

برای خدمت به جامعه آماده شوید

با شروع سال تحصیلی، همه‌ی فعالیت‌های آموزشی و پرورشی شما دانش‌آموزان و آینده‌سازان ایران اسلامی از سر گرفته می‌شود، اما تا چه حد با این فعالیت‌ها و وظایف آشنا هستید و خود را برای انجام آن‌ها آماده کرده‌اید؟ دوران دبیرستان یکی از اصلی‌ترین و مهم‌ترین عوامل شکل‌دهنده و تأثیرگذار بر شخصیت هر فرد به شمار می‌رود. شما باید در این چند سال برای خدمت به جامعه آماده شوید و راه آینده‌ی خود را به خوبی شناسایی کنید. لذا می‌باید غیر از موضوعات آموزشی و پرورشی که از اهم مسائل هستند، به مسائل روز و موجود در جامعه‌ای که به زودی با آن‌ها مواجه خواهید شد نیز آشنا باشید.

بر لزوم توجه دانش‌آموزان به مسائل سیاسی و اجتماعی بارها مقام معظم رهبری، حضرت آیت‌الله خامنه‌ای، و اولیای مسائل آموزشی و تربیتی، تأکید کرده‌اند. این سخن به این معنی است که دانش‌آموزان ما در کنار فعالیت‌های علمی خود، فعالیت‌های اجتماعی را نیز در نظر داشته باشند و آن‌ها را جزو ضرورت‌های زندگی و شکل‌دهنده‌ی شخصیت‌های فردی قلمداد کنند.

رشد یک‌بُعدی و دانش‌اندوزی بدون تهذیب نفس، هر چند انسان را به مدارج علمی قابل توجهی می‌رساند، اما برآیند آن، چیزی جز افسارگسیختگی و نارسایی‌های فردی و اجتماعی نخواهد بود. دانش‌آموزان ما از دیرباز آموخته‌اند که تنها، گنجینه‌ی متحرک علوم بشری نباشند، بلکه هم‌سوی با جامعه، به عنوان فردی مفید از آن جامعه، برای سایر نیازهای فطری خویش پاسخی شایسته داشته باشند. به همین دلیل، بسیاری از دانش‌آموزان کوشا و ساعی در عرصه‌ی علوم، در سایر مباحث اجتماعی و سیاسی هم فعال هستند. شرکت دانش‌آموزان در مجامعی چون بسیج دانش‌آموزی، انجمن‌های اسلامی، برنامه‌ها و فعالیت‌های اجتماعی و گروهی، مبین این نکته است که ما دانش‌آموزان اندیشمند و متفکر فراوان داریم و این امر ریشه در تاریخ کشور ما دارد.

حضور فراگیر و گسترده‌ی دانش‌آموزان در مبارزات انقلابی مردم در سال ۵۷ و حماسه‌آفرینی آن‌ها در روز ۱۳ آبان همان سال، نقش تعیین‌کننده‌ای در سقوط رژیم پهلوی داشت و این روند را می‌توان در سال‌های دفاع مقدس به خاطر آورد و از دانش‌آموزانی چون شهید فهمیده یاد کرد که مراتب والایی از حضور دانش‌آموزان را در دفاع مقدس به نمایش گذاشت. او تا جایی پیش رفت که رهبر کبیر انقلاب اسلامی حضرت امام خمینی از او به عنوان (رهبر ما) یاد کردند. امروز بسیاری از همان دانش‌آموزان، در عرصه‌ی علم و دانش از متخصصان و دانشمندان این جامعه هستند و آن‌هایی که به شهادت رسیده‌اند، با شهادت خویش امنیت و آرامش را برای علم‌آموزی و پیشرفت به طرف ارزش‌های انسانی و اسلامی سایرین هموار کردند و خود در بهشت زیبای خداوند، هم‌نشین پاکان و دوستان خدا شدند.



دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

دوره‌ی نوزدهم - شماره‌ی ۱ - پاییز ۱۳۸۸
شمارگان: ۱۳۰۰۰ نسخه

♦ مدیر مسئول: محمد ناصری ♦ سردبیر: حمیدرضا امیری
♦ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ♦ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
♦ هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی،
احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سیدمحمدرضا
هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی پور ویا تشکر از همکاری
ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ♦ ویراستار ادبی: کبری محمودی
Email: Borhanm@roshdmag.ir ♦

♦ پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۳-۰۲۱

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

♦ تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲-۸۸۳-۰۲۱

♦ تلفن امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰-۷۷۳۳۵۱۱۰

♦ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

فهرست

- ۳ ریاضیات در ایران (۵)
پرویز شهریاری
۶ اتحادهای مثلثاتی
احمد قندهاری
۱۲ دستگاه‌های شمار
غلامرضا یاسی پور
۱۶ مسئله‌ای چالش برانگیز از احتمال
هوشنگ شرقی
۲۲ چند حکم ریاضی بسیار ساده با نتیجه‌های بسیار جالب
دکتر احمد شرف‌الدین
۲۷ مدل‌سازی و خطای اندازه‌گیری
عنایت‌الله راستی‌زاده
۳۰ تعداد افزارهای یک مجموعه‌ی n عضوی
عماد سهایی
۳۴ رویکرد هندسی - رویکرد جبری در آموزش هندسه
محمد هاشم رستمی
۴۰ انتگرال‌گیری جدولی
شهبین بهنیا
۴۳ آشنایی با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی (۵)
دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
۴۸ قضیه تقسیم (۳)
حمیدرضا امیری
۵۲ طراحی با رابطه‌های ریاضی
میرشهرام صدر
۵۶ هم‌نهشتی و کاربردهای آن (۷)
سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
۶۲ معرفی سایت‌های ریاضی جهان
احسان یارمحمدی
۶۳ رسم نمودار fogfz روی نمودارهای f و g
احمد قندهاری

رشد / متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد / متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجله در حکم، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

خوارزمی (سده سوم)

خوارزمی و کتاب جبر و مقابله

بهاءالدین عاملی معروف به شیخ بهایی، ریاضی دان آغاز سده یازدهم هجری قمری (سده شانزدهم میلادی)، دو واژه ی جبر و مقابله را این طور تعریف کرده است: «می توان بخشی از معادله را که شامل مقدار منفی است، حذف کرد و به سمت دیگر و به همان اندازه اضافه کرد. این عمل جبر نامیده می شود. جمله های متشابه برابر

بلا بگرداند: (سعدی) می دانست که به زبان امروزی به معنای جابه جایی عددی منفی از یک طرف معادله به طرف دیگر و تبدیل آن به عددی مثبت است. کنار واژه ی «جبر»، به واژه ی «مقابله» برمی خوریم که نشان دهنده ی عمل دیگری در حل معادله است: مقابل هم قرار دادن جمله ی برابر در دو سوی معادله.

«جبر و مقابله» ی خوارزمی مهم ترین کتابی است که محمد فرزند موسی خوارزمی در زمینه ی جبر نوشته و آن را ادامه ی حساب نامیده است. واژه ی جبر که خوارزمی برای نامیدن این دانش برگزیده، معرف روشی است که او در کتاب خود، آن را به کار برده است. خوارزمی جبر را به معنای جبران کردن (که جبر خاطر مسکین

❖ برای آن که درک از طبیعت درست و عاقلانه باشد، شناسایی ریاضیات و دانش های طبیعی لازم است.

«فردریک انگلس»

را می توان از دو سمت معادله کنار گذاشت. این عمل را هم مقابله گویند». به کمک آموزه های امروزی، این دو عمل را می توان به روشنی در نمونه ای شرح داد. این معادله را در نظر می گیریم:

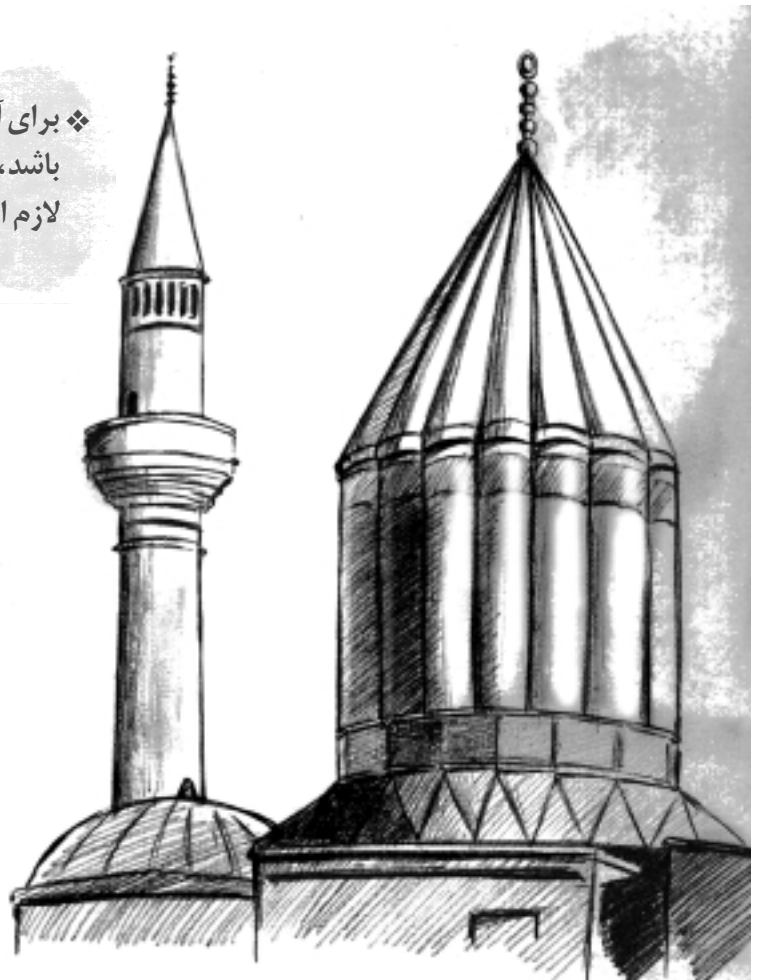
$$5x - 13 = 4x - 9$$

اگر به دو سمت، برابری ۱۳ و ۹ را بیفزاییم، عمل جبر را انجام داده ایم.

$$5x + 9 = 4x + 13$$

اگر از دو سمت برابری، $4x$ و 9 را کم کنیم، عمل مقابله را انجام داده ایم. در نتیجه داریم: $x = 4$

به این ترتیب، عمل های جبر و مقابله





به زبان امروزی عبارت اند از: انتقال جمله‌ای از یک سمت معادله به سمت دیگر و سپس جمع جبری جمله‌های مشابه. در برگردان واژه‌ی جبر به زبان‌های انگلیسی، فرانسه، آلمانی و روسی، حرف اضافه‌ی «ال» را هم گذاشته‌اند و «الجبر» را به کار می‌برند.

در کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی، راه‌حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم شرح داده شده است. کتاب خوارزمی در اساس به روش حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم مربوط می‌شود. به این ترتیب، خوارزمی مسیر اصلی این دانش جدید را مشخص می‌کرد و می‌دانیم، مضمون اصلی جبر، دست کم تا سده‌ی نوزدهم میلادی عبارت است از همین حل معادله‌ها. آقای خان مهندس در کتاب «اصول علم جبر و مقابله» که در سال ۳۰۵ هجری قمری چاپ شده است، می‌نویسد:

تعمیم و تشکیل این عمل (یعنی علم حساب) با این همه شرف و تغییر، موقوف است به علم جبر و مقابله و استخراج مجهولات از روی حل معادلات به طریقی که معین و مقرر است. ارزش عملی کار خوارزمی در این است که کتاب او تنها رساله‌ای درباره‌ی حل مسئله‌ها نیست (آن‌طور که در آثار یا نوشته‌های هندی دیده می‌شود)، بلکه خوارزمی به جز حل معادله‌ها، کاربرد آن‌ها را طرح می‌کند و بسیاری از قانون‌ها را با روش هندسی هم روشن می‌سازد.

درست است که خوارزمی برای حل معادله‌ی درجه دوم، به ظاهر راه‌حل کلی نمی‌دهد، ولی ضمن آوردن مثال‌های عددی در برخی حالت‌ها، همان دستوری را دنبال می‌کند که امروز برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌شناسیم.

مسئله‌ی ۱۳۸ باب هفتم

کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی

یک درهم را بر چند مرد بخش کردم، به هر یک چیزی رسید. سپس یک مرد به گرد آنان افزودم و بار دیگر یک درهم را میان آنان بخش کردم. سهم هر یک در بار دوم به اندازه‌ی یک ششم درهم، از مقدار بخش اول کم‌تر شد. در این جا خوارزمی می‌خواهد تعداد مردان را در بار

❖ **شراهِ یک لحظه**
می‌درخشند، ولی نور واقعی هرگز خاموش نمی‌شود.
«گوته»

اول پیدا کند. راه‌حل او را می‌آوریم: اگر تعداد مردان نوبت اول را که عبارت است از شیء x در نقصانی که میان آنان است $\left(\frac{1}{6}x\right)$ ضرب کنی و آن‌گاه حاصل ضرب را در تعداد مردان نوبت‌های اول و دوم ضرب کنی $\left[\frac{1}{6}x(x+1)\right]$ ، مال بخش شده [یعنی یک درهم] به دست می‌آید: $\left[\frac{1}{6}x(x+1)=1\right]$. پس از آن، تعداد مردان نوبت اول را که عبارت است از شیء x ، در یک ششم، که میان آنان اختلاف بود، ضرب کنی، می‌شود یک ششم جذر $\left(\frac{1}{6}x\right)$. سپس آن را در تعداد مردان نوبت دوم، یعنی شیء به اضافه‌ی یک، ضرب می‌کنی. این نتیجه به دست می‌آید: یک ششم مال به اضافه‌ی یک ششم جذر که تقسیم بر یک درهم برابر است با یک درهم $\left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x = 1\right]$. مالی را که در اختیار داری کامل می‌کنی، یعنی آن را در ۶ ضرب می‌کنی، می‌شود مال به اضافه‌ی جذر $[x^2 + x]$. پس یک درهم را در شش ضرب می‌کنی، می‌شود شش درهم. حاصل آن یک مال و یک جذر است که برابر است با شش درهم $[x^2 + x = 6]$. آن‌گاه تعداد جذر را پس از نصف کردن در مانند خودش ضرب کن و آن را بر شش بیفزای $\left[\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 6\right]$. جذر حاصل جمع را بگیر و نصف تعداد

جذری را که در مانند خودش ضرب کرده بودی و عبارت است از نصف $\frac{1}{6}$ ، از آن کم کن $\left[-\frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 6}\right]$. مانده عبارت است از تعداد مردان نوبت اول که در این مسئله دو مرد است.

خوارزمی شش نوع معادله را بررسی می‌کند و برای هر کدام راه‌حل خاصی می‌دهد. این شش نوع معادله به زبان نمادهای امروزی چنین هستند:

- ۱) $x^2 = 2x$
- ۲) $x^2 = 3x$
- ۳) $5x = 10$
- ۴) $x^2 + 7x = 12x$
- ۵) $5x^2 + 21 = 10x$
- ۶) $12x + 288 = x^2$

معادله‌ی سوم معادله‌ای درجه اول است، ولی خوارزمی در بخش بندی خود بر این اساس عمل می‌کند که در معادله‌ی درجه دوم، سه جمله وجود دارد: جمله‌ی درجه دوم، جمله‌ی درجه اول و مقدار ثابت. در ترکیب معادله ممکن است تنها دو جمله از این سه جمله دخالت داشته باشند (حالت‌های ۱، ۲ و ۳) و یا هر سه جمله (حالت‌های ۴، ۵ و ۶). در ضمن، وقتی هر سه جمله از معادله‌ی درجه دوم وجود دارد، ممکن است جمله‌های درجه اول و درجه دوم در یک طرف و مقدار ثابت در طرف دیگر باشد (حالت ۴). یا جمله‌ی درجه دوم و مقدار ثابت در یک طرف و جمله‌ی درجه اول در طرف دیگر باشد (حالت ۵). سرانجام جمله‌ی درجه اول و مقدار ثابت در یک طرف و جمله‌ی درجه دوم در طرف دیگر (حالت ۶).

همان‌طور که ضمن راه‌حل مسئله‌ی نمونه دیدیم، خوارزمی برای حل معادله، نه از دستور و نماد، بلکه از بیان استفاده می‌کند و در ضمن در حالت‌هایی که دو ریشه‌ی معادله مثبت باشند، هر دو ریشه را به دست می‌آورد و از این بابت بر جبر دیوفانتی برتری دارد.

خوارزمی برای حل معادله‌ها از

روش های هندسی هم استفاده می کند. برای نمونه در باب دوم (باب جذر، مال و عدد)، نیز عنوان استدلال در یک مال و ده جذر با سی و نه درهم را برابر می گیرد. «خورازمی در باره ی حساب» کتاب حساب الهند را هم مطالعه کرده بود. این کتاب در پیشرفت بعدی ریاضیات در اروپایی غربی، نقش بی اندازه ای داشته است، زیرا اروپاییان به وسیله ی آن با روش هندی عددنویسی آشنا شدند. سپس دستگاه رقم های هندی، پایه ی کاربردی پیدا کرد. اروپاییان این شکل عددنویسی و شکل موضعی را در واقع از عددنویسی هندی گرفتند و آن را «عددنویسی عربی» نامیدند (حتی امروز هم بعضی از کتاب ها این اصطلاح نادرست را به کار می برند). نام خوارزمی در آغاز با برگردان کتاب حساب الهند به اروپا رفت و به صورت لاتین شده ی آن «الگوریموس» درآمد. به تدریج در تمامی اروپای غربی، نخست عنوان الگوریموس و بعدها الگوریتم، روش عددنویس هندی، یعنی همین عددنویسی امروزی ما، رواج یافت. ولی به مرور، این عنوان، یعنی الگوریتم، به هر دستگاه با دنباله ای از محاسبه داده شد؛ هم چون الگوریتم روش ضرب عددهای چندرقمی که ضرب عدد چندرقمی را به صورت ستونی توضیح می دهد، الگوریتم اقلیدس برای پیدا کردن

ALgebra و در زبان روسی الگبر.



از کتاب های خوارزمی تنها کتاب جبر و مقابله ی او با همت زنده یاد حسین خدیوچم به فارسی ترجمه شده است. اگر ارشمیدس و چندتن دیگر را کنار بگذاریم، می توان ادعا کرد که ریاضیات یونانی در دوران شکوفایی خود نتوانست در جهت پیدایش «جبر» یا حتی کمتر از آن «حساب» گامی جدی، بردارد. بیشتر ریاضی دانان در زمینه ی هندسه تلاش می کردند و در این راه توانستند تا درون هندسه ی عالی نفوذ کنند، ولی با آن که صدها سال پیش از ریاضی دان یونانی، دانشمندان سرزمین های میان دو رود (بین النهرین) به مرحله های بالایی از ریاضیات محاسبه ای رسیده بودند، یونانی ها حتی توانستند از عهده ی نوشتن عددهای بزرگ و دشوارتر از آن، عمل روی این عددها، به سادگی برآیند.

در واقع در یونان، عددها را به یاری حرف های الفبا (و با بیست و هفت نشانه) می نوشتند و هنوز عددنویسی آن ها شکل موضعی نداشت، عددنویسی موضعی همراه با قبول نمادی برای صفر در میان دو رود وجود داشت و بعدها در سده های نخست میلادی دوباره در هند پیدا شد.

در میان دو رود (ماوراءالنهر)، به صورت مقدماتی ترین عیلامی ها از شکل موضعی بودن عدد استفاده می کردند و در

بیشتر حالت ها از
 مبنای ۶۰ استفاده
 می کردند. تقسیم
 محیط دایره به ۳۶۰
 درجه و سپس
 بخش های شصت
 شصتی آن و نیز تقسیم بندی زمان بر اساس
 ساعت، دقیقه، ثانیه و عمده ی کارهای
 قوم های ساکن میان دو رود بر اساس قبول
 عددنویسی شصت شصتی بود.

تفاوتی را که دانشمندان بابلی و یونانی در نوع برخورد با ریاضیات داشتند، باید در نیازهای اجتماعی - اقتصاد این دو سرزمین

بزرگ ترین
 بخش یاب عددها،
 الگوریتم حل
 معادله ی درجه ی
 دوم، و غیر آن.
 به این نکته توجه

❖ تنها کافی نیست اندیشه ای خوب
 داشته باشیم، اصل مطلب این است
 که آن را خوب به کار ببریم.

«نه دکارت»

داشته باشیم که واژه ی لگاریتم هیچ ربطی با واژه ی الگوریتم و در نتیجه با نام خوارزمی ندارد.

به جز این، نامی که خوارزمی بر این کتاب جبر گذاشت، امروز در همه ی زبان های جهان باقی مانده است: در زبان فرانسوی ALgebra، در زبان انگلیسی

و در نوع تفاوت های سیاسی - اجتماعی آن ها جست و جو کرد. در هر دو سرزمین، نظام برده داری حاکم بود. برده داری دولتی در بابل و برده داری شخصی در یونان.

نظام دموکراسی یونان تا حدی شامل آزادهای یعنی صاحبان برده می شد. آزادهای هرگونه کار عملی را شایسته ی خود نمی دانستند و آن ها را به عهده ی برده ها می گذاشتند. همین امر در شیوه ی تفکر علمی آزادهای اثر گذاشت. آن ها هر دانشی را که کاربرد عملی داشت، دانشی پست به حساب می آوردند و تحقیر می کردند و چون تصور آن ها بر این بود که هندسه کاربردی عملی ندارد، آن را عزیز می شمردند و تمام همت خود را در کشف رازهای آن مصروف می داشتند. چنین بود که حساب و به طور طبیعی جبر که در واقع از راه تکامل حساب می توان به آن رسید، به خاطر جنبه های عملی و کاربردی آن مورد عنایت آزادهای نبود. آزادهای کارهای مهم تری داشتند:

کشف رازهای طبیعت و ساختمان جهان. به همین مناسبت، هر دانشمند یونانی فیلسوف بود و برای گره گشایی رازهای پنهانی جهان کوشید. کارهای پست و عملی را برده ها انجام می دادند. این کارها در اعتبار آزادهای نبود. اگر کسانی هم چون اوپانیتوس در زمینه های مهندسی می اندیشیدند، نه در همان زمان و نه پس از خودشان مورد توجه نبودند و اندیشه هایشان دنبال نمی شد.

اوپانیتوس توانسته بود با مهارت نخستین، آب گیری را در یکی از کوه های ساموس سوراخ کند و در دل کوه مسیری را به طول یک کیلومتر برای عبور آب به وجود آورد.

البته نباید دانشمندان بزرگی هم چون ارشمیدس را که در همه ی زمینه های عملی از حساب تا مکانیک کار می کرد، یا ارسطو را که تلاشی موفق در جمع آوری همه ی دانش های منطقی و غیر منطقی زمان خود کرد، از جمله ی استثناها به شمار آورد؛ به ویژه که کار پرارزش آن ها اثر چندانی بر روند کلی حرکت دانش زمان آن ها نداشت.





اتحادهای مثلثاتی

مثال ۱. درستی اتحاد $\frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A} = \frac{\tan A}{\cot B}$ را ثابت کنید .

حل: عبارت سمت چپ این اتحاد را ساده می‌کنیم تا به عبارت سمت راست برسیم .

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A} = \frac{\tan A - \tan B}{\frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A}} = \frac{\frac{\tan A - \tan B}{1}}{\frac{\tan A - \tan B}{\tan A \cdot \tan B}}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \tan A \cdot \tan B = \tan A \times \frac{1}{\cot B}$$

$$= \frac{\tan A}{\cot B} \quad \text{برابر عبارت سمت راست}$$



تعریف: هر تساوی مثلثاتی، بین یک یا چند نسبت مثلثاتی که به ازای جميع مقادير متغير يا متغيرهای تعريف شده در آن، همواره برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شود. برای مثال، تساوی (I) $\sin^2 x + \cos^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1$ یک اتحاد مثلثاتی است. اگر به جای x ، هر زاویه‌ای را قرار دهیم، تساوی فوق برقرار است.

اثبات یک اتحاد مثلثاتی معمولاً به سه روش صورت می‌گیرد:

روش اول: یک طرف اتحاد مثلثاتی را که عبارت مفصل‌تری است، با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی و رابطه‌های دیگر مثلثاتی، آن قدر ساده‌تر می‌کنیم و تغییر می‌دهیم تا به طرف دیگر برسیم .

تفکیک می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

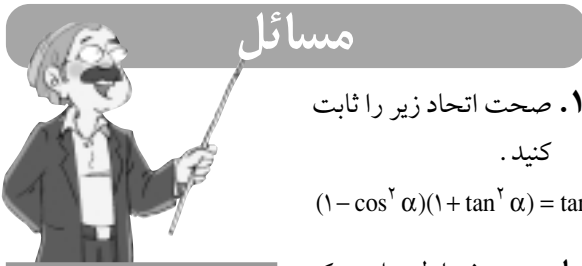
$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} + \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ (1 - \cos x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$



توجه: این روش معمول نیست، ولی در اتحادهای مثلثاتی مسائلی داریم که با این روش، راحت‌تر حل می‌شوند.



مسائل

۱. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha$$

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ} = (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) = (\sin^2 \alpha) \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = (\sin^2 \alpha) \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) = \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$$



۲. صحت اتحاد $(\cot \alpha - 1)^2 + (\cot \alpha + 1)^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \cot^2 \alpha + 1 - 2 \cot \alpha + \cot^2 \alpha + 1 + 2 \cot \alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 2 \cot^2 \alpha + 2 = 2(\cot^2 \alpha + 1) = 2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1\right)$$

$$= 2 \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$



روش دوم: فرض می‌کنیم تساوی اتحاد درست باشد. دو طرف تساوی را به کمک فرمول‌ها و روابط مثلثاتی به صورت ساده‌تر می‌نویسیم تا به دو عبارت برابر برسیم.

$$\text{مثال ۲. درستی اتحاد } \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} = \frac{2 - \sin 2a}{2}$$

ثابت کنید.

حل: فرض می‌کنیم تساوی این اتحاد درست باشد. برای حل به روش دوم، طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2(\sin^3 a + \cos^3 a) = (\sin a + \cos a)(2 - \sin 2a)$$

عبارت سمت چپ را با استفاده از اتحاد زیر بسط می‌دهیم:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$$

$$\Rightarrow 2(\sin a + \cos a)(\sin^2 a + \cos^2 a - \sin a \cos a)$$

$$= (\sin a + \cos a)(2 - \sin 2a)$$

$$\Rightarrow 2(\sin a + \cos a) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2a\right) = (\sin a + \cos a)(2 - \sin 2a)$$

$$\Rightarrow (\sin a + \cos a)(2 - \sin 2a) = (\sin a + \cos a)(2 - \sin 2a)$$



روش سوم: با نوشتن روابطی و با استفاده از فرمول‌ها و روابط مثلثاتی، صورت اصلی اتحاد را می‌سازیم (این روش در واقع برگشت پذیری روش دوم است).

$$\text{مثال ۳. درستی اتحاد } \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

را ثابت کنید.

حل: به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2 \sin x = 2 \sin x$$

دو طرف تساوی را بر $(1 - \cos x) \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

عبارت سمت چپ را در $\frac{\sin x}{\sin x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \cos^2 \alpha) \sin^2 \beta \\ &= \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$



۷. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 31^\circ + \cos 34^\circ \cdot \cos 5^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل:

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ &= \sin(18^\circ + 2^\circ) = \sin(\pi + 2^\circ) = -\sin 2^\circ \\ \sin 31^\circ &= \sin(36^\circ - 5^\circ) = \sin(2\pi - 5^\circ) = -\sin 5^\circ \\ \cos 34^\circ &= \cos(36^\circ - 2^\circ) = \cos(2\pi - 2^\circ) = \cos 2^\circ \\ \text{عبارت سمت چپ} &= (-\sin 2^\circ)(-\sin 5^\circ) + \cos 2^\circ \cos 5^\circ \\ &= \cos 2^\circ \cos 5^\circ + \sin 2^\circ \sin 5^\circ \\ &= \cos(5^\circ - 2^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



۸. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos \alpha + \cos(12^\circ + \alpha) + \cos(24^\circ + \alpha) = 0$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha + \cos(18^\circ - 6^\circ + \alpha) + \cos(18^\circ + 6^\circ + \alpha) \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha + \cos(\pi + (\alpha - 6^\circ)) + \cos(\pi + (\alpha + 6^\circ)) \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha - \cos(\alpha - 6^\circ) - \cos(\alpha + 6^\circ) \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha - (\cos \alpha \cos 6^\circ + \sin \alpha \sin 6^\circ) - \\ &\quad (\cos \alpha \cos 6^\circ - \sin \alpha \sin 6^\circ) \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha - \cos \alpha \cos 6^\circ - \sin \alpha \sin 6^\circ - \\ &\quad \cos \alpha \cos 6^\circ + \sin \alpha \sin 6^\circ \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha - 2 \cos \alpha \cos 6^\circ = \cos \alpha (1 - 2 \cos 6^\circ) \end{aligned}$$

$$= \cos \alpha - \cos \alpha = 0$$



۹. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2 \quad \text{حل: داریم}$$

۳. صحت اتحاد $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \tan \alpha - \cot \alpha$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\overbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \tan \alpha - \cot \alpha \end{aligned}$$



۴. درستی اتحاد $\frac{1 - \tan^2(45^\circ - \alpha)}{1 + \tan^2(45^\circ - \alpha)} = \sin 2\alpha$ را ثابت کنید.

حل: $45^\circ - \alpha = x$ فرض می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = \frac{\cos 2x}{1} = \cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \cos 2x = \cos(9^\circ - 2\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \\ &= \sin 2\alpha \end{aligned}$$



۵. درستی اتحاد $\sin 15^\circ + \tan 30^\circ \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}$ را ثابت کنید.

حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \sin 15^\circ + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \cos 15^\circ \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\sin 15^\circ \cos 30^\circ + \cos 15^\circ \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \\ &= \frac{\sin(15^\circ + 30^\circ)}{\cos 30^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ} \end{aligned}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



۶. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta (1 + \sin \theta) + \sin^2 \theta (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \tan^2 \theta \end{aligned}$$



۱۲. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 - \tan^2 \alpha = 2 \tan^2 \alpha$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)^2 - 1 - \tan^2 \alpha = (1 + \tan^2 \alpha)^2 - 1 - \tan^2 \alpha \\ \text{عبارت سمت چپ} &= 1 + \tan^2 \alpha + 2 \tan^2 \alpha - 1 - \tan^2 \alpha = 2 \tan^2 \alpha \end{aligned}$$



۱۳. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - \\ & 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= (1)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin^2 2\alpha\right) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \quad \text{به خاطر بسپارید:}$$



۱۰. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

حل:

توجه داریم:

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 &= (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2 b^2) \\ a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2 \\ \Rightarrow a^6 + b^6 &= (a^2 + b^2)[(a^2 + b^2)^2 - 3a^2 b^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \times \\ & [(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] \\ &= [1 - 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2] = 1 - 3\left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \end{aligned}$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \quad \text{به خاطر بسپارید:}$$



۱۱. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin \theta}{\frac{1}{\sin \theta} - 1} + \frac{\sin \theta}{\frac{1}{\sin \theta} + 1} = 2 \tan^2 \theta$$

سوالات چهارگزینه ای



۱. اگر $0 < x < \pi$ باشد، آن گاه به ازای چه مقادیری از m ، معادله $m^2 - 4 = 2 \tan \frac{x}{2}$ جواب دارد؟

- (۱) $m > 2$ یا $m < -2$ (۲) $-2 < m < 2$ (۳) $-4 < m < 4$ (۴) $m > 4$ یا $m < -4$

۲. حاصل $\frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ} + \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

۳. حاصل $\tan 21^\circ + \tan 39^\circ + \sqrt{3} \tan 2^\circ \tan 6^\circ$ برابر است با:
- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) -۱
۴. حاصل $\frac{1}{\sin 1^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 8^\circ}$ برابر است با:
- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$
۵. حاصل $\cos^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ$ برابر است با:
- (۱) $\sin 40^\circ$ (۲) $-\sin 50^\circ$ (۳) $-\sin 80^\circ$ (۴) $-\sin 70^\circ$
۶. حاصل $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12}$ برابر است با:
- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $-\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{8}$
۷. حاصل $\sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{\pi}{12}$ برابر است با:
- (۱) $\frac{11}{16}$ (۲) $\frac{12}{16}$ (۳) $\frac{13}{16}$ (۴) $\frac{14}{16}$
۸. اگر $x < \pi < x + \frac{\pi}{2}$ باشد، آن گاه حاصل $\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$ برابر است با:
- (۱) $\tan x$ (۲) $\cot x$ (۳) $-\tan x$ (۴) $-\cot x$
۹. حاصل عبارت $\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 15^\circ$ برابر است با:
- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
۱۰. حاصل کسر $\frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos x}{\sin 2x}$ برابر کدام گزینه است؟
- (۱) $\frac{\sin \frac{x}{2}}{2}$ (۲) $\frac{\cos \frac{x}{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sin \frac{x}{4}}{4}$ (۴) $\frac{1}{\cos \frac{x}{4}}$
۱۱. حاصل $\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$ برابر است با:
- (۱) $\cos 2x$ (۲) $\sin 2x$ (۳) $-\sin 2x$ (۴) $-\cos 2x$
۱۲. حاصل $\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5}$ برابر است با:
- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$
۱۳. اگر $\cot \alpha$ و $\cot \beta$ ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشند، آن گاه $\tan(\alpha + \beta)$ برابر است با:
- (۱) $-\frac{2}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{2}$
۱۴. حاصل کسر $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$ برابر است با: $(\alpha \neq k\pi)$
- (۱) $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ (۲) $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ (۳) $\tan^2 \frac{\alpha}{2}$ (۴) $\cot^2 \frac{\alpha}{2}$
۱۵. حاصل $\cos^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ$ برابر است با:
- (۱) $\cos 40^\circ$ (۲) $-\cos 40^\circ$ (۳) $-\cos 70^\circ$ (۴) $-\sin 70^\circ$

حل سؤالات چهارگزینه‌ای

۲. گزینه‌ی ۳:

$$A = \frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ} + \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 15^\circ} + \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ}$$

$$= \tan(45^\circ - 15^\circ) + \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۱. گزینه‌ی ۲: $0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} > 0$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{4 - m^2}{2} \Rightarrow \frac{4 - m^2}{2} > 0 \Rightarrow 4 - m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 4$$

$$\Rightarrow -2 < m < 2$$

$$= \sin 15^\circ + \frac{\sin 3^\circ}{\cos 3^\circ} \cdot \cos 15^\circ$$

$$= \frac{\sin 15^\circ \cos 3^\circ + \cos 15^\circ \sin 3^\circ}{\cos 3^\circ} = \frac{\sin(3^\circ + 15^\circ)}{\cos 3^\circ} = \frac{\sin 18^\circ}{\cos 3^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{\Lambda \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdot \cos x}{2(\sin x) \cos x} = \frac{\Lambda \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos x}{2(\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4}) \cos x} \quad \text{۱۰. گزینه ی ۳}$$

$$= \frac{\Lambda \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos x}{\Lambda \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

۱۱. گزینه ی ۲؛ داریم: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ پس:

$$\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 + \cos(2x - \frac{\pi}{2})}{2} - \frac{1 + \cos(2x + \frac{\pi}{2})}{2}$$

$$= \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)}{2} - \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)}{2}$$

$$= \frac{1 + \sin 2x}{2} - \frac{1 - \sin 2x}{2} = \frac{1 + \sin 2x - 1 + \sin 2x}{2} = \frac{2 \sin 2x}{2} = \sin 2x$$

۱۲. گزینه ی ۲:

$$\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5} \cos(\pi - \frac{2\pi}{5}) = -\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$-\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \times \frac{4 \sin \frac{\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{-2(2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}) \cdot \cos \frac{2\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-2(\sin \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5})}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{-\sin \frac{4\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{-\sin(\pi - \frac{\pi}{5})}{4 \sin \frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-\sin \frac{\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = -\frac{1}{4}$$

۱۳. گزینه ی ۲: $\cot \alpha + \cot \beta = -\frac{b}{a} = 2$ و $\cot \alpha \cdot \cot \beta = \frac{c}{a} = -2$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \beta}}{1 - \frac{1}{\cot \alpha \cdot \cot \beta}} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha \cdot \cot \beta}$$

$$= \frac{2}{-2} = -1$$

۱۴. گزینه ی ۳:

$$\frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

۱۵. گزینه ی ۲: $\cos^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ = \cos^2(\frac{\pi}{2} - 20^\circ) - \cos^2 20^\circ$

$$= \sin^2 20^\circ - \cos^2 20^\circ = -(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) = -\cos 40^\circ$$

۳. گزینه ی ۱: $21^\circ + 39^\circ = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \tan(21^\circ + 39^\circ)$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\tan 21^\circ + \tan 39^\circ}{1 - \tan 21^\circ \tan 39^\circ}$$

$$\Rightarrow \tan 21^\circ + \tan 39^\circ = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 21^\circ \tan 39^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 21^\circ + \tan 39^\circ + \sqrt{3} \tan 21^\circ \tan 39^\circ = \sqrt{3}$$

۴. گزینه ی ۱: $\sin 8^\circ = \sin(9^\circ - 1^\circ) = \sin(\frac{\pi}{2} - 1^\circ) = \cos 1^\circ$

$$\frac{1}{\sin 1^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ - \sqrt{3} \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ \cos 1^\circ}$$

$$= \frac{\cos 1^\circ - \tan 60^\circ \sin 1^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \sin 1^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ \cos 1^\circ - \sin 1^\circ \sin 60^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} = \frac{\cos(60^\circ + 1^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ}$$

$$= \frac{\cos 61^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 29^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 29^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin 2^\circ \cos 60^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ (\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2^\circ}{\frac{1}{4} \sin 2^\circ} = 2$$

$$= \frac{\sin 2^\circ}{\frac{1}{4} \sin 2^\circ} = 4$$

۵. گزینه ی ۲:

$$\cos^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ = \cos^2(\frac{\pi}{2} - 20^\circ) - \cos^2 20^\circ$$

$$= \sin^2 20^\circ - \cos^2 20^\circ$$

$$= -(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) = -(\cos 40^\circ)$$

$$= -\cos(\frac{\pi}{2} - 50^\circ) = -\sin 50^\circ$$

۶. گزینه ی ۱: در مسئله ی ۹ درس همین مقاله داشتیم:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۷. گزینه ی ۳: در مسئله ی ۱۰ درس همین مقاله داشتیم:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{3}{4} (\frac{1}{2})^2$$

$$= 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

۸. گزینه ی ۳: $\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x}} = \sqrt{\tan^2 x} = |\tan x|$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \tan x < 0 \Rightarrow |\tan x| = -\tan x$$

۹. گزینه ی ۳: $\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 15^\circ = \sin 15^\circ + \tan 30^\circ \cdot \cos 15^\circ$

اشاره:

دستگاه شمار، روشی برای سر و کار داشتن با مفهوم «چندتا»ست. در دوره‌های متفاوت، فرهنگ‌های متفاوت، در این باره روش‌های گوناگونی پذیرفته‌اند که از شمارش اولیه‌ی «یک، دو، سه، خیلی» تا نمادنویسی بس پیچیده‌ی دهدهی مکانی، که امروزه به کارش می‌بریم، تنوع داشته‌اند.

دستگاه‌های شمار

اقوام «سومری»^۲ و «بابلی»^۳، که حدود ۴۰۰۰ سال پیش در سوریه، اردن و عراق کنونی ساکن بودند، در کارهای عملی روزانه‌ی خود، از دستگاهی مکان-ارزشی استفاده می‌کردند. این دستگاه را به این علت مکان-ارزشی می‌نامیم که در آن می‌توان «عدد» را با استفاده از موقعیت یک نماد بیان کرد. آن‌ها ۶۰ را به عنوان واحد مبنا به کار می‌بردند؛ یعنی آن‌چه که امروزه دستگاه در مبنای ۶۰ می‌نامیم. عددی که هنوز آثاری از آن در زندگی ما موجود است: ۶۰ ثانیه در دقیقه، و ۶۰ دقیقه در ساعت.

حتی زمانی که به اندازه‌گیری زوایا می‌پردازیم، هنوز زاویه‌ی کامل را، علی‌رغم کوشش‌های سیستم متریک که آن را ۴۰۰ گراد می‌نامد، (و بنابراین هر زاویه‌ی قائمه برابر ۱۰۰ گراد است) ۳۶۰ درجه در نظر می‌گیریم.

در حالی که نیاکان باستانی مان، در مرحله‌ی اول اعداد را برای انجام دادن کارهای عملی می‌خواستند. اسنادی در دست است که فرهنگ‌های اولیه‌ی مزبور، توسط خود ریاضیات نیز وسوسه می‌شدند، و با رخصت یافتن از کارهای عملی، به کندوکاو در آن‌ها می‌پرداختند. این کندوکاوها، به پیدایش آن‌چه می‌توان «جبر» نامید و نیز «خواص اشکال هندسی» انجامید.

دستگاه مصری، از قرن

سیزدهم قبل از میلاد، از

مبنای ۱۰ با دستگاهی از

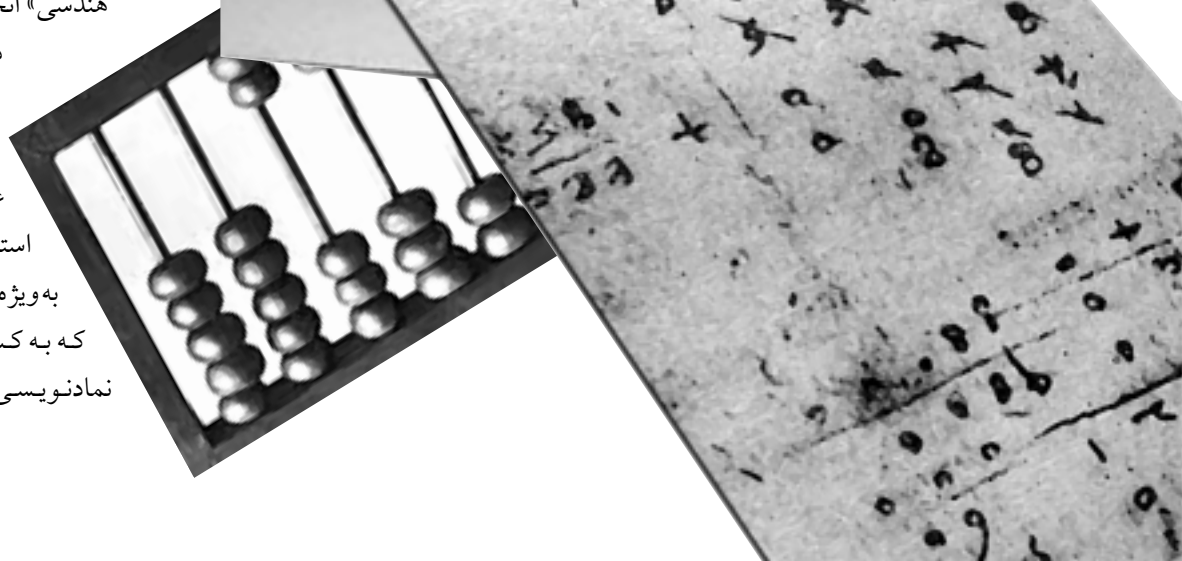
علائم «هیروگلیفی»^۴

استفاده می‌کرد. مصری‌ها

به ویژه دستگاهی را توسعه دادند

که به کسرهای می‌پرداخت. اما

نمادنویسی دهدهی مکان-ارزشی



به کار بردن اعداد رومی آسان نیست. به عنوان نمونه، مفهوم MMMCDXLVIII تنها زمانی روشن می‌شود که به طور ذهنی، پرانتزهای لازم را درباره‌ی آن به کار ببریم، در این صورت (III)(XL)(CD)(MMM) به صورت ۴+۴۰+۴۰۰+۳۰۰۰ خوانده می‌شود. اکنون سعی در جمع زیر به عمل می‌آوریم $MMMCDXLVIII + CCCXCIII$. رومی ماهر در این هنر، از راه‌های میان‌بر و کلک استفاده می‌کند، اما برای ما یافتن پاسخ صحیح، بی‌آن‌که ابتدا آن را در دستگاه دهدهی محاسبه، و سپس نتیجه را به نماد رومی تبدیل کنیم، مشکل است:

جمع	
۳۴۴۴	→ MMMCDXLVIII
+ ۳۹۴	→ CCCXCIII
= ۳۸۳۸	→ MMMDCCCXXXVIII

ضرب دو عدد در دستگاه مبنایی، بسی مشکل‌تر است، و امکان دارد، حتی برای رومی‌ها نیز غیرممکن باشد! برای ضرب ۳۴۴۴×۳۹۴ به ملحقات قرون وسطی نیاز داریم.

ضرب	
۳۴۴۴	→ MMMCDXLVIII
× ۳۹۴	→ CCCXCIII
= ۱,۳۵۶,۹۳۶	→ $\overline{MCCCLVMCMXXXVI}$

رومی‌ها، نماد خاصی برای صفر نداشتند. اگر از یک شهروند گیاه‌خوار رومی می‌پرسیدند امروز چند بطری آب مصرف کرده است، ممکن بود بنویسد III. اما در صورتی که می‌پرسیدند چند جوجه خورده است، نمی‌توانست بنویسد: ۰. آثاری از دستگاه رومی در صفحات مقدمه‌ی بعضی کتاب‌ها (گرچه نه در این یکی) موجود است، نیز بر سنگ‌های پایه‌ی



عدد را به صورت ساعت منسوب به لویی چهاردهم (XVIII)

ساختمان‌ها. پاره‌ای ساختارها، از قبیل MCM برای ۱۹۰۰، هرگز توسط رومی‌ها به کار نرفته‌اند، اما به دلیل پیروی از مد، در دوران جدید معرفی شده‌اند. رومی‌ها این عدد را به صورت

امروزه‌ی ما از بابلی‌ها به دستمان رسیده، و بعدها توسط هندوها پالوده شده است. سودمندی دستگاه مورد بحث، در این است که می‌تواند برای بیان اعداد بسیار کوچک و بسیار بزرگ به کار رود. و محاسبات مان با استفاده از ارقام هندی-عربی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، می‌تواند با «سهولت نسبی» انجام گیرد. برای ملاحظه‌ی این مطلب، به «دستگاه رومی»^۵ نگاهی می‌افکنیم. این دستگاه گرچه نیازهای آن‌ها را برآورده می‌کرد، اما تنها متخصصان دستگاه بودند که از عهده‌ی انجام محاسبه با آن بر می‌آمدند.

دستگاه رومی



نمادهای مبنایی به کار رفته در دستگاه رومی‌ها، «ده‌ها» (I, X, C و M) نیمه‌های آن‌ها (V, L و D) بودند. این نمادها برای ساختن بقیه‌ی اعداد با هم ترکیب می‌شوند. این گونه مطرح شده که کاربرد I، II، III و IIII از ظاهر انگشتانمان استخراج شده‌اند، V را از شکل دست حاصل می‌کنیم، و با واژگون کردن آن، و به هم وصل کردن آن دو به هم برای ساختن X، دو دست یا ده انگشت را به دست می‌آوریم. C از «centum» و M از «mille»، کلمات لاتینی، به ترتیب، صد و هزار، آمده است. رومی‌ها S را نیز برای «نیمه» به کار می‌بردند، و دستگاه کسرهایی بر مبنای ۱۲ داشتند.

دستگاه رومی از روش «پیش و بعد» در تهیه‌ی نمادهای مورد نیاز استفاده می‌کرد، اما به نظر می‌رسد که این کار به طور یک‌سان پذیرفته نشده بود. رومی‌های باستان، تنها مدت‌ها بعد از آن‌که نوشتن IIII با IV مطرح شد، ترجیح دادند که چنین بنویسند. به نظر می‌رسد که ترکیب IX نیز به کار رفته باشد، اما یک رومی،

دستگاه عددی رومی‌ها و ملحقات قرون وسطی امپراطوری		در صورتی که «SIX» نوشته می‌شد از آن معنی $۸\frac{1}{4}$ را در می‌یافت! در این جا اعداد مبنایی دستگاه رومی را همراه با اضافاتی از دوران وسطی آورده‌ایم:
نیمه S		
یک I		
پنج V	پنج هزار \overline{V}	
ده X	ده هزار \overline{X}	
پنجاه L	پنجاه هزار \overline{L}	
صد C	صد هزار \overline{C}	
پانصد D	پانصد هزار \overline{D}	
هزار M	یک میلیون \overline{M}	

MDCCCC می نوشتند. لویی چهاردهم، پادشاه فرانسه که امروزه به صورت لویی XIV شناخته می شود، ترجیح می داد که به صورت لویی XIII شناخته شود. او فرمان داد ساعتش، ساعت ۴ را به صورت IIII نمایش دهد.

اعداد تمام دهدهی



ما به طور طبیعی «عددها» را با اعداد دهدهی می شناسیم. دستگاه دهدهی، با استفاده از شماره های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، بر مبنای ده بنا شده است. این دستگاه عملاً مبتنی بر «دهها» و «یکها» است، اما یکها می توانند جذب «مبنای ۱۰» شوند. زیرا، زمانی که عدد ۳۹۴ را می نویسیم می توانیم مفهوم دهدهی آن را با گفتن این موضوع توضیح دهیم که این عدد، از ۳ صد، ۹ ده و ۴ واحد تشکیل شده است و می توانیم بنویسیم:

$$394 = 3 \times 100 + 9 \times 10 + 4 \times 1$$

این مطلب را می توان با استفاده از «توانها»^۶ (نیز موسوم به «نماها»^۷ یا «شاخصها»^۸ می ۱۰ نیز نوشت،

$$394 = 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

که در آن $10^0 = 1$ و $10^1 = 10$ و $10^2 = 100$ و بر حسب قرار داد: $10^0 = 1$. به این ترتیب در این توصیف مبنای «دهدهی»^۹ را برای دستگاه عددی روزمره مان، واضح تر ملاحظه می کنیم؛ دستگاهی که جمع و ضرب را به مقدار زیادی شفاف تر می کند.

ممیز یا نقطه ی دهدهی



تا این جا به نمایش دادن اعداد تمام توجه کرده ایم. ولی آیا دستگاه دهدهی می تواند از عهده ی اجزای یک عدد، مثلاً $\frac{572}{1000}$ نیز برآید؟ این عبارت، بدین معنی است که:

$$\frac{572}{1000} = \frac{5}{1000} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}$$

در این مورد می توان «معکوسها»^{۱۰} می ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ را به عنوان توان های «منفی»^{۱۱} در نظر گرفت. بنابراین:

$$\frac{572}{1000} = 5 \times 10^{-3} + 7 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-1}$$

و این عبارت را می توان به صورت ۵۷۲. نوشت که در آن، نقطه ی دهدهی آغاز توان های منفی ۱۰ را مشخص می کند. در صورتی که این عبارت را به عبارت دهدهی ۳۹۴ بیفزاییم،

بسط دهدهی عدد $\frac{572}{1000}$ را به دست می آوریم که به طور ساده ۵۷۲. ۳۹۴ است.

نماد نویسی دهدهی، در مورد اعداد بزرگ، می تواند بسیار طولانی شود، بنابراین، در این حالت به «نماد نویسی علمی»^{۱۲} برمی گردیم. به عنوان نمونه، $1.356936892 / 892$ را می توان به صورت 1.356936892×10^9 نوشت که اغلب در ماشین حساب های رایانه ای به صورت «E9»^{۱۳} قرار گرفته است. گاهی امکان دارد مایل به استفاده از اعدادی حتی بزرگ تر باشیم. به عنوان نمونه، در مورد تعداد اتم های هیدروژن در جهان شناخته شده صحبت می کنیم. این تعداد در حدود 1.7×10^{77} برآورد شده است. عدد 1.7×10^{-77} با توان منفی، عددی بسیار کوچک است، و سرو کار داشتن با آن با استفاده از نماد نویسی علمی آسان است. اندیشیدن در مورد این اعداد، با نمادهای رومی ناممکن است.

صفرها و یکها



در حالی که مبنای ۱۰ جریانی متعارف در زندگی هر روزه است، بعضی کاربردها به میناهای دیگر نیاز دارند. «دستگاه دودویی»^{۱۴} که از مبنای ۲ استفاده می کند. اساس کار رایانه های مدرن است. زیبایی دستگاه دودویی در این است که در آن هر عدد را می توان تنها با استفاده از دو نماد ۰ و ۱ بیان کرد. گرچه تعادل در این اقتصاد از این جا به وجود می آید که عبارات عددی در این دستگاه، می توانند بسیار طولانی باشند.

اما چگونه می توان ۳۹۴ را در نماد نویسی دودویی بیان کرد؟ در این مورد با توان های ۲ سرو کار داریم، و پس از مقداری کار، می توانیم عبارت کامل را به صورت زیر به دست دهیم:

$$394 = 1 \times 256 + 1 \times 128 + 0 \times 64 + 0 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$$

به این ترتیب، ۳۹۴، با در نظر گرفتن صفرها و یکها، عبارت است از ۱۱۰۰۰۱۰۱۰.

از آن جا که عبارات دودویی می تواند بسیار طولانی باشند، اغلب از، سایر میناها در محاسبه استفاده می شود. این میناها عبارت اند از «دستگاه هشت گانی»^{۱۵} (مبنای ۸) و «دستگاه

پی نوشت.....

1. Tony Crilly
2. Sumerians
3. Babylonians
4. hieroglyphic signs
5. Roman System
6. powers
7. exponentials
8. indices
9. decimal
10. reciprocals
11. negative
12. scientific notation
13. exponential
14. binary system
15. octal system
16. hexadecimal system

توان های ۲	دهدهی
۲ ^۰	۱
۲ ^۱	۲
۲ ^۲	۴
۲ ^۳	۸
۲ ^۴	۱۶
۲ ^۵	۳۲
۲ ^۶	۶۴
۲ ^۷	۱۲۸
۲ ^۸	۲۵۶
۲ ^۹	۵۱۲
۲ ^{۱۰}	۱۰۲۴

شانزده گانی^{۱۶} (مبنای ۱۶). در دستگاه هشت گانی تنها به نمادهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، A، B، C، D، E، F استفاده می کند. در این مبنا، مرسوم آن است که از

استفاده به عمل آید. در این مورد چون ۱۰ متناظر با حرف A است، عدد ۳۹۴ در دستگاه شانزده گانی به صورت ۱۸A نمایش داده می شود. به همین ترتیب، برای ذهن آسان تر است که ABC را به جای ۲۷۴۸ در دستگاه دهدهی به کار برد!

بیش تر بدانید



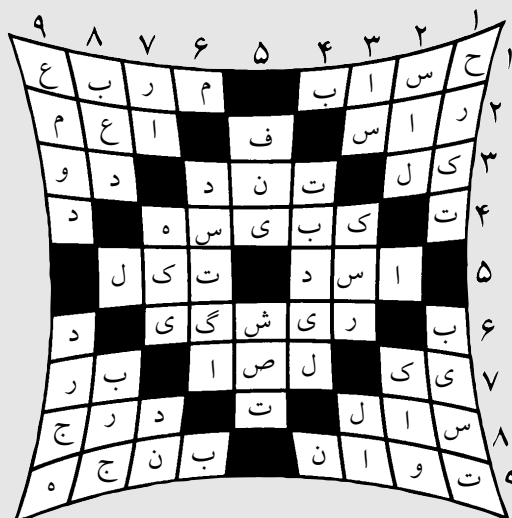
۳۰۰۰ قبل از میلاد: مردم عهد حجر در اروپا، برای ثبت اعداد روی استخوان علامت می زدند.

۲۰۰۰ قبل از میلاد: بابلی ها برای نشان دادن اعداد از نمادها استفاده می کردند.

۶۰۰ میلادی: صورت ابتدایی عددنویسی دهدهی مدرن، در هند به کار رفته است.

۱۲۰۰ میلادی: دستگاه هندی-عربی عددنویسی ۱، ۰، ۹ و صفر، گسترش یافت.

۱۶۰۰ میلادی: نمادهای دستگاه دهدهی، صورت های مدرن شناخته شده ای را اختیار کردند.



پاسخ جدول ریاضی
رشد برهان متوسطه ۶۲



مسئله چنین است: دو عدد طبیعی را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه قدر است؟

اگر قبل از مطالعه‌ی مقاله‌ی حاضر، کمی به این مسئله فکر کرده باشید، حتماً متوجه پیچیدگی بسیار آن شده‌اید. پاسخ به این مسئله، به طرح و پاسخ به ده‌ها مسئله‌ی دیگر منجر می‌شود. در این مقاله می‌خواهیم همه‌ی این پرسش‌ها را مطرح کنیم و به آن‌ها نیز پاسخ دهیم.



مسئله‌ای چالش برانگیز از احتمال!

قدم اول: آشنایی با مسئله

شمارش است. عدد ۱ نسبت به همه‌ی عددها اول است. عدد ۲ نسبت به ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ اول است و عدد ۳ نسبت به ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ اول است. به همین ترتیب، می‌توانیم تمام این گونه زوج‌ها را بشماریم و در نتیجه:

$$n(A) = 56 \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{56}{81}$$

مسئله‌ی ۲. دو عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۲۰ را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه قدر است؟

حل: شبیه مسئله‌ی ۱، $n(S) = 20^2 = 400$ ، ولی برای محاسبه‌ی $n(A)$ چه باید کرد؟ آیا می‌توان مانند همان مسئله

برای آن که با موضوع آشنا شویم، ابتدا مسئله را در حالت‌های ساده‌تر بررسی و حل می‌کنیم.

مسئله‌ی ۱. دو عدد طبیعی یک رقمی را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اول بودن این دو عدد نسبت به هم را به دست آورید.

حل: بدیهی است، چون ۹ عدد یک رقمی داریم، فضای نمونه‌ی این پیشامد شامل ۸۱ زوج مرتب از عددهای طبیعی یک رقمی است. یعنی: $n(S) = 9 \times 9 = 81$ و پیشامد مطلوب، یعنی جفت عددهایی که نسبت به هم اول اند نیز به سادگی قابل

عمل کرد؟ شاید آری، ولی مسلماً کار خیلی طولانی تری در پیش داریم. آیا با اتکا به آنالیز ترکیبی، روش کوتاه تری وجود ندارد؟

پاسخ مثبت است. در واقع بهتر است از متمم این مجموعه استفاده کنیم؛ یعنی زوج های مرتب نامطلوب را بیابیم و از تعداد کل آن ها (یعنی ۴۰۰) کم کنیم.

زوج های نامطلوب آن هایی هستند که نسبت به هم اول نیستند. یعنی هر دو بر یک عدد اول بخش پذیرند. عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ عددهای اول کمتر یا مساوی ۲۰ هستند. بنابراین، دو عددی نسبت به هم اول نیستند که یا هر دو بر ۲، یا هر دو بر ۳ و... و یا هر دو بر ۱۹ بخش پذیر باشند. اگر مجموعه زوج های مرتبی را که هر دو بر ۲ بخش پذیرند، A_1 و مجموعه زوج های مرتبی را که هر دو بر ۳ بخش پذیرند، A_2 و... و مجموعه زوج های مرتبی را که هر دو بر ۱۹ بخش پذیرند، A_{18} بنامیم، آن چه می خواهیم، $n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{18})$ است.

برای محاسبه ی این مقدار، به دو موضوع توجه می کنیم: ابتدا «اصل شمول - عدم شمول» که برای آگاهی از آن می توانید به انواع کتاب های ریاضیات گسسته رجوع کنید، دیگر آن که تعداد عددهای طبیعی کوچک تر یا مساوی عدد طبیعی a که بر k بخش پذیرند، برابر است با $\left[\frac{a}{k}\right]$ (جزء صحیح عدد $\frac{a}{k}$). بنابراین تعداد زوج های مرتب از عددهای صحیح کوچک تر یا مساوی a که هر دو بر k بخش پذیر باشند، مساوی $\left[\frac{a}{k}\right]^2$ است. با توجه به این دو موضوع خواهیم داشت:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \dots - n(A_{k-1} \cap A_k) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \dots - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k) = \left[\frac{20}{2}\right]^2 + \left[\frac{20}{3}\right]^2 + \dots + \left[\frac{20}{19}\right]^2$$

$$- \left[\frac{20}{2 \times 3}\right]^2 - \left[\frac{20}{2 \times 5}\right]^2 - \left[\frac{20}{2 \times 7}\right]^2 - \dots - \left[\frac{20}{17 \times 19}\right]^2 + \left[\frac{20}{2 \times 3 \times 5}\right]^2 + \dots$$

روشن است، بسیاری از این جملات مساوی صفر هستند و در نتیجه محاسبه ی این مجموعه بسیار آسان می شود:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{18}) = 100 + 36 + 16 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 - 9 - 4 - 1 - 1 = 145$$

و بنابراین تعداد زوج های مرتبی که نسبت به هم اول هستند، می شود:

$$400 - 145 = 255$$

و در نتیجه:

$$P(A) = \frac{255}{400} = \frac{51}{80}$$

آیا می توانید این کار را ادامه دهید؟ فکر می کنید این احتمال به چه عددی نزدیک می شود؟ به عنوان تمرین، این کار را با عددهای بزرگ تر انجام دهید و نتیجه ها را با هم مقایسه کنید.

قدم دوم: فرم بندی مسئله در حالت کلی

مسئله ی کلی را به این صورت فرم بندی و مدل سازی می کنیم:

دو عدد طبیعی a و b را به ترتیب b و به تصادف، از میان اعداد طبیعی کوچک تر یا مساوی N انتخاب می کنیم. احتمال آن که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه قدر است و آیا وقتی N به بی نهایت میل می کند $(N \rightarrow +\infty)$ ، این احتمال به حد معین میل می کند یا خیر؟

روشی که در این جا به کار می بریم، شبیه روشی است که در حالت های خاص به آن عمل کرده ایم. اگر فرض کنیم عددهای اول کوچک تر یا مساوی N ، P_1 ، P_2 و... و P_n هستند، تعداد زوج های مرتب که هر دو بر P_1 یا P_2 یا... یا P_n بخش پذیرند، به کمک اصل شمول - عدم شمول برابر است با:

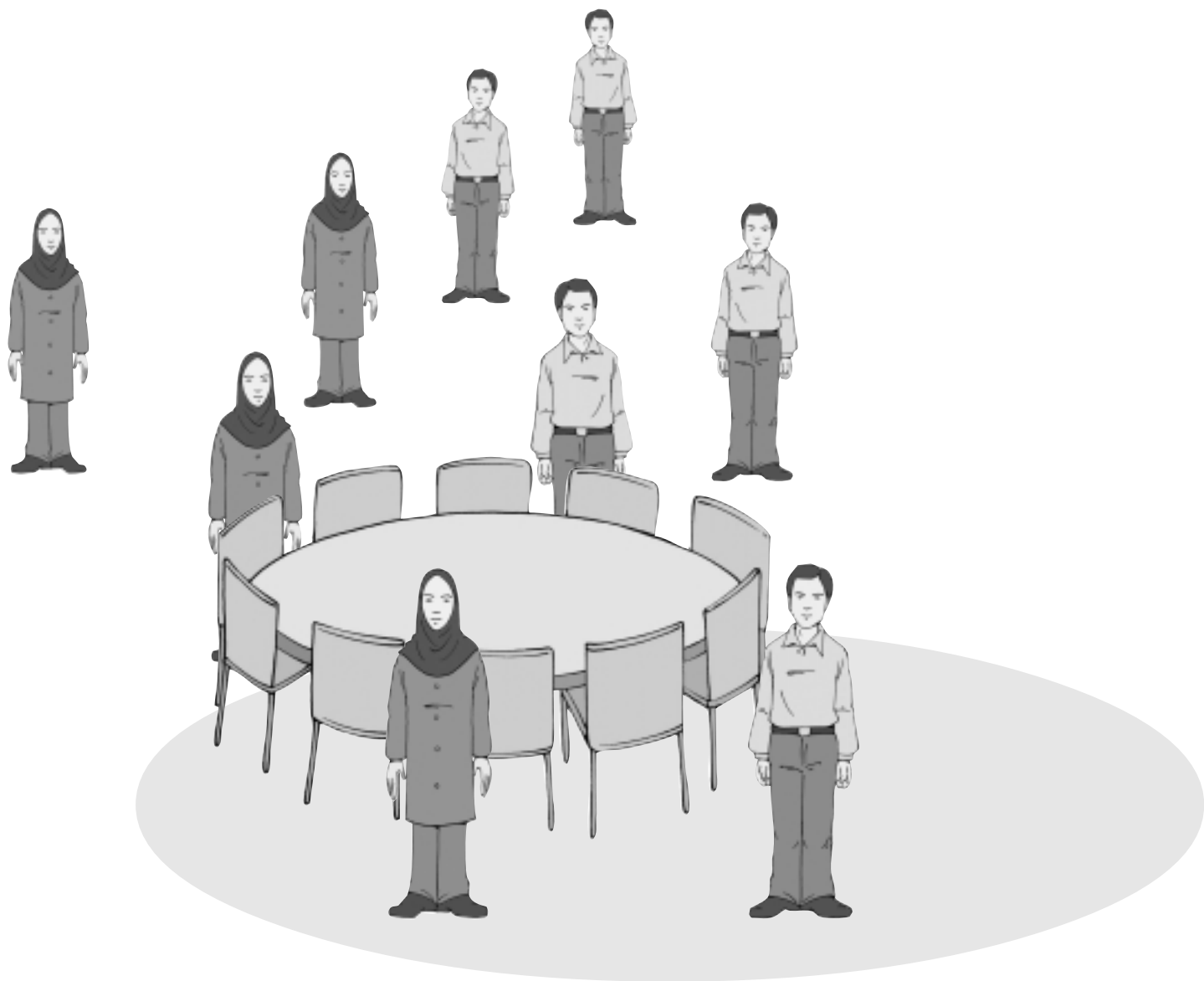
$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_n) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \dots - n(A_{n-1} \cap A_n) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \left[\frac{N}{P_1}\right]^2 + \left[\frac{N}{P_2}\right]^2 + \left[\frac{N}{P_3}\right]^2 + \dots + \left[\frac{N}{P_n}\right]^2 - \left[\frac{N}{P_1 P_2}\right]^2 - \left[\frac{N}{P_1 P_3}\right]^2 \dots - \left[\frac{N}{P_{n-1} P_n}\right]^2 + \dots + (-1)^{n-1} \left[\frac{N}{P_1 P_2 \dots P_n}\right]^2$$

و از آن جا نتیجه می شود:

$$n(A) = N^2 - \left[\frac{N}{P_1}\right]^2 - \left[\frac{N}{P_2}\right]^2 - \dots - \left[\frac{N}{P_n}\right]^2 + \left[\frac{N}{P_1 P_2}\right]^2 + \left[\frac{N}{P_1 P_3}\right]^2 + \dots + \left[\frac{N}{P_{n-1} P_n}\right]^2 - \dots + (-1)^n \left[\frac{N}{P_1 P_2 \dots P_n}\right]^2$$

حال باید حد $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(A)}{N^2}$ را وقتی $N \rightarrow \infty$ بررسی کنیم.

مشکل اصلی برای بررسی این حد، وجود عبارات های



$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{P_1^2} - \frac{1}{P_2^2} - \dots - \frac{1}{P_n^2} + \frac{1}{P_1^2 P_2^2} + \frac{1}{P_1^2 P_2^2 P_3^2} + \dots \right. \\ \left. - \frac{1}{P_1^2 P_2^2 P_3^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{P_1^2 P_2^2 \dots P_n^2} \right)$$

حال با توجه به «قضیه ی وییت» که به صورت زیر است:

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = x^n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^{n-1}$$

$$+ (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n)x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_1 a_2 \dots a_n$$

می توان با فرض $x = 1$ و $a_i = \frac{1}{P_i^2}$ ، عبارت اخیر را به

حاصل ضرب تجزیه کرد:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{P_1^2} \right) \left(1 - \frac{1}{P_2^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_n^2} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{P_1^2} \right) \left(1 - \frac{1}{P_2^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_n^2} \right) \quad (1)$$

و اکنون باید این حد را به دست آوریم. بدیهی است، تمام پراترها کوچک تر از ۱ هستند و لذا حاصل ضرب آن ها نیز

شامل جزء صحیح است. اما این مشکل با توجه به این که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

قابل حل است، زیرا: $[x] = x - \{x\}$ (که $\{x\}$ جزء اعشاری x است) و در نتیجه:

$$\frac{[x]}{x} = \frac{x - \{x\}}{x} = 1 - \frac{\{x\}}{x}$$

بدیهی است: $0 \leq \{x\} < 1$ و در نتیجه: $0 \leq \frac{\{x\}}{x} < \frac{1}{x}$ و

چون: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ، با توجه به قضیه ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

بنابراین $[x]$ و x وقتی x به $+\infty$ میل می کند، هم ارزند. پس:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left(N^2 - \frac{N^2}{P_1^2} - \frac{N^2}{P_2^2} - \dots - \frac{N^2}{P_n^2} \right. \\ \left. + \frac{N^2}{P_1^2 P_2^2} + \dots + (-1)^n \frac{N^2}{P_1^2 P_2^2 \dots P_n^2} \right) =$$



کوچک تر از ۱ است و نشان می‌دهیم که حد آن، مقداری مثبت متعلق به بازه (۰, ۱) است. با مراجعه به حساب دیفرانسیل و انتگرال و بحث سری‌های هندسی، یادآور می‌شویم که سری زیر:

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \dots, |q| < 1$$

موسوم به سری هندسی (تصادف هندسی با قدر نسبت بین ۱ و -۱)، هم‌گرا به $\frac{a}{1-q}$ است. یعنی وقتی تعداد جملات به

بی‌نهایت می‌گراید، این مجموع به $\frac{a}{1-q}$ به دل‌خواه نزدیک

می‌شود. بنابراین، با فرض $0 < x < 1$ می‌توان نوشت:

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

و با توجه به این دستور، می‌توان هر یک از پرانتزهای عبارت

(۱) را معادل‌سازی کرد:

$$1 - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots}$$

$$1 - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots}$$

$$1 - \frac{1}{5^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \dots}$$

و از آن‌جا خواهیم داشت:

$$P(A) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots)(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots)(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \dots) \dots}$$

و به کمک قانون توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع، واضح است که حاصل ضرب پرانتزهای مخارج این کسر، شامل معکوس مربع‌های تمام عددهای طبیعی است. یعنی داریم:

$$P(A) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots}$$

بنابراین مقدار احتمال فوق نسبت مستقیمی با حد سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{K^2}$$

فوق برابر با $\frac{1}{6}$ است. به سادگی می‌توان نشان داد که این سری

هم‌گراست. از حساب دیفرانسیل می‌دانیم که سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{K^2}$

به ازای $P \leq 1$ و اگر $P > 1$ هم‌گراست. علاوه بر آن، به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

و چون: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$ ، پس مجموع سمت چپ همواره

از ۲ کوچک‌تر است و در نتیجه سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{K^2}$ هم‌گراست. برای

محاسبه‌ی احتمال فوق، باید مقدار دقیق این سری را به دست آوریم.

قدم سوم (قدم نهایی): محاسبه‌ی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{K^2}$

و تعیین مقدار احتمال

برای محاسبه‌ی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{K^2}$ یادآوری و اثبات چند لم

اساسی لازم است:

لم ۱. یادآوری بسط دو جمله‌ای نیوتون. برای هر دو

جمله‌ای $a+b$ و عدد طبیعی n ، می‌توان نوشت:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

در این دستور، $\binom{n}{r}$ انتخاب r شیء از n شیء است که

گاهی با نماد $C(n,r)$ نمایش داده می‌شود. برای اثبات این دستور، روش‌های گوناگونی وجود دارند که به عنوان تمرین می‌توانید آن را به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی اثبات کنید.

به این منظور و برای گذر استقرایی، باید از دستوره‌های

$$\binom{k+1}{r} = \binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} = 1$$

(موسوم به اتحاد پاسکال) استفاده کنید.

لم ۲. قضیه‌ی دموآور:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

در این دستور، θ زاویه‌ی دل‌خواه و i عدد موهومی با رابطه‌ی

$i^2 = -1$ است. اگر با مجموعه عددهای موهومی و اعداد مختلط

آشنایی داشته باشید، درک این موضوع برایتان آسان است. ولی

اگر با این موضوع آشنایی نداشته باشید، فهمیدن این که چگونه

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta \\ \quad + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \dots \\ \cos n\theta = \binom{n}{0} \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta \\ \quad + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots \end{array} \right.$$



تمرین: به کمک دستورهای فوق ثابت کنید:

الف) $\sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x$

ب) $\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$

ج) $\cos 7x = 64 \cos^7 x - 112 \cos^5 x + 56 \cos^3 x - 7 \cos x$

لم ۴. ثابت می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n :

$$\cot g^{\frac{\pi}{2n+1}} + \cot g^{\frac{2\pi}{2n+1}} + \cot g^{\frac{3\pi}{2n+1}} + \dots$$

$$+ \cot g^{\frac{n\pi}{2n+1}} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

اثبات: ابتدا معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌های آن

$$\cot g^{\frac{\pi}{2n+1}}, \cot g^{\frac{2\pi}{2n+1}}, \dots \text{ و } \cot g^{\frac{n\pi}{2n+1}} \text{ باشند.}$$

به این منظور از دستور لم ۳ کمک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= \binom{n}{1} \sin \theta \cos^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \sin^3 \theta \cos^{n-3} \theta + \dots \\ &= \sin^n \theta \left[\binom{n}{1} \cot g^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \cot g^{n-3} \theta + \binom{n}{5} \cot g^{n-5} \theta - \dots \right] \end{aligned}$$

حال با جای‌گزینی $2n+1$ به جای n ، و دادن $\theta = \frac{\pi}{2n+1}$

بدیهی است که $\sin(2n+1)\theta = 0$ و به همین ترتیب، اگر

$$\theta = \frac{2\pi}{2n+1} \text{ و یا } \dots \text{ و یا } \theta = \frac{n\pi}{2n+1} \text{ باشد، باز هم عبارت}$$

سمت چپ تساوی بالا مساوی صفر می‌شود و $\sin \theta \neq 0$. در نتیجه باید عبارت درون کروشه‌ی بالا صفر باشد. پس معادله‌ی

$$\begin{aligned} \binom{2n+1}{1} \cot g^{2n} \theta - \binom{2n+1}{3} \cot g^{2n-2} \theta \\ + \binom{2n+1}{5} \cot g^{2n-4} \theta - \dots = 0 \end{aligned}$$

دارای ریشه‌های $\theta_1 = \frac{\pi}{2n+1}$ ، $\theta_2 = \frac{2\pi}{2n+1}$ و \dots و

$$\theta_n = \frac{n\pi}{2n+1} \text{ در نتیجه معادله‌ی:}$$

ممکن است $i^2 = -1$ شود، قدری بحث برانگیز است. ولی در اثبات این قضیه به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی، چندان مشکلی نخواهید داشت و زیاد خود را درگیر آن نکنید!

$$n = 1 : (\cos \theta + i \sin \theta)^1 = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$n = k : (\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$$

$$n = k + 1 : (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} = \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta$$

برای اثبات حکم استقرا از روی فرض، به سادگی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^k (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos k\theta + i \sin k\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= [\cos k\theta \cos \theta + i^2 \sin k\theta \sin \theta] + i[\sin k\theta \cos \theta + \sin \theta \cos k\theta] \\ &= [\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta] + i[\sin k\theta \cos \theta + \sin \theta \cos k\theta] \\ &= \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta \end{aligned}$$

(از دستورهای مثلثاتی $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha + \beta)$ و تساوی $i^2 = -1$ استفاده کردیم.)

لم ۳. نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) &= \binom{n}{1} \sin \theta \cos^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \sin^3 \theta \cos^{n-3} \theta \\ &\quad + \binom{n}{5} \sin^5 \theta \cos^{n-5} \theta - \dots \end{aligned}$$

برای اثبات از لم‌های ۱ و ۲ کمک می‌گیریم. سمت چپ تساوی لم ۲ را به کمک بسط دو جمله‌ای نیوتون بسط می‌دهیم (به تساوی $i^2 = -1$ نیز توجه می‌کنیم). نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} \cos^n \theta + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta \cdot i + \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta \cdot i^2 \\ + \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta \cdot i^3 + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta \cdot i^4 + \dots \\ = \left[\binom{n}{0} \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots \right] \\ + i \left[\binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta \right. \\ \left. + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \dots \right] \end{aligned}$$

و از مقایسه‌ی این عبارت با عبارت سمت راست لم ۲، نتیجه می‌شود:

$$\cot g^{\frac{\pi}{2n+1}} + \cot g^{\frac{2\pi}{2n+1}} + \dots + \cot g^{\frac{n\pi}{2n+1}}$$

$$< \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} + \frac{(2n+1)^2}{4\pi^2} + \dots + \frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2}$$

$$< \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2n+1})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{2\pi}{2n+1})} + \dots + \frac{1}{\sin^2(\frac{n\pi}{2n+1})}$$

حال با استفاده از لم ۴ و نتیجه‌ی آن می‌توان عبارات‌های دو طرف نابرابری‌های فوق را با معادله‌های آن‌ها جای‌گزین کرد:

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} + \frac{(2n+1)^2}{4\pi^2} + \dots + \frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2}$$

$$< \frac{2}{3}n(n+1) \Rightarrow \frac{\pi^2 \cdot n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$< \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$

حال به سادگی می‌توان حد عبارات‌های دو طرف نابرابری را محاسبه کرد و نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)} = \frac{\pi^2}{6}$$

و با توجه به قضیه‌ی فشردگی (در مبحث حد کتاب‌های حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال به تفصیل در مورد آن بحث شده است) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

یعنی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ هم‌گرا به $\frac{\pi^2}{6}$ است و به این ترتیب کار به پایان می‌رسد.

اکنون دیگر می‌توانیم احتمال فوق را به سادگی به دست آوریم. دیدیم، احتمال آن که دو عدد طبیعی که به ترتیب و به تصادف انتخاب شده‌اند، نسبت به هم اول باشند، عکس مقدار

$$P(A) = \frac{6}{\pi^2}$$

سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ است. بنابراین:

منبع: مسائل پیکارجوی ریاضی با راه‌حل‌های مقدماتی (جلد اول و دوم)، نوشته یاگوم، ترجمه‌ی غلامرضا یاسی پور.

$$\binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \binom{2n+1}{5}x^{n-2} - \dots = 0$$

دارای ریشه‌های $\cot g^{\frac{2\pi}{2n+1}}$ ، $\cot g^{\frac{\pi}{2n+1}}$ ، ... و $\cot g^{\frac{n\pi}{2n+1}}$ است.

حال به کمک قضیه‌ی وی‌یت، مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$\cot g^{\frac{\pi}{2n+1}} + \cot g^{\frac{2\pi}{2n+1}} + \dots + \cot g^{\frac{n\pi}{2n+1}}$$

$$= -\frac{b}{a} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{n(2n-1)}{3}$$



نتیجه: با توجه به این که داریم: $1 + \cot g^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}} + \dots + \frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}$$

$$= \frac{n(2n-1)}{3} + n = \frac{2}{3}n(n+1)$$

لم ۵. به ازای هر زاویه‌ی حاده‌ی α ، داریم:

$$\sin \alpha < \alpha < \text{tg} \alpha$$

اثبات این لم را می‌توانید در بخش حد از کتاب حسابان سال سوم رشته‌ی ریاضی - فیزیک و یا هر کتاب جامع حساب دیفرانسیل و انتگرال ملاحظه کنید.

نتیجه: به ازای هر زاویه‌ی حاده‌ی α داریم:

$$\cot g^2 \alpha < \frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

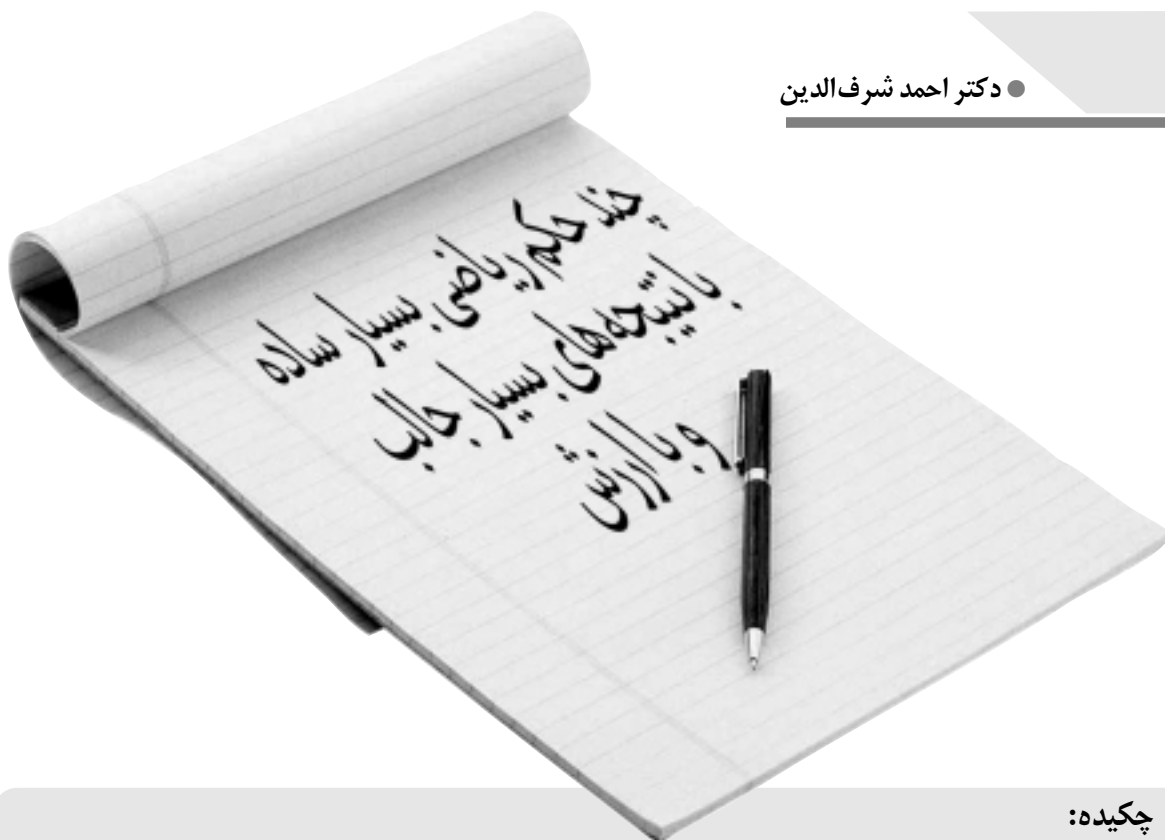
اکنون با توجه به این نتیجه و با جای‌گزینی مقادیر $\frac{\pi}{2n+1}$ ،

$$\frac{2\pi}{2n+1} \dots \text{ و } \frac{n\pi}{2n+1} \text{ در این نابرابری‌ها و جمع کردن طرفین}$$

نابرابری‌ها خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \cot g^2 \frac{\pi}{2n+1} &< \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} < \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2n+1})} \\ \cot g^2 \frac{2\pi}{2n+1} &< \frac{(2n+1)^2}{4\pi^2} < \frac{1}{\sin^2(\frac{2\pi}{2n+1})} \\ &\vdots \\ \cot g^2 \frac{n\pi}{2n+1} &< \frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2} < \frac{1}{\sin^2(\frac{n\pi}{2n+1})} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$





چکیده:

در مقاله‌ی حاضر به کمک مثال‌هایی، چند حکم ریاضی را شرح می‌دهیم که بسیار آسان‌اند، ولی نتیجه‌های مهمی از آن‌ها حاصل شده است:

۱. در چند دهه‌ی اخیر، در بعضی رسانه‌های ایران چنین اظهار شده است: تنها ساختمانی از کره‌ی زمین که از کره‌ی ماه قابل مشاهده است، دیوار چین است. این نظر نادرست است. در این باره توضیح می‌دهیم.
۲. آیا شکلی هامنی (مسطح) وجود دارد که محیط آن بی‌نهایت بزرگ باشد و مساحت آن بی‌نهایت کوچک؟ به این سؤال جواب مثبت می‌دهیم.
۳. آیا شکلی هندسی وجود دارد که حجم آن متناهی، ولی سطح آن نامتناهی باشد؟ به این سؤال نیز جواب مثبت می‌دهیم.
۴. در مثلث متساوی‌الساقین، اگر زاویه‌ی رأس، به 180° درجه بسیار نزدیک باشد، نسبت طول هر ساق به طول میانه‌ی مربوط به قاعده، بسیار بزرگ است.
۵. از یک تابع از جبر «بول» یاد می‌کنیم که بسیار ساده است، ولی در دستگاه‌های رایانه‌ای، کاربرد بسیار مهمی دارد.
۶. یک حکم بسیار ساده از هندسه یاد می‌کنیم که با به‌کارگیری آن ثابت شده است، هم‌زمان نسبی است و این نتیجه فوق‌العاده ارزشمند است.

۱. دیوار بزرگ چین

در «دایرة‌المعارف فارسی» درباره‌ی دیوار چین چنین آمده است: «دیوار بزرگ چین، دیوار دفاعی مستحکم معروفی به ارتفاع ۶ متر تا ۱۵ متر است و به ضخامت $4/5$ تا $7/5$ متر که به طول در حدود ۲۰۰۰ کیلومتر، بین مغولستان و چین به معنی اخص ممتد است و در فواصل معین برج‌ها دارد. در [نیمه‌ی دوم] قرن سوم پیش از میلاد، در عهد امپراطوری شی هوانگ‌تی از سلسله‌ی چین، توسط $300,000$ تن (اغلب از مجرمان) ساخته شد و در سال ۲۰۴ پیش از میلاد به اتمام

رسید. طول آن با تمام انشعابات و پیچ‌وخم‌ها، $3,200$ کیلومتر است...»

در دایرة‌المعارف بین‌المللی وبستر (WEBSTER)، چاپ پنجم سال ۱۹۹۹، میانگین ارتفاع دیوار $7/6$ متر و پهنای آن حدود $3/6$ متر یاد شده است.

هرم بزرگ مصر

هرم بزرگ مصر قاعده‌ای مربع‌شکل دارد که طول ضلع آن ۲۲۷ متر است. ارتفاع هرم ۱۳۸ متر و طول

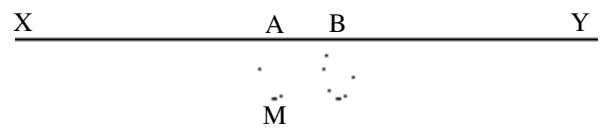
هر یالش ۲۱۷ متر است.

ساختمانی مرتفع در نیویورک

در سال‌های ۳۱-۱۹۳۰ در نیویورک، ساختمانی بزرگ به نام امپایر استیت (EMPIRE STATE) و به ارتفاع ۳۸۱ متر ساخته شد که هنوز پابرجاست.

مشاهده‌ی طناب از فاصله‌ی دور

طناب XY را که کاملاً کشیده شده است، از فاصله‌ی دور نگاه می‌کنیم (شکل ۱). قطعه‌ی AB از این طناب را که طول آن برابر قطر مقطع است، در نظر می‌گیریم.



شکل ۱

$\overline{AM} = \overline{AB}$. این طناب را به تدریج به فاصله‌ی دور می‌بریم. تا موقعی که قطعه‌ی AB از طناب دیده می‌شود، کل طناب هم دیده می‌شود. در فاصله‌ای که قطعه‌ی AB دیگر دیده نشود، طناب هم دیده نمی‌شود. یعنی امکان دیده شدن طناب، به طول آن بستگی ندارد، بلکه به قطعه‌ای از طناب بستگی دارد که طول آن برابر ارتفاع مقطع باشد.

اکنون با بهره‌گیری از آن‌چه گفتیم، توضیح می‌دهیم نظر کسانی که می‌گویند «تنها ساختمانی از زمین که از کره‌ی ماه قابل رؤیت است، دیوار چین است»، کاملاً نادرست است.

قطعه‌ای از دیوار چین را در نظر می‌گیریم که بزرگ‌ترین ارتفاع آن ۱۵ متر و طول آن نیز همین اندازه باشد. (در دایرة‌المعارف فارسی بزرگ‌ترین ارتفاع دیوار چین ۱۵ متر نوشته شده است). ابعاد چنین قطعه‌ای از دیوار چین، از ابعاد هرم بزرگ مصر کوچک‌تر است بنابراین اگر این قطعه از دیوار چین از ماه دیده شود، به طریق اولی، هرم بزرگ مصر هم از کره ماه دیده خواهد شد. یعنی این نظر نادرست است که دیوار چین تنها ساختمانی از زمین است که از کره ماه دیده می‌شود.

تبصره:

می‌توان استدلال‌های دقیق دیگری برای رد نظر دیده شدن دیوار چین از کره‌ی ماه ارائه کرد. یا حتی می‌توان به عکس‌هایی که در کره‌ی ماه از زمین گرفته شده‌اند، استناد کرد. ولی به نظر نگارنده‌ی این مقاله، استدلال فوق مبتنی بر ساده‌ترین اطلاعات هندسی است.

۲. آیا یک شکل هامنی (مسطح) وجود دارد که محیطش بی‌نهایت بزرگ باشد و مساحتش مقداری محدود؟

آری. به دو مثال زیر توجه فرمایید:

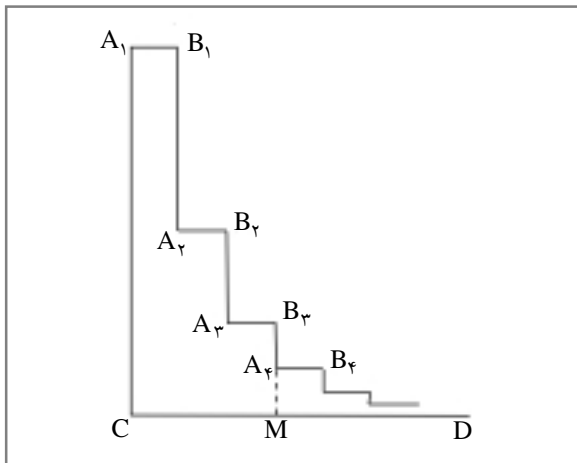
الف) مستطیلی را در نظر می‌گیریم با طول و عرض a و b . اندازه‌ی محیط این مستطیل برابر $2(a+b)$ است و اندازه‌ی سطح آن ab . اگر b را مساوی $\frac{1}{a}$ اختیار کنیم، مساحت مستطیل مورد نظر برابر ۱ می‌شود (عدد ۱، واحد طول است و نیز واحد اندازه‌ی سطح). اگر a را به سوی صفر میل دهیم، مقدار $\frac{1}{a}$ به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. در این صورت محیط مستطیل مورد نظر به سوی بی‌نهایت میل می‌کند و مساحت آن همواره مساوی با ۱ خواهد بود.

می‌توان طول و عرض مستطیل را طوری در نظر گرفت که محیط مستطیل به سوی بی‌نهایت میل کند و مساحت آن به سوی صفر. در مستطیلی به طول و عرض a و l ، چنین اختیار می‌کنیم:

$$b = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

اگر مقدار a به سوی صفر میل کند، محیط آن به سوی بی‌نهایت و مساحت آن به سوی صفر میل می‌کند.

ب) شکل هامنی $A_1B_1A_2B_2A_3B_3MCA_1$ را در نظر می‌گیریم. در این شکل پلکانی، خط B_3M موازی A_1C است.



شکل ۲

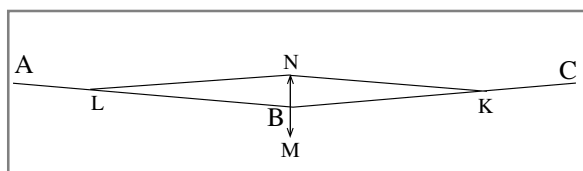
فرض می‌کنیم:

$$(1) \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3} = \dots = \overline{A_mB_m} = \dots$$

$$(2) \begin{cases} \overline{A_1C} = a, \quad \overline{B_1A_2} = \frac{1}{2}a, \quad \overline{A_2B_3} = \frac{1}{4}a, \\ \overline{B_3A_4} = \frac{1}{8}a, \quad \dots \end{cases}$$

۴. در مثلث متساوی الساقین، اگر زاویه ی رأس به ۱۸۰ درجه بسیار نزدیک باشد، نسبت طول هر ساق به طول میانه ی مربوط به قاعده ها بسیار بزرگ است.

این حکم هندسی فوق العاده ساده است، به طوری که در کتاب های هندسه آن را یاد نمی کنند. این حکم هندسی با وجود سادگی، کاربردهای بسیار مهم دارد. به مثال زیر توجه کنید: در سیستم حمل و نقل به وسیله ی تله کابین، کابل تله کابین نباید خیلی کشیده باشد. اگر کابل خیلی کشیده باشد، هنگامی که تله کابین به وسط دو پایه می رسد، کابل گسیخته می شود. کابلی را در نظر می گیریم که دو انتهای آن در دو نقطه ی A و C ثابت شده اند (شکل ۳).



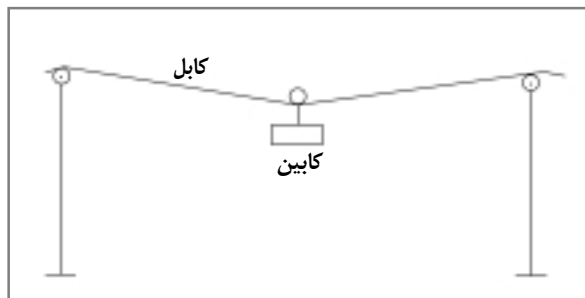
شکل ۳

وزنه ای در نقطه ی B که وسط کابل است، به آن آویزان می کنیم. این وزنه، کابل را به صورت خط شکسته ABC در می آورد. اگر کابل از ابتدا خیلی کشیده باشد، زاویه ی ABC خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک می شود.

نیروی را که وزنه، در نقطه ی B به کابل وارد می کند، با بردار \vec{BM} نشان می دهیم. بردار \vec{BN} را مساوی \vec{BM} - در نظر می گیریم و متوازی الاضلاع BLNK را می سازیم. نیروی BN به دو نیروی BA و BC تجزیه می شود:

$$\vec{BN} = \vec{BA} + \vec{BC}$$

چون زاویه ی $\angle ABC$ خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است، اندازه ی هر یک از دو نیروی BA و BC خیلی بیشتر از اندازه ی نیروی BN است. همین موضوع سبب گسیخته شدن کابل می شود. در شکل ۴ شمای یک تله کابین رسم شده است. اگر امتداد



شکل ۴ شمای یک تله کابین

یعنی ارتفاع هر پله نصف ارتفاع پله ی پیشین است. به عبارت دیگر، ارتفاع های پله ها یک تصاعد هندسی تشکیل می دهند که جمله ی اول آن طول $\overline{A_1C}$ و قدر مطلق آن $\frac{1}{2}$ است. مساحت شکل $A_1B_1A_2B_2A_3B_3MCA_1$ چنین است:

$$S = a(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$$

مساحت این شکل پلکانی وقتی تعداد پله ها به سوی بی نهایت میل کند، چنین است:

$$a \times \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n})$$

حد عبارت داخل کمانک ها، وقتی n به سوی بی نهایت میل کند برابر $2a$ است. پس مساحت شکل پلکانی مورد نظر، وقتی تعداد پله ها به سوی بی نهایت میل کند، برابر $2a$ می شود. پس اندازه ی محیط شکل پلکانی مورد نظر وقتی تعداد پله ها به سوی بی نهایت میل کند، به بی نهایت میل می کند و مساحت آن به سوی عدد ۲، یعنی محیط شکل، بی نهایت بزرگ است و مساحت آن محدود.

۳. آیا شکل هندسی وجود دارد که حجم آن متناهی ولی سطح کل آن نامتناهی باشد؟

آری. به دو مثال زیر توجه کنید:

الف) مکعب مستطیلی با ابعاد a، $\frac{1}{a}$ و ۱ در نظر می گیریم. حجم این مکعب مستطیل برابر ۱ است. وجهی از این مکعب مستطیل با ابعاد ۱ و $\frac{1}{a}$ را در نظر می گیریم. مساحت این وجه، برابر $\frac{1}{a}$ است. اگر a به سوی صفر میل کند، آن گاه مساحت وجه یاد شده به سوی بی نهایت میل می کند. پس اگر مقدار a به سوی صفر میل کند، حجم مکعب مستطیل مقدار متناهی باقی می ماند، ولی سطح کل آن به سوی بی نهایت میل می کند.

ب) منشوری قائم در نظر می گیریم که قاعده ی آن شکل پلکانی یاد شده در مسئله ی پیشین باشد و طول ارتفاع آن برابر یک. حد حجم این منشور هنگامی که تعداد پله ها به سوی بی نهایت میل کند، برابر ۲ است، ولی سطح کل این منشور به سوی بی نهایت میل می کند.

کابل در دو طرف غلتک نزدیک به 180° درجه باشد، کشش کابل در دو طرف غلتک کابین مقدار بزرگی خواهد شد و به بریده شدن کابل می‌انجامد.

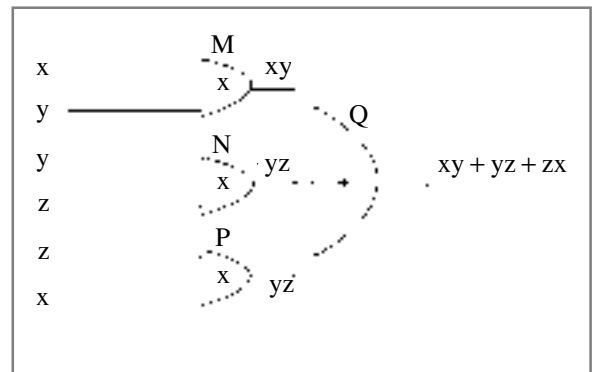
۵. تابع اکثریت و مدار آن

در جبر بول، تابع سه متغیری $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ را تابع اکثریت می‌نامند. دلیل این نام‌گذاری آن است که اگر اکثریت متغیرها، یعنی دو متغیر یا سه متغیر از این تابع، مقداری بگیرند، تابع همان مقدار را می‌گیرد. بیان ریاضی این خاصیت چنین است:

$$f(x, a, a) = f(a, y, a) = f(a, a, z) = f(a, a, a) = a$$

تابع اکثریت با وجود آن که بسیار ساده و آسان است، در دستگاه‌های رایانه‌ای نقش مهمی ایفا می‌کند.

مدار الکتریکی مربوط به تابع اکثریت، «مدار اکثریت» نامیده می‌شود. شکل ۵ مدار اکثریت را نشان می‌دهد. در این شکل، دریچه‌های M ، N و P ، دریچه‌های «و» هستند که به طور موازی قرار گرفته‌اند. خروجی‌های این سه دریچه، به دریچه‌ی Q که دریچه‌ی «یا» محسوب می‌شود، متصل‌اند. مدار حاصل از دریچه‌های «و» و دریچه‌ی «یا» را مدار اکثریت می‌نامند.



شکل ۵ مدار اکثریت

فرض کنیم بخواهیم مسئله‌ای را با رایانه حل کنیم و از درستی جواب کاملاً مطمئن باشیم. به این منظور سه رایانه و یک مدار اکثریت را به کار می‌گیریم. برنامه را به طور هم‌زمان به سه رایانه‌ی A ، B و C می‌دهیم. (این سه رایانه ممکن است حتی در سه شهر بسیار دور از یکدیگر باشند. در این محور با استفاده از آنتن‌ها، ولتاژهای لازم را انتقال می‌دهیم.

ولتاژهای خروجی سه رایانه‌ی یاد شده را به ترتیب x ، y و z می‌نامیم (این ولتاژها جواب مسئله‌ی مورد نظرند). اگر هر سه رایانه مسئله را درست حل کنند، آن‌گاه

چنین داریم: $x=y=z$.

خروجی دو رایانه‌ی A و B که x و y یابند، به دریچه‌ی M وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی M حاصل ضرب xy را به دست می‌دهد.

خروجی دو رایانه‌ی B و C که y و z یابند، به دریچه‌ی N وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی N ، حاصل ضرب yz را به دست می‌دهد.

خروجی دو رایانه‌ی A و C که x و z یابند، به دریچه‌ی P وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی P ، حاصل ضرب zx را به دست می‌دهد.

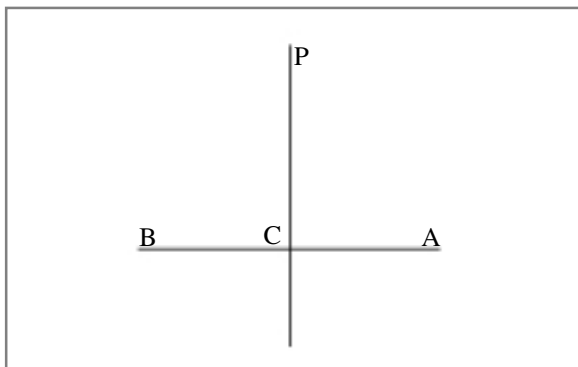
ولتاژهای xy ، yz و zx به دریچه‌ی Q وارد می‌شوند و خروجی Q ، ولتاژ $xy + yz + zx$ را به دست می‌دهد. ولتاژ اخیر، جواب اکثریت سه رایانه است. پس اگر فقط یک رایانه از این سه رایانه، جواب درست به دست ندهد، جوابی که در خروجی مدار اکثریت به دست می‌آید، جواب درست است. به کارگیری دستگاه اکثریت، اطمینان بیشتری از درستی جواب داریم.

۶. نسبی بودن هم‌زمانی

دو نقطه‌ی A و B و صفحه‌ی عمود منصف پاره خط AB را در نظر می‌گیریم. این صفحه را با P نشان می‌دهیم.

قضیه: هر نقطه‌ی واقع بر صفحه‌ی عمود منصف پاره خط AB ، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و برعکس، هر نقطه که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

بخشی از فضا را که در یک طرف صفحه‌ی P واقع است و شامل نقطه‌ی A می‌شود، بخش ۱ و بخشی از فضا را که در یک طرف صفحه‌ی P واقع است و شامل نقطه‌ی B می‌شود، بخش ۲ می‌نامیم.



شکل ۶

برای هر نقطه‌ی M ، از بخش ۱ داریم: $\overline{MA} < \overline{MB}$ و برای هر نقطه‌ی N از بخش ۲ داریم: $\overline{NA} < \overline{NB}$.

برای آن‌که واقعه‌ای دیده شود، لازم است که از آن نقطه، نور به چشم برسد. چنین به نظر می‌آید که اگر برای ناظری، دو امر هم‌زمان باشند، این دو امر برای همه‌ی ناظرانی که آن‌ها را ملاحظه می‌کنند، هم‌زمان هستند. در سطرهای آینده نشان می‌دهیم که این تصور صحیح نیست و نتیجه می‌گیریم که هم‌زمانی نسبی است.

هم‌چنین به نظر می‌آید که اگر ناظری امر A را مقدم بر امر B مشاهده کند، همه‌ی ناظرانی که این دو امر ملاحظه می‌کنند، امر A را مقدم بر امر B مشاهده می‌کنند. در ادامه نشان می‌دهیم که این تصور هم صحیح نیست و نتیجه می‌گیریم که تقدم و تأخر نسبی است.

در دو نقطه‌ی A و B ، دو منبع نور الکتریکی در نظر می‌گیریم. کلید مدار الکتریکی را در نقطه‌ی C قرار می‌دهیم. با این کلید می‌توان دو لامپ الکتریکی A و B را روشن و خاموش کرد. اگر کلید را وصل کنیم، برای ناظری که روی صفحه‌ی P است، دو چراغ در یک لحظه روشن می‌شوند؛ زیرا مدت رسیدن الکتروسیگنال از A به B برابر است. اگر D نقطه‌ای از صفحه‌ی P باشد، مدتی که نور دو مسافت AD و BD را می‌پیماید، برابر است. اگر کلید را قطع کنیم، برای

ناظری که روی عمود منصف است، دو چراغ A و B در یک لحظه خاموش می‌شوند.

در همین آزمایش، اگر ناظری در نقطه‌ی M از بخش (۱) قرار داشته باشد، روشن شدن چراغ A را مقدم بر روشن شدن چراغ B می‌بیند. زیرا نور، مسافت AM را در مدتی کوتاه‌تر از مسافت BM می‌پیماید. اگر ناظری در نقطه‌ی N از بخش (۲) قرار داشته باشد، روشن شدن چراغ B را مقدم بر روشن شدن چراغ A می‌بیند؛ زیرا: $\overline{NB} < \overline{NA}$.

نتیجه‌گیری نسبت هم‌زمانی و نسبت تقدم و تأخر، از خاصیت‌های بسیار ساده‌ی عمود منصف و از شاهکارهای بسیار مهم تفکر علمی است.

سرعت نور $300,000,000$ کیلومتر بر ثانیه است. لذا آنچه یاد شد در ابعاد کیهانی به کار می‌آید، نه در ابعاد کوچک. برای توضیح، دو نقطه‌ی A و B را به فاصله‌ی 100 کیلومتر از هم در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی وسط پاره خط AB را M می‌نامیم. فرض کنیم دو پدیده‌ی A و B طوری باشند که برای ناظری که در نقطه‌ی M است، به‌طور هم‌زمان دیده شوند. اگر نقطه‌ی P از نقطه‌ی A و B به ترتیب به فاصله‌ی 130 و 140 کیلومتر باشد، آن‌گاه ناظری که در نقطه‌ی P قرار دارد، دو پدیده‌ی A و B را هم‌زمان می‌بیند؛ به دلیل اختلاف زمانی فوق‌العاده اندک دو پدیده‌ی A و B برای ناظر.

با قرار دادن علایم و عملیات مناسب ریاضی بین عددها، کاری کنید که تساوی‌های زیر برقرار باشند.

۱	۱	۱=۶
۲	۲	۲=۶
۳	۳	۳=۶
۴	۴	۴=۶
۵	۵	۵=۶
۶	۶	۶=۶
۷	۷	۷=۶
۸	۸	۸=۶
۹	۹	۹=۶

برای نمونه: $\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 6$

● هادی رنجبران

تفریح اندیشه



اشاره:

در این یادداشت قصد نداریم آن‌چه را که به عنوان مقدمه در کتاب درسی آمار و مدل‌سازی آمده است، تکرار کنیم و از توضیحات اولیه و تعریف مقدماتی می‌گذریم. تنها و به عنوان تأکید، به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف: بیان مسئله به زبان ریاضی را «مدل‌سازی ریاضی» می‌گوییم. هرچه مفاهیم ریاضی به کار برده شده ساده‌تر و نتیجه‌ی کار به پدیده‌ی مورد نظر نزدیک‌تر باشد، مدل‌سازی با ارزش‌تر است.

تناسب مدل با مسئله اهمیت بسزایی دارد. گاهی قرار است درباره‌ی وزن هم کلاسی هایتان مدل‌سازی کنید. در آن صورت، چشم‌پوشی از چند گرم کمتر و بیشتر شایسته است. اما اگر بخواهید در آزمایشگاه شیمی چند ماده را با هم ترکیب کنید چه‌طور؟ این جاست که واحدهای اندازه‌گیری و میزان خطا اهمیت خواهند یافت. در تعریف کتاب درسی، برای خطای اندازه‌گیری می‌خوانیم:

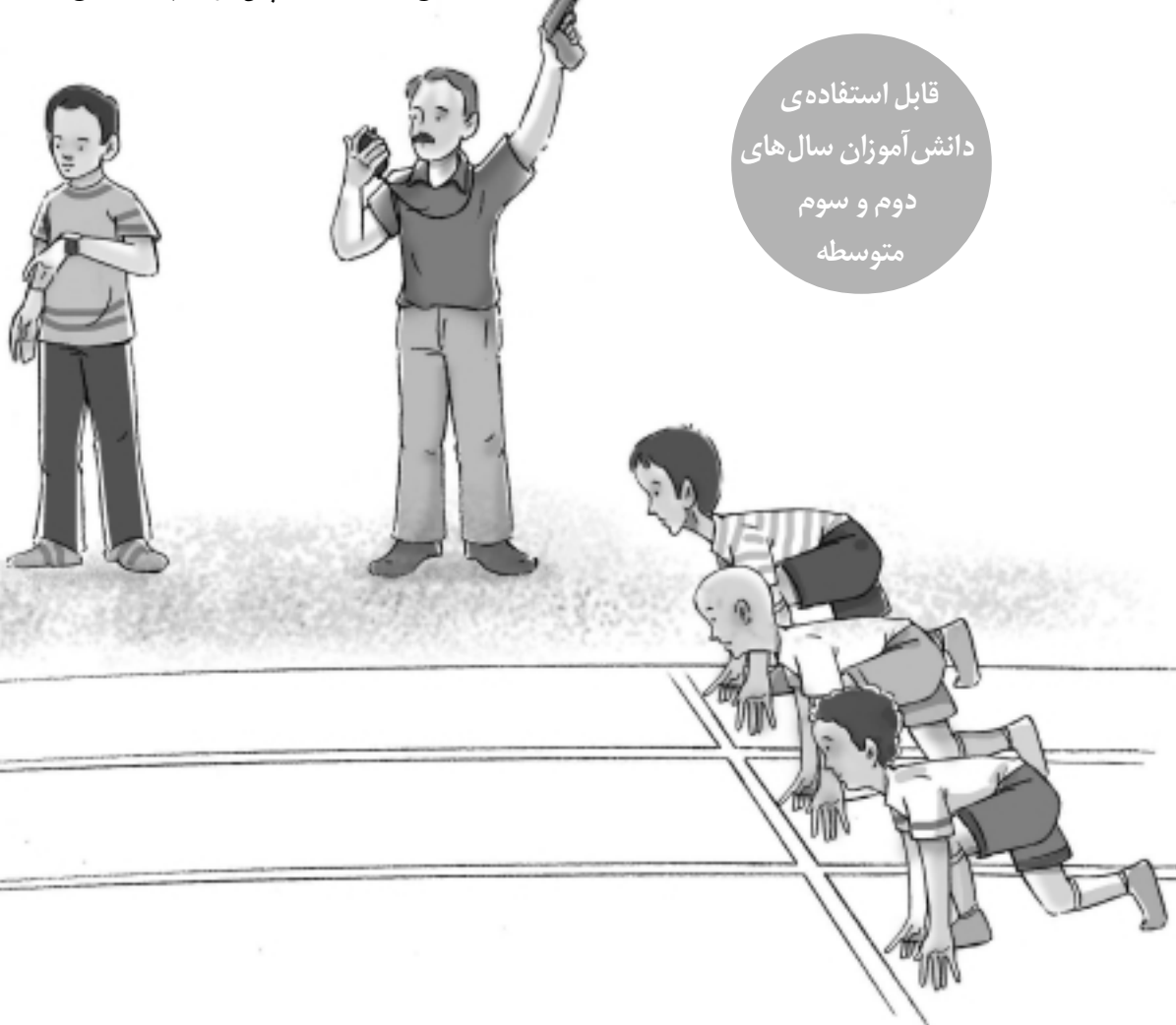
این «خطا لزوماً از واحد اندازه‌گیری کمتر است».

در این مقاله می‌کوشیم، با ذکر چند مثال به اهمیت انتخاب واحد مناسب برای خطای اندازه‌گیری بپردازیم.

مثال ۱. فرض کنید مدت زمانی که یک دونه، فاصله‌ی ۱۰۰ متر را دویده است، برابر ۹ ثانیه اندازه‌گیری شده باشد. می‌دانیم، مدت زمان مذکور ممکن است دقیقاً ۹ ثانیه نباشد، به خصوص اگر وسیله‌ی اندازه‌گیری دقت کافی نداشته باشد. پس مرتکب خطایی شده‌ایم که

مدل‌سازی و خطای اندازه‌گیری

قابل استفاده‌ی
دانش‌آموزان سال‌های
دوم و سوم
متوسطه



اندازه‌ی آن از یک ثانیه کمتر است؛ ولی واقعاً چه قدر کمتر؟ نمی‌دانیم!

$$T = 9 + E$$

مدل روبه‌رو پیشنهاد می‌شود: $T = 9 + E$ توجه کنید، مدت زمانی را که دهنده بر حسب ثانیه دویده است با T نمایش داده‌ایم. قدر مطلق E خطای اندازه‌گیری از یک ثانیه کمتر است. E ممکن است مثبت یا منفی باشد.

مثال ۲. قد فردی حدود ۱۷۲ سانتی‌متر گزارش شده است. چه مدلی می‌توان برای اندازه‌گیری آن به کار گرفت؟ فرض کنیم P قد این فرد باشد، در این صورت:

$$P = 172 + E$$

پس در این جا واحد اندازه‌گیری را سانتی‌متر در نظر گرفته‌ایم و قدر مطلق E از یک سانتی‌متر کمتر است.

تغییر واحد اندازه‌گیری و تغییر مدل

گاهی ممکن است در اثنای تهیه‌ی گزارش بخواهیم واحد اندازه‌گیری را دقیق‌تر کنیم. می‌خواهیم ببینیم در این فرایند، مدل دستخوش چه تغییری می‌شود. اگر در مدل اولیه خطا را با E نشان داده باشیم، آیا در مدل جدید که با تغییر واحد اندازه‌گیری همراه است، E تغییر می‌کند؟

مثال ۳. طولی را بر حسب سانتی‌متر اندازه‌گیری کرده‌ایم و مدل آن را به صورت $L = 3 + E$ نوشته‌ایم که در آن، قدر مطلق E از یک سانتی‌متر

کمتر است. اگر طول را بر حسب میلی‌متر بخواهیم گزارش کنیم، آیا مدل $L = 30 + E$ برای آن مناسب است؟ مسلماً خیر، چرا که در این جا E خطای اندازه‌گیری، از واحد اندازه‌گیری (میلی‌متر) کمتر نیست! یک مدل مناسب آن است که بنویسیم: $L = 30 + \frac{E}{100}$ که چون قدر مطلق E از یک سانتی‌متر کمتر فرض شده است، قدر مطلق $\frac{E}{100}$ به طور قطع از یک میلی‌متر کمتر است! می‌توان $\frac{E}{100}$ را برابر E_1 فرض کرد و نوشت $L = 30 + E_1$

محاسبه‌ی روی مدل

و چگونگی خطا در پدیده‌ی نهایی

با مثالی، این عنوان را توضیح می‌دهیم. فرض کنیم

بخواهیم مدلی مناسب برای سطح یک دایره بنویسیم. در محاسبه‌ی سطح دایره، از شعاع دایره استفاده می‌شود. خطای مربوط به سطح، از خطای مربوط به محاسبه‌ی شعاع ناشی می‌شود. مدل اولیه برای شعاع دایره تنظیم می‌شود، اما در نهایت به مدلی برای سطح دایره می‌رسیم. مسلماً در این میان، محاسبات روی اندازه‌های گرفته شده از قبیل جمع، ضرب و توان، روی خطای اندازه‌گیری نیز صورت می‌گیرد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴. فرض کنید شعاع دایره‌ای به صورت $R = 3 + E$ مدل سازی شده است. می‌خواهیم مدلی برای مساحت این دایره بنویسیم. اگر S مساحت دایره باشد، داریم:

$$S = \pi R^2 \Rightarrow S = \pi(3 + E)^2 \Rightarrow S = \pi(9 + E^2 + 6E)$$

چون قدر مطلق E از واحد اندازه‌گیری کمتر است، هرچه به توان بزرگ‌تری برسد، میزان آن کمتر خواهد شد؛ به طوری که می‌توان از آن صرف نظر کرد. پس داریم: $S \approx 9\pi + 6\pi E$ اگر $6\pi E$ را برابر E_1 فرض کنیم، مدل مساحت دایره عبارت خواهد بود از: $S = 9\pi + E_1$

صبر کنید! کار تمام نشده است! مطمئنید در انتخاب E و

E_1 خطایی مرتکب نشده‌ایم؟ سعی می‌کنیم این قسمت را کمی بیشتر تجزیه و تحلیل کنیم. حوصله‌اش را دارید؟!

فرض کردیم $R = 3 + E$ که در آن قدر مطلق E از سانتی‌متر کمتر است. برای سادگی فرض کنید $\pi = 3$ و $E = \frac{1}{3}$ cm باشد. آن‌گاه:

$s \approx 27 + E_1$ و $E_1 = 6$ ، یعنی: $E_1 = 6\pi E = 6 \times 3 \times \frac{1}{3}$ متوجه اشتباه شدید؟ E_1 از واحد اندازه‌گیری بزرگ‌تر شده است! چه باید کرد؟

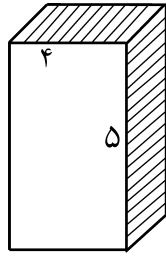
پیشنهاد می‌کنم برای جلوگیری از این اتفاق، دقت اندازه‌گیری طول شعاع را بیشتر کنیم و با اندازه‌گیری دقیق‌تر، E را چنان کوچک کنیم که با انجام عملیات و محاسبات ریاضی بعدی، خطای E_1 هم‌چنان از واحد اندازه‌گیری سطح کوچک‌تر بماند!

آیا انتخاب مدل $R = 3 + \frac{E}{100}$ برای شعاع مناسب‌تر نیست؟ متأسفانه در مثال‌های کتاب درسی، به این موضوع توجه کافی صورت نگرفته است و مؤلفان محترم کتاب درسی، تنها به اشاره‌ای کلی و مختصر بسنده کرده‌اند. برای نمونه، به مثالی

انتشار خطا در محاسبات مربوط به سطح، حجم و... پدید می‌آید و توصیه می‌شود، از همان ابتدا با بالا بردن دقت، انتشار خطا را تا حد امکان کاهش دهیم

در صفحه‌ی ۱۲ کتابی درسی آمار و مدل سازی (چاپ هفتم، ۱۳۸۵)، اشاره می‌کنیم.

امکان کاهش دهیم. به مثال دیگری از انتشار خطا در محاسبه‌ی حجم توجه کنید:



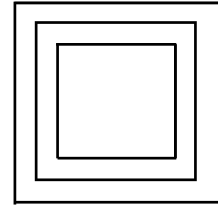
$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} &= 5 + E_1 + L_1 \\ \text{طول} &= 4 + E_2 = L_2 \\ \text{عرض} &= 2 + E_3 = L_3 \end{aligned}$$

مثال ۵. ضلع مربعی به صورت $V + E$ مدل سازی شده است. مساحت مربع است:

$$S = (V + E)^2 = 49 + 14E + E^2$$

$$S \approx 49 + 14E = 49 + E_1$$

با صرف نظر از جمله‌ی E^2 داریم:



اگر حجم مکعب برابر V باشد، در این صورت مدل حجم به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} V &= L_1 L_2 L_3 = (5 + E_1)(4 + E_2)(2 + E_3) \\ V &= 40 + 8E_1 + 10E_2 + 20E_3 \end{aligned}$$

کتاب درسی اشاره نکرده است که امکان دارد E_1 از واحد سطح بزرگ‌تر شود. چون خطای سطح، 14 برابر $(E_1 = 14E)$ از خطای ضلع بزرگ‌تر است!

در این مدل، E_1 ها از واحد کوچک‌ترند. پس حاصل ضرب آن‌ها خیلی کوچک خواهد بود و قابل چشم‌پوشی است. این‌جا نیز پدیده‌ی انتشار خطا اجتناب‌ناپذیر است! حتی اگر E_1 و E_2 و E_3 برابر $\frac{1}{10}$ سانتی‌متر باشند (طول‌ها بر حسب سانتی‌متر باشند)، $8E_1 + 10E_2 + 20E_3$ برابر $38 \times \frac{1}{10}$ ، یعنی $\frac{38}{10}$ سانتی‌متر خواهد شد.

این پدیده را «انتشار خطا» می‌گوییم. انتشار خطا در محاسبات مربوط به سطح، حجم و... پدید می‌آید و توصیه می‌شود، از همان ابتدا با بالا بردن دقت، انتشار خطا را تا حد

۱. به این دو کسر نگاه کنید:

$$\frac{16}{64} \text{ و } \frac{26}{65}$$

اگر ۶ها را از صورت و مخرج کسرها حذف کنیم (که عملی است غیرمجاز)، دو کسر به این ترتیب به دست می‌آیند:

$$\frac{1}{4} \text{ و } \frac{2}{5}$$

به ظاهر، این دو کسر نباید با دو کسر بالا مساوی باشند، ولی اگر آن دو کسر را ساده کنید، خواهید دید:

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5} \text{ و } \frac{16}{64} = \frac{1}{4} \quad (!!)$$

۲. به این کسر نگاه کنید:

$$\frac{(1+x)^2}{1-x^2}$$

اگر قوای ۲ را از صورت و مخرج حذف کنیم (عمل غیرمجاز)، کسر به $\frac{1+x}{1-x}$ تبدیل می‌شود که برابر کسر اول است. آیا شما هم می‌توانید چنین کسرهایی بنویسید؟

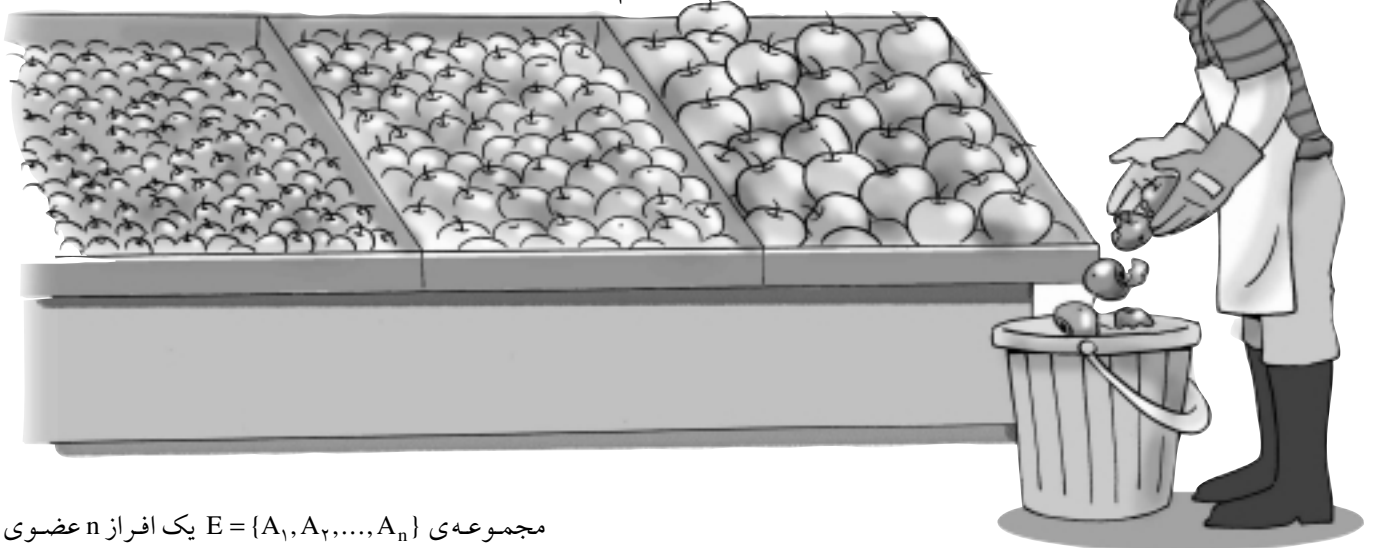


عمل غلط،
اما جواب صحیح

تعداد افرازه‌های یک مجموعه n عضوی

آشاره:

مقاله‌ی پیش رو، درباره‌ی راه‌های به دست آوردن تعداد کل افرازه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی است. در پایان مقاله، راه نسبتاً ساده‌ای را به شما پیشنهاد می‌کنیم که سرعت محاسباتی آن از بقیه‌ی راه‌هایی که در این مقاله می‌آوریم، بیشتر است. هدف از این پیشنهاد، ارائه‌ی راهی ساده و سریع در محاسبات علم مجموعه‌ها و در باب افرازه‌هاست. این مطلب قابل ذکر است که در این مقاله، از کلاس‌های هم‌ارزی و ارتباط آن با افرازه‌ها، مطلبی اثباتی و گفتنی موجود نیست.



مجموعه‌ی $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز n عضوی برای مجموعه‌ی ناتهی A است، هرگاه:

- ۱) $\forall i: 1 \leq i \leq n, A_i \neq \emptyset$
- ۲) $\forall i, j: 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- ۳) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$

برای درک بهتر مفهوم افراز یک مجموعه، چند مثال می‌آوریم:

مثال ۱. تمام افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a\}$ را می‌نویسیم:
 $A: \boxed{a}$ $E = \{\{a\}\}$: تنها یک افراز تک‌عضوی داریم

مثال ۲. همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b\}$ را می‌نویسیم:

$A: \boxed{a} \boxed{b}$ $E = \{\{a\}, \{b\}\}$: افراز دو‌عضوی
 $A: \boxed{a \ b}$ $E = \{\{a, b\}\}$: افراز تک‌عضوی

افراز یک مجموعه

هرگاه A مجموعه‌ای ناتهی باشد و بتوانیم تعدادی متناهی از زیر مجموعه‌های متمایز A مانند A_1, A_2, \dots, A_n بیابیم، به قسمی که اولاً: هر یک از زیر مجموعه‌ها ناتهی باشند، ثانیاً: هیچ دو تایی از آن‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند (دو به دو از هم جدا باشند) و ثالثاً: اجتماع این زیر مجموعه‌ها با خود مجموعه‌ی A برابر شود، در این صورت گوئیم: مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_n مجموعه‌های افرازکننده‌ی مجموعه‌ی A هستند و مجموعه‌ی $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز n عضوی از مجموعه‌ی A است.

باید توجه داشته باشیم، در حالتی که $n = 1$ ، یعنی E یک افراز تک‌عضوی از مجموعه‌ی A باشد، داریم: $E = \{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به زبان ریاضی بیان کنیم، گوئیم:

آشنا شدیم. حال اگر مثال‌ها را ادامه دهیم و بتوانیم مجموعه‌های پنج‌عضوی و شش‌عضوی را نیز افراز کنیم، به جدولی مانند جدول ۱ دست خواهیم یافت.

جدول ۱. تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی ($n \leq 6$)

تعداد اعضای مجموعه‌ی n عضوی		افراز m عضوی					
۶	۵	۴	۳	۲	۱		
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۳۱	۱۵	۷	۳	۱	۰	۰	۲
۹۰	۲۵	۶	۱	۰	۰	۰	۳
۶۵	۱۰	۱	۰	۰	۰	۰	۴
۱۵	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۵
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۶
۲۰۳	۵۲	۱۵	۵	۲	۱		مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی n عضوی

در این جا مشکل این است که هرچه تعداد اعضای مجموعه‌ی افراز شده بیشتر شود، به دست آوردن تعداد کل افرازهای آن سخت‌تر می‌شود. از این رو در اکثر منابع، از رابطه‌ی زیر تعداد افرازهای m عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی را به دست می‌آورند:

$$\frac{1}{m!} \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m}{m-k} (m-k)^n \quad m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$$

اثبات این رابطه از راه استقرا روی n است که از حوصله‌ی این بحث خارج است. حال با استفاده از رابطه‌ی بالا، جدول افرازی را بزرگ‌تر می‌کنیم:

جدول ۲. تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی ($n \leq 9$)

تعداد اعضای مجموعه‌ی n عضوی		افراز m عضوی								
۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱		
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲۵۵	۱۲۷	۶۳	۳۱	۱۵	۷	۳	۱	۰	۰	۲
۳۰۲۵	۹۶۶	۱۰۳	۹۰	۲۵	۶	۱	۰	۰	۰	۳
۷۷۷۰	۱۷۰۱	۳۵۰	۶۵	۱۰	۱	۰	۰	۰	۰	۴
۶۹۵۱	۱۰۵۰	۱۴۰	۱۵	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۵
۲۶۴۶	۲۶۶	۲۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۶
۴۶۲	۲۸	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۷
۳۶	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۸
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۹
۲۱۱۴۷	۴۱۴۰	۸۷۷	۲۰۳	۵۲	۱۵	۵	۲	۱		مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی n عضوی

مثال ۳. تمام افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ را می‌نویسیم:

$$E = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}; A \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$$

$$E = \{\{a\}, \{b, c\}\}; A \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$$

$$E = \{\{b\}, \{a, c\}\}; A \begin{array}{|c|c|c|} \hline b & a & c \\ \hline \end{array}$$

$$E = \{\{c\}, \{a, b\}\}; A \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & a & b \\ \hline \end{array}$$

$$E = \{\{a, b, c\}\}; A \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array}$$

مثال ۴. همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ را می‌نویسیم:

$$E = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}; A \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

افراز سه‌عضوی که تعداد آن شش تا است و به سه‌تای آن‌ها اشاره می‌کنیم.

$$E = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}; A \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

$$E = \{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}; A \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

$$E = \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}; A \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

افراز دو‌عضوی که تعداد آن هفت عدد است، به چهار مورد آن‌ها اشاره می‌کنیم.

$$E = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}; A \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

$$E = \{\{b\}, \{a, c, d\}\}; A \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}; A \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

$$E = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}; A \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

$$E = \{\{a, b, c, d\}\}; A \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

در مثال‌های بالا، به مفهوم افراز یک مجموعه دست یافتیم و با چگونگی افراز شدن یک مجموعه به کلاس‌های هم‌ارزی



هنگامی که جدول ۲ را رسم می‌کنیم، به دنباله‌ای از مجموع کل افزایشی مجموعه‌ی n عضوی برمی‌خوریم که برای به دست آوردن جملات آتی آن، به محاسبات طولانی نیاز داریم. این دنباله به شکل زیر است:

$$1-2-5-15-52-203-877-4140-\dots$$

حال به راه‌حلی برای کم کردن این محاسبات توجه کنید: اگر دنباله‌ی مجموع کل افزایشی مجموعه‌ی n عضوی را که از حالا آن را دنباله‌ی افزایش n عضوی می‌نامیم، بنویسیم و از هر دو جمله‌ی متوالی آن تفاضل بگیریم و زیر آن‌ها بنویسیم، دنباله‌ی جدیدی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & - & 2 & - & 5 & - & 15 & - & 52 & - & 203 & \dots \\ \hline & & 1 & & 3 & & 10 & & 37 & & 151 & \dots \end{array}$$

اگر این عملیات را روی دنباله‌ی جدید انجام بدهیم، بار دیگر دنباله‌ی جدیدتری ایجاد کرده‌ایم:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 5 & & 15 & & 52 & & 203 & \dots \\ \hline 1 & - & 3 & - & 10 & - & 37 & - & 151 & & & \\ \hline & & 2 & & 7 & & 27 & & 114 & & & \end{array}$$

و چندبار این عمل را انجام می‌دهیم تا به یک عدد برسیم که دیگر قادر به تفریق کردن آن نباشیم:

1	2	5	15	52	203	...
	1	3	10	37	151	
		2	7	27	114	
			5	20	87	
				15	67	
					52	

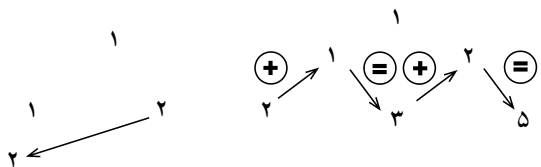
در این جا متوجه می‌شویم، ضلع مشخص شده از مثلث بالا، عیناً همان مجموع افزایشی است که دوباره تکرار شده است. اگر مثلث را کمی بچرخانیم، به راز آن پی خواهیم برد:

		1						
			1	2				
			2	3	5			
			5	7	10	15		
			15	20	27	37	52	
			52	67	87	114	151	203

حال می‌توان به شیوه‌ی عملکرد این مثلث دست یافت: «یک» به سطر دوم مثلث و ابتدای سطر آمده است. سپس با «یک» در بالای سر خود جمع شده و حاصل در آخر همان سطر نوشته شده است:



سپس «دو» به سطر پایین و سمت چپ سطر منتقل شده است، با عدد بالای سرش که «یک» باشد جمع شده و حاصل، یعنی «سه»، در وسط سطر نوشته شده است. سپس «سه» با «دو» در بالای سر خود جمع شده است و حاصل که «پنج» باشد، در انتهای سطر قرار گرفته است:



اگر همین روند را دنبال کنیم، به غیر از این که مثلث بالا را شکل داده‌ایم، به سادگی به جملات آتی دنباله‌ی افزایشی n عضوی دست می‌یابیم. رابطه‌ای که بر این مثلث حکم فرماست،

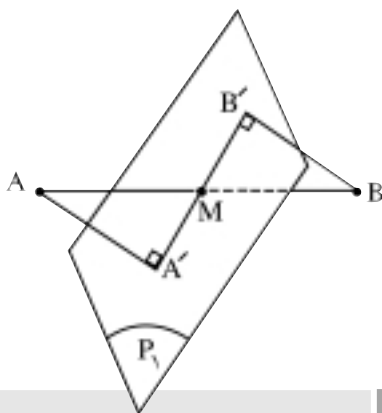


رویکرد هندسی، رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره: یکی از مهم ترین پیوندها و اتصال ها در همه ی ریاضیات ، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است . (از استانداردهای موضوعی NCTM)

در این شماره نیز این اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم .

نکته ی مهم : ضمن بررسی رویکرد هندسی ، رویکرد جبری - مختصاتی در آموزش هندسه برخی از راهبردهای مهم برای حل مسأله های هندسه را مطرح می کنیم ، در ضمن لازم است گفته شود مسأله هایی را که با این دو رویکرد حل می کنیم ، مسأله هایی از کتاب درسی هندسه ی ۱ و هندسه ی ۲ هستند ، تا دانش آموزان بتوانند ، مسائل دیگر این کتاب ها را با این دو رویکرد حل کنند .



شکل الف

دسته ی دوم ، مجموعه ی تمام صفحه هایی است که با خط AB (راستای AB) موازی است . صفحه ی P_1 در شکل «ب» یکی از این صفحه ها را نشان می دهد .

مثال ۱۰ . آیا برای دو نقطه ی متمایز A و B و خط L ، صفحه ای وجود دارد که بر L بگذرد و A و B از آن به یک فاصله باشند؟ در حالت های گوناگون چند جواب وجود دارد؟ مسئله را با روش هندسی و جبری - مختصاتی حل می کنیم .

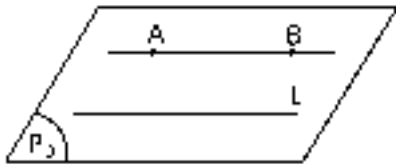
روش هندسی

در مثال ۵ دیدیم ، دو مجموعه صفحه وجود دارند که دو نقطه ی A و B از آن ها به یک فاصله اند :

دسته ی اول ، مجموعه ی تمام صفحه هایی است که از نقطه ی M وسط پاره خط AB می گذرند . صفحه ی P_1 در شکل «الف» یکی از این صفحه ها را نشان می دهد .

که همان جواب های مشخص شده در شکل هایی (پ) و (ت) هستند.

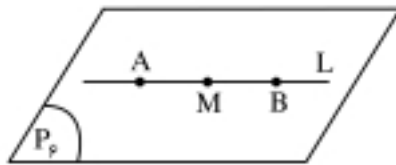
۲. اگر خط AB موازی با خط L و متمایز از آن باشد (یعنی منطبق بر L نباشد)، مسئله بی شمار جواب دارد که صفحه های گذرنده بر L (دسته صفحه های گذرنده بر خط L) هستند. یکی از این صفحه ها، صفحه ای است که بر خط L و خط AB می گذرد. زیرا صفحه ای که بر خط L و نقطه M وسط پاره خط AB می گذرد، شامل خط AB نیز می شود. در شکل، خط AB بر صفحه P_5 واقع است، چون بنا به قضیه ای داریم: «اگر خطی موازی یک صفحه و از جمله روی آن صفحه باشد و از یک نقطه روی صفحه، خطی موازی آن رسم کنیم، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می گیرد.»



شکل ث

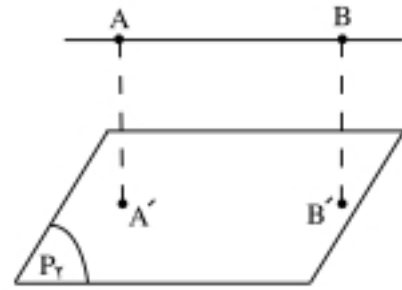
در این حالت، فاصله ی دو نقطه ی A و B از صفحه ی گذرنده بر L و AB ، مساوی صفر است. در مورد بقیه ی صفحه ها این فاصله های مساوی صفر نیستند. بنابراین، در این حالت مسئله بی شمار جواب دارد.

۳. اگر خط AB روی خط L باشد، مسئله بی شمار جواب دارد. در واقع در این حالت تمام صفحه های گذرنده بر L (یا AB) جواب مسئله هستند. صفحه P_6 در شکل «ج» یکی از این بی شمار صفحه را نشان می دهد. در این حالت، فاصله ی دو نقطه ی A و B از هر یک از صفحه های گذرنده بر L ، مساوی صفر است.



شکل ج

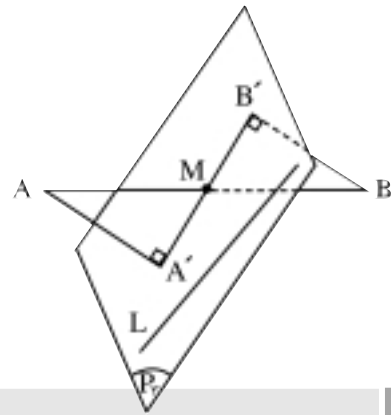
۴. اگر خط AB موازی L نباشد، اما نقطه ی M وسط پاره خط AB روی خط L باشد، یعنی در واقع خط AB و خط L ، در نقطه ی M وسط پاره خط AB متقاطع باشند، هر صفحه ای که بر خط L بگذرد، جواب مسئله است. یکی از این صفحه ها،



شکل ب

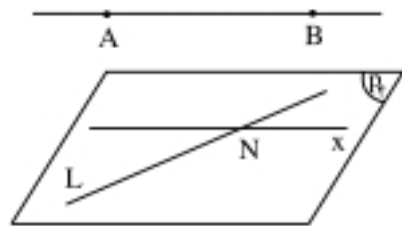
با توجه به این مطلب، در حالت کلی دو صفحه جواب مسئله هستند:

یکی صفحه ای که بر خط L و نقطه ی M وسط پاره خط AB می گذرد. این صفحه را P_7 می نامیم. شکل پ آن را نشان می دهد.



شکل پ

صفحه ی دیگر بر خط L می گذرد و با خط AB موازی است. برای رسم این صفحه از یک نقطه ی دل خواه مانند N واقع بر خط L ، خط Nx را موازی AB رسم می کنیم. صفحه ی P_8 که بر دو خط متقاطع L و Nx می گذرد، جواب دیگر مسئله است (شکل ت).

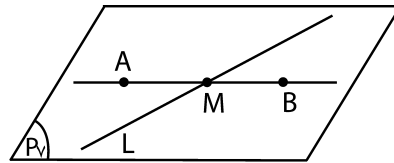


شکل ت

بحث: با توجه به وضع خط AB و خط L و نقطه ی M وسط پاره خط AB این حالت ها را خواهیم داشت:

۱. اگر خط AB موازی خط L نباشد و نقطه ی M نیز روی خط L قرار نداشته باشد، مسئله دو جواب دارد

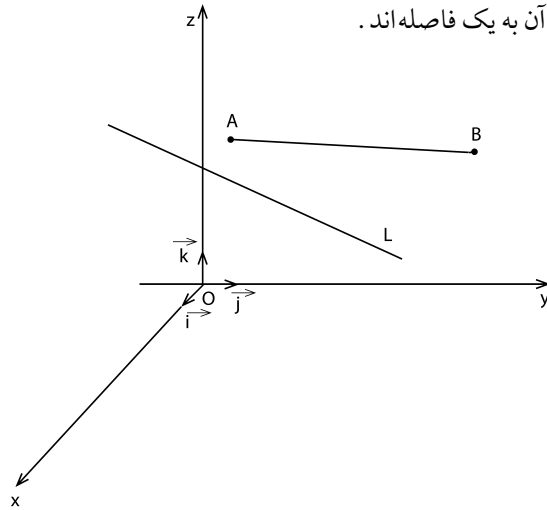
صفحه‌ای است که بر دو خط متقاطع L و AB می‌گذرد. پس در این حالت، مسئله بی‌شمار جواب دارد. صفحه‌ی P_V در شکل «ج» یکی از صفحه‌های جواب مسئله است.



شکل ح

روش جبری - مختصات

دستگاه محورهای مختصات قائم $O-xyz$ را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه مختصات فرض می‌کنیم $A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_2)$ و خط به معادله‌ی $L: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ باشد. می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسیم که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.



می‌دانیم که در حالت کلی، دو صفحه جواب مسئله هستند:

الف) صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌گذرد؛ با توجه به این که:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

برای نوشتن معادله‌ی این صفحه می‌توان از روش‌های متفاوتی استفاده کرد. یکی از آن‌ها، تعیین دو نقطه‌ی دل‌خواه C و D از خط L و سپس نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر سه نقطه‌ی M, C, D است. روش دیگر هم این است که معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط L را بنویسیم و از بین

صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را مشخص کنیم که بر نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌گذرد.

ب) صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد با خط AB موازی است. برای نوشتن معادله‌ی این صفحه نیز روش‌های متفاوتی وجود دارند؛ از جمله: بردار قائم صفحه را که با بردار $\vec{AB} \wedge \vec{L}$ هم‌راستا است، تعیین و نقطه‌ای دل‌خواه روی خط L اختیار می‌کنیم. حال با داشتن یک نقطه از صفحه و بردار قائم آن معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم.

در ادامه، برای روشن‌تر شدن این روش حل (روش جبری - مختصاتی) چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱. دو نقطه‌ی $A = (2, -1, 3)$ و $B = (-2, 3, 1)$ و خط $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$ داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ی را بنویسید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.

حل: الف) نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌گذرد.

روش اول: دو نقطه دل‌خواه C و D از خط L را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$C = (-1, 2, 0) \quad D = (2, 4, -1)$$

اکنون مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB را به دست می‌آوریم. داریم:

$$M \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M = (0, 1, 2)$$

حال معادله‌ی صفحه‌ی P گذرنده بر سه نقطه‌ی C, D, M را می‌نویسیم. برای نوشتن معادله‌ی این صفحه نیز به روش‌های متفاوتی عمل کنیم؛ از جمله:

$$\vec{CD} = (2 + 1, 4 - 2, -1 - 0) = (3, 2, -1)$$

$$\vec{CM} = (0 + 1, 1 - 2, 2 - 0) = (1, -1, 2)$$

$$\vec{CD} \wedge \vec{CM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\Rightarrow -3 + 6\lambda + \lambda + 8 = 0 \Rightarrow 7\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-5}{7}$$

$$\Rightarrow (2 - \frac{5}{7})x - 3y + 3(-\frac{5}{7})z + (-\frac{5}{7}) + 8 = 0$$

$$\frac{9}{7}x - 3y - \frac{15}{7}z + \frac{51}{7} = 0 \Rightarrow 9x - 21y - 15z + 51 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 7y - 5z + 17 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی جواب مسئله که همان معادله‌ی صفحه‌ی به دست آمده در روش اول است.

روش سوم

می‌دانیم معادله‌ی صفحه‌ای که بر سه نقطه‌ی (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) و (x_3, y_3, z_3) می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

با توجه به این مطلب و این که نقطه‌ی $M = (0, 1, 2)$ وسط پاره‌خط AB یک نقطه از این صفحه و $C = (-1, 2, 0)$ و $D = (2, 4, -1)$ دو نقطه‌ی دیگر از خط L و متعلق به این صفحه هستند، خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

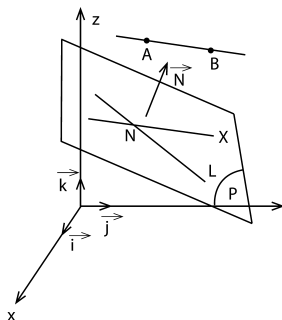
$$\Rightarrow 3(x-0) + (-7)(y-1) + (-5)(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 7y - 5z + 17 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده

(ب) نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است.

این صفحه را P می‌نامیم. معادله‌ی آن را به روش‌های متفاوتی می‌توان به دست آورد:



روش اول:

بردار قائم صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است، حاصل ضرب برون‌ی این

$$\Rightarrow \vec{N}_p = (2, -7, -5)$$

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x+1) - 7(y-2) - 5(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 7y - 5z + 17 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده

نکته: در این حالت به سادگی می‌توان نشان داد که AB موازی L نیست، زیرا پارامترهای هادی \vec{AB} و خط L متناسب نیستند. هم‌چنین نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی خط L نیست، زیرا مختصات M در معادله‌ی L صدق نمی‌کند.

روش دوم

۱. مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$M = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}) = (2)$$

$$\Rightarrow M = (0, 1, 2)$$

۲. معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$$

داریم:

$$P_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x+2 = 3y-6$$

$$\Rightarrow P_1: 2x - 3y + 8 = 0$$

$$P_2: \frac{x+1}{3} = \frac{z}{-1} \Rightarrow 3z = -x-1$$

$$\Rightarrow P_2: x + 3z + 1 = 0$$

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 8 + \lambda(x + 3z + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3y + 8 + \lambda x + 3\lambda z + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow (2+\lambda)x - 3y + 3\lambda z + \lambda + 8 = 0$$

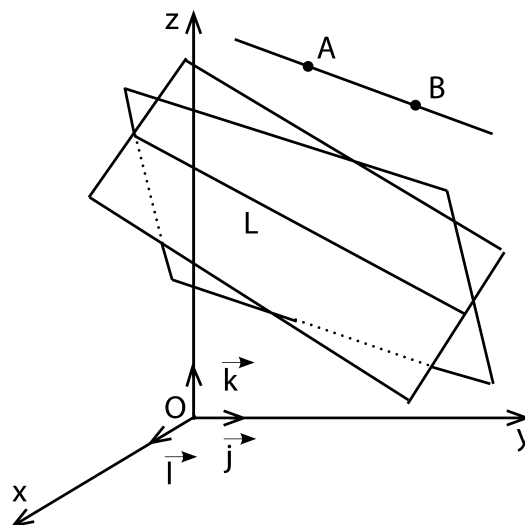
معادله‌ی دسته‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L

۳. صفحه‌ای از این دسته صفحه را مشخص می‌کنیم که از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. به این منظور، مختصات نقطه‌ی M باید در معادله‌ی دسته صفحه صدق کند. داریم:

$$M = (0, 1, 2) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی دسته صفحه}} (2+\lambda)(0) - 3(1)$$

$$+ 3\lambda(2) + \lambda + 8 = 0$$

دو بردار یعنی $\vec{V}_P = \vec{V}_L \times \vec{V}_{AB}$ است. این بردار را مشخص می‌کنیم. داریم:



روش دوم:

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده L را می‌نویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را مشخص می‌کنیم که با خط AB موازی است. معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را قبلاً نوشتیم. داریم:

$$(2 + \lambda)x - 3y + 3\lambda z + \lambda + 8 = 0$$

از طرف دیگر داشتیم:

$$\vec{AB} = (-4, 4, -2) \text{ یا } \vec{AB} = (-2, 2, -1)$$

از آن جا:

$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}} = (2 + \lambda, -3, 3\lambda), \vec{V}_{AB} = (-4, 4, -2)$$

$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}} \perp \vec{V}_{AB} \Rightarrow \vec{V}_{\text{دسته صفحه}} \times \vec{V}_{AB} = 0$$

$$(2 + \lambda)(-2) + (-3)(2) + (3\lambda)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow -4 - 2\lambda - 6 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -5\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$\lambda = -2 \xrightarrow{\text{در معادله دسته صفحه}} (-3 + 2)x - 3y + 3(-2)z - 2 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow -3x - 3y - 6z + 6 = 0 \Rightarrow x + y + 2z - 2 = 0$$

معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و موازی AB؛ یعنی جواب دیگر مسئله، که در روش اول نیز همین جواب به دست آمد.

مثال ۲. دو نقطه‌ی $A = (1, 0, 2)$ و $B = (-3, -4, 0)$ و خط

را بنویسید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک

فاصله‌اند.

حل: بردار هادی راستای AB و بردار هادی خط L را به دست

می‌آوریم تا وضع آن‌ها را نسبت به هم مشخص کنیم. داریم:

$$A(1, 0, 2), B = (-3, -4, 0) \Rightarrow \vec{AB} = (-3 - 1, -4 - 0, 0 - 2)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (-4, -4, -2), L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_L = (2, 2, 1), \frac{p}{p'} = \frac{-4}{2} = -2,$$

$$\frac{q}{q'} = \frac{-4}{2} = -2, \frac{r}{r'} = \frac{-2}{2} = -2$$

$$A = (3, -1, 3), B = (-2, 3, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (-2 - 3, 3 + 1, 1 - 3)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (-4, 4, -2), L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_L = (3, 2, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{V}_L \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (0)\vec{i} + (-10)\vec{j} + (-20)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{N}_P = (0, -10, -20) \text{ یا } \vec{N}_P = (0, 1, 2)$$

اکنون یک نقطه از خط L را نیز مشخص می‌کنیم. داریم:

$$E = (-1, 2, 0) \in L$$

حال معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی E و عمود بر بردار \vec{N}

را می‌نویسیم. داریم:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow 0(x + 1) + 1(y - 2) + 2(z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow P: y + 2z - 2 = 0 \text{ معادله‌ی صفحه‌ی جواب مسئله}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = -2 \Rightarrow \vec{AB} \parallel L$$

$$A = (1, 0, 2) \longrightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{0-1}{2} \neq A \notin L$$

پس خط AB موازی با L و متمایز از آن است. بنابراین آن چه در رویکرد هندسی بحث شد، در این حالت مسئله بی شمار جواب دارد. مجموعه این جواب ها، دسته صفحه ای است که بر خط L می گذرد. معادله ای این دسته صفحه را می نویسیم. داریم:

$$L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow P_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow P_1: x - y + 1 = 0$$

$$P_2: \frac{x}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow x = 2z \Rightarrow P_2: x - 2z = 0$$

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \Rightarrow x - y + 1 + \lambda(x - 2z) = 0$$

معادله ای دسته صفحه ی گذرنده بر L و جواب مسئله $\Rightarrow (1 + \lambda)x - y - 2\lambda z + 1 = 0$

نکته: یکی از این صفحه ها بر L و AB

می گذرد. فاصله های دو نقطه ای A و B از این صفحه مساوی صفر است، چون این دو نقطه روی صفحه قرار دارند. در مورد بقیه ای صفحه های جواب مسئله، فاصله های مساوی A و B از هر یک از صفحه ها مخالف صفر است. به ازای مقادیر گوناگون λ می توان معادله ای این صفحه ها را مشخص کرد. لازم به ذکر است، دو صفحه از صفحه های جواب مسئله، همان صفحه های $P_1: x - y + 1 = 0$ و $P_2: x - 2z = 0$ هستند که به ازای $\lambda = 0$ و $\lambda \rightarrow \infty$ به دست می آیند.

نکته: معادله ای دسته صفحه ی گذرنده بر L را

به صورت $\alpha P_1 + \beta P_2 = 0$ که α و β عددهای حقیقی اند نیز می توان نشان داد؛ یعنی به صورت:

$$\alpha(x - y + 1) + \beta(x - 2z) = 0$$

در این حالت به ازای $\alpha = 0$ ، $P_2: x - 2z = 0$ ،

و به ازای $\beta = 0$ ، صفحه ای $P_1: x - y + 1 = 0$

به دست می آید و به ازای بقیه ای مقدارهایی که به α

و β نسبت می دهیم، صفحه های دیگر جواب

مسئله حاصل می شود. صفحه ی گذرنده بر L و

AB را نیز می توان مشخص کرد که یکی از

جواب های مسئله است.

مثال ۳. خط $L: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ و دو نقطه ای

$A = (2, -1, 4)$ و $B = (0, 1, -2)$ داده شده اند. معادله ای

صفحه ای را مشخص کنید که بر خط L می گذرد و دو نقطه ای

A و B از آن به یک فاصله اند.

حل: وضع خط AB و خط L و هم چنین وضع نقطه ای M وسط

پاره خط AB را نسبت به خط L مشخص می کنیم. داریم:

$$A = (2, -1, 4), B = (0, 1, -2) \Rightarrow \vec{AB} = (-2, 2, -6)$$

$$\vec{V}_L = (4, 2, 3), \frac{-2}{4} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{-6}{3} \Rightarrow \text{AB موازی L نیست}$$

در معادله ای

$$M = (1, 0, 1) \longrightarrow \frac{1-1}{3} = \frac{0}{2} = \frac{1-1}{3} \Rightarrow 0 = 0 = 0$$

پس نقطه ای M وسط پاره خط AB روی خط L قرار دارد.

بنابراین مسئله بی شمار جواب دارد و این بی شمار جواب دسته

صفحه ای است که بر خط L می گذرد (یکی از صفحه های این

دسته صفحه، صفحه ای گذرنده بر دو خط متقاطع AB و L

است). معادله ای این دسته صفحه را می نویسیم.

$$L: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$$

$$\Rightarrow P_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} \text{ یا } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1}$$

$$\Rightarrow x - 1 = 2y \Rightarrow P_1: x - 2y - 1 = 0$$

$$P_2: \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow P_2: 3y - 2z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(x - 2y - 1) + \beta(3y - 2z + 2) = 0$$

معادله ای دسته صفحه ای جواب مسئله (دسته صفحه ای

گذرنده بر L).

نکته: دو صفحه ای P_1 و P_2 ، دو صفحه ای

جواب مسئله اند که به ازای $\beta = 0$ و $\alpha = 0$ به دست

می آیند. برای تعیین معادله ای صفحه ای گذرنده بر

L و AB در این حالت، کافی است مختصات یک

نقطه ای دل خواه AB (غیر از نقطه ای M) را در

معادله ای دسته صفحه قرار دهیم.

به ازای مقادیر دیگری که به جای عددهای حقیقی α و β قرار

می دهیم، معادله ای صفحه های دیگر جواب مسئله به دست می آید.

انتگرال گیری جدولی

اشاره

در این مقاله به انتگرال گیری به روش جدولی پرداخته و سعی بر این است که در جدول ها، با استفاده از مشتق هایی که قبلاً آموخته ایم و نیز انتگرال های ساده به جواب برسیم. این روش برای به جواب رسیدن در انتگرال هایی مناسب است که به صورت حاصل ضربی از دو عامل نوشته می شوند. بدین ترتیب، هنر خوب یاد گرفتن و خوب یاد دادن را می آموزیم و نشان می دهیم که ریاضی نیز علمی زیبا و فهمیدنی است؛ البته اگر با بردباری، پشتکار و امید به یادگیری آن پردازیم و همواره در پی آموختن مطالب جدید باشیم.

$F^{(2)}$ مشتق دوم تابع و $F^{(3)}$ مشتق سوم تابع و... و $F^{(n)}$ مشتق n ام تابع را در ستون اول نشان می دهد.

در ستون دوم جدول، $G(t)$ و انتگرال های متوالی آن دیده می شود. $G^{(-1)}$ انتگرال اول تابع و $G^{(-2)}$ انتگرال دوم و به همین صورت تا $G^{(-n)}$ که انتگرال n ام $G(t)$ است. در این انتگرال گیری متوالی، عددهای ثابت را به حساب نمی آوریم و آن ها را در حاصل نهایی به صورت عدد C ثبت می کنیم. در نهایت جواب انتگرال با جمع حاصل ضرب هایی که در جدول به صورت خطوط مایل نشان داده شده اند، به دست می آید.

پس به صورت نمادین می توان نوشت:

$$\int F(t)G(t)dt = FG^{(-1)} - F^{(1)}G^{(-2)} + F^{(2)}G^{(-3)} + \dots$$

$$+ (-1)^n F^{(n)}G^{(-n-1)} + (-1)^{n+1} \int F^{(n+1)}(t)G^{(-n-1)}(t)dt$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k F^{(k)}G^{(-k-1)} + (-1)^{n+1} \int F^{(n+1)}(t)G^{(-n-1)}(t)dt$$

مثال ۱. حاصل $\int x^2 \sin x dx$ را به دست آورید.

حل: در نظر می گیریم:

$$F(x) = x^2$$

$$G(x) = \sin x$$

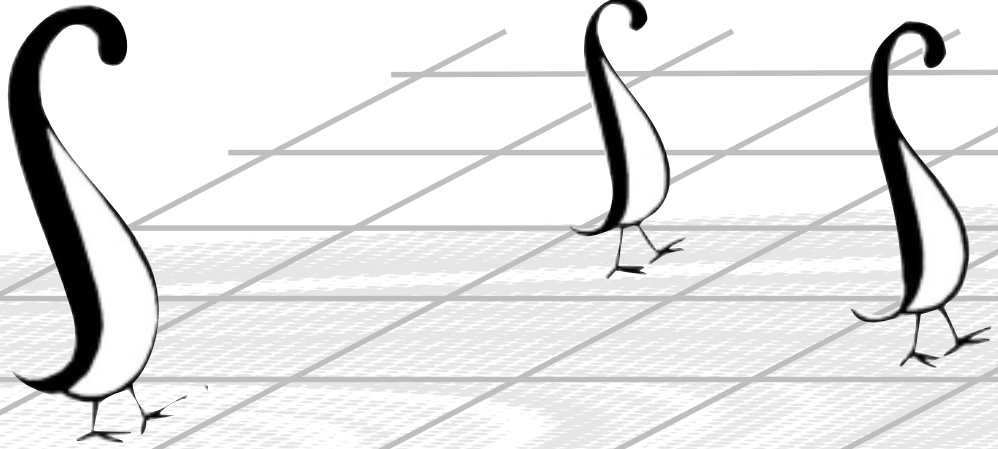
و می دانیم که:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad \text{و} \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

انتگرال جدولی راهی برای پیدا کردن سریع جواب انتگرال هاست. هم چنین سرچشمه ای برای استخراج قاعده های مهم آنالیز و تابع اولیه است. این انتگرال گیری بر «جمع انتگرال های متوالی» استوار است و با استفاده از آن می توان حاصل $\int F(t)G(t)dt$ را به دست آورد. این روش ما را از انجام اعمال جبری خسته کننده برای به دست آوردن حاصل این انتگرال ها بی نیاز می سازد.

ستون اول	ستون دوم
$+F$	G
$-F^{(1)}$	$G^{(-1)}$
$+F^{(2)}$	$G^{(-2)}$
$-F^{(3)}$	$G^{(-3)}$
\vdots	\vdots
$(-1)^n F^{(n)}$	$G^{(-n)}$
$(-1)^{n+1} F^{(n+1)} \dots$	$G^{(-n-1)}$

همان گونه که این طرح در جدول دیده می شود، در ستون اول، $F(t)$ و مشتق های متوالی آن با افزودن جمع و منهای متناوب در کنار آن نوشته می شود. پس $F^{(1)}$ مشتق اول تابع و



مشتق های متوالی x^2 تا صفر	ستون اول	ستون دوم	انتگرال های متوالی \sqrt{x}
	$+F(x) = (3x - 2)$	$G(x) = (\sqrt{x})^{-1} = x^{-\frac{1}{2}}$	
	$-F^{(1)} = 3$	$G^{(-1)} = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}$	
	$+F^{(2)} = 0$	$G^{(-2)} = \frac{2x^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$	

پس داریم:

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}} dx = (3x-2)(2x^{\frac{1}{2}}) - 3(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}})$$

$$= (3x-2)(2\sqrt{x}) - 4x\sqrt{x}$$

$$= \sqrt{x}(2x-4) + C$$

مثال ۲. حاصل $\int x^2 e^x dx$ را به دست آورید.

حل: می دانیم که: $\int e^x dx = e^x + C$

در نظر می گیریم:

$$F(x) = x^2$$

$$G(x) = e^x$$

مشتق های متوالی x^2 تا صفر	ستون اول	ستون دوم	انتگرال های متوالی e^x
	$+ x^2$		e^x
	$- 2x$		e^x
	$+ 2$		e^x
	$- 0$		e^x

مشتق های متوالی x^2 تا صفر	ستون اول	ستون دوم	انتگرال های متوالی $\sin x$
	$+F(x) = x^2$	$G(x) = \sin x$	
	$-F^{(1)} = 2x$	$G^{(-1)} = -\cos x$	
	$+F^{(2)} = 2$	$G^{(-2)} = -\sin x$	
	$-F^{(3)} = 0$	$G^{(-3)} = \cos x$	

وقتی در ستون اول به صفر می رسیم، کار انتگرال گیری به پایان رسیده است، پس داریم:

$$\int x^2 \sin x dx = F(x)G^{(-1)} - F^{(1)}G^{(-2)} + F^{(2)}G^{(-3)}$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

با توجه به این که:

$$G^{(-1)} = \int G(x) dx = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

ولی همان طور که گفتیم، ثابت انتگرال (C) را در هر یک از مراحل انتگرال گیری نادیده می گیریم. پس $G^{(-1)} = \cos x$ را در جدول می نویسیم و به همین ترتیب برای $G^{(-2)}$ و $G^{(-3)}$ عمل می کنیم که در جدول نوشته ایم. البته این مقدار ثابت در حاصل نهایی انتگرال نوشته شده است.

مثال ۲. حاصل $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}} dx$ را به دست آورید.

حل: در نظر می گیریم:

$$F(x) = 3x - 2$$

$$G(x) = (\sqrt{x})^{-1}$$

و می دانیم که:

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

پس داریم:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

حل: داریم:

$$F(t) = 12t^2 + 36$$

$$G(x) = (3t+2)^{-\frac{1}{5}}$$

مثال ۴. حاصل $\int e^x \sin x dx$ را محاسبه کنید.

حل: در نظر می گیریم:

$$F(x) = \sin x$$

$$G(x) = e^x$$

مشتق های متوالی $12t^2 + 36$ تا صفر	ستون اول	ستون دوم	انتگرال های متوالی $(3t+2)^{-\frac{1}{5}}$
	$+12t^2 + 36$		$(3t+2)^{-\frac{1}{5}}$
	$-24t$		$\frac{5}{12}(3t+2)^{-\frac{4}{5}}$
	$+24$		$\frac{25}{324}(3t+2)^{-\frac{9}{5}}$
	0		$\frac{125}{13608}(3t+2)^{-\frac{14}{5}}$

پس داریم:

$$\int \frac{12t^2 + 36}{\sqrt[5]{3t+2}} dt = (\Delta t^2 + 15)(3t+2)^{\frac{4}{5}}$$

$$- \frac{50t}{27}(3t+2)^{\frac{9}{5}} + \frac{125}{567}(3t+2)^{\frac{14}{5}} + C$$

تمرین انتگرال های زیر را با همین روش محاسبه کنید.

۱) $\int (\Delta x^2 + 2) \cos x dx$

۲) $\int e^x (-x^3 + 2x - 1) dx$

۳) $\int \frac{\Delta x^2 + 6x}{2\sqrt{x}} dx$

۴) $\int \sin x \left(\frac{x^2 - 1}{2} \right) dx$

ستون اول	ستون دوم
$+ \sin x$	e^x
$- \cos x$	e^x
$+ (-\sin x)$	e^x
	e^x

*
 $e^x \sin x$ خود عبارت انتگرال است.

توجه کنید، در این مثال با رسیدن به عبارت انتگرال اصلی، دیگر عمل انتگرال گیری را ادامه نمی دهیم و برای نوشتن حاصل داریم:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$$(\int e^x \sin x dx + \int e^x \sin x dx) = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

منابع.....

1. www.matharticles.com

۲. توماس، جورج ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال (ج ۱).

مثال ۵. حاصل $\int \frac{12t^2 + 36}{\sqrt[5]{3t+2}} dt$ را محاسبه کنید.

لطیفه



روزی عده ای از مهندسان می خواستند ارتفاع میله ی پرچم را اندازه گیری کنند و چون فقط متر داشتند و نمی توانستند آن را جایی بند کنند، مانده بودند که چه کنند. در همین حال ریاضی دانی از آن جا عبور می کرد از او کمک خواستند و گفت این که خیلی آسان است و میله ی پرچم را از جای درآورد و روی زمین گذاشت و طول آن را با متر اندازه گرفت، بعد از رفتن او یکی از مهندسان گفت، این ریاضی دان ها چه قدر بامزه هستند، ما می خواستیم ارتفاع میله را حساب کنیم، او طول آن را به ما گفت.

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

مقدمه

مسائلی که انسان در واقعیت با آن‌ها سروکار دارد، معمولاً دارای ابهام و نوعی عدم قطعیت هستند که به پیچیدگی در آن‌ها می‌انجامد. برای آن که بتوان موضوعی را به‌طور کامل تحلیل کرد، باید اطلاعات کافی و دقیق از آن داشت. ولی انسان در مواجهه با مسائل پیچیده در دنیای واقعی، چون اطلاعات دقیقی از آن‌ها ندارد، به شکل تقریبی ماهیت آن‌ها را تحلیل می‌کند. در این خصوص، پروفیسور لطفی زاده، بنیان‌گذار منطق و مجموعه‌های فازی بیان کرده است: «هر چه میزان آگاهی از یک سیستم افزایش یابد، پیچیدگی آن سیستم کاهش پیدا می‌کند و درک و تحلیل از آن افزایش می‌یابد. وقتی پیچیدگی سیستم کاهش یابد، دقت روش مدل‌سازی افزایش می‌یابد و ابزار مفیدی برای تحلیل سیستم فراهم می‌شود.»

برای سیستم‌هایی که پیچیدگی کمی دارند، چون میزان عدم قطعیت در آن‌ها کم است، می‌توان با استفاده از روابط ریاضی، رفتار آن‌ها را به شکل دقیق مدل‌سازی و تحلیل کرد. ولی اگر سیستم قدری پیچیده شود، عدم قطعیت افزایش می‌یابد. در این حالت نمی‌توان تحلیل دقیقی از آن به عمل آورد. به منظور تحلیل مناسبی از این نوع سیستم‌ها، از رویکرد استدلال تقریبی فازی استفاده می‌شود. به همین لحاظ، به آن‌ها سیستم‌های «فازی» می‌گویند.

ورودی سیستم‌های فازی، اطلاعاتی فازی یا غیردقیق هستند، یا آن که بررسی سیستم بر اساس استدلال تقریبی و به شکل فازی و غیردقیق صورت می‌گیرد. نظریه‌ی فازی که به بررسی مفاهیم غیردقیق می‌پردازد، دارای چهار بخش متفاوت است که عبارت‌اند از: ریاضی فازی، منطق و سیستم‌های فازی، تصمیم‌گیری فازی و هوش مصنوعی. ریاضی فازی به بررسی مجموعه‌های فازی و اعمال روی آن‌ها می‌پردازد و همان‌گونه که در قسمت‌های قبل اشاره شد، عضویت یک عنصر در یک مجموعه‌ی فازی، با عددی موسوم به درجه‌ی عضویت بیان می‌شود که مقداری بین صفر و یک است. منطق فازی توسعه یافته‌ی منطق کلاسیک است که در آن به جای منطق دو ارزشی، از منطق چند ارزشی استفاده می‌شود. در تصمیم‌گیری فازی پارامترها، تابع هدف و قیود مسئله به شکل فازی هستند. از جمله کاربردهای مهم نظریه‌ی فازی، در هوش مصنوعی و طراحی و ساخت ربات‌های هوشمند است که می‌توان با پردازش فازی، امکان انجام رفتارهایی شبیه انسان را در آن‌ها طراحی کرد.

در قسمت‌های قبل، مفاهیمی چون مجموعه‌ی فازی محدب، عدد فازی و اعمال روی مجموعه‌های فازی معرفی شدند. در این قسمت، ابتدا چند مفهوم در مجموعه‌های فازی را مطرح می‌کنیم:

در صورتی که ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی ۱ باشد، آن مجموعه‌ی فازی را نرمال و در غیر این صورت غیرنرمال می‌گویند. بنابراین اگر \tilde{A} یک مجموعه‌ی فازی نرمال باشد، آن‌گاه:

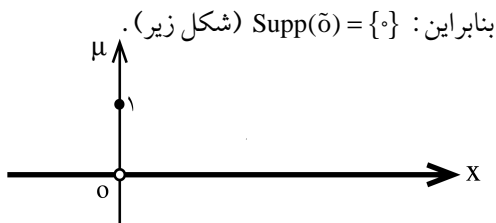
$$\exists x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

تعریف: منظور از «ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی»، بزرگ‌ترین مقدار درجه‌ی عضویت در آن مجموعه است. ارتفاع مجموعه‌ی فازی \tilde{A} را با $h(\tilde{A})$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب:

$$h(\tilde{A}) = \max_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

با این تابع عضویت است:

$$\mu_{\tilde{0}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$



در قسمت قبل، تعریفی از اعداد فازی مطرح شد که زیرمن ارائه داده است. پس از آن، تعریف عدد فازی، به صورت زیر کامل شد:

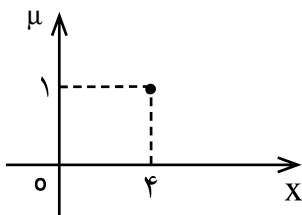
تعریف: مجموعه‌ی فازی \tilde{A} را عدد فازی گوئیم هرگاه:

(الف) مجموعه‌ی فازی نرمال باشد؛

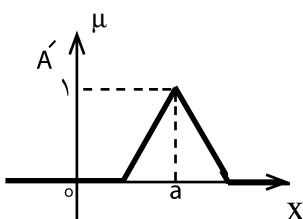
(ب) مجموعه‌ی $1-\alpha$ برش \tilde{A} ، یعنی A_α برای هر $0 < \alpha \leq 1$ بازه‌ای بسته باشد؛

(ج) تکیه‌گاه \tilde{A} مجموعه‌ای کران دار باشد.

بنابر تعریف بالا، چون $1-\alpha$ برش یک عدد فازی برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، مجموعه‌ای بسته، و هر مجموعه‌ی بسته، مجموعه‌ای محدب است، بنابراین هر عدد فازی یک مجموعه‌ی فازی محدب است. ولی عکس این حالت برقرار نیست. یعنی می‌توان مجموعه‌ی فازی محدبی را مثال زد که یک $1-\alpha$ برش آن باز یا نیم باز باشد. شکل‌های زیر، نمونه‌هایی از تابع عضویت یک عدد فازی را بیان می‌کنند. توجه می‌کنیم که اعداد حقیقی و بازه‌های حقیقی، حالات خاصی از اعداد فازی هستند.



۱) یک عدد حقیقی قطعی (عدد ۴)

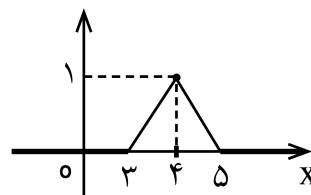


۲) یک عدد حقیقی فازی (تقریباً ۴)

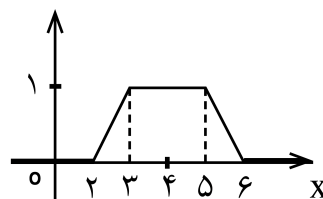
زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع X که مقدار درجه‌ی عضویت اعضای این مجموعه ۱ باشد، «هسته‌ی مجموعه‌ی فازی» \tilde{A} نام دارد. هسته‌ی \tilde{A} را با $\text{Core}(\tilde{A})$ نمایش می‌دهند. لذا:

$$\text{Core}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

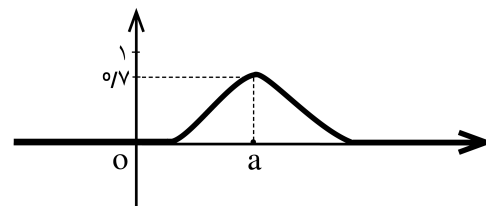
شکل‌های زیر، توابع عضویت نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی نرمال و غیر نرمال را نمایش می‌دهند. در هر یک از آن‌ها هسته و ارتفاع مشخص شده‌اند.



مجموعه‌ی فازی نرمال با $h(\tilde{A}) = 1$ و $\text{Core}(\tilde{A}) = \{4\}$



مجموعه‌ی فازی نرمال با $h(\tilde{A}) = 1$ و $\text{Core}(\tilde{A}) = [3, 5]$



مجموعه‌ی فازی غیر نرمال با $h(\tilde{A}) = 0.7$ و $\text{Core}(\tilde{A}) = \emptyset$

هم چنین، اگر:

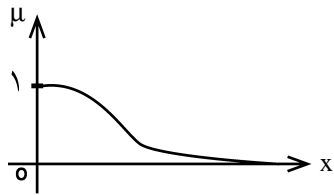
$$\tilde{A} = \{(2, 0/3), (3, 0/6), (4, 1), (5, 1), (7, 0/8), (9, 0/4)\}$$

آن‌گاه: $h(\tilde{A}) = 1$ و $\text{Core}(\tilde{A}) = \{4, 5\}$. بنابراین، \tilde{A} مجموعه‌ی فازی نرمالی را نمایش می‌دهد.

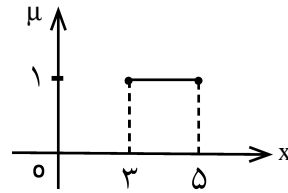
مفهوم دیگری که در مجموعه‌های فازی مطرح می‌شود، «مجموعه‌ی فازی سینگلتون» است که به مجموعه‌ی فازی با تکیه‌گاه یک عضوی اطلاق می‌شود. بنابراین، \tilde{A} یک مجموعه‌ی فازی سینگلتون نام دارد، هرگاه:

$$\text{Supp}(\tilde{A}) = \{a\}$$

برای مثال، منظور از صفر سینگلتون، مجموعه‌ای فازی



۴ اعداد کوچک



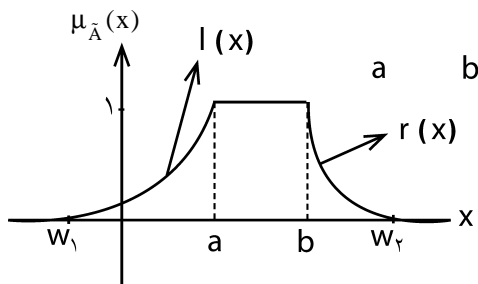
۳ یک بازه‌ی بسته‌ی حقیقی قطعی (بازه‌ی [۳, ۵])

مشاهده می‌کنیم، تابع عضویت هر عدد فازی می‌تواند صعودی یا نزولی باشد. با توجه به تعریف عدد فازی، می‌توان قضیه‌ی زیر را بیان کرد:

قضیه: اگر \tilde{A} یک مجموعه‌ی فازی روی \mathbb{R} باشد، آن‌گاه \tilde{A} یک عدد فازی است اگر و تنها اگر بازه‌ی بسته‌ی غیرتهی نظیر $[a, b]$ وجود داشته باشد که:

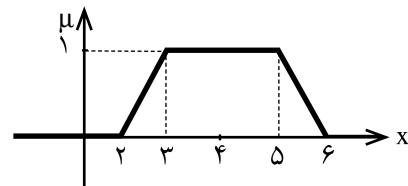
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ l(x) & x < a \\ r(x) & x > b \end{cases}$$

که در آن l تابعی از $(-\infty, a)$ به $[0, 1]$ ، صعودی و از راست پیوسته است و به ازای $x \in (-\infty, w_1]$ ، $l(x) = 0$ ، $w_1 \leq a$ ، r تابعی از $(b, +\infty)$ به $[0, 1]$ ، نزولی و از چپ پیوسته است و به ازای $x \in [w_2, +\infty)$ ، $r(x) = 0$ ، $b \leq w_2$ داریم. در شکل زیر، توابع l و r در قضیه به نمایش گذاشته شده‌اند:



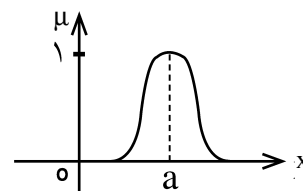
نمونه‌ای از یک عدد فازی با هسته‌ی $[a, b]$

چون مجموعه‌های فازی با α -برش‌های خود مشخص می‌شوند، می‌توان با انجام محاسبات روی α -برش‌ها، اعمال ریاضی روی اعداد فازی را برحسب اعمال ریاضی روی α -برش‌های آن‌ها معرفی کرد. در این جا اعمال اصلی در بازه‌ها را معرفی می‌کنیم. خواص و جزئیات اعمال بازه‌ای در

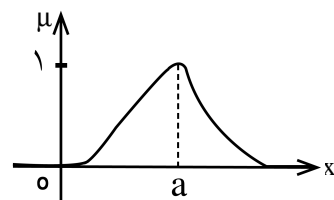


۴ یک بازه‌ی حقیقی فازی (تقریباً بین ۳ و ۵)

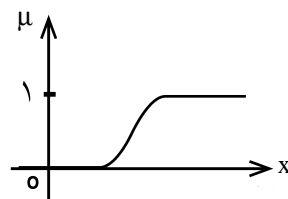
تابع عضویت هر عدد فازی، لزوماً همانند شکل‌های بالا متقارن نیست. به نمونه‌های زیر از اعداد فازی توجه کنید:



۱ یک عدد فازی زنگی شکل متقارن



۲ یک عدد فازی زنگی شکل غیرمتقارن



۳ اعداد بزرگ

مبحثی با عنوان «حساب بازه‌ای» بررسی می‌شود. در ادامه، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو بازه‌ی حقیقی، هم‌چنین قرینه و وارون بازه‌ی فازی معرفی می‌شوند:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$-[a, b] = [-b, -a]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a, b] + (-[c, d]) = [a - d, b - c]$$

با فرض آن‌که: $0 \notin [a, b]$

$$[a, b]^{-1} = \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a} \right]$$

$$[a, b] \times [c, d] = [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}]$$

با فرض $0 \notin [c, d]$

$$[a, b] / [c, d] = [a, b] \times [c, d]^{-1} = [a, b] \times \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c} \right]$$

$$= \left[\min\left\{ \frac{a}{d}, \frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{b}{c} \right\}, \max\left\{ \frac{a}{d}, \frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{b}{c} \right\} \right]$$

مثال:

$$[2, 6] + [1, 4] = [3, 10] \quad -[-7, 2] = [-2, 7]$$

$$[2, 6] - [1, 4] = [-2, 5] \quad [2, 6]^{-1} = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right]$$

$$[-2, 2] \times [-3, -0.5] = [-6, 6]$$

$$[-1, 3] / [2, 5] = \left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

حال فرض کنید، می‌خواهیم تابع عضویت مجموع و تفاضل دو عدد فازی مثلثی شکل \tilde{A} و \tilde{B} را با توابع عضویت

زیر را به دست آوریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, x > 3 \\ \frac{x+1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3-x}{2} & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, x > 5 \\ \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2} & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

در این حالت، مجموعه‌های α -برش عبارت‌اند از:

$$A_\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha] \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$B_\alpha = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha] \quad , \quad 0 < \alpha \leq 1$$

با توجه به جمع و تفریق بازه‌های فازی خواهیم داشت:

$$(A+B)_\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha] + [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha] \\ = [4\alpha, 8 - 4\alpha] \quad , \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$(A-B)_\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha] - [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha] \\ = [4\alpha - 6, 2 - 4\alpha] \quad , \quad 0 < \alpha \leq 1$$

حال از روی مجموعه‌های α -برش فوق توابع عضویت

$\tilde{A} + \tilde{B}$ و $\tilde{A} - \tilde{B}$ را به دست می‌آوریم. فرض کنیم:

$$\frac{x}{4} \geq \alpha \quad \text{از آن‌جا که } 4\alpha \leq x \leq 8 - 4\alpha \text{ لذا } x \in (A+B)_\alpha$$

به ازای $0 < x \leq 4$ و $\frac{8-x}{4} \geq \alpha$ به ازای $4 < x \leq 8$. بنابراین:

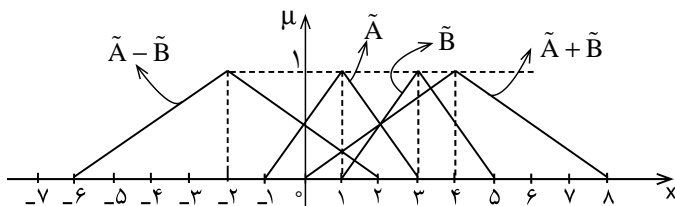
$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, x > 8 \\ \frac{x}{4} & 0 < x \leq 4 \\ \frac{8-x}{4} & 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

به طور مشابه:

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -6, x > 2 \\ \frac{x+6}{4} & -6 < x \leq -2 \\ \frac{2-x}{4} & -2 < x \leq 2 \end{cases}$$

شکل زیر، توابع عضویت \tilde{A} ، \tilde{B} ، $\tilde{A} + \tilde{B}$ و $\tilde{A} - \tilde{B}$ را

نمایش می‌دهد.



حال سؤالات زیر را مطرح می‌کنیم:

- آیا حاصل تقریباً ۳+ تقریباً ۱ برابر با تقریباً ۴ می‌شود؟
- آیا رابطه‌ی تقریباً ۳= تقریباً ۱+ (تقریباً ۱- تقریباً ۳) صحیح است؟

دو تابع عضویت مثال بالا، توصیفی از اعداد فازی تقریباً ۱ و تقریباً ۳ را نمایش می‌دهند. با توجه به تابع عضویت $\tilde{A} + \tilde{B}$ ، پاسخ سؤال اول مثبت است. مجموعه‌ی α -برش

$(A+B)_\alpha$ به ازای چند α خاص در زیر آمده است:

$$(A+B)_\alpha = \begin{cases} [1/2, 6/8] & \alpha = 0/3 \\ [2/8, 5/2] & \alpha = 0/7 \\ 4 & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \Rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x-1}\right)^2} \geq \alpha \Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 \leq \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 \leq \frac{1-\alpha}{\alpha} \Rightarrow (x-1)^2 \geq \frac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow |x-1| \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

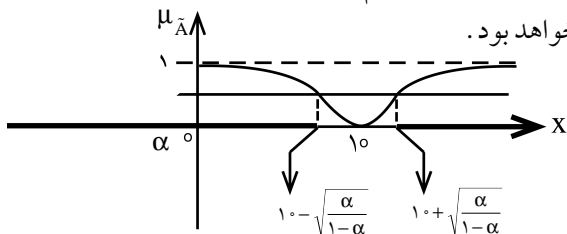
$$\text{یا } x-1 \leq -\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x \leq 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x-1 \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow x-1 \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \text{ یا } x \leq 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x \leq 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

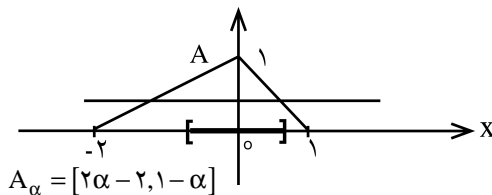
$$\text{یا } x \geq 1 + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow A_\alpha = (-\infty, 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}] \cup [1 + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, +\infty)$$

نمودار زیر توصیفی از تابع عضویت \tilde{A} و $-\alpha$ برش آن است. ملاحظه می‌کنیم، A_α محدب نیست، لذا \tilde{A} محدب نخواهد بود.



این عدد فازی می‌تواند بیانگر مفهوم فازی خیلی دور از 1 باشد. مجموعه‌ی $-\alpha$ برش قسمت دوم محدب است. بنابراین \tilde{B} محدب است. سؤال سوم مشابه سؤال حل شده در مقاله‌ی قبل حل می‌شود. در مورد سؤال چهارم، به شکل زیر توجه کنید که $\mu_{\tilde{A}}$ را نمایش می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم که \tilde{A} یک عدد فازی نه مثبت و نه منفی است. این عدد فازی توصیفی از تقریباً 1 را ارائه می‌دهد.



پاورقی.

1. Zimmermann

منابع

1. شوندی، حسن. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و کاربرد آن در مهندسی صنایع و مدیریت. انتشارات گسترش علوم پایه. چاپ اول. 1385.
2. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش نگار. چاپ اول. 1386.
3. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, theory and applications, G. J. Klir and B. Yuan, Prentice Hall of India, 1995.

ولی پاسخ سؤال دوم منفی است. رابطه‌ی فوق صحیح نیست. علت اصلی برقرار نبودن این رابطه از تعریف تفریق دو بازه‌ی حقیقی ناشی می‌شود. در مثال فوق، مجموعه‌ی $-\alpha$ برش عدد فازی «تقریباً 1- تقریباً 3» عبارت است از قرینه‌ی مجموعه‌ی $-\alpha$ برش عدد فازی «تقریباً 3- تقریباً 1»؛ یعنی قرینه‌ی بازه‌ی $[\alpha - 2, 2 - \alpha]$.

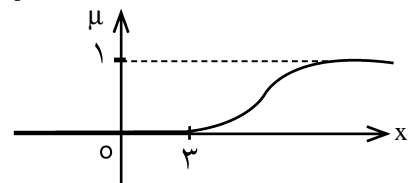
بنابراین: $0 < \alpha \leq 1$ و $A_\alpha = [4\alpha - 2, 2 - 4\alpha]$ (تقریباً 1- تقریباً 3) جمع حال این بازه با بازه‌ی $A_\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$ (تقریباً 1) می‌شود. بنابراین:

$0 < \alpha \leq 1$ و $A_\alpha = [6\alpha - 3, 9 - 6\alpha]$ (تقریباً 1- تقریباً 3) مجموعه‌ی $-\alpha$ برش حاصل با مجموعه‌ی $-\alpha$ برش عدد فازی تقریباً 3، یعنی B_α متفاوت است.

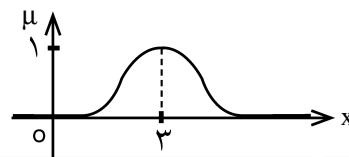
در انتها چگونگی حل تمرین‌هایی را که در مقاله‌ی قبل مطرح شدند، شرح می‌دهیم.

در سؤال اول، تابع عضویت قسمت الف می‌تواند به صورت $\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-(x-3)^2}$ معرفی شود. قسمت ب معرف یک عدد فازی دوزنقه‌ای یا یک بازه‌ی فازی با هسته‌ی $[1, 3]$ است که می‌توانید آن را در رابطه‌ی کلی ارائه شده برای تابع عضویت این نوع از اعداد فازی جای گذاری کنید. تابع عضویت برای قسمت ج سؤال را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x-3}\right)^2} & x > 3 \\ 0 & x \leq 3 \end{cases}$$



1) نمودار تابع عضویت \tilde{C}



2) نمودار تابع عضویت \tilde{A}

به منظور بررسی محدب بودن \tilde{A} در سؤال 2، به این صورت عمل می‌کنم (در صورت سؤال، توان 2 در مخرج کسر تایپ نشده است که در این حل اصلاح گردیده است):

قضیه‌ی تقسیمی

اشاره:

در این قسمت و با بیان خواص رابطه‌ی بخش پذیری (عاد کردن) روی Z در دو قسمت قبل، به بررسی قضیه‌ی تقسیم و نتایج حاصل از آن می‌پردازیم:

برهان: فرض کنیم

$$a = bq + r$$

صحیح و دل‌خواه a بر عدد

طبیعی b باشد و q خارج

قسمت r باقی‌مانده. در این

صورت داریم:

$$a = bq + r$$

$$\Rightarrow ka = k(bq) + kr$$

$$\Rightarrow ka = (kb)q + kr$$

واضح است که q خارج قسمت تقسیم ka

بر kb است و kr باقی‌مانده.

$$(\circ \leq r < b \Rightarrow \circ \leq kr < kb)$$

تذکره: لم ۱ در حالتی که مقسوم و مقسوم‌علیه بر

k بخش پذیر باشند و نیز برای تقسیم آن‌ها بر k ،

برقرار است (به عنوان تمرین ثابت کنید.)

لم ۲: اگر در یک تقسیم k برابر مقسوم‌علیه را به مقسوم اضافه

کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، در این صورت خارج قسمت

با عدد k جمع می‌شود و باقی‌مانده تغییر نمی‌کند.

برهان: فرض کنیم $a = bq + r$. در این صورت:

$$a = bq + r \Rightarrow a + kb = bq + kb + r$$

$$\Rightarrow (a + kb) = \underbrace{b(q + k)}_q + r$$

قضیه‌ی تقسیم: به ازای هر عدد

صحیح مانند a و هر عدد طبیعی مانند b ، همواره

دو عدد صحیح و منحصر به فرد مانند r و q یافت

می‌شوند، به قسمی که $a = bq + r$ و $\circ \leq r < b$.

اثبات قضیه‌ی تقسیم را با روشی بیان می‌کنیم که تا حدی

با روش اثبات در کتاب درسی متفاوت است:

برهان: دنباله‌ی اعداد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\dots, -3b, -2b, -b, \circ, b, 2b, 3b, \dots$$

واضح است که هر عدد صحیح مانند a ، همواره بین دو عضو

متوالی از این دنباله قرار خواهد گرفت! یعنی عددی صحیح مانند

q یافت می‌شود، به قسمی که $qb \leq a < (q+1)b$. با اضافه

کردن $-qb$ به طرفین نابرابری خواهیم داشت: $\circ \leq a - qb < b$

که اگر فرض کنیم $r = a - bq$ ، در این صورت داریم:

$$a = bq + r \quad \text{بنابراین قسمت اول قضیه‌ی یعنی وجود } r \text{ و } q \text{ در}$$

Z که در رابطه‌های $a = bq + r$ و $\circ \leq r < b$ صدق کنند، به اثبات

رسید. اثبات یکتایی r و q همان اثبات کتاب درسی است!

توجه: از این به بعد در مسائل، a را مقسوم، b را

مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

بیان و اثبات چند قضیه‌ی مقدماتی (لم)

لم ۱: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه را در عددی

ضرب کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم در آن عدد ضرب می‌شود و

خارج قسمت تغییر نمی‌کند.

یک مطلب جالب!

در هر تقسیم، تعداد ارقام خارج قسمت برابر است با حداقل تعداد صفرهایی که باید در جلوی مقسوم علیه قرار دهیم تا عدد حاصل از مقسوم بزرگ تر شود.

مثال: در تقسیم ۷۶ بر ۶، خارج قسمت دو رقمی است، زیرا اگر حداقل دو صفر جلوی ۶ قرار دهیم، در این صورت حاصل یعنی ۶۰۰ از ۷۶ بزرگ تر می شود. در صورتی که خارج قسمت تقسیم ۷۶ بر ۸، یک رقمی است. زیرا با قراردادن تنها یک صفر جلوی ۸، عدد حاصل از ۷۶ بزرگ تر می شود.

لم ۴: بزرگ ترین عددی که می توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند (با ثابت ماندن مقسوم علیه) برابر است با $(b - r - 1)$.

برهان: اگر به طرفین رابطه ی $a = bq + r$ عدد n را اضافه کنیم، خواهیم داشت $a + n = bq + n + r$. حال اگر $(a + n)$ را مقسوم و b را همان مقسوم علیه و q را خارج قسمت فرض کنیم و $r' = (n + r)$ باقی مانده باشد، باید $n + 1 < b - 1$ یا $n < b - 1$ باشد که حداقل مقدار برای آن $n = b - r - 1$ است.

لم ۵: در تقسیم $a = bq + r$ حداکثر $\left[\frac{r}{q}\right]$ واحد می توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند.

برهان: $a = bq + r \Rightarrow a = (b + x)q + r'$
 $\Rightarrow bq + r = (b + x)q + r' \Rightarrow r' = r - xq, r' \geq 0$
 $\Rightarrow r - xq \geq 0 \Rightarrow xq \leq r \Rightarrow x \leq \frac{r}{q} \Rightarrow x_{\max} = \left[\frac{r}{q}\right]$

لم ۳: برای به دست آوردن خارج قسمت تقسیم یک عدد بر حاصل ضرب چند عدد، کافی است آن عدد را بر یکی از عامل های ضرب، تقسیم کنیم. خارج قسمت حاصل را هم بر یکی دیگر از عوامل تقسیم کنیم و این عمل را ادامه دهیم تا آخرین عامل ضرب که آخرین خارج قسمت همان خارج قسمت مطلوب است.

فرض کنیم می خواهیم خارج قسمت ۴۵۰ را بر $7 \times 3 \times 5$ بیابیم.

$$450 = 5 \times 90, 90 = 3 \times 30, 30 = 7 \times 4 + 2 \Rightarrow q = 4$$

$$450 = (7 \times 3 \times 5) \times 4 + 30 \Rightarrow q' = 4$$

(مشاهده می کنید که $q = q' = 4$)

برهان: لم ۳ را در حالت تقسیم عدد a بر bc بررسی می کنیم. برای حالتی که a بر حاصل ضرب n عدد تقسیم شود نیز به طریق مشابه می توان عمل کرد:

$$(1) \quad a = bq + r, 0 \leq r < b$$

$$(2) \quad q = cq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < c$$

می کنیم

اگر q را از رابطه ی ۲ در رابطه ی ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$a = b(cq_1 + r_1) + r \Rightarrow a = bcq_1 + (br_1 + r)$$

حال کافی است ثابت کنیم: $br_1 + r_1 < bc$. در این صورت

حکم به دست می آید و q_1 یعنی آخرین خارج قسمت، همان خارج قسمت مطلوب است.

$$r < b \Rightarrow r \leq b - 1$$

$$r_1 < c \Rightarrow r_1 \leq c - 1 \Rightarrow br_1 \leq bc - b$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین نامساوی}} r + br_1 \leq (b - 1) + (bc - b) \Rightarrow br_1 + r \leq bc - 1$$

$$\Rightarrow br_1 + r < bc$$



مسئله ی ۱: در یک تقسیم، اگر ۴۱ واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم علیه را تغییر ندهیم، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه و از باقی مانده ۴ واحد کم می شود. مقسوم علیه را بیابید.

حل: فرض $a = bq + r$
 $a + 41 = b(q + 5) + r - 4 \Rightarrow a + 41 = \underbrace{bq + r}_a + 5b - 4$
 $\Rightarrow 5b = 45 \Rightarrow b = 9$





حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} a = 25q_1 + 19 \\ b = 25q_2 + 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \times 25q_1 + 57 \\ 5b = 5 \times 25q_2 + 85 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a - 5b = 25(3q_1 - 5q_2) + 57 - 85 = 25q - 28$$

$$\Rightarrow (3a - 5b) = 25q - 28 = 25q - 50 + 22 = 25(q - 2) + 22$$

$$\Rightarrow (3a - 5b) = 25q' + 22 \Rightarrow \text{باقیمانده} = r = 22$$

(توجه دارید که باقی مانده‌ی هر تقسیمی، همواره عددی نامنفی است.)

مسئله‌ی ۶: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح k بخش پذیر باشند، ثابت کنید همواره باقی مانده‌ی تقسیم نیز بر k بخش پذیر خواهد بود.

حل: روش اول:

$$a = bq + r, \quad k|a, \quad k|b \Rightarrow a = kq_1, \quad b = kq_2$$

$$\Rightarrow kq_1 = (kq_2)q + r \Rightarrow r = k(q_1 - q_2q) \Rightarrow k|r$$

روش دوم:

$$\left. \begin{matrix} k|a \\ k|b \end{matrix} \right\} \Rightarrow k|a - bq \Rightarrow a|r$$

مسئله‌ی ۷: باقی مانده‌های تقسیم عدد a بر دو عدد 7 و 8 به ترتیب 5 و 6 هستند، باقی مانده‌ی تقسیم a بر 56 را بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a = 7q_1 + 5 \\ b = 8q_2 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda a = 56q_1 + 40 \\ \gamma b = 56q_2 + 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\lambda a - \gamma b) = 56(q_1 - q_2) + (40 - 42)$$

$$\Rightarrow a = 56q - 2 \Rightarrow r = 54$$

(برای یافتن $r = 54$ مانند مسئله‌ی ۵ عمل کنید.)

مسئله‌ی ۸: باقی مانده‌های تقسیم عدد a بر دو عدد 5 و 7 ، به ترتیب 3 و 5 هستند، باقی مانده‌ی تقسیم a را بر 35 بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} 14a = 5q_1 + 3 \\ 15q = 7q_2 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14a = 14 \times 5q_1 + 42 \\ 15a = 15 \times 7q_2 + 75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (15a - 14a) = 35(3q_2 - 2q_1) + 33 \Rightarrow r = 33$$

(توجه دارید که برای ضرب در هر تساوی اعدادی متوالی لازم داریم که یکی عامل 7 و دیگری عامل 5 داشته باشد که 14 و 15 واجد این شرایط هستند.)

مسئله‌ی ۹: باقی مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی a بر 29 برابر با 12

مسئله‌ی ۲: چه تعداد عدد طبیعی مانند a یافت می شود که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر 198 ، از سه برابر مربع خارج قسمت 4 واحد کمتر باشد (بزرگ ترین آن ها کدام است)؟

حل: طبق قضیه‌ی تقسیم، اگر q را خارج قسمت و r را باقی مانده فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$a = 198q + r, \quad r < 198, \quad r = 3q^2 - 4$$

$$\Rightarrow 3q^2 - 4 < 198 \Rightarrow 3q^2 < 202 \Rightarrow q^2 < \frac{202}{3}$$

$$\Rightarrow q^2 \leq \left\lfloor \frac{202}{3} \right\rfloor = 67 \Rightarrow q \leq \left\lfloor \sqrt{67} \right\rfloor \Rightarrow q \leq 8$$

$$\text{اگر } \begin{cases} q = 0 \Rightarrow r = -4 \\ q = 1 \Rightarrow r = -1 \end{cases} \Rightarrow q \neq 0, 1, \quad 2 \leq q \leq 8$$

بنابراین برای q ، هفت مقدار وجود دارد که به ازای $q = 8$ بزرگ ترین مقدار برای a به دست می آید.

$$q = 8 \Rightarrow r = 3 \times 8^2 - 4 = 188, \quad a = 198 \times 8 + 188 = 1772$$

مسئله‌ی ۳: در یک تقسیم، مقسوم علیه 8 و باقی مانده 5 است. اگر 32 واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم علیه را تغییر ندهیم، خارج قسمت چه تغییری می کند و باقی مانده چه عددی است؟

حل: طبق لم ۲، چون چهار برابر مقسوم علیه با مقسوم جمع شده است، خارج قسمت با عدد 4 جمع می شود و خارج قسمت جدید به دست می آید. باقی مانده تغییر نمی کند و همان عدد 5 است.

مسئله‌ی ۴: در یک تقسیم، مقسوم 12 برابر باقی مانده است و باقی مانده 2 واحد از حداکثر مقدار خود کمتر است. اجزای این تقسیم را به دست آورید.

حل: طبق فرض مسئله، اگر $a = bq + r$ ، در این صورت $a = 12r$ و $a = b - 1 - 2$.

$$a = bq + r \Rightarrow 12r = bq + r \Rightarrow 12(b - 3) = bq + b - 3$$

$$\Rightarrow 12b - 36 = bq + b - 3 \Rightarrow 11b - bq = 33$$

$$\Rightarrow b(11 - q) = 3 \times 11 \Rightarrow \begin{cases} b = 11 \Rightarrow r = b - 3 = 11 - 3 = 8 \\ 11 - q = 3 \Rightarrow q = 8 \end{cases}$$

$a = 12r \Rightarrow a = 12 \times 8 = 96$
(توجه دارید که اگر $11 - q = 11$ ، در این صورت $q = 0$ که نتیجه می دهد $a = 0$. در این صورت عددی طبیعی به دست نمی آید.)

مسئله‌ی ۵: اگر باقی مانده‌های تقسیم a و b بر 25 به ترتیب 19 و 17 باشند، باقی مانده‌ی تقسیم $(3a - 5b)$ را بر 25 بیابید.



حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$a = bq + r, \quad a - q = (b - q)q + r + 20$$

$$\Rightarrow a - q = bq - q^2 + r + 20$$

$$\begin{aligned} a = bq + r \\ \Rightarrow bq + r - q = bq - q^2 + r + 20 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -q^2 + q + 20 = 0 \Rightarrow (q - 5)(q + 4) = 0$$

$$\Rightarrow q = 5 \text{ یا } q = -4$$

مسئله ۱۴: چند عدد طبیعی بین ۷۰۰ و ۱۱۰۰ وجود دارد

که اگر آن‌ها را بر ۱۴۳ تقسیم کنیم، باقی مانده‌ی تقسیم خارج قسمت آن، مساوی باشند؟

حل: اگر عدد مورد نظر را a فرض کنیم، داریم:

$$700 < a < 1100 \text{ و } 700 < a = 143q + r \text{ و } r = q \text{ . بنابراین}$$

می‌توان نوشت:

$$700 < 143q + q < 1100 \Rightarrow 700 < 144q < 1100$$

$$\Rightarrow 4/86 < q < 7/63$$

$$q \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 5 \leq q \leq 7 \Rightarrow q = 5 \text{ یا } q = 6 \text{ یا } q = 7$$

بنابراین سه عدد طبیعی وجود دارد.

مسئله ۱۵: مجموعه ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی را بیابید

که مضرب ۱۳ و مربع آن نیز بر ۳۱۵ بخش پذیر باشد.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$n = 13k, \quad 315 | n^2, \quad 315 = 3^2 \times 5 \times 7$$

$$315 | n^2 \Rightarrow \frac{n^2}{315} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2}{3^2 \times 5 \times 7} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{169k^2}{3^2 \times 5 \times 7} \in \mathbb{Z}$$

۱۶۹ فقط عامل ۱۳ دارد

$$\Rightarrow k_{\min} = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 13 \times 105 = 1365$$

$$\text{مجموع ارقام} = 1 + 3 + 6 + 5 = 15$$

مسئله ۱۶: مجموع سه عدد ۷۱ است. اگر اولی را بر دومی

تقسیم کنیم، خارج قسمت ۲ و باقی مانده ۱ می‌شود و اگر

سومی را بر دومی تقسیم کنیم، خارج قسمت ۳ و باقی مانده ۴

می‌شود. این سه عدد را بیابید.

حل: اگر عدد اول را a ، دومی را b و سومی را c فرض

کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a + b + c = 71 \\ a = 2b + 1 \\ c = 3b + 4 \end{cases} \Rightarrow (2b + 1) + b + (3b + 4) = 71$$

$$\Rightarrow 6b = 66 \Rightarrow b = 11 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \times 11 + 1 = 23 \\ c = 3 \times 11 + 4 = 37 \end{cases}$$

و $a + 17 = 21q$ است. در این صورت کمترین مقدار را برای a بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a = 29q + 12 \\ a + 17 = 21q' \end{cases} \Rightarrow 29q + 12 = 21q' - 17$$

$$\Rightarrow 21q' = 29q + 12 + 17 = 29q + 29 = 29(q + 1) \quad (q_1 \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 21q' = 29q_1 \Rightarrow \frac{21}{29} = \frac{q_1}{q'} \Rightarrow q_1 = 21, \quad q' = 29$$

از طرف دیگر:

$$a + 17 = 21q' \Rightarrow a = 21q' - 17 = 21 \times 29 - 17 = 592$$

مسئله ۱۰: اگر a عددی صحیح و فرد باشد، به طوری که

باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۲۵، عدد ۱۷ باشد، باقی مانده‌ی

تقسیم عدد $\frac{a+3}{2}$ بر ۲۵ را بیابید.

حل: طبق فرض داریم: $a = 25q + 17$ و چون a فرد

است. پس باید q عددی زوج باشد (چرا؟) بنابراین داریم:

$$q = 2k \Rightarrow a = 25 \times 2k + 17 \Rightarrow a + 3 = 25 \times 2k + 17 + 3$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{2} = 25k + \frac{20}{2} \Rightarrow \frac{a+3}{2} = 25k + 10 \Rightarrow r = 10$$

مسئله ۱۱: در یک تقسیم، مقسوم ۵۲۵ و باقی مانده ۲۵

است. اگر مقسوم علیه، مجذور دو برابر خارج قسمت باشد،

خارج قسمت را بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$525 = bq + 25, \quad b = (2q)^2 = 4q^2$$

$$\Rightarrow 525 = 4q^2 \times q + 25 \Rightarrow 4q^3 = 500 \Rightarrow q^3 = 125 \Rightarrow q = 5$$

مسئله ۱۲: اگر a و b اعداد طبیعی و $b \neq 1$ باشد و

باقی مانده‌ی تقسیم a بر b را r بنامیم، باقی مانده‌ی تقسیم $-a$

بر $-b$ را بیابید.

حل: طبق فرض مسئله و قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b \Rightarrow b - r > 0$$

$$-a = -bq - r \Rightarrow -a = -bq - r + \underline{b - b}$$

$$\Rightarrow -a = -b(q + 1) + b - r$$

اگر فرض کنیم: $r' = b - r$ ، دیدیم که $b - r > 0$

واضح است که $b - r < |b|$. بنابراین باقی مانده‌ی تقسیم $-a$

بر $-b$ عدد $(b - r)$ است.

مسئله ۱۳: اگر در یک تقسیم، خارج قسمت را از مقسوم

و مقسوم علیه کم کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند و ۲۰

واحد به باقی مانده اضافه می‌شود. خارج قسمت را بیابید.

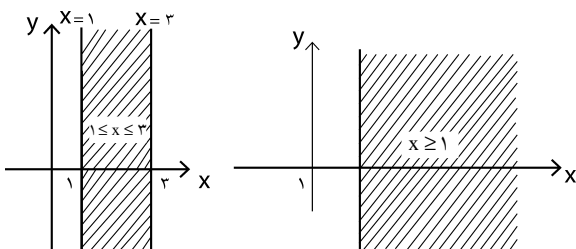
اشاره:

در این مقاله می‌کوشیم، با استفاده از دانسته‌ها و توانایی‌های شما درباره‌ی حل معادله‌ها و نامعادله‌های یک یا دو متغیره، نوعی سرگرمی آموزشی ارائه کنیم که با انجام آن، مهارتتان در رسم نمودار این‌گونه رابطه‌ها تقویت شود. در کلاس‌های درس، معمولاً معادله‌ها یا نامعادله‌ها را می‌دهند و از شما می‌خواهند نمودار آن‌ها را رسم کنید. ما در این جا علاوه بر این کار، قصد داریم به صورت عکس هم عمل کنیم؛ یعنی نمودار را به شما می‌دهیم و می‌خواهیم که معادله یا نامعادله‌ی مربوط به آن را بنویسید.

به این منظور، با استفاده از رابطه‌های (معادله‌ها و نامعادله‌ها) ریاضی حرف‌های یک کلمه را طراحی می‌کنیم. برای نمونه، شما می‌توانید نام خود را روی یک کاغذ شطرنجی به شکل دل‌خواه طراحی کنید؛ سپس برای هر قطعه از حروف کلمه‌ی نام خود، رابطه‌های ریاضی را بنویسید. وقتی تمام رابطه‌های ریاضی را برای حرف‌های نامتان نوشتید، آن‌گاه دستگاهی از معادله‌ها و نامعادله‌ها را خواهید داشت که با رسم آن‌ها، طراحی نامتان را خواهید دید.

طراحی با رابطه‌های ریاضی

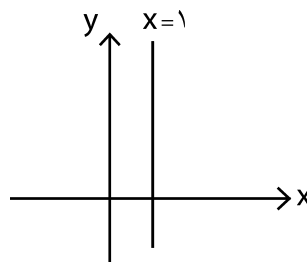
در زیر، مجموعه جواب نامعادله‌های $x \geq 1$ و $1 \leq x \leq 3$ را رسم کرده‌ایم:



نمودار ۴

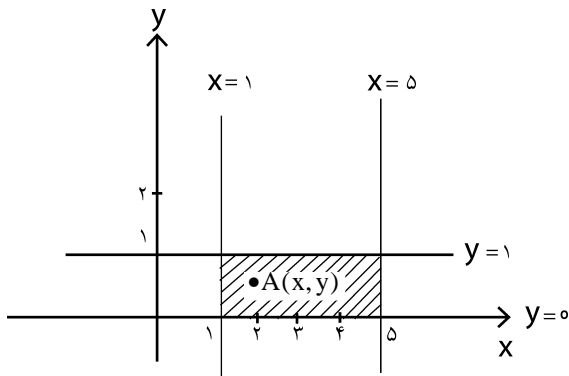
نمودار ۳

تا کنون در دوره‌ی متوسطه با رسم معادله‌ها و نامعادله‌های جبری آشنا شده‌اید. برای نمونه می‌دانید که نمودار معادله‌ی $x = 1$ ، خطی موازی محور y ‌هاست (نمودار ۱).



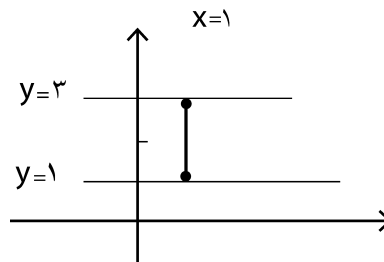
نمودار ۱

با اطلاعات به دست آمده، نامعادله‌هایی را بنویسید که مجموعه جواب آن‌ها سطح مستطیل شکل زیر باشد.

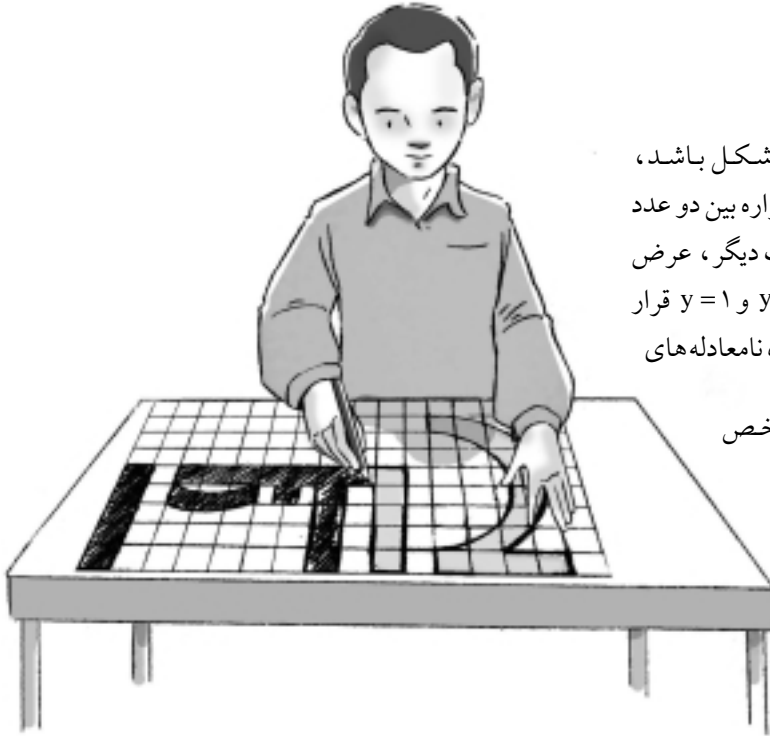


نمودار ۵

چنان‌که نمودار معادله‌ی $x = 1$ را با شرط $1 \leq y \leq 3$ رسم کنیم، یک پاره‌خط موازی محور y ‌ها به دست می‌آید (نمودار ۲).



نمودار ۲

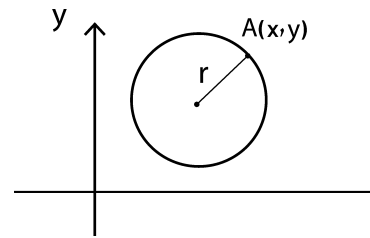


اگر $A(x, y)$ نقطه‌ای از سطح مستطیل شکل باشد، ملاحظه می‌کنید که طول این نقطه، یعنی x همواره بین دو عدد ۱ و ۵ قرار دارد؛ بنابراین: $1 \leq x \leq 5$. از طرف دیگر، عرض این نقطه یعنی y بین دو خط به معادله‌های $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد؛ پس: $0 \leq y \leq 1$. در نتیجه، نمودار دستگاه نامعادله‌های

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

می‌کند.

معادله $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ مجموعه نقاط روی یک دایره به مرکز $S(\alpha, \beta)$ و شعاع r را مشخص می‌کند. زیرا فاصله‌ی نقطه‌ی S مرکز دایره تا نقطه‌ی $A(x, y)$ روی دایره، همواره برابر با r است (نمودار ۶).



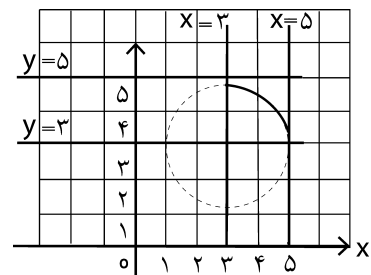
نمودار ۶

نامعادله‌های زیر به ترتیب مجموعه نقاط درون و برون دایره به مرکز $S(\alpha, \beta)$ و شعاع r را مشخص می‌کنند.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 > r^2$$

با توجه به مطالب گفته شده، سعی کنید رابطه‌ی بنویسید که مجموعه جواب آن، نقاط روی ربع دایره به صورت زیر باشد.



نمودار ۷

با توجه به نمودار، ملاحظه می‌کنیم که این ربع دایره، قسمتی از دایره‌ی به مرکز $S(3, 3)$ و شعاع $r = 2$ است. بنابراین، معادله‌ی این دایره به صورت زیر است:

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

اما این ربع دایره بین دو خط به معادله‌های $y = 3$ و $y = 5$ قرار دارد. بنابراین دستگاه زیر می‌تواند بیان‌کننده‌ی این نمودار باشد.

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ 3 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

از طرف دیگر ملاحظه می‌کنیم که این ربع دایره بین دو خط $x = 3$ و $x = 5$ نیز قرار دارد. بنابراین نمودار دستگاه زیر مشخص‌کننده‌ی این ربع دایره است:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ 3 \leq y \leq 5 \\ 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

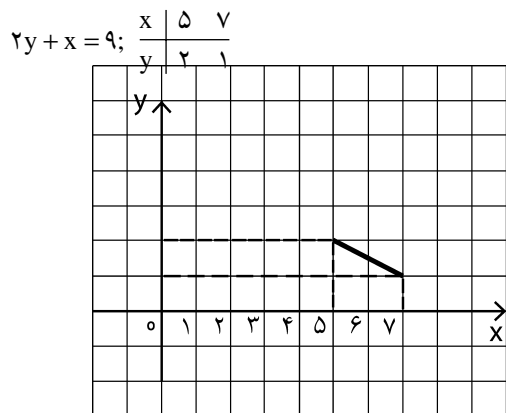
(برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی رسم نامعادله‌ها می‌توانید به مجله‌ی ریاضی رشد بهران متوسطه، شماره‌ی ۶۱، بهار ۱۳۸۸ مراجعه کنید.)

طرح ۱. نمودار رابطه‌های زیر را در یک دستگاه مختصات

رسم کنید.

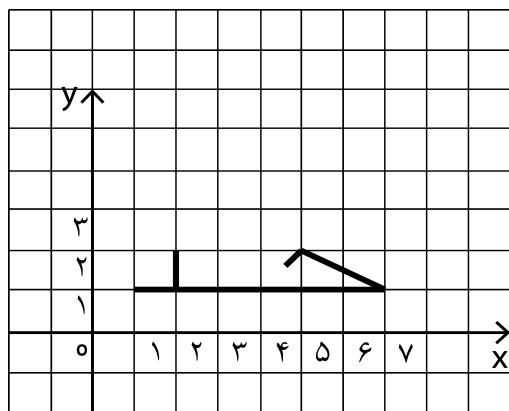
$$\begin{cases} y = 1; 1 \leq x \leq 7 & (1) \\ x = 2; 1 \leq y \leq 2 & (2) \\ y = x - 3; 4/5 \leq x \leq 5 & (3) \\ 2y + x = 9; 5 \leq x \leq 7 & (4) \end{cases}$$

رابطه‌ی «۴» قسمتی از خط به معادله‌ی $2y + x = 9$ است که مختص x آن‌ها بین ۵ و ۷ است (نمودار ۱۱).



نمودار ۱۱

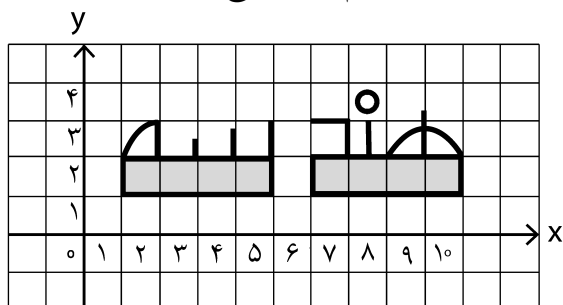
اکنون نمودارهای ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



نمودار ۱۲

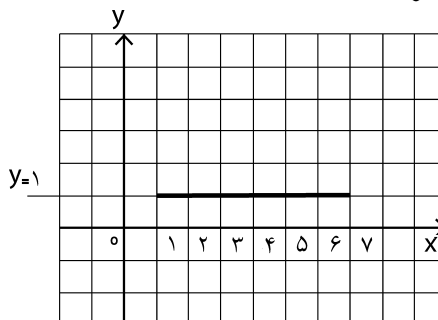
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با رسم نمودار رابطه‌ها، کلمه‌ی «حد» را طراحی کرده‌ایم (مفهوم حد در کتاب‌های ریاضی سال سوم متوسطه آمده است).

طرح ۲. روی کاغذ شطرنجی، کلمه‌ی هندسه را به این صورت طراحی کرده‌ایم (نمودار ۱۳). رابطه‌هایی جبری بنویسید که پس از رسم آن‌ها، طرح زیر به دست آید.



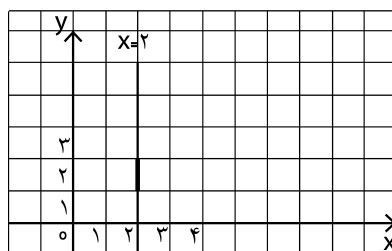
نمودار ۱۳

رابطه‌ی «۱» پاره‌خطی موازی محور x ‌ها است. برای رسم نمودار آن، ابتدا خط به معادله‌ی $y = 1$ را رسم می‌کنیم. سپس قطعه‌ای از آن را که مختص x بین ۱ و ۷ است، جدا می‌کنیم. (نمودار ۸)



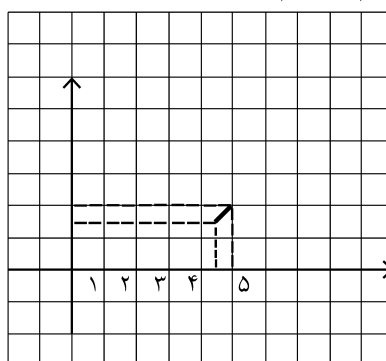
نمودار ۸

رابطه‌ی «۲» پاره‌خطی موازی محور y ‌ها است که طول آن برابر یک واحد است (نمودار ۹).



نمودار ۹

رابطه‌ی «۳» قسمتی از خط به معادله‌ی $y = x - 3$ است که مختص x آن‌ها بین $4/5$ و ۵ است. برای رسم این پاره‌خط در معادله‌ی $y = x - 3$ یک بار $x = 4/5$ را قرار می‌دهیم و مقدار y را می‌یابیم. بار دیگر $x = 5$ را قرار می‌دهیم و y را پیدا می‌کنیم. سپس به کمک دو نقطه‌ی ابتدا و انتهای پاره‌خط، نمودار آن را رسم می‌کنیم (نمودار ۱۰).



$$y = x - 3; \begin{array}{l|l} x & 4/5 & 5 \\ \hline y & 1/5 & 2 \end{array}$$

نمودار ۱۰

هم چنین پاره خط‌هایی که نمایش حرف «س» را طراحی می‌کند، موازی محور y ها و معادله‌هایشان چنین‌اند:

$$\begin{cases} x = 5 & ; 2 \leq y \leq 3 \\ x = 4 & ; 2 \leq y \leq 2\frac{3}{4} \\ x = 3 & ; 2 \leq y \leq 2\frac{1}{4} \end{cases} \quad (8)$$

و اما آخرین دستگاهی که مشخص‌کننده‌ی حرف «ه» آخر در کلمه‌ی هندسه است، از یک ربع دایره و پاره خط تشکیل شده است. ربع دایره، قسمتی از دایره به مرکز $(2, 2)$ و شعاع یک است که بین دو خط افقی $y = 2$ و $y = 3$ و هم چنین بین دو خط عمودی $x = 1$ و $x = 2$ قرار دارد. پاره خط به کار رفته در حرف «ه»، موازی محور y است و بین دو خط $y = 2$ و $y = 3$ قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ 1 \leq x \leq 2 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad (9)$$

$x = 2$; $2 \leq y \leq 3$ (10)
اکنون اگر معادله‌ها و نامعادله‌های نوشته شده از رابطه‌های ۳ تا ۱۰ را در یک دستگاه بنویسیم، نمودار این دستگاه، واژه‌ی هندسه را طراحی می‌کند.

از آن‌جا که رهبر معظم انقلاب اسلامی امسال را با عنوان «اصلاح الگوی مصرف» نام‌گذاری کرده است، با رابطه‌های ریاضی، عبارت «اصلاح الگوی مصرف» را با قلم (فونت) دل‌خواه طراحی کنید و معادله‌ها و نامعادله‌های مربوط به آن را بنویسید و برای ما بفرستید. هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد برهان متوسطه، پس از بررسی آثار رسیده، بهترین‌ها را در مجله به چاپ می‌رساند و برای طراحان آن‌ها جوایز ویژه‌ای ارسال خواهد کرد.

بعد از طراحی این عبارت و نوشتن رابطه‌های ریاضی مربوط به آن، متوجه خواهید شد که طراحی این عبارت به صرف وقت و نوشتن رابطه‌های ریاضی آن به ظرافت و دقت خاصی نیاز دارد. پس متناظر با آن هم‌اکنون فکر کنید و با مدتی صرف وقت، طوری برنامه‌های زندگی و درسی خود را تدوین کنید که این امر در زندگی روزمره‌ی شما محقق شوند.

در این طراحی دو سطح مستطیل شکل وجود دارد: یکی زیر «هند» که رابطه‌ی آن مطابق نمودار ۵ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (1)$$

و دیگری سطح مستطیل شکل زیر «سه» که به طور مشابه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (2)$$

رابطه‌های ۱ و ۲ را به طور خلاصه می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (3)$$

حرف «ه» در این طرح از یک نیم دایره و یک پاره خط تشکیل شده است. نیم دایره، قسمتی از یک دایره به مرکز $S(9, 2)$ و شعاع یک است که بین دو خط افقی $y = 2$ و $y = 3$ قرار دارد. بنابراین مشابه نمودار ۷ خواهیم داشت.

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad (4)$$

پاره خطی که در حرف «ه» وجود دارد، موازی محور y ها است که رابطه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = 9 \\ 2 \leq y \leq 3\frac{1}{3} \end{cases} \quad (5)$$

نقطه‌ی حرف «ن» دایره‌ای به مرکز $S'(7/5, 3/5)$ و شعاع $\frac{1}{4}$ است که رابطه‌ی آن به این صورت زیر است:

$$(x - 7/5)^2 + (y - 3/5)^2 = \frac{1}{16} \quad (6)$$

پاره خط‌هایی که مشخص‌کننده‌ی دو حرف «ن» و «د» هستند، معادله‌هایشان به این صورت‌اند:

$$\begin{cases} x = 7/5; 2 \leq y \leq 3 \\ x = 7 & ; 2 \leq y \leq 3 \\ y = 3 & ; 6 \leq x \leq 7 \end{cases} \quad (7)$$

هم نهشتی

و کاربردهای آن

اشاره:

در قسمت قبل به بسیاری از کاربردهای هم نهشتی اشاره شد. در این شماره قصد داریم برخی از کاربردهای هم نهشتی را در حل مسئله‌های گوناگون و مطرح در المپیادهای ریاضی مورد کنکاش قرار دهیم تا قوت مطلب از این جنبه نیز نشان داده شود. بنابراین، ابتدا به حل تعدادی از مسئله‌های المپیادهای کشورهای متفاوت که در رابطه با موضوع هستند، می‌پردازیم و سپس تمرین‌هایی نظیر مسئله‌های حل شده ارائه می‌دهیم که با توجه به مثال‌ها می‌توانید آن‌ها را حل کنید.

حل مسئله‌هایی از المپیادهای کشورهای گوناگون به کمک هم نهشتی

مسئله ۱. اگر A مجموع ارقام عدد $N = ۴۴۴۴۴۴۴۴$ و B مجموع ارقام A باشد، مجموع ارقام B را تعیین کنید (هفدهمین IMO، ۱۹۷۵).

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که مجموع ارقام B بسیار کوچک است:

$$N = ۴۴۴۴۴۴۴۴ < ۱۰۰۰۰۰۵۰۰۰ = ۱۰^۲۰۰۰۰$$

N کوچک‌تر از یک عدد ۲۰۰۰۰ رقمی است. اگر همه‌ی ارقام را ۹ در نظر بگیریم:

$$A < ۹ \times ۲۰۰۰۰ = ۱۸۰۰۰۰$$

عددی کوچک‌تر از ۱۸۰۰۰۰ که دارای بزرگ‌ترین مجموع ارقام باشد، عدد ۱۷۹۹۹۹ است. پس:

$$B \leq ۴۴ = ۱ + ۷ + ۹ + ۹ + ۹ + ۹$$

در بین اعداد کوچک‌تر از ۴۴ عدد ۳۹ از نظر مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد است، بنابراین جواب مسئله عددی نا بیشتر از ۱۲ خواهد بود. از طرفی می‌دانیم هر عددی

با مجموع ارقامش به پیمانه‌ی ۹ هم نهشت است. بنابراین، عددی که مورد نظر است با N به پیمانه‌ی ۹ هم نهشت خواهد بود. از طرف دیگر:

$$N = ۴۴۴۴۴۴۴۴ \equiv ۷^{۹} \equiv (۷^۳)^{۳} \equiv ۱ \times ۷ \equiv ۷$$

پس با توجه به $۷^۳ \equiv ۱$ می‌توان نوشت:

$$N \equiv ۷$$

بنابراین، جواب مسئله عدد ۷ خواهد بود، زیرا تنها عددی است که کوچک‌تر از ۱۲ و با ۷ به پیمانه‌ی ۹ هم نهشت است. در واقع از ابتدا می‌توانستیم بنویسیم:

$$N = ۴۴۴۴۴۴۴۴ \equiv A \equiv B \leq ۱۲$$

و از هم نهشتی $N \equiv ۷$ و نامعادله‌ی $B \leq ۱۲$ ، به جواب بدیهی $B = ۷$ برسیم.

زیرا از این نکته استفاده کردیم که: «هر عددی با مجموع ارقامش به پیمانه‌ی ۹ هم نهشت است.»

مسئله ۲: رقم پنجم از سمت راست عدد $M = ۵۵۵۵۵$ را تعیین کنید (بخارست، ۱۹۸۶).



تمرین ۱. تمام زوج های صحیح مثبت (x, y) را بیابید که در معادله ی زیر صدق می کنند:

$$x^2 = y! + 2001$$

راهنمایی: برای y بزرگ تر از ۵، همواره $y!$ بر ۹ بخش پذیر است و طرف دوم معادله $(y! + 2001)$ به پیمانه ی ۹ باقی مانده ی ۳ را می دهد که بدیهی است از نوع باقی مانده ی درجه ی دوم نیست
($x = 45$, $y = 4$)

تمرین ۲. ثابت کنید که دستگاه معادله های زیر هیچ جواب صحیح غیر بدیهی ندارد.

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = z^2 \\ 6x^2 + y^2 = t^2 \end{cases}$$

راهنمایی: فرض می کنیم که دستگاه جوابی غیر صفر داشته باشد. با تقسیم کردن بر مقسوم علیه مشترک x, y, z و t می توانیم فرض کنیم که این چهار عدد هیچ مقسوم علیه مشترکی ندارند. از جمع دو معادله و کار به پیمانه ی ۷ به نتیجه برسید.

مسئله ی ۴: ثابت کنید که عدد $N = 1919$ را نمی توان به صورت مجموعی از یک مکعب کامل و توان چهارم کامل نوشت (بخارست، ۱۹۸۶).

حل: در واقع مسئله معادل این است که ثابت کنیم معادله ی زیر در مجموعه ی اعداد صحیح جواب ندارد:

$$x^3 + y^4 = 1919 \quad (1)$$

با توجه به قضیه ی فرما و برابری $3 \times 4 = 12$ ، معادله ی (۱) را به پیمانه ی ۱۳ در نظر می گیریم. چون ۱ یا $13 \equiv (x^3)^4$ ، در نتیجه: ۸ یا ۱ یا ۱۰ یا ۱۲ یا $13 \equiv x^3$.

از طرف دیگر داریم: ۹ یا ۳ یا ۱ یا $13 \equiv y^4$ (یعنی به پیمانه ی ۱۳، یک مکعب، باقی مانده های ۰، ۱، ۵، ۸ و ۱۲ و یک توان چهارم باقی مانده های ۰، ۱، ۳ و ۹ را خواهند داشت). به این ترتیب، مجموع یک مکعب و یک توان چهارم به پیمانه ی ۱۳ هم نهشت با ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ خواهد بود و عدد ۷ در این فهرست ظاهر نمی شود. هم چنین داریم:

$$1919 \equiv 1912 \times 1913 \equiv 13 \times 67 \equiv 67 \equiv 7$$

و چون: $1919 \equiv 7$ و $1919 \equiv 7$ ، در این جا اثبات کامل می شود.

تمرین ۳. تحقیق کنید که آیا می توان عدد $N = 1919$ را به صورت مجموعی از یک مکعب کامل، توان چهارم کامل و توان پنجم کامل نوشت؟

راهنمایی: واضح است که در واقع باید معادله ی $1919 = x^3 + y^4 + z^5$ را در Z از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنیم. با توجه به برابری $60 = 3 \times 4 \times 5$ ، کافی است معادله را به پیمانه ی ۶۱ در نظر بگیریم و مانند مسئله ی ۴ عمل کنیم (در میدان Z_{61} با مرتبه ی ۶۰).

مسئله ی ۵: اگر p عددی اول و w و n اعدادی صحیح باشند، به طوری که داشته باشیم: $2^p + 3^p = w^n$ ، ثابت کنید: $n = 1$ (ایرلند، ۱۹۹۶).

حل: در حالت $p = 2$ داریم: $2^2 + 3^2 = 13$ و $w^n = 13$ و برابری $n = 1$ بدیهی است. اگر $p > 2$ ، آن گاه p عددی فرد است؛ بنابراین:

$$2^p + 3^p = (2 + 3)(2^{p-1} - 2^{p-1} \times 3 + \dots + 3^{p-1});$$

$$5 \mid (2^p + 3^p)$$

پس در این حالت $5 \mid w$ و اگر $n > 1$ ، آن گاه: $25 \mid w^n$ ، بنابراین:

$$5 \mid (2^{p-1} - 2^{p-1} \times 3 + \dots + 3^{p-1}) = \frac{2^p + 3^p}{2 + 3} = \lambda$$

چون به ازای هر k داریم: $3^k \equiv (-2)^k$ ، پس می توان نوشت:

$$(-1)^k 2^{p-k-1} 3^k \equiv 2^{p-1}$$

با توجه به هم نهشتی بالا می توان نوشت:

$$\lambda = \frac{2^p + 3^p}{2 + 3} = 2^{p-1} - 2^{p-1} \times 3 + \dots$$

$$+ (-1)^k 2^{p-k-1} 3^k + \dots + 3^{p-1} \equiv (2^{p-1})p$$

بنابراین، λ با $p(2^{p-1})$ به پیمانه ی ۵ هم نهشت است، ولی $5 \mid p(2^{p-1})$ و این وقتی ممکن است که: $p = 5$. اما برای $p = 5$ داریم: $2^5 + 3^5 = 275$ و در این حالت نیز $n = 1$

تمرین ۴. مسئله‌ی ۵ را برای برابری‌های زیر تحقیق کنید:

(الف) $2^p + 1 = w^n$ (ب) $3^p + 4^p = w^n$

(ج) $3^p + 4^p + 5^p = w^n$ (د) $5^p + 6^p = w^n$

راهنمایی: تحقیق عدم درستی حکم برای (الف)،

(ب) و (ج) واضح است؛ به برابری‌های عددی

$$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2, \quad 2^3 + 1 = 9 = 3^2$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 216 = 6^3$$

است فقط برابری (د) را به طریق حل مسئله‌ی ۵

بررسی کنید.

مسئله‌ی ۶: تمام مقادیر ممکن برای مجموع

ارقام یک مربع کامل را مشخص کنید (آمریکا، ۱۹۹۵).

حل: می‌دانیم که «مجموع ارقام یک عدد به پیمانه‌ی ۹ با آن

عدد هم نهشت است».

بنابراین، یک مربع کامل باید به پیمانه‌ی ۹ با ۰ یا ۱ یا ۴ یا ۷

هم نهشت باشد. نشان می‌دهیم: هر عددی مثل N را که یک

باقی‌مانده‌ی درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۹ باشد، می‌توان به عنوان

مجموع ارقام یک مربع کامل محسوب کرد. حالت‌های $n = 1$

و $n = 4$ بدیهی هستند. بنابراین فرض می‌شود $n > 4$ و با این

فرض، اگر $n = 9m$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام

$$1 + 10^m - 1 = 10^m - 2 \times 10^m + 1$$

۴۰۰۰۰۰۰۰۹ خواهد بود. همچنین اگر $n = 9m + 4$ ، آن‌گاه

$$n$$
 مجموع ارقام $9 + 10^m - 6 \times 10^m + 1 = 10^m - 5$ است که

عددی به صورت ۹۰۰۰۰۰۰۰۹ خواهد بود. و سرانجام اگر

$$n = 9m - 2, \quad \text{آن‌گاه } n$$
 مجموع ارقام زیر است:

$$25 - 10^{m+1} + 10^{2m} = (10^m - 5)^2$$

که عددی به صورت ۲۵۰۰۰۰۰۰۰۹۰۰۰ خواهد بود.

مسئله‌ی ۷: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n \geq 1}$ به این صورت تعریف می‌شود:

a_n یک عدد گویای مثبت کوچک‌تر از $\sqrt{1998}$ است و اگر به

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}, \quad q_n \text{ و } p_n \text{ به هم اول}$$

باشد، آن‌گاه: $a_{n+1} = \frac{p_n + 5}{p_n q_n}$. ثابت کنید که برای هر n

$$\text{داریم: } a_n < \sqrt{1998} \quad (\text{IMO}, 1998).$$

حل: کافی است نشان دهیم که اگر: $\frac{p}{q} < \sqrt{1998}$ ،

$$\text{آن‌گاه: } \frac{p}{q} + \frac{5}{pq} < \sqrt{1998}$$

از فرض $\frac{p}{q} < \sqrt{1998}$ ، نتیجه می‌شود $(p, q > 0)$:

$$\frac{p^2}{q^2} < 1998; \quad p^2 < 1998q^2; \quad 1998q^2 - p^2 > 0$$

در نظر می‌گیریم: $n = 1998q^2 - p^2$ و نشان می‌دهیم که:

$$\{1, 2, \dots, 10\} \ni n, \text{ به طوری که اگر } n > 0, \text{ آن‌گاه: } n \geq 11.$$

با توجه به برابری $1998 = 2 \times 27 \times 37$:

$$n \equiv -p^2 \pmod{9} \equiv 0, -1, -4, -7$$

بنابراین: $n \neq 1, 3, 4, 6, 7, 10$. اکنون کافی است

$n = 2, 5, 8$ را منفی کنیم که به پیمانه‌ی ۳۷ این کار را انجام

می‌دهیم (قضیه فرما: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$):

$$n = 2, \quad p = 37: \quad 1 \equiv p^{36} \pmod{37} \equiv (p^2)^{18} \equiv (-2)^{18} \equiv 6^2 \pmod{37} \equiv -1$$

(تناقض)

$$n = 5, \quad p = 37: \quad 1 \equiv p^{36} \pmod{37} \equiv (p^2)^{18} \equiv (-5)^{18} \equiv 11^3 \pmod{37} \equiv -1$$

(تناقض)

$$n = 8, \quad p = 37: \quad 1 \equiv p^{36} \pmod{37} \equiv (p^2)^{18} \equiv (-8)^{18} \equiv (-10)^9 \pmod{37} \equiv -1$$

(تناقض)

بنابراین در این جا ثابت می‌شود: $n \geq 11$ ، به طوری که برای

$$p > 5$$

$$p^2(1998q^2) \geq p^2(p^2 + 11) = p^4 + 11p^2 = p^4 + 10p^2$$

$$+ p^2 > p^4 + 10p^2 + 25$$

پس می‌توان نوشت:

$$1998p^2q^2 > (p^2 + 5)^2$$

و یا:

$$\sqrt{1998} > \frac{p}{q} + \frac{5}{pq}$$

برای $p \leq 5$ داریم: $\frac{p}{q} + \frac{5}{pq} \leq \frac{10}{q} < \sqrt{1998}$ و به این

ترتیب برقراری حکم واضح است. لازم به ذکر است که

$n = 11$ ، کوچک‌ترین مقداری است که نمی‌تواند توسط

هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۹۹۸ منفی شود؛

چون: $11 + (787)^2 \cdot 1998$. از طرف دیگر، با بسط کسر

مسلسل $\sqrt{1998}$ ، می‌توان نشان داد که کوچک‌ترین مقدار

دست‌یافتنی $n = 26$ است که به ازای $p = 134$ و $q = 3$ واقع

می‌شود.

مسئله‌ی ۸: ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند که

برای آن‌ها برابری:

$$x^2 + 3xy - 2y^2 = 112$$



برقرار باشد (پوتنام، ۱۹۵۴).

حل: ابتدا معادله را به یک معادله ساده از نوع پل

$$(x^2 - Ry^2 = 1) \text{ تبدیل می کنیم:}$$

$$4(x^2 + 3xy - 2y^2) = 4(112)$$

$$(4x^2 + 12xy + 9y^2) - 17y^2 = 448$$

$$(2x + 3y)^2 - 17y^2 = 448$$

اکنون معادله را به پیمانه‌ی ۱۷ ساده می‌کنیم. باقی مانده‌های

درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۱۷ برابر ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۸، ۲، ۱۵ و

۱۳ هستند، در حالی که داریم:

$$448 \equiv 6 \pmod{17}$$

چون عدد ۴۴۸ نمی‌تواند اختلاف یک مربع و مضربی از

۱۷ باشد، معادله هیچ جواب صحیحی ندارد.

مسئله‌ی ۹: اگر n عددی صحیح بزرگ‌تر از ۱ باشد، احکام

زیر را ثابت کنید:

الف) $1! + 2! + \dots + n! = k$ یک توان کامل است، اگر و تنها

اگر: $n = 3$.

ب) $S = (1!)^3 + (2!)^3 + \dots + (n!)^3$ یک توان کامل است،

اگر و تنها اگر: $n = 3$.

حل: بدیهی است که به ازای $n = 3$ داریم:

$$k = 1! + 2! + 3! = 3^2 \text{ و } S = (1!)^3 + (2!)^3 + (3!)^3 = 15^2$$

اکنون باید نشان دهیم که این تنها امکان است. به این منظور

فرض می‌کنیم که n دیگری وجود دارد که برای $m > 1$:

$$k = 1! + 2! + \dots + n! = t^m$$

از طریق آزمایش می‌توان نشان داد که n باید بزرگ‌تر یا برابر

۹ باشد. برای $n \geq 5$ ، عدد k به ۳ ختم می‌شود و به این ترتیب

m نمی‌تواند برابر با ۲ باشد (می‌دانیم که مربع‌ها تنها می‌توانند

به ۱، ۴، ۵، ۶ یا ۹ ختم شوند) و این مطلب یعنی: $n \geq 3$.

هم‌چنین، برای $n \geq 9$ عبارت k بر ۳ بخش پذیر است و در

نتیجه: $3 | t$ و یا $27 | t^m$. بنابراین، باید $27 | k$. ولی چون $n!$ به

ازای $n \geq 9$ بر ۲۷ بخش پذیر است:

$$n \geq 9: k = 1! + 2! + \dots + n! \equiv 1! + 2! + \dots + 8! \equiv 9 \pmod{27}$$

این تناقض ثابت می‌کند که $n = 3$ تنها جواب مسئله است.

به همین ترتیب، عبارت $S = (1!)^3 + (2!)^3 + \dots + (n!)^3$

یک توان کامل برای $n = 2, 4, 5, 6$ نیست. برای $n \geq 7$ ،

چون: $49 | n!$ ، پس:

$$S = (1!)^3 + (2!)^3 + \dots + (n!)^3 \equiv (1!)^3 + (2!)^3 + \dots + (6!)^3 \equiv 7 \pmod{49}$$

چون ۷ باقی مانده‌ی یک توان کامل نیست، بنابراین

$n = 3$ ، تنها جواب مسئله است.

تمرین ۵. تحقیق کنید که عبارت

$$T = (1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (n!)^2$$

مربع کامل است.

تمرین ۶. تحقیق کنید که آیا به ازای $n > 1$ ، عبارت زیر

می‌تواند توان کامل شود:

$$M = (1!)^5 + (2!)^5 + \dots + (n!)^5$$

مسئله‌ی ۱۰: می‌دانیم:

$$34! = 295232799cd96041408476186096435ab000000$$

رقم‌های a, b, c, d را تعیین کنید (انگلستان، ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲).

حل: می‌دانیم اگر n عدد طبیعی و $1 \leq n$ عددی اول باشد،

$$\text{تعداد عامل های } p \text{ در } n! \text{ از دستور } t_p = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots$$

می‌شود. چون تعداد صفرهای $n!$ بستگی به تعداد ۵های موجود

در آن دارد، پس تعداد صفرهای سمت راست $n!$ برابر با

$$t_5 = \left\lfloor \frac{34}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{34}{25} \right\rfloor + \dots = 7$$

است و در نتیجه: $b = 0$.

از طرف دیگر، اگر صفرهای سمت راست $34!$ را حذف

کنیم، عدد حاصل یعنی $\frac{34!}{10^7}$ بر ۸ بخش پذیر است (زیرا:

$$34! = 2^4 \cdot 3^4 \cdot \dots \text{ و } t_2 = \left\lfloor \frac{34}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{34}{4} \right\rfloor + \dots = 32$$

بنابراین عدد

سه رقمی سمت راست آن، یعنی $\overline{35a}$ ، باید بر ۸ بخش پذیر و

زوج باشد. پس a می‌تواند یکی از اعداد زوج بین صفر و ۱۰

باشد که با امتحان این چهار عدد، فقط عدد 352 بر ۸ بخش پذیر

است و در نتیجه: $a = 2$.

برای یافتن c و d توجه می‌کنیم که $34!$ باید بر ۹ و ۱۱

بخش پذیر باشد. از بخش پذیری آن بر ۹ نتیجه می‌شود که

مجموع ارقام آن بر ۹ بخش پذیر است و با یک محاسبه‌ی ساده

به دست می‌آید: $c + d = 9k - 6$

پس: $d \equiv 6 + c + d \equiv 9 + c + d \equiv 18$ چون: $0 \leq c + d \leq 18$ ، پس:

$$k = 1 \text{ یا } 2. \text{ بنابراین: } 12 \text{ یا } 3 = c + d (*)$$

$(4, 8)$ یا $(3, 9)$ یا $(3, 0)$ یا $(2, 1)$ یا $(1, 2)$ یا $(0, 3)$ (c و d)

یا $(6, 6)$ یا $(5, 7)$

(۱۲ یا ۳: $c + d$: حالت‌های ممکن)

راهنمایی: با توجه به ارقام حاصل $۳۴!$ ، بدیهی است که عدد تکراری a فقط ۰ یا ۹ می تواند باشد؛ زیرا بقیه ی عددها در طرف دوم دیده می شوند و حداقل دو بار هم تکرار شده اند. a غیر از ۹ نمی تواند باشد، زیرا نشان می دهیم که $۳۴!$ به هفت صفر ختم می شود و در واقع عدد b نیز صفر است. می دانیم که صفرهای $n!$ ، در واقع از ضرب عامل های ۲ و ۵ حاصل می شوند. بدیهی است که تعداد صفرهای $۳۴!$ همان تعداد ۵ های موجود در $۳۴!$ است:

$$t_5 = \left\lfloor \frac{34}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{34}{25} \right\rfloor = 6 + 1 = 7$$

بنابراین هفت رقم سمت راست $۳۴!$ صفر است. برای تعیین c از خاصیت بخش پذیری بر ۸ و برای تعیین d و e از خاصیت بخش پذیری بر ۹ و ۱۱ (مطابق مسئله ی ۱۰) استفاده می کنیم.

(۹۳) یا (۸۴) یا (۷۵) هم چنین، می دانیم عددی بر ۱۱ بخش پذیر است که داشته باشیم:

$$(k \text{ زوج}) \quad \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + \dots + a_{k-1} - a_k$$

$$(k \text{ فرد}) \quad \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + \dots - a_{k-1} + a_k$$

بنابراین، چون عدد $۳۴!$ دارای رقم است $(k=۳۹)$ ،

$$۳۴! \equiv 0 - 0 + d - c + \dots + 2 = 19 + d - c \quad \text{پس:}$$

$$\equiv d - c - 3 \equiv 0;$$

$$d - c \equiv 3; \quad d - c = 11s + 3,$$

$$0 \leq d - c \leq 8; \quad d - c = 3$$

تنها جوابی که در این شرایط صدق می کند، $d = 3$ و $c = 0$

است.

تمرین ۷. می دانیم:

$$۳۴! = 2a52327aadea6b414b8476186$$

$$ba6435cb \times 10^6$$

رقم های a, b, c, d, e را تعیین کنید.



تمرین

۱. اگر $N = 4444$ ، A مجموع ارقام عدد N^N ، B مجموع ارقام A و C مجموع ارقام B باشد، مجموع ارقام C را بیابید.

۲. رقم پنجم از سمت راست عدد $M = 5^{555} + 25! + 99999^{55555} - 1$ را تعیین کنید.

۳. تحقیق کنید که آیا معادله ی $x^5 - 128 = 2y^2$ در مجموعه ی اعداد صحیح دارای جواب است؟

۴. تمام زوج های صحیح مثبت (x, y) را بیابید که در معادله ی زو به رو صدق کنند: $2025x^2 - 2001 = (4y)!$

۵. تحقیق کنید که آیا دستگاه زیر جواب صحیح غیر بدیهی دارد؟

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 2z^2 \\ 24x^2 + y^2 = 4t^2 \end{cases}$$

۶. تحقیق کنید که آیا عدد $N = 1919$ می تواند به صورت مجموعی از یک مربع کامل و یک مکعب کامل نوشته شود؟

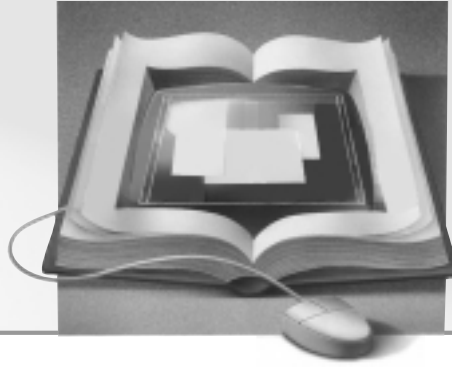
۷. اگر p عددی اول و w و n اعدادی صحیح باشند، به طوری که داشته باشیم: $6^p + 7^p = w^n$

تحقیق کنید که n برابر با چه عددهایی می تواند باشد.

۸. تمام مقادیر ممکن برای مجموع ارقام یک مکعب کامل را مشخص کنید.

۹. ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند که برای آن ها برابری زیر برقرار باشد: $2x^2 + 3xy - y^2 = 56$

۱۰. به ازای چه مقادیری از n ، عبارت N یک توان کامل است؟ $N = (1!)^4 + (2!)^4 + \dots + (n!)^4$



Analyze Math عنوان سایت:

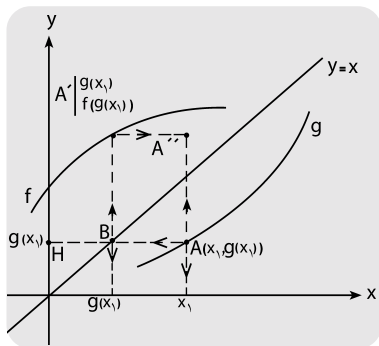
<http://www.analyzemath.com> نشانی سایت:

موضوع و محتوای اصلی این سایت شامل خودآموزها، مسائل و برگه‌های کاری رایگان پیرامون ریاضی، حساب دیفرانسیل و انتگرال، مثلثات و موضوعات هندسه است. در سمت چپ صفحه‌ی اصلی سایت موضوع‌های زیر را می‌توان مشاهده کرد:

- کاربردهای ریاضیات در فیزیک و مهندسی
(Applications of Mathematics in Physics and Engineering)
- خودآموزهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی
(Precalculus Tutorials)
- توابع تریسیمی
(Graphing Functions)
- برگه‌های کاری رایگان حساب دیفرانسیل و انتگرال، آماده برای دانلود کردن
(Free Calculus Worksheet to Download)
- خودآموزهای حساب دیفرانسیل و مسائل
(Calculus Tutorials and Problems)
- برگه‌های کاری رایگان ریاضی، برای دانلود کردن
(Free Math Worksheet to Download)
- پرسش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال و پاسخ‌ها
(Calculus Questions with Answers)
- برگه‌های کاری رایگان هندسه، برای دانلود کردن
(Free Geometry Worksheet to Download)
- خودآموزهای مثلثات و مسائل برای آزمون‌های شخصی
(Trigonometry Tutorials and Problems for Self Tests)
- کاغذ رسم رایگان
(Free Graph Paper)
- خودآموزهای هندسه و مسائل
(Geometry Tutorials and Problems)
- در صفحه‌ی اصلی سایت متنی وجود دارد که دربرگیرنده‌ی پیوندهای گوناگونی است و کاربر با کلیک روی آن‌ها، می‌تواند به مطالب قابل توجهی دست‌رسی پیدا کند. عنوان‌های اصلی این قسمت عبارت‌اند از:
ریاضی و حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی
(MATH AND PRECALCULUS)
- مسائل ریاضی
(Math Problem)
- حل معادلات و نامعادلات
(Solving Equations and Inequations)
- ریاضی کاربردی
(APPLIED MATH)
- نمودارهای توابع، معادلات و جبر
(Graphs of Functions, Equations and Algebra)
- حساب دیفرانسیل و انتگرال [حسابان]
(CALCULUS)
- ماشین حساب‌ها و حل‌کننده‌های ریاضی آنلاین
(Online Math Calculator and Solvers)
- هندسه
(GEOMETRY)
- ماشین حساب‌ها و حل‌کننده‌های هندسه‌ی آنلاین
(Online Geometry Calculator and Solvr)
- مثلثات
(TRIGONOMETRY)
- خودآموزهای آمار مقدماتی و احتمال
(Elementary Statistics and Probability Tutorials)
- نرم‌افزار ریاضی
(Math Software)
- آمار
(STATISTICS)



اشاره: در این مقاله می خواهیم از روی نمودارهای f و g ، نمودار $f(g(x))$ از روی نمودار f ، نمودار $f(f(x))$ را رسم کنیم.

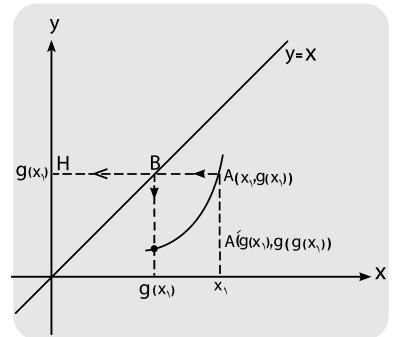


اگر از نقطه A رابطی موازی محور x ها رسم کنیم تا خط $y=x$ را در نقطه B و محور y ها را در نقطه H قطع کند، خواهیم داشت: $y_H = g(x_1)$ و $x_B = y_B = g(x_1)$.

از نقطه B رابطی عمود بر محور x ها رسم می کنیم تا محور x ها را در نقطه ای به طول $g(x_1)$ ، و نمودار f را در نقطه A' قطع کند. پس داریم: $A'(g(x_1), g(g(x_1)))$.

نمودار تابع g در شکل زیر مفروض است. می خواهیم نقطه ای روی نمودار g بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد ($x_1 \in Dg$).

نمودارهای دو تابع g و f در شکل رسم شده اند. می خواهیم نقطه ای روی نمودار f بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد ($x_1 \in Dg$).



برای این کار خط $y=x$ را نیز در شکل رسم کرده ایم. نقطه ای به طول x_1 روی محور x ها انتخاب می کنیم و آن را به کمک رابط تا نمودار g امتداد می دهیم. نقطه A به مختصات $(x_1, g(x_1))$ است.

نمودارهای دو تابع g و f در شکل رسم شده اند. می خواهیم نقطه ای روی نمودار f بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد ($x_1 \in Dg$).

با مجله های رشد آشنا شوید

مجله های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می شوند:

مجله های دانش آموزی

- به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شود:
- رشد کودک (برای دانش آموزان ابتدایی و پایه اول دوره دبستان)
- رشد نوجوان (برای دانش آموزان پایه های چهارم و پنجم دوره دبستان)
- رشد دانش آموزان برای پایه های چهارم و پنجم دوره دبستان)
- رشد نوجوان (برای دانش آموزان دوره راهنمایی تحصیلی)
- رشد جوان (برای دانش آموزان دوره متوسطه و پیش دانشگاهی)

مجله های عمومی

- به صورت ماهنامه و ۴ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شود:
- رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش راهنمایی تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا، رشد مدیریت مدرسه، رشد معلم

مجله های تخصصی

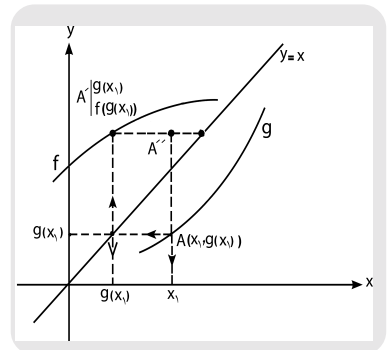
- به صورت فصلنامه و ۴ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شود:
- رشد برهان راهشایی (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره راهنمایی تحصیلی)، رشد برهان توسعه (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره متوسطه)، رشد آموزش قرآن، رشد آموزش معارف اسلامی، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش هنر، رشد مشاور مدرسه، رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش جغرافیا، رشد آموزش زبان، رشد آموزش ریاضی، رشد آموزش فیزیک، رشد آموزش شیمی، رشد آموزش زیست شناسی، رشد آموزش زمین شناسی، رشد آموزش فنی و حرفه ای، رشد آموزش پیش دبستانی

مجله های رشد عمومی و تخصصی برای آموزگاران، معلمان، مدیران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش جویان مراکز تربیت معلم و رشته های دبیری دانشگاه ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می شود.

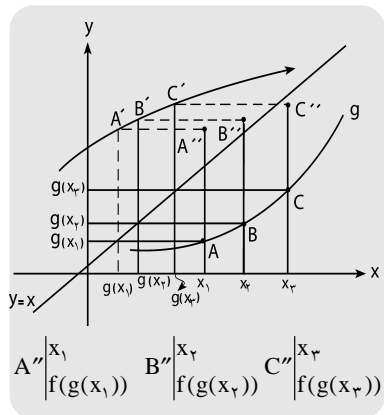
نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی، تلفن و شماره: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۳۷۸

$$x_{A'} = g(x_1)$$

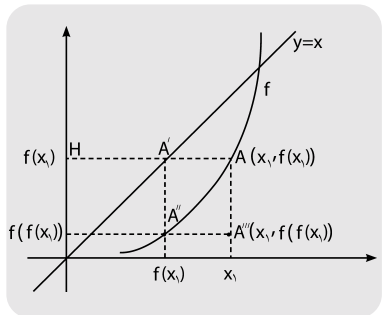
در نتیجه $A'(g(x_1), f(g(x_1)))$ است. ۳. می‌خواهیم نقطه‌ی A'' را در صفحه‌ی محورهای مختصاتی که نمودارهای دو تابع f و g رسم شده‌اند، طوری بیابیم که $A''(x_1, f(g(x_1)))$ باشد. مانند دو قسمت قبل، خط $y=x$ را رسم می‌کنیم.



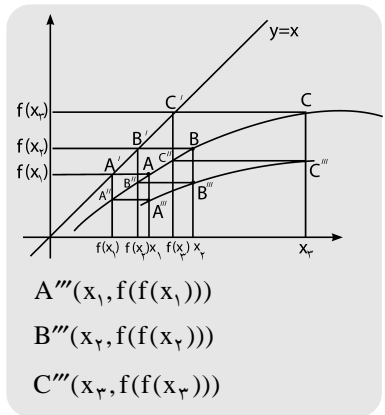
مشخص می‌شوند. در شکل زیر، سه نقطه از تابع fog با در دست داشتن نمودارهای دو تابع f و g به دست می‌آوریم ($x_1, x_2, x_3 \in Dg$). نقاط A'' ، B'' و C'' ، سه نقطه از تابع fog هستند.



این رابط نمودار تابع f را در نقطه‌ی A'' قطع می‌کند که $A''(f(x_1), f(f(x_1)))$ است. چنانچه از A'' رابطی موازی محور xها رسم کنیم تا رابط عمود بر محور xها به طول x_1 را در نقطه‌ی $A'''(x_1, f(f(x_1)))$ خواهد شد؛ مانند شکل زیر:



$A(x_1, f(x_1))$ ؛ $A'(f(x_1), f(x_1))$
 $A''(f(x_1), f(f(x_1)))$ ؛ $A'''(x_1, f(f(x_1)))$
 برای تمرین، در شکل زیر سه نقطه‌ی A'' ، B'' و C'' را از تابع fog مشخص می‌کنیم.



$A'''(x_1, f(f(x_1)))$
 $B'''(x_2, f(f(x_2)))$
 $C'''(x_3, f(f(x_3)))$

۴. می‌خواهیم از روی نمودار تابع f، نمودار تابع fog را رسم کنیم. فرض می‌کنیم در صفحه‌ی محورهای مختصات، نمودار تابع f رسم شده است. خط $y=x$ را هم در شکل رسم می‌کنیم. نقطه‌ای به طول x_1 روی نمودار تابع f در نظر می‌گیریم، مانند $A(x_1, f(x_1))$. از نقطه‌ی A رابطی موازی محور xها بر محور yها عمود می‌کنیم. این رابط، خط $y=x$ را در نقطه‌ی $A'(f(x_1), f(x_1))$ و محور yها را در H قطع می‌کند که $y_H = f(x_1)$. از نقطه‌ی A' به محور xها عمود می‌کنیم. طول پای عمود $f(x_1)$ است.

شرایط:
 ۱- پرداخت مبلغ ۵۰۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله‌ی درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۳۰۰ بانک تجارت شعبه‌ی سه راه آمایش (سرخ‌حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت آفتاب.



۲- ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده‌ی اشتراک بابت سفارشی. (کمی فیش را نیز خودنگه دارید.)
 نام مجله‌های درخواستی:

نام و نام خانوادگی:
 تاریخ تولد:
 میزان تحصیلات:
 تلفن:
 نشانی کامل پستی:
 استان:
 شهرستان:
 شهرستان:
 کدپستی:
 پلاک:
 خیابان:
 آستان:
 صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده، به شماره‌ی اشتراک خود از پیوسته.

افضا:

۱۵۷۷۵۱۶۵۶۷
 صندوق پستی مرکز بررسی آثار:
 ۱۶۵۹۵۱۱۱ صندوق پستی امور مشترکین:
 www.roshdmag.ir
 نشانی اینترنتی:
 Email: info@roshdmag.ir
 پست الکترونیک:
 ۰۲۱-۷۷۳۳۳۶۵۶-۷۳۳۳۵۱۱۰
 شماره اشتراکین:
 پیام گرم مجله‌های رشد:
 ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲
 یادآوری:
 هزینه‌ی برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی و عدم حضور گیرنده، بر عهده‌ی مشترک است.
 مبنای شروع اشتراک مجله از زمان دریافت برگ اشتراک است.