشتی» و «گنج‌کاری» آمده، به معنی حجم است. حجم یک جسم، یک عدد است. حجم را نمی‌توان نگاشت، بلکه آن جسم است که می‌توان نگاشت. با توجه به این توضیح و با توجه به شرح مربوط به یک تبدیل هندسی که یک شکل واقع بر یک کره را روی یک صفحه می‌نگارد، می‌توان دریافت که در عبارت‌های «تصویر گنج‌نگاشتی» و «تصویر گنج‌کاری»، برابرهای مناسبی برای «Stereographic Projection» نیستند و عبارت «تصویر جسم‌نما» مناسب است.

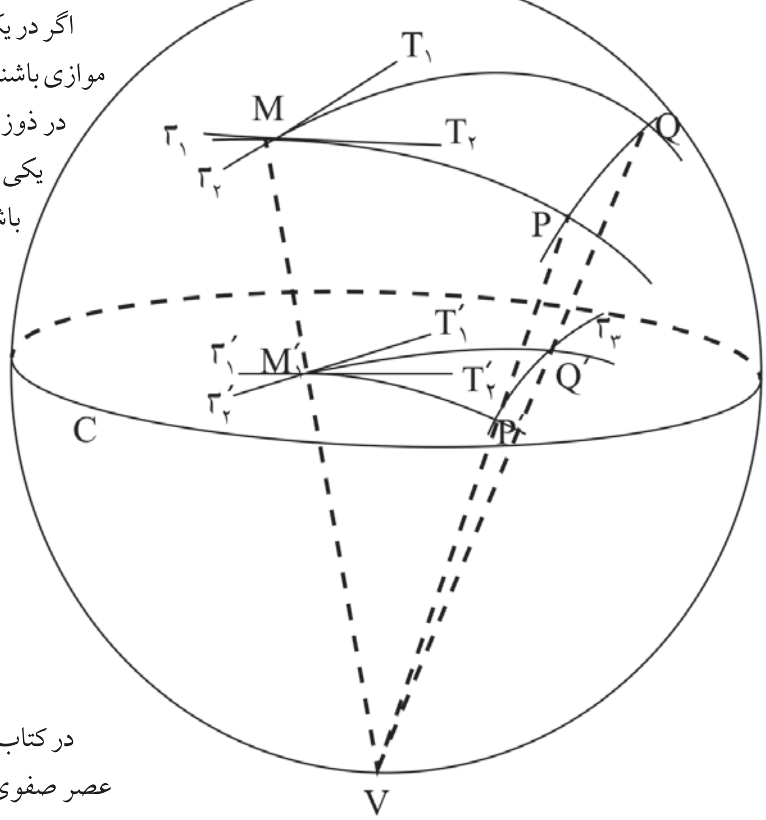
کلمه‌ی «جسم»، در زبان فارسی کاملاً متداول و مأنوس است، لذا روا نیست که کلمه‌ی جسم را چون فارسی نیست، به‌کار نبریم و به‌جای آن از کلمه‌ی گنج که معادل کلمه‌ی جسم نیست استفاده کنیم.

تصویر جسم‌نما چیست؟

تصویر جسم‌نما از تبدیل‌های مهم هندسه است. این تصویر، در تهیه‌ی نقشه‌ی جغرافیایی اهمیت شایانی دارد. تصویر جسم‌نما به‌وسیله‌ی **هیپارک**، ستاره‌شناس یونان باستان (سده‌ی دوم پیش از میلاد)، برای ترسیم نقشه‌ی جغرافیا ابداع شد. سپس در طی تاریخ، بعضی ریاضی‌دان‌ها در زمینه‌ی آن کار کردند.

تعریف تصویر جسم‌نما

کره‌ی Σ و یک دایره‌ی عظیمه‌ی آن C و نقطه‌ی V یکی از دو قطب این دایره‌ی عظیمه را در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف، تصویر جسم‌نمای نقطه‌ی M از سطح Σ عبارت است از نقطه‌ی M' محل بر خط VM با صفحه‌ی دایره‌ی عظیمه‌ی C (شکل صفحه‌ی بعد). تصویر جسم‌نمای یک منحنی Γ واقع بر سطح کره Σ عبارت است از منحنی Γ' واقع بر صفحه‌ی دایره‌ی عظیمه‌ی C، به‌طوری که هر نقطه Γ' تصویر نقطه‌ای از Γ است.



خاصیت مهم تصویر جسم‌نما

دو منحنی دل‌خواه Γ_1 و Γ_2 را که بر سطح کره‌ی Σ قرار دارند و از نقطه‌ی M می‌گذرند، در نظر می‌گیریم. تصویرهای جسم‌نمای این دو منحنی را به ترتیب Γ'_1 و Γ'_2 می‌نامیم. خطوط مماس بر دو منحنی Γ_1 و Γ_2 در نقطه‌ی M را به ترتیب $M\Gamma_1$ و $M\Gamma_2$ هم‌چنین خطوط مماس بر دو منحنی Γ'_1 و Γ'_2 در نقطه‌ی M' را به ترتیب $M'\Gamma'_1$ و $M'\Gamma'_2$ می‌نامیم. ثابت شده است که:

اندازه‌ی زاویه‌ی T_1MT_2 = اندازه‌ی زاویه‌ی $T'_1M'T'_2$

مطلب چنین بیان می‌شود: **در تصویر جسم‌نما، زاویه‌ها محفوظ می‌مانند.**

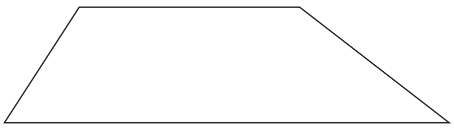
این خاصیت بسیار مهم و در تهیه‌ی نوعی از نقشه‌های جغرافیایی مورد توجه است.

چانه‌دار (= ذوزنقه)

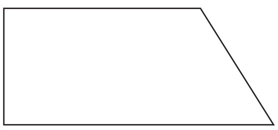
نام یکی از شکل‌های هندسی «ذوزنقه» است. برای این شکل نام «چانه‌دار» را پیشنهاد می‌کنم. درباره‌ی این نام‌گذاری توضیح می‌دهم:

تعریف ذوزنقه

اگر در یک چهارضلعی گوژ (محدّب) تنها دو ضلع روبه‌رو موازی باشند، آن چهارضلعی را «ذوزنقه» می‌نامند (شکل ۱). در ذوزنقه، دو ضلع غیرموازی را دو ساق می‌نامند. اگر یکی از ساق‌های ذوزنقه بر دو ضلع موازی آن عمود باشد، آن را ذوزنقه‌ی قائم می‌نامند (شکل ۲).



۱



۲

در کتاب «عیون‌الحساب» اثر **محمدباقر یزدی**، ریاضی‌دان عصر صفوی، شکل ۱ ذوزنقتین و شکل ۲ ذوزنقه‌ی مفرده نوشته شده است.

چون کلمه‌های ذوزنقه و ذوزنقیتن هر دو ثقیل‌اند، در جست‌وجوی نام ساده‌ای برای شکل موردبحث برآمدم، حدس می‌زدم که چون در کاشی‌کاری و قالی‌بافی، شکل یاد شده به‌کار می‌آید و از طرفی اهل این حرفه‌ها، در کار خود نام‌های فارسی ساده‌ای را به‌کار می‌برند، به احتمال زیاد و باید، برای ذوزنقه نام ساده‌ای داشته باشند. از این‌رو، درکتاب‌های کاشی‌کاری و قالی‌بافی به مطالعه پرداختیم. در کتاب‌های کاشی‌کاری به نام «دوسرپخ» برخورد کردم که برابر «ذوزنقه» است. این نام را مناسب یافتم و با اندکی تلاش، در ذهن خود نقش‌های زیر را ساخته‌ام:

واژه‌ی «چانه‌دار» به‌جای «ذوزنقتین»؛ واژه‌ی «دوچانه» به جای «دوسرپخ» یعنی «ذوزنقه»؛ واژه‌ی «تک‌چانه‌ی قائم» به‌جای «ذوزنقه‌ی قائم».

تبصره. شکل ۲ را «تک‌چانه» ننامیده‌ام، زیرا شکل ۳ هم دارای یک چانه است. از این‌رو شکل ۲ را تک‌چانه‌ی قائم نامیده‌ام.

۳

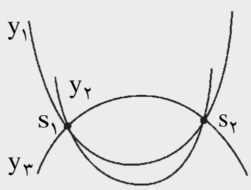
منحنی پوش

احمد قندهاری

نقطه‌ی ثابت

بعضی از منحنی‌های به معادله‌ی پارامتری، به ازای مقادیر متفاوت پارامتر، از نقطه یا نقاط مشخصی می‌گذرند. چون مختصات این نقاط به پارامتر بستگی ندارد، آن‌ها را نقاط ثابت گویند.

S_1 و S_2 نقاط ثابت‌اند.



طرز تعیین مختصات نقاط ثابت

روش اول: دو مقدار متفاوت به پارامتر نسبت می‌دهیم. معادله‌های دو منحنی حاصل را با هم تقاطع می‌دهیم. از حل آن‌ها، مختصات نقاط ثابت به دست می‌آید.

روش دوم: معادله‌ی منحنی را نسبت به پارامتر مرتب می‌نویسیم و آن را متحد با صفر قرار می‌دهیم. از حل روابط حاصل، مختصات نقاط ثابت به دست می‌آید.

مثال ۱. به دو طریق، مختصات نقاط ثابت دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = mx^۲ - (m+۲)x + ۱$ را بیابید.

حل:

روش اول:

$$m = ۰ \Rightarrow y = -۲x + ۱$$

$$m = ۱ \Rightarrow y = x^۲ - ۳x + ۱$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۳x + ۱ = -۲x + ۱ \Rightarrow x^۲ - x = ۰ \Rightarrow x(x-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰,\ \ x = ۱;\ \ \ x = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow S_۱(۰,۱)$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = -۲ + ۱ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow S_۲(۱,-۱)$$

نقاط S_1 و S_2 نقاط ثابت دسته‌ی منحنی فوق هستند.

روش دوم:

$$y = mx^۲ - (m+۲)x + ۱$$

$$y = mx^۲ - mx + ۲x + ۱ \Rightarrow (x^۲ - x)m - (y + ۲x - ۱) \equiv ۰$$

$$\begin{cases} x^۲ - x = ۰ \\ y + ۲x - ۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-۱) = ۰ \\ y = -۲x + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = ۰,\ ۱ \\ y = ۱,\ -۱ \end{matrix}$$

نقاط ثابت $\Rightarrow S_۱(۰,۱),\ \ S_۲(۱,-۱)$

مثال ۲. نشان دهید دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = mx^۳ - ۲x - mx + ۴$ به ازای مقادیر متفاوت m از سه نقطه‌ی ثابت می‌گذرند.

حل:

$$y = mx^۳ - ۲x - mx + ۴ \Rightarrow (x^۳ - x)m - (y + ۲x - ۴) \equiv ۰$$

$$\begin{cases} x^۳ - x = ۰ \\ y + ۲x - ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow x(x^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰,\ \ x = ۱,\ \ x = -۱$$

$$x = ۰ \Rightarrow y - ۴ = ۰ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow S_۱(۰,۴)$$

$$x = ۱ \Rightarrow y - ۲ = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow S_۲(۱,۲)$$

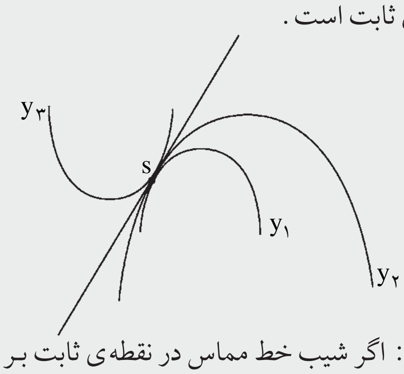
$$x = -۱ \Rightarrow y - ۶ = ۰ \Rightarrow y = ۶ \Rightarrow S_۳(-۱,۶)$$

S_1، S_2 و S_3 سه نقطه‌ی ثابت دسته‌ی منحنی فوق هستند.

خط ثابت

بعضی از منحنی‌های به معادله‌ی پارامتری، به ازای مقادیر متفاوت پارامتر، از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند و در این نقطه‌ی ثابت هم برخط ثابتی مماس‌اند.

به عبارت دیگر، خط ثابت، خط مماس بر دسته‌ی منحنی در نقطه‌ی ثابت است.



توجه: اگر شیب خط مماس در نقطه‌ی ثابت بر دسته‌ی منحنی، مستقل از پارامتر باشد، خط ثابت وجود دارد.

مثال ۳. معادله‌ی خط ثابت دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = a(x-۱)^۲ + ۲x - ۳$ را بنویسید.

حل: ابتدا مختصات نقطه‌ی ثابت دسته منحنی را پیدا می‌کنیم.

$$y = a(x-۱)^۲ + ۲x - ۳ \Rightarrow a(x-۱)^۲ - (y - ۲x + ۳) \equiv ۰$$

نقطه‌ی ثابت:

$$\begin{cases} (x-۱)^۲ = ۰ \\ y - ۲x + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y - ۲ + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow S(۱,-۱)$$

$$y'_x = ۲a(x-۱) + ۲ \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'_{x=۱} = ۲a(۰) + ۲ \Rightarrow m = ۲$$

چون شیب خط مماس، مستقل از پارامتر (a) است، پس خط ثابت وجود دارد.

حال معادله‌ی خط ثابت را می‌نویسیم

$$y - y_s = m(x - x_s)$$

معادله‌ی خط ثابت چنین است:

$$y + ۱ = ۲(x - ۱) \Rightarrow y = ۲x - ۳$$

این خط بر دسته‌ی منحنی بالا در نقطه‌ی $S(۱,-۱)$ مماس است.

مثال ۴. دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = a(x^۲ - ۴)^۲ + x^۲$ به ازای مقادیر متفاوت a بر دو خط ثابت مماس‌اند. معادله‌های آن‌ها را بیابید.

حل: ابتدا مختصات نقاط ثابت را به دست می‌آوریم.

$$y = a(x^۲ - ۴)^۲ + x^۲ \Rightarrow a(x^۲ - ۴)^۲ + (x^۲ - y) \equiv ۰$$

$$\begin{cases} x^۲ - ۴ = ۰ \\ x^۲ - y = ۰ \end{cases} \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

نقاط ثابت

$$x = ۲ \Rightarrow y = x^۲ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow S_۱(۲,۴)$$

$$x = -۲ \Rightarrow y = x^۲ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow S_۲(-۲,۴)$$

$$y = a(x^۲ - ۴)^۲ + x^۲ \Rightarrow y'_x = ۴ax(x^۲ - ۴) + ۲x$$

$$x = ۲ \Rightarrow m_{۱\,\text{مماس}} = y'_{x=۲} = ۸a(۰) + ۴ = ۴$$

$$x = -۲ \Rightarrow m_{۲\,\text{مماس}} = y'_{x=-۲} = -۸a(۰) - ۴ = -۴$$

$$S_۱(۲,۴),\ \ m_۱ = ۴$$

$$y - y_{S_۱} = m_۱(x - x_{S_۱})$$

$$y - ۴ = ۴(x - ۲)$$

معادله‌ی یک خط ثابت $\boxed{y = ۴x - ۴}$

$$S_۲(-۲,۴),\ \ m_۲ = -۴$$

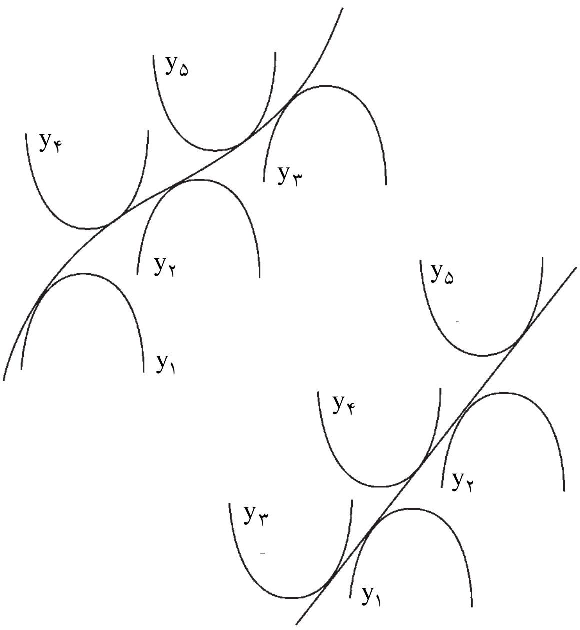
$$y - y_{S_۲} = m_۲(x - x_{S_۲})$$

$$y - ۴ = -۴(x + ۲)$$

معادله‌ی خط ثابت دیگر $\boxed{y = -۴x - ۴}$

پوش یا لفّاف

بعضی از تابع‌های به معادله‌ی پارامتری، به ازای مقادیر متفاوت پارامتر، بر خط یا بر منحنی ثابتی مماس‌اند. این خط یا منحنی را پوش یا لفّاف دسته‌ی منحنی اصلی گویند.



برای تعیین معادله‌ی پوش یا لفّاف، از معادله‌ی منحنی نسبت به پارامتر مشتق می‌گیریم (x و y عدد ثابت فرض می‌شوند). سپس بین رابطه‌ی مشتق و معادله‌ی تابع، پارامتر را حذف می‌کنیم.

مثال ۵. معادله‌ی منحنی پوش دسته‌ی منحنی به معادله‌ی $y = ۲m^۲x - ۴mx^۲ + ۴$ را بیابید.

حل: از معادله‌ی منحنی نسبت به m مشتق می‌گیریم (x و y مقادیر ثابت‌اند).

$$۰ = ۴mx - ۴x^۲ \Rightarrow m = x$$

در معادله‌ی دسته‌ی منحنی، به جای m، x قرار می‌دهیم.

$$y = ۲m^۲x - ۴mx^۲ + ۴,\ \ m = x$$

معادله‌ی منحنی پوش یا لفّاف

$$y = ۲x^۳ - ۴x^۳ + ۴ \Rightarrow y = -۲x^۳ + ۴$$

مثال ۶. معادله‌ی پوش دسته‌ی خط به معادله‌ی $y = ۲mx - m^۲ + ۱$ را بیابید.

حل:

$$۰ = ۲x - ۲m \Rightarrow m = x$$

$$y = ۲mx - m^۲ + ۱,\ \ m = x$$

معادله‌ی منحنی پوش دسته‌ی خط

$$y = ۲x^۲ - x^۲ + ۱ \Rightarrow y = x^۲ + ۱$$

❐

عدد e

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

e چون با تنها رقیبش یعنی π مقایسه شود، در انجمن ریاضی، تازه‌واردی بیش نیست. در حالی که π با عظمت‌تر است و تاریخی با شکوه‌تر دارد که به دوران بابلی‌ها باز می‌گردد، e وزن چندانی در زمینه‌های تاریخی ندارد. ثابت e، نوجوانی، سرزنده، چالاک و در حال بالیدن است و هرجا «رشد» مطرح باشد، همیشه حضور دارد. عامل رشد، چه در مورد جمعیت باشد و چه در مورد سرمایه و پول، و چه در مورد سایر کمیت‌های فیزیکی، بدون استثنا با عدد e سروکار دارد.

e عددی است که مقدار تقریبی‌اش ۲/۷۱۸۲۸ است. بنابراین، چرا این همه خاص است. زیرا این عدد، عددی نیست که به تصادف انتخاب شده باشد، بلکه یکی از بزرگ‌ترین ثابت‌های ریاضی است. این عدد، زمانی در اوایل قرن هفدهم ظاهر شد که چندین ریاضی‌دان، انرژی خود را صرف شفاف کردن مفهوم لُگاریتم می‌کردند، یعنی اختراع درخشانی که تبدیل ضرب اعداد بزرگ به جمع را مجاز می‌کرد.

ماجرای e، در واقع با نوعی e- تجارت قرن هفدهمی آغاز می‌شود. **ژاکوب برنولی**[1] یکی از برنولی‌های سرشناس سوئیسی به‌شمار می‌رود. خانواده‌ای که تجارتشان، به‌دست دادن سلسله‌ای از ریاضی‌دان‌ها به دنیا بود. ژاکوب به سال ۱۶۸۳ با مسئله‌ی بهره‌ی مرکب[2] به کار پرداخت.

پول، پول، پول. فرض کنید سرمایه‌ای ۱ پوندی (موسوم به سرمایه‌ی «اولیه») را با دوره‌ای سالانه به مضاربه گذاشته‌ایم، با نرخ بسیار بالای ۱۰۰ درصد درآمد (ارزش افزوده‌ی به‌دست آمده) در نظر گرفته‌ایم. البته، به ندرت نرخ ۱۰۰ درصد را برای پولمان به‌دست می‌آوریم، اما این رقم، برای مقصودی که داریم مناسب است و می‌توانیم در مورد درآمدهای واقعی، از قبیل ۶ درصد و ۷ درصد نیز آن را به‌کار ببریم. به همین ترتیب، اگر سرمایه‌های اولیه‌ی بزرگ‌تری، از قبیل ۱۰۰۰۰ پوند داشته باشیم، می‌توانیم همه را در ۱۰۰۰۰ ضرب کنیم.

به این ترتیب، در پایان سال، با درآمدی ۱۰۰ درصد، سرمایه و مقدار درآمد به‌دست آمده را داریم که در این حالت، آن نیز ۱ پوند است. بنابراین، مبلغ سخاوت‌آمیز ۲ پوند را خواهیم داشت. اکنون فرض می‌کنیم، نرخ درآمد حاصله به ۵۰ درصد نصف شود. اما هر شش ماه یک‌بار، به‌طور جداگانه به‌کار رود. در این صورت، به ازای نیم سال اول، سودی برابر ۵۰ پنی به‌دست می‌آوریم و سرمایه‌ی اولیه‌مان در پایان نیم سال اول، به ۱/۵۰ پوند رشد کرده است. بنابراین، در پایان یک سال، این مبلغ به اضافه‌ی ۷۵ پنی سود آن را به دست خواهیم آورد. به این ترتیب، ۱ پوندمان در پایان سال اول به ۲/۲۵ پوند نموّ کرده است! با ترکیب سود هر نیم سال ۲۵ پنی دیگر به‌دست می‌آوریم. البته این مبلغ زیاد به نظر نمی‌رسد، اما در صورتی که برای سرمایه‌گذاری ۱۰۰۰۰ پوند داشتیم، به جای ۲۰۰۰۰ پوند ۲۲۵۰۰ پوند به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب، با سود مرکّب، هر نیم‌سال، ۲۵۰۰ پوند اضافی حاصل می‌کنیم.

اما در صورتی که بهره‌ی مرکب در هر نیم‌سال، به این معنی باشد که از مضاربه‌ی پس‌اندازمان سود می‌بریم، بانک نیز به همین ترتیب، از هر مبلغی که به آن بدهکاریم، بهره‌مند می‌شود. پس باید احتیاط کنیم! اکنون فرض می‌کنیم، سال را به چهار ربع تقسیم کرده باشیم و ۲۵ درصد در مورد هر ربع به‌کار رود. با انجام محاسبه‌ای مشابه، در می‌یابیم که یک پوندمان به ۲/۴۴۱۴۱ پوند رشد کرده است. به این ترتیب، پولمان در حال رشد کردن است و با ۱۰/۰۰۰ پوندمان، در

صورتی که بتوانیم سال را تقسیم کنیم و نرخ‌های سود ارزش افزوده‌ی با درصد کمتر را در مورد فاصله‌های زمانی کوچک‌تر به‌کار ببریم، کارمان سودمند به‌نظر می‌رسد.

اما آیا پولمان بی‌محدودیت افزایش می‌یابد و ما را میلیونر می‌کند؟ در صورتی که همان‌گونه که در جدول نشان داده‌ایم، سالمان را هم‌چنان به واحدهای کوچک‌تر و کوچک‌تر تقسیم کنیم، «فرایند حدّی» آورده شده، نشان می‌دهد که به نظر می‌رسد مبلغ مورد نظر به عددی ثابت متمرکز می‌شود. البته، تنها دوره‌ی مرکّب واقعی، دوره‌ی یک روزه است (و این همان کاری است که بانک‌ها انجام می‌دهند). به این ترتیب، پیام ریاضی در این مورد، این است که این حد، که ریاضی‌دان‌ها آن را e می‌نامند، مقداری است که یک پوند، در صورتی‌که سود مرکب به‌طور دائم در نظر گرفته شود، به آن رشد می‌کند.

امّا آیا این موضوع، خوب است یا بد؟ پاسخ را می‌دانید: اگر پس‌انداز کرده‌اید، «آری»؛ و اگر وام گرفته‌اید، «خیر». پاسخ این پرسش به e‌ـ آموزش[3] برمی‌گردد.

مجموع حاصل	ترکیب در هر...
۲٫۰۰۰۰۰ پوند	سال
۲٫۲۵۰۰۰ پوند	نیم‌سال
۲٫۴۴۴۱ پوند	ربع‌سال
۲٫۶۱۳۰۴ پوند	ماه
۲٫۶۹۲۶۰ پوند	هفته
۲٫۷۱۴۵۷ پوند	روز
۲٫۷۱۸۱۳ پوند	ساعت
۲٫۷۱۸۲۸ پوند	دقیقه
۲٫۷۱۸۲۸ پوند	ثانیه

مقدار دقیق e. e نیز مانند π عددی گنگ است و بنابراین، چون در مورد π، مقدار دقیق آن را نمی‌دانیم، مقدار e تا ۲۰ رقم ده‌دهی برابر است با:

۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵۲۳۵۳۶...

تنها با استفاده از کسرها، بهترین تقریب به مقدار e، در صورتی‌که بالا و پایین کسر به اعداد دو رقمی محدود باشند، کسر $\frac{۸۷}{۳۲}$ است. شگفت‌آور است که هرگاه بالا و پایین کسر به اعداد سه‌رقمی محدود باشد، بهترین کسر $\frac{۸۷۸}{۳۲۳}$ است. کسر اخیر نوعی بسط مقلوب مستوی[4] کسر اول است. ریاضیات عادت دارد که این شگفتی‌های کوچک را ارائه دهد. یکی از بسط به سری‌های معروف e، توسط مورد زیر داده شده است:

عامل رشد، چه در مورد جمعیت باشد و چه در مورد سرمایه و پول، و چه در مورد سایر کمیت‌های فیزیکی، بدون استثنا با عدد e سروکار دارد

$$e = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲\times۱} + \frac{۱}{۳\times۲\times۱} + \frac{۱}{۴\times۳\times۲\times۱} + \frac{۱}{۵\times۴\times۳\times۲\times۱} + \cdots$$

در مورد این سری، نمادنویسی فاکتوریل[5] که از علامت تعجب استفاده می‌کند، سودمند است. در این نمادنویسی، برای نمونه، $۱\times۲\times۳\times۴\times۵ = ۵!$. با به‌کار بردن این نمادنویسی، e صورت آشناتر زیر را اختیار می‌کند:

$$e = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۵!} + \cdots$$

بنابراین، به تحقیق به‌نظر می‌رسد، عدد e الگویی دارد. در ویژگی‌های ریاضی‌اش نیز آشکار می‌شود که از π «متقارن»تر است.

در صورتی‌که مایل به یادآوردن چند رقم اولیه‌ی e باشید، می‌توانید جمله‌ای بسازید که در آن، تعداد حروف هر کلمه، یکی از ارقام اولیه‌ی بسط e را نشان دهد. و این کاری است که در مورد π نیز انجام دادیم.

این موضوع که e گنگ است (یعنی کسر نیست) در سال ۱۷۳۷، توسط **لئورنهارد اویلر**[6] به اثبات رسید. به سال ۱۸۴۰، ژوزف لیوویل[7]، ریاضی‌دان فرانسوی، نشان داد که e جواب هیچ معادله‌ی درجه دومی نیست و به سال ۱۸۷۳، هم‌وطنش شارل هرمیت[8] در یکی از آثار راهگشایش، به اثبات رساند که e متعالی[9] است (یعنی نمی‌تواند جواب هیچ معادله‌ی جبری باشد). آن‌چه در این مورد اهمیت داشت، روشی بود که هرمیت به‌کار برده بود. نه سال بعد، فردیناند فون لیندمان[10] با اقتباس از روش هرمیت، ثابت کرد که π نیز متعالی است؛ موضوعی که از منظر بالاتری برخوردار بود.

البته، به یک پرسش پاسخ داده شد، اما پرسش‌های تازه‌ای ظاهر شدند. آیا e به توان e نیز متعالی است؟ این پرسش، پرسش غریبی است، زیرا چگونه ممکن است غیر از این باشد؟ با این همه، هنوز به محکمی به اثبات نرسیده و بنا به استانداردهای مؤکّد ریاضی، باید هم‌چنان به عنوان یک حدس رده‌بندی شود. ریاضی‌دان‌ها اندک‌اندک به سوی اثبات این موضوع رفته‌اند، اما تنها این را اثبات کرده‌اند که غیر ممکن است هم e و هم e به توان $e^۲$، هر دو متعالی باشند؛ نزدیک، اما نه به‌قدر کافی نزدیک.

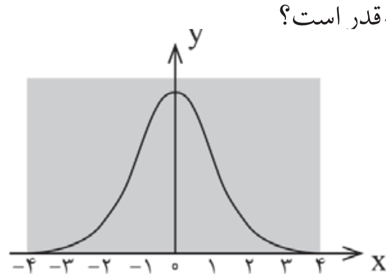
ارتباط‌های بین π و e نیز مسحورکننده است. مقادیر e^{π}

و π^e نزدیک به هم‌اند، اما به سادگی (بدون محاسبه‌ی مقادیرشان) نشان داده شده است که $e^\pi > \pi^e$. در این مورد، اگر تقلب کنید و به ماشین حسابتان نگاهی بیندازید، خواهید دید که این مقادیر تقریبی عبارت‌اند از: $e^\pi =$ ۲۳/۱۴۰۶۹ و $\pi^e =$ ۲۳/۴۵۹۱۶.

عدد e^π به عنوان ثابت **گلفاند**[11] (به‌نام الکساندر گلفاند[12] ریاضی‌دان روسی) شناخته می‌شود و ثابت شده که متعالی است. اما در مورد π^e مطالب بسیار کمتری می‌دانیم. گنگ بودن این عدد هنوز به اثبات نرسیده است؛ البته اگر گنگ باشد.

آیا e دارای اهمیت است؟ محل اصلی یافتگاه e، هنگام رشد و نموّ است. مثال‌های آن در مورد رشد اقتصادی و رشد جمعیت هستند. مرتبط با این بحث، خم‌های وابسته به e هستند که در مدل فروپاشی رادیواکتیو به‌کار رفته‌اند.

عدد e در مسائل نامرتبط با رشد نیز رخ می‌دهد. پی‌یر مونت‌مور[13] مسئله‌ای احتمالی را در قرن هجدهم تحقیق کرد که از آن زمان به بعد، به گونه‌ای وسیع بررسی شده است. این مسئله به‌صورت ساده، گروهی از اشخاص‌اند که به رستورانی می‌روند و پس از صرف ناهار، کلاه‌هایشان را به تصادف بر می‌دارند. احتمال این‌که هیچ یک از آن‌ها کلاه خودش را بر ندارد، چه‌قدر است؟



می‌توان نشان داد که این احتمال برابر $\frac{1}{e}$ (در حدود ۳۷درصد) است. بنابراین، احتمال این‌که دست‌کم یکی از این اشخاص کلاه خودش را بردارد $1-\frac{1}{e}$ (۶۳درصد) است.

این کاربرد در نظریه‌ی احتمال[14] یکی از موارد بسیار به‌شمار می‌رود. توزیع پواسون[15] که با پیشامدهای نادر سروکار دارد، موردی دیگر است. این مثال‌ها نمونه‌های اولیه‌اند، اما به هیچ‌وجه، از مرحله پرت نیستند: جیمز استرلینگ[16] در مورد مقدار فاکتوریل !nتقریبی قابل ملاحظه شامل e (و π) به‌دست آورد. در آمار، «خم ناقوسی»[17] و آشنای توزیع نرمال[18] شامل e است و در مهندسی، خم کابل پل معلّق، به eوابسته است. این فهرست بی‌پایان است.

یک اتحاد حیرت‌انگیز. جایزه‌ی قابل توجه‌ترین فرمول تمام ریاضیات، از آن eاست. چون به اعداد مشهور ریاضیات بیندیشیم، به ۰، ۱، π، e و عدد موهومی[19] $i = \sqrt{-1}$ فکر می‌کنیم. اما چگونه می‌شود که $e^{i\pi} + 1 = 0$ باشد؟ اما هست! و این دستاورد از آنِ اویلر است.

شاید اهمیت حقیقی e در رمزی نهفته باشد که توسط آن، نسل‌های ریاضی‌دان‌ها را مجذوب خود کرده است. در هر حال، eاجتناب‌ناپذیر است. اما چرا نویسنده‌ای چون رایت[20] باید همّ خود را صرف نوشتن داستانی بدون (حرف) e کند. به احتمال قوی، وی نام مستعاری نیز داشته است. اما گدسبیِ[21] وی دقیقاً به همین کار پرداخته است. گرچه تصور این مطلب سخت است که ریاضی‌دانی به نوشتن کتابی بدون e دست زند، یا قادر به این کار باشد.

تاریخچه

۱۶۱۸ میلادی: جان نپر، در ارتباط با لگاریتم، با ثابت e مواجه شد.

۱۷۲۷ میلادی: اویلر نماد e را در ارتباط با نظریه‌ی لگاریتم‌ها به‌کار برد. این عدد گاهی عدد اویلر نامیده می‌شود.

۱۷۴۸ میلادی: اویلر eرا تا ۲۳ رقم محاسبه کرد. وی اعتبار کشف فرمول مشهور $e^{i\pi} + 1 = 0$ را در حوالی این تاریخ به‌دست آورد.

۱۸۷۳ میلادی: هِرمیت ثابت کرد e عددی متعالی است.

۲۰۰۷ میلادی: e تا مرتبه‌ی 10^{11} رقم محاسبه شد.

پی‌نوشت

1. Jacob Bernoulli
2. Compound interest
3. e-learning
4. palindromic
5. factorial notation
6. Leonhard Euler
7. Joseph Liouville
8. Charles Hermite
9. transcendental
10. Ferdinand von Lindemann
11. Gelfond’s constant
12. Aleksandr Gelfond
13. Pierre Montmort
14. Probability theory
15. Poisson distribution
16. James Stirling
17. bell curve
18. normal distribution
19. imaginary number
20. E.V. Wright
21. Gadsby

● هوشنگ شرقی

مسائل مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان

المپیاد ریاضی در کشور لهستان

کشور لهستان سابقه‌ای دیرینه در برگزاری مسابقه‌ها و المپیادهای ریاضی دارد. انجمن ریاضی لهستان از سال ۱۹۴۹ به این سو، هر ساله المپیاد ریاضی این کشور را برگزار کرده و شکل برگزاری آن در سال‌های گوناگون تغییراتی داشته است. امروزه این آزمون در سه مرحله برگزار می‌شود: مرحله‌ی اول که به صورت غیابی برگزار می‌شود، سه ماه طول می‌کشد. در طی هر ماه، دانش‌آموزان باید ۴ مسئله را که به آن‌ها داده می‌شود، حل کنند. در مرحله‌ی دوم که حضوری است و شبیه مسابقات ریاضی بیشتر کشورها و از جمله ایران است، در طی دو روز، هر روز سه مسئله با ۴ ساعت وقت برای حل، در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد. در مرحله‌ی نهایی نیز، دانش‌آموزان منتخب سراسر کشور به پایتخت می‌آیند و مسابقه‌ای شبیه مرحله‌ی دوم، بین همه‌ی آن‌ها برگزار می‌شود تا برگزیدگان نهایی، برای اعزام به المپیاد بین‌المللی ریاضی انتخاب شوند.

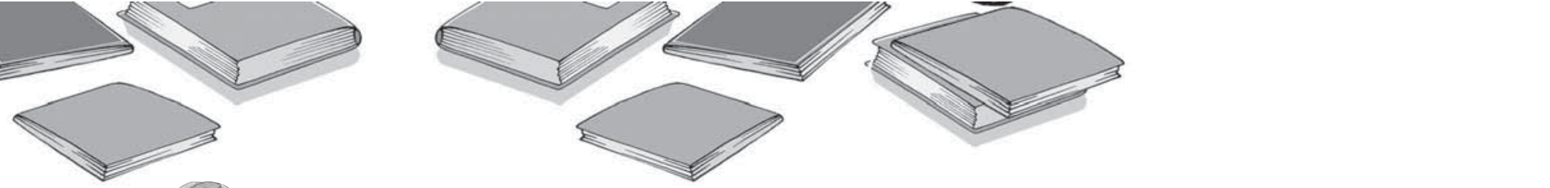
در کشور لهستان، مجلات ریاضی خوبی هم منتشر می‌شوند، از جمله مجله‌ی «ریاضیات»[1] که از سال ۱۹۴۸ منتشر می‌شود و نمونه‌ی مسائل المپیادها و راه‌حل‌های آن‌ها را نیز ارائه می‌دهد. کشور لهستان در المپیادهای بین‌المللی نیز حضور خوبی داشته است. از نخستین المپیاد بین‌المللی ریاضی در سال ۱۹۵۹، در آن شرکت داشته و در سال‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۲ میزبان این مسابقات بوده است. هم‌چنین، تاکنون پنج بار مقام چهارم این مسابقات را به دست آورده و تقریباً همواره جزو بیست کشور نخست این رقابت‌ها بوده است. در این جا، نمونه سؤالات مرحله‌ی نهایی (روز اول) المپیاد ریاضی این کشور در سال ۱۹۸۶ را همراه با راه‌حل آن‌ها ملاحظه می‌کنید. سطح مسائل نسبتاً خوب است.

مسائل

۱. مطلوب است همه‌ی مقدارهای $n \in \mathbb{N}$، که برای هر کدام از آن‌ها، چند جمله‌ای درجه‌ی n با ضریب‌های حقیقی وجود داشته باشد، به نحوی که نابرابری $f(x) \geq f'(x)$ برای هر مقدار $x \in \mathbb{R}$ برقرار باشد.

۲. $2n$ نفر $(n > 1)$ در مسابقه‌ی شطرنج شرکت کرده‌اند. در ضمن، هر دو نفر از آن‌ها، بیش از یک دور با هم بازی نمی‌کنند. ثابت کنید با این شرایط، برگزاری تمامی مسابقه‌ها در حالتی که هیچ سه بازیکنی سه بار بین خود بازی نکرده باشند، تنها وقتی ممکن است که تعداد همه‌ی دورهای بازی مسابقه از n^2 تجاوز نکند.

۳. AK، BL و CM را ارتفاع‌های مثلث ABC و نقطه‌ی N را وسط ضلع AC می‌گیریم. ثابت کنید چهار نقطه‌ی K، L، M و N روی محیط یک دایره واقع‌اند.



حل مسائل

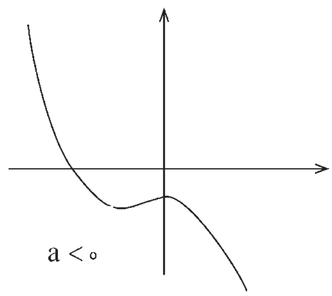
۱. به پیش قضیه‌ی نسبتاً بدیهی زیر توجه می‌کنیم:

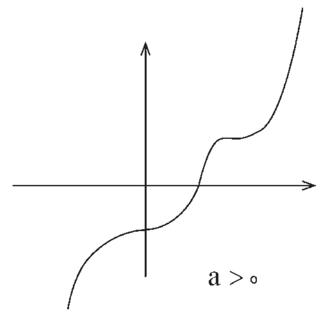
قضیه: هیچ تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد وجود ندارد که به ازای جمیع مقادیر x، مقدارهای آن همواره مثبت (یا منفی) باشد و همواره برای هر عدد زوج n، چند جمله‌ای از درجه‌ی n وجود دارد که به ازای جمیع مقادیر x، مقدارهای آن همواره مثبت (یا منفی باشد).

درستی این قضیه با توجه به حد توابع چند جمله‌ای در $\pm\infty$ و در واقع نمودار آن‌ها واضح است. در تابع چند جمله‌ای $p(x)$ از درجه‌ی n که n عددی طبیعی و فرد است، در صورتی که بزرگ‌ترین درجه‌ی $p(x)$ را ax^n بگیریم، اگر $a > 0$ آن‌گاه

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n = \pm\infty$ و اگر $a < 0$، $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim\limits_{\pm\infty} ax^n = \pm\infty$

پس نمودار این تابع از ناحیه‌ی سوم شروع و به ناحیه‌ی اول ختم می‌شود $(a > 0)$ و یا این‌که از ناحیه‌ی دوم شروع و به ناحیه‌ی چهارم ختم می‌شود $(a < 0)$.





بنابراین نمودار این تابع، همواره محور xها را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند. این قضیه، هم ارز با نتیجه‌ی مستقیم زیر است:

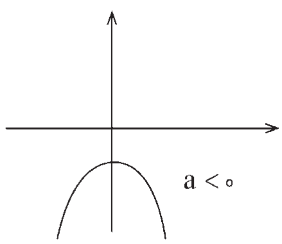
هر معادله‌ی چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد، همواره حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

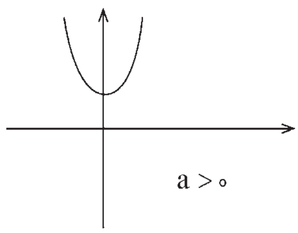
بنابراین، در این حالت ممکن نیست که نمودار تابع p، به تمامی بالا (یا پایین) محور xها باشد و لذا مقادیر p نمی‌توانند همگی مثبت (یا منفی) باشند. برعکس، در حالتی که n زوج باشد، داریم:

$$a > 0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n = +\infty$$

$$a < 0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n = -\infty$$

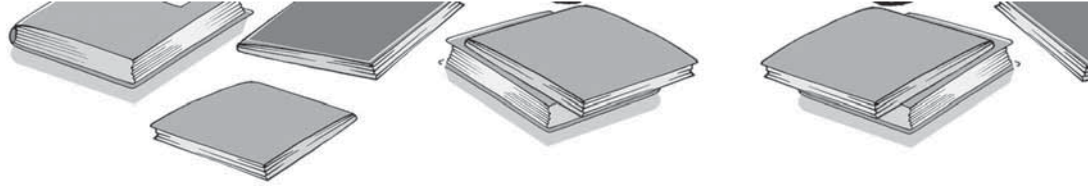
پس در این حالت، ممکن است (تأکید می‌کنیم که ممکن است و همواره چنین نیست) تمام نمودار تابع، بالا (یا پایین) محور xها باشد. بخصوص به نمودار تابع با ضابطه‌ی $p(x) = ax^{2k} + b$ توجه کنید:





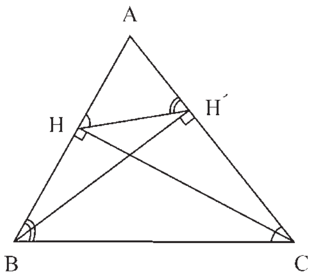
پس مقادیر $p(x)$ در این حالت می‌تواند همواره مثبت (یا منفی) باشد. اکنون به مسئله‌ی خودمان برمی‌گردیم. بدیهی است، اگر $f(x)$ از درجه‌ی n باشد، $f'(x)$ از درجه‌ی $n-1$ و $p(x) = f(x) - f'(x)$ نیز از درجه‌ی n است. پس اگر n زوج باشد، $p(x)$ می‌تواند همواره مثبت باشد و در نتیجه $f(x) \geq f'(x)$. ولی اگر n فرد باشد، $p(x)$ نمی‌تواند همواره مثبت باشد و لذا هیچ تابع $f(x)$ نمی‌توان یافت که به ازای همه‌ی مقادیر x، $f(x) \geq f'(x)$ باشد. بنابراین، مجموعه‌ی مقادیر n، مجموعه‌ی عددهای زوج است.

۲. از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. به ازای $n = 1$ حکم مسئله درست است (چرا؟). فرض می‌کنیم برای $n = k$ حکم درست باشد و ثابت می‌کنیم برای $n = k + 1$ نیز درست است. دو نفر مانند A و B را در نظر بگیرید که با هم



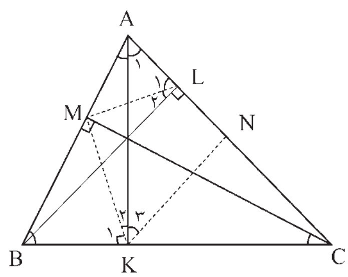
بازی کرده باشند. $2k$ نفر دیگر، غیر از این دو وجود دارند، زیرا تعداد کل افراد $2(k+1)$ است. بین آن $2k$ نفر، حداکثر k^2 بازی انجام شده است (فرض استقراء). حال اگر هر کدام از آن‌ها با A یا B بازی کنند، $2k$ بازی دیگر نیز انجام شده است (بدیهی است که طبق فرض مسئله، ممکن نیست هیچ یک از آن‌ها با هر دوی A و B بازی کرده باشند، زیرا در این صورت، یک سه تایی درست می‌شود که دوبه‌دو با هم بازی کرده‌اند و این خلاف فرض است که می‌گوید هیچ سه نفری سه بار بین خود بازی نکرده‌اند). حال خود A و B نیز یک بازی کرده‌اند. پس در مجموع، حداکثر $k^2+2k+1=(k+1)^2$ بازی انجام شده است.

۳. ابتدا به قضیه‌ی معروف زیر اشاره می‌کنیم: هرگاه ارتفاع‌های CH و BH′ از مثلث ABC را رسم کنیم، زوایای مثلث AHH′ با زوایای مثلث ABC برابرند. اثبات به روش‌های گوناگون انجام‌پذیر است. مثلاً توجه می‌کنیم که چون H و H′ دو زاویه‌ی قائمه روبه‌رو به BC هستند، پس چهارضلعی HH′CB محاطی است و در نتیجه: $A\hat{H'}H + H\hat{H'}C = 180^\circ$ و چون $H\hat{H'}C + \hat{B} = 180^\circ$ پس: $\hat{B} = A\hat{H'}H$ و به همین ترتیب: $\hat{C} = A\hat{H}H'$



در واقع، مثلث‌های AHH′ و ABC متشابه‌اند. حال با توجه به این موضوع، در شکل مربوط به مسئله داریم: $\hat{K}_1 = \hat{A}$ و $\hat{L}_1 = \hat{B}$ هم‌چنین می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است. پس $KN = AN = NC$ و در نتیجه: $\hat{A}_1 = \hat{K}_3$

حال می‌توان نوشت:



$$\hat{K}_2 + \hat{K}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{K}_2 + \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{K}_2 + 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{K}_2 = \hat{B} + \hat{C} - 90^\circ \ , \ \hat{B} = \hat{L}_1 \ , \ \hat{C} = 90^\circ - \hat{A}_1$$
$$\Rightarrow \hat{K}_2 = \hat{L}_1 + 90^\circ - \hat{A}_1 - 90^\circ \Rightarrow \hat{K}_2 + \hat{A}_1 = \hat{L}_1 \ , \ \hat{A}_1 = \hat{K}_3$$
$$\Rightarrow \hat{K}_2 + \hat{K}_3 = \hat{L}_1 \ , \ \hat{L}_1 + M\hat{L}C = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{K}_2 + \hat{K}_3 + M\hat{L}C = 180^\circ \Rightarrow M\hat{K}N + M\hat{L}C = 180^\circ$$

بنابراین، مجموع زوایای مقابل در چهارضلعی MKNL مساوی 180° و این چهارضلعی محاطی است. در نتیجه، نقاط M، K، N و L روی محیط یک دایره واقع‌اند.

پی‌نوشت

1. Matematyka

حمید رضا امیری

نمایش اعداد صحیح در مبناهای مختلف

ما همواره در محاسبات روزمره و علمی و مهندسی، از اعداد در مبنای ده (مبنای اعشاری) استفاده می‌کنیم. مبنای ده نمایشی است برای اعداد صحیح و به‌خصوص اعداد طبیعی که در آن اعداد را ده تا ده تا دسته‌بندی می‌کند. مثلاً وقتی می‌نویسیم ۱۳۸۸، منظورمان ۸ یکی و ۸ بسته‌ی ده‌تایی و ۳ بسته‌ی ۱۰۰تایی (هر بسته‌ی ۱۰۰تایی، ۱۰ بسته‌ی ۱۰تایی است) و ۱ بسته‌ی هزارتایی که هر هزار تا ۱۰ بسته‌ی ۱۰۰ تایی است.

اعداد را می‌توان در مبناهای غیر از ۱۰ نیز نمایش داد. مبناهایی چون ۲ یا ۸ یا ۱۲. مبنای ۲ (مبنای دو دویی) در رایانه کاربرد دارد و مبنای ۱۲، مبنای شمارش ایرانیان باستان بوده است و آثار استفاده از آن هنوز هم مشاهده می شود (تقسیم نیم روز به ۱۲ ساعت یا سال به ۱۲ ماه و یا استفاده از مقیاس‌های اندازه‌گیری هم چون «دو جین» به معنی ۱۲ تا از این نمونه‌اند.)

در این بخش، می‌خواهیم با استفاده از قضیه‌ی تقسیم نشان دهیم، هر عدد طبیعی را می‌توان در مبنای عدد طبیعی $b > 1$ نمایش داد و حتی اعمال جمع و ضرب را در مبناهای غیر از ۱۰ یاد گرفت و انجام داد. ابتدا به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که با استفاده از قضیه‌ی تقسیم نشان می‌دهد، هر عدد طبیعی مانند nرا می‌توان در مبنای هر عدد طبیعی مانند $b > 1$ نمایش داد.

قضیه: اگر b عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک باشد، هر عدد طبیعی مانند n را می‌توان به شکل منحصر به فردی، به‌صورت زیر نمایش داد:

$$n = r_k b^k + r_{k-1} b^{k-1} + \dots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0$$

در رابطه‌ی فوق، kعددی صحیح و نامنفی است و برای هر $i = 0, 1, 2, \dots, k$، همواره $0 \le r_i \le b-1$ و $r_k \neq 0$.

(اثبات این قضیه، براساس استفاده از قضیه‌ی تقسیم، در کتاب درسی آمده است).

برای این‌که قضیه را بهتر درک کنیم، چند مثال می‌آوریم:

مثال ۱. عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_2 a_1 a_0}$ را می‌توان در مبنای ۱۰ به‌صورت زیر نمایش داد:

$$A = 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$$

توجه دارید که خط بالای ارقام یا حروف به معنی این است که حروف زیر خط، هر کدام یک رقم در مبنای مزبورند و اگر مبنای عدد نوشته نشود، آن را ۱۰ در نظر می‌گیرند. هم‌چنین دقت دارید که برای نمایش یک عدد n رقمی در مبنایی چون b، طبق قضیه‌ی قبل، باید اولین عدد از سمت چپ در b^{n-1} ضرب و به ترتیب از توان b یک واحد کم شود.

مثال ۲. عدد $A = (51324)_6$ را در مبنای ۶ باز کنید.

$$A = 5 \times 6^4 + 1 \times 6^3 + 3 \times 6^2 + 2 \times 6^1 + 4$$

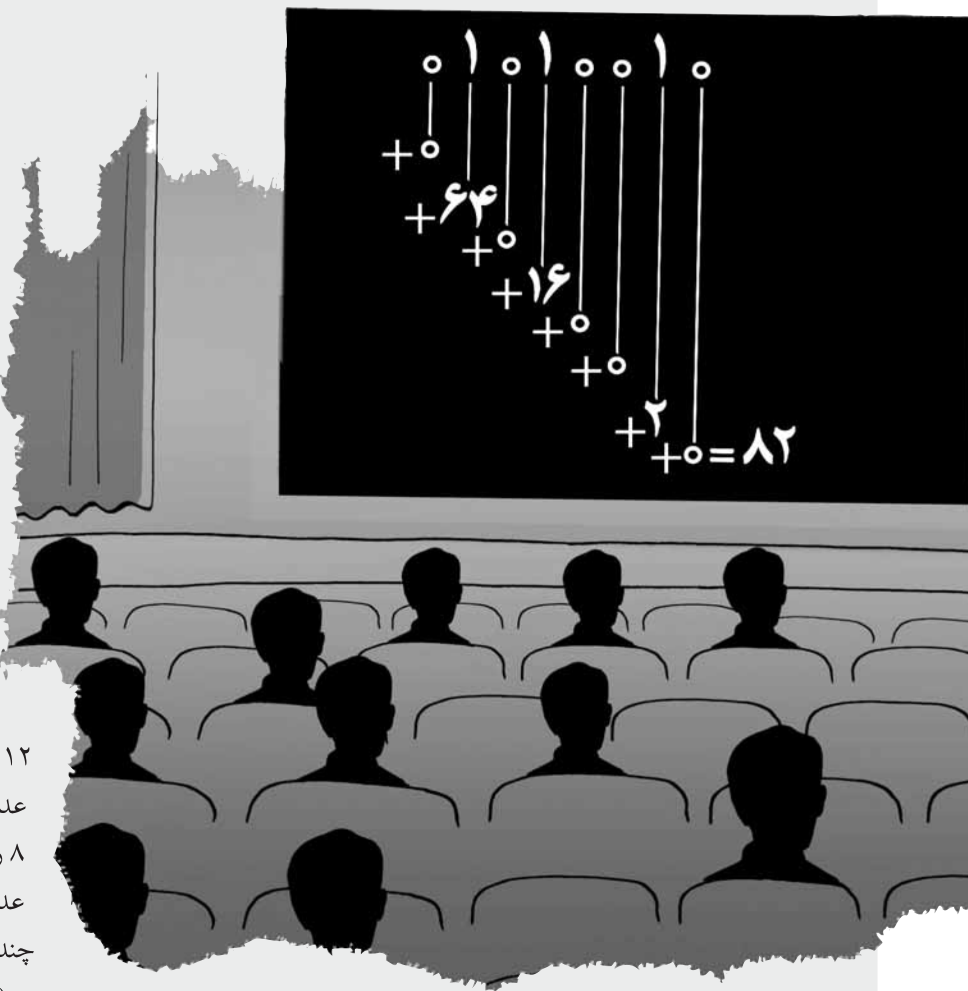
توجه داشته باشید که وقتی عددی، مثلاً $A = (312)_5$ که در مبنای ۵ به شکل یک دوتایی و یک بسته‌ی ۵ تایی و سه بسته‌ی ۲۵ تایی دسته‌بندی شده است، در مبنای خودش باز شود و این دسته‌بندی‌های پنج‌تایی باز و روی هم شمارش شوند، عددی در مبنای ۱۰ به‌دست می‌آید. یعنی:

«برای این‌که عددی در مبنای $b > 1$ را به مبنای ۱۰ ببریم، کافی است آن را در مبنای خودش، یعنی b باز کنیم. مجموع اعداد حاصل عددی است در مبنای ۱۰».

برای مثال، می‌خواهیم عدد $A = (312)_5$ را به مبنای ۱۰ ببریم:

$$(312)_5 = 3 \times 5^2 + 1 \times 5 + 2 = 75 + 5 + 2 = 82$$

حال این سؤال پیش می‌آید که اگر بخواهیم عدد ۸۲ را با



استفاده از قضیه‌ی قبل در مبنای ۵ بنویسیم، این عمل چگونه انجام می‌شود؟

واضح است که باید عدد ۸۲ را ۵ تا ۵ تا دسته‌بندی کنیم. برای این منظور، باید با استفاده از قضیه‌ی تقسیم، عدد ۸۲ را با تقسیمات متوالی به دسته‌های ۵ تایی و ۲۵ تایی و ۱۲۵ تایی و ... تقسیم کنیم.

$$
\begin{array}{r|l}
۸۲ & ۵ \\
\hline
۸۰ & ۱۶ \;|\; ۵ \\
(۲) & ۱۵ \quad ۳ \;|\; ۵ \\
 & (۱) \quad ۰ \quad\; ۰ \\
 & \quad (۳)
\end{array}
\qquad ۸۲ = (۳۱۲)_۵
$$

در واقع، اگر ۸۲ را با استفاده از قضیه‌ی تقسیم که در بالا انجام شد، بازنویسی کنیم، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
۸۲ &= ۵ \times ۱۶ + ۲ = ۵ \times (۳ \times ۵ + ۱) + ۲ \\
&= ۳ \times ۵^۲ + ۱ \times ۵ + ۲
\end{aligned}
$$

که عبارت $(۳ \times ۵^۲ + ۱ \times ۵ + ۲)$ همان باز شده‌ی عدد $(۳۱۲)_۵$ در مبنای ۵ است.

سؤال دیگر این است که اگر مبنای شمارش بزرگ‌تر از ۱۰ باشد، ارقام چگونه نوشته و خوانده می‌شوند. مثلاً در مبنای ۱۶ عدد ۱۲ یا ۱۳ رقم محسوب می‌شود. بنابراین عدد $(۱۲۸۶۴۱۱۳)_{۱۶}$ را می‌توان عددی ۸ رقمی خواند (یک رقم یک رقم) و یا عددی ۵ رقمی. البته عدد ۵ رقمی هم به چند صورت خوانده می‌شود: $(۳-۱۱-۴-۶-۸-۱۲)_۶$ و یا $(۱۳-۱-۴-۶-۸-۱۲)_۶$. بنابراین، برای این‌که این اشکال ایجاد نشود، طبق قرارداد، حرف a را ۱۰، حرف b را ۱۱، حرف c را ۱۲ و ... در نظر می‌گیریم. برای مثال، عدد $(\overline{۱a۲c})_{۱۳}$ به صورت زیر به مبنای ۱۰ برده می‌شود:

$$(\overline{۱a۲c})_{۱۳} = ۱ \times ۱۳^۳ + ۱۰ \times ۱۳^۲ + ۲ \times ۱۳ + ۱۲$$

قبل از طرح و حل مسائلی در زمینه‌ی عددنویسی در مبناهای مختلف، می‌خواهیم اعمال جمع و ضرب در مبناهای غیر از ۱۰ را نیز یاد بگیریم. البته برای مثال، اگر بخواهیم دو عدد ۷۸ و ۹۶ را با هم جمع کنیم، ابتدا یکان‌های آن دو را با هم جمع و عدد حاصل یعنی ۱۴ را بر مبنای خودشان یعنی ۱۰ تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را که یک باشد، به مکان بالاتر می‌بریم و باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۴ بر مبنا، یعنی ۴ را نگه می‌داریم. همین عمل را در مکان‌های دیگر تکرار می‌کنیم. $(۱+(۷+۹))$ را بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده را که ۷ باشد، نگه‌می‌داریم و خارج قسمت را به مکان بالاتر می‌فرستیم و ...)

در مبناهای غیر از ۱۰ نیز به‌صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{cccc} & \overset{۱}{} & & \\ & ۱ & ۷ & ۸ \\ + & ۰ & ۹ & ۶ \\ \hline & ۱ & ۷ & ۴ \end{array}$$

یعنی در هر مکان، برای جمع دو رقم، ابتدا آن‌ها را جمع و حاصل جمع را بر مبنای خودشان تقسیم می‌کنیم. باقی‌مانده را در همان مکان نگه می‌داریم و خارج قسمت را به مکان بعدی می‌بریم و ...

مثلاً می‌خواهیم دو عدد $(۶۴)_۷$ و $(۵۴)_۷$ را با هم جمع کنیم. ابتدا رقم اول از راست هر یک را با هم جمع $(۱۰=۶+۴)$ و حاصل را بر ۷ تقسیم می‌کنیم. $(۳+۷\times۱=۱۰)$ باقی‌مانده را نگه می‌داریم، خارج قسمت یعنی ۱ را به مکان دوم می‌فرستیم و آن را با مجموع ارقام مکان دوم، جمع می‌کنیم. حاصل را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده را نگه می‌داریم و خارج قسمت را به مکان بعدی می‌بریم.

$$\begin{array}{cccc} & & \overset{۱}{} & \\ & ۱ & ۶ & ۶ \\ + & ۰ & ۵ & ۴ \\ \hline & (۱ & ۵ & ۳)_۷ \end{array} \qquad \begin{cases} ۶+۴=۱۰=۱\times۷+۳ \\ (۶+۵)+۱=۱۲=۱\times۷+۵ \quad \text{باقی‌مانده} \\ ۰+۱=۱ \quad \text{خارج قسمت} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{۱}{} & \overset{۱}{} & \\ & ۱ & (۵ & ۶ & ۷)_۸ \\ + & ۰ & (۷ & ۷ & ۴)_۸ \\ \hline & ۱ & (۵ & ۶ & ۳)_۷ \end{array} \qquad \begin{cases} ۷+۴=۱۱=۱\times۸+۳ \\ (۶+۷)+۱=۱۴=۱\times۸+۶ \\ (۵+۷)+۱=۱۳=۱\times۸+۵ \\ ۰+۱=۱ \end{cases}$$

برای ضرب دو عدد در مبنای غیر از ۱۰ نیز به همین صورت عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{۵}{۲} & \overset{۵}{۳} \\ & & (۵۶)_۸ \\ & ۱ & (۷۴)_۸ \\ \times & ۲ & ۷۰ \\ & ۵۰ & ۲۰ \\ \hline & (۵۳ & ۱۰) \end{array} \qquad \begin{cases} ۴\times۶=۲۴=۳\times۸+۰ \\ ۴\times۵+۳=۲۳=۲\times۸+۷ \\ ۷\times۶=۴۲=۵\times۸+۲ \\ ۷\times۵+۵=۴۰=۵\times۸+۰ \end{cases}$$

$$۷+۲=۹=۱\times۸+۱$$

نکته‌ی جالب

به نظر شما آیا در مبنای غیر از ۱۰، ممیز معنی دارد و چگونه باید اعداد دارای ممیّز را تعریف کرد؟ بله درست است. ممیّز در اعداد با مبنای غیر از ۱۰ معنی دارد و درست مثل تعریف ممیّز در مبنای ۱۰ است. برای مثال، به بسط عدد ۱۳۸۸/۱۲ توجه کنید:

$$۱۳۸۸/۱۲=۱\times۱۰^{۳}+۳\times۱۰^{۲}+۸\times۱۰^{۱}+۸\times۱۰^{۰}+۱\times۱۰^{-۱}+۲\times۱۰^{-۲}$$

حال می‌خواهیم عدد $(۴۱۲۳/۱۲۳)_۶$ را در مبنای خودش بسط دهیم:

$$(۴۱۲۳/۱۲۳)_۶=۴\times۶^{۳}+۱\times۶^{۲}+۲\times۶^{۱}+۳\times۶^{۰}+۱\times۶^{-۱}+۲\times۶^{-۲}+۳\times۶^{-۳}$$

در واقع، در این عدد رقم‌های ۱ بعد از ممیز، $\frac{۱}{۶}$ و ۲ یعنی $\frac{۲}{۳۶}$ و ۳ یعنی $\frac{۳}{۲۱۶}$ تعریف می‌شوند.

مسائل حل شده

مسئله‌ی ۱. با فرض این‌که $(ab)_۵+(ba)_۴=۳۳$، عدد $(\overline{aba})_۶$ را در مبنای ۱۰ به‌دست آورید.

حل:

$$(ab)_۵+(ab)_۴=۳۳\Rightarrow ۵a+b+۴b+a=۳۳\Rightarrow ۶a+۵b=۳۳$$

و چون $۱\le a\le ۳$ و $۱\le b\le ۳$ (در مبنای ۴ حداکثر رقم به‌کار رفته ۳ است)، لذا باید $a=b=۳$ باشد. در این صورت داریم:

$$(\overline{aba})_۶=(۳۳۳)_۶=۳\times۶^{۲}+۳\times۶+۳=۱۲۹$$

مسئله‌ی ۲. اگر $(۱۳۴)_{x+۱}=(۲۱۳)_x$، در این صورت $(۱۱۱)_x$ را بیابید.

حل: ابتدا x را می‌یابیم (توجه داریم که باید $x\ge۴$ باشد).

$$(۲۱۳)_x=(۱۳۴)_{x+۱}\Rightarrow ۲x^{۲}+x+۳=(x+۱)^{۲}+۳\times(x+۱)+۴$$
$$\Rightarrow ۲x^{۲}+x+۳=x^{۲}+۲x+۱+۳x+۳+۴\Rightarrow x^{۲}-۴x-۵=۰$$
$$\Rightarrow (x-۵)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۵$$
$$\Rightarrow (۱۱۱)_۵=۱\times۵^{۲}+۱\times۵+۵=۳۵$$

مسئله‌ی ۳. اگر عدد دو رقمی $(ab)_۷$ با عدد $(ba)_۹$ برابر باشد، این عدد را در مبنای ۱۰ نمایش دهید.

حل: چون $(ab)_۷$، پس $۱\le a\le ۶$ و $۱\le b\le ۶$ (a و b نمی‌توانند صفر باشند، به دلیل این‌که در $(ab)_۷$، رقم a در سمت چپ و در $(ba)_۹$ رقم b در سمت چپ قرار گرفته است و صفر سمت چپ خوانده نمی‌شود).

$$(ab)_۷=(ba)_۹\Rightarrow ۷a+b=۹b+a\Rightarrow ۶a=۸b\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۸}{۶}$$

چون $a\neq۸$ پس باید قرار دهیم: $\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$ که در نتیجه $a=۴$ و $b=۳$.

بنابراین داریم:

$$(ab)_۷=۴\times۷+۳=۳۱$$
$$(ba)_۹=۳\times۹+۴=۳۱$$

مسئله‌ی ۴. مطلوب است:

الف) تعداد اعداد ۴ رقمی در مبنای ۵

ب) بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی در مبنای ۵ (با تکرار ارقام و بدون تکرار ارقام)

ج) کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی در مبنای ۵ (با تکرار ارقام و بدون تکرار ارقام)

حل: در مبنای ۵، می‌توان از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ استفاده کرد که در سمت چپ رقم صفر قرار نمی‌گیرد. پس برای انتخاب رقم در سمت چپ، ۴ انتخاب داریم.

و در جایگاه‌های بعدی، هر کدام ۵ (البته اگر تکرار ارقام مجاز باشد).

الف) $\underline{۴}\ \underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۵} \rightarrow ۴\times۵\times۵\times۵=۵۰۰$

ب) بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی $\rightarrow (۴۴۴۴)_۵$ (با تکرار ارقام)

بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی $\rightarrow (۴۳۲۱)_۵$ (بدون تکرار ارقام)

ج) کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی $\rightarrow (۱۰۲۳)_۵$ (بدون تکرار ارقام)

کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی $\rightarrow (۱۰۰۰)_۵$ (با تکرار ارقام)

مسئله‌ی۵. اگر نمایش عدد $(۱۴۵)_x$ در مبنای ۱۰ عدد ۱۰۱ باشد، مقدار x را بیابید.

حل: $(۱۴۵)_x=۱۰۱ \Rightarrow ۱\times x^۲+۴\times x+۵=۱۰۱$

$\Rightarrow x^۲+۴x-۹۶=۰ \Rightarrow x=۸$

مسئله‌ی۶. ثابت کنید اگر عدد $\overline{a۵}\times\overline{b۵}$ به ۲۵ ختم شود، آن‌گاه $(a+b)=۲k$.

اثبات:

$\overline{a۵}\times\overline{ba}=(۱۰a+۵)\times(۱۰b+۵)=۱۰۰ab+۵۰(a+b)+۲۵$

برای این‌که عدد فوق به ۲۵ ختم شود، باید (a+b) زوج باشد تا حاصل $۱۰۰ab+۵۰(a+b)$ به دو صفر ختم شود.

در قسمت آخر می‌خواهیم عدد A را از مبنای غیر از ۱۰ به مبنای غیر از ۱۰ ببریم. برای این کار، راه معمول این است که ابتدا عدد A را از مبنای مثلاً b به مبنای ۱۰ و سپس عدد حاصل در مبنای ۱۰ را با تقسیمات متوالی به مبنای c ببریم.

مثال: می‌خواهیم عدد $(۲۱۳)_۵$ را در مبنای ۷ نمایش دهیم. به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$(۲۱۳)_۵=۲\times۵^۲+۱\times۵+۳=۵۸$

$$\begin{array}{r|l} ۵۸ & ۷ \\ \hline ۲ & ۸ \;|\; ۷ \\ & ۱ \quad ۱ \end{array}$$

$۵۸=(۱۱۲)_۷$

$(۲۱۳)_۵=(۱۱۲)_۷$

نکته‌ی جالب

هرگاه بخواهیم عددی را از مبنای b به مبنای b^k ببریم، در این صورت به ترتیب هر k رقم از راست در مبنای b، یک رقم از راست در مبنای b^k است و برعکس، هر ۱ رقم از سمت راست، در یک عدد در مبنای b^k k رقم از سمت راست در همان عدد در مبنای b است.

مثال: عدد $A=(۱۰۲۱۱۲۱)_۳$ مفروض است. این عدد را در مبنای ۹ نمایش دهید. چون $۹=۳^۲$، پس هر دو رقم در عدد A، یک رقم این عدد در مبنای ۹ است.

$(۲۱)_۳=۲\times۳+۱=۷\ ,\ (۱۱)_۳=۱\times۳+۱=۴\ ,\ (۰۲)_۳=۲$

$(۱)_۳=۱ \Rightarrow (۱۰۲۱۱۲۱)_۳=(۱۲۴۷)_۹$

مثال: عدد $A=(۲۱۰۱۲۳)_۴$ مفروض است. این عدد را در مبنای ۲ بنویسید.

حل:

روش اول: با توجه به نکته‌ی قبل، هر یک رقم از عدد A، دو رقم از عدد B (عدد مورد نظر) در مبنای ۲ است. برای به دست آوردن هر دو رقم B، کافی است یک رقم نظیر در A را به مبنای ۲ ببریم (با تقسیمات متوالی).

$(۳)=(۱۱)_۲ \rightarrow \begin{array}{r|l} ۳ & ۲ \\ \hline ۱ & ۱ \end{array}$

$۲=(۱۰)_۲\ ,\ ۱=(۰۱)_۲\ ,\ ۰=(۰۰)_۲\ ,\ ۱=(۰۱)_۲\ ,\ ۲=(۱۰)_۲$

$\Rightarrow A=(۲۱۰۱۲۳)_۴=(۱۰۰۱۰۰۰۱۱۰۱۱)_۲=B$

روش دوم: عدد A را در مبنای خودش یعنی ۴ بسط می‌دهیم و بر حسب توان‌های ۲ مرتب می‌کنیم و ارقام بزرگ‌تر از ۱ را در مبنای ۲ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A &= ۲\times۴^۵+۱\times۴^۴+۰\times۴^۳+۱\times۴^۲+۲\times۴^۱+۳ \\ &= ۲\times۲^{۱۰}+۱\times۲^۸+۰\times۲^۶+۱\times۲^۴+۲\times۲^۲+۳ \\ &= (۱\times۲+۰)\times۲^{۱۰}+۱\times۲^۸+۰\times۲^۶+۱\times۲^۴+(۱\times۲+۰)\times۲^۲+(۱\times۲+۱) \\ &= ۱\times۲^{۱۱}+۰\times۲^{۱۰}+۱\times۲^۸+۰\times۲^۶+۱\times۲^۴+۱\times۲^۳+۰\times۲^۲+۱\times۲+۱ \\ &= (۱۰۰۱۰۰۰۱۱۰۱۱)_۲=B \end{aligned}$$

مثال: عددی در مبنای ۳ به صورت $A=(۲۱۱۱۲۱۱۲۱)_۳$ نوشته شده است. رقم وسط این عدد در مبنای ۲۷ را بیابید.

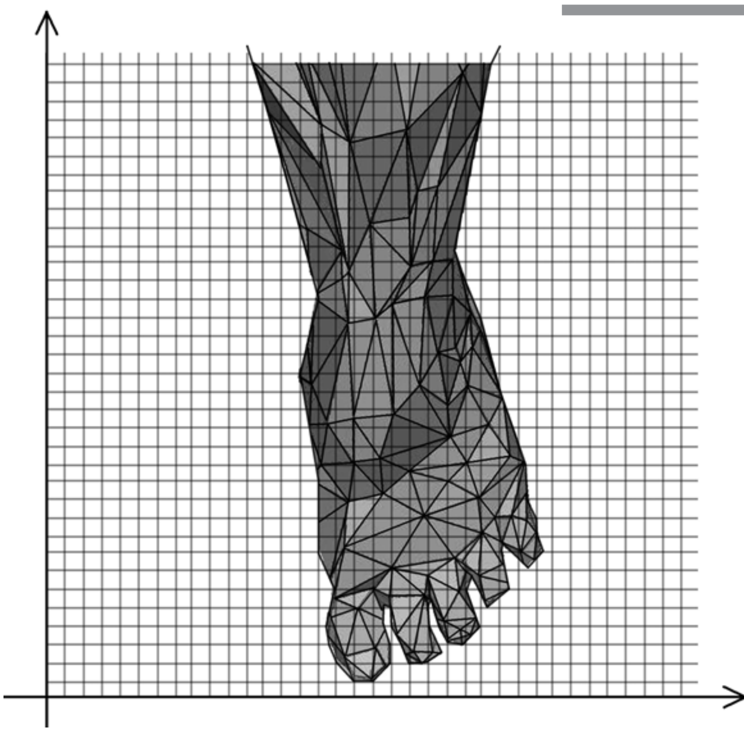
حل: چون $۲۷=۳^۳$، هر سه رقم در این عدد، یک رقم در عدد در مبنای ۲۷ است، اگر سه رقم سه رقم جدا کنیم، سه رقم دوم، رقم وسط آن عدد خواهد بود.

$$\left.\begin{array}{l} (۱۲۱)_۳=۱\times۳^۲+۲\times۳+۱=\underbrace{۱۶}_{\text{رقم وسط}} \\ (۲۱۱)_۳=۲\times۳^۲+۱\times۳+۱=\underbrace{۲۲}_{\text{رقم سمت چپ}},\ (۱۲۱)_۳=\underbrace{۱۶}_{\text{رقم سمت راست}} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow A=(۲۲-۱۶-۱۶)_{۲۷}$

محمد هاشم رستمی

۱۰



رویکرد هندسی جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره

یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

از استانداردهای موضوعی NCTM

در این شماره نیز اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه مانند «تحدید یا کوچک‌تر کردن مسئله، مسئله را حل شده فرض کردن، به کارگیری مسئله‌های خویشاوند برای حل یک مسئله، چگونگی به کارگیری مکان‌های هندسی و استفاده از روش‌های متفاوت حل یک مسئله» را مطرح می کنیم تا دانش آموزان به دیدگاه‌های جدیدی برای حل مسئله‌های هندسه دست یابند. در ضمن لازم است گفته شود، مسئله‌هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری ـ مختصاتی حل می کنیم، کلیدی هستند و از کتاب‌های درسی هندسه‌ی (۱) و هندسه‌ی (۲) انتخاب شده‌اند تا دانش‌آموزان بتوانند مسأله‌های دیگر این کتاب‌ها، هم‌چنین مسأله‌های دیگر از کتاب‌های هندسه را با استفاده از این دو رویکرد، به راحتی حل کنند.

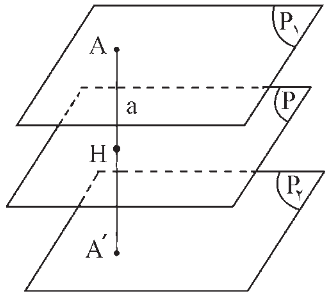
مسئله‌ی ۱۲. ثابت کنید برای هر عدد $a > 0$، مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از یک صفحه مانند P، به فاصله‌ی a قرار دارد، دو صفحه‌ی موازی P است که در دو طرف این صفحه قرار دارند و فاصله‌ی هر کدام با P برابر a است.

حل:

الف) روش هندسی

صفحه‌ی P را در نظر می گیریم. از نقطه‌ای دل‌خواه مانند H واقع بر P، خط L را عمود بر صفحه‌ی P رسم می کنیم.

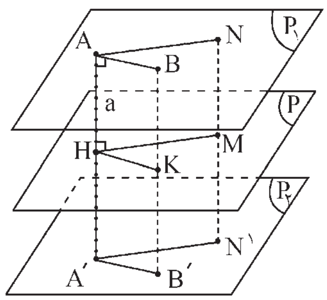
روی این خط دو پاره خط $HA = HA' = a$ را جـــدا می کنیم. از A صفحه‌ی P_1 و از A' صفحه‌ی P_2 را موازی صـفـحـه‌ی P رسم می کنیم. می‌دانیم که از هر نقطه‌ی داده شده مانند A یا A'، تنها یک صفحه به موازات صفحه‌ی مفروض می‌توان رسم کرد. پس دو صفحه‌ی P_1 و P_2 منحصر به فرد هستند.



برای این که ثابت کنیم صفحه‌های P_1 و P_2 مکان هندسی مورد نظر هستند، باید ثابت کنیم که:

الف) هر نقطه واقع بر یکی از این دو صفحه، از صفحه‌ی P به فاصله‌ی a قرار دارد.

ب) هر نقطه‌ای کـه از صفحه‌ی P به فاصلـه‌ی a قرار دارد، روی صفحه‌ی P_1 یا روی صفحه‌ی P_2 واقع است.



برای اثبات، یکـی از این دو صفحه، مثلاً صفحه‌ی P_1 را در نظر می گیریـم. روی این صفحه نقطه‌ی دل‌خواه B را اختیار می کنیم و از این نقطه، عمـود BK را بر صـفـحـه‌ی P فرود می‌آوریم. فصل مـشـتـرک صفحه‌ی AHKB با دو صفحه‌ی موازی P و P_1، خط های AB و HK هستند که با هم موازی‌اند. یعنی چهار ضلعی AHKB متـوازی‌الاضـلاع اسـت، امـا بـه دلـیـل ایـن‌کـه $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$ است، این چهار ضلعی مستطیل است. یعنی BK=AH=a

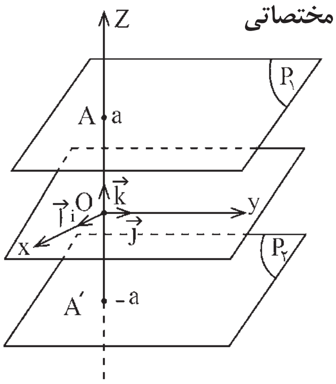
برای اثبات این مطلب، از این ویژگی نیز می‌توان استفاده کرد که پاره‌خط های موازی بین دو صفحه‌ی موازی، بـا هـم برابرند. در این مسئله AH =BK است، اما به دلیل عمود بودن BK بر P، پاره‌خط BK فاصله‌ی نقطه‌ی دل‌خواه B متعلق بـه صفحه‌ی P_1 از صفحه‌ی P است.

پس حکم الف همواره برقرار است.

برای اثبات قسمت ب، نقطه‌ی دل‌خواهی مانند M را روی صفحه‌ی P اختیار می کنیم. از این نقطه، خطی مانند D عمود بر P رسم می کنیم. روی این خط و در طرف صـفـحـه‌ی P_1، پاره خط MN =a را جدا می کنیـم. از N به A وصل می کنیم. چهار ضلعی ANMH به دلیل موازی بودن دو ضلع AH و MN که دو خط عمود بر یک صفحه‌اند و به دلیل مساوی بودن (زیرا AH=MN=a) متوازی الاضلاع و در واقع مستطیل است. پس AN موازی HM است، اما HM در صفحه‌ی P و $A \in P_1$ واقع است. پس خط AN که از A موازی HM رسم شده است، به تمامی در صـفـحـه‌ی P_1 قرار می گـیـرد (بنا به مطالـب کـتـاب درسی). در نتیجه، N روی صفحه‌ی P_1 قرار دارد. پس حکم ب مسئله نیز برقرار است. بنابراین، صفحـه‌ی P_1 یک مکـان هندسی نقطه‌هـایی است کـه از P به فاصـلـه‌ی a قرار دارنـد. هم‌چنین ویژگی برای صفحه‌ی P_2 نیز برقرار است. پس حکم مسئله درست است.

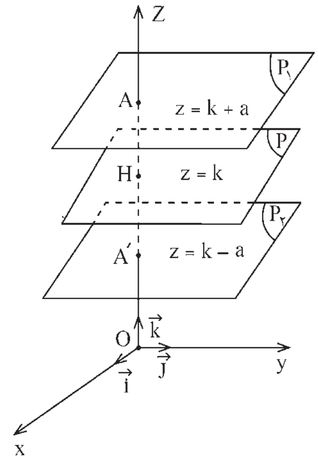
ب) حل با روش جبری ـ مختصاتی

دستگـاه مـخـتـصـات قـائـم o - xyz در فضا را چنان اختیار می کنیـم کـه P، صفحه‌ی xoy باشد. در این صورت، معادله‌ی صـفـحـه‌ی P به صـورت $z = 0$ اسـت. مـعـادلـه‌ی صفحه‌هایی که موازی صفحه‌ی P و به فاصله‌ی $a > 0$ از این صفحه قـرار دارنـد، بـه صـورت $P_1:\ z = a$ و $P_2:\ z = -a$ است. بدیهی است، هر نقطه‌ی واقع در یکی از این دو صفحه، به فاصلـه‌ی a از صفـحـه‌ی P قرار دارد و هر نقطـه‌ای کـه از صفحه‌ی P به فاصلـه‌ی a واقع است، در یکی از صفحه‌هـای P_1 یا P_2 قرار دارد.



نکته۱. معادله‌ی هر خم در هر دستگاه مختصات، رابطه‌ای است که بین مختصات هر نقطه از آن خـم در آن دستگاه مختصـات بـرقـرار اسـت. بـه قـسـمـی کـه مختصات هر نقطه از آن خم، در آن معادله صدق کنـد و هر نقطه‌ای که مختصاتش در آن معادله صدق کنـد، روی آن خم قرار داشته باشد.

نکته۲. اگر دستگاه مختصات قائم در فضـا را چـنـان اختیار کنیـم کـه صفـحـه‌ی P با یکی از صـفـحـه‌هـای مختـصـات، مـثـلاً با صـفـحـه‌ی xoy موازی بـاشـد، معادلـه‌ای بـه‌صـورت z=k پیدا خـواهـد کـرد. در ایـن صورت، صفحه‌های P_1 و P_2 به معادله‌هـای z=k+a و z=k-a خواهند بود.



نکته۳. اگر دستگاه مختصات قائم O-xyz در فضا را چنان اختیار کنیم که صفحه‌ی P با هیچ یک از صفحه‌های مختصات موازی نباشد، صفحه‌ی P به معادله‌ی $P:\ a'_۱x + b'_۱y + c'_۱z + d_۱ = ۰$ خواهد بود. در این صورت، اگر M=(x,y,z) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی معلوم a قرار دارد، خواهیم داشت:

$$a = \frac{|a_۱x + b_۱y + c_۱z + d_۱|}{\sqrt{a_۱^۲ + b_۱^۲ + c_۱^۲}}$$

$$\Rightarrow |a_۱x + b_۱y + c_۱z + d_۱| = a\sqrt{a_۱^۲ + b_۱^۲ + c_۱^۲}$$

$$P_۱:\ a_۱x + b_۱y + c_۱z + d_۱ - a\sqrt{a_۱^۲ + b_۱^۲ + c_۱^۲} = ۰ \quad (۱)$$

$$P_۲:\ a_۱x + b_۱y + c_۱z + d_۱ + a\sqrt{a_۱^۲ + b_۱^۲ + c_۱^۲} = ۰ \quad (۲)$$

به‌طوری که دیده می‌شود، $P_۱$ و $P_۲$ دو صفحه‌اند که با صفحه‌ی P موازی‌اند، زیرا معادله‌های (۱) و (۲)، دو معادله‌ی درجه‌ی اول نسبت به x، y و z هستند و بردار قائم این صفحه‌ها نیز یکی است. $\vec{N}_p = \vec{N}_{p_۱} = \vec{N}_{p_۲} = (a_۱, b_۱, c_۱)$. پس حکم مسئله درست است.

اینک به چند مثال توجه کنید:

مثال۱. معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از صفحه‌ی $P:\ z = ۰$ به فاصله‌ی ۴ قرار دارد.

حل: صفحه‌ی P منطبق بر صفحه‌ی xoy است. پس صفحه‌های جواب مسئله $P_۱: z = ۴$ و $P_۲: z = -۴$ است. با استفاده از دستور کلی فاصله‌ی نقطه از صفحه نیز می‌توان معادله‌ی صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ را به دست آورد. زیرا اگر M=(x,y,z) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ قرار دارد، خواهیم داشت:

$$۴ = \frac{|z|}{\sqrt{۰+۰+۱}} \Rightarrow ۴ = \frac{|z|}{۱} \Rightarrow |z| = ۴ \Rightarrow$$

$$P_۱:\ z = ۴\ ,\ \ P_۲:\ z = -۴$$

مثال۲. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌ای که از صفحه‌ی $P:\ ۲x + y - ۲z + ۳ = ۰$ به فاصله‌ی ۷ قرار دارد، دو صفحه‌ی موازی P در دو طرف آن و هر یک به فاصله‌ی ۷ از صفحه‌ی P است.

حل: فرض می‌کنیم M=(x,y,z) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۷ واقع است. در این صورت داریم:

$$۷ = \frac{|۲x + y - ۲z + ۳|}{\sqrt{۴+۱+۴} = ۳} \Rightarrow |۲x + y - ۲z + ۳| = ۲۱$$

$$\Rightarrow P_۱:\ ۲x + y - ۲z + ۳ = ۲۱ \Rightarrow P_۱:\ ۲x + y - ۲z - ۱۸ = ۰$$

$$P_۲:\ ۲x + y - ۲z + ۳ = -۲۱ \Rightarrow P_۲:\ ۲x + y - ۲z + ۲۴ = ۰$$

به‌طوری که دیده می‌شود $P_۱$ و $P_۲$ دو صفحه‌اند که با صفحه‌ی P موازی‌اند، زیرا بردار نرمال آن‌ها $\vec{V} = (۲, ۱, -۲)$ است. به سادگی می‌توان ثابت کرد که این دو صفحه، در دو طرف صفحه‌ی P واقع‌اند، زیرا اگر معادله‌ی صفحه‌ی P را به صورت $p(x,y) = ۲x + y - ۲z + ۳ = ۰$ بگیریم، برای دو نقطه‌ی $M_۱ \in P_۱$ و $M_۲ \in P_۲$ باید $P(M_۱)$ و $P(M_۲)$ مختلف‌العلامت باشند. بررسی می‌کنیم:

$$M_۱ = (۰, ۰, -۹) \in P_۱$$
$$\Rightarrow P(M_۱) = P(۰, ۰, -۹) = ۰ + ۰ + ۱۸ + ۳ = ۲۱ > ۰$$

$$M_۲ = (۰, ۰, ۱۲) \in P_۲$$
$$\Rightarrow P(M_۲) = P(۰, ۰, ۱۲) = ۰ + ۰ + -۲۴ + ۳ = -۲۱ < ۰$$

پس، دو صفحه‌ی $P_۱$ و $P_۲$ در دو طرف صفحه‌ی P قرار دارند.

مثال۳. نقطه‌ای روی خط $\Delta: \frac{x}{۲} = \frac{y}{-۱} = \frac{z+۲}{۳}$ بیابید که از صفحه‌ی P به معادله‌ی $P(x,y) = x + ۲y + ۲z - ۵ = ۰$ به فاصله‌ی ۵ باشد.

حل: می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۵ قرار دارد، دو صفحه موازی P به فاصله‌ی ۵ از آن است (بنابر مسئله‌ی ۱۲). بنابراین، معادله‌ی این دو صفحه را به دست می‌آوریم و نقطه‌های برخورد خط Δ با این دو

صفحه را که دو نقطه‌ی جواب مسئله (در صورت وجود جواب) هستند، به‌دست می‌آوریم. داریم:

$P:\ x+2y+2z-5=0\ ,\ M=(x,y,z)\in$ مکان هندسی مورد نظر

$$\Rightarrow 5=\frac{|x+2y+2z-5|}{\sqrt{1+4+4}}=|x+2y+2z-5|=15$$

$$\Rightarrow P_1:\ x+2y+2z-5=15\Rightarrow P_1:\ x+2y+2z-20=0$$

$$P_2:\ x+2y+2z-5=-15\Rightarrow P_2:\ x+2y+2z+10=0$$

$$\begin{array}{l}\Delta:\\ P_1:\end{array}\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}=t\\ x+2y+2z-20=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=2t\ ,\ y=-t\ ,\ z=3t-2$$
$$\Rightarrow 2t-2t+6t-4-20=0$$
$$\Rightarrow t=4\Rightarrow M_1=(8,-4,10)$$

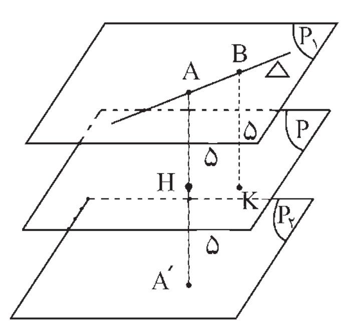
$$\begin{array}{l}\Delta:\\ P_2:\end{array}\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}=t\\ x+2y+2z+10=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=2t\ ,\ y=-t\ ,\ z=3t-2$$
$$\Rightarrow 2t-2t+6t-4+10=0$$
$$\Rightarrow t=-1\Rightarrow M_2=(-2,1,-5)$$

نکته‌ی مهم: برای بحث در وجود جواب برای مسئله، باید به این نکته توجه کنیم که خط Δ نسبت به صفحه‌های P_1 و P_2 چه وضعی دارد؟ یکی از سه حالت زیر می‌تواند پیش آید:

الف) خط Δ غیرموازی با صفحه‌های P_1 و P_2 باشد. در این صورت، Δ هر یک از صفحه‌های P_1 و P_2 را در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین، ۲ نقطه‌ی جواب مسئله وجود دارد.

ب) خط Δ موازی صفحه‌های P_1 و P_2 باشد و روی هیچ یک از این دو صفحه قرار نداشته باشد. در



این صورت، مسئله جواب ندارد. یعنی هیچ نقطه‌ای روی Δ نمی‌توان یافت که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۵ (عدد داده شده) باشد.

پ) خط Δ روی یکی از صفحه‌های P_1 یا P_2 قرار گیرد. در این صورت، مسئله بی‌شمار جواب دارد. زیرا در این حالت هر نقطه‌ای واقع بر خط Δ، از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۵ واقع است. زیرا این نقطه روی صفحه‌ی P_1 یا صفحه‌ی P_2 است.

شما می‌توانید مسئله‌هایی با این ویژگی برای حالت‌های ب و پ طرح و حل کنید.

مثال۴. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی $\Gamma: 2x-y-2z+1=0$ را تعیین کنید که از صفحه‌ی $P:\ 7x+24y-25=0$ به فاصله‌ی ۴ قرار دارد.

حل: فصل مشترک صفحه‌ی (Γ) با صفحه‌های P_1 و P_2 که مکان هندسی نقطه‌هایی هستند که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ قرار دارند، جواب مسئله است. به بیان دیگر، مکان هندسی نقطه‌هایی که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ واقع‌اند، دو صفحه‌ی P_1 و P_2 موازی صفحه‌ی P و در دو طرف آن و به فاصله‌ی ۴ از آن است (بنا به مسئله ۱۲). پس معادله‌ی این دو صفحه را می‌نویسیم و فصل مشترک هر یک از این دو صفحه با صفحه‌ی (Γ) را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود) داریم:

$P:\ 7x+24y-25=0\quad M=(x,y,z)\in$ مکان هندسی داده شده

$$\Rightarrow 4=\frac{|7x+24y-25|}{\sqrt{49+576}}\Rightarrow|7x+24y-25|=100$$

$$P:\ vx+24y-125=0$$

$$P_2:\ 7x+24y+75=0$$

$$\begin{array}{l}P_1:\\ \Gamma:\end{array}\begin{cases}7x+24y-125=0\\ 2x-2y-z+1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}7x+24y-125=0\\ 24x-24y-12z+12=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 31x-12z-113=0\Rightarrow x=\frac{z+\frac{113}{12}}{\frac{31}{12}}\quad(1)$$

$$7x+24y-125=0\Rightarrow x=\frac{y-\frac{125}{24}}{-\frac{7}{24}}\quad(2)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow L_۱:\ x = \frac{y - \frac{۱۲۵}{۲۴}}{-\frac{۷}{۲۴}} = \frac{z + \frac{۱۱۳}{۱۲}}{\frac{۳۱}{۱۲}}$$

یا :

$$\frac{x}{۲۴} = \frac{y - \frac{۱۲۵}{۲۴}}{-۷} = \frac{z + \frac{۱۱۳}{۱۲}}{۶۲}$$

$$\begin{aligned} P_۲&: \begin{cases} ۷x + ۲۴y + ۷۵ = ۰ \\ ۲x - ۲y - z + ۱ = ۰ \end{cases} \\ \Gamma&: \end{aligned}$$

$$(P_۲) + ۱۲(\Gamma) = ۰ \Rightarrow ۳۱x - ۱۲z + ۸۷ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{z - \frac{۲۹}{۴}}{\frac{۳۱}{۱۲}} \quad و \quad x = \frac{y + \frac{۲۵}{۸}}{\frac{۷}{-۲۴}}$$

$$\Rightarrow L_۲:\ x = \frac{y + \frac{۲۵}{۸}}{-\frac{۷}{۲۴}} = \frac{z - \frac{۲۹}{۴}}{\frac{۳۱}{۱۲}}$$

یا :

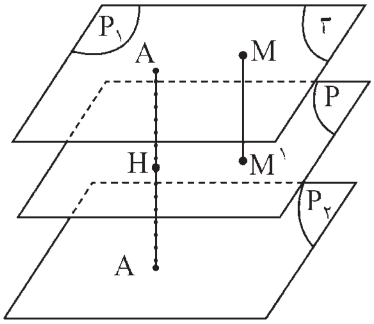
$$\Rightarrow L_۲:\ \frac{x}{۲۴} = \frac{y + \frac{۲۵}{۸}}{-۷} = \frac{z - \frac{۲۹}{۴}}{۶۲}$$

به‌طوری که دیده می‌شود، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ جواب مسئله‌اند.

بحث وجود جواب برای مسئله، همانند مثال قبلی است؛ با این تفاوت که اگر در این مثال، وضع صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ با صفحه‌ی (Γ) را بررسی کنیم، سه حالت پیش می‌آید:

الف) اگر صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ با صفحه‌های Γ موازی نباشند (همانند مثال حل شده)، دو خط راست مانند $L_۱$ و $L_۲$ جواب مسئله‌اند؛ زیرا صفحه‌ی Γ با صفحه‌ی $P_۱$ در فصل مشترک $L_۱$ و با صفحه‌ی $P_۲$ در فصل مشترک $L_۲$ متقاطع است.

ب) اگر صفحه‌ی (Γ) با صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ موازی باشد (هیچ نقطه‌ی مشترکی با این دو صفحه نداشته باشد)، مسئله جواب ندارد. یعنی هیچ نقطه‌ای روی صفحه‌ی Γ نمی‌توان یافت که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ باشد.



پ) اگر صفحه‌ی Γ بر یکی از صفحه‌های $P_۱$ یا $P_۲$ منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا در این حالت، هر خط از صفحه‌ی Γ چون روی صفحه‌ی $P_۱$ یا روی صفحه‌ی $P_۲$ واقع است، از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ قرار دارد.

> **نکته‌ی مهم:** همان‌طور که می‌بینید، مسئله‌ی ۱۲ به عنوان مسئله‌ای کلیدی، برای حل مسئله‌های زیادی کاربرد دارد. یک نمونه‌ی دیگر از کاربرد این مسئله را در زیر می‌آوریم. شما خودتان مسئله‌های دیگری طرح کنید که برای حل آن‌ها از مسئله‌ی ۱۲ استفاده شود.

مثال۵. دو نقطه‌ی $A = (۱,-۱,۲)$ $B = (۰,۱,۱)$ و صفحه‌ی P به معادله‌ی زیر داده شده‌اند. مجموعه‌ی نقطه‌هایی از فضا را بیابید که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۶ و از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشند.

$$P: x + y - ۳z + ۵ = ۰$$

حل: صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB را Q می‌نامیم و معادله‌ی آن را می‌نویسیم، زیرا مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی ثابت A و B به یک فاصله است، صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB است. سپس معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا را که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی معلوم ۶ هستند، به دست می‌آوریم (بنابر مسئله‌ی ۱۲). می‌دانیم که این مکان هندسی، دو صفحه‌ی $P_۱$ و $P_۲$ موازی P و به فاصله‌ی ۶ از صفحه‌ی P است. آن‌گاه فصل مشترک صفحه‌ی Q با صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ را به‌دست می‌آوریم. محاسبات را خودتان انجام دهید و درباره‌ی وجود جواب برای مسئله نیز بحث کنید.

یک عمل تقسیم جالب

سعی کنید این عمل تقسیم را حل کرده و اعداد واقعی را در محل‌های مربوطه قرار دهید.

از جالب بودن این عمل اینکه هیچ اطلاعی از اعداد مقسوم علیه نداریم و از خارج قسمت فقط یک عدد ۸ را داریم و ازمقسوم هم هیچ عددی معلوم نیست.

با کمی صبر و حوصله حتماً موفق خواهید شد.

```
************ |___________
***          | *****۸**
-----
  ***
  ***
  -----
   ***
   ***
   -----
      **
      **
      -----
       ***
       ***
       -----
       ۰۰۰
```

میرشهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال دوم ۲

تابع چندجمله‌ای

اشاره

در شماره‌ی قبل به معرفی چندجمله‌ای و تابع چندجمله‌ای پرداختیم، در این شماره رسم توابع چندجمله‌ای را از طریق انتقال منحنی‌ها بررسی می کنیم.

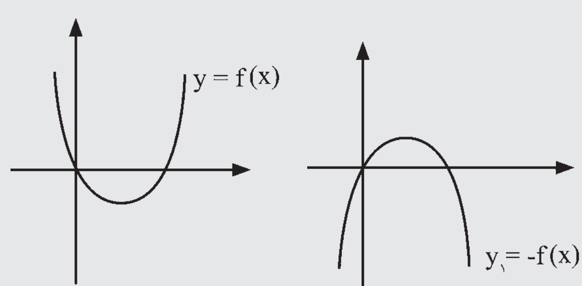
تغییرات و انتقال منحنی‌ها

۱. رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y_1 = -f(x)$

اگر نقطه‌ی $M\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$، نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\begin{vmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{vmatrix}$، نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله‌ی $y_1 = -f(x)$ است و برعکس:

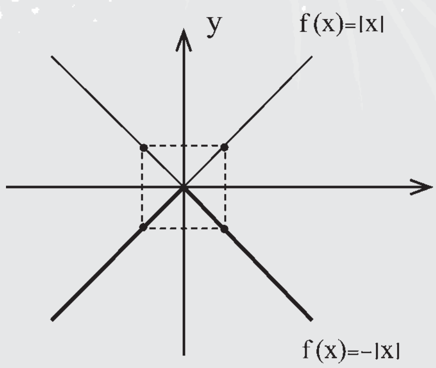
اگر $M' \in y_1 \Rightarrow -y_0 = -f(x_0) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow M\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} \in f$

چون دو نقطه‌ی $M\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ و $M'\begin{vmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{vmatrix}$ نسبت به محور xها قرینه‌ی یکدیگر هستند، در نتیجه برای رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y_1 = -f(x)$ باید قرینه‌ی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم. در شکل‌های زیر، نمودارهای دو تابع $y = f(x)$ و $y_1 = -f(x)$ نشان داده شده‌اند.



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x|$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار این تابع، کافی است قرینه‌ی نمودار تابع قدر مطلق را نسبت به محور xها رسم کنیم.

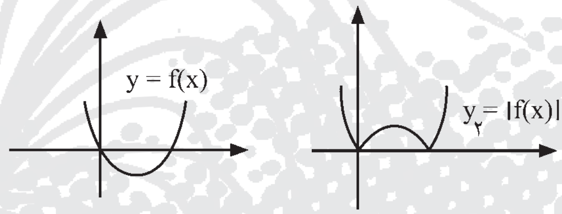


نمودار $f(x) = -|x|$، زاویه‌ی قائمه‌ای است که رأس آن بر مبدأ قرار دارد و دو ضلع آن، نیم‌سازهای ربع‌های سوم و چهارم محورهای مختصات هستند.

۲. رسم تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$

اگر نقطه‌ی $M'\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\begin{vmatrix} x_0 \\ |y_0| \end{vmatrix}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$ قرار دارد.

چنان‌چه منحنی تابع f به معادله‌ی $y = f(x)$ تماماً بالا یا روی محور xها باشد، آن‌گاه نمودار تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$ نیز همان نمودار تابع f است. و اگر قسمتی یا تمام منحنی تابع f در زیر محور xها باشد، برای رسم تابع به معادله‌ی $y_2 = |f(x)|$ باید قرینه‌ی این قسمت از منحنی را نسبت به محور xها رسم کنیم.

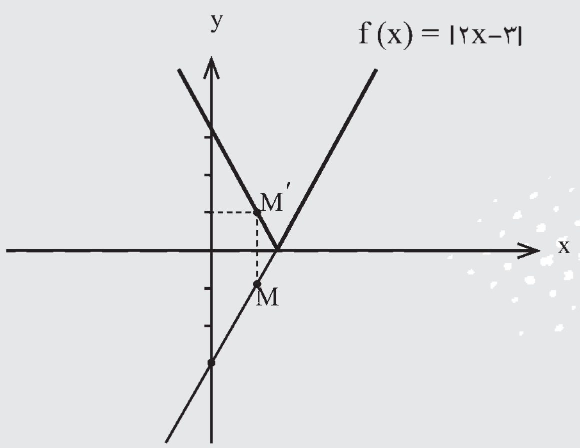


مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x - 3|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار خط به معادله‌ی $f(x) = 2x - 3$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینه‌ی قسمتی از خط را که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها به دست می‌آوریم.

$f(x) = 2x - 3$;

x	0	1
y	−3	−1



۳. رسم تابع به معادله‌ی $y_3 = f(x - a)$

اگر نقطه‌ی $M\Big|^{x_0}_{y_0}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\Big|^{x_0 + a}_{y_0}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_3 = f(x - a)$ قرار دارد و برعکس:

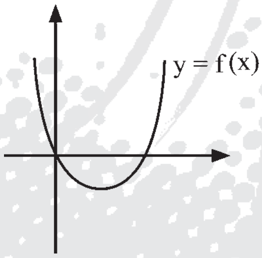
اگر $M'\Big|^{x_0 + a}_{y_0} \in y_3 \Rightarrow y_0 = f(x_0 + a - a)$

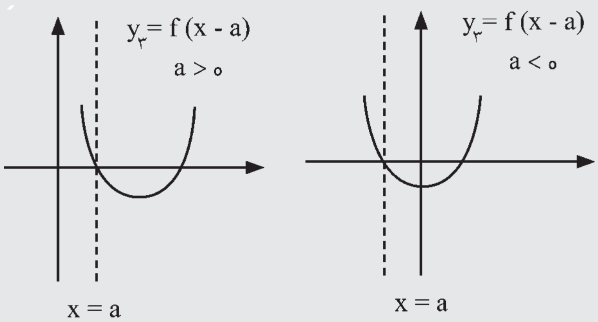
$\Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow M\Big|^{x_0}_{y_0} \in f$

پس می‌توان گفت، هر نقطه به طول x_0 واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر عرض) در منحنی به معادله‌ی $y_3 = f(x - a)$ به نقطه‌ای به طول $(x_0 + a)$ تبدیل می‌شود.

بنابراین، برای رسم تابع به معادله‌ی $y_3 = f(x - a)$ کافی است کلیه‌ی نقاط منحنی تابع f را به اندازه‌ی $x = a$ در راستای محور xها تغییر مکان دهیم.

اگر $a > 0$، آن‌گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه‌ی $x = a$ به سمت راست محور xها انتقال می‌یابد و اگر $a < 0$، آن‌گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه‌ی $x = a$ به سمت چپ محور xها انتقال می‌یابد.





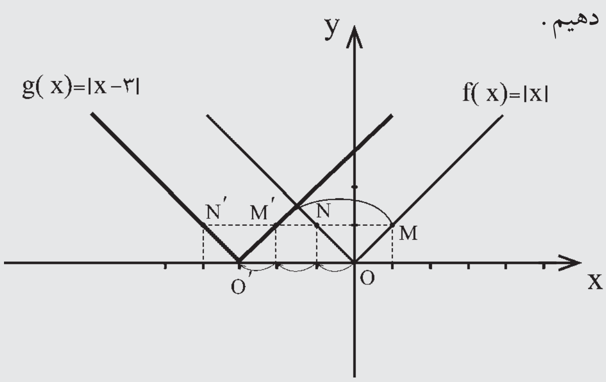
مثال: با کمک نمودار $f(x) = |x|$ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱) $g(x) = |x + 3|$

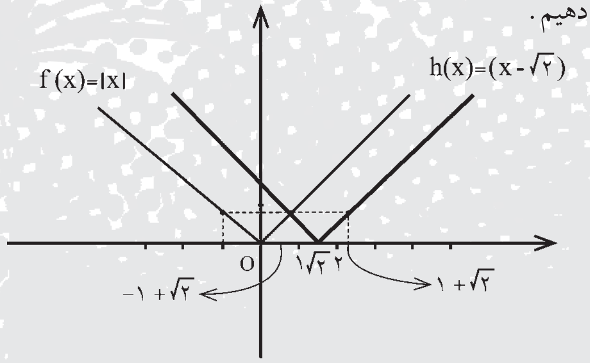
۲) $h(x) = |x - \sqrt{2}|$

حل:

۱. برای رسم نمودار g(x) کافی است نمودار تابع قدر مطلق را به اندازه‌ی سه واحد به سمت چپ محور xها انتقال دهیم.



۲ . برای رسم نمودار h(x) کافی است نمودار تابع قدر مطلق را به اندازه‌ی $\sqrt{۲}$ واحد به سمت راست محور xها انتقال دهیم.



۴. رسم تابع به معادله‌ی $y_۴ = b + f(x)$

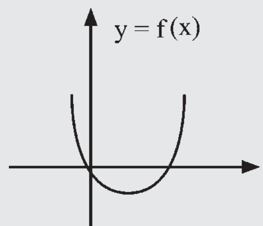
اگر نقطه‌ی $M\left|\begin{matrix}x_\circ\\ y_\circ\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\left|\begin{matrix}x_\circ\\ b+y_\circ\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_۴ = b + f(x)$ قرار دارد و برعکس:

اگر $M'\left|\begin{matrix}x_\circ\\ b+y_\circ\end{matrix}\right. \in y_۴ \Rightarrow b + y_\circ = b + f(x_\circ)$

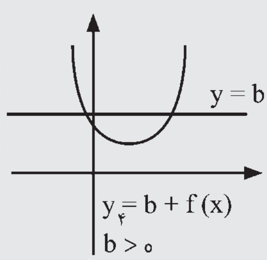
$$\Rightarrow y_\circ = f(x_\circ) \Rightarrow M\left|\begin{matrix}x_\circ\\ y_\circ\end{matrix}\right. \in f$$

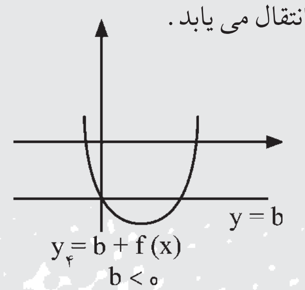
پس هر نقطه به عرض $y_\circ$ واقع بر منحنی تابع f(بدون تغییر طول) در منحنی به معادله‌ی $y_۴ = b + f(x)$، به عرض $b + y_\circ$ تبدیل می‌شود.

در نتیجه، برای رسم تابع به معادله‌ی $y_۴ = b + f(x)$ کافی است کلیه‌ی نقاط منحنی تابع f را به اندازه‌ی y=b در راستای محور yها تغییر مکان دهیم.



اگر $b > \circ$، آن‌گاه هر نقطه از منحنی تابع fبه اندازه‌ی y=b به طرف بالای محور yها انتقال می‌یابد و اگر $b < \circ$، آن‌گاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه‌ی y=b به طرف پایین محور yها انتقال می‌یابد.





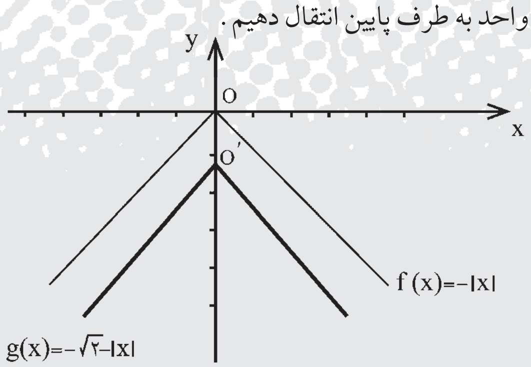
مثال: با استفاده از نمودار $f(x) = -|x|$، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱) $g(x) = -\sqrt{۲} - |x|$

۲) $h(x) = \left|۲ - |x|\right|$

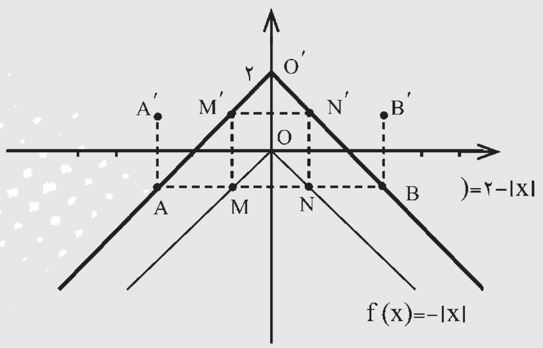
حل:

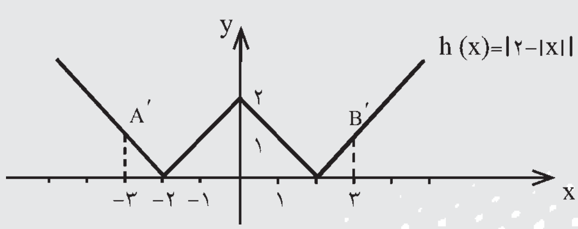
۱ . برای رسم نمودار g(x)کافی است نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x|$ را در راستای محور yها به اندازه‌ی $\sqrt{۲}$ واحد به طرف پایین انتقال دهیم.



با توجه به نمودار تابع g(x) ملاحظه می‌کنیم که $Rg = \left[-\infty, -\sqrt{۲}\right]$

۲ . برای رسم نمودار h(x)، ابتدا نمودار تابع با ضابطه‌ی $h_۱(x) = ۲ - |x|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار کافی است نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x|$ را در راستای محور yها به اندازه‌ی دو واحد به طرف بالا انتقال دهیم، سپس برای رسم h(x) باید قسمت‌هایی از نمودار $h_۱(x)$ را که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها قرینه کنیم.





برای این که قرینه‌ی قسمتی از نمودار زیر محور xها را برای تابع $h_1(x)$ پیدا کنیم، دو نقطه مانند A,B روی آن در نظر گرفتیم سپس قرینه‌ی آن‌ها را نسبت به محور xها A' و B' نامیدیم و برای رسم نمودار تابع $h(x)$، از دو نقطه‌ی A' و B' استفاده کردیم.

۵. رسم تابع به معادله‌ی $y_5 = b + f(x-a)$

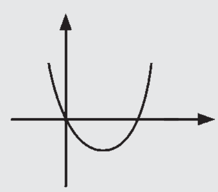
در حقیقت، رسم این تابع ترکیبی از رسم دو تابع به معادلات $y_3 = f(x-a)$ و $y_4 = b + f(x)$ است.

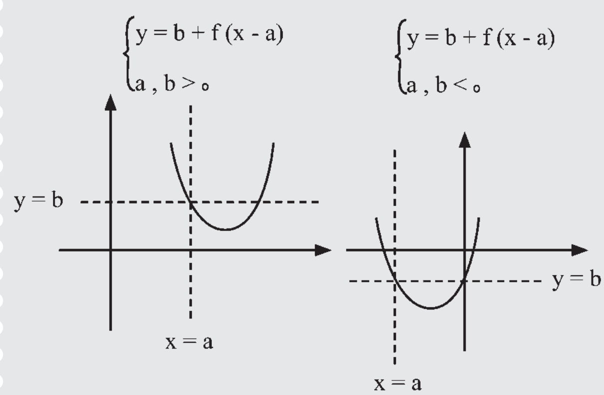
اگر نقطه‌ی $M\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\left|\begin{matrix} x_0 + a \\ y_0 + b \end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_5 = b + f(x-a)$ واقع است و برعکس:

$$\text{اگر } M'\left|\begin{matrix} x_0 + a \\ y_0 + b \end{matrix}\right. \in y_5 \Rightarrow y_0 + b = b + f(x_0 + a - a)$$

$$\Rightarrow y_0 = f(x_0) \underset{y=f(x)}{\Rightarrow} M\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right. \in f$$

بنابراین، برای رسم نمودار این معادله کافی است، هر نقطه از منحنی تابع f را به اندازه‌ی a در راستای محور xها و به اندازه‌ی b در راستای محور yها انتقال دهیم.





مثال: با توجه به نمودار توابع $y=|x|$ و $y=x^۲$، نمودار توابع زیر را رسم و سپس دامنه و برد هر کدام را محاسبه کنید.

۱) $f(x) = |x-۳|+۲$

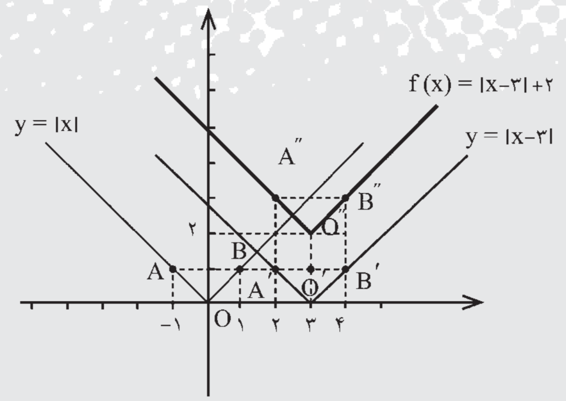
۲) $g(x) = ۳ + (x - \frac{۳}{۲})^۲$

حل:

۱. برای رسم نمودار $f(x)$، ابتدا نمودار تابع قدر مطلق را رسم می‌کنیم. سپس در مرحله‌ی اول این نمودار را در راستای محور xها به اندازه‌ی سه واحد به طرف راست منتقل می‌کنیم. در مرحله‌ی دوم، نمودار به دست آمده را در راستای محور yها به اندازه‌ی دو واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم.

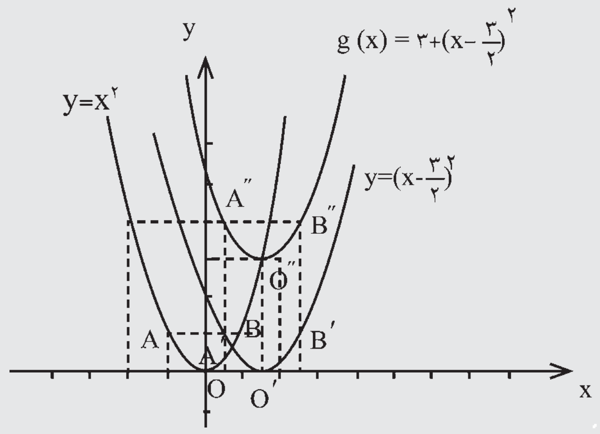
با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم:

$D_f = \mathbb{R}\ ,\ R_f = [۲, +\infty)$



۲. برای رسم نمودار تابع $g(x)$، ابتدا نمودار سهمی $y=x^۲$ را رسم می‌کنیم. سپس در مرحله‌ی اول، این نمودار را در راستای محور xها به اندازه‌ی $\frac{۳}{۲}$ واحد به طرف راست و در مرحله‌ی دوم نمودار به دست آمده را در راستای محور yها به اندازه‌ی ۳ واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم.

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
$y=x^۲$	۴	۱	۰	۱	۴



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می کنیم که:

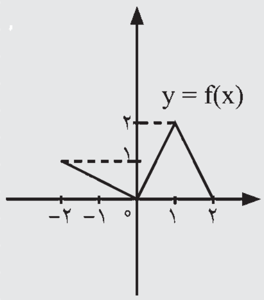
$D_g = \mathbb{R} \ , \ R_g = [۳,+\infty)$

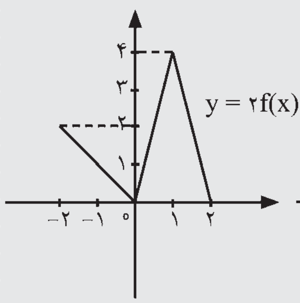
۶. رسم نمودار تابع به معادله‌ی $y_۶ = kf(x)$

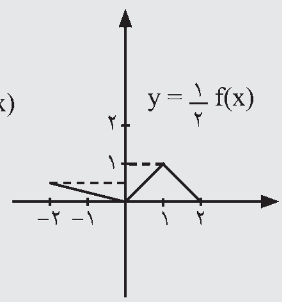
اگر نقطه‌ی $M\Big|_{y_\circ}^{x_\circ}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M'\Big|_{ky_\circ}^{x_\circ}$ روی منحنی تابع به معادله‌ی $y_۶ = kf(x)$ است و برعکس:

اگر $M'\Big|_{ky_\circ}^{x_\circ} \in y_۶ \Rightarrow ky_\circ = kf(x_\circ) \Rightarrow y_\circ = f(x_\circ) \Rightarrow M\Big|_{y_\circ}^{x_\circ} \in f$

پس برای رسم تابع به معادله‌ی $y_۶ = kf(x)$ باید عرض هر نقطه از منحنی تابع f را (با حفظ طول آن) در عدد k ضرب کنیم.







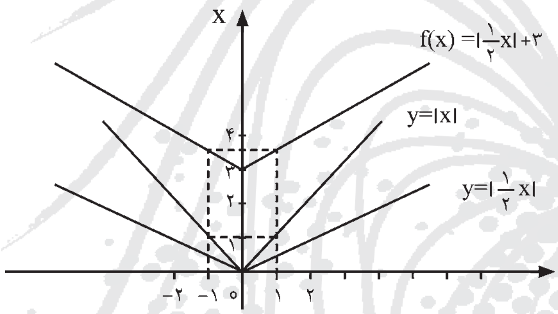
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = \left|\frac{۱}{۲}x\right| + ۳$

۲) $g(x) = ۲(x-۱)^۲ + ۳$

حل:

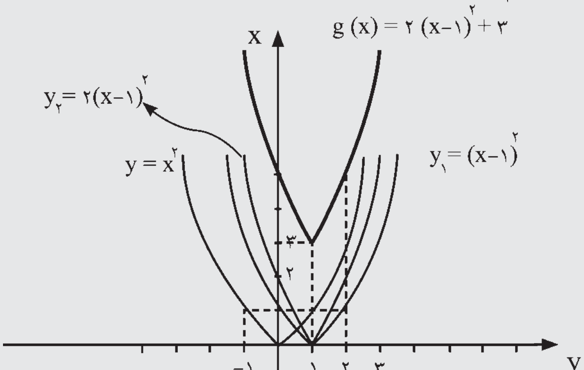
۱. برای رسم نمودار $f(x)$، در مرحله‌ی اول نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x|$ را رسم می‌کنیم. در مرحله‌ی دوم عرض هر نقطه روی نمودار $f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_۱ = \frac{۱}{۲}|x|$ به دست آید. در مرحله‌ی سوم، عرض هر نقطه روی نمودار $y_۱$ را در راستای محور yها به اندازه‌ی سه واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $f(x)$ به دست آید.



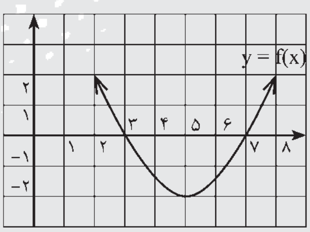
با توجه به نمودار تابع $f(x)$ داریم:

$D_f = \mathbb{R} \ , \ R_f = [۳,+\infty)$

۲. برای رسم نمودار $g(x)$، در مرحله‌ی اول نمودار سهمی $y = x^۲$ را رسم می‌کنیم. در مرحله‌ی دوم، سهمی را به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست محور xها انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_۱ = (x-۱)^۲$ به دست آید. در مرحله‌ی سوم، عرض هر نقطه روی نمودار $y_۱$ را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_۲ = ۲(x-۱)^۲$ به دست آید. در مرحله‌ی چهارم، ، عرض هر نقطه روی نمودار $y_۲$ را درراستای محور yها به اندازه‌ی ۳ واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $g(x)$به دست آید.



مثال: از روی نمودار زیر، معادله‌ی تابع $f(x)$ را بنویسید.



حل:

مرحله‌ی اول:

$y_۱ = x^۲$

مرحله‌ی دوم:

$y_۲ = (x-۵)^۲$

مرحله‌ی سوم:

$y_۳ = \frac{۱}{۲}(x-۵)^۲$

مرحله‌ی چهارم:

$f(x) = \frac{۱}{۲}(x-۵)^۲ - ۲$

● احسان یارمحمدی

تابع رونسکی

اشاره

جوزف ماریا هوئن رونسکی[1] فیلسوف مسیحی‌دان اهل لهستان (۲۳ آگوست ۱۷۷۸ تا ۸ آگوست ۱۸۵۳)، کسی که روی رشته‌های زیادی از دانش، نه فقط مانند فیلسوف، بلکه مانند ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، حقوق‌دان و اقتصاددان کار کرد، ابداع کننده‌ی تابع رونسکی است که برای حل معادلات دیفرانسیل کاربرد دارد. از آن‌جا که طی عملیات محاسبه‌ی تابع رونسکی با مفاهیم و نکاتی پیرامون مشتق‌گیری و تعیین دترمینان‌ها مواجه هستیم، لذا مطالعه‌ی این مقاله به دانش‌پژوهان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی توصیه می‌شود.

برای n تابع حقیقی $f_n(x), f_2(x), f_1(x)$ که هر یک از آن‌ها در بازه‌ی I، $n-1$ بار مشتق‌پذیر[2] هستند، تابع رونسکی شامل آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

مثال ۱. تابع رونسکی برای دو تابع $4\sin(2x)$ و $3\sin(2x)$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱. صفر
۲. $\sin^2(x) + \cos^2(x)$
۳. $\dfrac{1}{\sin(x).\cos(x)}$
۴. $3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

پاسخ: گزینه‌ی ۱، چون:

$$W(3\sin(2x), 4\sin(2x)) = \begin{vmatrix} 3\sin(2x) & 4\sin(2x) \\ \dfrac{d(3\sin(2x))}{dx} & \dfrac{d(4\sin(2x))}{dx} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3\sin(2x) & 4\sin(2x) \\ 6\cos(2x) & 8\cos(2x) \end{vmatrix}$$

$$= 3\sin(2x) \times 8\cos(2x) - 4\sin(2x) \times 6\cos(2x) = 0$$

مثال ۲. معادله‌ی خطی که در نقطه‌ای به طول $W(e^x, e^{-x})$، متعلق به خط $y - 2x - 3 = 0$ بر همین خط عمود باشد، کدام گزینه است؟ (W نشان‌دهنده‌ی تابع رونسکی است.)

۱. $y = \frac{1}{2}x + 2$
۲. $y = -\frac{1}{2} + 2$
۳. $y = \frac{1}{2}x - 2$
۴. $y = -\frac{1}{2}x - 2$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ ، چون :

$$W(e^{x},e^{-x})=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix}=e^{x}\times(-e^{-x})-e^{-x}\times e^{x}=-۱-۱=-۲$$

$$y-۲x-۳=۰\Rightarrow y=۲x+۳\xrightarrow{x=-۲}y=۲(-۲)+۳=-۱\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\end{bmatrix}$$

اکنون باید معادله‌ی خطی را بنویسیم که از نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\end{bmatrix}$ عبور کند و بر خط $y-۲x-۳=۰$ عمود باشد . در ضمن ، شیب خط مطلوب برابر $m=-\frac{۱}{۲}$ است .

بنابراین :

$$y-y_{۰}=m(x-x_{۰})\Rightarrow y-(-۱)=-\frac{۱}{۲}(x-(-۲))$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}-۲$$

مثال۳. حاصل $W(x^{۲},-۲x^{۲},۳x^{۳})$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱ . x ۲ . $x-۱$ ۳ . صفر ۴ . $x+۱$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ . چون :

$$W(x^{۲},-۲x^{۲},۳x^{۳})=\begin{vmatrix} x^{۲} & -۲x^{۲} & ۳x^{۳} \\ ۲x & -۴x & ۹x^{۲} \\ ۲ & -۴ & ۱۸x \end{vmatrix}=x^{۲}\begin{vmatrix} -۴x & ۹x^{۲} \\ -۴ & ۱۸x \end{vmatrix}-(-۲x^{۲})\begin{vmatrix} ۲x & ۹x^{۲} \\ ۲ & ۱۸x \end{vmatrix}+۳x^{۳}\begin{vmatrix} ۲x & -۴x \\ ۲ & -۴ \end{vmatrix}$$

$$=x^{۲}(-۳۶x^{۲})-(-۲x^{۲})(۱۸x^{۲})+۳x^{۳}(۰)=۰$$

تمرین: حاصل هریک از موارد زیر را به‌دست آورید .

۱ . $W(e^{x},xe^{x})$ ، پاسخ : $e^{۲x}$

۲ . $W(۱,\sin(۲x),\cos(۲x))$ ، پاسخ : -۸

۳ . $W(\sin(x),\cos(x),۲\sin(x)-\cos(x))$ ، پاسخ : صفر

۴ . $W(x^{۲},x^{۳},x^{۴})$ ، پاسخ : $۲x^{۶}$

۵ . $W(x^{-۲},x^{۲},۲-۳x)$ ، پاسخ : $۳۶x^{-۲}-۳۲x^{-۳}$

۶ . $W(x^{۳},x^{۳}+x,۲x^{۳}-۷x)$ ، پاسخ : $۴۲x$

۷ . $W(x,x-۳,۲x+۵)$ ، پاسخ : صفر

۸ . $W(۷e^{-۳x},۴e^{-۳x})$ ، پاسخ : صفر

پی‌نوشت

1. Jozef Maria Hoene-Wronski
2. Differentiable

منابع

۱ . معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها . جرج ف سیمونز ، ترجمه‌ی علی‌اکبر بابایی و ابوالقاسم میامئی . انتشارات مرکز نشر دانشگاهی . ۱۳۷۷ ش .

۲ . نگرشی بر معادلات دیفرانسیل معمولی . رابینشتاین ، آلبرت . ترجمه‌ی سعید فاریابی و محمد جلوداری ممقانی . انتشارات علمی و فنی . ۱۳۷۲ ش .

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۹ هم‌نهشتی و کاربردهای آن

معادله‌های سیاله پارامتری

اشاره

در بخش پیشین، به روش حل متداول معادله‌های سیاله پرداختیم. در این بخش سعی بر این است که حل معادله‌های سیاله‌ی پارامتری را بررسی کنیم و هم‌چنین روش حل معادله‌های سیاله چندمتغیره‌ی خطی را ارائه دهیم. در آخر، به حل و بحث این گونه معادله‌های سیاله به کمک هم‌نهشتی می‌پردازیم.

حل و بحث معادله‌های سیاله‌ی پارامتری

مثال: اگر معادله‌ی زیر، در مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) دارای جواب باشد، مقدارهای مورد قبول برای m را تعیین کنید.

$$۱۸x+my=۱۲$$

حل: با توجه به $(۱۲,۱۸)=۶$، اگر مقدار m مضربی از ۶ باشد، معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$m=۶k : ۱۸x+۶ky=۱۲ \ ; \ ۳x+ky=۲$$

معادله‌ی فوق وقتی دارای جواب است که $(۳,k)=۱$ و یا $(۳,k)=d|۲$. بدیهی است که $d=۱$ و در نتیجه همه‌ی مقادیر k که در شرط $(۳,k)=۱$ صدق می‌کنند، جواب مسئله خواهند بود. در حالت کلی، اگر $(m,۱۸)|۱۲$، معادله جواب دارد.

مثال: در معادله‌ی زیر، مقدار n را برحسب m چنان تعیین کنید که معادله همواره دارای جواب باشد.

$$mx+ny=۱$$

حل: می‌دانیم، معادله‌ی فوق وقتی دارای جواب است که $(m,n)=۱$. واضح است که اگر m و n دو عدد متوالی باشند، شرط اخیر برقرار است. بنابراین، اگر $n=m-۱$ یا $n=m+۱$ در نظر گرفته شود، معادله همیشه دارای جواب است:

$$mx+(m-۱)y=۱$$

(یا)

$$mx+(m+۱)y=۱$$

بررسی معادله‌های سیاله‌ی دارای محدودیت

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۰۰ تومان را توسط سکه‌های ۲ و ۵ تومانی خُرد کرد، به نحوی که از هر دو نوع سکه استفاده شود.

حل: در واقع باید تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی زیر را تعیین کنیم:

$$۵x+۲y=۱۰۰$$

ابتدا جواب عمومی معادله را در مجموعه اعداد صحیح به‌دست می‌آوریم.

$$y=۰,x=۲۰;(۵,۲)=۱,\left|\begin{array}{l}x=۲۰+۲k\\ y=۰-۵k\end{array}\right.$$

یا

$$(۲۰-۲k>۰,k<۱۰)$$

$$\left|\begin{array}{l}x=۲۰-۲k\\ y=۵k\end{array}\right. ;k\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$

مسئله دارای ۹ جواب است. بنابراین، به ۹ طریق می‌توان عمل خُرد کردن را انجام داد.

مثال: کوچک‌ترین عدد مثبت m را چنان بیابید که معادله‌ی زیر جواب داشته باشد:

$$۱۰۰۱x+۹۱y=۶۳۷۰+(m^۲-۱)^{۱۳۸۷}$$

حل: چون $(۱۰۰۱,۹۱)=۹۱$، پس معادله وقتی جواب دارد که اگر و تنها اگر ۹۱ عبارت $۶۳۷۰+(m^۲-۱)^{۱۳۸۷}$ را بشمارد.

با توجه به تجزیه‌ی عدد ۶۳۷۰ :

$$6370 = 2\times 5\times 7^2\times 13 = 70\times 91$$

واضح است که $m=1$ ، کوچک‌ترین عدد مثبتی است که به ازای آن، معادله دارای جواب است.

مثال: با فرض این که $(a,b)=1$ و $c\le ab$ ، آیا این گفته درست است که معادله‌ی $ax+by=c$ جواب مثبت ندارد؟

حل: خیر، زیرا در معادله‌ی $8x+9y=60$ شرایط $(8,9)=1$ و $60<8\times 9=72$ برقرار است، ولی معادله دارای جواب مثبت $x=3$ و $y=4$ است.

مثال: معادله‌ی زیر به ازای چه مقادیری از m دارای جواب است؟

$$(10m+4)x+(18m+7)y=4$$

حل:

$$(10m+4,18m+7)=d\in \mathbb{N} \;;\; \begin{cases} d|(10m+4) \\ d|(18m+7) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} d|9(10m+4) \\ d|5(18m+7) \end{cases} ;\; d|(90m+36)-(90m+35)=1$$

$$; d=1$$

چون به ازای هر مقدار m داریم:

$(10m+4,18m+7)=1$ ،

پس، معادله به ازای هر m صحیح دارای جواب است.

تبصره: وقتی یکی از ضریب‌های دو مجهول برابر واحد باشد، به سادگی می‌توان معادله‌ی سیاله را حل کرد. برای مثال، اگر ضریب x برابر واحد باشد:

$$a=1:\quad x+by=c$$

کافی است برای حل معادله، x را برحسب y محاسبه کنیم:

$$x=c-by$$

به ازای هر $y=k$ صحیح، مقداری صحیح برای x به‌دست می‌آید: $x=c-bk$

مثال: معادله‌ی $(m^2+1)x+(m^4-1)y=m^3+m$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را بر ضریب x تقسیم می‌کنیم:

$$(m^2+1)x+(m^2-1)(m^2+1)y$$
$$=m(m^2+1);\, x+(m^2-1)y=m;$$

$$x=m-(m^2-1)y\;,\; y=k\;:\; x=m-(m^2-1)k$$

به ازای هر $m,k\in \mathbb{Z}$ ، برای y و x مقداری صحیح به دست می‌آید.

تبصره: برای تعیین جواب‌های مثبت معادله‌ی $ax+by=c$ کافی است $x=\alpha+bt$ و $y=\beta-at$ را مثبت در نظر بگیریم و در واقع جواب $\begin{cases}\alpha+bt>0\\ \beta-at>0\end{cases}$ را بیابیم.

مثال: جواب‌های مثبت معادله‌ی $6x-10y=22$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله را به ۲ ساده می‌کنیم: $3x-5y=11$

$$x=\frac{5y+11}{3}=\frac{6y-y+12-1}{3}$$
$$=2y+4-\frac{y+1}{3}\;;\; \frac{y+1}{3}=t$$

$$y=3t-1\;;\; x=2(3t-1)+4-t=5t+2$$

برای تعیین جواب‌های مثبت باید $x>0$ و $y>0$. پس کافی است $3t-1>0$ و $5t+2>0$ یا $t>\frac{1}{3}$ و $t>\frac{-2}{5}$ که به دست می‌آید $t>\frac{1}{3}$. در واقع، اگر t را مقادیر صحیح بزرگ‌تر از $\frac{1}{3}$ اختیار کنیم، به بی‌نهایت زوج جواب مثبت می‌رسیم.

معادله‌های سیاله‌ی درجه اول چند مجهولی

می‌دانیم معادله‌های سیاله‌ی درجه‌ی اول، به‌صورت عمومی زیر ظاهر می‌شوند:

$$ax+by+cz+\ldots=d \qquad (1)$$

پارامترهای مفروض a، b، c، ... و d جایگزین عددهای گویا و x، y، z و... مجهول‌های معادله محسوب می‌شوند.

در صورتی که $d\neq 0$ و a و دیگر پارامترها صفر باشند، معادله‌ی ۱ به معادله‌ای یک‌مجهولی تحویل می‌شود که در واقع $ax=d$ از نوع معادله‌ی سیاله نیست و به سادگی حل و بحث می‌شود. بنابراین، معادله‌ی ۱ را در حالتی در نظر می‌گیریم که حداقل دو پارامتر دل‌خواه غیر صفر و d نیز اعدادی گویا باشند.

برای نشان دادن روش حل معادله‌ی ۱ و آشنایی با مسئله‌هایی که به این گونه معادله‌ها تحویل می‌شوند، چند مثال

متنوع می‌آوریم.

مثال: عددی در مبنای ۱۲ به صورت $(\overline{abc})_{۱۲}$ و در مبنای مجهولی به‌صورت $(\overline{abc۰})_x$ نوشته شده است. a، b، c و مبنای مجهولی را بیابید.

حل: اگر برابری مفروض را بسط دهیم، به برابری زیر خواهیم رسید:

$$ax^۳+bx^۲+cx^۱+(۰)x^۰=۱۲^۲a+۱۲b+c$$

معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^۲-۱۴۴)a+(x^۲-۱۲)b+(x-۱)c=۰ \qquad (۱)$$

چون a، b و c اعدادی طبیعی هستند، بنابراین، از برابری ۱ می‌توان نتیجه گرفت که x نمی‌تواند از ۵ بزرگ‌تر باشد؛ زیرا طرف اول برابری ۱ مثبت می‌شود که مجموع سه مقدار مثبت صفر نمی‌شود. هم‌چنین، x نمی‌تواند کوچک‌تر از ۵ باشد. زیرا برای $x=۴$ به‌دست می‌آید:

$$-۸۰a+۴b+۳c=۰ \qquad (۲)$$

چون مبنا $x=۴$ است، پس b و c از ۴ کوچک‌ترند. در این صورت، اگر b و c بزرگ‌ترین رقم ممکن و a کوچک‌ترین رقم ممکن $(a=۱)$ باشد $(a\neq ۰$، زیرا رقم سمت چپ است)، باز هم مقدار سمت چپ برابری ۲ منفی و غیر صفر خواهد شد. پس: $x=۵$.

$$x=۵: \quad -۱۹a+۱۳b+۴c=۰ \qquad (۳)$$

در این‌جا، با یک معادله‌ی سیاله‌ی درجه‌ی اول سه‌مجهولی روبه‌رو هستیم؛ با شرایط:

$$a\neq ۰ \ , \quad a,b,c<۵ \qquad (۴)\ \text{(a، b و c اعداد مثبت)}$$

چون ضریب c کوچک‌تر است، آن را برحسب دو مجهول دیگر به‌دست می‌آوریم:

$$c=\frac{۱۹a-۱۳b}{۴}=۵a-۳b-\frac{a+b}{۴}$$

چون $\frac{a+b}{۴}$ عددی صحیح است، پس $a+b$ مضربی از ۴ خواهد بود. با توجه به شرایط ۴، پنج حالت پیش خواهد آمد:

a	۴	۴	۳	۲	۱
b	۰	۴	۱	۲	۳
c	۱۹	۶	۱۱	۳	-۵

با توجه به شرایط مسئله، واضح است که فقط جواب‌های $a=۲$، $b=۲$ و $c=۳$ صدق می‌کنند.

مثال: جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$۷x+۲۲y+۵۲z=۲۴۶$$

حل: با فرض $x=۲t$ که یک فرض مسلّم است:

$$x=۲t \ ; \quad ۷(۲t)+۲۲y+۵۲z=۲۴۶$$
$$۷t+۱۱y+۲۶z=۱۲۳$$

بزرگ‌ترین ضریب ۲۶ است و اگر به t و y مقادیر حداقل $t=y=۱$ را اختصاص دهیم:

$$۷+۱۱+۲۶z\leq ۱۲۳ \ ; \quad z\leq ۴\frac{۱}{۲۶}$$

بنابراین، مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را برای z امتحان می‌کنیم:

$$z=۱: \quad ۷t+۱۱y+۲۶=۱۲۳ \ ; \quad ۷t+۱۱y=۹۷$$

برای این معادله، جواب صحیح و مثبت $t=۶$ و $y=۵$ به دست می‌آید.

$$z=۲: \quad ۷t+۱۱y+۵۲=۱۲۳ \ ; \quad ۷t+۱۱y=۷۱$$

برای این معادله، جواب صحیح و مثبت $t=۷$ و $y=۲$ به‌دست می‌آید.

برای حالت‌های $z=۳$ و $z=۴$، جواب صحیح و مثبت وجود ندارد.

بنابراین، معادله‌ی اصلی دارای دو جواب خصوصی با شرایط صحیح و مثبت بودن است:

$$(x_۱,y_۱,z_۱)=(۱۲,۵,۱)$$
$$(x_۲,y_۲,z_۲)=(۱۴,۲,۲)$$

یک معادله با سه مجهول

تبصره‌ی ۱: اگر $\alpha,\beta,\gamma\in Z$ یک جواب خصوصی معادله‌ای عمومی با ضرایب $a,b,c,d\in Z$ باشد:

$$ax+by+cz=d$$

جواب‌های دیگر معادله به‌صورت زیر خواهند بود $(k,s,t\in Z)$:

$$x=\alpha+bk-cs \ , \ y=\beta+ct-ak \ , \ z=\gamma+as-bt$$

یک معادله با چهار مجهول

تبصره‌ی ۲: اگر $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in Z$ یک جواب خصوصی معادله‌ای با ضرایب صحیح باشد:

$$ax+by+cz+dt=e$$

جواب‌های دیگر معادله به‌صورت زیر خواهند بود $(m,n,p,q,k,s \in Z)$:

$$x=\alpha+bk-cp-dn$$
$$y=\beta+cm-dq-ak$$
$$z=\gamma+ds+ap-bm$$
$$t=\gamma+an+bq-cs$$

دو معادله با دو مجهول

تبصره‌ی ۳: اگر $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ و x عددی صحیح باشد، ثابت می‌شود که y نیز عددی صحیح است، به جز وقتی که b و b' هر دو بر $(ab'-a'b)$ بخش‌پذیر باشند؛ زیرا:

$$a(bc')+b(ca')+c(ab')=۰$$

و هم‌چنین:

$$a'(bc')+b'(ca')+c'(ab')=۰$$

توجه: اگر $ax+by+cz=d$ و $a'x+b'y+c'z=d'$ باشند، همواره از حذف یکی از مجهول‌ها بین این دو معادله، به یک معادله‌ی دومجهولی می‌رسیم.

مثال: همه‌ی جواب‌های صحیح و مثبت دستگاه معادله‌های زیر را بیابید:

$$۶x-۶y+۹z-۲۱=۰ \; ; \; ۸x-۱۴y-۶z+۳۸=۰$$

معادله‌ی اول را به ۳ و معادله‌ی دوم را به ۲ ساده می‌کنیم:

$$۲x-۲y+۳z=۷ \; ; \; ۴x-۷y-۳z=-۱۹$$

باحذف یکی از مجهول‌ها مثل z، خواهیم داشت:

$$۶x-۹y=-۱۲$$

معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$$۲x-۳y=-۴$$

یک جواب خصوصی معادله $x=۱$ و $y=۲$ است.
بنابراین، جواب عمومی معادله چنین است:

$$x=۳k-۲ \; , \; y=۲k \quad (k\in Z)$$

با جایگزین کردن مقدارهای x و y در یکی از معادله‌های دستگاه، خواهیم داشت:

$$۲(۳k-۲)-۲(۲k)+۳z=۷ \; ; \; ۲k+۳z=۱۱$$

با توجه به یک جواب خصوصی این معادله، یعنی $k=۱$ و $z=۳$، جواب‌های عمومی و صحیح آن چنین است:

$$k=۴-۳n \; ; \; z=۱+۲n$$

$$x=۳k-۲=۳(۴-۳n)-۲=۱۰-۹n \; ,$$
$$y=۲k=۲(۴-۳n)=۸-۶n$$

تنها به ازای $n_۱=۰$ و $n_۲=۱$ جواب‌های صحیح و مثبت $(۱,۲,۳)$ و $(۱۰,۸,۱)$ حاصل می‌شوند. بنابراین، دستگاه بالا فقط دو جواب صحیح و مثبت دارد.

دو معادله با سه مجهول

تبصره‌ی ۴: اگر $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in Z$ یک جواب خصوصی معادله‌های دستگاه زیر باشد:

$$ax+by+cz=d \quad \text{و} \quad a'x+b'y+c'z=d'$$

جواب‌های دیگر معادله‌های دستگاه (جواب‌های عمومی صحیح) به ترتیب زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a\alpha+b\beta+c\gamma=d \end{cases} , \begin{cases} a'x+b'y+c'z=d' \\ a'\alpha+b'\beta+c'\gamma=d' \end{cases}$$

از تفاضل معادله‌های دستگاه، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=۰ \\ a'(x-\alpha)+b'(y-\beta)+c'(z-\gamma)=۰ \end{cases}$$

اگر از دستگاه بالا، یک‌بار $(z-\gamma)$ و بار دیگر $(y-\beta)$ و در آخرین‌بار $(x-\alpha)$ را حذف کنیم، به برابری‌های زیر می‌رسیم:

$$\frac{(x-\alpha)}{bc'-b'c}=\frac{(y-\beta)}{ca'-ac'}=\frac{(z-\gamma)}{ab'-ba'}$$

در صورتی که مقدار مشترک برابری‌های بالا را به $\frac{m}{n}$ نمایش دهیم (که در آن $m,n\in Z$ اعداد صحیحی هستند که انتخاب خواهند شد)، خواهیم داشت:

$$x-\alpha=\frac{m}{n}(bc'-b'c) \; , y-\beta=\frac{m}{n}(ca'-ac') \; ,$$
$$z-\gamma=\frac{m}{n}(ab'-ba') \; ,$$

بنابراین، x، y و z به ازای جمیع مقادیر m، فقط وقتی عدد صحیح هستند که n یک فاکتور مشترک عبارت‌های $(bc'-b'c)$، $(ca'-ac')$ و $(ab'-ba')$ باشد.

چون هر فاکتور مشترک از این اعداد، یک فاکتور از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است، از آن‌جا، تمام جواب‌های صحیح از برابری‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-\alpha}{bc'-b'c}=\frac{y-\beta}{ca'-ac'}=\frac{z-\gamma}{ab'-ba'}=\frac{m}{k}$$

در برابری‌های بالا، k بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک مخرج کسرهاست. اگر داشته باشیم:

$$bc'-b'c=0:\ x=\alpha\ ,\frac{y-\beta}{ca'-ac'}=\frac{z-\gamma}{ab'-ba'}$$

به سادگی جواب‌های عمومی صحیح معادله به دست می‌آیند:

$$x=\alpha\ ,\frac{y-\beta}{ca'-ac'}=\frac{z-\gamma}{ab'-ba'}=\frac{m}{s}$$

در برابری‌های بالا، s بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $ca'-ac'$ و $ab'-ba'$ است.

یک معادله با k مجهول که یکی از ضریب‌های مجهول آن واحد است

تبصره‌ی ۵: در معادله‌ای با k مجهول:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_kx_k=a_{k+1}$$

در صورتی که یکی از ضریب‌های مجهول‌ها برابر واحد باشد، معادله به سادگی قابل حل است. برای مثال، اگر $a_1=1$، معادله با k پارامتر دل‌خواه در مجموعه اعداد صحیح قابل حل است:

$$a_1=1:\ x_1++a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_kx_k=a_{k+1}$$

برای حل معادله، کافی است برای x_2، x_3، ...و x_k، مقادیر صحیح دل‌خواه اختیار و x_1 را برحسب مقادیر جدید محاسبه کنیم $(m_1,m_2,\ldots,m_{k-1}\in Z)$:

$$x_2=m_1,x_3=m_2,x_4=m_3,\ldots,x_k=m_{k-1};$$
$$x_1=a_{k+1}-a_2m_1-a_3m_2-a_4m_3-\ldots-a_km_{k-1}$$

توجه: در برخی معادله‌ها، از تفاضل یا جمع آن‌ها می‌توان مضرب یکی از مجهول‌ها را واحد کرد و معادله را به سادگی حل نمود.

حل معادله‌های سیاله‌ی چند متغیره به کمک هم‌نهشتی

برای حل معادله‌های سیاله‌ی خطی چندمجهولی به‌صورت عمومی زیر:

$$ax+by+cz+\ldots+\lambda z=d$$

ابتدا شرایط جواب و محدودیت‌های x، y، z و... را تعیین می‌کنیم. سپس با مقادیر متفاوت متغیرها و توجه به محدودیت‌ها، به معادله‌های جدید تقلیل یافته می‌رسیم و معادله‌های جدید دومتغیره‌ی نهایی را به کمک هم‌نهشتی حل می‌کنیم.

مثال: جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی سیاله‌ی زیر را به کمک هم‌نهشتی حل کنید.

$$14x+22y+52z=260$$

حل: ابتدا معادله را به ۲ ساده می‌کنیم:

$$7x+11y+26z=130$$

می‌بینیم، بزرگ‌ترین ضریب مجهول‌ها، ضریب z است. بنابراین، اگر x و y کم‌ترین مقدار را داشته باشند، محدودیت z معین می‌شود:

$$x=1,y=1:\ 7+11+26z\le 130\ ;\ z\le 4$$

پس می‌توان نوشت:

$$z_1=1:\ 7x_1+11y_1=104\ ;$$
$$7x_1\overset{11}{\equiv}104\ ;\ 7x_1\overset{11}{\equiv}5\ ;$$

$$x_1=7,y_1=5$$

به همین ترتیب:

$$z_2=2:\ 7x_2+11y_2=78\ ;$$
$$7x_2\overset{11}{\equiv}78\ ;\ 7x_2\overset{11}{\equiv}5\ ;$$
$$x_2=8,y_2=2$$

(معادله به ازای $z_3=3$ و $z_4=4$، جواب صحیح ندارد).

معادله به ازای $z_1=1$ و $z_2=2$ دارای دو دسته جواب خصوصی (۷،۵،۱) و (۸،۲،۲) است که می‌توان با استفاده از این جواب‌های اختصاصی و با توجه به آن‌چه ارائه شد، جواب‌های عمومی معادله را نوشت.

غلامرضا یاسی‌پور

۱۶ با راهیان المپیادهای ریاضی

تناوبی بودن

تناوبی بودن در ریاضیات نقش مهمی ایفا می‌کند. به همین علت، در این بخش بعضی مسائل شامل آن را آورده‌ایم. مثال نخست نشان می‌دهد، چگونه تناوبی یا دوره‌ای بودن می‌تواند اثبات کوتاهی برای اتحاد «هرمیت» (Hermite) در مورد بزرگ‌ترین تابع صحیح

$$\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{n}\right\rfloor+\dots+\left\lfloor x+\frac{n-1}{n}\right\rfloor=\lfloor nx\rfloor$$

به ازای جمیع $x\in R$ و $n\in Z$، به دست دهد.

اثبات مورد نظر چنین است: تابع $f:R\to N$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{n}\right\rfloor+\dots+\left\lfloor x+\frac{n-1}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor$$

به سادگی بررسی می‌شود که به ازای $x\in[0,\frac{1}{n})$، $f(x)=0$ و نیز:

$$f(x+\frac{1}{n})=\left\lfloor x+\frac{1}{n}\right\rfloor+\dots+\left\lfloor x+\frac{n-1}{n}\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{n}{n}\right\rfloor-\lfloor nx+1\rfloor=f(x)$$

در نتیجه، f با دوره‌ی تناوب $\frac{1}{n}$، تناوبی است. این موضوع نشان می‌دهد که f با صفر متحد است و اتحاد به اثبات می‌رسد.

در مثال دوم، به محاسبه‌ی مجموع ضرایب دو جمله‌ای می‌پردازیم.

مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\binom{n}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}-\binom{n-3}{3}+\dots$$

مجموع مورد نظر را با S_n نمایش می‌دهیم. در این صورت:

$$\begin{aligned}S_n-S_{n-1}+S_{n-2}=&\binom{n}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}-\binom{n-3}{3}+\dots\\&-\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}-\binom{n-3}{2}+\binom{n-4}{3}-\dots\\&+\binom{n-2}{0}-\binom{n-3}{1}+\binom{n-4}{2}-\binom{n-5}{3}+\dots\end{aligned}$$

از آن‌جا که $\binom{n}{0}=\binom{n-1}{0}$، جمله‌های اول S_n و S_{n-1} حذف می‌شوند. اگر جمله‌ی kام S_n را با جمله‌ی kام S_{n-1} و جمله‌ی $(k-1)$ام S_{k-2} دسته‌بندی کنیم، عبارت

$$(-1)^{k-1}\left(\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}-\binom{n-1}{k-1}\right)$$

را به دست می‌آوریم که با توجه به فرمول بازگشتی ضرایب دو جمله‌ای، برابر صفر است. از آن‌جا که جمیع جمله‌ها حذف می‌شوند، نتیجه می‌گیریم:

$$S_n-S_{n-1}+S_{n-2}=0$$

عبارت $S_{n-1}-S_{n-2}+S_{n-3}=0$ را به این تساوی اضافه می‌کنیم و $S_n=-S_{n-3}$ را به دست می‌آوریم که نشان می‌دهد

S_n، با دوره‌ی تناوب ۶، تناوبی است.

بنابراین، کافی است S_n را به ازای $n=۱,۲,۳,۴,۵,۶$ محاسبه کنیم، چرا که سایر مقادیر با دوره‌ی ۶ تکرار می‌شوند. در این صورت به دست می‌آوریم:

$$S_{۶n+۱}=S_{۱}=۱,\ S_{۶n+۲}=S_{۲}=۰,\ S_{۶n+۳}=S_{۳}=-۱,$$
$$S_{۶n+۴}=S_{۴}=-۱,\ S_{۶n+۵}=S_{۵}=۰,\ S_{۶n}=S_{۶}=۱$$

در ادامه، مسائل بیشتری در رابطه با تناوبی بودن به دست می‌دهیم.

۱. فرض می‌کنیم $f:R\to R-\{۳\}$ تابعی با این ویژگی باشد که $\omega>۰$ ی چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $x\in R$، داشته باشیم: $f(x+\omega)=\frac{f(x)-۵}{f(x)-۳}$ ثابت کنید f دوره‌ای است.

۲. فرض می‌کنیم $f:R\to R$ تابعی باشد که در موارد الف و ب صدق می‌کند. ثابت کنید f دوره‌ای است.

الف) به ازای هر $x,y\in R$.

$$f(x+y)+f(x-y)=۲f(x)f(y)$$

ب) $x_{۰}$ ی با $f(x_{۰})=-۱$ موجود است.

۳. اگر $f:R\to R$ یک به یک نباشد و تابع $g:R\times R\to R$ ی چنان موجود باشد که به ازای هر $x,y\in R$، داشته باشیم: $f(x+y)=g(f(x),y)$ نشان دهید f دوره‌ای است.

۴. فرض می‌کنیم $f:R\to R$، به ازای هر $x\in R$ و ثابت aای، در زیر صدق می‌کند:

$$f(x+a)=\frac{۱}{۲}+\sqrt{f(x)-f(x)^{۲}}$$

الف) ثابت کنید f دوره‌ای است.

ب) در حالت $a=۱$، مثالی از چنین تابعی به دست دهید.

۵. دنباله‌ی $\{a_n\}_n$، با $۰<a_{۰}<a_{۰}+a_{۱}<۱$ و به ازای $n\ge ۱$، $a_{n+1}+\frac{a_n-۱}{a_{n-۱}}=۰$ مفروض است. ثابت کنید اعداد حقیقی bای چنان موجودند که به ازای هر n، $|a_n|\le b$.

حل مسائل

۱. انتظار می‌رود دوره‌ی تناوب مورد نظر، با ω مرتبط باشد. بنابراین، ایده‌ی مناسب، تکرار رابطه‌ی مفروض است. ابتدا توجه می‌کنیم که $f(x)=۲$ مستلزم $f(x+\omega)=۳$ است. اما ۳ در برد f نیست. بنابراین، ۲ نیز در این برد واقع نیست. به همین ترتیب، نشان می‌دهیم که f هیچ‌گاه مقدار ۱ را اختیار نمی‌کند. متوالیاً حاصل می‌کنیم:

$$f(x+۲\omega)=\frac{f(x+\omega)-۵}{f(x+\omega)-۳}=\frac{۲f(x)-۵}{f(x)-۲}$$

$$f(x+۳\omega)=\frac{۲f(x+\omega)-۵}{f(x+\omega)-۲}=\frac{۳f(x)-۵}{f(x)-۱}$$

$$f(x+۴\omega)=\frac{f(x+\omega)-۵}{f(x+\omega)-۱}=f(x)$$

در نتیجه، دوره‌ی تناوب تابع، ۴ω است.

(Gazeta Matematică (Mathematics Gazette, Bucharest), proposed by T.Andreescu)

۲. با قرار دادن $x=y=۰$، به دست می‌آوریم:

$$f(۰)^{۲}=f(۰)$$

بنابراین، $f(۰)$ برابر ۰ یا ۱ است. اگر $f(۰)=۰$، آن‌گاه با قرار دادن $x=x_{۰}$ و $y=۰$، رابطه‌ی $۰=f(x_{۰}).۰=f(x_{۰})=-۱$ را به دست می‌آوریم که

نمی‌تواند رخ دهد. به این ترتیب، $f(۰)=۱$.

به ازای $x=y=x_{۰}$، رابطه‌ی $f(۲x_{۰})=۱$ را به دست می‌آوریم. این رابطه مطرح می‌کند که ممکن است $۲x_{۰}$ دوره‌ی تناوبی برابر f باشد و نشان می‌دهیم که در واقع چنین است.

به جای x، $x+۲x_{۰}$ و به جای y، $x-۲x_{۰}$ را قرار می‌دهیم و حاصل می‌کنیم:

$$f(۲x)+f(۴x_{۰})=۲f(x+۲x_{۰})f(x-۲x_{۰})$$

از آن‌جا که داریم:

$$f(۲x)=۲f^{۲}(x)-۱$$

و

$$f(۴x_{۰})=۲f^{۲}(x_{۰})-۱=۱$$

رابطه‌ی فوق به صورت

$$f(x+۲x_{۰})f(x-۲x_{۰})=f(x)^{۲}$$

در می‌آید. به همین ترتیب، به ازای x دل‌خواه و $y=۲x_{۰}$، به دست می‌آوریم:

$$f(x+۲x_{۰})+f(x-۲x_{۰})=۲f(x)$$

از آن‌جا که مجموع و حاصل ضرب دو عدد، آن دو را به طور

کامل معین می‌کند، داریم:

$$f(x-2x_0)=f(x+2x_0)=f(x)$$

بنابراین، f دارای دوره‌ی تناوب $2x_0$ است.

(M.Martin)

۳. از آن‌جا که f یک به یک نیست، دو عدد متمایز α و β با $f(\alpha)=f(\beta)$ موجود است. طبیعی است که انتظار داشته باشیم $\beta-\alpha$ دوره‌ی تناوب f باشد. با قرار دادن α و سپس β به جای x، رابطه‌ی زیر را حاصل می‌کنیم:

$$f(\alpha+y)=g(f(\alpha),y)=g(f(\beta),y)=f(\beta+y)$$

این رابطه، به ازای $y=z-\alpha$، مستلزم

$$f(z)=f(z+\beta-\alpha)$$

به ازای جمیع مقادیر $z\in \mathbb{R}$ است.

(Gazeta Matematică (Mathematics Gazette, Bucharest), proposed by D.M. Bătinetu)

۴. الف) مانند مسئله‌ی ۱، انتظار داریم دوره‌ی تناوب، با a مرتبط باشد. با تکرار رابطه، از صورت مسئله داریم:

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-f(x+a)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}-\frac{1}{4}-\sqrt{f(x)-f(x)^2}-(f(x)-f(x)^2)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{2}-f(x))^2}=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|$$

رابطه‌ی معرّف نشان می‌دهد، به ازای هر مقدار x، $f(x)\geq\frac{1}{2}$. در نتیجه، محاسبه‌ی فوق به ازای جمیع مقادیر x، مستلزم $f(x+2a)=f(x)$ است، که اثبات می‌کند f دوره‌ای یا متناوب است.

ب) مثالی از چنین تابعی عبارت است از:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 2n\leq x<2n+1\\ 1, & 2n+1\leq x<2n+2\end{cases}$$

که در آن $n\in Z$.

(دهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۸)

۵. موارد زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$a_2=\frac{1-a_1}{a_0},\quad a_3=\frac{a_0+a_1-1}{a_0a_1},\quad a_4=\frac{1-a_0}{a_1},\quad a_5=a_0,$$

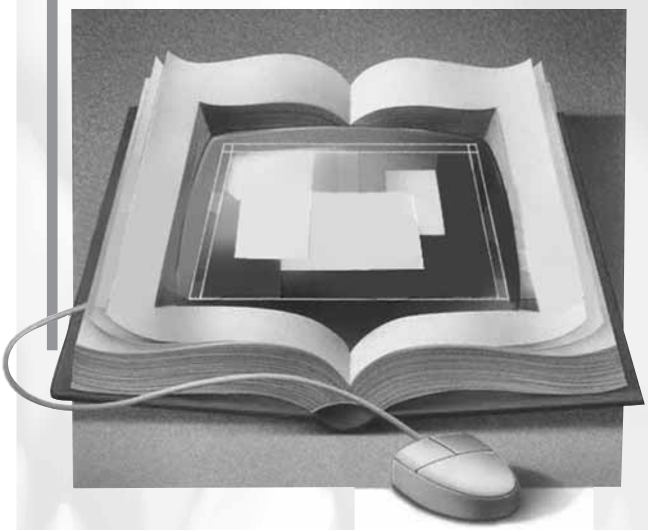
$$a_6=a_1$$

دنباله، دوره‌ای و در نتیجه کران‌دار است.

(T.Andreescu)

● احسان یارمحمدی

معرفی سایت‌های ریاضی جهان



عنوان سایت: .... **Cut-the-Knot**

نشانی سایت: .... http://www.Cut-the-Knot.org

این سایت دربر گیرنده مجموعه‌ای از مطالب گوناگون و معماهای ریاضی برای دانش‌آموزان، معلمان و والدینی است که موضوعات سرگرم کننده و جالب توجه ریاضیات را دنبال می‌کنند.

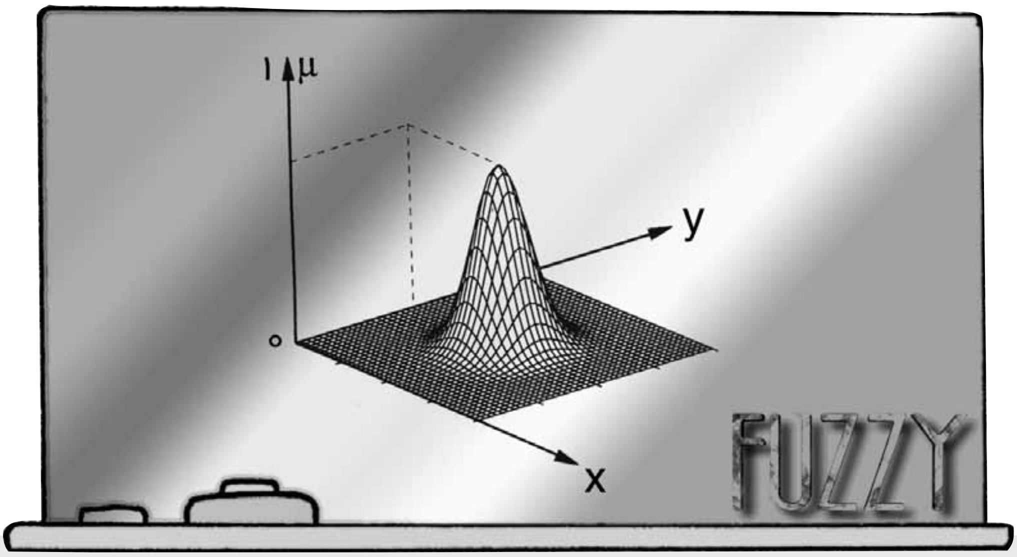
عنوان‌های اصلی این سایت در زیر آمده است که هر یک از این عنوان‌ها، خود شامل زیر عنوان‌های متنوع و متعددی می‌باشد.

- حساب (Arithmetic)
- جبر (Algebra)
- هندسه (Geometry)
- بازی‌ها و معماهای ریاضی (Math Games & Puzzles)
- خطاهای ادراکی دیداری (Visual Illusions)
- سری‌های شگفت‌آور (Eye Opener Series)
- علوم اجتماعی (Social Sciences)
- منطق (Logic)
- احتمال (Probability)
- جادوی ریاضی کامپیوتری (Computer Math Magic)
- دستگاه قیاسی (دستگاه آنالوگ) (Analog Devices)
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
- ترکیبات (Combinatorics)
- بازی‌های ترکیباتی (Combinatorical Games)
- گوناگون (Miscellaneous)

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی

عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

۷

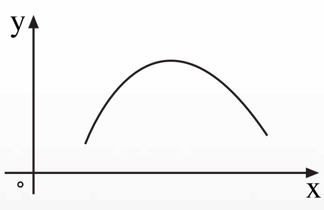


آشنایی با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

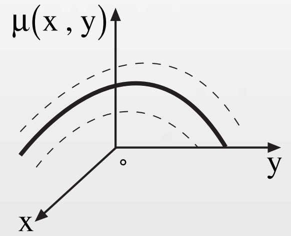
مقدمه

در درس جبر و احتمال سال سوم ریاضی، دانش‌آموزان با مفهوم رابطه و انواع آن آشنا می‌شوند. رابطه به عنوان زیر مجموعه‌ای از حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه تعریف می‌شود و به دنبال آن، خواص رابطه‌ها برای خواننده توضیح داده می‌شود. اهمیت رابطه‌ها پس از معرفی مفهوم تابع بیشتر می‌شود. کاربردهایی که رابطه‌ها در مباحثی چون نظریه‌ی گراف دارند، این مبحث ریاضی را قابل توجه و مهم نموده است. در ریاضیات فازی نیز مفهوم رابطه‌ی فازی به طور دقیق تعریف و روی آن بحث شده است. ممکن است به ویژه برای خوانندگانی که مفهوم رابطه را در حالت قطعی می‌دانند، این سؤال مطرح شود که در حالت فازی، مفهوم رابطه و انواع آن چگونه تعریف و توصیف می‌شود. اکنون به این موضوع خواهیم پرداخت.

می‌دانیم یک رابطه‌ی قطعی روی R به معنای یک زیرمجموعه از R^2 است که شامل زوج‌های مرتبی چون (x,y) است. در حالت فازی، هر رابطه، زیر مجموعه‌ای از $R^2 \times [0,1]$ است که شامل سه‌تایی‌های مرتبی به صورت $((x,y), \mu(x,y))$ می‌شود که مؤلفه‌ی $\mu(x,y)$ درجه‌ی عضویت زوج مرتب (x,y) را به رابطه‌ی فازی مشخص می‌کند. اشکال ۱ و ۲، توصیفی از رابطه‌ی قطعی و رابطه‌ی فازی را مشخص می‌کنند. نمودار هر رابطه در حالت قطعی، روی صفحه‌ی R^2 قابل نمایش است و نقاط روی این نمودار، بیانگر اعضای رابطه هستند. در حالی که نمودار تابع عضویت هر رابطه فازی، روی فضای R^3 قابل نمایش است و به منزله‌ی یک کوه فرضی است که نقاط روی قله همان نقاطی هستند که



شکل ۱ نمونه‌ای از یک رابطه‌ی قطعی



شکل ۲ نمونه‌ای از یک رابطه‌ی فازی

در حالت قطعی در رابطه تعلق دارند و به عبارتی، دارای درجه‌ی عضویت ۱ هستند و همان‌طوری که از قله‌ی این کوه، از دو طرف به سمت دامنه حرکت کنیم، سایر اعضای این رابطه‌ی فازی با درجه‌های عضویت کمتر از یک مشخص شوند. می‌توانی چنین توصیف کرد که اگر این کوه فرضی که بیانگر نمودار تابع عضویت رابطه‌ی فازی است، برش داده شود، برش مربوط به قله، همان ۱ـ برش این رابطه‌ی فازی و سایر برش‌ها همان α– برش‌های ($0 \le \alpha < 1$) این رابطه‌ی فازی را مشخص می‌کنند. (شکل ۳)

توجه می‌کنیم که در حالت قطعی، رابطه‌ی چون R روی $X \times Y$ به صورت کاملاً واضح تعریف می‌شود، طوری که زوج‌های مرتب موجود در R، دقیقاً دارای ویژگی موردنظر هستند. مثلاً اگر $X = \{۱,۲,۵\}$ و $Y = \{۲,۳,۵,۷\}$ و رابطه‌ی R به صورت «x کوچک‌تر از y است» روی $X \times Y$ تعریف شود، آن‌گاه:

$$R = \{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۵),(۱,۷),(۲,۳),(۲,۵),(۲,۷),(۵,۷)\}$$

حال اگر رابطه‌ی R به صورت « x کوچک‌تر از y است» روی $X \times Y$ تعریف شود، دیگر نمی‌توان به طور واضح مشخص کرد که مثلاً (۷و۵) در این رابطه قرار دارد یا خیر. در این حالت، R یک رابطه‌ی فازی است و باید این ابهام را به صورت معرفی درجه‌ی عضویت برای هر یک از زوج‌های مرتب موجود در $X \times Y$ بیان کرد.

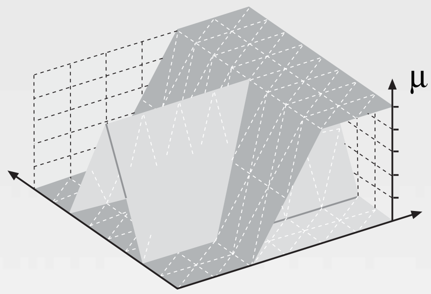
رابطه‌های فازی ابتدا توسط پروفسور زاده[۱] و به دنبال آن توسط کفمن[۲] و روزنفلد[۳] مطرح شدند و مورد مطالعه قرار گرفتند. در این قسمت، به معرفی مفهوم رابطه‌ی فازی در حالت دو تایی و انواع مهم آن می‌پردازیم.

تعریف: فرض کنیم X و Y دو زیر مجموعه‌ی قطعی از اعداد حقیقی باشند که آن‌ها را به عنوان مجموعه‌های مرجع در نظر می‌گیریم. در این صورت، مجموعه‌ی زیر، رابطه‌ی فازی روی $X \times Y$ نامیده می‌شود:

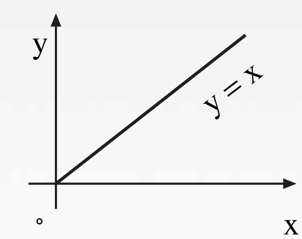
$$R = \left\{((x,y),\mu_{\tilde{R}}(x,y)) \middle| (x,y) \in X \times Y\right\}$$

برای مثال، اگر X و Y را همان مجموعه‌های مرجع مثال بالا در نظر بگیریم، رابطه‌ی فازی «x خیلی کوچک‌تر از y است» را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد:

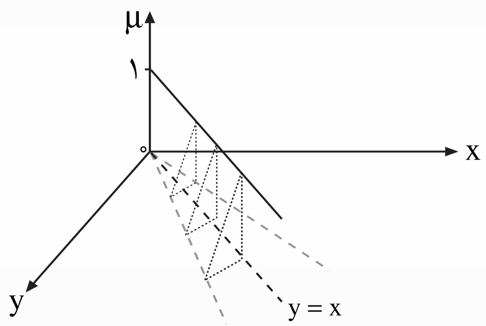
$$\begin{aligned}\tilde{R} = \{&((۱,۲),۰/۱),((۱,۳),۰/۳),((۱,۵),۰/۶)),\\&((۱,۷),۱),((۲,۳),۰/۱),\\&((۲,۵),۰/۴),((۲,۷),۰/۸),((۵,۷),۰/۳)\}\end{aligned}$$



شکل ۳ نمونه‌ای از یک رابطه‌ی فازی با چند α ـ برش آن



شکل ۴ نمایشی از رابطه‌ی قطعی y برابر x است.



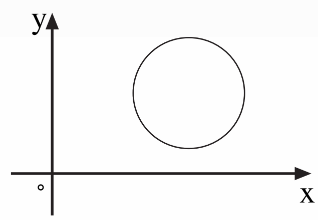
شکل ۵ نمایشی از رابطه‌ی فازی y در حدود x است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، درجه‌ی عضویت را برای زوج‌های مرتبی نظیر (۲ , ۱) مقدار کمتر و برای زوج مرتبی چون (۷ , ۱) که نسبت به بقیه‌ی زوج‌های مرتب بیشترین عضویت را دارند، مقدار ۱ در نظر گرفته‌ایم.

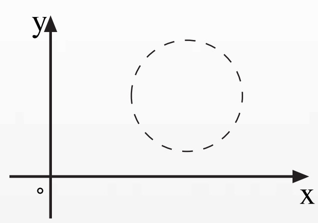
وقتی می‌گوییم «x برابر y است»، «x کوچک‌تر از y است» یا «مجموع x و y کمتر از ۳ است»، روابطی قطعی روی R^2 مطرح کرده‌ایم ولی وقتی می‌گوییم «x در حدود y است»، «x کمی از y کوچک‌تر است» یا «مجموع x و y تقریباً ۳ است.» روابطی فازی را روی R^2 مطرح کرده‌ایم که تابع عضویت این نوع روابط فازی، نمودار در فضای سه بعدی را خواهند داشت که بعد سوم آن بیانگر مقادیر درجه‌های عضویت است. اشکال ۴ و ۵ رابطه‌ی قطعی «y برابر x است» و رابطه‌ی فازی «y در حدود x است» را مقایسه می‌کنند.

حال رابطه‌ی قطعی «مجموع مربعات x و y برابر ۴ است»

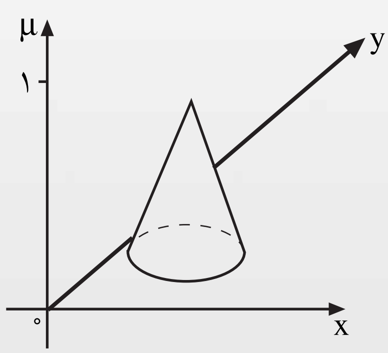
را روی R^2 در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که نمودار این رابطه دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $r = 2$ است. در این حالت، به‌طور قطع می‌توان گفت که مثلاً زوج مرتب (۰,۲) در این رابطه قرار دارد. حال اگر رابطه را به‌صورت «مجموع مربعات x و y تقریباً برابر ۴ است» بیان کنیم، رابطه‌ی فازی را عنوان کرده‌ایم. در حالت قطعی، زوج مرتب (۱ , ۱/۵) به رابطه تعلق نداشت، ولی در حالت فازی می‌توان گفت، زوج مرتب (۱ , ۱/۵) با درجه عضویت مثلاً ۰/۴ به رابطه تعلق دارد، چرا که مجموع مربعات مؤلفه‌ها ۳/۲۵ می‌شود، یا مثلاً زوج مرتب (۱ , ۱/۷) با درجه عضویت ۰/۷ به این رابطه تعلق دارد، چرا که مجموع مربعات مولفه‌ها ۳/۸۹ است و به ۴ نزدیک‌تر است. در واقع، در حالت فازی، یک مرز مبهم برای معرفی رابطه مطرح می‌شود که به دلیل همین ابهام، باید با نظیر کردن درجه‌ی عضویت، میزان تعلق یک زوج مرتب به رابطه را مشخص کرد. به شکل‌های زیر توجه کنید:



شکل ۶ یک مرز معین در یک رابطه‌ی قطعی



شکل ۷ یک مرز مبهم در یک رابطه‌ی فازی



شکل ۸ نمونه‌ای از یک رابطه‌ی فازی در $X \times Y$

حال به مثال دیگری توجه کنید. فرض کنیم X=Y=R و رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ به‌صورت «x به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر از y است»، تعریف شود. تابع عضویت R را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \le y \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(y-x)^2}} & x > y \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم، در ضابطه‌ی بالا، هرچه x از y دورتر شود، مخرج کسر $\frac{1}{(y-x)^2}$ بزرگ‌تر و لذا کسر کوچک‌تر می‌شود؛ به طوری که وقتی x بسیار بسیار از y بزرگ‌تر باشد، کسر $\frac{1}{1+(y-x)^2}$ تقریباً یک می‌شود. در هر حال، $\mu_{\tilde{R}}(x,y)$ مقداری بین ۰ و ۱ است و برای $x \le y$ نیز صفر تعریف شده است. با این تعریف، زوج مرتب (۱ , ۱۱) با درجه عضویت $0/99 \approx \frac{1}{1/01}$ به $\tilde{R}$ تعلق دارد و زوج مرتب (۱ , ۱۰۱) با درجه عضویت $0/9999 \approx \frac{1}{1/0001}$ به $\tilde{R}$ تعلق دارد. هم‌چنین، می‌توان ضابطه‌ی تابع عضویت $\tilde{R}$ را به این صورت نیز تعریف کرد:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \le y \\ \dfrac{x-y}{10y} & y < x \le 11y \\ 1 & x > 11y \end{cases}$$

این رابطه به‌گونه‌ای تعریف شده که اگر در زوج مرتب (x,y)، مقدار x از یازده برابر y بزرگ‌تر شود و مقدار درجه عضویت ۱ باشد، در واقع میزان قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر، روی این‌که مؤلفه اول بیش از ۱۱ برابر مولفه دوم باشد، منظور شده است. به این ترتیب، مثلاً زوج مرتب (۲ , ۲۳) با درجه عضویت ۱ به این مجموعه تعلق دارد و زوج مرتب (۳ , ۲۴) با درجه عضویت $\frac{24-3}{10 \times 3} = 0/7$ به $\tilde{R}$ تعلق دارد. فکر و سعی کنید ضابطه‌های دیگری مشابه با این ضابطه‌ها برای توصیف این رابطه‌ی فازی پیشنهاد دهید.

به منظور نمایش یک رابطه‌ی فازی، می‌توان از یک جدول یا ماتریس نیز استفاده کرد. این نوع نمایش برای حالتی استفاده می‌شود که X و Y متناهی باشند. فرض کنید $X = \{1,2,3\}$ و $Y = \{1,3,5,10\}$ و $\tilde{R}$ به صورت «y خیلی به x نزدیک است»،

در نظر گرفته شود. در این صورت، هر یک از نمایش‌های زیر برای معرفی $\tilde{R}$ مطرح می‌شود:

$$\begin{array}{c|cccc} & ۱ & ۳ & ۵ & ۱۰ \\ \hline ۱ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۴ & ۰ \\ ۲ & ۰/۹ & ۰/۹ & ۰/۷ & ۰ \\ ۳ & ۰/۸ & ۱ & ۰/۸ & ۰/۱ \end{array}$$

نمایش ماتریسی $\tilde{R}$

	۱	۳	۵	۱۰
۱	۱	۰/۸	۰/۴	۰
۲	۰/۹	۰/۹	۰/۷	۰
۳	۰/۸	۱	۰/۸	۰/۱

نمایش جدولی $\tilde{R}$

مقادیر داخل جدول، همان درجه‌های عضویت زوج مرتب (x,y) هستند. در این حالت، برای زوج مرتبی نظیر (۳ , ۳) درجه عضویت ۱ و برای زوج مرتبی چون (۱۰ , ۱) که مؤلفه‌ها خیلی دور از یکدیگرند، درجه عضویت ۰ منظور شده است.

به این ترتیب، رابطه‌ی $\tilde{R}$ در این مثال، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{R}=\{((۱,۱),۱),((۱,۳),(۰/۸)),((۱,۵),۰/۴),((۲,۱),(۰/۹)),((۲,۳),۰/۹),((۲,۵),۰/۷),((۳,۱),۰/۸),((۳,۳),۱),((۳,۵),۰/۸),((۳,۱۰),۰/۱)\}$$

تعریف: فرض کنیم $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ دو رابطه‌ی فازی در $X\times Y$ باشند. اجتماع و اشتراک این دو رابطه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2=\left\{((x,y),\mu_{\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2}(x,y))\,\middle|\,(x,y)\in X\times Y\right\}$$

$$\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2=\left\{((x,y),\mu_{\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2}(x,y))\,\middle|\,(x,y)\in X\times Y\right\}$$

که

$$\mu_{\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2}(x,y)=\max\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y),\mu_{\tilde{R}_2}(x,y)\right\}$$

$$\mu_{\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2}(x,y)=\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y),\mu_{\tilde{R}_2}(x,y)\right\}$$

مثال: دو رابطه‌ی فازی $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ روی $X\times Y$ که $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ و $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$، به صورت زیر تعریف شده‌اند:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	۰/۳	۰/۱	۰/۵	۰
x_2	۰/۷	۱	۰/۲	۱
x_3	۰/۵	۰	۰/۲	۰/۱

$\tilde{R}_1$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	۱	۰/۶	۰/۷	۰
x_2	۱	۰	۰/۲	۰/۸
x_3	۰/۳	۱	۰/۵	۰/۳

$\tilde{R}_2$

در این صورت، مطابق تعاریف اجتماع و اشتراک دو رابطه‌ی فازی، با در نظر گرفتن ماکزیمم و می‌نیمم درجات عضویت متناظر یکدیگر خواهیم داشت:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	۰/۳	۰/۱	۰/۵	۰
x_2	۰/۷	۰	۰/۲	۰/۸
x_3	۰/۳	۰	۰/۲	۰/۱

$\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_2$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	۱	۰/۶	۰/۷	۰
x_2	۱	۱	۰/۲	۱
x_3	۰/۵	۰	۰/۵	۰/۳

$\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2$

تعریف: گیریم $\tilde{R}_1$ رابطه‌ی فازی در $X\times Y$ و $\tilde{R}_2$ رابطه‌ای فازی در $Y\times Z$ باشد، ترکیب max−min این دو رابطه‌ی فازی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2=\left\{\left[(x,z),\mu_{\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2}(x,z)\right]\,\middle|\,(x,z)\in X\times Z\right\}$$

با درجه‌ی عضویت

$$\mu_{\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2}(x,z)=\max_y\left\{\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y),\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\}\right\}$$

که $x\in X$، $y\in Y$ و $z\in Z$.

مثال: دو رابطه‌ی فازی زیر به ترتیب روی $X\times Y$ و $Y\times Z$ تعریف شده‌اند که $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ و $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$ و $Z=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	۰/۱	۰/۲	۰	۱	۰/۷
x_2	۰/۳	۰/۵	۰	۰/۲	۱
x_3	۰/۸	۰	۱	۰/۴	۰۳

$\tilde{R}_1$

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	۰/۹	۰	۰/۳	۰/۴
y_2	۰/۲	۱	۰/۸	۰
y_3	۰/۸	۰	۰/۷	۱
y_4	۰/۴	۰/۲	۰/۳	۰
y_5	۰	۱	۰	۰/۸

$\tilde{R}_2$

بنابراین، $\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	۰/۴	۰/۷	۰/۳	۰/۷
x_2	۰/۳	۱	۰/۵	۰/۸
x_3	۰/۸	۰/۳	۰/۷	۱

$\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2$

مثلاً عضو (x_1,z_1) را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم درجه‌ی عضویت آن را در $\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2$ بیابیم. مطابق تعریف، ابتدا بین درجات عضویت $\mu_{\tilde{R}_1}(x,y)$ و $\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)$ که $y \in \{y_1,\cdots,y_5\}$ می‌نیمم می‌کنیم. بنابراین:

$$\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_1),\mu_{\tilde{R}_2}(y_1,z_1)\right\} = \min\{0/1, 0/9\} = 0/1$$

$$\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_2),\mu_{\tilde{R}_2}(y_2,z_1)\right\} = \min\{0/2, 0/2\} = 0/2$$

$$\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_3),\mu_{\tilde{R}_2}(y_3,z_1)\right\} = \min\{0, 0/8\} = 0$$

$$\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_4),\mu_{\tilde{R}_2}(y_4,z_1)\right\} = \min\{1, 0/4\} = 0/1$$

$$\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_5),\mu_{\tilde{R}_2}(y_5,z_1)\right\} = \min\{0/7, 0\} = 0$$

حال بین مقادیر حاصل، ماکزیمم را به‌عنوان درجه‌ی عضویت در نظر می‌گیریم. لذا:

$$\mu_{\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2}(x_1,z_1) = 0/4$$

به همین ترتیب، سایر درجات عضویت مشخص می‌شوند.

نکته: ترکیب $\max-\min$ دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، یعنی:

$$(\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2) O \tilde{R}_3 = \tilde{R}_1 O (\tilde{R}_2 O \tilde{R}_3)$$

ولی در حالت کلی، ترکیب $\max-\min$ خاصیت جابه‌جایی ندارد ($\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2 \neq \tilde{R}_2 O \tilde{R}_1$).

تعریف: گیریم $\tilde{R}$ رابطه‌ی فازی در $X \times X$ باشد. در این صورت:

الف) $\tilde{R}$ انعکاسی (بازتابی) است، در صورتی که:

$$\forall x \in X, \mu_{\tilde{R}}(x,x) = 1$$

ب) $\tilde{R}$ متقارن است، در صورتی که:

$$\forall x,y \in X, \tilde{R}(x,y) = \tilde{R}(y,x)$$

و به عبارت دیگر:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y,x)$$

ج) $\tilde{R}$ پادمتقارن است، در صورتی که: برای $x,y \in X$ که $x \neq y$، یا $\mu_{\tilde{R}}(x,y) \neq \mu_{\tilde{R}}(y,x)$ یا $\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y,x) = 0$.

د) $\tilde{R}$ را کاملاً پادمتقارن گوییم، هرگاه برای x و $y \in X$ که $x \neq y$، در صورتی که $\mu_{\tilde{R}}(x,y) > 0$، آن‌گاه $\mu_{\tilde{R}}(y,x) = 0$.

می‌توان گفت که اگر رابطه‌ی فازی کاملاً پادمتقارن باشد، حتماً پادمتقارن نیز هست. ولی یک رابطه‌ی فازی پادمتقارن، لزوماً کاملاً پادمتقارن نیست.

د) $\tilde{R}$ تعدی (ترایایی) است، در صورتی که $\tilde{R}_1 O \tilde{R}_2 \subseteq R$ و به عبارت دیگر:

$$\mu_{\tilde{R} O \tilde{R}}(x,y) \le \mu_{\tilde{R}}(x,y)$$

که $(x,y) \in X \times X$.

مثال: رابطه‌ی فازی مقابل را در مجموعه‌ی $X \times X$ که $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ است، در نظر بگیرید. رابطه‌ی $\tilde{R}$ بازتابی نیست، زیرا $\mu_{\tilde{R}}(x_1,x_1) \neq 1$.

در واقع، رابطه زمانی بازتابی است که اعضای موجود روی قطر اصلی ماتریس، همگی یک باشند.

$$\tilde{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0/4 & 0 & 0/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0/9 & 0/6 \\ 0/8 & 0/4 & 0/7 & 0/4 \\ 0 & 0/1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

رابطه‌ی $\tilde{R}$ تقارنی نیست، زیرا مثلاً $\mu_{\tilde{R}}(x_1,x_3) = 0/7$، ولی $\mu_{\tilde{R}}(x_3,x_1) = 0/8$. در واقع رابطه‌ی $\tilde{R}$ زمانی تقارنی است که ماتریس متناظر آن متقارن باشد، یعنی درایه‌های متناظر در بالا و پایین قطر اصلی دوبه‌دو برابر باشند. رابطه‌ی $\tilde{R}$ پادمتقارن است، ولی کاملاً پادمتقارن نیست، زیرا

$\mu(x_1,x_2)=0$ و $\mu(x_2,x_1)=0$. در واقع، رابطه‌ی $\tilde{R}$ زمانی پادمتقارن است که درایه‌های عمومی a_{ij} و a_{ji} از ماتریس متناظر $\tilde{R}$ یا مختلف یا هر دو صفر باشند، ولی در حالت کاملاً پادمتقارن یکی از این دو درایه باید مثبت و دیگری باید صفر باشد.

مثال دیگری برای بررسی تعدی بودن یک رابطه‌ی فازی در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\tilde{R}$ در $X\times X$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\tilde{R}=\begin{array}{c|c} & x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 & 0.4\\ 0 & 0.6 & 0.3 & 0\\ 0 & 1 & 0.3 & 0\\ 0.1 & 1 & 1 & 0.1\end{bmatrix}\end{array}$$

در این صورت، $\tilde{R}O\tilde{R}$ مطابق تعریف $\max-\min$ ترکیب رابطه‌ی فازی، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{R}O\tilde{R}=\begin{array}{c|c} & x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.2\\ 0 & 0.6 & 0.3 & 0\\ 0 & 0.6 & 0.3 & 0\\ 0.1 & 1 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix}\end{array}$$

ملاحظه می‌کنیم، چون هر یک از درایه‌های موجود در ماتریس $\tilde{R}O\tilde{R}$ یا بیشتر از درایه‌ی متناظر آن در ماتریس $\tilde{R}$ است. لذا $\tilde{R}$ یک رابطه‌ی تعدی است.

نکته‌ی ۱. اگر $\tilde{R}$ بازتابی و تعدی باشد، آن‌گاه $\tilde{R}O\tilde{R}=\tilde{R}$.

نکته‌ی ۲. اگر $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ دو رابطه‌ی تعدی باشند $\tilde{R}_1O\tilde{R}_2=\tilde{R}_2O\tilde{R}_1$ ، آن‌گاه $\tilde{R}_1O\tilde{R}_2$ نیز تعدی است.

تعریف: رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ را در $X\times X$ هم‌ارزی گوییم، هرگاه بازتابی، تقارنی و تعدی باشد. مثال زیر، نمونه‌ای از یک رابطه‌ی فازی هم‌ارزی است که $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_6\}$. خواص مذکور را در این رابطه می‌توانید بررسی کنید.

$\tilde{R}=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	۱	۰/۲	۱	۰/۶	۰/۲	۰/۶
x_2	۰/۲	۱	۰/۲	۰/۲	۰/۸	۰/۲
x_3	۱	۰/۲	۱	۰/۶	۰/۲	۰/۶
x_4	۰/۶	۰/۲	۰/۶	۱	۰/۲	۰/۸
x_5	۰/۲	۰/۸	۰/۲	۰/۲	۱	۰/۲
x_6	۰/۶	۰/۲	۰/۶	۰/۸	۰/۲	۱

تعریف: رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ در $X\times Y$ را ترتیب فازی گوییم، هرگاه بازتابی، پادتقارنی و تعدی باشد آن را رابطه‌ی ترتیب فازی کامل گوییم، هرگاه این رابطه انعکاسی، کاملاً پادمتقارنی و تعدی باشد.

حال بررسی کنید، آیا رابطه‌ی فازی مقابل یک رابطه‌ی ترتیب فازی است یا ترتیب فازی کامل یا هیچ‌کدام؟

$$\tilde{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.7\\ 0 & 1 & 0 & 0.2\\ 0 & 0.6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.3 & 1\end{bmatrix}$$

تعریف: منظور از وارون رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ که آن را با $\tilde{R}^{-1}$ نمایش می‌دهیم، رابطه‌ای است فازی که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود: $\mu_{\tilde{R}^{-1}}(x,y)=\mu_{\tilde{R}}(y,x)$. به عبارت دیگر، ماتریس متناظر $\tilde{R}^{-1}$ ترانهاده‌ی ماتریس متناظر $\tilde{R}$ است.

مثال: در جداول زیر، روابط $\tilde{R}$ و $\tilde{R}^{-1}$ را ملاحظه می‌کنید.

$$\tilde{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.3\\ 0.8 & 0.4 & 0.6\\ 0 & 0.1 & 0.5\end{bmatrix}\Rightarrow \tilde{R}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0\\ 0.7 & 0.4 & 0.1\\ 0.3 & 0.6 & 0.5\end{bmatrix}$$

تعریف: رابطه‌های همانی، مرجع و صفر به صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_I(x,y)=\begin{cases}1 & x=y\\ 0 & x\neq y\end{cases}$$ (رابطه‌ی همانی)

(رابطه‌ی صفر) $\mu_z(x,y)=0$ و (رابطه‌ی مرجع)

$\mu_U(x,y)=۱$ که در آن‌ها $x\in X$ و $y\in Y$. ماتریس‌های زیر، نمونه‌هایی از ماتریس‌های معرف این روابط هستند:

$$I=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix},\quad Z=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

توجه می‌کنیم، این روابط همگی قطعی هستند و حالت‌های خاص یک رابطه‌ی فازی محسوب می‌شوند که در آن، مقادیر درجه‌های عضویت فقط ۰ یا ۱ است.

تعریف: متمم رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ که آن را با $\tilde{R}^c$ نمایش می‌دهیم، رابطه‌ای فازی است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{R}^c}(x,y)=۱-\mu_{\tilde{R}}(x,y)$$

مثال: جداول زیر یک رابطه‌ی فازی و متمم آن را نمایش می‌دهد.

$$\tilde{R}=\begin{bmatrix}۰/۲&۰/۵&۰/۸\\۰/۴&۱&۰\\۰/۸&۰/۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow\tilde{R}^c=\begin{bmatrix}۰/۸&۰/۵&۰/۲\\۰/۶&۰&۱\\۰/۲&۰/۸&۰\end{bmatrix}$$

برخی از خواص وارون و متمم رابطه‌ی فازی در زیر مطرح شده‌اند:

۱. $(\tilde{R}_۱\cup\tilde{R}_۲)^{-۱}=\tilde{R}_۱^{-۱}\cup\tilde{R}_۲^{-۱}$

و $(\tilde{R}_۱\cap\tilde{R}_۲)^{-۱}=\tilde{R}_۱^{-۱}\cap\tilde{R}_۲^{-۱}$

۲. $(\tilde{R}^{-۱})^{-۱}=\tilde{R}$ و $(\tilde{R}^{c})^{c}=\tilde{R}$

۳. $(\tilde{R}_۱\cap\tilde{R}_۲)^c=\tilde{R}_۱^c\cup\tilde{R}_۲^c$ و

$(\tilde{R}_۱\cup\tilde{R}_۲)^c=\tilde{R}_۱^c\cap\tilde{R}_۲^c$ (قوانین دمورگان)

۴. $(\tilde{R}^{-۱})^c=(\tilde{R}^{c})^{-۱}$

۵. $\tilde{R}_۱\subseteq\tilde{R}_۲\Rightarrow\tilde{R}_۱^{-۱}\subseteq\tilde{R}_۲^{-۱}$

یک مثال راحت برای توجیه مفهوم یک رابطه‌ی فازی را در زیر مطرح می‌کنیم:

فرض کنید: {انبه، انگور، پرتقال، هندوانه، خیار}=X و {سنگین، گرد، دراز}=Y، رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ را به صورت «x تقریباً y است» در $X\times Y$ در نظر می‌گیریم. جدول زیر، نمونه‌ای از این رابطه‌ی فازی را بیان می‌کند. برای هر کدام از میوه‌های موجود در X، هر چه قدر خاصیت موجود در Y را بیشتر دارا باشند، در جدول عددی نزدیک‌تر به ۱ و هر مقدار کمتر این خاصیت‌ها را دارا باشند، عددی نزدیک به صفر را به عنوان درجه‌ی عضویت آن زوج مرتب در نظر می‌گیریم.

$$\tilde{R}=\begin{array}{r}\\ \text{دراز}\\ \text{گرد}\\ \text{سنگین}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\text{خیار}&\text{هندوانه}&\text{پرتقال}&\text{انگور}&\text{انبه}\end{array}\\ \begin{bmatrix}۱&۰&۰&۰&۰/۱\\۰&۰/۹&۱&۰/۹&۰/۳\\۰/۱&۱&۰/۲&۰&۰/۴\end{bmatrix}\end{array}$$

تمرین ۱. فرض کنید {رشت، قم، تهران}=X و {کرج، اراک، بندرانزلی}=Y و $\tilde{R}$ رابطه‌ای فازی در $X\times Y$ به صورت «x تقریباً به y نزدیک است» باشد. (از نظر مسافت)، با استفاده از رسم یک جدول، این رابطه‌ی فازی را توصیف کنید.

تمرین ۲. فرض کنید $\tilde{R}=\begin{bmatrix}۱&۰/۷&۰/۵\\۰/۸&۰/۲&۰/۴\\۰/۱&۰/۵&۰/۹\end{bmatrix}$ و $\tilde{S}=\begin{bmatrix}۰/۳&۰/۱&۰/۸\\۰/۹&۰/۷&۰/۵\\۱&۰/۲&۰/۳\end{bmatrix}$، مطلوب است $\tilde{R}^{-۱}$، $\tilde{S}^{-۱}$، $\tilde{R}^c$، $\tilde{R}\cup\tilde{S}$، $(\tilde{R}\cup\tilde{S})^{-۱}$ و $\tilde{R}^{-۱}\cup\tilde{S}^{-۱}$. هم‌چنین صحت قانون دمورگان به صورت $(\tilde{R}\cap\tilde{S})^c=\tilde{R}^c\cup\tilde{S}^c$ را تحقیق کنید.

پی‌نوشت

1. Zadeh 2. Koufmann 3. Rosenfeld

منابع

۱. مقدمه‌ای بر منطق فازی. کازو تاناکا. ترجمه‌ی دکتر علی وحیدیان کامیاد و دکتر حمیدرضا طارقیان. دانشگاه فردوسی مشهد. چاپ اول. ۱۳۸۱.

2. Fuzzy Set theory and its applications, 3rd edition, H.J. Zimmermann, Kluwer Academic Publishers, USA, 1996.

مسائل برای حل

● میرشهرام صدر

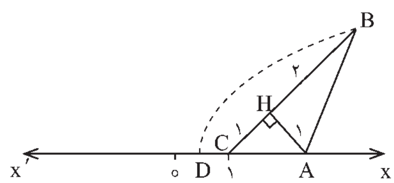
ریاضی
سال اول

۱. بین $\sqrt{2}$ و $\frac{4}{3}$ دو عدد گویا به‌دست آورید.

۲. مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$A = 3\left|\sqrt{5} - 1\right| + \left|3\sqrt{5} - 9\right|$$

۳. در شکل زیر، اگر به مرکز A و شعاع AB کمانی بزنیم تا محور را در نقطه‌ی D قطع کند، D نمایش چه عددی است؟



۴. درستی رابطه‌ی زیر را با رسم یک شکل هندسی نشان دهید:

$$(a + 2 + b)(x + 3) = 3a + 3b + ax + bx + 2x + 6$$

۵. هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوهایش مشخص کنید:

الف) $A = \left\{\sqrt{4n - 1} \mid n \in Z, -2 \le n \le 2\right\}$

ب) $B = \left\{x \mid x \in N, \frac{2 - x}{x - 4} > -1\right\}$

۶. اگر $\{(x - y), (3x + 3y)\} = \{6\}$، در این صورت حاصل $\frac{xy + 1}{x + yx}$ را بیابید.

۷. حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $A = (1 + 2^{3})^{-1} + (1 + 2^{-3})^{-1}$

ب) $B = \frac{2^{50} + 2^{49} + 2^{48}}{2^{47}}$

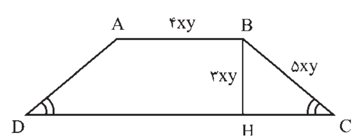
۸. اگر $a^{50} = 2a^{25}$، در این صورت مقدار a^{100} را بیابید $(a \neq 0)$.

۹. مجموع تعداد زیر مجموعه‌های دو مجموعه‌ی nعضوی و $(n+2)$ عضوی برابر با ۱۶۰ است، مقدار n را محاسبه کنید.

۱۰. ابتدا مخرج کسر زیر را ساده و سپس گویا کنید.

$$A = \frac{1}{2\sqrt{18} - \sqrt{50} - 2\sqrt{8}}$$

۱۱. محیط و مساحت شکل زیر را بیابید. $(\angle D = \angle C)$



۱۲. حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها بیابید:

الف) $A = \left[2a(2a + x^{2}) + x^{4}\right](4a^{2} + x^{4} - 2ax^{2})$

ب) $B = (9a^{2} - 6ab + b^{2})(9a^{2} + 3ab + b^{2})^{2}$

۱۳. اگر $a + b = 5$ و $ab = 3$، مقدار عددی $a^{3} + b^{3}$ را محاسبه کنید.

۱۴. چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $A = x^{2} - y^{2} - 4 + 4y$

ب) $B = x^{3} - 3x + 2$

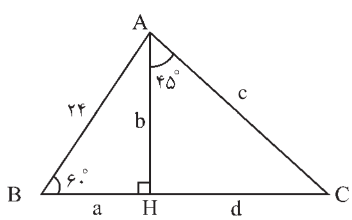
۱۵. مقدار a را طوری تعیین کنید که فاصله‌ی نقطه‌ی $A(2a + 1\ ,\ a - 2)$ از مبدأ مختصات برابر با $\sqrt{10}$ باشد.

۱۶. معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط به معادله‌های زیر بگذرد و بر خطی که از دو نقطه‌ی $A(2,1)$ و $B(2,3)$ می‌گذرد، عمود باشد.

$d_{1}: y = x + 2$

$d_{2} = y = 2x - 1$

۱۷. در شکل زیر، مقدار اجزای مجهول a، b، c و d را به‌دست آورید.



۱۸. کسر $I = \frac{(x + \frac{1}{y})^{m}(x - \frac{1}{y})^{n}}{(y + \frac{1}{x})^{m}(y - \frac{1}{x})^{n}}$ را ساده کنید.

۱۹. در اتاقی مستطیل شکل به ابعاد ۶ در ۷ متر، می‌خواهیم قالیچه‌ای به ابعاد ۳ در ۴ را پهن کنیم، به‌طوری که فاصله‌ی لبه‌ی قالی تا دیوار از هر طرف برابر باشد. فاصله‌ی قالی تا دیوار در هر طرف چه‌قدر است؟

۲۰. در جریان حفاری زمین در سال ۱۹۸۴، دانشمندان زمین‌شناس روسیه به این نتیجه رسیدند که درجه‌ی حرارت در x کیلومتری زیر سطح زمین، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$T = 25(x - 3) + 30\ ;\ 3 \le x \le 15$$

در این رابطه، T درجه‌ی حرارت برحسب سانتی‌گراد است. مشخص کنید، در چه محدوده‌ای از عمق زمین، درجه‌ی حرارت بین $200^{\circ}C$ تا $300^{\circ}C$ تغییر می‌کند.

مسائل برای حل

● هوشنگ شرقی

ریاضیات سال دوم

۱ . جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی را مشخص کنید که مجموع جملات سوم و پنجم آن مساوی ۱۶ و جمله‌ی ششم آن دوبرابر جمله‌ی چهارم آن باشد .

۲ . t را طوری به‌دست آورید که سه جمله‌ی $3t$ ، $t+2$ و $t-1$ جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند .

۳ . دنباله‌ی $a_n = \frac{2n+1}{4n-1}$ مفروض است . اولاً پنج جمله‌ی نخست این دنباله را بنویسید ، ثانیاً نشان دهید جملات این دنباله به عدد $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شوند .

۴ . مقدارهای زیر را به‌دست آورید :

الف) $\left[(\sqrt{5})^{3-\sqrt{2}}\right]^{3+\sqrt{2}}$

ب) $(\sqrt{5}-2)^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} . (\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$

۵ . a و b را طوری به‌دست آورید که رابطه‌ی f در زیر ، یک تابع وارون‌پذیر باشد . سپس f^{-1} را مشخص و نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنید .

$$f = \{(1,a+b),(1,3),(2,a-b),(-3,-1),(a-b,-1)\}$$

۶ . معادله‌ی تابع خطی f را تعیین کنید که $f(2)=1$ و $f(3)=-1$ باشد .

۷ . دامنه‌ی تعریف توابع f و g در زیر را مشخص کنید . سپس مقادیر $f(g(-1))$ و $g(f(\frac{1}{2}))$ را به‌دست آورید .

$$f(x) = \frac{2x+1}{4x-1} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{2}{\sqrt{-x+3}}$$

۸ . ابتدا نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ را و سپس از روی آن ، نمودارهای توابع $y=\sqrt{x+1}-1$ و $y=1-\sqrt{x}$ را رسم کنید .

۹ . دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\frac{(x-2)(3-x)}{(x+2)}}$ را به‌دست آورید .

۱۰ . نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 2^{-x} - 1$ را رسم کنید .

۱۱ . جمعیت شهری کوچک ، اکنون ۱۰۰۰۰۰ نفر است . اگر این جمعیت با نرخ رشد ۲ درصد افزایش یابد ، چهار سال بعد ، جمعیت شهر تقریباً چند نفر است؟

۱۲ . ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c و $c \neq 1$ داریم :

$$\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

۱۳ . معادله‌ی زیر را حل کنید :

$$\log_x^{x+1} + \log_x^{x+2} - \log_x^6 = 1$$

۱۴ . نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 2\sin 2x - 1$ را در یک دوره‌ی تناوب آن رسم کنید .

۱۵ . زمینی مثلثی شکل داریم که طول‌های دو ضلع آن ۱۰۰ متر و ۲۰۰ متر است و زاویه‌ی بین این دو ضلع نیز °۶۰ است . اولاً طول سومین ضلع این مثلث را به‌دست آورید . ثانیاً مساحت زمین را محاسبه کنید .

۱۶ . ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض است . ماتریس دو در دوی B را طوری بیابید که داشته باشیم :

$$A^2 + B = A^{-1}$$

۱۷ . با حروف کلمه‌ی «پیوند» چند کلمه‌ی بدون نقطه می‌توان نوشت؟ (کلمه از حداقل دو حرف درست شده است .)

۱۸ . می‌خواهیم از بین ۶ مادر و ۸ پدر دانش‌آموزان یک مدرسه ، شش نفر را به عضویت انجمن اولیا و مربیان مدرسه در آوریم . این کار به چند طریق ممکن است ، اگر در انجمن :

الف) تعداد زن‌ها و مردها برابر باشد .

ب) مردها اکثریت داشته باشند .

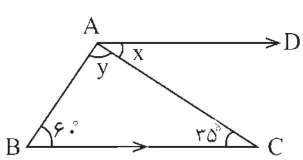
مسائل برای حل

● محمدهاشم رستمی

هندسه‌ی ۱

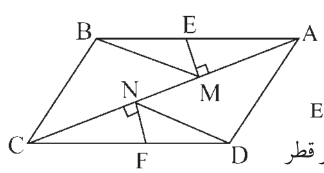
۱ . حدود m را چنان تعیین کنید که ۱۷ ، $2m-1$ و ۲۵ اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث باشند .

۲ . اندازه‌های x و y را در شکل داده شده تعیین کنید (پیکان‌های هم‌جهت خط‌های موازی را نشان می‌دهند) .



۳ . تعداد قطرهای یک ۲۷ ضلعی از تعداد ضلع‌های آن چه قدر بیشتر است؟

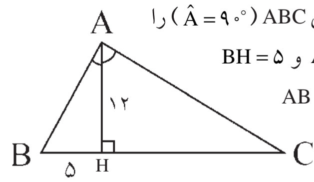
۴ . متوازی‌الاضلاع ABCD را داریم . E وسط ضلع AB و F وسط ضلع CD است . از E عمود EM و از F عمود FN را بر قطر AC رسم می‌کنیم . از M به B و از N به D وصل می‌کنیم . ثابت کنید :



الف) دو مثلث AME و CNF هم‌نهشت‌اند . **ب)** MB=ND

۵. ارتفاع مثلثی سه برابر قاعده‌ی نظیر آن است. اگر مساحت این مثلث ۲۹۴ واحد سطح باشد، اندازه‌ی این ارتفاع و قاعده‌ی نظیرش را بیابید.

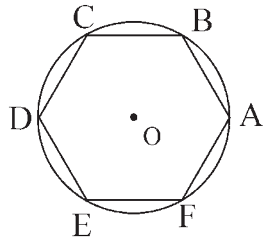
۶. ارتفاع AH از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را رسم کرده‌ایم. اگر $AH=12$ و $BH=5$ باشد، طول وتر BC، ضلع‌های AB و AC و مساحت مثلث را تعیین کنید.



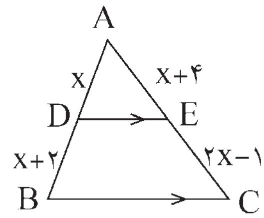
۷. در دایره‌ای به شعاع ۱۶، یک شش‌ضلعی منتظم محاط شده است (شکل روبه‌رو).

الف) اندازه‌ی ضلع این شش‌ضلعی منتظم را بیابید.

ب) اندازه‌ی مساحت این شش‌ضلعی منتظم را تعیین کنید.



۸. اندازه‌ی x را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید. پیکان‌های هم‌جهت خط‌های موازی را نشان می‌دهند.

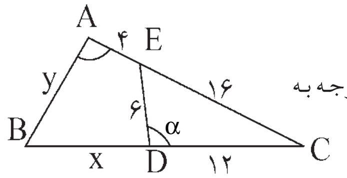


۹. ضلع‌های یک مثلث ۶، ۱۲ و ۲۰ و محیط مثلث متشابه با آن ۱۱۴ است.

الف) اندازه‌ی ضلع‌های مثلث اخیر را تعیین کنید.

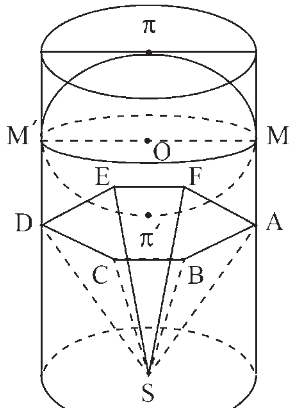
ب) نسبت مساحت‌های این دو مثلث را تعیین کنید.

۱۰. اندازه‌های x و y را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید.



۱۱. ابعاد مکعبی $2k$، $3k$ و $5k$ است. حجم این مکعب مستطیل، ۲۴ برابر حجم مکعبی به قطر $6\sqrt{3}$ است. طول قطر مکعب مستطیل را بیابید.

۱۲. استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی ۱۲ و ارتفاع ۴۲ داده شده است. هرم منتظم شش پهلویی به ارتفاع ۱۸ در این استوانه چنان محاط است که رأسش (s) روی مرکز قاعده‌ی استوانه و قاعده‌اش موازی قاعده‌ی استوانه است. کره‌ای به مرکز o نیز در این استوانه چنان محاط است که در نقطه‌ی 'T با مرکز قاعده‌ی هرم و در نقطه‌ی T با مرکز قاعده‌ی دیگر هرم و بر استوانه در طول یک دایره‌ی عظیمه مماس است. (شکل روبه‌رو). مطلوب است:



الف) محاسبه‌ی حجم هرم؛

ب) محاسبه‌ی حجم کره؛

پ) حجم فضای خالی درون استوانه؛

ت) در این مسأله، اگر ارتفاع استوانه عددی غیر از ۴۲ باشد، چه وضعی پیش می‌آید؟

مسائل برای حل

● مجتبی رفیعی

حسابان

۱. توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ مفروض‌اند. fog و gof را محاسبه و سپس درست یا نادرست بودن gof=fog را نتیجه‌گیری کنید.

۲. اگر $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ باشد، نشان دهید: $f(2x^2-1)=2f(x)$

۳. اگر f تابعی یک به یک و f^{-1} معکوس آن باشد، ضابطه‌ی معکوس تابع $g(x)=2-3f(4+5x)$ را به‌دست آورید.

۴. زوج و یا فرد بودن تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\log(\sqrt{x^2+1}-x)$ را بررسی کنید.

۵. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{x^3+x+2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+x}}$

۶. معادله‌های مجانب‌های قائم و افقی $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ را به‌دست آورید.

۷. مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}[x-1]+2a & x<3\\ x+b-1 & x=3\\ \sqrt{x^2-2x+1} & x>3\end{cases}$$

در $x_0=3$ پیوسته باشد.

۸. **الف)** مشتق توابع زیر را حساب کنید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x}\ \sin(3x)\qquad g(x)=\mathrm{Arc}\sin(5x)-\tan(\frac{1}{x})$

ب) اگر $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ باشد، مشتق تابع $y=f(5x^2-x)$ را نسبت به x تعیین کنید.

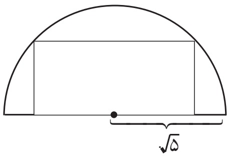
۹. اگر منحنی تابع به معادله‌ی $y=ax+b+\frac{2x^2}{x-4}$ به تابع هموگرافیک تبدیل شود و مرکز تقارن منحنی روی خط به معادله‌ی $y=2x$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۱۰. تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ مفروض است. ضرایب a، b، c و d را

چنان بیابید که $M(۱,۲)$ نقطه‌ی ماکزیمم تابع باشد و نقطه‌ی عطف منحنی بر مبدأ مختصات منطبق باشد.

۱۱. مشتق‌پذیری تابع f ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^۲(x+۱)}$ را در $x=۰$ بررسی کنید.

۱۲. نیم‌دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۵}$ مفروض است. مطابق شکل زیر، مستطیلی در آن محاط می‌کنیم. ابعاد مستطیل را چنان بیابید که محیط مستطیل ماکزیمم باشد.



۱۳. ابتدا نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}۲x & x\geq ۰\\ ۱-۳x & x\leq ۰\end{cases}$ را رسم کنید با استفاده از آن، حاصل $\int_{-۱}^{۱}f(x)dx$ را بیابید.

مسائل برای حل

● فرخ فرشیان

جبر و احتمال

۱. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$(۲n)!=۲^n\times n!\times(۱\times۳\times۵\times...\times(۲n-۱))$

۲. کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. در صورت نادرست بودن، یک مثال نقض پیدا کنید.

الف) اگر α و β اعدادی گنگ باشد، α^β نیز عددی گنگ است.

ب) اگر a، b و c مضرب ۳ نباشند، $a^۲+b^۲+c^۲$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۳. فرض کنیم a، a'، b'، b' عددهایی گویا و x عددی گنگ باشد، درصورتی که $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ عددی گویا باشد، با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

۴. با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{۲}$ عددی گنگ باشد، $\sqrt{\sqrt{۲}+۱}$ نیز گنگ است.

۵. فرض کنیم $A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$. $A\subset N$ $n\in N$ و حداقل ۵ عضو مجموعه‌ی A دارای رقم یکان برابر باشند. در این صورت، کمترین مقدار n را به‌دست آورید.

۶. اگر $n\in N$ $A_n=\{m\in Z|m\geq -n,۲^m\leq n\}$ باشد، اعضای مجموعه‌ی $A_۳\times(A_۲\Delta A_۱)$ را به‌دست آورید.

۷. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$[A-(B\cup C)]\cup[A-(A\cap B)]=A-B$

۸. اگر $i\in\{۱,۲\}$ و $A_i=[-i,۴-i]$ باشد، نمودار $A_۲\times A_۱$ را روی محورهای مختصات نمایش دهید.

۹. رابطه‌ی R روی $R^۲$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow|a|+|b|=|c|+|d|$

الف) نشان دهید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

ب) کلاس هم‌ارزی $[(۱,۳)]$ را رسم کنید.

۱۰. یک سکه پرتاب می‌کنیم. اگر سکه رو بیاید، سکه‌ی دیگری پرتاب می‌کنیم و اگر سکه پشت بیاید، یک تاس پرتاب می‌کنیم. اگر عدد رو شده در تاس زوج باشد، باز یک سکه پرتاب می‌کنیم و اگر عدد رو شده در تاس فرد باشد، از کیسه‌ی محتوی یک مهره‌ی سفید، یک مهره‌ی سبز و دو مهره‌ی آبی، یک مهره بیرون می‌آوریم:

الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی را بیابید.

ب) پیشامد A آن‌که مهره‌ی سبز بیاید؟

ج) پیشامد B آن‌که در پرتاب تاس عدد ۳ بیاید؟

د) پیشامد A-B ؟

۱۱. یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر عدد، با مربع آن عدد، متناسب است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد فرد بیاید، چند است؟

۱۲. وتری را به تصادف از درون دایره‌ای به شعاع ۱ انتخاب می‌کنیم، احتمال آن را بیابید که طول این وتر از $\sqrt{۳}$ بیشتر باشد.

۱۳. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، ثابت کنید:

$P((A\cap B)')+P((A\cup B)')=P(A')+P(B')$

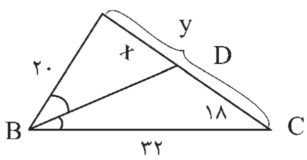
مسائل برای حل

● محمدهاشم رستمی

هندسه‌ی ۲

۱. مستطیلی به ابعاد ۶ و ۸ داده شده است. نیم‌سازهای زاویه‌های درونی مستطیل را رسم می‌کنیم. ثابت کنید چهارضلعی حاصل از برخورد این نیم‌سازها یک مربع است. اندازه‌ی مساحت این مربع را به دست آورید. آیا رابطه‌ای بین مساحت این مربع و ضلع‌های مستطیل وجود دارد؟

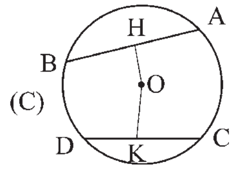
۲. در شکل، BD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی B از مثلث ABC است. اندازه‌های x و y تعیین کنید.



۳. در مثلث ABC، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم. اگر $AB < AC$ باشد، ثابت کنید $A\hat{M}B < A\hat{M}C$.

۴. زاویه‌ی xoy و خط d در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از یک صفحه را بیابید که خط d به فاصله‌ی l و از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.

۵. در شکل AB و CD دو وتر از دایره‌ی $C(O,5)$ هستند. OH عمود بر AB و OK عمود بر CD است.



الف) اگر $OH = 3$ باشد، اندازه‌ی وتر AB را تعیین کنید.

ب) اگر $CK = 3$ باشد، اندازه‌ی OK و CD را تعیین کنید.

پ) دو وتر AB و CD را با هم مقایسه کنید. کدام بزرگ‌تر است؟ کدام به مرکز دایره نزدیک‌تر است؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶. از نقطه‌ی M که به فاصله‌ی ۲۶ از مرکز دایره‌ی $C(O,10)$ قرار دارد، دو مماس MT و MT′ را بر دایره رسم می‌کنیم. سپس TT′، OT، OT′ و OM را رسم می‌کنیم. اگر H نقطه‌ی برخورد OM و TT′ باشد، حساب کنید:

الف) اندازه‌ی مماس‌های MT و MT′؟

ب) اندازه‌ی وتر TT′؟

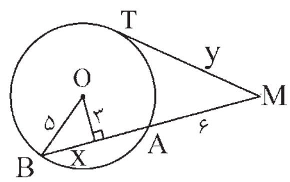
پ) اندازه‌ی پاره‌خط OH؟

۷. کمانی درخور زاویه‌ی ۱۲۰ درجه، مقابل به پاره‌خط AB و به طول ۸ رسم کرده‌ایم.

الف) اندازه‌ی شعاع دایره‌ای را که این کمان در خور بخشی از آن است، تعیین کنید.

ب) فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB را به دست آورید.

۸. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل داده شده به دست آورید. MT مماس بر دایره در نقطه‌ی T و نقطه‌ی O مرکز دایره است.



۹. دو دایره‌ی $C(O,6)$ و $C'(O',8)$ با خط المرکزین $OO' = 20$ داده شده‌اند.

الف) وضع این دو دایره را نسبت به هم تعیین کنید.

ب) اندازه‌ی مماس مشترک برونی و درونی این دو دایره را در صورت وجود تعیین کنید.

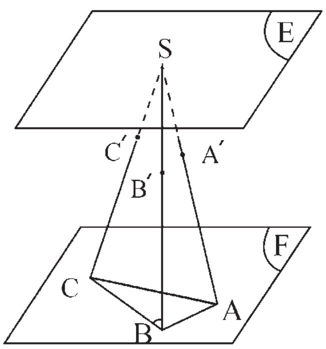
۱۰. نقطه‌های $A=(2,-4)$، $B=(-3,2)$، $C=(1,3)$ و $D=(6,-3)$ رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

الف) ضابطه‌ی انتقالی را که رأس A را بر رأس C تصویر می‌کند، بنویسید.

ب) این متوازی‌الاضلاع و تصویرش را تحت انتقال بالا رسم کنید.

۱۱. تبدیل یافته‌ی خط $\Delta: 2x + 7y - 5 = 0$ تحت تبدیل $T(x,y) = (x+2, 2y-1)$ را تعیین کنید. آیا این تبدیل یافته با خط Δ موازی است؟

۱۲. دو صفحه‌ی موازی (E) و (F)، نقطه‌ی S روی صفحه‌ی E و مثلث ABC روی صفحه‌ی F داده شده‌اند. اگر نقطه‌های A′، B′ و C′ را به ترتیب روی SA، SB و SC چنان بگیریم که این پاره‌خط را به نسبت $\frac{1}{3}$ از رأس S قطع کنند، ثابت کنید صفحه‌ی مثلث A′B′C′ با صفحه‌ی (F) موازی است.



۱۳. چهار نقطه‌ی A، B، C و D داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله باشد.

تفریح اندیشه

اعداد جالب ریاضی

کلیه اعداد از صفر تا ۹ هر کدام یک‌بار نوشته شده و جالب آن‌که این عددهای ده‌رقمی به کلیه اعداد از ۲ تا ۱۸ قابل قسمت هستند.

۴۸۷۶۳۹۱۵۲۰

۳۷۸۵۹۴۲۱۶۰

این عدد ۹ رقمی را خوب نگاه کنید عدد جالبی است.
در این عدد کلیه اعداد از یک تا ۹ هر کدام یک‌مرتبه آمده‌اند و خاصیت جالب دیگر این عدد آن است دو عدد اول آن به عدد ۲، سه عدد اول آن به عدد ۳، چهار عدد اول آن به عدد ۴، پنج عدد اول آن به عدد ۵ و بالاخره نه عدد کل آن به عدد ۹ قابل قسمت است.

۳۸۱۶۵۴۷۲۹

حل تشریحی مسائل

ریاضی
سال اول

۱. می‌دانیم که: $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴ = \frac{۱۴}{۱۰} = \frac{۷}{۵}$

بنابراین، بین $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۷}{۵}$ دو عدد گویا به دست می‌آوریم:

$$\frac{۴}{۳} = \frac{۴\times۵}{۳\times۵} = \frac{۲۰\times۳}{۱۵\times۳} = \frac{۶۰}{۴۵}$$
$$\frac{۷}{۵} = \frac{۷\times۳}{۵\times۳} = \frac{۲۱\times۳}{۱۵\times۳} = \frac{۶۳}{۴۵}$$
$$\frac{۶۰}{۴۵} < \frac{۶۱}{۴۵} < \frac{۶۲}{۴۵} < \frac{۶۳}{۴۵}$$

۲.
$$A = ۳(\sqrt{۵}-۱)+(۹-۳\sqrt{۵})$$
$$= ۳\sqrt{۵}-۳+۹-۳\sqrt{۵} = ۶$$

۳.
$$\overset{\Delta}{AHC}: AC^۲ = CH^۲ + AH^۲$$
$$= ۱^۲ + ۱^۲ = ۲$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{۲}$$
$$\overset{\Delta}{AHB}: AB^۲ = AH^۲ + HB^۲$$
$$= ۱^۲ + ۲^۲ = ۵$$
$$\Rightarrow AB = \sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow DA = AB = \sqrt{۵}$$
$$OD = OA - DA$$
$$= (OC + CA) - DA$$
$$= ۱ + \sqrt{۲} - \sqrt{۵}$$

۴.

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & \overbrace{\quad}^{a} & \overbrace{\quad}^{۲} & \overbrace{\quad}^{b} \\ \hline x\{ & ax & ۲x & bx \\ \hline ۳\{ & ۳a & ۶ & ۳b \\ \hline \end{array}$$

۵. الف)

$n = -۲ \Rightarrow \sqrt{۴n-۱} = \sqrt{-۹}$ غیرقابل قبول

$n = -۱ \Rightarrow \sqrt{۴n-۱} = \sqrt{-۵}$ غیرقابل قبول

$n = ۰ \Rightarrow \sqrt{۴n-۱} = \sqrt{-۱}$ غیرقابل قبول

$n = ۱ \Rightarrow \sqrt{۴n-۱} = \sqrt{۳}$ قابل قبول

$n = ۲ \Rightarrow \sqrt{۴n-۱} = \sqrt{۷}$ قابل قبول

$$A = \{\sqrt{۳}, \sqrt{۷}\}$$

ب)
$$\frac{۲-x}{x-۴} + ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{۲-x+x-۴}{x-۴} > ۰$$
$$\Rightarrow \frac{-۲}{x-۴} > ۰ \Rightarrow \frac{x-۴}{۲} > ۰ \Rightarrow x > ۴$$
$$B = \{۵, ۶, ۷, \ldots\}$$

۶.
$$\begin{cases} x - y = ۶ \\ ۳x + ۳y = ۶ \end{cases} \Rightarrow x = ۴, y = -۲$$
$$\frac{xy+۱}{x+yx} = \frac{(۴)(-۲)+۱}{۴+(-۲)(۴)} = \frac{-۸+۱}{۴-۸} = \frac{۷}{۴}$$

۷. الف)
$$A = (۱+۸)^{-۱} + (۱+\frac{۱}{۸})^{-۱} = ۹^{-۱} + (\frac{۹}{۸})^{-۱}$$
$$= \frac{۱}{۹} + \frac{۸}{۹} = ۱$$

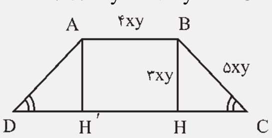
ب)
$$B = \frac{۲^{۴۸}(۲^۲+۲+۱)}{۲^{۴۷}} = ۱۴$$

۸.
$$a^{۵۰} = ۲a^{۲۵} \Rightarrow \frac{a^{۵۰}}{a^{۲۵}} = ۲ \Rightarrow a^{۲۵} = ۲$$
$$a^{۱۰۰} = (a^{۲۵})^۴ = ۲^۴ = ۱۶$$

۹.
$$۲^n + ۲^{n+۲} = ۱۶۰ \Rightarrow ۲^n(۱+۲^۲) = ۱۶۰$$
$$\Rightarrow ۲^n = \frac{۱۶۰}{۵} = ۳۲ = ۲^۵ \Rightarrow n = ۵$$

۱۰.
$$A = \frac{۱}{۲\sqrt{۳^۲\times۲} - \sqrt{۵^۲\times۲} - ۲\sqrt{۲^۳}}$$
$$= \frac{۱}{۶\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}} = \frac{۱}{-۳\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{-۶}$$

۱۱.
$$\overset{\Delta}{BHC}: BC^۲ = BH^۲ + HC^۲$$
$$\Rightarrow (۵xy)^۲ = (۳xy)^۲ + HC^۲$$
$$\Rightarrow ۲۵x^۲y^۲ = ۹x^۲y^۲ + HC^۲ \Rightarrow HC = ۴xy$$



$$\hat{D} = \hat{C} \Rightarrow \begin{cases} AD = BC = ۵xy \\ DH' = HC = ۴xy \\ H'H = AB = ۴xy \end{cases}$$

$$\text{محیط} = AB + BC + CD + DA$$
$$= ۴xy + ۵xy + ۱۲xy + ۵xy = ۲۶xy$$

$$\text{مساحت} = \frac{(AB+CD)\times BH}{۲}$$
$$= \frac{(۴xy+۱۲xy)\times۳xy}{۲} = ۲۴x^۲y^۲$$

۱۲. الف)
$$A = [(۴a^۲+x^۴)+۲ax^۲][(۴a^۲+x^۴)-۲ax^۲]$$
$$= (۴a^۲+x^۴)^۲ - (۲ax^۲)^۲$$
$$= ۱۶a^۴ + ۸a^۲x^۴ + x^۸ - ۴a^۲x^۴ = ۱۶a^۴ + ۴a^۲x^۴ + x^۸$$

ب)
$$B = (۳a-b)^۲(۹a^۲+۳ab+b^۲)^۲$$
$$= [(۳a-b)(۹a^۲+۳ab+b^۲)]^۲$$
$$= (۲۷a^۳-b^۳)^۲$$
$$= ۷۲۹a^۶ - ۵۴a^۳b^۳ - b^۶$$

۱۳.
$$(a+b)^۳ = a^۳ + b^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲$$
$$\Rightarrow a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b)$$
$$= (۵)^۳ - ۳(۳)(۵) = ۸۰$$

۱۴. الف)
$$A = x^2-(y^2-4y+4)$$
$$= x^2-(y-2)^2$$
$$= (x-(y-2))(x+(y-2))$$
$$= (x-y+2)(x+y-2)$$

ب)
$$B = x^3-x-2x+2 = (x^3-x)-2(x-1)$$
$$= x(x^2-1)-2(x-1)$$
$$= x(x-1)(x+1)-2(x-1)$$
$$= (x-1)(x^2+x-2)$$

۱۵.
$$OA = \sqrt{(2a+1)^2+(a-2)^2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{10} = \sqrt{4a^2+4a+1+a^2-4a+4}$$
$$\Rightarrow 10 = 5a^2+5 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۱۶.
$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 5$$

$\Rightarrow M(3,5)$ محل تلاقی d_1 و d_2

$m_{AB} = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{3-1}{2-2}$ تعریف نشده

چون m_{AB} تعریف نشده است، پس خط AB موازی محور yهاست. در نتیجه، خطی که بر AB عمود است، موازی محور xها می‌شود که شیب $m=0$ دارد. بنابراین داریم:

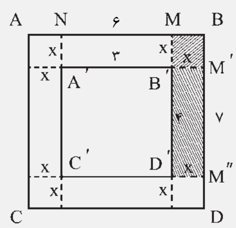
$$(y-5) = 0(x-3) \Rightarrow y = 5$$

۱۷.
$$A\overset{\Delta}{B}H: \sin 60^\circ = \frac{b}{24} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{24}$$
$$\Rightarrow b = 12\sqrt{3}$$
$$A\overset{\Delta}{B}H: \cos 60^\circ = \frac{a}{24} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{24} \Rightarrow a = 12$$

$$A\overset{\Delta}{H}C: \tan 45^\circ = \frac{d}{AH} \Rightarrow 1 = \frac{d}{12\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow d = 12\sqrt{3}$$
$$A\overset{\Delta}{H}C: \sin 45^\circ = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{c}$$
$$\Rightarrow c = 12\sqrt{6}$$

۱۸.
$$I = \frac{\dfrac{(xy+1)^m}{y^m} \times \dfrac{(xy-1)^n}{y^n}}{\dfrac{(xy+1)^m}{x^m} \times \dfrac{(xy-1)^n}{x^n}} = \frac{x^{n+m}}{y^{n+m}}$$

۱۹.
$$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} + 4S_{MBM'B'} + 2S_{B'M'M''D'} + 2S_{NMB'A'}$$
$$42 = 12 + 4x^2 + 8x + 6x$$
$$\Rightarrow 4x^2+14x-30 = 0$$
$$\Rightarrow 2x^2+7x-15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 & \text{غیر قابل قبول} \\ x = \frac{3}{2} & \text{قابل قبول} \end{cases}$$



۲۰.
$$200 < T < 300 \Rightarrow 200 < 25(x-3)+30 < 300$$
$$\Rightarrow 200 < 25x-45 < 300$$
$$\Rightarrow 245 < 25x < 345$$
$$\Rightarrow \frac{245}{25} < x < \frac{345}{25}$$
$$\Rightarrow 9.8 < x < 13.8$$

حل تشریحی مسائل

ریاضی
سال دوم

۱.
$$a_3 = a_1+2d,\ a_5 = a_1+4d,\ a_6 = a_1+5d,\ a_4 = a_1+3d$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_3+a_5 = 16 \\ a_6 = 2a_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1+6d = 16 \\ a_1+5d = 2(a_1+3d) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+3d = 8 \\ a_1+d = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -4,\ d = 4,\ a_n = a_1+(n-1)d$$
$$\Rightarrow a_n = -4+(n-1)4 \Rightarrow a_n = 4n-8$$

۲.
$$(t+2)^2 = (t-1)(3t) \Rightarrow t^2+4t+4 = 3t^2-3t$$
$$\Rightarrow 2t^2-7t-4 = 0 \Rightarrow t = \frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4} = \frac{7\pm 9}{4} \Rightarrow t = 4, -\frac{1}{2}$$

۳.
$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{5}{7},\ a_3 = \frac{7}{11},\ a_4 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},\ a_5 = \frac{11}{19}$$

$$1, \frac{5}{7}, \frac{7}{11}, \frac{3}{5}, \frac{11}{19}, \ldots$$

حال جملات این دنباله را از $\frac{1}{2}$ کم می‌کنیم و دنباله‌ی زیر را می‌سازیم:

$$\frac{1}{2}-1,\ \frac{1}{2}-\frac{5}{7},\ \frac{1}{2}-\frac{7}{11},\ \frac{1}{2}-\frac{3}{5},\ \frac{1}{2}-\frac{11}{19}, \ldots$$
$$\frac{-1}{2},\ \frac{-3}{14},\ \frac{-3}{22},\ \frac{-1}{10},\ \frac{-3}{38}, \ldots$$

چنان‌که می‌بینیم، جملات این دنباله (دنباله‌ی تفاضل‌ها) به تدریج زیاد و به صفر نزدیک می‌شوند. بنابراین، دنباله‌ی اصلی به $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شود.

۴. الف)
$$\left[(\sqrt{5})^{3-\sqrt{2}}\right]^{3+\sqrt{2}} = (\sqrt{5})^{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = (\sqrt{5})^{9-2}$$
$$= (\sqrt{5})^7 = \left[(\sqrt{5})^2\right]^3 . \sqrt{5} = 5^3 . \sqrt{5} = 125\sqrt{5}$$

ب) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$$\Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

$$=(\sqrt{5}-2)^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.(\sqrt{5}+2)^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\left[(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)\right]^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

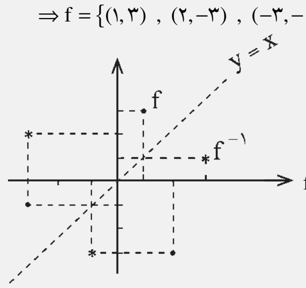
$$=(5-4)^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=(1)^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1$$

۵. $\left.\begin{matrix}(1,a+b)\in f\\ (1,3)\in f\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+b=3$

$\left.\begin{matrix}(-3,-1)\in f\\ (a-b,-1)\in f\end{matrix}\right\}\Rightarrow a-b=-3$

$\begin{cases}a+b=3\\ a-b=-3\end{cases}\Rightarrow a=0\ ,\ \ b=3$

$$\Rightarrow f=\{(1,3)\ ,\ (2,-3)\ ,\ (-3,-1)\}$$



$f^{-1}=\{(3,1)\ ,\ (-3,2)\ ,\ (-1,-3)\}$

۶. $f(x)=ax+b$

$$\Rightarrow \begin{matrix}f(2)=2a+b=1\\ f(3)=3a+b=-1\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=1\\ 3a+b=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-2\ ,\ \ b=5\quad f(x)=-2x+5$$

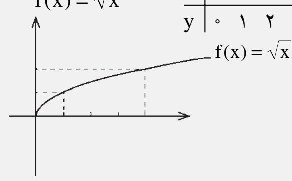
۷. $D_f=R-\left\{\frac{1}{4}\right\},D_g=(-\infty,3)$

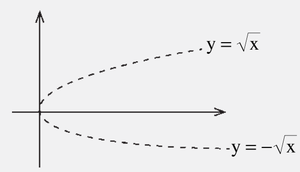
$$g(-1)=\frac{2}{\sqrt{1+3}}=1\Rightarrow f(g(-1))=f(1)=\frac{3}{3}=1$$

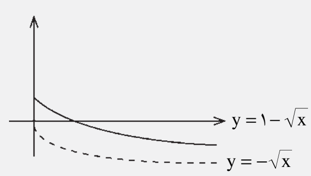
$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{2}{2-1}=2\Rightarrow g(f(\tfrac{1}{2}))=g(2)=\frac{2}{\sqrt{1}}=2$$

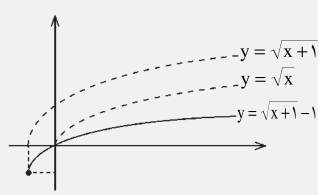
۸. $f(x)=\sqrt{x}$

x	0	1	4	...
y	0	1	2	...









۹. $\frac{(x-2)(3-x)}{(x+2)}\geq 0$

$x-2=0\Rightarrow x=2$

$x+2=0\Rightarrow x=-2$

$3-x=0\Rightarrow x=3$

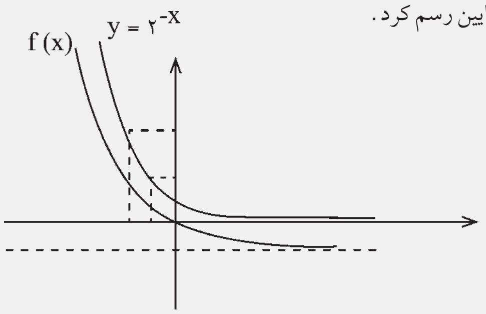
x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	•	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$	•	$-$	
$x+2$		$-$	•	$+$		$+$		$+$	
p		$+$	∞	$-$	•	$+$	•	$-$	

$D_f=(-\infty,-2)\cup[2,3]$

۱۰. ابتدا نمودار $y=2^{-x}$ را رسم کنید.

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y		4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

از روی نمودار $y=2^{-x}$ می‌توان نمودار تابع اصلی را با یک واحد انتقال به پایین رسم کرد.



۱۱. $y=c(1+r)^t\quad r=0/02, c=100000, t=4$

$$\Rightarrow y=100000\times(1/02)^4\approx100000\times1/08243\approx108243$$

۱۲. $\log_c^a=x\Rightarrow a=c^x, \log_c^b=y\Rightarrow b=c^y$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c^x}{c^y}=c^{x-y}\Rightarrow x-y=\log_c^{\frac{a}{b}}\Rightarrow$$

$$\log_c^{\frac{a}{b}}=\log_c^a-\log_c^b$$

۱۳. $\log_x^{x+1}+\log_x^{x+2}-\log_x^6=1\Rightarrow$

$$\log_x^{\frac{(x+1)(x+2)}{6}}=1\Rightarrow\frac{(x+1)(x+2)}{6}=x\Rightarrow$$

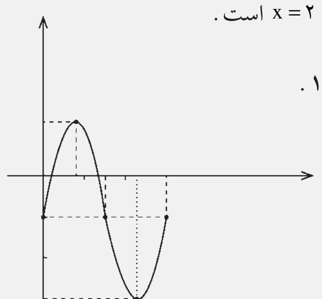
$$x^2+3x+2=6x\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow(x-1)(x-2)=0\Rightarrow$$

$x=1$ یا $x=2$

وچون xپایه‌ی لگاریتم است، بنابراین $x\neq1$ و پاسخ قابل قبول تنها $x=2$ است.

۱۴. $T=\frac{2\pi}{2}=\pi\Rightarrow x\in[0,\pi]$

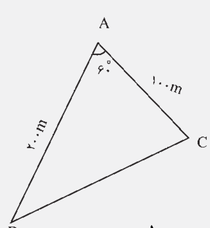
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	-1	1	-1	-3	-1



۱۵. $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\hat{A}$

$$=40000+10000-2\times200\times100\times\frac{1}{2}$$

$$=30000\Rightarrow BC=\sqrt{30000}=100\sqrt{3}$$



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.SinA=\frac{1}{2}\times200\times100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5000\sqrt{3}$$

۱۶. $A^{-1}=\dfrac{۱}{۱\times۳-۲\times۱}\begin{bmatrix}۳&-۲\\-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۲\\-۱&۱\end{bmatrix}$

$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۸\\۴&۱۱\end{bmatrix}$

$B=A^{-۱}-A^{۲}=\begin{bmatrix}۳&-۲\\-۱&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳&۸\\۴&۱۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۱۰\\-۵&-۱۰\end{bmatrix}$

۱۷. توجه می‌کنیم که اگر ی به آخر برود، بدون نقطه است. پس می‌توانیم کلمه‌های سه حرفی بدون نقطه هم داشته باشیم. تعداد آن‌ها به کمک اصل ضرب به‌دست می‌آید:

$(۲)(۱)(۱)=۲$

تعداد کلمات دو حرفی بدون نقطه هم طبق اصل ضرب برابر است با $۲=۲\times۱$. بنابراین، تعداد کل کلمات بدون نقطه برابر است با: $۴=۲+۲$

۱۸. سه زن و سه مرد می‌خواهیم:

الف) $\binom{۶}{۳}\binom{۸}{۳}=۲۰\times۵۶=۱۱۲۰$

چهار مرد و دو زن یا پنج مرد و یک زن و یا شش مرد می‌خواهیم:

ب) $\binom{۶}{۲}\binom{۸}{۴}+\binom{۶}{۱}\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=۱۵\times۷۰+۶\times۵۶+۲۸$

$=۱۰۵۰+۳۳۶+۲۸=۱۴۱۴$

حل تشریحی مسائل

هندسه‌ی (۱)

۱. باید داشته باشیم:

$۲۵-۱۷<۲m-۱<۲۵+۱۷$

$\Rightarrow ۸<۲m-۱<۴۲\Rightarrow ۹<۲m<۴۳$

$\Rightarrow \dfrac{۹}{۲}<m<\dfrac{۴۳}{۲}$

۲. داریم: $x=۳۵^\circ,\ y=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۳۵^\circ)=۱۸۰^\circ-۹۵^\circ=۸۵^\circ$

۳. داریم:

$\dfrac{n(n-۳)}{۲}=$ تعداد قطرهای n ضلعی و $n=۲۷$، $\dfrac{۲۷(۲۷-۳)}{۲}=$ تعداد قطرها

جواب مسئله ۲۹۷=۲۷−۳۲۴ و ۳۴۲=تعداد قطرهای ۲۷ ضلعی.

۴. **الف)** این دو مثلث قائم‌الزاویه به حالت برابری وتر و یک زاویه‌ی حاده هم‌نهشت‌اند، زیرا:

$AB=CD\Rightarrow \dfrac{AB}{۲}=\dfrac{CD}{۲}$

$\Rightarrow CF=AE, E\hat{M}A=C\hat{N}F=۹۰^\circ$

$AD\|CD$ و قاطع $AC\Rightarrow E\hat{A}M=N\hat{C}F$

ب) دو مثلث AMB و CND به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند، زیرا بنا به قسمت الف، از هم‌نهشتی دو مثلث AME و CFN نتیجه می‌شود که CN=AM است. از طرف دیگر، AB=CD است و دو زاویه‌ی $N\hat{C}D$ و $B\hat{A}C$ هم به دلیل موازی بودن دو خط AB و CD و مورب AC مساوی‌اند. در نتیجه، MB=ND است.

۵. ارتفاع مثلث را h می‌گیریم. قاعده‌ی نظیر آن $\dfrac{h}{۳}$ خواهد بود. با توجه به دستور محاسبه‌ی مساحت مثلث داریم:

$S=\dfrac{۱}{۲}\times a\times h_a\Rightarrow ۲۹۴=\dfrac{۱}{۲}\times\dfrac{h}{۳}\times h$

$\Rightarrow ۱۷۶۴=h^{۲}$

$\Rightarrow h=۴۲$ و ارتفاع مثلث ۴۲ $a=\dfrac{h}{۳}=\dfrac{۴۲}{۳}=۱۴$ ضلع نظیر

۶. در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABH و BAC داریم:

$\Delta ABH: AB^{۲}=AH^{۲}+BH^{۲}$

$=۲۵+۱۴۴=۱۶۹\Rightarrow AB=۱۳$

$AB^{۲}=BH.BC$

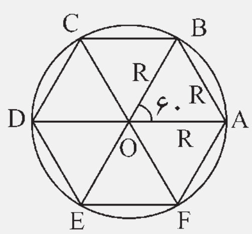
$\Rightarrow ۱۳^{۲}=۵\times BC\Rightarrow BC=\dfrac{۱۶۹}{۵}$

$AC^{۲}+AB^{۲}=BC^{۲}$

$\Rightarrow AC^{۲}+۱۶۹=(\dfrac{۱۶۹}{۵})^{۲}\Rightarrow AC=\dfrac{۱۵۶}{۵}$

مثلث $S=\dfrac{۱}{۲}AB\times AC=\dfrac{۱}{۲}\times۱۳\times\dfrac{۱۵۶}{۵}=\dfrac{۱۰۱۴}{۵}$ واحد سطح

۷. می‌دانیم که اندازه‌ی ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره، مساوی شعاع دایره است. زیرا اگر از o مرکز دایره، به رأس‌های شش‌ضلعی منتظم وصل کنیم، ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود.



برای هر یک از مثلث‌ها، مثلاً مثلث AOB داریم: $OA=OB=R,$

$A\hat{O}B=\dfrac{۳۶۰^\circ}{۶}=۶۰^\circ\Rightarrow$ مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است

$\Rightarrow OA=OB=AB=R$

بنابراین:

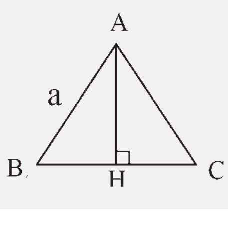
الف) اندازه‌ی ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ی به شعاع ۱۶، مساوی ۱۶ است.

ب) مساحت شش‌ضلعی منظم به ضلع a برابر است با:

شش‌ضلعی $S=۶\times S_{OAB}=۶\times\dfrac{۱}{۲}\times\dfrac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}=\dfrac{۳a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$

$\Rightarrow$ شش‌ضلعی $S=\dfrac{۳\times۱۶^{۲}\times\sqrt{۳}}{۴}=۱۹۲\sqrt{۳}$

نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\dfrac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است، زیرا اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، چون AH عمود منصف ضلع BC است، پس $BH=\dfrac{a}{۲}$ و از آن‌جا



در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH داریم :

$$AH^۲=\sqrt{AB^۲-BH^۲}=\sqrt{a^۲-\frac{a^۲}{۴}}=\sqrt{\frac{۳a^۲}{۴}}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

از آن‌جا :

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times a\times ha=\frac{۱}{۲}\times a\times\frac{a\sqrt{۲}}{۲}=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

۸ . بنا به قضیه‌ی تالس در مثلث داریم :

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{x}{x+۲}=\frac{x+۴}{۲x-۱}$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-x=x^۲+۶x+۸$$
$$\Rightarrow x^۲-۷x-۸=۰\Rightarrow x=۸, x=-۱<۰$$

۹ . الف) می‌دانیم که نسبت محیط‌های دو مثلث با نسبت ضلع‌های دو مثلث با همان نسبت تشابه دو مثلث برابر است . پس اگر ضلع‌های مثلث خواسته شده را a'، b' و c' ضلع‌های مثلث داده شده را a، b و c بنامیم، داریم :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}=\frac{۲p}{۲p'}$$
$$,۲p=a+b+c=۶+۱۲+۲۰=۳۸$$

$$,۲p'=۱۱۴,\frac{۶}{a'}=\frac{۱۲}{b'}=\frac{۲۰}{c'}=\frac{۳۸}{۱۱۴}=\frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow a'=۱۸, b'=۳۶, c'=۶۰$$

ب) می‌دانیم که نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه مساوی مجذور نسبت تشابه دو مثلث است . پس داریم :

$$\frac{S}{S'}=(\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۱}{۹}$$

۱۰ . دو مثلث CDE و ABC متشابه‌اند، زیرا $\hat{A}=E\hat{D}C=\alpha$ و $\hat{C}=\hat{C}$ است پس داریم :

$$\frac{CE}{BC}=\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{AC}, AC=۱۶+۴=۲۰,$$

$$\Rightarrow\frac{۱۶}{x+۱۲}=\frac{۶}{y}=\frac{۱۲}{۲۰}\Rightarrow y=\frac{۲۰\times۶}{۱۲}=۱۰$$
$$,x+۱۲=\frac{۱۶\times۲۰}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۴۴}{۳}$$

۱۱ . حجم مکعب را محاسبه می‌کنیم . اگر ضلـع مکـعب را a بگیریـم، می‌دانیم که اندازه‌ی قطر آن $a\sqrt{۳}$ است . پس داریم :

$a\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}\Rightarrow a=۶$ ضلع مکعب

$\Rightarrow$ حجم مکعب $=V=a^۳=۶^۳=۲۱۶$

از طرف دیگر، حجم مکعب‌مستطیل برابر است با :

مکعب مستطیل $V=۲k\times۳k\times۵k=۳۰k^۳$

از آن‌جا، بنا به فرض مسئله داریم :

حجم مکعب $\times$ ۲۴۰ = حجم مکعب مستطیل

$$\Rightarrow ۳۰k^۳=۲۴۰\times۲۱۶$$
$$\Rightarrow k^۳=۱۷۲۸\Rightarrow k=\sqrt[۳]{۱۷۲۸}=۱۲$$

ابعاد مکعب مستطیل $\Rightarrow ۲k=۲۴, ۳k=۳۶, ۵k=۶۰$

از آن‌جا داریم :

قطر مکعب مستطیل $=\sqrt{۲۴^۲+۳۶^۲+۶۰^۲}=۱۲\sqrt{۳۸}$

۱۲ . الف) می‌دانیم که ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره، برابر شعاع آن دایره است . پس اندازه‌ی ضلع شش‌ضلعی منتظم قاعـده‌ی هرم برابر شعاع قاعده‌ی استوانه یعنی ۱۲ است و مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۱۲ برابر است با :

قاعده‌ی هرم $S=\frac{۶a^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲}$

$$=\frac{۳\sqrt{۳}\times۱۲^۲}{۲}=۲۱۶\sqrt{۳}$$

از آن‌جا حجم هرم برابر است با :

ارتفاع هرم $\times$ مساحت قاعده $\times\ \frac{۱}{۳}$ حجم هرم

$\Rightarrow$ حجم هرم $=\frac{۱}{۳}\times۲۱۶\sqrt{۳}\times۱۸=۱۲۹۶\sqrt{۳}$

ب) شعاع این کره مساوی شعاع قاعـده‌ی اسـتوانـه، یـعنـی $R=۱۲$ است . پس داریم :

حجم کره $=\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۴}{۳}\times\pi\times۱۲^۳=۲۳۰۴$ واحد حجم

پ) ابتدا باید حجم استوانه و سپس :

[(حجم کره + حجم هرم) − حجم استوانه] را به‌دست آوریم :

حجم استوانه= سطح قاعده $\times$ ارتفاع $\Longrightarrow$ حجم استوانه $=\pi\times۱۲^۲\times۴۲=۳۰۴۸\pi$

$\Longrightarrow$ حجم فضای خالی موردنظر $=۳۰۴۸\pi-(۱۲۹۶\sqrt{۳}+۲۳۰۴\pi)$

$\Longrightarrow$ حجم فضای موردنظر $=۷۴۴\pi-۱۲۹۶\sqrt{۳}$

ت) ارتفاع هرم مساوی ۱۸ و قطر مکعب برابر $۲۴=۱۲\times۲$ است . از آن‌جا مجموع این دو مقدار $۴۲=۲۴+۱۸$ است که درست مساوی ارتفاع استوانه است . پس شرط محاط بودن و مماس بودن در استوانه بـرقـرار است . اگر ارتفاع استوانه بیشتر از ۴۲ باشد، کره نمی‌تواند بر قاعـده‌ی دیگر استوانه مماس شود، بلکه فضایی خـالی در ایـن قسـمت ایـجاد می‌شود .

اگر شعاع استوانه کمتر از ۴۲ باشد، بخشی از کره بیرون از استوانـه می‌ماند که محاسبه‌ی حجم باقی‌مانده‌ی استوانه به بررسی بیشتری نیاز دارد . از جمله باید دایره‌ی فصل مشترک کره با استوانه مشخص شود .

نکته : در دو حالت اخیر، در به‌کار بردن واژه‌های محاطی بودن، محیطی بودن درون و برون یک جسم، باید دقت لازم را به‌کار ببریم .

حل تشریحی مسائل

حسابان

۱.

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۱}{\sqrt{x}})^{۲}=\frac{۱}{x}$$

$$gof(x)=g(f(x))=g(x^{۲})=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}}}=\frac{۱}{|x|}$$

با توجه به ضابطه مشخص می‌شود، $gof(x)\neq fog(x)$ و از طرف دیگر، با توجه به دامنه‌ی تعریف دو تابع، چون:

$$D_{fog}=\left\{x\middle|x\in D_g, g(x)\in D_f\right\}$$

$$=\left\{x\middle|x\in(۰,+\infty), \frac{۱}{\sqrt{x}}\in R\right\}=(۰,+\infty)$$

$$D_{gof}=\left\{x\middle|x\in D_f, f(x)\in D_g\right\}$$

$$=\left\{x\middle|x\in R, x^{۲}\in(۰,+\infty)\right\}=R-\{۰\}$$

$gof(x)\neq fog(x)$ است.

۲.

$$f(x)=\log(x+\sqrt{x^{۲}-۱})$$

$$f(۲x^{۲}-۱)=\log(۲x^{۲}-۱+\sqrt{(۲x^{۲}-۱)^{۲}-۱})$$

$$f(۲x^{۲}-۱)=\log(x^{۲}+x^{۲}-۱+\sqrt{(۴x^{۴}-۴x^{۲}+۱-۱)})$$

$$f(۲x^{۲}-۱)=\log(x^{۲}+x^{۲}-۱+\sqrt{۴x^{۲}(x^{۲}-۱)})$$

$$=\log(x+\sqrt{x^{۲}-۱})^{۲}=۲\log(x+\sqrt{x^{۲}-۱})=۲f(x)$$

۳.

$$g(x)=۲-۳f(۴+۵x),\ \ g(x)=y\Rightarrow x=g^{-۱}(y)$$

$$y=۲-۳f(۴+۵x)\Rightarrow f(۴+۵x)=\frac{۲-y}{۳}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(\frac{۲-y}{۳})=۴+۵x\Rightarrow x=\frac{f^{-۱}(\frac{۲-y}{۳})-۴}{۵}$$

$$g^{-۱}(y)=\frac{f^{-۱}(\frac{۲-y}{۳})-۴}{۵}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{f^{-۱}(\frac{۲-y}{۳})-۴}{۵}$$

۴. دامنه نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، زیرا:

$$\sqrt{x^{۲}+۱}-x\geq ۰\Rightarrow\sqrt{x^{۲}+۱}\geq x\Rightarrow D_f=R$$

$$f(-x)=\log(\sqrt{(-x)^{۲}+۱}-(-x))$$

$$=\log(\sqrt{x^{۲}+۱}+x)\times\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}-x}{\sqrt{x^{۲}+۱}-x}$$

$$=\log\frac{x^{۲}+۱-x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+۱}-x}=\log\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}-x}$$

$$=\log(\sqrt{x^{۲}+۱}-x)^{-۱}=-\log(\sqrt{x^{۲}+۱}-x)=-f(x)$$

پس تابع $f(x)$ فرد است.

۵.

الف) $$\lim_{x\to -۱}\frac{(۳x-۱)(x+۱)}{(x+۱)(x^{۲}-x+۲)}=\lim_{x\to -۱}\frac{۳x-۱}{x^{۲}-x+۲}=\frac{-۴}{۲}=-۲$$

ب) $$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^{۲}-۱}{۱-\sqrt{x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x^{۲}-۱)(۱+\sqrt{x})}{۱-x}$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)(x+۱)(۱+\sqrt{x})}{-(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x+۱)(۱+\sqrt{x})}{-۱}=-۴$$

ج) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{۳}}{\sqrt{x^{۲}(۱+\frac{۱}{x})}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x(۱+\frac{\sqrt{۳}}{x})}{|x|\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x(۱+\frac{\sqrt{۳}}{x})}{x\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}}=۱$$

۶.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}\quad D_f: x^{۲}-۱>۰\to x^{۲}>۱\to\begin{cases}x>۱\\ x<-۱\end{cases}$$

مجانب‌های قائم:

$$y\to\pm\infty:\ \sqrt{x^{۲}-۱}=۰\to x^{۲}-۱=۰\to x^{۲}=۱\to\begin{cases}D_۱: x=۱\\ D_۲: x=-۱\end{cases}$$

$$x\to\pm\infty:\ y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$$

مجانب‌های افقی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|}\begin{cases}y=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x}=۱\to D_۳: y=۱\\ y=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{-x}=-۱\to D_۴: y=-۱\end{cases}$$

۷.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۳^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}=۲\\ \lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}([x-۱]+۲a)=۱+۲a\\ f(۳)=۳+b-۱=b+۲\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱+۲a=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\\ b+۲=۲\Rightarrow b=۰\end{cases}$$

۸.

الف) $$f'(x)=\frac{۲x-۵}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲}-۵x)^{۲}}}.\sin(۳x)+۳\cos(۳x).\sqrt[۳]{x^{۲}-۵x}$$

$$g'(x)=\frac{۵}{\sqrt{۱-(۵x)^{۲}}}-(-\frac{۱}{x^{۲}})(۱+\tan^{۲}(\frac{۱}{x}))$$

ب) $$y'=(۱۰x-۱)f'(۵x^{۲}-x)=(۱۰x-۱)\sqrt{(۵x^{۲}-x)^{۲}+۱}$$

۹.

$$y=\frac{(a+۲)x^{۲}+x(-۴a+b)-۴b}{x-۴}\to a+۲=۰\to a=-۲$$

$$\begin{cases} x\to\pm\infty \Rightarrow y=\dfrac{-4a+b}{1}=8+b \\ y\to\pm\infty\Rightarrow x-4=0\to x=4\end{cases}\Rightarrow \omega\left|\begin{matrix}4\\8+b\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow 8+b=2\times 4\to b=0$$

۱۰.

$$M(1,2)\xrightarrow{\text{مختصات در تابع}} 2=a+b+c+d \quad (I)$$

$$y'=3ax^2+2bx+c\to 3a+2b+c=0 \quad (II)$$

$$y''=6ax+2b\to 6a(0)+2b=0\to b=0$$

$$O(0,0)\xrightarrow{\text{مختصات در تابع}} 0=0+0+0+d\to d=0$$

$$\xrightarrow[b=d=0\ \text{و به ازای}]{(I)\ ,\ (II)}\begin{cases}a+0+c+0=2\\3a+2(0)+c=0\end{cases}\Rightarrow a=-1,\ c=3$$

۱۱.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2(x+1)-0}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt{x+1}}{x}$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2(x+1)-0}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sqrt{x+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2(x+1)-0}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sqrt{x+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{x+1}=-1$$

بنابراین f در نقطه‌ی $x_0=1$ مشتق‌پذیر نیست.

۱۲.

$$x^2+y^2=5\Rightarrow y=\sqrt{5-x^2}$$

$$f(x)=\text{محیط}=2(2x+y)=2(2x+\sqrt{5-x^2})$$

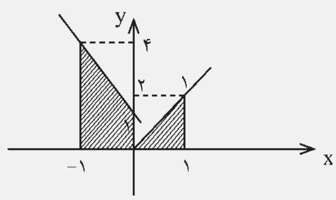
$$\Rightarrow f'(x)=2\left(2-\frac{2x}{2\sqrt{5-x^2}}\right)=0$$

ابعاد مستطیل ۱ و ۲ هستند $x=2,\ y=1$

۱۳.

$$\int_{-1}^{1}f(x).dx=\int_{-1}^{0}f(x).dx+\int_{0}^{1}f(x).dx$$

$$S_{\text{ذوزنقه}}+S_{\text{مثلث}}=\frac{(1+4)\times 1}{2}+\frac{1\times 2}{2}=\frac{5}{2}+\frac{2}{2}=\frac{7}{2}$$



حل تشریحی مسائل

جبر و احتمال

۱.

$$(2n)!=2^n\times n!\times(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1))$$

$$n=1\to 2!=2^1\times 1!\times 1\ ✓$$

$$n=k\to(2k)!=2^k\times k!\times(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2k-1))$$

$$n=k+1\to(2k+1)!=2^{k+1}\times(k+1)!(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2k-1)(2k+1))$$

طرفین فرض را در $2(k+1)(2k+1)$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$2(k+1)(2k+1)(2k)!$$
$$=2(k+1)(2k+1)\times 2^k\times k!\times(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2k-1))$$
$$(2k+2)(2k+1)(2k)!$$
$$=2^{k+1}\times(k+1)\times k!\times(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2k-1)(2k+1))$$
$$(2k+2)!=2^{k+1}\times(k+1)!\times(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2k+1))\ ✓$$

۲. **الف)** نادرست. مثال نقض:

$$\begin{matrix}\alpha=2^{\pi}\\ \beta=\dfrac{1}{\pi}\end{matrix}\to\alpha^{\beta}=(2^{\pi})^{\frac{1}{\pi}}=2\in Q$$

ب) نادرست. مثال نقض:

$$\left|\begin{matrix}a=1\\b=2\\c=4\end{matrix}\right.\quad a^2+b^2+c^2=1^2+2^2+4^2=21=3\times 7=3q$$

۳.

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}=p\Rightarrow ax+b=pa'x+pb',p\in Q$$

$$\Rightarrow\underbrace{(a-pa')}_{\text{گویا}}\underbrace{x}_{\text{اصم}}+\underbrace{b-p'b}_{\text{گویا}}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-pa'=0\\b-pb'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}pa'=a\\pb'=b\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}p=\dfrac{a}{a'}\\p=\dfrac{b}{b'}\end{matrix}\Rightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

۴. فرض کنیم $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ گنگ نباشد (فرض خلف)، پس گویاست. بنابراین داریم:

$$\sqrt{\sqrt{2}+1}=\frac{a}{b}\Rightarrow\sqrt{2}+1=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{a^2}{b^2}-1$$

به تناقض رسیدیم، زیرا $1-\frac{a^2}{b^2}$ گویاست. پس فرض خلف باطل و در نتیجه $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ گنگ است.

۵. رقم یکان هر عدد طبیعی یکی از اعضای مجموعه‌ی $\{0,1,2,\ldots,9\}$ خواهد بود. پس ده لانه داریم و هر یک از اعضای A را به عنوان یک کبوتر در نظر می‌گیریم که آن‌ها را بر عدد ۱۰ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده‌ها را در لانه‌ی متناظر قرار می‌دهیم. می‌دانیم که حداقل ۵ عضو A، دارای رقم یکان برابر هستند. بنابراین:

$4\times 10+1=41$ کمترین مقدار n

۶.

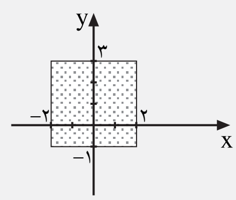
$$A_1=\{m\in Z \mid m\geq -1,\ 2^m\leq 1\}=\{-1,0\}$$
$$A_2=\{m\in Z \mid m\geq -2,\ 2^m\leq 2\}=\{-2,-1,0,1\}$$
$$A_3=\{m\in Z \mid m\geq -3,\ 2^m\leq 3\}=\{-3,-2,-1,0,1\}$$
$$A_2\Delta A_1=(A_2-A_1)\cup(A_1-A_2)=\{-2,1\}\cup\{\ \}=\{-2,1\}$$
$$(A_2\Delta A_1)\times A_3=\{-2,1\}\times\{-3,-2,-1,0,1\}$$
$$=\{(-2,-3),(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),$$
$$(1,-3),(1,-2),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$$

۷.

$$[A-(B\cup C)]\cup[A-(A\cap B)]$$
$$=[A\cap(B\cup C)']\cup[A\cap(A\cap B)']$$
$$=A\cap[(B\cup C)'\cup(A\cap B)']=A\cap[(B'\cap C')\cup(A'\cup B')]$$
$$=A\cap[((B'\cap C')\cup B')\cup A']=A\cap[(B')\cup A']$$
$$=(A\cap B')\cup(A\cap A')=(A\cap B')\cup\phi=A-B$$

۸.

$$A_1=[-1,3] \quad A_2=[-2,2] \quad A_2\times A_1=\{(x,y) \mid -2\leq x\leq 2,\ -1\leq y\leq 3\}$$



۹.

(۱) $(a,b)R(a,b)\Rightarrow |a|+|b|=|a|+|b|$ ✓

پس R بازتابی است.

(۲) $(a,b)R(c,d)$

$\Rightarrow |a|+|b|=|c|+|d|\Rightarrow |c|+|d|=|a|+|b|\Rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

پس R تقارنی است.

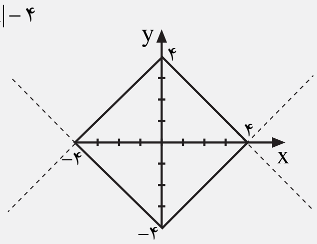
(۳) $\begin{cases}(a,b)R(c,d)\Rightarrow |a|+|b|=|c|+|d|\\ (c,d)R(e,f)\Rightarrow |c|+|d|=|e|+|f|\end{cases}$

$\Rightarrow |a|+|b|=|e|+|f|\Rightarrow (a,b)R(e,f)\Rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

پس R تعدی است.

$$[(1,3)]=\{(x,y) \mid (x,y)R(1,3)\}=|x|+|y|=|1|+|3|$$

$$\Rightarrow |x|+|y|=4\Rightarrow |y|=-|x|+4$$
$$y\geq 0\rightarrow y=-|x|+4$$
$$y<0\rightarrow y=|x|-4$$



۱۰.

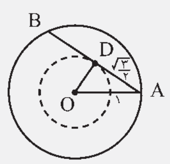
S={(ر و ر) و (پ و ر) و (w و ۱ و پ) و (g و ۱ و پ) و
(پ و ۱ و b_1) و (پ و ۱ و b_2) و (پ و ۲ و ر) و (پ و ۲ و پ) و
(پ و ۳ و w) و (پ و ۳ و g) و (پ و ۳ و b_1) و (پ و ۳ و b_2) و
(پ و ۴ و ر) و (پ و ۴ و پ) و (پ و ۵ و w) و (پ و ۵ و g) و
(پ و ۵ و b_1) و (پ و ۵ و b_2) و (پ و ۶ و ر) و (پ و ۶ و پ)}
A={(پ و ۱ و g) و (پ و ۳ و g) و (پ و ۵ و g)}
B={(پ و ۳ و w) و (پ و ۳ و b_1) و (پ و ۳ و b_2) و (پ و ۳ و g)}
A-B={(پ و ۱ و g) و (پ و ۵ و g)}

۱۱.

$$P(1)=x \qquad P(2)=2^2x \qquad P(3)=9x$$
$$P(4)=16x \qquad P(5)=25x \qquad P(6)=36x$$
$$x+4x+9x+16x+25x+36x=1\rightarrow x=\frac{1}{91}$$
$$P(1)+P(3)+P(5)=\frac{1}{91}+\frac{9}{91}+\frac{25}{91}=\frac{35}{91}=\frac{5}{13}$$

۱۲. ابتدا دایره‌ای به مرکز o و به شعاع ۱ رسم می‌کنیم. مجموعه نقاط داخل این دایره، فضای نمونه‌ای است. پس $a(S)=\pi(1)^2=\pi$. اکنون در این دایره، وتری به اندازه‌ی $\sqrt{3}$ مانند AB رسم می‌کنیم و وسط آن را D می‌نامیم. در مثلث ODA داریم:

$$OD^2=OA^2-AD^2$$
$$OD^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\rightarrow OD=\frac{1}{2}$$



مکان هندسی وسط وترهایی که فاصله‌ی آن‌ها با مرکز دایره از $\frac{1}{2}$ کوچک‌تر باشد، پیشامد موردنظر است که پیشامد نقاط داخل دایره‌ای به مرکز o و شعاع $\frac{1}{2}$ است. بنابراین:

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\pi(\frac{1}{2})^2}{\pi(1)}=\frac{1}{4}$$

۱۳.

$$P(A'\cup B')+P(A'\cap B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')$$
$$+P(A'\cap B')=P(A')+P(B')$$

حل تشریحی مسائل

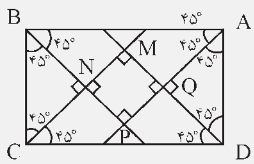
هندسه‌ی (۲)

۱. مستطیل ABCD به ضلع‌های ۶ و ۸ را در نظر می‌گیریم. نیم‌سازهای زاویه‌های درونی این مستطیل را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در چهار نقطه‌ی P، Q، M و N قطع کنند. این چهارضلعی، به دلیل قائمه بودن ۴ زاویه‌اش، مستطیل است. زیرا در مورد هر یک از این زاویه‌ها، مثلاً برای زاویه‌ی $C\hat{M}D$ داریم:

$$M\hat{C}D = M\hat{D}C = ۴۵^\circ \Rightarrow C\hat{M}D = ۱۸۰^\circ - (M\hat{C}D + M\hat{D}C)$$

$$= ۱۸۰^\circ - (۴۵ + ۴۵^\circ) \Rightarrow C\hat{M}P = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ$$

به همین دلیل ثابت می‌شود که $\hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = ۹۰^\circ$ است. اکنون برای مربع بودن باید ثابت کنیم که دو ضلع مجاور این مستطیل برابرند، یعنی مثلاً $MN = NQ$ است. با توجه به این‌که $AD = BC = ۶$ و $AB = CD = ۸$ است و مثلث‌های BNC، APB، CMD و AQD قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین‌اند، داریم:



$$AP = BP = CM = MD = AB \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = CD \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= ۸ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$BN = NC = AQ = QD = BC \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = AD \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= ۶ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow MN = NP = PQ = QM = ۴\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۲} = \sqrt{۲}$$

پس MNPQ مربعی به ضلع $\sqrt{۲}$ است. مساحت این مربع برابر است با:

$S_{MNPQ} = (\sqrt{۲})^۲ = ۲$ واحد سطح

ضلع این مربع برابر است با $\sqrt{۲} = (۸ - ۶) \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$. پس مساحت آن در واقع $(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ \times (۸ - ۶)^۲$ است.

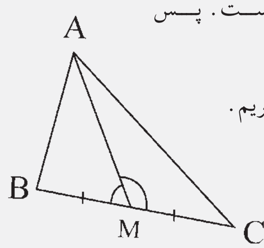
نکته: به طور کلی ثابت می‌شود که مربع حاصل از برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های درونی مستطیلی به ضلع‌های a و b برابر $(b-a) \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است (با فرض $b > a$). بنابراین مساحت مربع حاصل برابر است با: $\frac{۱}{۲}(b-a)^۲$.

۲. بنا به ویژگی نیم‌ساز زاویه‌ی درونی مثلث داریم:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۱۶} = \frac{۲۰}{۳۲} \Rightarrow x = \frac{۱۶ \times ۲۰}{۳۲} = ۱۰$$

از طرف دیگر، $y = x + ۱۶$ است. پس $y = ۱۰ + ۱۶ = ۲۶$.

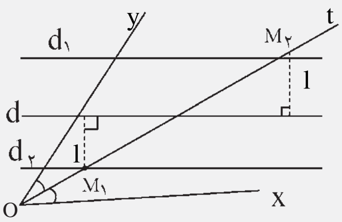
۳. دو مثلث AMB و AMC را در نظر می‌گیریم. داریم:



$AM = AM$ و $MB = MC$ و $AB < AC$

پس بنا به قضیه‌ی لولا $A\hat{M}B < A\hat{M}C$.

۴. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از خط d به فاصله‌ی معلوم l قرار دارد، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی d و به فاصله‌ی l از آن است که در دو طرف d قرار دارند. این دو خط را رسم می‌کنیم.



از طرف دیگر، مکان هندسی نقطه‌ای که از دو ضلع زاویه‌ی xoy به یک فاصله است، نیم‌ساز این زاویه است. این نیم‌ساز را نیز رسم می‌کنیم و ot می‌نامیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد $d_۱$ و $d_۲$ با نیم‌ساز ot جواب مسئله است و به تعداد نقطه‌های برخورد مسئله جواب دارد. این بدان معنی است که اگر نیم‌ساز ot با $d_۱$ یا $d_۲$ و یا در واقع با d موازی باشد، مسئله جواب ندارد.

۵. از O مرکز دایره به A و C وصل می‌کنیم. با توجه به این که قطر عمود بر هر وتر عمودمنصف آن وتر است، داریم:

$$OA = R = ۵,\ OH = ۳ \Rightarrow OA^۲ = OH^۲ + AH^۲$$

$$\Rightarrow ۲۵ = ۹ + AH^۲$$

الف) $\Rightarrow AH^۲ = ۱۶ \Rightarrow AH = ۴ \Rightarrow AB = ۲AH = ۸$

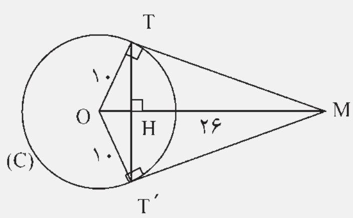
ب) $CK = KD = ۳ \Rightarrow CD = ۲CK = ۶$

$$OC^۲ = OK^۲ + KC^۲ \Rightarrow ۵^۲ = OK^۲ + ۳^۲ \Rightarrow OK^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow OK = ۴$$

پ) $AB = ۸ > CD = ۶$. AB به مرکز دایره نزدیک‌تر است، زیرا $OH = ۳ < OK = ۴$. نتیجه این است که در یک دایره، از دو وتر نامساوی، آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

۶. با توجه به این‌که شعاع دایره برابر ۱۰ است، پس $OT = OT' = ۱۰$.



از آن‌جا:

الف) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMT ($\hat{T} = ۹۰^\circ$) داریم:

$$OT^۲ + MT^۲ = OM^۲ \Rightarrow ۱۰۰ + MT^۲ = ۶۷۶ \Rightarrow MT^۲ = ۵۷۶$$

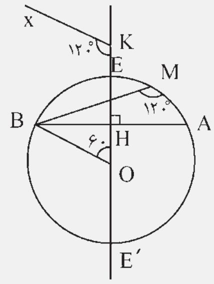
$$\Rightarrow MT = ۲۴ \Rightarrow MT' = MT = ۲۴$$

ب) OM عمودمنصف TT' است. پس $TT' = ۲TH$ است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OTM، TH ارتفاع وارد بر وتر است. پس داریم: $OT = TM = OM.TH$. از آن‌جا:

$$۱۰ \times ۲۴ = ۲۶ \times TH \Rightarrow TH = \frac{۱۲۰}{۱۳} \Rightarrow TT' = ۲TH = \frac{۲۴۰}{۱۳}$$

پ) برای محاسبه‌ی OH داریم:

$$OT^۲ = OH.OM \Rightarrow ۱۰۰ = OH.۲۶ \Rightarrow OH = \frac{۵۰}{۱۳}$$



۷. کمان در خور زاویه‌ی ۱۲۰ درجه‌ی روبه‌رو به پاره‌خط AB به طول ۸ را رسم می‌کنیم (شکل) زاویه‌ی $B\hat{O}H = ۶۰°$ و $BH = \frac{AB}{۲} = ۴$ است.

پس داریم:

الف) $$\sin B\hat{O}H = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \sin ۶۰° = \frac{۴}{R} \Rightarrow R = \frac{۴}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

ب) در همان مثلث OBH داریم:

$$OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ \Rightarrow \frac{۶۴}{۳} = OH^۲ + ۱۶ \Rightarrow OH^۲ = \frac{۱۶}{۳}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{۴}{\sqrt{۳}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

نکته‌ی ۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BOH $(\hat{H} = ۹۰°)$ زاویه‌ی $\hat{B} = ۳۰°$ است. پس ضلع مقابل به این زاویه نصف وتر است. یعنی داریم:

$$OH = \frac{OA}{۲} = \frac{\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}}{۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

نکته‌ی ۲. برای حل این مسئله می‌توانیم از دستورهای مربوط به کمان در خور یک زاویه، طول پاره‌خط نظیر کمان درخور زاویه، شعاع دایره‌ای که کمان درخور بخشی از آن است و فاصله‌ی مرکز دایره از وتر داده شده، به طور مستقیم استفاده کنیم.

۸. می‌دانیم که قطر عمود بر وتر در هر دایره عمودمنصف آن وتر است. پس $AH = BH$ است. از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH داریم:

$$OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۲۵ = ۹ + x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x = ۴$$

از آن‌جا: $AB = ۲BH = ۲ \times ۴ = ۸ \Rightarrow MB = MA + AB = ۶ + ۸ = ۱۴$

از طرف دیگر داریم:

$$MT^۲ = MA.MB \Rightarrow y^۲ = ۶ \times ۱۴ = ۸۴ \Rightarrow y = ۲\sqrt{۲۱}$$

۹. **الف)** دو دایره برون هم هستند. زیرا داریم:

$$R + R' = ۶ + ۸ = ۱۴ < OO' = d = ۲۰$$

پس هم مماس مشترک برونی دارند و هم مماس مشترک درونی.

ب) مماس مشترک برونی دو دایره را TT' و مماس مشترک درونی آن‌ها را $T_۱T'_۱$ می‌نامیم. داریم:

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۲۰^۲ - (۶ - ۸)^۲} = \sqrt{۳۹۶} = ۶\sqrt{۱۱}$$

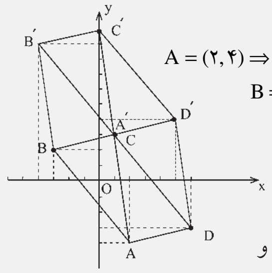
$$T_۱T'_۱ = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲} = \sqrt{۲۰^۲ - (۶ + ۸)^۲} = \sqrt{۴۰۰ - ۱۹۶} = \sqrt{۲۰۴} = ۲\sqrt{۵۱}$$

۱۰. **الف)** بردار انتقال $\overrightarrow{AC}$ است. پس داریم:

$$A = (۲,-۴),\ C = (۱,۳) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (۱-۲, ۳+۴) = (-۱,۷) = (h,k)$$

$$\Rightarrow T(x,y) = (x+h, y+k) \Rightarrow T(x,y) = (x-۱, y+۷)$$

ب) تصویر رأس‌های A، B، C و D را تحت انتقال بالا به‌دست می‌آوریم و به‌ترتیب A′، B′، C′ و D′ می‌نامیم. سپس متوازی‌الاضلاع ABCD و تصویرش متوازی‌الاضلاع A′B′C′D′ را رسم می‌کنیم. داریم:



$$A = (۲,۴) \Rightarrow A' = T(۲,-۴) = (۲-۱, -۴+۷) = (۱,۳)$$

$$B = (-۳,۲) \Rightarrow B' = T(-۳,۲) = (-۴,۹)$$

$$C = (۱,۳) \Rightarrow C' = T(۱,۳) = (۰,۱۰)$$

$$D = (۶,-۳) \Rightarrow D' = T(۶,-۳) = (۵,۴)$$

۱۱. تبدیل یافته‌ی دو نقطه‌ی دل‌خواه A و B از خط Δ را به دست می‌آوریم و A′ و B′ می‌نامیم، آن‌گاه معادله‌ی خط A′B′ را می‌نویسیم. داریم:

$$\Delta: ۲x + ۷y - ۱۴ = ۰ \quad A = (۰,۲) \in \Delta,\ B = (۷,۰) \in \Delta$$

$$T(x,y) = (x+۲, ۲y-۱)$$

$$\Rightarrow A' = T(A) = T(۰,۲) = (۰+۲, ۴-۱) = (۲,۳)$$

$$\Rightarrow A' = (۲,۳),$$

$$B' = T(B) = T(۷,۰) = (۷+۲, ۰-۱) = (۹,-۱) \Rightarrow A' = (۹,-۱)$$

$$\Rightarrow A'B': y - ۳ = \frac{-۱-۳}{۹-۲}(x-۲) \Rightarrow ۷y - ۲۱ = -۴x + ۸$$

$$\Rightarrow ۴x + ۷y - ۲۹ = ۰$$

$\Rightarrow \Delta': ۴x + ۷y - ۲۹ = ۰$ معادله‌ی تبدیل یافته‌ی خط Δ

تبدیل یافته‌ی خط Δ با این خط موازی نیست. زیرا $m_\Delta = \frac{-۲}{۷}$ و $m_{\Delta'} = \frac{-۴}{۷}$ است که این دو مساوی نیستند. در ضمن، این دو خط عمود برهم نیز نیستند.

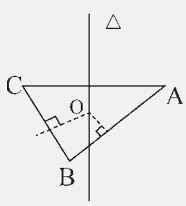
۱۲. سه نقطه‌ی A′، B′ و C′ را به هم وصل می‌کنیم. بنا به فرض مسئله داریم:

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{۱}{۳}$$

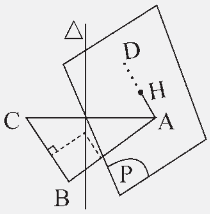
$$\Rightarrow AB \parallel A'B',\ BC \parallel B'C',\ AC \parallel A'C'$$

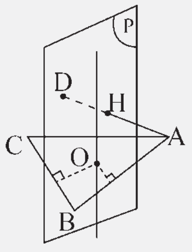
پس دو صفحه‌ی A′B′C′ و ABC (یا همان صفحه‌ی F) با هم موازی هستند.

۱۳. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی مفروض مانند A و B به یک فاصله است، صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط و اصل بین آن دو نقطه است. با توجه به این‌که مکان هندسی نقطه‌ای که از فضا از سه نقطه‌ی A، B و C که در یک صفحه قرار دارند، خطی است که در نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های این مثلث یعنی نقطه‌ی O، بر صفحه‌ی مثلث ABC عمود است. این خط را Δ می‌نامیم.



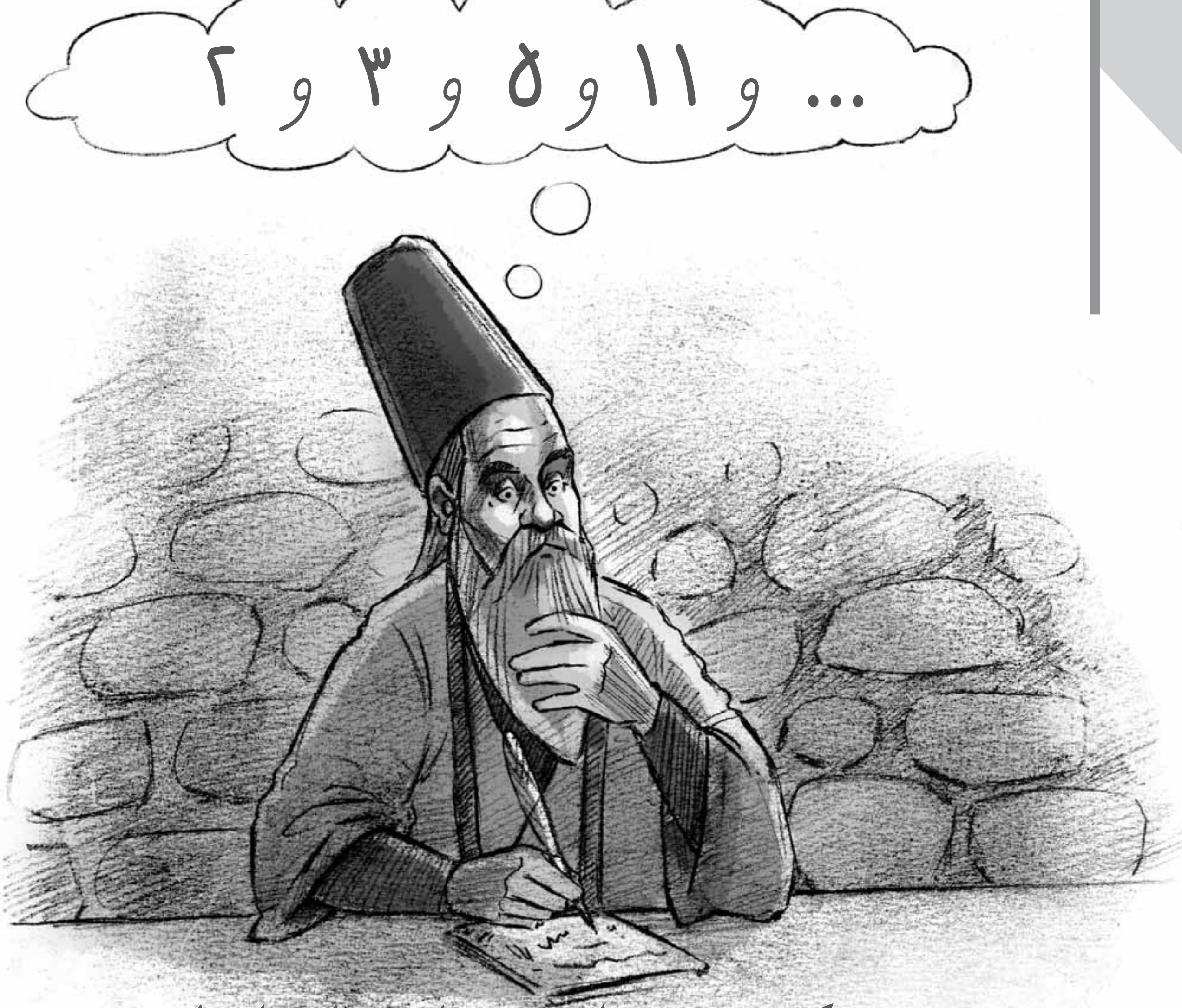
اکنون نقطه‌ی D و یکی از سه نقطه‌ی A، B یا C را در نظر می‌گیریم. مثلاً نقطه‌ی A را اختیار می‌کنیم و مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از دو نقطه‌ی A و D به یک فاصله است، رسم می‌کنیم و آن را صفحه‌ی P می‌نامیم. اکنون وضع صفحه‌ی P و خط Δ را بررسی می‌کنیم. اگر صفحه‌ی P خط Δ را در یک نقطه قطع کنند، تنها این نقطه جواب مسئله خواهد بود. در صورتی که صفحه‌ی P موازی خط Δ باشد، مسئله جواب ندارد و اگر خط Δ روی صفحه‌ی P قرار بگیرد، مکان هندسی خواسته شده، همان خط Δ است.





نکته: می‌توان با توجه به هم صفحه بودن یا هم‌صفحه نبودن چهار نقطه‌ی A، B، C و D وضع خط Δ و صفحه‌ی P را بررسی کرد.

● سید حسین اصولی



چند نکته درباره‌ی اعداد اول

جایگاه اعداد اول[1]، ساختار، رموز و پراکندگی آن‌ها در میان اعداد طبیعی، از زمان اقلیدس تا کنون، اذهان بسیاری را به خود مشغول داشته است. در این دوره‌ی ۲۵۰۰ ساله، نظرات متفاوتی نیز ارائه شده‌اند و روش‌های جست‌وجو برای به‌دست آوردن اعداد اول، ابداع و تکامل یافته‌اند؛ از غربال‌گیری اعداد در فاصله‌های دل‌خواه از میان اعداد (با حذف اعداد زوج و مضرب‌های ۳) گرفته تا جدول‌های پیشرفته.

یکی از این غربال‌ها، جدولی است که **س. پ. سوندار**، دانشجوی ریاضی هندی، در سال ۱۹۴۴ به‌دست آورده است[2]:

۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	...
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	...
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	...
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	...
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	...
...	...	...	...	...	...

غربال بالا از بی‌شمار تصاعد حسابی نامحدود تشکیل شده است که جمله‌ی اول آن‌ها، به‌ترتیب جمله‌های تصاعد اولیه است:

۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۶ و ...

جایگاه اعداد اول[1]، ساختار، رموز و پراکندگی آن‌ها در میان اعداد طبیعی، از زمان اقلیدس تا کنون، اذهان بسیاری را به خود مشغول داشته است

قدر نسبت این تصاعدها به ترتیب عددهای فرد متوالی‌اند که از ۳ شروع شده باشند:

$$d_1 = 3\ ,\ d_2 = 5\ ,\ d_3 = 7\ ,\ d_4 = 9\ ,\ \cdots$$

اگر عددی مثل N در این جدول وجود داشته باشد، عدد $2N+1$ غیراول است و اگر عدد N در این جدول وجود نداشته باشد، $2N+1$ عددی اول است.

سؤال: چگونه می‌توان اول بودن یا نبودن $2N+1$ را بر اساس جدول فوق ثابت کرد؟

جواب: با عنایت به این‌که اعداد فرد مثبت به‌صورت $2a+1$ نوشته می‌شوند $(a \geq 0)$، در واقع هر کدام از اعداد جدول به‌صورت $[(2a+1)n]+a$ هستند و داریم:

$$a,n \geq 1\ ;\ a,n \in N$$

حال اگر $[(2a+1)n]+a$ به‌جای N در $2N+1$ قرار گیرد، حاصل غیراول است و داریم:

$$2[[(2a+1)n]+a]+1 = 2[2an+n+a]+1$$
$$= 4an+2n+2a+1 = (2a+1)(2n+1)$$

ساختار واقعی اعداد اول از چیست؟

در میان اعداد طبیعی، مضرب‌های فرد عدد ۳ به‌صورت $6n+3$ نوشته می‌شوند که حاصل جمع دو مضرب ۳ هستند و داریم:

$$6n+3 = 3n+(3n+3)\ ;\ n \in N\ ,\ n \geq 0$$

اگر $6n+3$ را به‌صورت جمع دو عدد متوالی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$6n+3 = 3n+(3n+3) = (3n+1)+(3n+2)$$

ملاحظه می‌شود، هیچ‌یک از دو عدد بالا، به تنهایی مضرب ۳ نیستند. این واقعیت نشان می‌دهد که اعداد اول (به‌جز ۳)، چون مضرب ۳ نیستند، نمی‌توانند به‌صورت $(3n+1)+(3n+2)$ نوشته شوند. بلکه به‌صورت مجموع دو عدد متوالی هستند که حتماً در یکی از آن‌ها مضرب ۳ است. پس خواهیم داشت:

$$P = 3n+(3n \pm 1) = 6n \pm 1$$
$$p \geq 5\ ,\ n \geq 1\ ,\ n \in N$$

به‌عبارت دیگر، هر عدد اولی (به‌جز ۳ و ۲) از مجموع یک مضرب ۳ با اولین عدد کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از آن به‌دست می‌آید. n باید چگونه باشد تا حاصل $6n \pm 1$ اول شود؟ جایگاه واقعی اعداد اول کجاست؟

با توجه به این‌که $P = 6n \pm 1$، اگر دو عددی که در n فاصله از p و در دو طرف آن قرار دارند، در $6n \pm 1$ قرار گیرند، حاصل، غیراول و مضربی از p می‌شود.

چگونه تعیین می‌شود که حاصل $6n-1$ غیر اول است یا حاصل $6n+1$؟

الف) اگر $P = 6n-1$ آن‌گاه، حاصل عبارت‌های زیر غیراول و مضربی از p خواهد بود:

۱) $[6(P+n)]-1 = [6(6n-1+n)]-1 = [6(7n-1)]-1 = 42n-7$

۲) $[6(P-n)]+1 = [6(6n-1-n)]+1 = [6(5n-1)]+1 = 30n-5$

ب) اگر $P = 6n+1$ آن‌گاه، حاصل عبارت‌های زیر غیراول و مضربی از p خواهد بود:

۳) $[6(P+n)]+1 = [6(6n+1+n)]+1 = [6(7n+1)]+1 = 42n+7$

۴) $[6(P-n)]-1 = [6(6n+1-n)]-1 = [6(5n+1)]-1 = 30n+5$

با توجه به این‌که n برابر است با $\frac{P \pm 1}{6}$، چهار عبارت بالا را می‌توان در قالب عبارت زیر بیان کرد:

$$\left[6\left(Px \pm \frac{Py \pm 1}{6}\right)\right] \pm 1 \;;\quad x,y \geq 1 \;;\quad x,y \in N \quad 2,3 \nmid xy$$

به‌طور کلی، حاصل ۱ − ۶n یا ۱ + ۶n زمانی غیراول می‌شود که عبارت مذکور به چهار حالت زیر باشد:

$$1)\ \left[6\left(Px + \frac{Py+1}{6}\right)\right] - 1 \qquad 2)\ \left[6\left(Px - \frac{Py+1}{6}\right)\right] + 1$$

$$3)\ \left[6\left(Px - \frac{Py-1}{6}\right)\right] - 1 \qquad 4)\ \left[6\left(Px + \frac{Py-1}{6}\right)\right] + 1$$

مثال ۱. عبارت ۵۵ = ۱ + ۶n، n چه خصوصیتی دارد که حاصل ۱ + ۶n غیراول است؟

حل: عدد ۹ حاصل $\left(11 - \frac{11+1}{6}\right)$ است و طبق رابطه‌ی ۳ داریم:

$$\left[6\left(Px - \frac{Py+1}{6}\right)\right] + 1 = \left[6\left(11 - \frac{11+1}{6}\right)\right] + 1$$

$$= (6 \times 9) + 1 = 5 \times 11$$

مثال ۲. چرا حاصل ۱ + ۶n و ۱ − ۶n به ازای ۲۰ = n، هر دو غیر اول‌اند؟

حل:

الف) ۱۱۹ = ۱ − ۶n. طبق رابطه‌ی ۱ داریم:

$$\left[6\left(Px + \frac{Py+1}{6}\right)\right] - 1 = \left[6\left(17 + \frac{17+1}{6}\right)\right] - 1$$

$$= (6 \times 20) - 1 = 7 \times 17$$

ب) ۱۲۱ = ۱ + ۶n. طبق رابطه‌ی ۲ داریم:

$$\left[6\left(Px - \frac{Py+1}{6}\right)\right] + 1 = \left[6\left(11 \times 2 - \frac{11+1}{6}\right)\right] + 1$$

$$= [6(22-2)] + 1 = (6 \times 20) + 1 = 11 \times 11$$

ـ در طول چندین قرن، ریاضی‌دانان تصور می‌کردند که اعداد اول باید رابطه‌ی عجیب و دشواری داشته باشند. در حالی که آن‌چه ذکر شد، نشان می‌دهد حاصل ۱ − ۶n یا ۱ + ۶n در اصل اول است، مگر این‌که n به صورت $\left(Px \pm \frac{Py \pm 1}{6}\right)$ باشد که ضرایب y و x، یک عدد اول مشترک باشد. اعداد اول، با جایگاه مشخص و ثابت و بر اساس نظم و منطق، در میان اعداد طبیعی واقع‌اند. این جایگاه ناملموس و نامرئی است و تنها با بیان روابط اشاره شده قابل درک و فهم است. سؤال اساسی این است که یافتن nهایی که فقط به تولید اعداد اول منجر شوند، چه‌قدر اهمیت دارد؟

با عنایت به مطالب ارائه شده، می‌توان رابطه‌هایی را برای یافتن اعداد بیان کرد:

رابطه‌ی اول:

$$P = 2n + 1 : n \neq 2an + n + aa,\ n \geq 1 \quad a,n \in N$$

رابطه‌ی دوم:

$$\begin{cases} P = 6n + 1 : n \neq Px + \dfrac{Py-1}{6} \ \text{یا}\ Px - \dfrac{Py+1}{6} \\ P = 6n - 1 : n \neq Px + \dfrac{Py+1}{6} \ \text{یا}\ Px - \dfrac{Py-1}{6} \end{cases}$$

$$x,y \geq 1,\ x,y \in N,\ 2,3 \nmid y$$

پی‌نویس

۱. جدول را می‌توان به این صورت نیز تنظیم کرد:

$(3\times n)+1$	⋯	$(3\times5)+1$	$(3\times4)+1$	$(3\times3)+1$	$(3\times2)+1$	$(3\times1)+1$
$(5\times n)+2$	⋯	$(5\times5)+2$	$(5\times4)+2$	$(5\times3)+2$	$(5\times2)+2$	$(5\times1)+2$
$(7\times n)+3$	⋯	$(7\times5)+3$	$(7\times4)+3$	$(7\times3)+3$	$(7\times2)+3$	$(7\times1)+3$
$(9\times n)+4$	⋯	$(9\times5)+4$	$(9\times4)+4$	$(9\times3)+4$	$(9\times2)+4$	$(9\times1)+4$
$(11\times n)+5$	⋯	$(11\times5)+5$	$(11\times4)+5$	$(11\times3)+5$	$(11\times2)+5$	$(11\times1)+5$
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

منبع

۱. «عددهای اول»، امیل بورل، ترجمه‌ی پرویز شهریاری.