

بسم الله الرحمن الرحيم

رشد
متوسطه
مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



دوره‌ی نوزدهم / شماره‌ی ۲ / زمستان ۱۳۸۸

♦ مدیر مسئول: محمد ناصری ♦ سردبیر: حمیدرضا امیری
♦ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ♦ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
♦ هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی،
احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمد رضا
هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی پور و تشکر از همکاری
ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ♦ ویراستار ادبی: کبری محمودی

♦ پایگاه اینترنتی: www.roshd-mag.ir

♦ Borhanm@roshdmag.ir

♦ پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲

♦ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

♦ تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲

♦ تلفن امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰

♦ شمارگان: ۱۲۰۰۰ نسخه

♦ چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

حرف اول

سردبیر

ریاضیات در ایران / خوارزمی‌ها و عیلامی‌ها

پرویز شهریاری

رسم نمودار تابع f از روی نمودار تابع f

احمد قندهاری

کاربردهای قضیه‌ی تقسیم

حمیدرضا امیری

عدد پی (π)

تونلی کریمی / غلامرضا یاسی پور

المپیاد ریاضی در یوگسلاوی سابق

هوشنگ شرقی

تابع چندجمله‌ای

میرشهرام صدر

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

احسان یار محمدی

رویکرد هندسی و رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه

محمد هاشم رستمی

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

دکتر محمدعلی فریبرزوی عراقی

چند مسئله در جبر هندسه و هندسه‌ی تحلیلی

دکتر احمد شرف‌الدین

با راهیان المپیادهای ریاضی

غلامرضا یاسی پور

معادله‌های سیاله و روش‌های حل آن‌ها

سید محمد رضا هاشمی موسوی

مسائل برای حل

حل تشریحی مسائل

رشد متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

■ نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات میحت درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

■ طرح معماهای ریاضی

■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجله در حکم، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

امام صادق (ع) در حدیثی گهربار می‌فرمایند: «عالم به علوم زمان خود باشید.» شاید یکی از تعبیرات و تفسیرهای این روایت نورانی، مطلع بودن و آگاه بودن از علوم زمان است. اما با پیشرفتی که علوم در زمان فعلی کرده‌اند و گسترش روبه‌رشد علوم پایه، مهندسی، تجربی، انسانی و... شاید این گزاره درست باشد که در زمان حاضر، عالم به کسی اطلاق می‌شود که نشانی بیشتری بداند و برای هر موضوع مورد نیاز خود، دقیقاً بداند از چه مراجع و منابعی باید استفاده کرد. البته این اطلاع داشتن و نشانی بلد بودن که متأسفانه امروزه به صورت «copy-paste» درآمده است، اصلاً قابل اطمینان و اعتماد نیست و اطلاعاتی که در وب لاگ‌ها و سایت‌ها انباشته شده‌اند، همگی از صحت کافی برخوردار نیستند. حتی در بعضی موارد با غرض‌ورزی و سودجویی‌هایی نیز همراه هستند. اطلاعات باید بر مبنای پژوهش و تحقیق آن‌هم توسط افراد و مراکز تأیید شده تهیه شده باشند تا بتوان به آن‌ها تکیه کرد و براساس آن‌ها تصمیم گرفت یا تجزیه و تحلیل درستی صورت داد. در واقع برای ورود به هر مبحثی و یا مطالعه و حرکت رو به رشد در هر موضوعی، ابتدا باید با استفاده از منابع اصیل و محکم، درباره‌ی آن مطلب یا موضوع و حتی تاریخچه و فلسفه‌ی آن، اطلاعات کافی جمع‌آوری کنیم و به اصطلاح، خودمان را آماده کنیم و با چشمی باز، گوشی شنوا و قلبی محکم، به سراغ آن موضوع برویم.

بزرگی می‌گفت: شیطان از سه راه می‌تواند به وجود انسان‌ها راه یابد و باعث گمراهی آن‌ها شود: یکی چشم، یکی گوش و سومی قلب یا دل. ایشان می‌فرمودند: به هر چیزی نمی‌شود نگاه کرد، به هر چیزی نمی‌توان گوش داد و به هر چیزی نمی‌توان دل داد. برای هر کدام از موارد فوق، ابتدا باید مسلح و قوی شد و سپس به راه ادامه داد. چه بسیار انسان‌ها که با نگاه کردن به یک نوشته یا به یک تصویر، برای همیشه در ورطه‌ی گمراهی افتاده و به ناکجا آباد رفته‌اند.

چه قدر کتاب‌های ناخوانده دارم که جرئت خواندن آن‌ها را نداشته‌ام و منتظرم تا به سپری قوی و محکم دست پیدا کنم و پس از آن به مطالعه‌ی آن‌ها بپردازم. راستی، قلبی که «عرش خداست»، جای چه چیز یا چیزهای دیگری می‌تواند باشد؟ خداوند می‌فرماید: «قلب مؤمن عرش من است.» پس چه طور است که خیلی آسان آن را به هر موجودی یا مطلبی یا فیلمی یا... گره زده و وابسته‌اش می‌شویم؟ عزیزان دانش‌آموز، بیایید همان‌طور که برای حل یک مسئله‌ی ریاضی کوتاه‌ترین و بهترین راه را انتخاب می‌کنیم و با استفاده‌ی صحیح از فرض مسئله به حکم می‌رسیم، در تمامی مسائل موجود در زندگی و اجتماع نیز درست، محکم، دقیق و با پشتوانه‌ی تحقیق و پژوهش گام برداریم، ان شاء الله.

سردبیر

خیارزمی و عیلامی‌ها

جبر است و جبر رشته‌ی اصلی ریاضیات به شمار می‌آید.

خیارزمی دانشمندی است که در پایان سده‌ی دوم هجری قمری بوده، تا سال ۲۳۲ زیسته و در سال‌های پس از آن در گذشته است. او به جز ریاضیات، در شاخه‌های دیگری مثل نجوم، جغرافیا، استرلاب، ساعت آفتابی و جز آن هم نوشته‌هایی داشته است که کمتر به دست ما رسیده اند.

خیارزمی کتابی درباره‌ی «جمع و تفریق» داشته که در زمان ما تنها برگردان لاتینی آن در دست است. او از عددشماری هندی و نوشتن عددها به یاری آن‌چه که هندی‌ها به کار می‌بردند و بعدها در همه‌ی جهان با تفاوت‌هایی مرسوم گشت، یاد می‌کند.

جدولی هم برای سینوس‌ها تنظیم کرده و ارائه داده است. در کتاب‌ها سینوس را «جیب» به کار برده‌اند که به معنای «گریبان» است. بعدها وقتی کتاب خیارزمی به فرانسه ترجمه شد، همین جیب را به سینوس ترجمه کردند که باز هم به معنای «گریبان» است و من نمی‌فهمم سینوس چه ربطی به گریبان دارد. چه بسا خیارزمی از واژه‌ی «جیب» که واژه‌ای فارسی (پهلوی) است و به معنای چوب عمودی که در زمین قرار گرفته استفاده کرده باشد، ولی هجی کردن واژه‌ی جیب به دلیل داشتن حرف

از بزرگ‌ترین ریاضی دانان همه‌ی دوران‌ها بوده است.

آنتیسمار^۱ فرانسوی می‌گوید: «امروز یک موضوع را نمی‌توان فراموش کرد و آن این است که محمد، فرزند موسی خوارزمی، در واقع معلم اروپایی‌های جدید در دانش

درباره‌ی محمد فرزند موسی خوارزمی، باید اندکی بیش تر صحبت کنیم. جورج سارتون در مقدمه‌ی تاریخ دانش، سده‌ی نهم میلادی را «دوران خوارزمی» نامیده است. او گفته است: «اگر همه‌ی جهت‌ها در نظر گرفته شود. خوارزمی یکی



«پ» که ناآشنا بود، آن را به «ب» تبدیل کرد، چون در زبان عربی «پ» وجود ندارد، ولی «ب» وجود دارد و وقتی به فرانسوی هم برگردان شد، از همان واژه‌ی جیب که به معنای گریبان است، استفاده کردند.

در زمان خوارزمی، اخترشناسان بسیاری وجود داشتند که به طور خلاصه از آن‌ها یاد می‌کنیم:

احمد فرزند محمد، اهل نهاوند که به حاسب مشهور بوده است. او هم اخترشناس و هم ریاضی‌دان بود و در نیمه‌ی دوم سده‌ی دوم هجری در نیشابور می‌زیست.

یحیی فرزند

ابومنصور ابوعلی

که با فضل فرزند

سهل سرخسی که

وزیر مأمون،

خلیفه‌ی عباسی

بود، نسبت

داشت. او به

«بیت الحکمه» رفت

و کارهای اخترشناسی

خود را در آن‌جا انجام می‌داد.

خالد فرزند عبدالملک مروودی که

اهل مروود خراسان هم‌زمان با مأمون

عباسی و مدتی هم در دمشق بود.

ابوسعید جرجانی که کتاب‌های

«مسئله‌های هندسی» و «استخراج خط

نصف النهار» او در قاهره موجودند.

کتاب دوم راکارل شو به زبان آلمانی

برگردانده است.

سرگذشت ریاضیات

در سال ۱۳۷۹ گروه ریاضی

انتشارات مدرسه کتابی به نام «فرهنگ

ریاضیات» منتشر کرد که فصل نخست آن

با عنوان «ریاضیات، واژه‌شناسی،

فلسفه‌ی تاریخ، کاربردها و سرگذشت ریاضیات نظری»، به قلم این جانب است. این مقاله در ۵۳ صفحه (صفحه‌ی ۵ تا ۵۸) است که همه‌ی خوانندگان علاقه‌مند را به مطالعه‌ی آن دعوت می‌کنم. در این جا برخی از نکته‌های اساسی این مقاله را می‌آوریم.

واژه‌ی ریاضیات به جای واژه‌ی «ماته‌ماتیک»^۲ گذاشته شده که خود از «ماته‌ما»^۳ به معنای دانش و دانایی آمده است.

غالباً واژه‌ی ریاضیات را برگرفته

از واژه‌ی ریاضت دانسته‌اند،

چرا که ریاضت تنها به

معنای «پرهیزکاری

بدنی» نیست، بلکه

«در خود فرو

رفتن»،

«فهمیدن» و

«رسیدن به رازها»

را هم می‌رساند.

دیدگاه‌های دیگری

هم وجود دارند.

بسیاری از زبان‌شناسان با

بخش‌های زبان‌شناختی خود

نتیجه می‌گیرند: «ماته‌ما» همان واژه‌ی

پارسی «مزدا» ست که همان معنای

واژه‌ی یونانی را دارد: «دانا» و «آگاه».

دیدگاه سوم معتقد است، واژه‌ی

«ریاضی» از واژه‌ی پارسی «راز» به

معنای «اندازه گرفتن» آمده است این

واژه‌ی «راز» هنوز در واژه‌های «تراز» و

«ترازو» با حفظ معنای خود باقی مانده

است. در واژه‌ی «ترازو»، «ترا» به

معنای «این سو و آن سو» و «راز» به معنای

اندازه‌گیری است. پسوند «او» بسیاری

جاها در زبان پارسی به معنای «بسیار» به

کار رفته است. به این ترتیب، «ترازو»

یعنی «اندازه‌گیری و مقایسه‌ی بسیار».

در ضمن، واژه‌ی «مر» در زبان پارسی (که در واژه‌های «شمر» و «شمردن» وجود دارد.) به معنای شمردن و محاسبه کردن با دست است. به این ترتیب، اینان به جای واژه‌ی ریاضیات، واژه‌ی «راز و مر» را پیشنهاد می‌کنند که درست به معنای «اندازه گرفتن و شمردن» است و اگر ریاضیات را دانش رابطه‌های کمیتی و شکل‌های فضایی بدانیم، واژه‌ی «راز و مر» می‌تواند به تنهایی درست باشد.

اگر واژه‌ی «ریاضیات» را (که نه در

ترکیب زیباست و نه به روشنی معرف

یکی از دانش‌هاست)، برگرفته از واژه‌ی

«ریاضت» فرض کنیم، می‌تواند اثری

منفی در علاقه‌مندان به این دانش

بگذارد، زیر همگان «ریاضت» را به

معنای «سختی کشیدن»، «در انزوا فرو

رفتن» و «فشار بیش از اندازه به خود»

می‌دانند که با ماهیت دانش ریاضی

سازگاری ندارد. ولی این تغییر شبیه

تغییری است که برخی برای واژه‌ی جبر

می‌آورند و آن را به معنای «زور» و «فشار»

می‌دانند، در حالی که خوارزمی واژه‌ی

جبر را به معنای «جبران کردن» گرفته

است. چرا که به تعبیر خوارزمی و به زبان

امروزی می‌توان مقدار منفی را از یک

سمت معادله به سمت دیگر معادله برد تا

مقداری مثبت شود (یعنی جبران شود).

در مصراع سعدی: «که جبر خاطر

مسکین بلا بگرداند»، واژه‌ی «جبر»

درست به همین معنای جبران کردن به کار

رفته است.

جدا از این بحث که «ماته‌ما» از

واژه‌ی «مزدا» گرفته شده یا ریاضیات از

واژه‌ی «راز» آمده است، به نظر می‌رسد

اگر قرار باشد واژه‌ی پارسی به جای

«ریاضیات» انتخاب شود، بهترین

پیشنهاد همان واژه‌ی «راز و مر» باشد که

هم زیباست و هم از نظر معنا با
واژه‌ی «ریاضیات»
سازگار است.

من به شرح
ادامه‌ی این مقاله
پایان می‌دهم و تنها
عنوان‌های آن را یاد
می‌کنم:

«موضوع

ریاضیات و بستگی آن با
صنعت و دیگر دانش‌ها»

«ریاضیات و دانش‌های دیگر»

«ریاضیات و صنعت»

«دو انگیزه‌ی

پیشرفت ریاضیات»

«دوره‌ی دوم تکامل

ریاضیات یا ریاضیات یونانی»

«دوره‌ی سوم تکامل ریاضیات یا ریاضیات

مقدماتی»، «ایران، آسیای میانه
و خاور نزدیک»، «اروپای
غربی تا سده‌ی
شانزدهم میلادی»،
«دوران پیدایش
ریاضیات با
کمیت‌های متغیر»،
«ریاضیات
امروزی»، «پایان
سده‌ی نوزدهم و آغاز
سده‌ی بیستم.»



پی نوشت.....

1. A. mare
2. mathematike
3. mathema

ایرانی»، «سرگذشت ریاضیات نظری از
آغاز تا امروز»، «برداشت کلی»، «دوره‌ی
بعدی ریاضیات»، «دوره‌ی ریاضیات

شیخ ابوعلی سینا در کتاب مشهور شفا علوم زمان خود را به سه دسته تقسیم کرده است:
اول علوم عالی و آن‌ها علومی هستند که با ماده سروکار ندارند و درک و فهم آن‌ها فقط با تعقل
صورت می‌گیرد و آن‌ها را علوم ماوراءالطبیعه نامند. مانند الهیات و فلسفه و منطق که علوم
اولی نیز نامیده می‌شوند.

دوم- علوم اوسط یا وسطی هستند که هم با ماده سروکار دارند و هم برای یاد گرفتن علوم
اولی دانستن آن‌ها لازم است و آن‌ها علوم ریاضی هستند چنانچه فلاسفه‌ی قدیم برای درک مطالب
علمی خود ابتدا ریاضیات را فرامی‌گرفتند.

سوم- علوم ادنی یا دانی هستند که فقط با ماده سروکار دارند و آن‌ها را با مشاهده و تجربه
می‌توان درک کرد و آن‌ها علوم طبیعی هستند که امروزه آن‌ها را علوم تجربی گویند.

اما علوم ریاضی در نظر شیخ ابوعلی سینا به چهار قسمت تقسیم می‌شد:
۱. علم اعداد که عبارت از آشنا شدن به انواع اعداد و دانستن خاصیت هر کدام و نسبت آن‌ها
با یکدیگر است- جمع و تفریق ارقام هندسی و جبر و مقابله نیز جزو این علم محسوب می‌شد.

۲. علم هندسه- که عبارت از آشنایی به احوال خطوط و اشکال سطوح و مجسمات و مساحات
اشکال و نسبت بین آن‌ها و علوم جر اثقال و اوزان و موازین و آلات جریه و مناظر و موایا و نقل
میه باشد.

۳. علم هیأت- که عبارت از آشنایی به عالم و شکل و اوضاع و مقادیر و حرکات ستارگان
است و از فروع این علم همان زیجات و تقاویم می‌باشد.

۴. علم موسیقی- که عبارت از آشنا شدن به انواع نغمه‌ها و اتفاق و اختلاف آن‌ها و ابعاد و
اجناس و جمع و انتقالات و ارتفاع آن‌ها و کیفیت تألیف لحن هاست، علم تهیه‌ی آلات موسیقی
نیز از متفرغات این علم است.

این سینا یکایک این علوم را که از قدما به او رسیده می‌دانسته و اضافاتی نو نیز بر آن‌ها نموده
است به خصوص در کتاب المجسطی اضافاتی به آخر آن نموده است. نکته‌ی قابل توجه آن است
که در نظر این سینا علم هیأت یکی از علوم اساسی ریاضی است و به آن توجه به خصوصی داشته
است. به‌طور کلی دانشمندان قدیم به این علم اهمیت فوق‌العاده‌ای می‌داده‌اند. هم چنین شیخ
علم موسیقی را نیز جزو علوم ریاضی دانسته است.

تقسیم‌بندی علوم از نظر ابن سینا

تفریح اندیشه



برگرفته از مجله‌ی ریاضی یکان/
شماره‌ی مسلسل ۲۸ / شهریورماه ۱۳۴۵

رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f

نقطه‌ی اکسترمم تابع f' :

$$U'(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

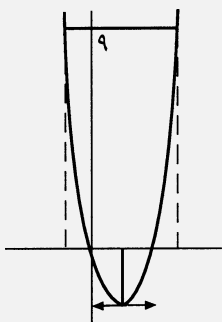
$$U(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0$$

طول‌های اکسترمم تابع f برابرند با طول‌های نقاط تقاطع

تابع f' با محور x ها:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$U'(x)$		-	-	-	+	+	
$U(x)$	$+\infty$	9	0	-3	0	9	$+\infty$



۱. به طوری که ملاحظه شد، $x = 2$ و $x = 0$ طول‌های

نقاط اکسترمم منحنی تابع f هستند که برابر طول‌های نقاط

تقاطع منحنی تابع f' با محور x هایند. پس می‌توان گفت:

نتیجه‌ی ۱. طول‌های نقاط اکسترمم منحنی تابع f برابر

است با طول‌های نقاط تقاطع منحنی تابع f' با محور

x ها؛ به شرطی که در نقاط اکسترمم منحنی تابع f ،

$f'(x)$ مساوی صفر باشد.

ابتدا در توابع کثیرالجزءه، رابطه‌ی بین منحنی تابع f و منحنی تابع f' را به صورت شهودی بررسی و سپس نتایج را بیان می‌کنیم.

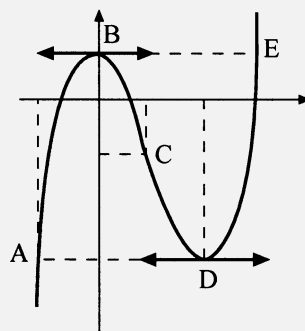
مثال: تابع f به معادله‌ی $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را رسم می‌کنیم.

طول‌های اکسترمم تابع f :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{طول نقطه‌ی عطف تابع } f$$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	-	-	+	
$f(x)$	$-\infty$	-3	1	-1	-3	1	$+\infty$



حال تابع f' به معادله‌ی $U(x) = f'(x) = 3x^2 - 6x$ را رسم می‌کنیم. طول نقطه‌ی عطف تابع f برابر است با طول

۲. اگر کمی توجه کنیم، درمی یابیم که طول نقطه‌ی عطف تابع f برابر ۱ است. از طرف دیگر، طول نقطه‌ی اکسترمم منحنی تابع f' برابر ۱ است. پس می توان گفت:

نتیجه‌ی ۲. طول‌های نقاط عطف منحنی تابع f برابر است با طول‌های نقاط اکسترمم منحنی تابع f' .

۳. به طوری که در شکل تابع f ملاحظه می شود، تقعر قطعه‌ی منحنی ABC به طرف پایین است. پس y'' تابع f در فاصله‌ی طول‌های نقاط A و C یعنی در فاصله‌ی $[-1, 1]$ منفی است. از طرف دیگر، y'' تابع f همان U' است. پس U' در این فاصله منفی و بنابراین تابع U در این فاصله اکیداً نزولی است.

نتیجه‌ی ۳. اگر تقعر منحنی تابع f در فاصله‌ی $[a, b]$ به سمت پایین (جهت منفی محور y) باشد، منحنی f' در این فاصله اکیداً نزولی است.

۴. هم چنین می توان گفت که تقعر قطعه‌ی منحنی CDE در تابع f به سمت بالا (جهت مثبت محور y) است. پس y'' در فاصله‌ی طول‌های نقاط C و E یعنی در فاصله‌ی $[1, 3]$ مثبت است. از طرف دیگر، y'' همان U' است. پس U' در این فاصله مثبت و در نتیجه، تابع U در این فاصله اکیداً صعودی است.

نتیجه‌ی ۴. اگر تقعر منحنی تابع f در فاصله‌ی $[c, d]$ به سمت بالا (جهت مثبت محور x) باشد، منحنی f' در این فاصله اکیداً صعودی است.

۵. باز به شکل منحنی تابع f توجه کنیم. منحنی تابع f روی قطعه‌ی منحنی AB اکیداً صعودی است. یعنی تابع f در فاصله‌ی طول‌های این دو نقطه یعنی فاصله‌ی $[-1, 0]$ اکیداً صعودی است. پس عبارت $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است؛ یعنی: $f' \geq 0$. بنابراین: $U(x) \geq 0$ و در نتیجه نمودار تابع $U(x)$ در فاصله‌ی $[-1, 0]$ بالای محور x یا روی محور x هاست.

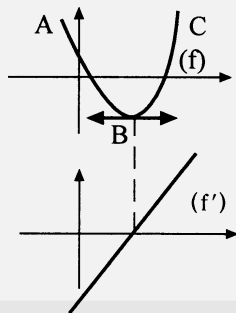
نتیجه‌ی ۵. اگر منحنی تابع f در فاصله‌ی $[a, b]$ اکیداً صعودی باشد، آن گاه عبارت $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است. بنابراین نمودار f' که همان نمودار تابع $U(x)$ است، در این فاصله بالای محور x یا روی محور x هاست.

۶. منحنی تابع f روی قطعه منحنی BCD اکیداً نزولی است. پس تابع f در فاصله‌ی طول‌های نقاط D و B ، یعنی فاصله‌ی $[0, 2]$ ، اکیداً نزولی است و عبارت $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است. بنابراین، نمودار f' که همان نمودار تابع $U(x)$ است، در این فاصله زیر محور x یا روی محور x هاست.

نتیجه‌ی ۶. اگر منحنی تابع f در فاصله‌ی $[b, c]$ اکیداً نزولی باشد، آن گاه $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است. بنابراین، نمودار f' در این فاصله پایین محور x یا روی محور x هاست.

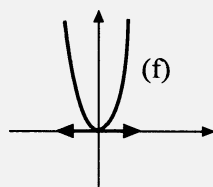
اکنون با توجه به شش نتیجه‌ی فوق تمرین‌های زیر را حل می کنیم. در مثال‌های زیر سعی شده است، محور y ها در دو نمودار تابع f و f' در یک امتداد باشد تا از نتایج گفته شده بهتر بهره گیری شود.

مثال ۱. فرض می کنیم نمودار یک تابع درجه‌ی دوم به صورت شکل زیر باشد. با توجه به مطالب گفته شده، منحنی مشتق آن را رسم می کنیم.

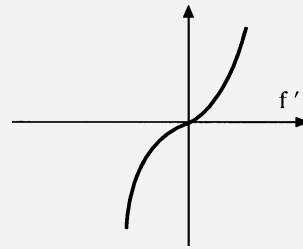


توضیح: تقعر منحنی f به طرف بالاست، پس تابع f' اکیداً صعودی است و طول نقطه‌ی B (نقطه‌ی مینی مم تابع f) برابر طول نقطه‌ی تقاطع منحنی f' با محور x هاست. با توجه به این که تابع درجه‌ی دوم است، مشتق آن تابعی از درجه‌ی اول خواهد شد و نمودار آن یک خط راست است.

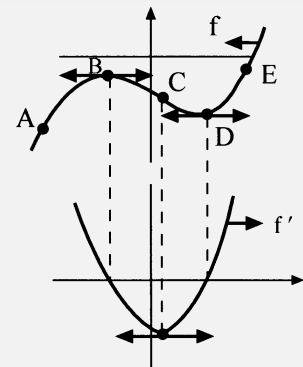
مثال ۲. فرض می کنیم تابع f به معادله‌ی $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ، $f(x) = x^{2n}$ باشد. نمودار این تابع به صورت زیر است:



تابع f' به صورت یک منحنی و اکیداً صعودی است و از مبدأ مختصات می‌گذرد.



مثال ۳. فرض می‌کنیم نمودار تابع f به صورت زیر باشد. با توجه به مطالب گفته شده، نمودار f' نموداری است که زیر نمودار تابع f آمده است.

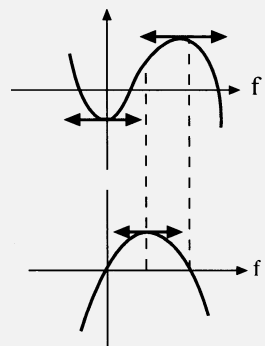


توضیح: طول‌های نقاط B و D برابر طول‌های نقاط تقاطع منحنی f' با محور x هاست. نقطه‌ی C ، نقطه‌ی عطف منحنی تابع f است که طول آن برابر طول اکسترمم منحنی تابع f' است.

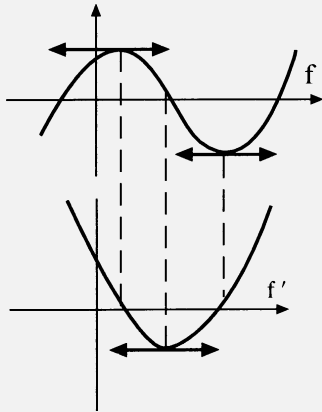
تقریر قطعه‌ی منحنی ABC به طرف پایین است. پس منحنی تابع f' در فاصله‌ی طول‌های نقاط A و C اکیداً نزولی (با توجه به نتیجه‌ی ۳) و تقریر قطعه‌ی منحنی CDE به طرف بالا است. بنابراین منحنی تابع f' در فاصله‌ی طول‌های نقاط C و E اکیداً صعودی است (با توجه به نتیجه‌ی ۴).

مثال ۴. نمودار

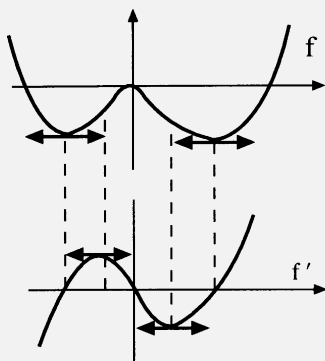
تابع f به صورت شکل مقابل است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.



مثال ۵. نمودار تابع f به صورت شکل زیر است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.



مثال ۶. نمودار تابع f به صورت شکل زیر است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.

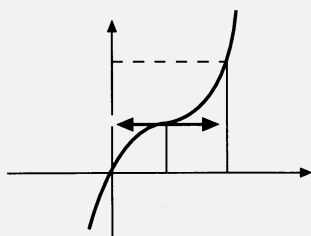


۷. حال تابع f به معادله‌ی $f(x) = (x-1)^3 + 1$ را در نظر می‌گیریم. جدول تغییرات و نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. ضمناً $D_f = R$ و تابع در R پیوسته است.

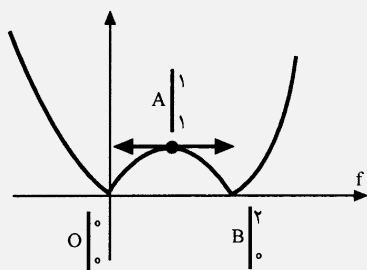
$$f'(x) = 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

طول نقطه‌ی عطف تابع f = ریشه‌ی مضاعف؛ $x = 1$

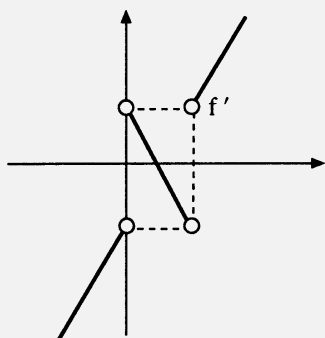
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$



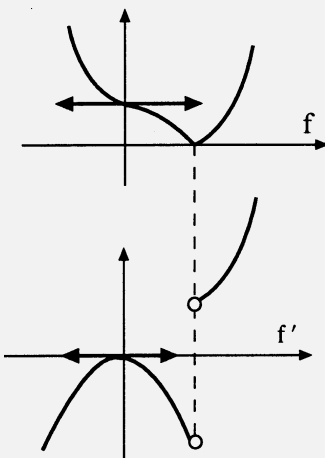
۸. تابع f به معادله‌ی $f(x) = |x^2 - 2x|$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع چنین است:



توجه: این تابع در نقطه‌ی A ماکزی‌مم نسبی است، لذا طول نقطه‌ی A برابر طول نقطه‌ی تقاطع منحنی f' با محور x است. این تابع در نقاط O و B مینی‌مم نسبی است، نظر به این که تابع f در نقاط O و B مشتق پذیر نیست، لذا تابع f' در نقاط به طول‌های (صفر و ۲) ناپیوسته است و در نتیجه نمودار تابع f' چنین است:



مثال ۸. اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه نمودار مشتق تابع f نموداری است که زیر آن آمده است:

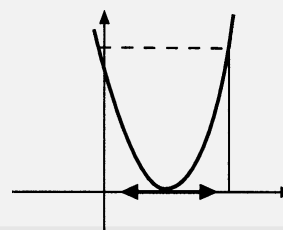


حال منحنی تابع f' به معادله‌ی $U(x) = 3(x-1)^2$ را در نظر می‌گیریم. این تابع هم در R پیوسته است.

طول نقطه‌ی عطف تابع f = طول اکسترمم تابع f'

$$U'(x) = 6(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
U'	-	-	0	+	+
U	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

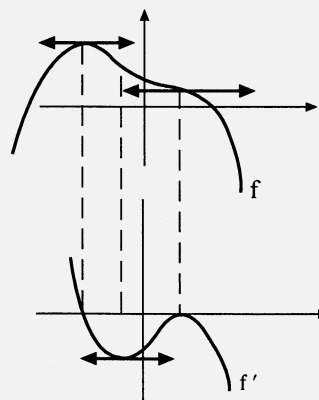


توجه: $x=1$ طول نقطه‌ی عطف تابع f است. پس بنابراین نتیجه‌ی $x=1$ ، 2 طول نقطه‌ی اکسترمم تابع f' است.

چون $x=1$ ریشه‌ی مضاعف مشتق تابع f است، پس $x=1$ طول نقطه‌ی عطفی از تابع f است که خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف موازی محور x است. بنابراین، ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع f در این نقطه صفر است. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که $x=1$ طول نقطه‌ی اکسترمم تابع f' و عرض این اکسترمم صفر است.

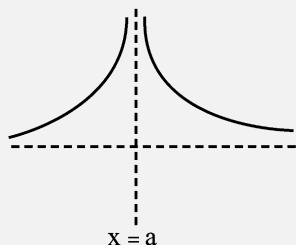
نتیجه‌ی ۷. اگر $x=a$ طول نقطه‌ی عطفی از تابع f باشد که خط مماس در این نقطه موازی محور x ‌ها باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $M \Big|_a^a$ نقطه‌ی اکسترمم منحنی تابع f' است.

مثال ۷. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر شد، آن‌گاه نمودار تابع مشتق، نموداری است که زیر منحنی تابع f رسم شده است.

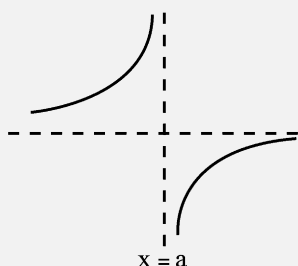


باشد، و $g(a), g'(a) \neq 0$ آن گاه خط $x = a$ ، معادله‌ی مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را «انفصال مضاعف» گوئیم.

اگر $x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$ یا $f(x) \rightarrow -\infty$



در نمودار بالا خط $x = a$ انفصال مضاعف نمودار است.



در نمودار بالا خط $x = a$ انفصال ساده‌ی نمودار است.

۱۰. اگر منحنی تابع f مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ داشته باشد (انفصال ساده)، آن گاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ خواهد شد که $x = a$ انفصال مضاعف تابع f' است.

اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی تابع f به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{n-1}}$ ، $n \in \mathbb{N}$ و $g(a), g'(a) \neq 0$ باشد.

می‌دانیم که خط $x = a$ انفصال ساده‌ی تابع f است. پس از مشتق‌گیری نسبت به x داریم:

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) + g(x)}{(x-a)^n}$$

به طوری که دیده می‌شود، منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ است. چون توان $(x-a)$ در مخرج زوج است، پس انفصال حاصل، انفصال مضاعف است.

مثال ۱۰. اگر منحنی تابع f به صورت ذیل باشد، آن گاه منحنی تابع f' با توجه به مطالب گفته شده، به صورت نموداری است که آن را مقابل نمودار f می‌بینید.

۹. تابع کسری به معادله‌ی $y = \frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^n}$ ، $n \in \mathbb{N}$ را

در نظر می‌گیریم. این تابع کسری یک مجانب افقی به معادله‌ی

$y = \frac{a}{a'}$ دارد. می‌خواهیم نشان دهیم، تابع y' یک مجانب افقی به معادله‌ی $y = 0$ دارد؛ زیرا:

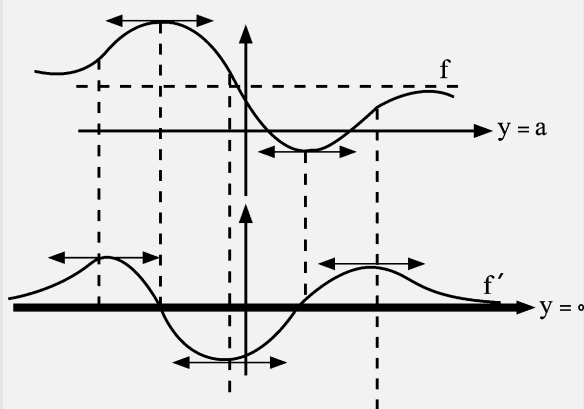
$$y' = \frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b')^n - a'n(a'x+b')^{n-1}(ax+b)^n}{(a'x+b')^{2n}}$$

$$y' = \frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b') - a'n(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+1}}$$

ملاحظه می‌کنیم که در تابع y' درجه‌ی مخرج بیشتر از درجه‌ی صورت است. بنابراین، اگر $x \rightarrow \infty$ ، آن گاه $y' \rightarrow 0$. پس خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع y' است.

نتیجه‌ی ۹. اگر تابع f دارای مجانب افقی باشد، آن گاه خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع f' خواهد بود.

مثال ۹. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، آن گاه نمودار تابع f' نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



توجه: منحنی تابع f سه نقطه‌ی عطف دارد. پس منحنی تابع f' سه اکسترم دارد.

تذکر: اگر معادله‌ی تابع f به صورت

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{n-1}}$$
، $n \in \mathbb{N}$ باشد و $g(a), g'(a) \neq 0$ آن گاه

خط $x = a$ معادله‌ی مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را «انفصال ساده» گوئیم.

اگر $x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$

اگر معادله‌ی تابع f به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^n}$ ، $n \in \mathbb{N}$

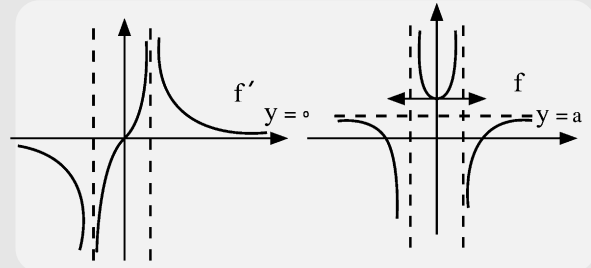
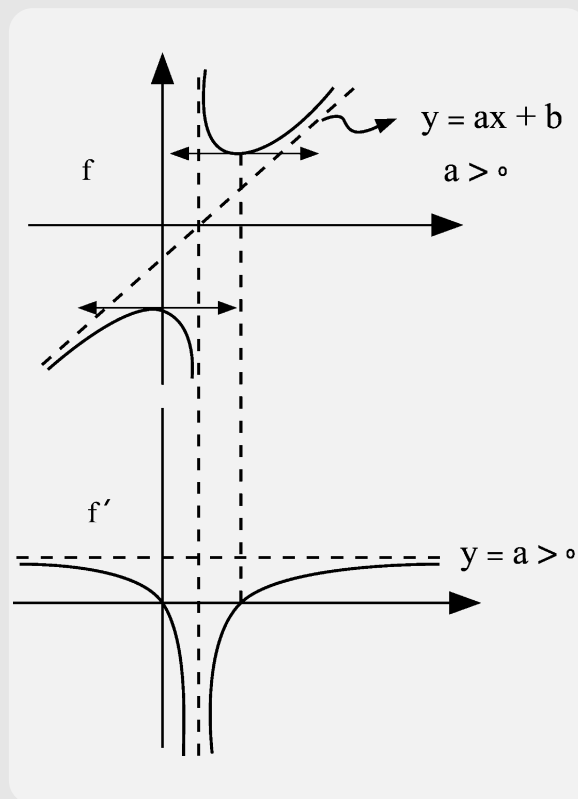
۱۲. اگر در توابع کسری، معادله‌ی مجانب مایل منحنی تابع به صورت $y = ax + b$ باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' دارای مجانب افقی به معادله‌ی $y = a$ است.

اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی تابع f به صورت $f(x) = ax + b + \frac{g(x)}{h(x)}$ و درجه‌ی $h(x)$ حداقل یک واحد بیشتر از درجه‌ی $g(x)$ باشد. اگر از معادله‌ی تابع f مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$f'(x) = a + \frac{g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)}{(h(x))^2}$$

اگر درجه‌ی $g(x)$ ، n و درجه‌ی $h(x)$ ، $n+1$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد، آن‌گاه درجه‌ی صورت کسر $f'(x)$ مساوی $2n$ و درجه‌ی مخرج آن $(2n+2)$ است. پس اگر $x \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه حد کسر صفر می‌شود و حد $f'(x)$ در این حالت برابر با a است که همان مجانب افقی منحنی تابع f' است.

مثال ۱۱. اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' به صورت نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



توضیح: مجانب‌های قائم به انفصال‌های مضاعف تبدیل شده‌اند. مجانب افقی تابع که به صورت $y = k > 0$ است، به $y = 0$ تبدیل شده است.

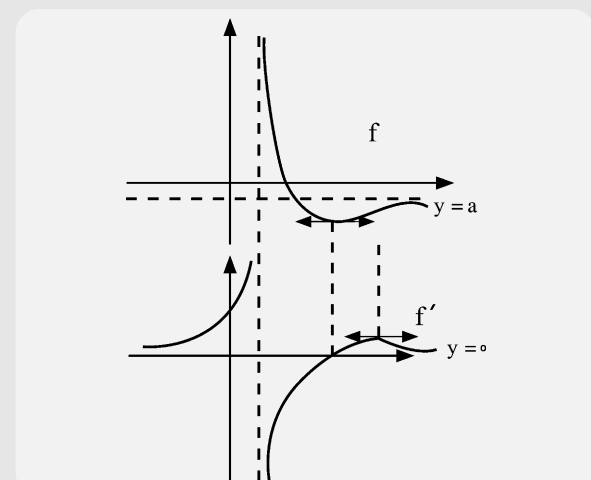
۱۱. اگر منحنی تابع f دارای مجانب قائمی به صورت $x = a$ و انفصال مضاعف تابع f باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ است، ولی انفصال حاصل در منحنی f' ، انفصال ساده خواهد بود.

اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی منحنی تابع f به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{2n}}$ ، $n \in \mathbb{N}$ ، $g(a), g'(a) \neq 0$ باشد. پس منحنی تابع f در $x = a$ انفصال مضاعف خواهد بود، اما پس از مشتق‌گیری نسبت به x خواهیم داشت:

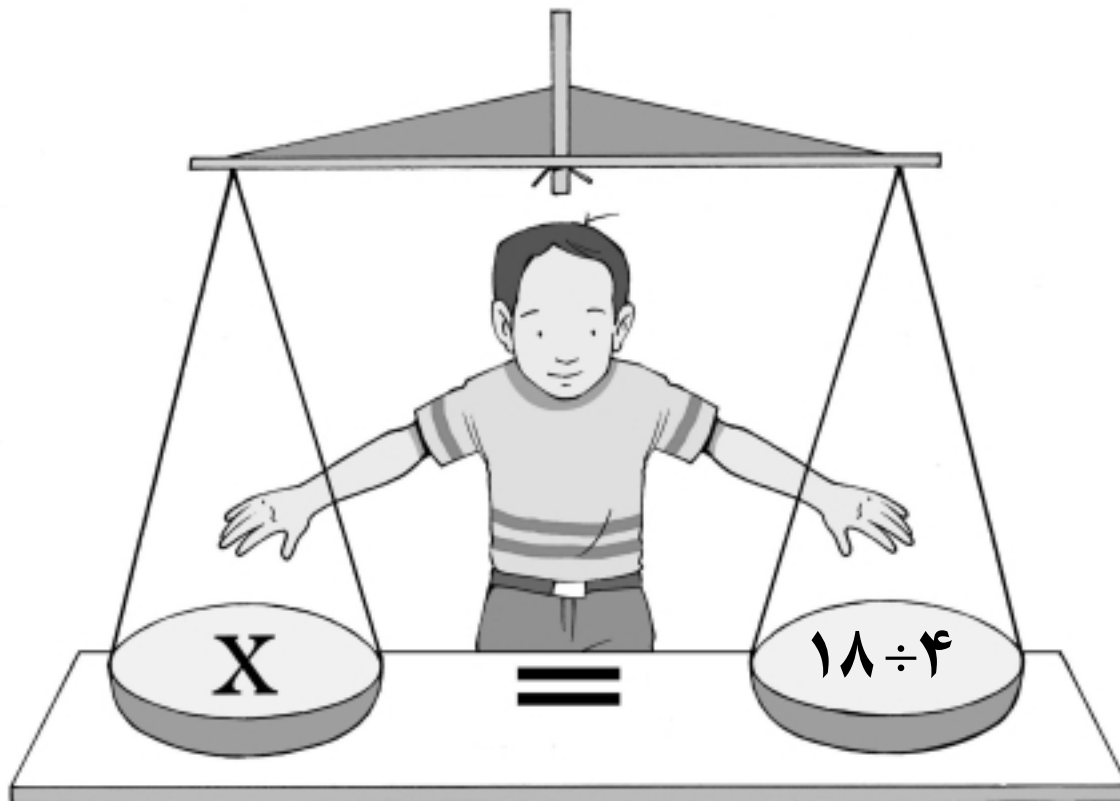
$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) - 2ng(x)}{(x-a)^{2n+1}}$$

ملاحظه می‌شود که عامل $(x-a)$ در تابع f' دارای توان فرد است. پس خط $x = a$ مجانب قائمی است که انفصال حاصل از آن، انفصال ساده خواهد بود.

مثال ۱۱. اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه منحنی تابع f' به صورت نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



$$a = dq + r$$



کاربردهای قضیه‌ی تقسیم

افراز Z توسط قضیه‌ی تقسیم

در قضیه‌ی تقسیم مشاهده شد که اگر a عددی صحیح و دل‌خواه باشد و $a = bq + r$ ، با تقسیم a بر b رابطه‌ی $b \in \mathbb{N}$ را برای $0 \leq r < b$ و در b حالت ممکن، یعنی حالتی که $r = 0$ تا $r = b - 1$ باشد، می‌توان نوشت. برای مثال اگر $b = 4$ ، در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر 4 ، طبق قضیه‌ی تقسیم عبارت است از $r = 0$ یا $r = 1$ یا $r = 2$ یا $r = 3$. به بیان دیگر، هر عدد صحیح مانند a را به یکی از چهار صورت زیر می‌توان نوشت:

$$a = 4q \quad \text{یا} \quad a = 4q + 1 \quad \text{یا} \quad a = 4q + 2 \quad \text{یا} \quad a = 4q + 3$$

در واقع می‌توان یک افراز 4 عضوی برای Z و به صورت زیر تعریف کرد:

$$A_1 = \{x \in Z \mid x = 4k\}$$

$$A_2 = \{x \in Z \mid x = 4k + 1\}$$

$$A_3 = \{x \in Z \mid x = 4k + 2\}$$

$$A_4 = \{x \in Z \mid x = 4k + 3\}$$

در حالت کلی می‌توان یک افراز k عضوی برای Z تعریف کرد؛ یعنی Z را به k زیر مجموعه، افراز یا تقسیم کنیم (منظور از افراز یک مجموعه به n زیر

مجموعه‌ی خودش، تقسیم آن مجموعه به n زیر مجموعه است که اول، هیچ کدام از زیر مجموعه‌ها تهی نباشند. دوم، دو به دو اشتراکی نداشته باشند و سوم، اجتماع زیر مجموعه‌ها، مجموعه‌ی اصلی را تشکیل دهد):

$$Z = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

$$A_k = \{x \in Z; x = kq + (k-1)\} \quad \text{که}$$

حال می‌خواهیم از این نوع افراز Z ، که توسط قضیه‌ی تقسیم صورت گرفت و با استفاده از روشی در استدلال به نام «روش اشباع» چند مسئله در نظریه‌ی اعداد طرح و حل کنیم.

مسئله ۱: ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد صحیح و متوالی، همواره بر ۲ بخش پذیر است.

حل: فرض کنیم $a = n(n-1)$. ثابت می‌کنیم $2|a$. برای این منظور، طبق قضیه ی تقسیم، برای n دو حالت در نظر می‌گیریم. در هر دو حالت ثابت می‌کنیم a بر ۲ بخش پذیر است:

(الف) $n = 2k \Rightarrow 2|n \Rightarrow 2|n(n-1) \Rightarrow 2|a$

(ب) $n = 2k+1 \Rightarrow n-1 = 2k \Rightarrow 2|n-1 \Rightarrow 2|n(n-1) \Rightarrow 2|a$

مسئله ۲: ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد صحیح و متوالی، همواره بر ۶ بخش پذیر است.

حل: فرض کنیم $a = (n-1)n(n+1)$. ثابت می‌کنیم $6|a$. کافی است ثابت شود $2|a$ و $3|a$. برای این منظور، برای n سه حالت در نظر می‌گیریم و از مسئله ۱ نیز استفاده می‌کنیم:

(الف) $n = 3k \Rightarrow 3|n \Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) \Rightarrow 3|a$

(ب) $n = 3k+1 \Rightarrow n-1 = 3k \Rightarrow 3|n-1$

$\Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) = a$

(ج) $n = 3k+2 \Rightarrow n+1 = 3k+3 = 3k'$

$\Rightarrow 3|n+1 \Rightarrow 3|(n-1)n(n+1) = a$

ثابت شد که $3|a$. در مسئله ۱ نیز ثابت کردیم $2|n(n-1)(n+1) = a$ بنابراین $6|a$ (اگر عدد بر ۲ و ۳ بخش پذیر باشد، آن گاه بر ۶ هم بخش پذیر است).

مسئله ۳: ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد را به یکی از دو صورت $(4k+1)$ یا $(4k+3)$ می‌توان نوشت. سپس نشان دهید مربع هر عدد صحیح فرد به صورت $(8t+1)$ است.

حل: فرض کنیم a عدد صحیح و دل خواه باشد. در این صورت طبق قضیه ی تقسیم، a را به یکی از چهار صورت $a = 4k$ یا $a = 4k+1$ یا $a = 4k+2$ یا $a = 4k+3$ می‌توان نوشت. حال اگر a فرد باشد، $a \neq 4k$ و $a \neq 4k+2$. بنابراین، فقط به یکی از دو صورت $a = 4k+1$ یا $a = 4k+3$ نوشته می‌شود:

(الف) $a = 4k+1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8t_1 + 1$

(ب) $a = 4k+3 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 8t_2 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8t_2 + 1$

مسئله ۵: اگر a عددی فرد و مضرب ۳ نباشد، ثابت کنید $(a^2 + 23)$ بر ۲۴ بخش پذیر است.

حل: کافی است ثابت کنیم $(a^2 + 23)$ بر ۸ و بر ۳ بخش پذیر است.

بر ۳ بخش پذیر است. $a \in \mathbb{Z}$ عدد $a = n^5 - n$

$a^2 = 8t + 1 \Rightarrow a^2 = 8t + 1$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 8t + 1 + 23 = 8t + 24$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 8(t + 3) \Rightarrow 8|a^2 + 23$

$a \neq 3k \Rightarrow \begin{cases} a = 3k+1 \\ a = 3k+2 \end{cases}$

اگر $a = 3k+1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 9k^2 + 6k + 24 = 3k'$

اگر $a = 3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4$

$\Rightarrow a^2 + 23 = 9k^2 + 12k + 27 = 3k''$

مسئله ۴: ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{Z}$ عدد $a = n^5 - n$

بر ۳۰ بخش پذیر است.

حل: چون $a = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ و قبلاً طبق مسئله ۲ ثابت کردیم $6|n(n-1)(n+1)$ ، پس $6|a$. کافی است ثابت کنیم $5|a$. برای این منظور، برای n ، پنج حالت در نظر می‌گیریم:

(الف) $n = 5k \Rightarrow 5|n \Rightarrow 5|n(n^4-1) \Rightarrow 5|a$

(ب) $n = 5k+1 \Rightarrow n-1 = 5k \Rightarrow 5|n-1 \Rightarrow 5|a$

(پ) $n = 5k+2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 20k + 4$

$\Rightarrow n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5t \Rightarrow 5|n^2 + 1$

$\Rightarrow 5|(n^2-1) \times n \times (n^2+1) = a$

(ت) $n = 5k+3 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 30k + 9 \Rightarrow n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5t$

$\Rightarrow n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5t$

$\Rightarrow 5|n^2 + 1 \Rightarrow 5|a$

(ث) $n = 5k+4 \Rightarrow n+1 = 5k+5 = 5t \Rightarrow 5|n+1 \Rightarrow 5|a$

مسئله ۶: ثابت کنید، اگر $p > 3$ عددی اول باشد، فقط به یکی از دو صورت $6k \pm 1$ نوشته می شود.

حل: می دانیم عدد $p \in \mathbb{N}$ و $p \neq 1$ اول است، هرگاه هیچ شمارنده یا مقسوم علیه مثبتی به جز ۱ و خودش نداشته باشد و می دانیم عدد ۲ تنها عدد اول و زوج است. و نیز می دانیم هر عدد به صورت $6t + 5$ همان $6k - 1$ است، زیرا:

$$6t + 5 = 6t + 6 - 1 = 6(t + 1) - 1 = 6k - 1$$

حال اگر p عددی اول باشد، لذا عددی صحیح است و هر عدد صحیح به یکی از ۶ صورت $6k$ یا $6k + 1$ یا $6k + 2$ یا $6k + 3$ یا $6k + 4$ یا $6k + 5$ نوشته می شود که چون p اول و بزرگ تر از ۳ است، پس p زوج نیست و $p \neq 6k$ ، $p \neq 6k + 2$ و $p \neq 6k + 4$ و نیز p ، مضرب ۳ نیستند. پس $p \neq 6k + 3$. بنابراین فقط می تواند به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ باشد که همان $6t - 1$ است.

نتیجه یی متمم از مسئله ۶: اگر عددی طبیعی و بزرگ تر از ۳ را بر ۶ تقسیم کنیم و باقی مانده ی تقسیم آن عدد با ۱ یا ۵ برابر نباشد، قطعاً آن عدد اول نیست و اگر باقی مانده ۱ یا ۵ باشد، دلیل بر اول بودن آن عدد نیست. فقط می توان گفت آن عدد می تواند اول باشد. مانند عدد ۲۵ که به صورت $6 \times 4 + 1$ است، ولی اول نیست.

مسئله ۸: اگر p عددی اول و بزرگ تر از ۳ باشد، ثابت کنید $p^2 - 1$

بر ۲۴ بخش پذیر است.

حل: فرض کنیم: $a = p^2 - 1$. ثابت می کنیم: $24 | a$. برای این منظور کافی است ثابت کنیم: $8 | a$ و $3 | a$.

$$p > 3 \Rightarrow p \text{ فرد است} \Rightarrow p^2 = 8k + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 8k$$

$$\Rightarrow 8 | p^2 - 1 \Rightarrow 8 | a$$

$$\begin{cases} p = 3k + 1 \Rightarrow p - 1 = 3k \\ p = 3k + 2 \Rightarrow p + 1 = 3k' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 | p - 1 \Rightarrow 3 | (p - 1)(p + 1) = p^2 - 1 = a \\ 3 | p + 1 \Rightarrow 3 | (p + 1)(p - 1) = p^2 - 1 = a \end{cases}$$

مسئله ۹: اگر p عددی اول و بزرگ تر از ۵ باشد، ثابت کنید

$(p^4 - 1)$ بر 120 بخش پذیر است.

حل: اگر فرض کنیم $a = p^4 - 1$ ، ثابت می کنیم $120 | a$. کافی

است ثابت کنیم $(p^4 - 1)$ بر ۵ و ۲۴ بخش پذیر است.

$$24 | a \Rightarrow 24 | (p^4 - 1) \Rightarrow 24 | (p^2 - 1)(p^2 + 1) \Rightarrow 24 | p^2 - 1 \text{ ثابت شد: بخش پذیری بر ۲۴}$$

$p > 5$ اول است: بخش پذیری بر ۵

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 5k + 1 \Rightarrow p - 1 = 5k \Rightarrow 5 | p - 1 \Rightarrow 5 | a \\ p = 5k + 2 \\ p = 5k + 3 \\ p = 5k + 4 \end{cases} \Rightarrow p \neq 5k$$

$$\text{اگر } p = 5k + 2 \Rightarrow p^2 = 25k^2 + 20k + 4$$

$$\Rightarrow p^2 + 1 = 5k' \Rightarrow 5 | p^2 + 1 \Rightarrow 5 | a$$

$$\text{اگر } p = 5k + 3 \Rightarrow p^2 = 25k^2 + 30k + 9$$

$$\Rightarrow p^2 + 1 = 5k' \Rightarrow 5 | p^2 + 1 \Rightarrow 5 | a$$

$$\text{اگر } p = 5k + 4 \Rightarrow p + 1 = 5t \Rightarrow 5 | p + 1 \Rightarrow 5 | a$$

مسئله ۷: اگر a عددی فرد و اول باشد، ثابت

کنید a را فقط به یک صورت منحصر به فرد به شکل تفاضل مربعین دو عدد طبیعی می توان نوشت.

حل: می دانیم اگر a فرد باشد، اعداد $(\frac{a+1}{2})$ و

$$(\frac{a-1}{2})$$
 اعدادی طبیعی و $a = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2$

حال برای اثبات منحصر به فردی فرض کنیم x و

y دو عدد طبیعی هستند و $a = x^2 - y^2$. در

این صورت داریم: $a = (x - y)(x + y)$ که

$0 < x - y < x + y$ و چون a اول است

$a = 1 \times a$ ، پس $x - y = 1$ و $x + y = a$ که با حل

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ دستگاه داریم:}$$

$$x = \frac{a+1}{2} \text{ و } y = \frac{a-1}{2}$$

$$\text{یعنی: } a = x^2 - y^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2$$

تمرین: عکس مسئله ۷ را ثابت کنید. یعنی

ثابت کنید: اگر یک عدد طبیعی و فرد که مخالف

یک است، فقط یک نمایش به صورت تفاضل

مربعین دو عدد صحیح و نامنفی داشته باشد،

آن گاه آن عدد اول است (روش اثبات خود را برای

ما بفرستید).

• تونی کریلی

ترجمه: غلامرضا یاسی پور



π یا پی، طول دور دایره (پیرامون یا محیط آن) تقسیم بر طول در امتداد مرکز آن (قطر آن) است. مقدار این تقسیم، یعنی نسبت این دو طول، به اندازه‌ی دایره بستگی ندارد. در واقع، دایره هرچه بزرگ یا کوچک باشد، π ثابتی ریاضی است.

ارشمیدس سیراکیوزی^۱

نسبت پیرامون دایره به قطر آن، موضوعی مورد توجه فرهنگ باستان بود. در حدود سال ۲۰۰۰ قبل از میلاد، بابلی‌ها متوجه شدند که پیرامون دایره، به تقریب، سه برابر طول قطر آن است. سپس در سال ۲۲۵ قبل از میلاد، این ارشمیدس سیراکیوزی بود که به طور جدی بررسی نظریه‌ی ریاضی π را آغاز کرد و از این رو در عداد بزرگان قرار گرفت. ریاضی دانان دوست دارند به این همکار خود درجه بدهند و او را هم سطح، و البته پیش گام کارل فردریش گوس^۲ (شاهزاده‌ی ریاضی دانان) و سر اسحق نیوتن^۳ قرار دهند. درستی این قضاوت هرچه باشد، واضح است که ارشمیدس از شهرت و اعتبار بالایی برخوردار است. او غیر از سهمش در نجوم، ریاضی و فیزیک، سلاح‌های جنگی از قبیل منجنیق، اهرم و «آینه‌های سوزان»^۴ طراحی کرد که تمام آن‌ها برای دور نگه داشتن رومیان و متوقف کردن آنان به کار می‌رفت. اما با تمام این احوال، وی چون پروفیسورهای پریشان حواس عمل می‌کرد، و گرنه چرا هنگام کشف قانون تقلیل وزن اجسام در مایعات، برهنه از حمام بیرون جست و فریاد «یافتم، یافتم»^۵ سر داد؟!

π معروف‌ترین عدد در ریاضیات است. جميع ثابت‌های دیگر طبیعت را فراموش کنید، چه π همواره در رأس فهرستمان قرار می‌گیرد. اگر برای اعداد نیز جایزه‌ی اسکار وجود داشت، π هر ساله جایزه را می‌برد.

π یا پی، طول دور دایره (پیرامون یا محیط آن) تقسیم بر طول در امتداد مرکز آن (قطر آن) است. مقدار این تقسیم، یعنی نسبت این دو طول، به اندازه‌ی دایره بستگی ندارد. در واقع، دایره هرچه بزرگ یا کوچک باشد، π ثابتی ریاضی است.

زیستگاه طبیعی π دایره است، اما این عدد در هر گوشه‌ی ریاضیات و در مکان‌هایی که به هیچ وجه با دایره مرتبط نیستند نیز خود را نشان می‌دهد.

به ازای دایره‌ای به قطر d و شعاع r :

$$\pi d = 2\pi r$$

$$\text{سطح} = \pi r^2$$

به ازای کره‌ای به قطر d و شعاع r :

$$\pi d^2 = 4\pi r^2$$

$$\text{حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

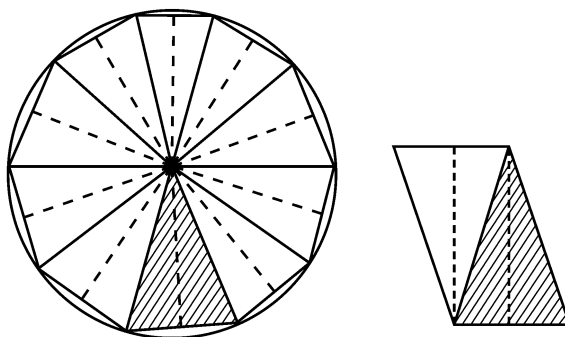
نسبت دایره‌های متداول ساخت.

افتخار تخصیص نماد فعلی π به ریاضی دان ولزی^۶ کمتر معروف، یعنی ویلیام جونز^۷ برمی گردد که در قرن هجدهم، معاون انجمن سلطنتی لندن^۸ بود

این که چگونه کار خود را در مورد π جشن گرفت، هنوز مشخص نشده است!

باری، با در دست داشتن این تعریف که π نسبت پیرامون دایره به قطرش است، رابطه‌ی آن با سطح^۵ دایره چه می‌شود؟ چنین استنتاج کرده‌اند که سطح دایره‌ای، به شعاع r ، برابر πr^2 است؛ گرچه احتمالاً این رابطه معروف تر از تعریف نسبت پیرامون به قطر (π) است. این واقعیت که π وظایفی دوگانه در مورد سطح و پیرامون دایره دارد، قابل توجه است.

اما این مطلب را چگونه می‌توان نشان داد؟ دایره را می‌توان به تعدادی مثلث برابر و باریک تجزیه کرد که طول قاعده‌شان b و طول ارتفاعشان نزدیک به r باشد. این مثلث‌ها در داخل دایره یک چندضلعی تشکیل می‌دهند که به سطح دایره نزدیک می‌شود. برای آغاز کار، 1000 مثلث را در نظر می‌گیریم. کل جریان، تمرین در تقریب‌ها است. در این صورت می‌توانیم، هر زوج مجاور از این مثلث‌ها را به هم وصل کنیم و مستطیلی بسازیم (تقریباً) با مساحت $b \times r$. بنابراین سطح یا مساحت کل چندضلعی، برابر $500 \times b \times r$ خواهد شد. مقدار $b \times 500$ ، از آن‌جا که در حدود نصف پیرامون دایره است، دارای طول πr می‌شود و سطح چندضلعی مورد بحث $\pi r \times r = \pi r^2$ خواهد شد. هرچه تعداد مثلث‌هایمان بیشتر باشد، شکل تقریبی مان به دایره نزدیک‌تر می‌شود و در حد نتیجه می‌گیریم که سطح دایره برابر πr^2 است.



ارشمیدس مقدار π را بین دو کسر $\frac{223}{71}$ و $\frac{220}{70}$ برآورد کرد. بنابراین تقریب آشنای $\frac{22}{7}$ برای π را به ارشمیدس مدیونیم. افتخار تخصیص نماد فعلی π به ریاضی دان ولزی^۶ کمتر معروف، یعنی ویلیام جونز^۷ برمی گردد که در قرن هجدهم، معاون انجمن سلطنتی لندن^۸ بود. اما این لئونارد اویلر^۹ ریاضی دان و فیزیک دان بود که π را در زمینه ی

مقدار دقیق π

هرگز نمی‌توانیم مقدار دقیق π را بدانیم، چرا که این عدد، عددی گنگ است؛ موضوعی که در سال ۱۷۶۸ یوهان لامبرت^{۱۰} اثبات کرد، این بود که: بسط دهدهی عدد π ، بدون نمونه‌ای قابل پیش‌بینی، نامتناهی است. ۲۰ رقم دهدهی اولیه عبارت‌اند از:

3.14109265351979323846...

مقدار $\sqrt{10}$ که ریاضی دانان چینی در نظر می گرفتند، برابر است با:

3.16227766.16837933199

این مقدار که در حدود سال ۵۰۰ میلادی، توسط براهما گوپتا^{۱۱} پذیرفته شد، در واقع اندکی بهتر از مقدار تقریبی تر ۳ است؛ گرچه در رقم دوم ده‌دهی، با π اختلاف دارد. π را می‌توان با استفاده از یک سری^{۱۲} از اعداد محاسبه کرد. یکی از معروف‌ترین این سری‌ها عبارت است از:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

گرچه این سری در هم گرایی به π ، به گونه ای پردردسر آهسته، و برای محاسبه نمیدکند است. در این مورد، اوایل سری جالب توجه زیر را به دست آورد:

$$\frac{\pi^r}{e} = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \dots$$

رامانو جان^{۱۳}، نابغه‌ی خود آموخته‌ی هندی، چندین فرمول تقریبی جالب برای π به دست داد که یکی از آن‌ها شامل تنها جذر ۲، عبارت است از:

$$\frac{91.1}{4412} \sqrt{2} = 3.14159273 \dots 133.566.313996119 \dots$$

ریاضی دانان شیفته و مجذوب π هستند. در ایامی که لامبرت ثابت کرده بود این عدد نمی تواند کسری باشد، به سال ۱۸۸۱، لیندلمان^{۱۴}، ریاضی دان آلمانی، برجسته ترین مسئله ی مرتبط با π را حل کرد. یعنی نشان داد که «متعالی»^{۱۵} است به این معنی که نمی تواند جواب یک معادله ی جبری باشد (یعنی معادله ای که تنها شامل توان های x است). لیندلمان، با حل این معمای روزگاران، به مسئله ی «تربیع دایره»^{۱۶} نیز خاتمه داد. مسئله به این ترتیب بود که با مفروض بودن یک دایره و تنها با به کار بردن پرگار و خط کش نامدرج، مربعی رسم کنیم که مساحتش برابر مساحت آن دایره باشد. لیندلمان به طور قطعی اثبات کرد که این کار غیرممکن است. امروزه عبارت تربیع دایره، هم ارز غیرممکن به کار می رود.

ریاضی المپیاد

در یوگسلاوی سابق

این موضوع پی

می‌بریم. با توجه به این

موضوع بر آن شدیم،

نمونه‌هایی از مسائل مرحله‌ی نهایی

المپیاد ریاضی این کشور در سال ۱۹۸۶ را در این

شماره، همراه با راه‌حل آن‌ها، بیاوریم.

لازم به یادآوری است، کشور یوگسلاوی در سال‌های

۱۹۷۷ و ۱۹۶۷ دو بار میزبان المپیاد ریاضی بوده و در سال‌های

۱۹۵۹ تا ۱۹۹۹ (قبل از فروپاشی و تجزیه) مقام‌های خوبی در

این رقابت‌ها به دست آورده است. پس از تجزیه نیز کشورهای

جدا شده از آن یعنی صربستان، کروواسی، اسلوونی، مقدونیه

بوسنی-هرزگوین، در المپیادهای ریاضی فعالانه شرکت داشته

و کشور اسلوونی در سال ۲۰۰۶ میزبانی این رقابت‌ها را برعهده

داشته است. در صورتی که به مسائل المپیادهای ریاضی این

کشورها نیز دست‌رسی پیدا کنیم، در شماره‌های آینده از آن‌ها

نیز استفاده خواهیم کرد.

کشور یوگسلاوی

هم‌چون بیشتر کشورهای شرق

قاره‌ی اروپا، همواره از پیشگامان المپیادهای ریاضی بوده

است. از سال ۱۹۵۰، المپیادهای ریاضی منطقه‌ای در این

کشور سامان داده شد و از سال ۱۹۶۰ نیز مسابقه‌ی سراسری

ریاضی در چهار مرحله (مدرسه، منطقه، جمهوری‌ها و سراسر

کشور) در آن برگزار می‌شود. از سال ۱۹۶۳ این کشور به

المپیاد بین‌المللی ریاضی پیوست و برای تعیین تیم نهایی شرکت

کننده در المپیاد بین‌المللی، مرحله‌ای دیگر نیز به مراحل فوق

افزوده شد. با این مقدمات، واضح است که سطح آزمون‌های

المپیادهای داخلی این کشور، باید قابل قبول باشد و سوالات

آن‌ها مسائل خوبی باشند و همین‌طور هم هست. با نگاهی به

آرشیو مسائل ریاضی، المپیادها و مسابقات ریاضی و نیز

نشریات ریاضی که در این کشور منتشر می‌شوند، به درستی

مسائل

۱. ثابت کنید می‌توان بی‌نهایت مقدار برای $n \in \mathbb{N}$ پیدا کرد که به ازای هر کدام از آن‌ها، هر یک از عددهای n ، $n+1$ و $n+2$ به صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست باشند.

۲. ثابت کنید اگر برای چهارضلعی محدب $ABCD$ داشته باشیم: $AB + BD \leq AC + CD$ آن وقت $AB \leq AC$

۳. ثابت کنید اگر برای عددهای طبیعی m و n داشته باشیم: $n = 3n^2 + m = 2m^2 + n$ آن وقت عددهای $m - n$ ، $2m + 2n + 1$ و $3m + 3n + 1$ مجذورهای عددی هستند.

۴. ثابت کنید برای عددهای حقیقی و مثبت a, b, c همیشه داریم:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{1}{3}(a + b + c)$$

۵. روی محیط دایره‌ای به قطر AD ، نقطه‌ی B و روی قطر AD نقطه‌ی C را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $AB = CD$

ثابت کنید در مثلث ABC ، نیم‌ساز رأس A ، میانه‌ی رأس B و ارتفاع رأس C از یک نقطه می‌گذرند.

۶. همه‌ی تابع‌های صعودی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را طوری بیابید که در اتحاد زیر صدق کنند: $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

حل مسائل



آورد. در نتیجه، بی‌شمار عدد مربع کامل به صورت $2k^2 + 1$ تولید کرد. اکنون با توجه به این نتیجه، می‌توان پاسخ مسئله را به سادگی داد.

عدد طبیعی $1 + 2y^2 = x^2 = n + 1$ را در نظر می‌گیریم. مطابق نتیجه‌ی فوق بی‌شمار x و y در نتیجه بی‌شمار $n + 1$ به صورت $1 + 2y^2$ داریم. حال عددهای قبل و بعد از این عدد را ببینیم:

$$n = 2y^2 = y^2 + y^2$$

$$n + 1 = 2y^2 + 1 = x^2 = x^2 + (0)^2$$

$$n + 2 = x^2 + 1 = x^2 + (1)^2$$

چنان‌که می‌بینیم، هر سه‌ی این عددها به صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست نوشته شده‌اند.

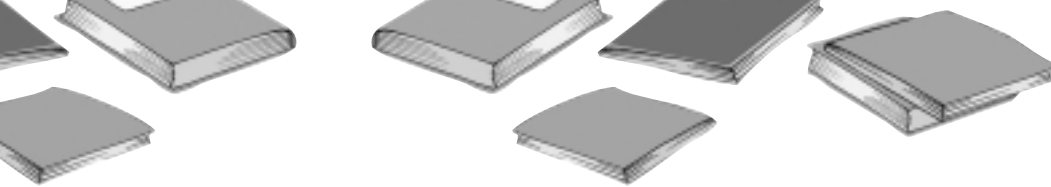
در حالت کلی، معادله‌ی سیاله‌ی $1 = x^2 - dy^2$ را

۱. ابتدا نشان می‌دهیم بی‌شمار عدد طبیعی مربع کامل به فرم $2k^2 + 1$ (مانند ۱، ۹، ۲۵، ...) وجود دارد. سپس درباره‌ی ارتباط این مسئله با مسئله‌ی اصلی می‌گوییم، برای این موضوع در واقع باید ثابت کنیم که معادله‌ی سیاله‌ی $1 + 2y^2 = x^2$ بی‌شمار جواب در $\mathbb{N}$ دارد. به سادگی می‌توان نشان داد، اگر (x_0, y_0) یک جواب این معادله باشد (یعنی: $1 = x_0^2 - 2y_0^2$) آن‌گاه (x_1, y_1) نیز یک جواب این معادله است، زیرا:

$$(3x_0 + 4y_0)^2 - 2(2x_0 + 3y_0)^2 = 9x_0^2 + 16y_0^2 + 24x_0y_0 - 2(4x_0^2 + 9y_0^2 + 12x_0y_0) = x_0^2 - 2y_0^2 = 1$$

برای مثال می‌دانیم، $x = 3$ و $y = 2$ یک جواب معادله است.

پس $17 = 3 \times 3 + 4 \times 2 = x$ و $12 = 2 \times 3 + 3 \times 2 = y$ نیز یک جواب معادله است و در نتیجه $1 + 2(12)^2 = 17^2 = 289$. لذا می‌توان از هر جواب این معادله جوابی دیگر نیز به دست



$$m - n = kd, \quad 2m + 2n + 1 = k'd \Rightarrow$$

$$kk'd^2 = n^2 \Rightarrow d^2 | n^2 \Rightarrow d | n$$

هم چنین واضح است، $d | m - n$ و در نتیجه: $d | m$
بنابراین:

$$d | m, d | n \Rightarrow d | 2m + 2n$$

با توجه به این که $d = ((m - n), (2m + 2n + 1))$ ،
 $d | 2m + 2n + 1$ و از مقایسه با $d | 2m + 2n$ نتیجه می شود $d | 1$
در نتیجه: $d = 1$ بنابراین: $(m - n)$ و $(2m + 2n + 1)$

نسبت به هم اول اند و حاصل ضرب آن ها مساوی n^2 یعنی
مجذور کامل است. پس هر دوی آن ها باید مجذور کامل
باشند.

برای اثبات قسمت بعد، کافی است برابری فرض را چنین
تغییر دهیم:

$$2m^2 + m = 3n^2 + n \Rightarrow$$

$$3m^2 - 3n^2 + m - n = m^2 \Rightarrow 3(m^2 - n^2) + (m - n) = m^2$$

$$\Rightarrow (m - n)(3m + 3n + 1) = m^2$$

و چون $m - n$ و m^2 هر دو مربع کامل هستند، پس
 $3m + 3n + 1$ نیز مربع کامل است.

۴. با استدلال بازگشتی و به صورت زیر، درستی این
نابرابری اثبات می شود:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} =$$

$$\frac{a(a^2 + ab + b^2) - ab(a + b)}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b(b^2 + bc + c^2) - bc(b + c)}{b^2 + bc + c^2}$$

$$+ \frac{c(c^2 + ca + a^2) - ca(c + a)}{c^2 + ca + a^2}$$

$$= a - \frac{ab(a + b)}{a^2 + ab + b^2} + b - \frac{bc(b + c)}{b^2 + bc + c^2} +$$

$$c - \frac{ca(c + a)}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{1}{3}(a + b + c)$$

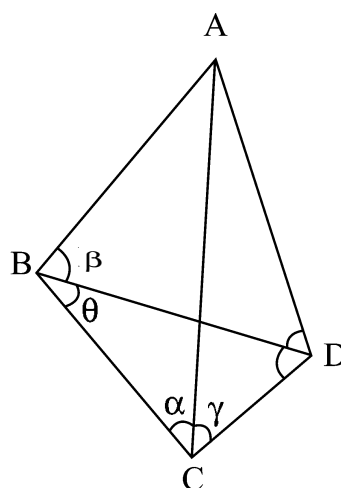
$$\Rightarrow \frac{ab(a + b)}{a^2 + ab + b^2} + \frac{bc(b + c)}{b^2 + bc + c^2} + \frac{ca(a + c)}{c^2 + ca + a^2}$$

$$\leq \frac{2(a + b + c)}{3}$$

اکنون این نابرابری را به سه نابرابری متقارن زیر تجزیه
می کنیم:

معادله ی پل^۱ می نامند. به نظر می رسد که نخستین بار
ارشمیدس از این معادله نام برده است. البته لرد برانکو
(ریاضی دان انگلیسی قرن هفدهم)، یک روش برای حل آن
ارائه داده است. فرما، والیس و لاگرانژ نیز در سال های بعد
کارهایی روی این معادله انجام دادند. در نظریه ی اعداد ثابت
شده است، این معادله به ازای هر مقدار d که مجذور کامل
نباشد، بی شمار جواب دارد.

۲. اثبات با برهان خلف انجام می شود. یعنی فرض
می کنیم $AB > AC$. در آن صورت مطابق شکل در مثلث
ABC داریم: $(I) \alpha > \beta + \theta$



و از ترکیب این نابرابری با فرض مسئله نتیجه می شود:

$$\begin{cases} AC + CD \geq AB + BD \\ AB > AC \end{cases}$$

$$CD \geq BD$$

در نتیجه، در مثلث CBD داریم: $\theta \geq \alpha + \gamma$ (II). از
مقایسه ی این نابرابری با نابرابری (I) نتیجه می شود:

$$\alpha > \beta + \alpha + \gamma \Rightarrow \beta + \gamma < 0^\circ$$

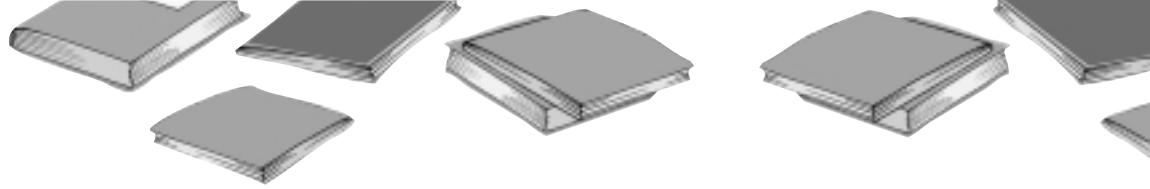
از نادرستی این نتیجه ی آخر، درستی حکم ثابت می شود.

۳. فرض مسئله را به صورت زیر تغییر می دهیم:

$$2m^2 + m - 2n^2 - n = n^2 \Rightarrow 2(m^2 - n^2) + (m - n) = n^2$$

$$\Rightarrow (m - n)(2m + 2n + 1) = n^2$$

حال اگر فرض کنیم که $d = ((m - n), (2m + 2n + 1))$
خواهیم داشت:



و طبق عکس قضیه ی سه وا، BE، AF و CH از یک نقطه می گذرند.

۶. در تساوی فوق $x = -y$ قرار می دهیم:

$$f(-y + f(y)) = f(0) + 1$$

و چون $f(0) + 1$ مقداری ثابت است و با توجه این که f تابع ثابت نیست، پس باید $-y + f(y)$ مقداری ثابت باشد:

$$-y + f(y) = k \Rightarrow f(y) = y + k \Rightarrow$$

$$f(x) = x + k$$

با قرار دادن $x = 0$ در این رابطه نتیجه می شود: $f(0) = k$ و یا $f(x) = x + f(0)$ و اگر در این رابطه $x = f(0)$ قرار دهیم، نتیجه می شود:

$$f(f(0)) = f(0) + f(0) = 2f(0) \quad (I)$$

و اگر در رابطه ی اولیه $x = y = 0$ قرار دهیم، نتیجه می شود:

$$f(f(0)) = f(0) + 1 \quad (II)$$

و از مقایسه ی روابط I و II نتیجه می شود:

$$2f(0) = f(0) + 1 \Rightarrow f(0) = 1$$

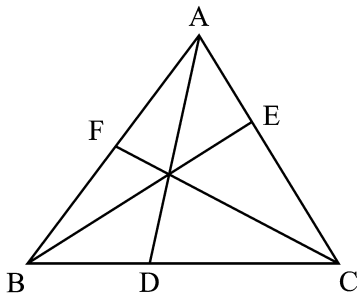
$$\text{و لذا: } f(x) = x + 1$$

پی نوشت.....

1. Pell equation

۲. طبق قضیه ی سه وا، شرط لازم و کافی برای آن که سه خط AD و BE و CF در مثلث ABC در یک نقطه هم رس باشند، آن است که:

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$



برای اطلاع بیشتر، به کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه، ترجمه ی عبدالحسین مصحفی از انتشارات مدرسه مراجعه کنید.

$$\begin{cases} \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \leq \frac{a+b}{3} \\ \frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} \leq \frac{b+c}{3} \\ \frac{ca(a+c)}{c^2+ca+a^2} \leq \frac{a+c}{3} \end{cases}$$

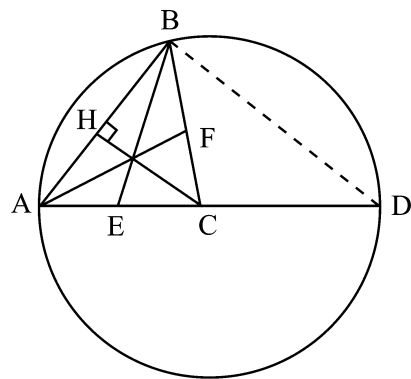
(از جمع این سه نابرابری، نابرابری فوق اثبات می شود) اکنون کافی است درستی یکی از این سه نابرابری را به روش بازگشتی اثبات کنیم:

$$\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \leq \frac{a+b}{3} \Rightarrow a^2+ab+b^2 \geq 3ab$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

که به دلیل بازگشت پذیری همه ی مراحل، درستی حکم ثابت می شود.

۵. شکل زیر را مطابق مفروضات مسئله رسم می کنیم. برای اثبات همرسی نیم ساز AF، میانه ی BE و ارتفاع CH در مثلث ABC، از «قضیه ی سه وا» کمک می گیریم. چون AD قطر دایره است، $\angle ABD = 90^\circ$ و در نتیجه $CH \parallel BD$ و از قضیه ی تالس در مثلث ABD کمک می گیریم:



$$\frac{AH}{BH} = \frac{AC}{CD}$$

هم چنین به کمک قضیه ی نیم سازها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC} = \frac{CD}{AC}$$

و چون BE میانه است، پس $AE = CE$ و بنابراین:

$$\frac{AH}{BH} \times \frac{BF}{CF} \times \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{CD} \times \frac{CD}{AC} \times \frac{AE}{AE} = 1$$



تابع چندجمله ای

چندجمله ای ها، به صورت یک چندجمله ای نوشته شود. برای مثال، عبارت جبری $(x+1)^3$ یک چندجمله ای به این صورت است:

$$\begin{aligned}(x+1)^3 &= (x+1)(x+1)(x+1) \\ &= (x^2 + 2x + 1)(x+1) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که عبارت $\frac{1}{(x+2)^2}$ چندجمله ای نیست، زیرا:

$$\frac{1}{(x+2)^2} = (x+2)^{-2}$$

در عبارت $(x+2)^{-2}$ توان پرانتز منفی است.

معادلات چندجمله ای

به معادله ای که در آن یک چندجمله ای با چندجمله ای دیگر برابر شده باشد، معادله ی چندجمله ای می گوییم.

چندجمله ای

هر عبارت جبری با تعدادی جملات متناهی متشکل از متغیرها و مقادیر ثابتی که بین آن ها از عمل های جمع، تفریق و ضرب استفاده شده باشد، یک چندجمله ای است. نکته ی مهم در چندجمله ای ها این است که توان متغیرها در آن ها عددهای صحیح نامنفی است. برای مثال، عبارت جبری $x^2 - 3x + 2$ چندجمله ای است که از سه جمله تشکیل شده است. اما عبارت جبری $x^2 - \frac{4}{x} + 3x^{\frac{5}{2}}$ چندجمله ای نیست، زیرا در عبارت $\frac{4}{x}$ که می توان آن را به صورت $4x^{-1}$ نوشت، یا در عبارت $3x^{\frac{5}{2}}$ ، توان x عددی صحیح و نامنفی نیست.

صورت دیگر چندجمله ای

هر عبارتی که به صورت حاصل ضرب چندجمله ای ها باشد، می تواند با استفاده از قانون توزیع پذیری در ضرب

برای مثال معادله ی :

(۱)

$$3x^2 - 3x + 2 = x^2 + 1$$

یک معادله ی چندجمله ای است. هدف از حل این معادله، یافتن مقادیری برای متغیر x است که وقتی آن ها را در معادله قرار می دهیم، به یک برابری درست برسیم. برای این منظور داریم:

$$3x^2 - 3x + 2 - x^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{2}$$

این معادله دو جواب دارد که آن ها را ریشه های معادله ی ۱ می گوئیم. زیرا وقتی آن ها را در این معادله قرار دهیم، به یک برابری درست می رسیم. (خودتان امتحان کنید). معادله ی چندجمله ای می تواند به صورت یک اتحاد بین چندجمله ای ها باشد؛ مانند:

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

این معادله دارای بی شمار جواب است، زیرا برای هر مقدار حقیقی که جای گزین x کنیم، به یک برابری همیشه درست می رسیم. (خودتان امتحان کنید).

تابع چندجمله ای

هر تابع با ضابطه ی

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

که در آن a_i ها اعداد حقیقی ثابت باشند، یک تابع چند جمله ای از درجه ی عدد صحیح و نامنفی n (با شرط $a_n \neq 0$) بر حسب متغیر x است؛ برای مثال: $f_1(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) ضابطه ی یک تابع دوجمله ای درجه اول و $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ضابطه ی یک تابع سه جمله ای درجه دوم است.

می دانیم، نمودار تابع f_1 یک خط راست و نمودار تابع f_2 یک سهمی با راس به طول $x = -\frac{b}{2a}$ و محور تقارن به معادله ی $x = -\frac{b}{2a}$ است. اگر $a > 0$ باشد، سهمی در راس خود دارای می نیمم است و اگر $a < 0$ ، دارای ماکزیمم خواهد بود.

توجه داشته باشید که $x = -\frac{b}{2a}$ طول نقطه ی ماکزیمم یا می نیمم است و برای محاسبه ی عرض این نقطه کافی است در

ضابطه ی f به جای x مقدار $-\frac{b}{2a}$ را قرار دهیم تا عرض نقطه ی ماکزیمم یا می نیمم که اصطلاحاً به آن مقدار ماکزیمم یا می نیمم گفته می شود، به دست آید.

مثال: تابع درجه دوم f با ضابطه ی $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ مفروض است. راس سهمی و مقدار می نیمم تابع f را بیابید. (چون $a = 2 > 0$ پس سهمی در راس خود می نیمم دارد).

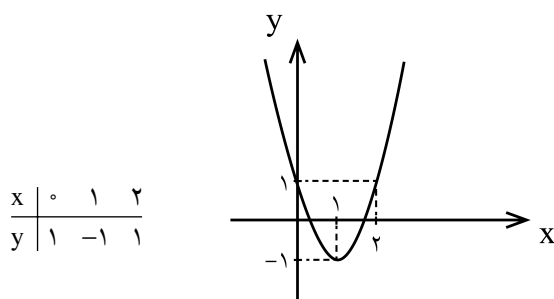
حل: در این تابع درجه ی ۲ داریم: $a = 2$ ، $b = -4$ ، $c = 1$ و $c = 1$ پس:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = 1 \text{ طول نقطه ی می نیمم}$$

$$f(1) = 2 \times (1)^2 - 4 \times (1) + 1 = -1 \text{ مقدار می نیمم تابع}$$

در واقع برای تابع f در دامنه ی تعریف خود که $\mathbb{R}$ است، کم ترین مقدار ممکن با -1 برابر است. به عبارت دیگر، برای هر $k \in \mathbb{R}$ همواره داریم: $f(k) \geq -1$.

نمودار این سهمی به صورت زیر است:



دامنه ی توابع چند جمله ای، مجموعه ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است. در مثال بالا، هر عدد حقیقی دل خواهی را می توان جای گزین x در تابع $f(x)$ کرد. بنابراین: $D_f = \mathbb{R}$. از طرف دیگر، با توجه به نمودار تابع ملاحظه می کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار، یعنی $y = f(x)$ همواره بزرگ تر یا برابر با -1 است. در نتیجه با توجه به نمودار، برد این تابع $y \geq -1$ است. بنابراین: $R_f = [-1, +\infty)$.

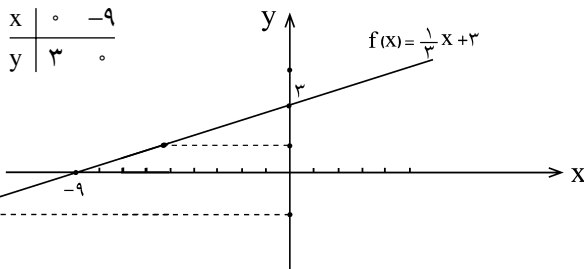
طول محل برخورد نمودار تابع با محور x ها را صفرهای تابع می نامیم، که برای یافتن آن ها کافی است معادله ی $f(x) = 0$ را حل کنیم. در مثال قبل داریم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \text{ صفرهای تابع}$$

حل:

۱. $f(x)$ تابع چند جمله‌ای است، پس: $D_f = \mathbb{R}$. چون این تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی اول است، بنابراین نمودار آن یک خط است که برای رسم آن از دو نقطه استفاده می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم، عرض هر نقطه روی نمودار می‌تواند یک عدد حقیقی از بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ باشد. بنابراین $R_f = \mathbb{R}$.

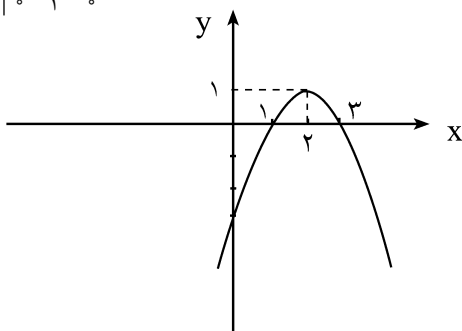
۲. $g(x)$ تابع چند جمله‌ای است، پس: $D_g = \mathbb{R}$. چون این تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی دوم است، بنابراین نمودار آن یک سهمی است.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 = \text{طول نقطه‌ی ماکزیمم}$$

$$f(2) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1 = \text{مقدار ماکزیمم تابع}$$

برای رسم سهمی از مختصات چند نقطه از سهمی استفاده می‌کنیم:

x	۱	۲	۳
y	۰	۱	۰



با توجه به نمودار تابع ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی سهمی، همواره کوچک‌تر یا برابر با ۱ است؛ یعنی همواره $f(x) \leq 1$.

در نتیجه داریم: $R_f = (-\infty, 1]$.

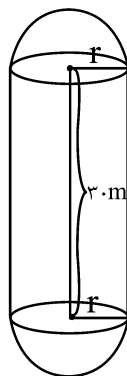
مثال: فرض کنیم $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه اول باشد؛ به طوری که در آن $f(-1) = 2$ و $f(2) = -3$. ضابطه‌ی

در نتیجه، محل برخورد نمودار این تابع با محور x ها، نقاط

$$A_1 \left| \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right| \text{ و } A_2 \left| \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right| \text{ هستند.}$$

مثال: یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30 متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

حل: حجم این تانکر از یک استوانه و یک کره که هر دو به شعاع r هستند، تشکیل شده است.

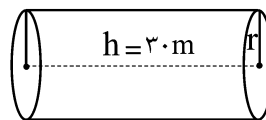
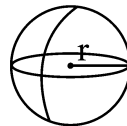


بنابراین داریم:

$$y_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ : حجم کره به شعاع } r$$

$$y_2 = \pi r^2 h = 30 \pi r^2 \text{ : حجم استوانه به شعاع } r$$

$$h = 30 \text{ : ارتفاع}$$



$$f(x) = y_1 + y_2 \Rightarrow f(x) = \frac{4}{3} \pi r^3 + 30 \pi r^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \pi r^2 \left(\frac{4}{3} r + 30 \right)$$

تمرین: مخزنی از یک استوانه و دو مخروط به شعاع مقطع 5 در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه و مخروط‌ها h باشد، حجم این مخزن را بر حسب تابعی از h بنویسید.

راهنمایی: حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h ، $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ است. حجم استوانه به شعاع مقطع r و ارتفاع h است.

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و دامنه و برد هر یک را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{3} x + 3 \quad (1) \quad g(x) = -x^2 + 4x - 3 \quad (2)$$

این تابع را پیدا کنید.

حل: می‌دانیم ضابطه‌ی این تابع به صورت $f(x) = ax + b$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(-1) = 2 &\Rightarrow a(-1) + b = 2 \Rightarrow -a + b = 2 \\ f(2) = -3 &\Rightarrow a(2) + b = -3 \Rightarrow 2a + b = -3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 4 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{3b = 1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{3} \Rightarrow -a + \frac{1}{3} = 2 \Rightarrow a = -\frac{5}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$$

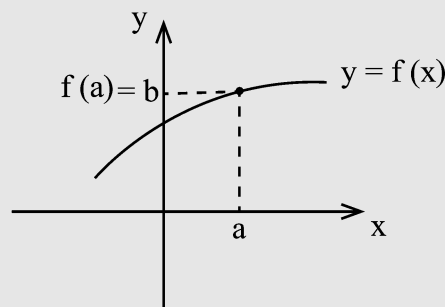
مثال: هرگاه $f(x) = 3x - 2$ و نقطه‌ی $(m+1, 2m-1)$ روی نمودار تابع $f(x)$ باشد، مقدار m را بیابید.

حل: چون این نقطه روی نمودار تابع است، بنابراین داریم:

$$f(m+1) = 2m-1 \Rightarrow 3(m+1) - 2 = 2m-1 \Rightarrow m = -2$$

نکته: هرگاه نقطه‌ی (a, b) روی نمودار تابع

$y = f(x)$ باشد، در این صورت داریم: $f(a) = b$.



مثال: فرض کنیم $f(x) = 2x^2 - 1$ مطلوب است:

الف) $f(\sqrt{2})$ ب) $f(2x)$ ج) $f(x+1)$

حل:

الف) کافی است به جای x در تابع $f(x)$ ، عدد $\sqrt{2}$ را قرار دهیم:

$$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$f(2x) = 2(2x)^2 - 1 \quad (\text{ب})$$

$$= 8x^2 - 1$$

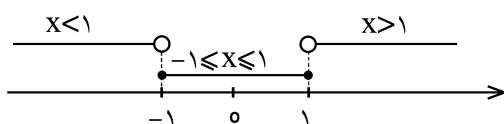
$$f(x+1) = 2(x+1)^2 - 1 \quad (\text{ج})$$

$$= 2(x^2 + 2x + 1) - 1 = 2x^2 + 4x + 1$$

تابع چندضابطه‌ای

هرگاه دامنه‌ی یک تابع را به چند مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم کنیم، به طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه‌ی تابع باشد و روی هر مجموعه ضابطه‌ای متمایز تعریف کنیم، در این صورت یک تابع چندضابطه‌ای به دست می‌آید.

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x)$ برابر با $\mathbb{R}$ است. ابتدا به صورت زیر، این دامنه را به سه مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم می‌کنیم:



اکنون روی هر مجموعه، ضابطه‌ای متمایز به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & x < -1 \end{cases}$$

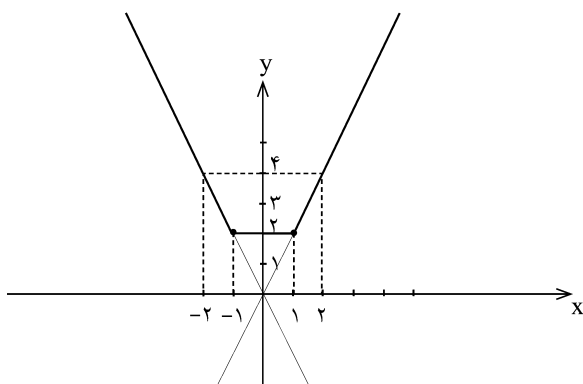
در این صورت به $f(x)$ تابع‌ای سه ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال: نمودار تابع سه ضابطه‌ای مثال قبل را رسم کنید و برد آن را به دست آورید.

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار هر ضابطه را در محدوده‌ی دامنه‌اش رسم کنیم. به همین منظور، $f(x) = 2$ را برای $x > 1$ ، $f(x) = 2$ را برای $-1 \leq x \leq 1$ و $f(x) = -2x$ را برای $x < -1$ رسم می‌کنیم:

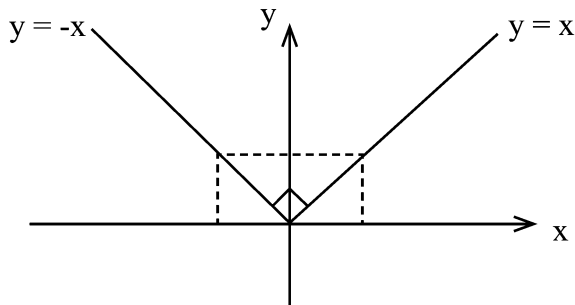
$$f(x) = 2x; \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \quad f(x) = 2; \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$f(x) = -2x; \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{array}$$



نمودار این تابع به صورت زیر است :

x	-1	0	1
y	1	0	1



دامنه‌ی تعریف این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. از طرف دیگر، عرض هر نقطه واقع بر این تابع، بزرگ‌تر یا برابر صفر است. یعنی همواره $y \geq 0$. در نتیجه برد این تابع $R_f = [0, \infty)$ است.

نکته ۱. می‌توان نمودار این تابع را یک زاویه قائمه دانست که رأس آن منطبق بر مبدأ و دو ضلع این زاویه نیمسازهای ربع اول و دوم محورهای مختصات هستند.

نکته ۲. تابع قدر مطلق یک به یک نیست، زیرا خطی موازی محور طول وجود دارد که نمودار آن را در دو نقطه قطع می‌کند.

تمرین: نمودار هر یک از تابع‌های چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد هر کدام را به دست آورید.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \\ x+2 & x < -1 \end{cases}$$

$$2. \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x-2 & x > 1 \\ -x-2 & x < -1 \end{cases}$$

۳. تابع $s(x)$ به تابع علامت معروف است.

$$s(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

توجه: نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کردیم و روی هر نمودار، قسمت‌هایی را که در دامنه است، پررنگ کردیم. ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار این تابع سه ضابطه‌ای، همواره بزرگ‌تر یا برابر با ۲ است. پس داریم:

$$R_f = [2, +\infty)$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & x \geq 0 \\ 1-2x & x < 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حاصل $f(x^2+1)$ ، $f(-\sqrt{2})$ و $f(-\frac{1}{4}x^2-1)$ را به دست آورید.

حل: چون همواره $x^2+1 > 0$ ، بنابراین از ضابطه‌ی اول برای محاسبه‌ی $f(x^2+1)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x^2+1) = -(x^2+1)^2+1 = -(x^4+2x^2+1)+1 = -x^4-2x^2$$

چون $-\sqrt{2} < 0$ ، بنابراین برای محاسبه‌ی $f(-\sqrt{2})$ از ضابطه‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\sqrt{2}) = 1 - 2(-\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$$

چون $-\frac{1}{4}x^2-1 < 0$ ، بنابراین $-\frac{1}{4}x^2-1 < 0$ در نتیجه برای

محاسبه‌ی $f(-\frac{1}{4}x^2-1)$ از ضابطه‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\frac{1}{4}x^2-1) = 1 - 2(-\frac{1}{4}x^2-1) = 1 + x^2 + 2 = x^2 + 3$$

تابع قدر مطلق
تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x|$ را تابع قدر مطلق می‌نامیم و آن را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

این تابع به هر عضو از دامنه‌اش $(\mathbb{R})$ ، قدر مطلق آن را نسبت می‌دهد. در حقیقت، حاصل تأثیر این تابع روی هر عدد حقیقی، یک عدد حقیقی نامنفی است. برای مثال:

$$f(3) = |3| = 3; \quad f(-3) = |-3| = -(-3) = 3; \quad f(0) = |0| = 0$$

جواب ۶:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 2 \\ 4 & x = 2 \\ x^2+1 & x < 2 \end{cases}$$

۷. هرگاه داشته باشیم $f(x) = 4$ در این صورت مطلوب است محاسبه ی $f(\sqrt{2})$ ، $f(4)$ ، $f(2)$ و $f(k-1)$.

جواب ۷:

$$f(k-1) = \begin{cases} 2k-3 & k > 3 \\ 4 & k = 3 \\ k^2-2k+2 & k < 3 \end{cases}$$

و $f(2) = 4$

۴.

$$h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

۵. با توجه به تابع علامت $s(x)$ که در تمرین ۳ ارائه شده است، مطلوب است محاسبه ی $s(x^2) - s(x)$.

جواب ۵:

$$s(x^2) - s(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

۶. اگر $f(x) = \begin{cases} 4 & x > 2 \\ -2 & x \leq 2 \end{cases}$ ، آن گاه حاصل $-5f(\sqrt{3}) + 4f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(100)$ را بیابید.

اسم سایت:

احسان یارمحمدی

The Math Page

معرفی

سایت های ریاضی
جهان

<http://www.themathpage.com>

آدرس اینترنتی سایت:

صفحه ی اصلی این سایت شامل عنوان های زیر است، هر یک از این عنوان ها شامل زیر عنوان هایی است که هر کدام حاوی مطالبی مفصل می باشند.

(Skill in Arithmetic)

* مهارت در حساب

(Plane Geometry)

* هندسه مسطحه

(Skill in Algebra)

* مهارت در جبر

(Topics in Trigonometry)

* عناوینی در مثلثات

(Topics in Pre-Calculus)

* عناوینی در حسابان مقدماتی

(An Approach to Calculus)

* رویکردی به حسابان

(The Evolution of the Real Numbers)

* سیر تکامل اعداد حقیقی

در پایین صفحه اصلی سایت، آدرس الکترونیکی

E-mail: themathpage@ncy.rr.com

وجود دارد که کاربر می تواند از طریق آن با سایت ارتباط داشته باشد.