بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۰۰

دوره‌ی بیست و هفتم/ شماره ی۴/ تابستان ۱۳۸۹

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

فهرست

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه‌ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه‌ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه‌ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه‌ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده‌ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمه‌ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره‌ی صفحه‌ی مورد استفاده باشد.
- چکیده‌ای از اثر و مقاله‌ی ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
- در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود.

هم چنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، باز گشت داده نمی‌شود.

- **نشانی دفتر مجله :** تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
- **تلفن :** ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴)
- **نمابر:** ۸۸۳۰۱۴۷۸
- **پایگاه اینترنتی:** www.roshdmag.ir
- **رایانامه:** riazi@roshdmag.ir
- **تلفن پیام‌گیر نشریان رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲
- **کد مدیرمسئول:** ۱۰۲ ● **کد دفتر مجله:** ۱۱۳ ● **کد امور مشترکین:** ۱۱۴
- نشانی امور مشترکین : تهران، صندوق پستی : ۱۶۵۹۵/۱۱۱
- **تلفن امور مشترکین :** ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۶۶۵۵
- **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)
- **شمارگان:** ۱۱۵۰۰

صده یا سده!؟

مسئله، تولید صد مجموعه است!

بالاخره، مجله‌ی ما تا صد شماره تداوم یافت و الهی که به همت همه‌ی دوستدارانش، صدساله هم بشود! در فرهنگ فارسی، صد نشانه‌ی اوج و بلوغ و تکامل و بی‌شماری و امثال آن است: الهی که **صد**ساله شوی! **صد**بار گفتم که...! صد شب و روز صبر می‌کنیم تا به بالندگی بهار برسیم ـ یعنی جشن سده. خلاصه گاهی حتی به جای هزار، از **صدها** استفاده می‌کنیم، انگار که اندازه‌ی **صد**، بزرگ‌تر از هزار است و هزار با آن موجودیت می‌یابد!

بگذریم و به انتشار صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی بپردازیم. صد شماره‌ای که حاصل تلاش جمعی چندین انسان علاقه‌مند، با پشتکار، مصمم و معتقد به اثربخشی این کار بوده است. اینان کاری را انجام داده‌اند که شاید اگر بعضی‌ها از بیرون به آن نگاه کنند، بگویند: این همه زحمت برای چه بوده است!؟ کار نوشتن و تولید مجله مرا به یاد «مناظره‌ی سوزن و رفوگر» می‌اندازد که پروین اعتصامی، با شیوایی و زیرکی و عمق فراوان، به آن پرداخته است:

گفت سوزن با رفوگر وقت شام
شب شد و آخر نشد کارت تمام
روز و شب بیهوده سوزن می‌زنی
هر دمی، صد زخم بر من می‌زنی

اما قلم آگاه نیست که این کار، پایانی ندارد زیرا کمال، نقطه‌ی انتهایی ندارد و چیزی که مهم است، تلاش برای حرکت و پیشرفت مستمر است حتی اگر به اندازه‌ی سر سوزنی باشد؛ پیشرفتی که قلم تنها ابزار آنَ است و رفوگر در جواب سوزن نیز که ابزار اوست چنین پاسخ می‌دهد:

گفت در پاسخ رفوگر کای رفیق
نیست هر رهپوی، از اهل طریق
سوزنی، برتر ز سوزن نیستی
آگهی از جامه، از تن نیستی
من نهان را بینم و تو آشکار
تو یکی می‌دانی، اما من هزار

نویسندگان عزیز مجله که اکثراً معلمان محترم ریاضی ایران هستند، تلاش کرده‌اند تا **نهان‌های** کلاس درس ریاضی را با قلم خود به تصویر بکشند و آن **هزارهایی** را که از واقعیت تدریس و یادگیری تجربه کرده‌اند، در اختیار دیگران بگذارند تا چشم‌های معلمان و محققان را نسبت به امر خطیر یادگیری مدرسه‌ای روشن‌تر کنند.

من درین جا هرچه سوزن می‌زنم
سوزنی بر چشم روشن می‌زنم

و می‌دانند که فرصت هر فرد برای ایفای نقش و پذیرش مسئولیت خویش، اندک است و بدین سبب، خسته نمی‌شوند و ادامه می‌دهند:

من چو گردم خسته، فرصت بگذرد
چون گذشت، آن‌گه که بازش آورد؟

و هشدار می‌دهند که:

دیده را چون عاقبت نادیدن است
به که نیکو بنگرد تا روشن است
از چه وامانم؟ چو فرصت رفتنی است
چون نگویم؟ کاین حکایت گفتنی است.

اما مخاطبان مجله، توقع و انتظار خود را بارها در قالب نوشته‌ها و نامه‌ها و بیان دیدگاه‌هایشان اعلام کرده‌اند که به هر قلم و قلم‌زنی نیاز ندارند، بلکه تقاضایشان این است که فرصت‌ها را ـ هرچند اندک ـ از دست ندهیم و تا می‌توانیم، از لحظه‌ها استفاده کنیم، کمبودها را با چاشنی عشق و علاقه جبران کنیم و به‌جای فکر کردن به نداشته‌ها، داشته‌هایمان را قدر بدانیم و از آن‌ها، در جهت اعتلای آموزش بهره بگیریم!

سوزنی باید که در دل نشکند
جایِ جامه، بخیه اندر جان زند
جهدَ را بسیار کن، عمر اندک است
کار را نیکو گزین، فرصت کم است
کاردانان چون رفو آموختند
پاره‌های وقت، بر هم دوختند
عمر را باید رفو با کار کرد
وقت کم را با هنر، بسیار کرد

نصایح پروین اعتصامی چراغ راهمان بوده است. همه‌ی دست‌اندرکاران مجله می‌دانستند و می‌دانند که جز دوختن پاره‌های وقت به هم و با هنرمندی جبران کمبود را کردن، چاره‌ای نیست. از همه مهم‌تر این‌که همه می‌دانیم که در هر جای این هستی، افراد محدود به شرایط و چارچوب‌هایی هستند که در آن‌ها قرار دارند. پس به‌جای عذر و بهانه آوردن، وقت را غنیمت می‌شمریم و ضمن تبریک انتشار صدمین شماره‌ی مجله به خوانندگان محترم که مشوقان ما در این راه طولانی بوده‌اند، با توجه به چارچوبی که دفتر انتشارات کمک‌آموزشی برای ارتقای کمی و کیفی مجلات رشد تهیه کرده است، برنامه‌های آتی مجله را به آگاهی مخاطبان می‌رسانیم و معترفیم که:

کار را از وقت چون کردی جدا
این یکی گردد تباه، آن یک هَبا
گرچه اندر دیده و دل نور نیست
تا نفس باقی است، تن معذور نیست

در چارچوب پیشنهادی دفتر برای ارایه‌ی برنامه‌ی سالانه‌ی مجله بر این موارد تأکید شده است:

بحث و بررسی «شیوه‌های بهبود کیفیت مجلات رشد» از منظرهای «نیازسنجی از مخاطبان»، «برنامه‌ریزی سالانه»، «تولید محتوای فرهنگی»، «ویرایش»، «تولید فنی ـ هنری» «چاپ»، «توزیع»، «نظرسنجی و تحلیل محتوا» و «رویه‌های عملیاتی تولید مجلات».

در این مختصر، موضوع‌هایی را که به تولید محتوای مجله مربوط می‌شود، مورد

بررسی اجمالی قرار می‌دهم و راجع به موضوع‌هایی که مربوط به بخش فنی هستند، تنها به ارائه‌ی نظر می‌پردازم زیرا تخصصی در آن بخش‌ها ندارم و اما، نظر من درباره‌ی تولید محتوا نظرات جسته و گریخته‌ای است که در گردهمایی‌های معلمان ریاضی شنیده‌ام و یا نامه‌هایی که از طریق دفتر مجله دریافت کرده‌ام. در ضمن نظراتی که بیان می‌کنم، بازتاب نظرات اعضای محترم هیئت تحریریه نیز هست.

شیوه‌های بهبود کیفیت مجلات رشد

امیدواریم که با عنایت به تجربه‌ی گران‌بهای تولید صد شماره‌ی مجله، و با تجزیه و تحلیل محتوای آن‌ها، بتوانیم شیوه‌های کارآمدتر و اثربخش‌تری بیابیم تا با تأسی به آن‌ها، کیفیت مجله را به‌طور مستمر، بهبود بخشیم. بعضی از راهکارهایی که تا به حال اندیشیده‌ایم و اثرات مثبت آن‌ها را در ارتقای مجله دیده‌ایم، از منظرهای طرح شده توسط دفتر، به شرح زیرند:

الف. نیازسنجی از مخاطبان

برای آشنایی بیشتر با نیازهای بالقوه و عینی مخاطبان، راهکارهای زیر را به کار برده‌ایم:

۱. توجه به مبانی نظری حوزه‌ی آموزش ریاضی به‌طور عام و حوزه‌ی آموزش معلمان ریاضی و برنامه‌ی درسی ریاضی به‌طور خاص؛

۲. سفارش و تشویق نویسندگان به تألیف و ترجمه‌ی مقالات نظری حوزه‌های بالا برای پاسخ‌گویی به نیازهای شناخته شده، از طریق تحقیقات بنیادی و توسعه‌ای و کاربردی در آموزش ریاضی؛

۳. ایجاد ستون **دیدگاه** برای آشنایی عینی‌تر و ملموس‌تر با نظرات و نیازهای ابراز شده توسط مخاطبان؛

۴. تهیه و توزیع پرسش‌نامه برای **نیازسنجی از مخاطبان** در یازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی و استفاده از نتایج آن در توجه به این امر خطیر؛

۵. توجه به نیازهای اعلام شده از جانب مخاطبان از طریق نامه‌های ارسالی.

ب. برنامه‌ریزی سالانه

در این بخش، برنامه‌های کلان مجله توسط اعضای محترم هیئت تحریریه‌ی مجله بازنگری می‌شود و با توجه به نتایج بخش (الف) و در صورت لزوم، برنامه‌ی سالانه‌ی مجله جرح و تعدیل می‌گردد. در این بازنگری‌ها، یافته‌های جدید پژوهشی در حوزه‌ی آموزش ریاضی در سطح جهانی، تغییرات انجام شده در سطح ملی، ویژگی‌های جدید جمعیتی جامعه‌ی دانش‌آموزی در ایران و از همه مهم‌تر ارتقای سطح شعور و آگاهی و توقع و انتظارات معلمان و آموزشگران، موردنظر هستند.

پ. تولید محتوای فرهنگی

اعضای هیئت تحریریه‌ی مجله تلاش می‌کنند تا در زمینه‌ی تخصصی آموزش ریاضی که شامل آموزش معلمان، برنامه‌ی درسی، کتاب‌های درسی، ارزش‌یابی، روش‌های یاددهی ـ یادگیری و تدریس ریاضی است، محتوا تولید کنند و از این طریق فرهنگ جامعه‌ی آموزش ریاضی ایران و به تبع آن، فرهنگ آموزشی و مدرسه‌ای و تدریس ریاضی را ارتقا دهند. از نظر هیئت تحریریه، وظیفه‌ی مجله، **تولید محتوای فرهنگی** در حوزه‌ی تخصصی آموزش ریاضی است که برای آن، مأموریت یافته و مسئولیت پذیرفته است. در واقع، تحریریه‌ی مجله نسبت به حوزه‌ی فرهنگی مرتبط خود واقف است و تلاش می‌کند که تولیدات خود را بر این حوزه متمرکز کند. البته این تمرکز، مانع توجه به برنامه‌ی درسی تلفیقی و رویکردهای میان‌رشته‌ای معنادار نیست.

ت. ویرایش

با پذیرش توضیحات سردبیر توسط مسئولان محترم مجلات، سال‌هاست که کار **ویرایش** این مجله توسط تحریریه‌ی مجله انجام می‌شود. علت این امر این است که حوزه‌ی آموزش ریاضی به‌عنوان یک دیسیپلین جدید، نسبتاً نوپاست و واژگان تخصصی و منابع آن، قبلاً در ادبیات آموزشی ایران حضور نداشته است. بدین سبب، با رعایت شیوه‌نامه‌ی مجلات، مسئولیت ویرایش به عهده‌ی مجله است. امیدواریم در میان‌مدت، بتوانیم واژگان تخصصی این رشته را به صورت کتاب، منتشر کنیم که انتشار چنان کتابی، مدیون معادل‌های انتخاب شده برای محتوای مجلات از طریق ویرایش و یکسان‌سازی معادل‌هاست.

ث. تولید فنی ـ هنری

با توجه به رهنمودهایی که در جلسات توجیهی یا بازآموزی دفتر کمک‌آموزشی دریافت کرده‌ایم، سعی نموده‌ایم که **هنر** را از دید ریاضی و نیازهای مخاطبان آن ببینیم. البته بسیار پیش آمده است که این زاویه‌ی دید، با انتظارات تخصصی حوزه‌ی عمومی فنی ـ هنری تفاوت‌های ماهوی داشته است. ولی در هر صورت، تلاش کرده‌ایم تا بدون عبور از چارچوب‌های تعیین شده، به هنر از دیدگاه ریاضی و آموزش ریاضی عنایت داشته باشیم که بیشترین مسئولیت این کار نیز، به عهده‌ی مدیر داخلی مجله است که فردی هنرمند و هنرشناس و از نظر اجرایی واقع‌بین، کارآمد و قاعده‌مند است.

ج. چاپ

در زمینه‌ی چاپ، هیئت تحریریه‌ی مجله نقشی ندارد، زیرا این حوزه، مشخصاً اجرایی است و بستگی به سیاست‌گذاری‌های اجرایی دارد.

چ. توزیع

برای توزیع مجلات، هیئت تحریریه پیشنهاد دارد که علاوه بر ارسال مجله برای مشترکان و از طریق بخش‌های دولتی آموزش و پرورش در استان‌ها، تمهیداتی اندیشیده شود تا علاقه‌مندان، بتوانند مجله را از طریق مکان‌های دیگری مانند دکه‌های روزنامه‌فروشی تهیه نمایند.

ح. نظرسنجی و تحلیل محتوا

توضیحات مربوط به این بخش، در بند الف آمده است و تکرار آن، غیر ضروری است.

خ. رویه‌های عملیاتی تولید مجلات

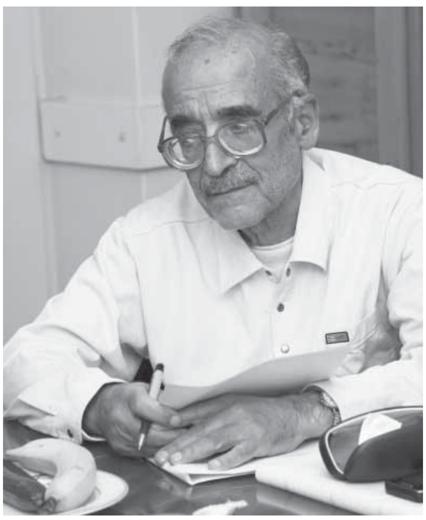
این حوزه هم بیشتر مربوط به سیاست‌های اجرایی است و اگر مسئولان محترم لازم بدانند، اعضای تحریریه‌ی مجله با کمال رضایت، اگر پیشنهاد قابل اجرایی داشتند، ارائه می‌دهند.

بالاخره، انتظار داریم و امید داریم که همه‌ی این تلاش‌ها، افراد زیادی را آموزش دهد و علاقه‌مندشان کند تا به تداوم مجله و تنوع محتوای آن، کمک کنند. شاید که آیندگان، تولد دوصده‌ی مجله را جشن بگیرند و همه بدانیم که گذشته، واقعاً چراغ راه آینده است.

از میلاد تا میلاد
یا از بهار ۶۳ تا ...

میرزا جلیلی

عضو هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی



از سال ۱۳۴۵، در «سازمان کتاب‌های درسی ایران»، مجلات غیرتخصصی تحت عنون «پیک دانش‌آموز»، «پیک معلم» و بعدها «پیک راهنمایی»، ... منتشر و مستقیماً هم‌چون کتب درسی ابتدایی، در کلاس‌های درس توزیع می‌شد.

بعد از انقلاب، این مجلات با عنوان جدید «رشد دانش‌آموز» و «رشد معلم»، با آرایش و دیدگاه‌های نو کار خود را آغاز کرد که مورد استقبال مدارس قرار گرفت و توزیع این مجلات نیز در مدارس انجام می‌گیرد.

لازم به یادآوری است که تنها مجله‌ی اختصاصی ریاضی قبل از انقلاب، مجله‌ی «یکان» بود که با هزینه‌ی شخصی و مسئولیت آقای دکتر عبدالحسین مصحفی و مدیریت داخلی همسرش که رئیس مرکز تربیت معلم دختران بود منتشر می‌شد. در آن مجله، مسائل و مطالب مختلف مورد بحث و تجزیه و تحلیل قرار می‌گرفت، از جمله مسائل کنکور و مخاطبان مجله، دبیران و دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی بودند.

متأسفانه این مجله در سال ۱۳۵۶ با مشکلات مالی مواجه شد و در آستانه‌ی تعطیلی قرار گرفت. گروه ریاضی سازمان کتاب‌های درسی موضوع را با رئیس وقت سازمان مطرح نموده پیشنهاد کردند که چون «یکان»، مجله‌ی مفیدی برای معلمان و دانش‌آموزان است، در صورت امکان، از طرف سازمان کمک مالی به آن داده شود تا تعطیل نشود که البته تقاضا مورد توجه قرار نگرفت.

بعد از انقلاب با شرایط جدیدی که به وجود آمده بود؛ مجدداً موضوع کمک مالی به یکان پی‌گیری شد که باز به نتیجه‌ای نرسید اما مشکلی که در این زمان وزارت آموزش و پرورش با آن مواجه شد، مسئله‌ی «کاهش تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی» بود. بدین معنا که تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی در کلاس، یک باره تقلیل یافت و کلاس‌های ریاضی خلوت شد.

برای بررسی این مسئله، شورای اُفت ریاضی از استادان، دبیران ریاضی و رؤسای مدارس و به کارگردانی گروه ریاضی در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف تشکیل شد، این شورا بعد از یک سال یا بیشتر، با بحث در جلسات تفکیکی خود، به این نتیجه رسید که علت اُفت عبارت بوده است از:

۱. تعطیلی موقت دانشگاه‌ها و عدم وجود انگیزه برای انتخاب رشته‌ی ریاضی؛

در بهار ۱۳۶۳، اولین شماره‌ی مجله‌ی «رشد آموزش ریاضی» به بهای ۱۰۰ ریال از چاپ خارج و وارد مدارس شد. این، هم اولین شماره‌ی رشد ریاضی بود و هم نخستین مجله‌ی تخصصی از سری رشدهای تخصصی، هم‌چون فیزیک، شیمی، زیست ... که بعدها به تدریج انتشار یافتند

۲. ممنوعیت تدریس آقایان در مدارس دخترانه؛

۳. بازنشسته شدن عده‌ی زیادی از دبیران قدیمی و باتجربه.

این علل موجب شده بود که خود معلمان تازه‌کار در تدریس مطالب رشته‌ی ریاضی ضعف داشته و دانش‌آموزان از کلاس‌ها ناراضی باشند.

شورای اُفت در پایان کار خود، چندین پیشنهاد به مسئولان داد که از جمله گفته شد لازم است یک مجله‌ی ریاضی از طرف دفتر برنامه‌ریزی و تألیف با همکاری گروه ریاضی منتشر شود تا مؤلفان و کارشناسان مستقیماً با دبیران کشور در تماس باشند و عین مفاهیم پایه‌ای کتاب‌ها به زبان ساده و باز شده در مجله مطرح شود تا مورد استفاده‌ی معلمان قرار گیرد.

در سال ۱۳۶۲، گروه ریاضی دفتر تألیف، مسئول انتشار این مجله شد.

در گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم ـ که از سال ۱۳۵۹ مشغول همکاری با گروه ریاضی دفتر بود ـ و با شناختی که نسبت به آقای دکتر علیرضا جمالی وجود داشت که فردی جدّی، دقیق، کاردان و صاحب‌نظر و علاقه‌مند است؛ از طرف دفتر از ایشان دعوت به عمل آمد تا به عنوان «سردبیر» مجله، کار خود را آغاز کند.

خوشبختانه ایشان نیز دعوت دفتر را پذیرفته و شروع کردند و عده‌ای از علاقه‌مندان شورای برنامه‌ریزی که در آن زمان مشغول تنظیم و تألیف کتب ابتدایی و راهنمایی جدید بودند و جمعی از اعضای شورای ریاضی، به عنوان اعضای هیئت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی انتخاب شدند؛ در حقیقت، همان افراد برنامه‌ریز و مؤلف، مسئولیت کارگردانی مجله را نیز به عهده گرفتند.

در بهار ۱۳۶۳، اولین شماره‌ی مجله‌ی «رشد آموزش ریاضی» به بهای ۱۰۰ ریال از چاپ خارج و وارد مدارس شد. این، هم اولین **شماره‌ی رشد ریاضی** بود و هم نخستین **مجله‌ی تخصصی** از سری رشدهای اختصاصیِ دبیران، هم‌چون فیزیک، شیمی، زیست ... که بعدها به تدریج انتشار یافتند.

در صفحه‌ی دوم «جلد مجله»، بعد از نشانی چنین آمده بود:

«مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نشریه‌ی «**گروه ریاضی**» دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی سازمان پژوهش است که هر ۳ ماه یک‌بار منتشر می‌شود.

هدف از انتشار این مجله در وهله‌ی اول، ایجاد ارتباط متقابل بین معلمین ریاضی کشور و دفتر مذکور به منظور تبادل تجارب و آراء در زمینه‌ی آموزشی ریاضی است و در مرحله‌ی بعد، طرح و بررسی مسائل بنیادی ریاضیات و مطالب جنبی و مفید درسی به منظور ارتقای سطح علمی و معلومات **دبیران ریاضی دبیرستان‌هاست**». این مقدمه تا چند سال در آن‌جا آورده می‌شد.

هم‌چنین، در صفحه‌ی اول نخستین شماره مطلبی تحت عنوان «پیش‌گفتار»، به قلم مسئول وقت سازمان آمده که در آن «موضوعاتی» که لازم است مورد توجه قرار بگیرد به طور مفصّل مورد بحث قرار گرفته است:

دانش‌افزایی، آشنایی با روش‌های تدریس، معرفی وسایل کمک آموزشی و استفاده از آن‌ها در کلاس، تاریخ ریاضی (علوم)، آشنایی با معلمین موفق از طریقه مصاحبه با آن‌ها، آگاهی از مسائل و پرسش‌های معلمین نمونه، طرح موضوعات مربوط به آینده‌ی رشته‌ی ریاضی، آگاهی از تصمیم‌گیری‌ها و بخشنامه‌ها، آگاهی از تغییر برنامه‌ها و برنامه‌ریزی و تألیف (تغییرات کتب درسی) و اظهارنظر درباره‌ی آن‌ها، اطلاع از تحقیقات و اخبار به روز مربوط به رشته‌ی

ریاضی، معرفی نشریات و کتب.

قابل توجه است که در این مقدمه یا پیشگفتار نامی از دانش‌آموز به میان نیامده است، در حقیقت هدف از انتشار «رشد آموزش ریاضی» صرفاً **بهبود تدریس دبیران و معلمین ریاضی کشور بوده و خواهد بود.**

بعدها دفتر کمک آموزشی تصمیم گرفت که مجله‌ای نظیر رشد به نام «برهان» برای دانش‌آموزان منتشر کند که مطالب و محتوای برهان بیشتر موضوعات ریاضی مدرسه‌ای و بحث‌های مربوط به آن است.

مجلات رشد تخصصی، در ابتدا مستقیماً از طرف دفتر برنامه‌ریزی و تألیف و در همان چاپ‌خانه‌هایی که کتب درسی را چاپ می‌کردند، حروف‌چینی و آماده می‌شد و هم‌چون کتب درسی ابتدایی، در مدارس توزیع می‌گردید.

دبیران، مخصوصاً تهرانی‌ها گله داشتند که مجله توی بساط روزنامه‌فروش‌ها (روی دکه)، نیست و به دست آن‌ها نمی‌رسد. ابتدا تا چندین شماره، این مجلات به وسیله‌ی دو نفر از اعضای علاقه‌مند هیئت تحریریه، به کتاب فروشی‌های خیابان انقلاب ـ روبه‌روی دانشگاه تهران ـ برده و بین کتاب‌فروشی‌ها توزیع می‌شد. البته مشکل توزیع مجله همیشه مطرح بوده است.

مقالات اولین شماره‌ی رشد آموزش ریاضی، به شرح زیر است:

ـ نگرشی بر فلسفه و آموزش ریاضیات (دکتر بیژن‌زاده)، درباره‌ی هندسه (حسین غیور)، گفتاری در باب منشاء و مبدأ ریاضیات (دکتر محمد قاسم وحیدی)، زندگینامه‌ی خوارزمی، اصول مجموعه‌ای اعداد طبیعی و بحثی در اصل استقراء ریاضی (دکتر لآلی)، میانگین‌های حسابی و هندسی و کاربردهایی از آن (رضا شهریاری اردبیلی)، مثال‌هایی در رابطه با آموزش مفهوم «**گروه**» در ریاضیات مقدماتی (دکتر علیرضا جمالی)، احتمال هندسی (دکتر عبدالرحمن آذری)، حل یک مسئله با استفاده از جبر بول (دکتر اسماعیل بابلیان)، یک روش مقدماتی برای اثبات دستور محاسبه‌ی مساحت دایره، مسائل، مسئله‌ی برج **هانوئی وشگفتانه‌های حسابی**، آشنایی با فعالیت‌های گروه ریاضی دفتر تحقیقات و تألیف، گزارشی از برگزاری اولین مسابقه‌ی ریاضی اصفهان، معرفی کتاب، نامه‌ها؛ که البته در شماره‌های بعدی، سؤالات کنکور و بررسی آن‌ها یا مسائل مسابقات المپیادهای ریاضی نیز چاپ و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. در برهه‌ای از زمان انتشار، به علت حضور آقایان؛ شادروان حسین غیور، ابراهیم دارابی، محمود نصیری، دکتر امیر خسروی که همه از علاقه‌مندان هندسه بودند، مطالب مربوط به هندسه در مجله بر سایر مباحث فزونی گرفته و بیشتر بود.

علاقه‌مندی و دیدگاه هر «سردبیر» در نوع مقالات مجله تأثیرگذار بود. مثلاً زمانی که جناب دکتر قاسم وحیدی اصل سردبیر مجله بودند، مقالات مربوط به تاریخ ریاضیات همیشه جزو مقالات مجله بود یا آقای دکتر علیرضا مدقالچی به مقالات آنالیزَ علاقه‌مند بودند و...

یکی از سری مقالاتی که از شماره‌های ۵ یا ۶ در مجله دیده می‌شود، مقالات آقای دکتر غلامرضا دانش ناروئی تحت عنوان: «نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت» بود که با استقبال خوانندگان مواجه شد.

استادان محترم دیگری که با مجله همکاری مرتب داشتند، دکتر جواد بهبودیان از دانشگاه شیراز، دکتر محمود خاتون‌آبادی از اصفهان، دکتر محمدرضا درفشه از دانشگاه تهران، دکتر عین‌اللّه‌پاشا دانشگاه تربیت معلم، زنده‌یاد دکتر مسعود فروزان از دانشگاه تربیت معلم بودند.

سردبیران محترم مجله در این ۲۵ سال به ترتیب عبارت بوده‌اند از:

دکتر علیرضا جمالی، دکتر علیرضا مدقالچی، دکتر قاسم وحیدی، دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، دکتر علیرضا مدقالچی (نوبت دوم) و سرکار خانم دکتر زهرا گویا که تاکنون بیش از ۵۰ شماره را منتشر کرده‌اند.

مدیران داخلی مجله به ترتیب: رضا شهریاری، محمدعلی بصام‌تبار، میرزا جلیلی، سهیلا غلام آزاد و سپیده چمن‌آرا بوده‌اند.

در رابطه با گفت‌وگو با معلمان موفق، مجله به ترتیب با آقایان: زنده‌یاد غلامرضا عسجدی، زنده‌یاد حسین غیور، جلیل قره‌گوزلو و میرزا جلیلی مصاحبه کرده است.

از نظر ارتباط مجله با دبیران در ۱۰ یا ۱۲ سال اول انتشار، خاصه سال‌های اول و دوم، بسیار عالی به نظر می‌رسید. چه شروع انتشار مجله هم‌زمان با **تألیف جدید کتب ابتدایی و راهنمایی** بود. این فرصت مناسبی بود که تغییرات کتاب‌ها یا مواد حذف شده یا جابه‌جا شده از طریق مجله به اطلاع معلمان رسانده شود. به‌خصوص از طرف دفتر برنامه‌ریزی و تألیف بخشنامه شده بود که شورای معلمان هر شهرستان تشکیل شود در آن شورا، اشکالات و مشکلات کتاب‌ها مطرح و همه‌ی جلسه‌ها به **رشد** ارسال گردد.

از جمله دبیران قدیمی که بسیار با مجله در تماس بوده و مقالات ارسال می‌کردند، آقایان: علی‌اکبر بناگر، علی‌اکبرجاویدمهر و فؤاد ابراهیمی بوده‌اند.

در خاتمه، این جانب به عنوان یک همکار ۳۰ ساله و با تجربه، به گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف پیشنهاد می‌کنم رابطه‌ی گروه را با مجله‌ی خودشان قطع نکنند؛ به ویژه، در این زمان که تألیف کتاب‌های جدید ریاضی مطرح می‌باشد، لازم است که راجع به اهداف، روش‌ها و شیوه‌های آموزش این کتاب‌ها به مجله مقاله بدهند و از دبیران سراسر کشور نیز بخواهند که نظرات خود را در مجله منعکس نمایند. به عبارت دیگر، ارتباط خود را با دبیران از طریق مجله قوت بخشند.

و این، همان‌طور که گفته شد، **هدف اصلی انتشار مجله‌ی «رشد آموزش ریاضی»** بوده است.

نمایش اعداد در مبناهای مختلف و کاربرد آن‌ها در رایانه

اسماعیل بابلیان
استاد ریاضی دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر ـ دانشگاه تربیت معلم

چکیده

تاکنون چنین متداول بوده است که بسط هر عدد حقیقی در مبنای یک عدد صحیح بزرگ تر از یک، نوشته شود. در این مقاله، در مورد امکان استفاده از یک عدد صحیح کوچک تر از ۱- به عنوان مبنا بحث می شود.

ضمناً، با معرفی اعداد مختلط گاوسی بسط این اعداد را در مبناهای مختلف، به ویژه برای ذخیره در رایانه، مورد بررسی قرار می‌دهیم. کاربرد بسط اعداد مختلط در مبناهای مختلف نیز ذکر خواهد شد.

کلید واژه‌ها: نمایش اعداد، مبنای عددی، رایانه، اعداد مختلط گاوسی، بسط اعداد.

۱. مقدمه

مبنایی که در رایانه برای بسط و نمایش اعداد به کار می رود، مبنای ۲ است. علت انتخاب ۲ به عنوان مبنا این است که نمایش هر عدد صحیح در این مبنا، با ارقام ۰ و ۱ میسر است و از نظر فیزیکی، ایجاد دو وضعیت متفاوت برای نمایش ۰ و ۱ آسان است. البته، برای سرعت بخشیدن به تبادل اطلاعات، از مبناهای ۸ و ۱۶ نیز به دلیل ارتباط ساده و نزدیکی که با مبنای ۲ دارند، استفاده می شود.

برای نمایش یک رقم در مبنای ۲ از عنصری به اسم بیت (BInary digiT $\rightarrow$ BIT) استفاده می شود و برای نمایش یا ذخیره‌ی یک عدد صحیح، چند بایت (Byte) به کار می رود. هر بایت دارای ۸ بیت است.

۲. نمایش اعداد صحیح

به طور معمول، اگر n عددی صحیح باشد بسط درمبنای ۲ نوشته می‌شود و اگر n منفی باشد، کنار بسط |n| نماد (ـ) قرار می‌گیرد. اما در رایانه برای نمایش (±) باید فکری کرد. فرض کنید اعداد صحیح قابل نمایش در یک بایت (۸ بیت) مورد نظر باشند. یک روش این است که بیت اول را مخصوص علامت عدد بگیریم و در ۷ بیت بعدی ارقام قدر مطلق عدد را ذخیره کنیم. در این صورت، تعداد اعداد قابل ذخیره در یک بایت عبارت است از:

(از ۱۲۷− تا ۱۲۷+) $۲\times۲^{۷}-۱=۲^{۸}-۱=۲۵۵$

نمایش اعداد ۷۱- و ۱۰۱ را در زیر ملاحظه می‌کنید:

۷۱−	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱۰۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در این نحوه‌ی نمایش ۰± داریم!

برای جلوگیری از این مشکل، از روش مکمل دوها (Twos Complement) استفاده می‌شود. ابتدا به مثالی در مبنای ۱۰ توجه کنید.

تفریق اعداد در مبنای ۱۰ را می‌توان با استفاده از جمع به‌دست آورد! مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$۳۱۴-۱۳۹=۳۱۴+(۱۰۰۰-۱۳۹)-۱۰۰۰$$
$$=(۳۱۴+۸۶۱)-۱۰۰۰$$
$$=۱۱۷۵-۱۰۰۰=۱۷۵$$

توجه کنید:

$$۱۰۰۰-۱۳۹=۹۹۹-۱۳۹+۱$$
$$=۸۶۰+۱=۸۶۱$$

عدد ۸۶۱ بدون هیچ زحمتی به دست می‌آید! عدد ۸۶۱ مکمل عدد ۱۳۹- نسبت به ۱۰۰۰ است.

معادل عملیات بالا در مبنای ۲ صورت می‌گیرد. مثلاً برای نمایش ۵- چنین عمل می‌کنیم:

$$۵=(۱۰۱)_{۲}$$

و $(۱۱۱۱۱۱۱۱-۱۰۱)+۱$

$$=۱۱۱۱۱۰۱۰+۱=۱۱۱۱۱۰۱۱$$

ملاحظه کنید که

۱۱۱۱۱۰۱۱+۱۰۱ = ۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

در واقع برای رقم ۱ که در محل نهم قرار می‌گیرد جایی وجود ندارد، لذا حذف می‌شود! بنابراین، برای ذخیره‌ی اعداد منفی، مکمل دوهای آن‌را ذخیره می‌کنیم. به این ترتیب در ۳ بیت می‌توان $۲^{۳}=۸$ عدد به صورت زیر ذخیره کرد:

۱۱۱	۱−	۰	۰۰۰
۱۱۰	۲−	۱	۰۰۱
۱۰۱	۳−	۲	۰۱۰
۱۰۰	۴−	۳	۰۱۱

ملاحظه می‌شود که در ۳ بیت، ۸ عدد ذخیره می‌شود (از $۲^{۲}$ − تا ۱ - $۲^{۲}$). به این ترتیب در ۸ بیت می‌توان ۲۵۶ = $۲^{۸}$ عدد ذخیره کرد (از $۲^{۷}$− تا ۱ - $۲^{۷}$).

۱.۲ تفریق

البته نحوه‌ی بالا برای نمایش اعداد منفی، مبنایی برای تفریق اعداد نیز شد.

$$۷-۲=۷+(-۲)$$
$$=(۰۰۰۰۰۱۱۱)_{۲}+(۱۱۱۱۱۱۱۰)_{۲}$$
$$=(۰۰۰۰۰۱۰۱)_{۲}=۵$$

۲.۲ تقسیم

رایانه‌ها تقسیم یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر را با استفاده از تفریق‌های مکرر انجام می‌دهند. به یک مثال در مبنای ۱۰ توجه کنید:

$۱۴\div۴\rightarrow$ $۱۴-۴=۱۰$ ۱

$۱۰-۴=۶$ ۲

$۶-۴=\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$

خارج قسمت ۳ و باقیمانده ۲ است. در حقیقت تعداد تفریق‌ها، تا رسیدن به عددی کوچک‌تر از مقسوم‌علیه، با خارج قسمت برابر است. برای انجام تقسیم بالا در مبنای ۲، چنین عمل می‌کنیم:

مکمل ۴ $=(۱۱۱۱۱۱۰۰)_{۲}$ $۱۴=(۱۱۱۰)_{۲}$

```
         ۱ ۱ ۱   ۰
 + ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۰   ۰             [۱]
 ---------------------
   ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۱   ۰
 + ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۰   ۰             [۱۰]
 ---------------------
   ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱   ۰
 + ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۰   ۰
 ---------------------
   ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱   ۰   =۲        [۱۱] =۳
```

۳. استفاده از مبنای منفی

سؤالی که در این جا مطرح است این است که «آیا می‌توان هر عدد صحیح را در مبنای یک عدد صحیح کوچک‌تر از ۱- نوشت؟» اگر این کار امکان‌پذیر باشد، ذخیره‌ی این اعداد در رایانه نیز آسان خواهد بود؟ برای پاسخ به این سؤال، قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه: هر عدد صحیح را می‌توان در مبنای (۲-) نمایش داد.

اثبات این قضیه یکی از مسائل جالب در زمینه‌ی استقرای ریاضی است. اما چرا از این مبنا در رایانه استفاده نمی‌شود؟ علت این‌راکه از مبنای ۲- استفاده نمی‌شود توضیح می‌دهیم. فرض کنید فقط از سه بیت (سه رقم) استفاده کنیم.

$۰ = (۰۰۰)_{-۲}$	$۲ = (۱۱۰)_{-۲}$
$۱ = (۰۰۱)_{-۲}$	$۳ = (۱۱۱)_{-۲}$
$-۱ = (۰۱۱)_{-۲}$	$۴ = (۱۰۰)_{-۲}$
$-۲ = (۰۱۰)_{-۲}$	$۵ = (۱۰۱)_{-۲}$

اگر از ۴ بیت استفاده کنیم، اعداد ۱۰- تا ۵ قابل نمایش هستند! چرا؟ یک علت این موضوع را می‌توان در قضیه زیر دید. (عدم تقارن).

قضیه: اگر $m = \sum_{i=۰}^{n} \alpha_i (-۲)^i$ ، $\alpha_n = ۱$ و $\alpha_i \in \{۰,۱\}$ ، آن‌گاه اگر n زوج (فرد) باشد m مثبت (منفی) است.

علت دوم را در جمع دو عدد که در مبنای ۲- نوشته شده‌اند می‌توان یافت. با توجه به این که

$$۲ = (۱۱۰)_{-۲}$$

وقتی دو عدد در مبنای ۲- را با هم جمع می‌کنیم

$$۱ + ۱ = (۱۱۰)_{-۲}$$

و این کار جمع کردن را مشکل می‌کند. توجه کنید:

```
                               ۱   ۱
  ۵                                ۱  ۰  ۱
+ ۲   →  + (۱ ۰ ۱)_{-۲}   →      + ۱  ۱  ۰
 ---       (۱ ۱ ۰)_{-۲}         ------------
  ۷        ------------        (۱ ۱ ۰ ۱ ۱)_{-۲}  = ۷
```

یعنی به جای ده بر یک در مبنای ۱۰ یا ۲ بر ۱ در مبنای ۲، باید عدد ۱۱ را به دو ستون چپ اضافه کنیم.

مثال

```
              ۱ ۱
                  ۱ ۱
  ۲۱              ۱ ۰ ۱ ۰ ۱
+  ۳   → +            ۱ ۱ ۱
 ----      ------------------
  ۲۴     (۱ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰)_{-۲} = ۲۴
```

۴. اعداد گاوسی و بسط آن‌ها در مبنای یک عددگاوسی

عدد $z = a + ib$ را که در آن $a, b \in Z$ و $i^۲ = -۱$ یک عدد گاوسی نامند. مجموعه‌ی اعداد گاوسی را با $Z[i]$ نمایش می‌دهند.

در اعداد صحیح، وقتی $b > ۱$ به‌عنوان مبنا انتخاب می‌شود، ارقام مجاز در این مبنا اعضای مجموعه‌ی $D = \{۰, ۱, \ldots, b-۱\}$ هستند. لذا در حالت کلی، می‌توان مجموعه‌ی D را انتخاب کرد و بر حسب کاربرد لازم، محدودیت‌هایی روی آن گذاشت.

به این ترتیب تعریف زیر را داریم:

تعریف. $b \in Z[i]$ با مجموعه‌ی ارقام D (که $۰ \in D \subseteq Z[i]$) را یک مبنای معتبر برای $Z[i]$ نامند اگر هر عدد صحیح گاوسی غیر صفر z را بتوان به‌شکل منحصر به فردی به صورت $z = \sum_{r=۰}^{k} \alpha_r b^r$ نوشت که k عددی حسابی است و $\alpha_r \in D$ و در این صورت می‌نویسند $z = (\alpha_k \alpha_{k-۱} \ldots \alpha_۱, \alpha_۰)_b$.

داویو و گروسارت (۱۹۷۸) ثابت کردند که $b = ۲ + i$ با مجموعه‌ی ارقام $D = \{۰, \pm۱, \pm i\}$ یک مبنای معتبر برای $Z[i]$ است. گاوس نشان داد که اگر m و n نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی $\{۰, ۱, \ldots, n^۲ + m^۲ - ۱\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به پیمانه‌ی $n + mi = b$ تشکیل می‌دهد. هم‌چنین، شرط لازم برای آن‌که بتوان تمام اعداد صحیح گاوسی را با استفاده از اعداد حسابی به عنوان ارقام در مبنای b نمایش داد آن است که $m = \pm۱$ (زیرا قسمت موهومی توان‌های

طبیعی b ، یعنی $(n+im)^r$ مضرب m هستند). در نتیجه، تنها مبنای ممکن $n \pm i$ با ارقام $\{۰,۱...,n^۲\}$ است که $n \in Z$.

کاتایی و زابو (۱۹۷۵) ثابت کرده‌اند که تمام اعداد صحیح گاوسی غیر صفر را می‌توان به صورت منحصر به فردی در مبنای $-n+i$ با استفاده از $D=\{۰,۱...,n^۲\}$ نوشت. مبنای $b=(-۱+i)$ با مجموعه‌ی ارقام $\{۰,۱\}$ سال‌هاست که توسط دانشمندان علوم کامپیوتر مورد استفاده قرار گرفته است (کنوت، ۱۹۸۱). بسط برخی از اعداد مختلط را در این مبنا ملاحظه کنید:

$$۲+۳i=(۱۰۱۱)_{-۱+i} \qquad ۵-۳i=(۱۰۱۱۱۰)_{-۱+i}$$
$$-۱-i=(۱۱۰)_{-۱+i} \qquad ۹=(۱۱۱۰۰۰۰۰۱)_{-۱+i}$$
$$۲-۵i=(۱۱۱۰۱۰۰۱۰۱۰)_{-۱+i} \qquad ۱+۲i=(۱۱۱۰۱۰۱)_{-۱+i}$$

۱.۴ محاسبه در مبناهای مختلط

ارقام مجاز در مبنای $-n+i$ عبارتند از $۰,۱...,n^۲$. پس اگر مجموع یک ستون (در جمع دو عدد) از $n^۲$ تجاوز کند، آن‌گاه $n^۲+۱$ یا مضربی از آن به ستون‌های سمت چپ آن منتقل می‌شود.

چون $n^۲+۱=(۱ \quad ۲n-۱ \quad (n-۱)^۲ \quad ۰)_{-n+i}$ پس سرریز $n^۲+۱$ در یک ستون به این معنی است که ارقام $(n-۱)^۲$ ، $۲n-۱$ و ۱ به سه ستون سمت چپ آن منتقل می‌شود. برای مبنای $-۱+i$ باید ارقام ۰ ، ۱ و ۱ به سه ستون سمت چپ اضافه شوند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{array}{r} ۲ + ۳i \\ + \ (-۱ - i) \\ \hline ۱ + ۲i \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} ۱ & ۱ & ۰ & & & & \\ & & ۱ & ۱ & ۰ & & \\ & & & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ & & & + & ۱ & ۱ & ۰ \\ \hline ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۲ + ۳i \\ \times \ (-۱ - i) \\ \hline ۱ - ۵i \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ & & & & & & & \times & ۱ & ۱ & ۰ \\ \hline & & & & & & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ & & & & & + ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ \hline & & & & & ۱ & ۱ & ۰ & & & \\ & & & ۱ & ۱ & ۰ & & & & & \\ & & ۱ & ۱ & ۰ & & & & & & \\ ۱ & ۱ & ۰ & & & & & & & & \\ \hline ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{array}$$

البته روش دیگری هم وجود دارد که در زیر، آن‌را توضیح می‌دهیم.

هر نمایش یک عدد در مبنای b را می‌توان به صورت یک چند جمله‌ای با متغیر b در نظر گرفت و جمع، تفریق و ضرب را بدون درنظر گرفتن انتقال‌ها در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های صوری $Z[b]$ انجام داد. تا این مرحله هیچ محدودیتی برای ضرایب توان‌های b ایجاد نمی‌شود. پس از پایان محاسبات چندجمله‌ای، حاصل باید **واضح** شود، یعنی تمام ضرایب در مجموعه‌ی D قرار گیرند.

چندجمله‌ای $b^۲+۲nb+(n^۲+۱)$ در مبنای $-n+i$ صفر است. این چند جمله‌ای را **چندجمله‌ای مینیمم** نامند که اضافه کردن هر مضرب آن به هر چندجمله‌ای از b تغییری حاصل نمی‌کند. لذا هر ضریبی که خارج از مجموعه‌ی D باشد، توسط مضربی از $(۱ \ ۲n \ n^۲+۱)_b$ واضح‌سازی می‌شود. برای مبنای $-۱+i$ داریم $n=۱$ و از $(۲ \ ۲ \ ۱)_{-۱+i}$ استفاده می‌شود. جواب مثال قبل را به این روش به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{r} ۲ + ۳i \\ + \ (-۱ - i) \\ \hline ۱ + ۲i \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ & & & & ۱ & ۱ & ۰ \\ \hline & & & ۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ & & & -۱ & -۲ & -۲ & \\ \hline & & & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \\ & & ۱ & ۲ & ۲ & & \\ \hline & & ۱ & ۲ & ۱ & ۰ & ۱ \\ & -۱ & -۲ & -۲ & & & \\ \hline & -۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ & & & & \\ \hline ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}$$

توجه کنید که رقم‌های ۲ و ۱- در $\{۰,۱\}$ نیستند.

مثال: اگر $b=-۳+i$ آن‌گاه $D=\{۰,۱,...,۹\}$ محاسبات زیر حاصل ضرب دو عدد را حساب می‌کند:

$$(۱۸۲)_{-۳+i} \times (۳۸)_{-۳+i} = (۱۳۵۴۶)_{-۳+i}$$

از سمت راست واضح‌سازی انجام می‌دهیم

برای مبنای $b=-3+i$ داریم

$$(1\ \ 6\ \ 10)_b = b^2+6b+10=0$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 8 & 2 \\
 & \times & & 3 & 8 \\
\hline
 & & 8 & 64 & 16 \\
 & & 3 & 24 & 6 \\
\hline
 & 3 & 32 & 70 & 16 \\
 & & -1 & -6 & -10 \\
\hline
 & 3 & 31 & 64 & 6 \\
 & -6 & -36 & -60 & \\
\hline
 & -3 & -5 & 4 & 6 \\
1 & 6 & 10 & & \\
\hline
1 & 3 & 5 & 4 & 6
\end{array}$$

الگوریتم واضح‌سازی، روشی برای نوشتن بسط یک عدد گاوسی در یک مبنا به دست می‌دهد.

برای نوشتن عدد گاوسی $s+it$ در مبنای $n+i$ – داریم:

$$s+it=t(-n+i)+(s+nt)$$

اما ممکن است $s+nt$ یا t به مجموعه‌ی $D=\{0,1,\ldots,n^2\}$ تعلق نداشته باشد. با عمل واضح‌سازی ضرایب را متعلق به D می‌سازیم.

مثال: عدد ۹ را در مبنای $-1+i$ با $D=\{0,1\}$ بنویسید.

می‌دانیم که $(2\ \ 2\ \ 1)_{-1+i}=0$ با کم و زیاد کردن sb^r برابر $(2\ \ 2\ \ 1)$ به طوری که اگر $a_r\notin D$، $0\le a_r+s(n^2+1)\le n^2$ ضرایب را واضح‌سازی می‌کنیم.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & 9 & \\
 & & & & & -4 & -8 & -8 & & \\
\hline
 & & & & & -4 & -8 & 1 & & \\
 & & & & 4 & 8 & 8 & & & \\
\hline
 & & & & 4 & 4 & 0 & 1 & & \\
 & & & -2 & -4 & -4 & & & & \\
\hline
 & & & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & 1 & 2 & & & & & & \\
\hline
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & -1 & -2 & & & & & & & \\
\hline
 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
1 & 2 & 2 & & & & & & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & &
\end{array}$$

$$(1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)_{-1+i}=9$$

۲.۴ بسط یک عدد مختلط (گاوسی یا غیرگاوسی) در مبنای مختلط

همان‌گونه که هر عدد حقیقی را می‌توان در مبنای دلخواه و صحیح $b>1$ بسط داد، در مورد هر عدد مختلط نیز می‌توان چنین کرد. هر عدد مختلط را در مبنای b می‌توان به صورت $z=\sum_{i\ =-i}^{\alpha} b^{i}$ نوشت که $\alpha_i\in\{0,1,\ldots,n^2\}$ و به صورت زیر نشان داد:

$$z=(\alpha_k\ \ \alpha_{k-1}\ \ldots\alpha_1\ \ \alpha_0\ .\ \alpha_{-1}\ \ \alpha_{-2}\ldots)_b$$

مثلاً

$$\frac{5+i}{4}=1+(-1+i)^{-2}+(-1+i)^{-3}=(1/011)_{-1+i}$$

$$\frac{1}{3}=(1/\overline{4624})_{-3+i}$$

$$\sqrt{2}+i=(15/49778016\ldots)_{-3+i}$$

$$\frac{1-2i}{5}=(0/\overline{001})_{-1+i}=(1\overline{100})_{-1+i}=(111/\overline{010})_{-1+i}$$

ملاحظه می‌شود که همانند وجود چند بسط برخی اعداد در مبنای ۲ یا ۱۰، در این‌جا هم یک عدد ممکن است چند بسط داشته باشد.

مشابه دستگاه اعداد حقیقی، اگر در $x+iy$، x و y گویا باشند، بسط آن متناهی یا نامتناهی و متناوب است و در غیر این صورت، بسط نامتناهی و غیرمتناوب است.

۳.۴ کاربرد در طراحی و کاشی‌کاری

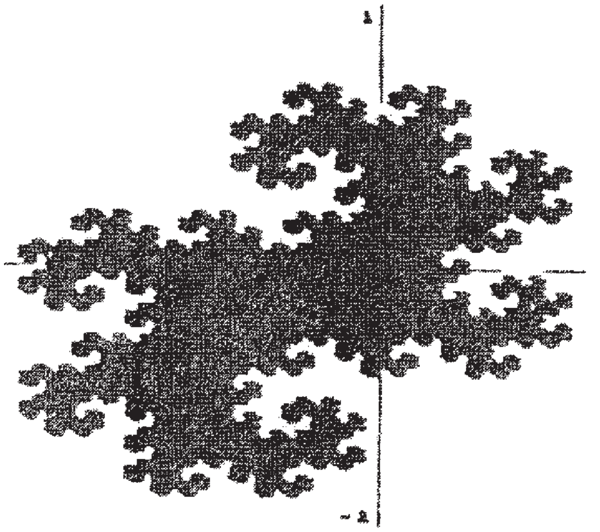
اصولاً منظور از کاشی‌کاری سطح، **پیدا کردن منحنی‌های**

مسطح صفحه پرکن است. یعنی، پوشاندن تمام صفحه توسط اشکال هندسی به طوری که هم‌پوشانی نداشته باشند. این نقوش، دارای **مرز خطی** نیستند بلکه **مرز فراکتالی** دارند.

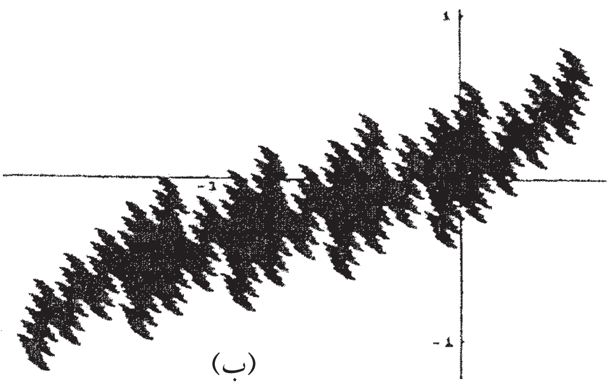
تعریف: به ازای هر مبنای b و مجموعه‌ی ارقام D ناحیه‌ی $T(b، D)$ را مجموعه‌ای از اعداد مختلط درنظر می گیریم که در مبنای b، دارای نمایشی با قسمت صحیح صفر باشند. یعنی، $T(b,D)=\{(0/\alpha_1\alpha_2\ldots)_b \mid \alpha_i \in D\}$. اگر b یک مبنای معتبر باشد، **$T(b,D)$ یک مجموعه‌ی بسته با مساحت یک** است که با استفاده از آن می‌توان صفحه را کاشی کاری کرد. به عبارت دیگر، اگر مجموعه‌ی بالا را با تبدیلات متناظر با اعداد صحیح گاوسی انتقال دهیم، تمام صفحه بدون هم‌پوشانی کاشی کاری خواهد شد و نواحی فقط دارای مرز مشترک هستند. در حقیقت، اگر مجموعه‌ی $T(b,D)$ را تحت عدد گاوسی z انتقال دهیم، مجموعه‌ای حاصل می‌شود که حاوی تمام اعداد با قسمت صحیح عدد z است.

در شکل (الف) مجموعه‌ی $T(-1+i,\{0,1\})$ و در شکل (ب) مجموعه‌ی $T(-2+i,\{0,1,2,4\})$ را ملاحظه می کنید.

به این ترتیب، با استفاده از رایانه و bهای مختلف، می‌توان منحنی‌های زیادی تولید کرد که دارای مرز فراکتالی هستند. مثلاً اگر $b=1-i$ ، منحنی حاصل یک منحنی برف‌دانه (snow flake) است (گیلبرت، ۱۹۸۲).



(الف)



(ب)

منابع

1. Davio, M. Deshamps, J.P. and Grossart, G. (1978). **Complex Arithmetic. Philips M.B.L.E. Research Lab.. Report R369**, Brussels (May 1978).
2. Gilbert, W.J. (1982). Complex Numbers With Three Radix Expressions. **Canada J. Math**. 34. 1348-1355.
3. Katai. I. and Szabo, J. (1975). **Canonical Number Systems for Complex integers**. Acta. Sei. Math. (Szeqed) 37, 255-260
4. Knuth, D.E. (1981). **The Art of Computer Programming**. Vol. 2; Semi Numerical Algorithms, Addison-Wesley, Reading MA, 1981.

جبر و احتمال به روایت تاریخ

● بیژن ظهوری زنگنه
استاد ریاضی دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

سال‌ها پیش، با یکی از همکاران دانشگاهی صحبت می‌کردیم. گفت در نام کتاب «جبر و احتمال» اشتباهی رخ داده! حتماً نام این کتاب «جبر و مثلثات» یا «آمار و احتمال» بوده است زیرا این عنوان، بی‌معنی است. به او گفتم درست است که این عنوان غیرمتعارف و غریب است، ولی لحظه‌ای فکر نکرده اید که در پشت این نام، فلسفه‌ای وجود دارد؟ و نفس انتخاب آن، می‌خواهد که خواننده را به چالش بکشد و وادار به تفکر کند؟! سؤال این همکار، انگیزه‌ی نوشتن این مقاله شد.

در این مقاله تاریخ شکل‌گیری کتاب جبر و احتمال و فلسفه‌ی آموزش آن بیان و تبیین شده است.

کلید واژه‌ها: کتاب درسی جبر و احتمال سال سوم ریاضی، برنامه‌ی درسی، آموزش متوسطه.

کتاب جبر و احتمال و حسابان در سال سوم رشته‌ی ریاضی فیزیک تدریس می‌شوند. از سال ۱۳۷۱ و با شروع نظام جدید آموزش متوسطه، کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول و دوم، برنامه‌ریزی و به تدریج تألیف شدند و در ابتدا، با عنوان ریاضی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ در چهار

در بعضی از دروس مقدماتی احتمال، تأکید زیادی بر روش‌های شمارش و ترکیبیاتی مانند ترکیب و ترتیب می‌گردد. تجربه‌ی تاریخی نشان داده است که این تأکید، باعث می‌شود که کسانی که از این روش‌ها خوششان نمی‌آید، علاقه‌مندی به احتمال را هم از دست داده‌اند

نیم سال اول تحصیلی دوره‌ی متوسطه، مورد استفاده قرار گرفتند. یعنی هم‌زمان با ورود دانش‌آموزان به هر پایه‌ی تحصیلی جدید، کتاب‌های آن پایه هم تألیف می‌شد. برای پایه‌ی سوم رشته‌ی ریاضی فیزیک، ۶ واحد ریاضی درنظر گرفته شده بود که شامل یک درس یک ساله و یک درس یک ترمی بود که درس یک‌ساله (با دو کتاب پشت سر هم) به حسابان اختصاص پیدا می‌کرد و در ادامه‌ی دروس ریاضی ۱ تا ۴ بود و قرار بود که ماهیت محاسبه‌ای و مدل‌سازی داشته باشد. بدین جهت، یک درس با ماهیت استدلالی و ارایه‌ی روش‌های مختلف استدلالی متناسب با استانداردهای مطرح برنامه‌ی درسی ریاضی دوره‌ی متوسطه در چارچوب درس حسابان نمی‌گنجید و ظرفیت جدیدی می‌طلبید. این مفاهیم شامل استدلال استنتاجی و استقرایی، استراتژی‌های حل مسأله، جبر مجموعه‌ها، رابطه و نمودارهای هندسی آن‌ها،

نامساوی‌ها، احتمال هندسی، احتمال و اعداد مختلط بودند.

توجه به این نکته مهم است که در ابتدا، نامی که برای دروس حسابان (۱) و (۲) درنظر گرفته شده بود، ریاضی ۵ و ۶ بود و برای این درس جدید که ماهیت استدلالی داشت نیز نام ریاضی ۷ درنظر گرفته شده بود. اما پس از شور و مشورت‌های بسیار، واژه‌ی «حسابان» برای درس‌های ریاضی ۵ و ۶ و عنوان «جبر و احتمال» برای ریاضی ۷ پذیرفته شد که داستان شکل‌گیری کتاب اخیر، هدف اصلی این مقاله است.

در کتاب جبر و احتمال، فصل اول به انواع استدلال از جمله استدلال‌های استقرایی و استنتاجی اختصاص یافته که مستقل از فصل‌های دیگر نیست و در واقع، ابزاری برای یادگیری و تدریس مفاهیم فصل‌های دیگر کتاب است؛ به همان ترتیبی که فصل‌های دیگر کتاب نیز، ابزاری برای تعمیق یادگیری انواع استدلال‌های استقرایی و استنتاجی است. فصل دوم کتاب مربوط به یکی از مباحث جالب و جذاب قابل طرح در سطح متوسطه است که در نظام سابق نیز این مبحث در ریاضیات جدید سال اول تدریس می‌شد. همین مبحث، ابزاری برای یاددادن و یادگرفتن استدلال استنتاجی و استراتژی‌های مختلف اثبات مانند برهان خلف است. ولی در کتاب ریاضیات جدید نظام سابق، این بحث بدون این‌که از آن به طور منسجم استفاده گردد، ارایه می‌شد و در نتیجه، ابتر باقی می‌ماند. احتمال ریاضی هم با توجه به اصول موضوع ساده‌ی آن، بهترین دستگاه برای آموزش نظام اصل موضوعی است که در آن، **جبر مجموعه‌ها** نقش اصلی را بازی می‌کند. بنابراین، اصول موضوع احتمال و ارتباط آن با نظریه‌ی مجموعه‌ها، به مباحث انسجام می‌دهد و مثلاً اگر احتمال را از این برنامه و کتاب حذف کنیم، ناقص می‌شود. در بخش نظریه‌ی احتمال، استفاده‌ی مکرر از استقرای ریاضی و نظریه‌ی مجموعه‌ها و با مطرح شدن احتمال هندسی و ارتباط هندسه‌ی مختصاتی با جبر و احتمال، وحدت ریاضی برقرار می‌شود یعنی ریاضی به صورت یک‌پارچه دیده می‌شود. مباحثی که ظاهراً ارتباطی با هم نداشتند در یک شکل منسجم به هم ارتباط و اتصال پیدا می‌کردند و بدین ترتیب، ارتباطات ریاضی‌وار که اتفاقاً، یکی از استانداردهای مطرح آموزش ریاضی شورای ملی معلمان ریاضی بود، به بهترین نحوی برقرار می‌گشت. علاوه بر این، رویکردی که برای برنامه‌ریزی درسی این کتاب درنظر گرفته شد، برنامه‌ی درسی تلفیقی بود، بدین معنا که دو حوزه‌ی مجزای ریاضی یعنی ریاضیات پیوسته و گسسته از طریق این برنامه، به هم پیوند می‌خورد و درهم تنیده می‌شد. هم‌چنین، «جبر و احتمال» حتی بین به ظاهر دورترین حوزه‌های ریاضی نیز وحدت برقرار می‌کرد. مسلماً این نام در جای دیگری مطرح نشده و از لغات ساخته‌شده‌ی شورای برنامه‌ریزی ریاضی بین سال‌های ۱۳۷۳ تا ۱۳۷۸ است. اهمیت دیگر موضوع کتاب این بود که تلفیق ریاضی با زمینه‌های بین رشته‌ای به‌خصوص با محوریت احتمال، بحث اصلی ریاضیات روز است و یکی از بهترین شاهدان این ادعا، بیست و پنجمین کنگره‌ی بین‌المللی ریاضی‌دانان است که در سال ۲۰۰۶ میلادی (۱۳۸۵)، در مادرید برگزار شد. این کنگره، ۲۰ سخنران عمومی و ۱۷۸ سخنران مدعو داشت که علت انتخاب و دعوت آن‌ها، پوشش متعادلی از موضوعات بحث‌انگیز، جذاب، به روز و رو به رشد ریاضی عنوان شده بود.

این کنگره تجلی واقعی ریاضیات مفهومی بود؛ ریاضیاتی که به شدت چهره‌ی تلفیقی و بین رشته‌ای داشت و ارتباط و اتصال شاخه‌های مختلف ریاضی در آن‌ها مشهود بود و به همین دلیل، از ریاضیات سنتی فاصله گرفته بود. در واقع ریاضیات مطرح شده در این کنگره، از ریاضیات سنتی بیشتر به منزله‌ی ابزار استفاده کرده بود، ابزارهای متداولی که زمانی هر یک مفهوم عمیقی در ریاضی بوده‌اند ولی در حال حاضر، ریاضی‌دان‌ها از آن‌ها، به‌خوبی، به عنوان ابزاری عادی اما عمیقاً مهم و مفید برای خلق مفاهیم پیچیده و تلفیقی استفاده می‌کنند. علاوه بر این، اکثر جایزه‌های مهم ریاضی در سال ۲۰۰۶، به کسانی تعلق گرفت که در احتمال و فرایندهای تصادفی تحقیق کرده بودند که ماهیتی تلفیقی و بین رشته‌ای داشت.

ویژگی‌های برنامه‌ی درسی جبر و احتمال

در بعضی از دروس مقدماتی احتمال، تأکید زیادی بر روش‌های شمارش و ترکیبیاتی مانند ترکیب و ترتیب می‌گردد. تجربه‌ی تاریخی نشان داده است که این تأکید، باعث می‌شود که کسانی که از این روش‌ها خوششان نمی‌آید، علاقه‌مندی به احتمال را هم از دست داده‌اند. واضح است که یکی از شاخه‌های رشته احتمال، «احتمال ترکیبیاتی» است و علاقه‌مندان به خود را نیز دارد ولی این تمام احتمال نیست. برای این منظور در برنامه‌ریزی درسی برای کتاب «جبر و احتمال»، سعی شد با وجود استفاده از این روش‌ها، تمام مباحث مقدماتی را وابسته به این مباحث نکنیم و بنابراین، از احتمال هندسی استفاده کردیم. چون بنابه باور آموزشی خود، تبدیل احتمال مقدماتی به روش‌های ترکیبیاتی را هم ظلم به احتمال و هم ظلم به ترکیبیات می‌دانستیم.

یکی دیگر از مباحثی که در این کتاب مطرح شد، اعداد مختلط بود. معرفی «اعداد مختلط» در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای،

جایگاه ویژه‌ای دارد و از چند دهه‌ی گذشته، در دوره‌های متوسطه‌ی اغلب کشورهای دنیا ـ به جز ایران ـ تدریس شده است. برای تدریس «اعداد مختلط» در دوره‌ی متوسطه، دلیل‌های موجهی وجود دارند که از آن جمله می‌توان به حل معادلات درجه دوم و کاربرد آن در هندسه و فیزیک الکتریسیته‌ی دوره‌ی متوسطه اشاره کرد.

در حال حاضر، به دلیل حذف و اضافه‌های مکرر این مبحث در دوره‌ی متوسطه، معمولاً در ابتدای تدریس ریاضی عمومی (۱) دانشگاه، «اعداد مختلط» تدریس می‌شود که سازگاری با سایر مباحث ریاضی دانشگاهی سال اول را ندارد. اما به دلیل ضروری دانستن آن برای تمام دانشجویان علوم پایه و مهندسی، در ابتدای ریاضی عمومی به این بحث پرداخته می‌شود. همه‌ی این‌ها در حالی است که جایگاه اصولی «اعداد مختلط» به شکل مقدماتی، محاسباتی و جبری آن، در دوره‌ی متوسطه است.

به هر حال و به دلایل تاریخی، در گذشته این مطلب در برنامه‌ی درسی دوره‌ی متوسطه ایران حضور نداشته است. در حالی که اگر به استانداردهای برنامه درسی ریاضی کشورهای پیشرفته توجه شود، آشنایی با «اعداد مختلط» در تمام آن‌ها وجود دارد.

باز هم برای آشنایی بیش‌تر با سیر تاریخی برنامه‌ی درسی ریاضی دوره‌ی متوسطه و دانشگاه در ایران، می‌توان به درس «متمم جبر» در دانشگاه‌ها اشاره کرد. این درس شامل اعداد مختلط، آنالیز ترکیبی و دترمینان بود. هدف این درس همان‌طور که از نام آن پیدا است، پرکردن خلاء‌های مدرسه‌ای بود که در زمان مناسب خود، به آن پرداخته نشده بود. به تدریج که این مباحث از سال ۱۳۵۰ وارد برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای در دوره‌ی متوسطه شد، این درس در دانشگاه، از موضوعیت خارج شد و از برنامه‌ی درسی دانشگاهی حذف گردید، اما تنها قسمتی از این درس که وارد برنامه‌ی درسی متوسطه نشد، مبحث «اعداد مختلط» بود.

در ابتدا، کتاب جبر و احتمال به عنوان یک درس ۲ واحدی در نظام نیم‌سالی واحدی جدید، در چهار فصل استدلال، جبر مجموعه‌ها، احتمال و اعداد مختلط برنامه‌ریزی و تألیف شد و در اولین چاپ آن در سال ۱۳۷۳، به بازار آمد. البته بعد از سالی واحدی شدن نظام جدید، جبر و احتمال به یک درس ۳ واحدی تغییر یافت و در نتیجه، برای آن، برنامه‌ریزی جدید انجام گرفت. در سال ۱۳۷۹ این کتاب با بازسازی کلی برای یک درس سه واحدی چاپ گردید و مبحث استدلال بدون تغییر ماند و فصل احتمال شرطی اضافه شد و اعداد مختلط و جبر مجموعه‌ها نیز بازسازی کلی شد. اما تغییرات به اینجا ختم نشد و مجدداً با موج دیگری، این درس دوباره به ۲ واحد تقلیل پیدا کرد و ۱ واحد این درس به درس دیگری داده شد و فصل‌های احتمال شرطی و اعداد مختلط از این کتاب حذف شدند.

نوآوری در بستر واقع‌بینی

با وجود تغییرات پی‌در پی و بدون توضیح و توجیه علمی ـ آموزشی، کتاب جبر و احتمال به سبب وجود نوآوری‌های منحصر به فردی که از نظر برنامه‌ریزی درسی ریاضی داشت، با کمترین مشکل در تدریس مواجه شد. معلمان که قبلاً ریاضیات جدید تدریس می‌کردند، به تدریس این کتاب روی آوردند و به زودی بر آن مسلط شدند. معلمان تازه‌کار نیز چون از تحصیلات جدید دانشگاهی برخوردار بودند، از لحاظ موضوعی با تدریس این کتاب مشکلی پیدا نکردند.

رویکردی که برای برنامه‌ریزی درسی این کتاب درنظر گرفته شد، برنامه‌ی درسی تلفیقی بود، بدین معنا که دو حوزه‌ی مجزای ریاضی یعنی ریاضیات پیوسته و گسسته از طریق این برنامه، به هم پیوند می‌خورد و درهم تنیده می‌شد

از همه مهم‌تر این‌که دانش‌آموزانی که مباحث جبر و احتمال را در دبیرستان یادگرفته بودند، به مباحث آن به خصوص احتمال، علاقه‌مند شدند و در این شاخه‌ی جاذب و پویای ریاضی، به فعالیت پرداختند.

چرا آمار و احتمال نباید با هم تدریس شوند

بعد از جبر و احتمال، تصمیم گرفته شد به منظور بالا بردن «سواد کمّی شهروندی»، یک درس آمار و مدل‌سازی برای تمام دانش‌آموزان دبیرستانی اجباری گردد به خصوص آن‌که مبارزه با بی‌سوادی کمّی، یکی از اهداف سال جهانی ریاضیات بود. ریزمواد و اهداف درس آمار و مدل‌سازی متناسب با این اهداف، تنظیم و به گروه تألیف داده شد. در این درس، هدف این بود که به جای تدریس تکنیک‌های آماری صرف، دانش‌آموزان یاد بگیرند که بتوانند با جمع‌آوری داده‌ها و تجزیه و تحلیل آن‌ها، به ارتقای توانایی‌های کمّی خود بیفزایند و با انتخاب مسائل ملموس، مهارت‌های شهروندی خود را افزایش دهند.

در این کتاب، مطالب مقدماتی و تجربی احتمال می‌توانست مفید باشد اما اهداف این درس، با جبر و احتمال کاملاً متفاوت بود. احتمال به عنوان بخشی جذاب و چالش‌برانگیز از ریاضی مدرسه‌ای برای دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی طراحی شده بود که توانایی حل مسأله، قدرت استدلال و تفکر تصادفی آن‌ها را ارتقا دهد. در صورتی که هدف کتاب آمار و مدل‌سازی، ایجاد یک درس عمومی برای همه‌ی شهروندان با حداقل دانش ریاضی اما استفاده از ظرفیت‌های آن بود. هدف آمار و مدل‌سازی این بود که مثلاً اگر دانش‌آموز اخبار اقتصادی تلویزیون یا روزنامه‌ها می‌شنود یا می‌خواند، بتواند آن را دنبال کند و به طور تجربی، به جمع‌آوری داده‌ها و تجزیه و تحلیل و تفسیر این داده‌ها بپردازد.

در نتیجه، برای تدریس آمار و مدلسازی، به معلمانی که با آمار و کاربردهای واقعی آن در علوم انسانی تسلط داشته باشند احتیاج است. در صورتی که در تدریس جبر و احتمال، به معلمانی که به ریاضی، شیوه‌های اثبات و استراتژی حل مسئله تسلط داشته باشند نیاز است. بنابراین، معلمان این دو درس، متفاوت و دارای علاقه‌مندی‌های گوناگون می‌باشند.

توصیه‌هایی برای بازنگری

اهداف مجله

● **مهدی رجبعلی‌پور/** استاد ریاضی و عضو فرهنگستان علوم ایران
● **محمدرضا فدایی/** عضو هیئت علمی دانشگاه شهید باهنر کرمان

به فضل الهی و با همت دست‌اندرکاران تحریریه و اجرائی و با حمایت مسئولان امر، صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی توسط دفتر انتشارات کمک‌آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش‌وپرورش منتشر می‌گردد. انتشار مستمر این مجله در ربع قرن گذشته، جایگاهی ویژه و نقش‌آفرین در حوزه‌ی آموزش ریاضی کشور داشته است. به‌عنوان آموزشگر ریاضی، ضمن ابراز خرسندی، بر خود لازم می‌دانیم از زحمات همه‌ی عزیزان دست‌اندر کار، تقدیر و تشکر به‌عمل آورده و اجر معنوی آنان را از خداوند متعال مسئلت نماییم.

سیر تکاملی انتشار ۲۷ ساله‌ی این مجله، همگام با تحولات آموزشی، رشد سریع تکنولوژی، افزایش انجمن‌های علمی و مجلات آموزشی، و نهایتاً شکل‌گیری و نهادینه‌شدن گردهمایی‌ها و کنفرانس‌های آموزشی در خور توجه است. در ادامه‌ی راه، بازنگری و تأمل در تدوین خط‌مشی آینده‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی ضروری به‌نظر می‌رسد. چنانچه در اهداف مجله، بر توسعه‌ی حرفه‌ای آموزش ریاضی تأکید شود، انتشار آن با مشارکت جمعی و رعایت نکات زیر، به عنوان یک مرجع فرهنگ‌ساز، خلاء موجود را در این حوزه مرتفع نموده و جایگاهش را بیش از پیش تحکیم می‌نماید.

۱. هماهنگی و وحدت نظر سیاست‌گذاران، برنامه‌ریزان و مجریان نظام آموزشی کشور و یاری داوطلبان این حوزه، شرطی اساسی و ضروری است تا اقداماتی یک‌پارچه و منسجم در جهت نیل به اهداف آموزشی ـ فرهنگی، به عمل آید. در این راستا، لازم است ارتباط مجله با واحدهای درون سازمانی وزارت آموزش و پرورش (از جمله دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، دفتر آموزش متوسطه، دفتر آموزش و ارتقای مهارت‌های حرفه‌ای و تربیت معلم، پژوهشکده‌های آموزشی و تربیتی، و...) نهادینه شود. این کار باعث می‌شود تا با تعامل با یکدیگر، بستر مناسبی برای ارائه‌ی تجربیات و رهنمودهای لازم به مراکز آموزشی که وظیفه‌ی تربیت

محمدرضا فدائی

آموزشگران ریاضی را عهده‌دارند فراهم شود و تداوم یابد.

۲. در شرایط فعلی که دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی ایام جوانی خود را سپری می‌کند و جای خالی مجلات علمی برای دانشجویان این دوره مشهود است، ایجاب می‌کند که مجله‌ی رشد آموزش ریاضی به عنوان یک منبع آموزشی خوب، این کمبود را در حد توان خود برطرف کند. بدین معنی که علاوه بر سایر رسالت‌ها، وظیفه‌ی ایجاد ارتباط بین دانشجویان دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و صاحب‌نظران این حوزه را عهده‌دار شود و آنان را با نظریه‌های پایه‌ای، دیدگاه‌های جدید و تحقیقات انجام شده، آشنا سازد.

۳. در برنامه‌ریزی محتوایی مجله، جایگاه ویژه‌ای برای بررسی مؤلفه‌های تشکیل دهنده‌ی حوزه‌ی آموزش ریاضی اعم از برنامه‌ریزی درسی، تألیف کتب درسی، ارزشیابی تحصیلی، دوره‌های بازآموزی معلمان و نظایر آن در نظر گرفته شود تا به بررسی و تجزیه و تحلیل این فعالیت‌ها از بعد نظری و عملکردی بپردازد.


مهدی رجبعلی‌پور

با عنایت به مطالب ذکر شده، جای نگرانی وجود ندارد اگر تغییراتی اساسی در اهداف و انتخاب محتوا، در جهت ارتقای سطح علمی مخاطبان، داده شود. این نکته که در بدو تأسیس این مجله، محتوای آن مناسب با نیاز دانشی دبیران وقت ـ که طبیعتاً در آن زمان، تعداد معلمان ریاضی با مدرک کارشناسی نسبت به تعداد معلمان دیپلمه یا دارای مدارک غیرمرتبط کمتر بوده است ـ در نظر گرفته شده با در نظر گرفتن این که اکنون اکثریت معلمان ریاضی، دوره‌های کارشناسی ریاضی را سپری نموده و تعدادی از آن‌ها دارای مدرک کارشناسی ارشد ریاضی نیز هستند، نکته‌ای حائز اهمیت و گویای ضرورت تغییر اهداف انتشار مجله می‌باشد.

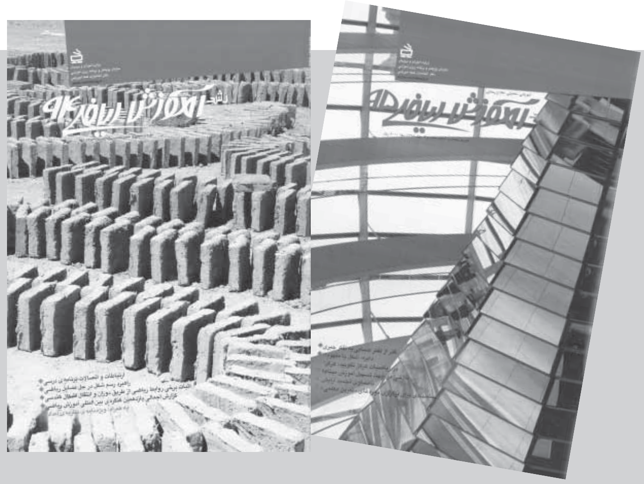
گزیده‌ی من از شماره‌های ۹۴ و ۹۵ مجله

شیوا زمانی
استادیار ریاضی دانشکده‌ی مدیریت و اقتصاد دانشگاه صنعتی شریف

به عنوان عضو کمتر فعال مجله، به دنبال یافتن ایده‌ای برای نوشتن، چند شماره‌ی اخیر مجله را از شماره‌ی ۹۴ تا ۹۷ ورق می‌زنم. آن‌چه می‌بینم، مجموعه‌ای پر محتوا، آموزنده و در عین حال جذاب است و کم‌کم به این فکر می‌رسم که به جای نوشتن متنی برای ویژه‌نامه‌ی صدمین شماره‌ی مجله که معتقدم چیزی به دانسته‌های خوانندگان آن اضافه نمی‌کند، بهتر است در مقام یکی از همین خوانندگان، بخش‌هایی را که دوست داشته‌ام بازنمایی کنم. بنابراین، آن‌چه در این نوشته می‌آید، گزیده‌ای است دوست‌داشتنی از دید من.

بخشی با عنوان «ارزیابی برای یادگیری» از مقاله‌ی «ره‌آوردی از ICMEII»، در رشد آموزش ریاضی شماره‌ی ۹۵ که از در میان گذاشتن اهداف یادگیری با دانش‌آموزان سخن می‌گوید:

«ارزیابی برای یادگیری، فرآیند استفاده از ارزیابی‌های کلاسی برای بهبود یادگیری است، در حالی که ارزیابی یادگیری، اندازه‌گیری چیزی است که دانش‌آموزان می‌توانند انجام دهند،



و معمولاً در پایان یک دوره‌ی یادگیری (یک درس) انجام می‌شود. در ارزیابی یادگیری:

● معلمان اهداف یادگیری را با دانش‌آموزان در میان می‌گذارند؛

● دانش‌آموزان اهدافی را که باید به سمت تحقق آن‌ها بکوشند، می‌دانند و تشخیص می‌دهند؛

● بازخورد معلم، دانش‌آموزان را به سمت شناسایی چیزی هدایت می‌کند که بعد از این باید انجام دهند تا یادگیری خود را بهبود بخشند؛

● فرض بر این است که (یادگیری) هر دانش‌آموزی می‌تواند بهبود یابد؛

● دانش‌آموزان، عملکرد و پیشرفت خود را مرور می‌کنند و بر آن بازتاب می‌نمایند و همراه با معلمان مهارت‌های (لازم) را در حین ارزیابی هم‌کلاسی‌ها و خود-ارزیابی، کسب می‌کنند.»

مطلب زیر نیز دریچه‌ای است به مقاله‌ی «در نگاه به آن‌چه نادرست است، چه چیزی درست است؟» از دبورا شیفتر، ترجمه‌ی سپیده چمن‌آرا، شماره‌ی ۹۴ رشد آموزش ریاضی:

معلم مسئله‌ی ضرب ۳۶×۱۷ را به دانش‌آموزان کلاس پنجم ابتدایی که قبلاً روش معمول ضرب اعداد چندرقمی را فراگرفته‌اند می‌دهد و از آن‌ها می‌خواهد روش‌های دیگری برای به‌دست آوردن جواب ابداع کنند. یکی از دانش‌آموزان استراتژی زیر را ارائه می‌دهد:

برای ساده‌تر کردن مسئله ۴ واحد به ۳۶ و ۳ واحد به ۱۷ اضافه می‌کنیم و اعداد حاصل یعنی ۴۰ و ۲۰ را در هم ضرب می‌کنیم که ۸۰۰ به‌دست می‌آید. سپس ۴ و ۳ را که قبلاً اضافه کرده بودیم از این حاصلضرب کم می‌کنیم.

این روش البته درست نیست و به نتیجه‌ی درستی هم منجر نمی‌شود، اما اگر بخواهیم همین روش را از طریق کم کردن مقادیر درستی از ۸۰۰ اصلاح کنیم، آن مقادیر درست چیست؟

ـ آیا ۸۰۰، ۴ تا ۱۷ و ۳ تا ۳۶ بیشتر از حاصلضرب ۳۶×۱۷ است؟

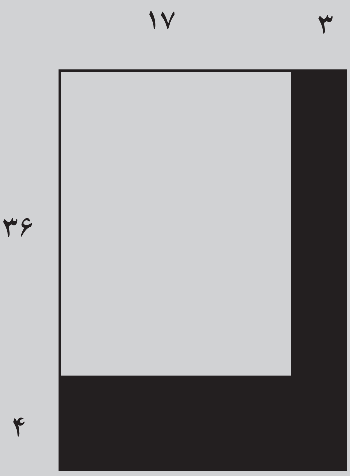
ـ آیا ۸۰۰، ۴ تا ۲۰ و ۳ تا ۴۰ بیشتر از حاصلضرب ۳۶×۱۷ است؟

ـ آیا ۸۰۰، ۴ تا ۲۰ و ۳ تا ۳۶ بیشتر از حاصلضرب ۳۶×۱۷ است؟

سه راه‌حل زیبای زیر پاسخ درست را مشخص می‌کند:

● ۴۰ دانش‌آموز در کلاس است، و هر یک از آن‌ها، مبلغ ۲۰ هزار تومان برای اردو پرداخت می‌کند. معلم ۲۰×۴۰ یعنی ۸۰۰ هزار تومان جمع می‌کند. ولی در روز اردو، ۴ دانش‌آموز غیبت می‌کنند، یعنی او باید ۲۰ تومان به هر یک از آن‌ها پس بدهد. پس از آن، معلم با ۳۶ دانش‌آموز به موزه می‌رود، ولی وقتی به آن‌جا می‌رسند، می‌بینند که بلیط ورودی به جای ۲۰ هزار تومان، ۱۷ هزار تومان است. این، یعنی باید به هر یک از ۳۶ دانش‌آموز باقی‌مانده، ۳ هزار تومان پس بدهد.

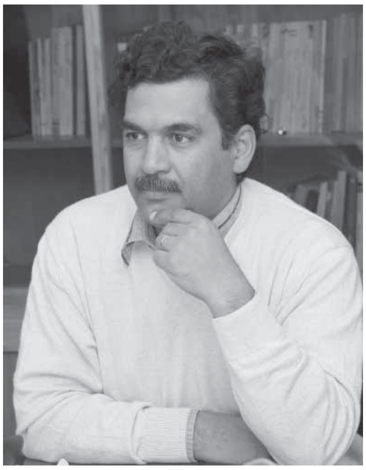
● به شکل زیر توجه کنید:



● راه حل سوم استفاده از خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع است:

(۳۶+۴)(۱۷+۳)=(۳۶×۱۷)+(۳۶×۳)+(۴×۱۷)+(۴×۳)

(۳۶×۱۷)+(۳۶×۳)+(۴×۲۰)



$1 = 0/\bar{9}$
یک واقعیت ریاضی یا حقیقتی باور نکردنی!

● مانی رضائی
دانشجوی دکترای ریاضی با گرایش آموزش ریاضی

چکیده

در این مقاله، موضوعات متعددی به طور هم‌زمان مورد بررسی قرار گرفته است. اما تلاشی برای تفکیک آن‌ها نشده است. از جمله، موضوعات زیر قابل بیان است:

- **آن‌چه که در مسیر آموزش ارایه می‌شود و دانش‌آموزان می‌آموزند (یا انتظار داریم که بیاموزند)؛**
- **مباحث تکمیلی که بعضی از معلمان به دانش‌آموزان ارایه می‌کنند؛**
- **برخی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد اعداد گویا؛ و در نهایت،**
- **بررسی یک باور عمومیِ رایج که در تناقض با یک واقعیت ریاضی است.**

مقاله براساس مطالعه‌ی منابعی در این زمینه و تجربه‌ی تدریس نگارنده تهیه شده است. این مقاله در بندهای مختلفی ارایه شده است که هر یک به طور مستقل، قابل مطالعه است. تلاش شده تا ارتباط منطقی بین این بندها آشکار باشد و تا حد امکان، خلاصه‌گویی شده است. جمع‌بندی نهایی، بر عهده‌ی خوانندگان مجله که معلمان ریاضی هستند و به احتمال زیاد، تجربیاتی مرتبط در این زمینه دارند گذاشته می‌شود.

کلید واژه‌ها: واقعیت ریاضی، نمایش کسری، دوره‌ی گردش، بسط اعشاری

۱

توسعه‌ی اعداد از سه مسیر متفاوت قابل بررسی است: مسیر توسعه‌ی اعداد بر بستر تاریخ؛ مسیر منطقی توسعه‌ی اعداد با استفاده از اصول موضوع ریاضی و مسیری که در برنامه‌ی آموزشی گنجانده شده است. بررسی سیر تاریخی توسعه‌ی اعداد با سیر منطقی ریاضی آن را به فرصتی دیگر موکول می‌کنیم. در این نوشتار، روی سیر آموزشی اعداد و به‌طور خاص، بر روند آموزش اعداد گویا متمرکز می‌شویم.

آشنایی دانش‌آموزان با محور اعداد از سال دوم دبستان با معرفی اعداد طبیعی روی یک خط (خط‌کش) آغاز می‌شود و سپس با نمایش کسری اعداد گویا در سال سوم و بعد از آن، با نمایش اعشاری اعداد گویا در سال پنجم دبستان آشنا می‌شوند و در سال دوم راهنمایی، نمایش اعداد گویا و اعشاری روی محور اعداد را می‌بینند. دانش‌آموزان با استفاده از محور اعداد تا حدی ارتباط بین نمایش کسری و اعشاری اعداد گویا را تجربه می‌کنند.

برای مثال، نمایش مقدار «نیمی از واحد» به شکل $\frac{1}{2}$ و $0/5$ با تقسیم طول واحد روی محور نشان داده می‌شود و تصور کسر به‌عنوان یک «تقسیم» در نمایش کسر اعداد گویا را برای دانش‌آموزان بدیهی می‌نمایاند. بدین‌ترتیب، دانش‌آموزان در مسیر آموزش، از همان ابتدا، تناظری بین اعداد و نقاط روی محور برقرار می‌کنند. در نتیجه، در دوره‌ی راهنمایی که اعداد دیگری روی محور شناسایی و معرفی می‌شود، این توجیه برای دانش‌آموزان تا حدودی بدیهی به‌نظر می‌رسد که برای هر عدد،

جایی روی محور پیدا می‌شود و برعکس، هر نقطه روی محور با یک عدد متناظر است.

۲

نمایش‌های متعددی برای یک عدد گویا وجود دارد. برای مثال، اعداد $\frac{۵}{۱}$، $\frac{۱۰}{۲}$، $\frac{۱۵}{۳}$، یا $\frac{-۵}{-۱}$ و...، شکل‌های گوناگونی از نمایش عدد ۵ است. چنان‌چه صورت و مخرج یک کسر در عددی صحیح ضرب شود، شکل دیگری برای نمایش کسری آن عدد گویا به‌دست می‌آید. دانش‌آموزان این موضوع را از همان ابتدای آشنایی با کسر بررسی می‌کنند. بدین‌ترتیب، می‌توان نمایش کسری اعداد گویا را چنین تعریف کرد: عددی به صورت $\frac{p}{q}$ را «گویا» می‌نامیم، اگر p عددی صحیح و q عددی طبیعی باشد. وجود علامت در شکل‌های دیگر نمایش کسر را می‌توان با قرارداد زیر معرفی کرد:

$$-\frac{p}{q}=\frac{-p}{q}=\frac{p}{-q}$$

۳

به روش‌های مختلف می‌توانیم دو عدد را باهم مقایسه کنیم و عدد بزرگ‌تر را شناسایی کنیم. به‌علاوه، در مجموعه‌ی اعداد صحیح، به ازای هر عدد داده شده، می‌توانیم عدد «بعدی» را «تعیین» کنیم. اما این کار در اعداد گویا ممکن نیست زیرا بین هر دو عدد گویا، یک «عدد گویا» وجود دارد، بنابراین، اگر عددی گویا داده شده باشد، نمی‌توان عدد «بعدی» را تعیین کرد. برخلاف بسیاری از جزییاتی که در مسیر آموزش مورد تأکید قرار گرفته است، وجود عددی گویا بین هر دو عدد گویای دلخواه، به‌طور پراکنده بیان می‌شود. اما در دوره‌ی دبیرستان از این ویژگی، به‌عنوان یک پیش‌فرض بدیهی استفاده می‌شود.

۴

به روش‌های مختلفی می‌توان عددی گویا بین دو عدد داده شده‌ی $a=\frac{p_{۱}}{q_{۱}}<\frac{p_{۲}}{q_{۲}}=b$ پیدا کرد.

روش نخست. میانگین هر دو عدد داده شده (از جمله اعداد گویا) بین آن دو عدد قرار دارد. برای اثبات کافی است به عبارت زیر توجه کنید:

$$a=\frac{a+a}{۲}<\frac{a+b}{۲}<\frac{b+b}{۲}=b$$

روش دوم. فرض کنید $\frac{p_{۱}}{q_{۱}}<\frac{p_{۲}}{q_{۲}}$ در نتیجه $p_{۱}q_{۲}<p_{۲}q_{۱}$. با استفاده از این رابطه، روش دیگری برای پیدا کردن یک عدد گویا بین دو عدد گویای داده شده معرفی می‌شود:

$$\frac{p_{۱}}{q_{۱}}=\frac{p_{۱}(q_{۱}+q_{۲})}{q_{۱}(q_{۱}+q_{۲})}=\frac{p_{۱}q_{۱}+p_{۱}q_{۲}}{q_{۱}(q_{۱}+q_{۲})}$$

$$<\frac{p_{۱}q_{۱}+p_{۲}q_{۱}}{q_{۱}(q_{۱}+q_{۲})}=\frac{(p_{۱}+p_{۲})q_{۱}}{q_{۱}(q_{۱}+q_{۲})}=\frac{p_{۱}+p_{۲}}{q_{۱}+q_{۲}}$$

و به‌طور مشابه داریم:

$$\frac{p_{۱}+p_{۲}}{q_{۱}+q_{۲}}=\frac{(p_{۱}+p_{۲})q_{۲}}{(q_{۱}+q_{۲})q_{۲}}=\frac{p_{۱}q_{۲}+p_{۲}q_{۲}}{(q_{۱}+q_{۲})q_{۲}}$$

$$<\frac{p_{۲}q_{۱}+p_{۲}q_{۲}}{(q_{۱}+q_{۲})q_{۲}}=\frac{p_{۲}(q_{۱}+q_{۲})}{(q_{۱}+q_{۲})q_{۲}}=\frac{p_{۲}}{q_{۲}}$$

در نتیجه؛

$$\frac{p_{۱}}{q_{۱}}<\frac{p_{۱}+p_{۲}}{q_{۱}+q_{۲}}<\frac{p_{۲}}{q_{۲}}$$

روش سوم. اگر $q_{۱}=q_{۲}$، آن‌گاه می‌توانیم عددی صحیح مانند c بین $p_{۱}$ و $p_{۲}$ بیابیم که کسر $\frac{c}{q_{۱}}$ بین این دو عدد است.

در حالتی که مخرج‌ها برابر نباشند، می‌توانیم دو عدد داده شده را به کسرهایی با مخرج‌های برابر تبدیل کنیم و در حالتی که $p_{۱}$ و $p_{۲}$ متوالی باشند، صورت و مخرج هر دو کسر را در عددی ثابت ضرب می‌کنیم تا فاصله‌ی بین صورت کسرها بیشتر شود و عددی صحیح بین آن دو پیدا شود.

برای مثال، با این روش بین دو عدد $\frac{۱۳}{۳۱}$ و $\frac{۴۰}{۹۳}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱۳}{۳۱}=\frac{۳۹}{۹۳}=\frac{۷۸}{۱۸۶}\\ \frac{۴۰}{۹۳}=\frac{۸۰}{۱۸۶}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۱۳}{۳۱}<\frac{۷۹}{۱۸۶}<\frac{۴۰}{۹۳}$$

بدین‌ترتیب، سه روش برای پیدا کردن عددی گویا بین دو عدد گویای داده شده معرفی شد. واضح است که روش‌های دیگری نیز برای تعیین چنین اعدادی وجود دارد.

۵

یکی دیگر از شکل‌های نمایش عدد گویا $\frac{p}{q}$، نمایش اعشاری آن است. نمایش اعشاری هر عدد گویا از تقسیم

صورت کسر بر مخرج آن به‌دست می‌آید. اگر در هر مرحله، باقی‌مانده‌ی تقسیم برابر با صفر شود، نمایش اعشاری آن عدد گویا متناهی است. اما چنان‌چه این باقی‌مانده در هیچ مرحله‌ای صفر نشود، از آن‌جا که به ازای هر q (مخرج کسر) $q-1$ باقی‌مانده‌ی ناصفر متمایز داریم، بنابراین حداکثر به این تعداد، رقم‌های اعشاری مختلف به دست می‌آید و از جایی به بعد، باقی‌مانده‌ی تقسیم، تکرار می‌شود. یک مجموعه از این رقم‌های تکراری «دوره‌ی گردش» نامیده می‌شود و با گذاشتن یک خط بالای این رقم‌ها، آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

برای مثال، بسط اعشاری عددهای $\frac{1}{n}$ به ازای $n=2,3,4,........9$ چنین است:

$$\frac{1}{2}=0/5$$

$$\frac{1}{3}=0/33333...=0/\overline{3}$$

$$\frac{1}{4}=0/25$$

$$\frac{1}{5}=0/2$$

$$\frac{1}{6}=0/166666...=0/1\overline{6}$$

$$\frac{1}{7}=0/142857142857142857...=0/\overline{142857}$$

$$\frac{1}{8}=0/125$$

$$\frac{1}{9}=0/11111...=0/\overline{1}$$

می‌توان فرض کرد هر عدد گویا به‌صورت حاصل جمع کسرهایی است که مخرج آن‌ها توانی از ۱۰ باشد:

$$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$$

و برای نمایش اعداد گویا که رقم‌های اعشاری آن‌ها متناهی نیستند نیز این حکم برقرار است. در این حالت، تعداد جمله‌ها نامتناهی است:

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+...$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{6}{10^4}+...$$

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{8}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\frac{7}{10^6}+...$$

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...$$

در حالت نامتناهی، مجموع هر تعداد متناهی از جمله‌های این عبارت‌ها (مجموع جزئی سری)، تقریبی از عدد گویای مورد نظر است. هم‌چنین، برای هر عدد گویا با دوره‌ی گردش نیز می‌توان چنین تقریبی را به‌دست آورد. اما همین رویکرد در پاره‌ای موارد می‌تواند مبدأ یکی از بدفهمی‌ها باشد.

برای مثال، عدد ۰/۳۳۳ تقریبی از عدد $0/\overline{3}$ است. در نتیجه، ۰/۳۳۳ تقریبی برای $\frac{1}{3}$ نیز هست. اما تجربه‌ی تدریس، نشان می‌دهد که در برخی موارد، دانش‌آموزان با تعمیم این تقریب، عدد $0/\overline{3}$ را به‌عنوان تقریب $\frac{1}{3}$ می‌دانند!

۶

چه رابطه‌ای بین نمایش اعشاری عدد گویای A و نمایش اعشاری 10A وجود دارد؟ به‌جای بررسی حالت کلی، یک حالت خاص را مورد توجه قرار می‌دهیم. فرض کنید در نمایش اعشاری عدد موردنظر، تنها یک رقم تکرار شود، یعنی طول دوره‌ی گردش ۱ باشد مانند $A=0/\overline{a}$. با نمایش کسرهای اعشاری این عدد داریم:

$$A=0/\overline{a}=\frac{a}{10}+\frac{a}{100}+\frac{a}{1000}+...\frac{a}{10^n}+...$$

$$10A=10(\frac{a}{10}+\frac{a}{100}+\frac{a}{1000}+...\frac{a}{10^n}+...)$$

$$=a+\frac{a}{10}+\frac{a}{100}+\frac{a}{1000}+...=a/\overline{a}$$

یعنی علامت اعشاری یک رقم جابه‌جا شده است. با تعمیم این ویژگی، می‌توان نشان داد که اگر عددی گویا را در 10^n ضرب کنیم، در نمایش اعشاری آن، علامت اعشاری آن به تعداد n جابه‌جا می‌شود.

۷

چگونه می‌توان نمایش اعشاری عدد گویا را به نمایش کسری آن تبدیل کرد؟ برای پاسخ به این پرسش، از ویژگی بند ۶ استفاده می‌کنیم و روش مربوط را در مثال‌های زیر بررسی می‌کنیم.

مثال. نمایش کسری عدد $A=۰/\overline{۴}$ را بیابید.

$$\begin{array}{rl} ۱۰A = ۴/\overline{۴} & \\ -\quad A = ۰/\overline{۴} & \\ \hline ۹A = ۴ & \Rightarrow A = \frac{۴}{۹} \end{array}$$

مثال. نمایش کسری عدد $A=۰/۱۲\overline{۳}$ را بیابید.

$$\begin{array}{rl} ۱۰۰۰A = ۱۲۳/\overline{۳} & \\ -\quad ۱۰۰A = ۱۲/\overline{۳} & \\ \hline ۹۰۰A = ۱۱۱ & \Rightarrow A = \frac{۱۱۱}{۹۰۰} \end{array}$$

برای دانش‌آموزان جالب است که نشان دهیم انتخاب دوره‌ی گردش، منحصر به فرد نیست.

برای مثال، عدد گویای $A=۰/۱۹۱۹۱۹۱۹...$ را می‌توان به دو شکل $A=۰/\overline{۱۹}$ و $A=۰/۱\overline{۹۱}$ نمایش داد و داریم:

$$\begin{array}{rl} ۱۰۰A = ۱۹/\overline{۱۹} \\ -\quad A = ۰/\overline{۱۹} \\ \hline ۹۹A = ۱۹ \end{array} \qquad \begin{array}{rl} ۱۰۰۰A = ۱۹۱/\overline{۹۱} \\ -\quad ۱۰A = ۱/\overline{۹۱} \\ \hline ۹۹۰A = ۱۹۰ \end{array}$$

که در هر دو حالت، $A=\frac{۱۹}{۹۹}$.

۸

با کشف این‌که $A=۰/\overline{a}=\frac{a}{۹}$، دانش‌آموزان می‌توانند نتایج جالب دیگری را نیز به دست آورند. فرض کنید a، b و c عددهایی یک‌رقمی باشند که $c=ab$. رابطه‌ی بین نمایش کسری دو عدد گویای $A=۰/\overline{a}$ و $C=۰/\overline{c}$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{array}{rl} ۱۰A = a/\overline{a} & \\ -\quad A = ۰/\overline{a} & \\ \hline ۹A = a & \Rightarrow A = \frac{a}{۹} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} ۱۰C = c/\overline{c} & \\ -\quad C = ۰/\overline{c} & \\ \hline ۹C = c & \Rightarrow C = \frac{ab}{۹} = bA \end{array}$$

برای مثال، $۰/\overline{۶}=\frac{۶}{۹}=۲\times\frac{۳}{۹}=۲\times۰/\overline{۳}$. هم‌چنین اگر $c=a+b$، رابطه‌ای مشابه بین نمایش کسری دو عدد گویای $A=۰/\overline{a}$، $B=۰/\overline{b}$ و $C=۰/\overline{c}$ وجود دارد.

$$A+B=\frac{a}{۹}+\frac{b}{۹}=\frac{a+b}{۹}=\frac{c}{۹}=C$$

اما توجه کنید که اگر حاصل ضرب یا حاصل جمع این عددها تک‌رقمی نباشد، این نتایج کارآمد نیست. با این حال می‌توانیم با استفاده از این ویژگی‌ها، حاصل را به دست آوریم. برای مثال در جمع زیر از نمایش کسری اعداد گویا استفاده شده است.

$$۰/\overline{۵}+۰/\overline{۸}=\frac{۵}{۹}+\frac{۸}{۹}=\frac{۱۳}{۹}=۱\frac{۴}{۹}$$
$$=۱+\frac{۴}{۹}=۱+۰/\overline{۴}=۱/\overline{۴}$$

۹

نمایش کسری برای عدد گویای $۰/\overline{۹}$ چیست؟

$$\begin{array}{rl} ۱۰A = ۹/\overline{۹} & \\ -\quad A = ۰/\overline{۹} & \\ \hline ۹A = ۹ & \Rightarrow A = \frac{۹}{۹} = ۱ \end{array}$$

به عبارت دیگر $۰/\overline{۹}=۱$.

به ازای نمایش کسری هر عدد گویا، می‌توان با تقسیم صورت آن بر مخرج، نمایش اعشاری عدد را به دست آورد. اما نمی‌توان کسری مانند $\frac{p}{q}$ یافت که با عمل تقسیم، نمایش اعشاری $۰/\overline{۹}$ به دست بیاید. همین موضوع باعث شده تا در دوره‌های مختلف آموزشی، شاهد آن باشیم که دانش‌آموزان و دانشجویان، با وجود آن‌که اثبات‌های متعددی برای برابری ۱ با $۰/\overline{۹}$ می‌بینند، اما این برابری را باور ندارند! در ادامه، دو نمونه‌ی دیگر از اثبات‌های مورد اشاره آمده است.

۹

می‌دانیم $۰/\overline{۱}=\frac{۱}{۹}$ و با استفاده از ویژگی‌های مورد اشاره در بند ۶، مضارب این کسر را می‌توانیم به‌دست آوریم، به‌طور خاص $۰/\overline{۳}=۳\times۰/\overline{۱}=۳\times\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۳}$ یعنی $۰/\overline{۳}=\frac{۱}{۳}$ که پیش‌تر آن

را محاسبه کردیم. بدین ترتیب:

$$\frac{۳}{۹}=۰/\overline{۳}$$

هم‌چنین

$$\frac{۶}{۹}=۰/\overline{۶}$$

و در نتیجه، عبارت

$$\frac{۹}{۹}=۰/\overline{۹}$$

همان حکم موردنظر است، یعنی $۰/\overline{۹}=۱$.

۹

به‌عنوان اثباتی دیگر، فرض کنید چنین نباشد (برهان خلف). یعنی $۰/\overline{۹}<۱$. بنابر بند ۳، بین این دو عدد باید عددی گویا مانند M وجود داشته باشد که $۰/\overline{۹}<M<۱$. در این صورت M چیست؟ برای پاسخ به این پرسش، به نمایش اعشاری M توجه می‌کنیم. اگر در هر کدام از رقم‌های اعشاری M رقمی به‌جز ۹ باشد، $M<۰/\overline{۹}$ که با انتخاب M در تناقض است، و اگر تمام رقم‌ها ۹ باشد $M=۰/\overline{۹}$ که در هر دو حالت، با نتایج بند ۴ در تناقض است. پس چنین عددی نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین، فرض $۰/\overline{۹}<۱$ نادرست است. در نتیجه $۰/\overline{۹}=۱$.

۹

تا این‌جا، استدلال‌های گوناگونی برای این برابری ارایه شد و با وجود آن‌که بعضی از دانش‌آموزان و حتی دانشجویان سال‌های اول، برابری $۰/\overline{۹}=۱$ را به‌عنوان یک «واقعیت ریاضی»، می‌پذیرند، اما در عملکرد خود شواهدی مبنی بر باور آن کمتر به چشم می‌خورد. یکی دیگر از ایرادها، به شکل نمایش اعشاری این عدد است. از آن‌جا که نمایش اعشاری این عدد، «مشابه» عددهای بازه‌ی (۰,۱) است، برای بعضی از دانش‌آموزان، پذیرش این واقعیت که $۰/\overline{۹}$ «برابر» با ۱ است، در تناقض با تعریف «بازه‌ی باز» است.

۹

در تجربه‌ی معلمی، بارها شاهد آن بوده‌ایم که دانش‌آموزان این عبارت را یک «حقیقت باور نکردنی» برشمردند. تعبیر دانش‌آموزان از $۰/\overline{۹}$ دوگانه است. از یک سوی، آن را به عنوان عددی گویا می‌پذیرند، زیرا نمایش اعشاری آن دارای دوره‌ی گردش است. از سوی دیگر، با توجه به نامتناهی بودن رقم‌های این عدد، به نوعی برای آن ویژگی «حدی» قائل هستند و نقطه‌ای خاص (یا ثابت) روی محور اعداد به آن نسبت نمی‌دهند. این دانش‌آموزان معتقدند، در عین حال که $۰/\overline{۹}$ عدد است، مکان آن را روی محور اعداد «نمی‌توان» تعیین کرد، یعنی ماهیت این عبارت را حدی می‌دانند! در این حالت، مفهوم بینهایت به‌عنوان یک مقدار ایستا[1] یا یک مفهوم پویا[2] مخدوش می‌شود.

۹

در کلاسی که بحث در این مورد به پایان رسیده بود، در پاسخ به سؤال امتحانی «مقدار عددی $[۰/\overline{۹}]$ (جزء صحیح) چیست؟» بسیاری از دانش‌آموزان عدد صفر را به‌دست آوردند! هر چند آن‌ها اثبات $۰/\overline{۹}=۱$ را دیده‌اند، اما در محاسبه‌ی $[۰/\overline{۹}]$ این عدد را مقداری کوچک‌تر از یک فرض کردند! در ریشه‌یابی این مشکل، وجود برخی میان‌بُرهای آزمون‌های تستی برجسته شد. گروهی از دانش‌آموزان معتقدند مقدار $۰/\overline{۹}$ برابر با «یک حدی» است! نه به‌طور دقیق یک اصطلاح «صفر حدی»، «یک حدی» و در حالت کلی‌تر «مقدار حدی» (نه «مقدار حد») در برخی موارد، در آزمون‌های تستی و با هدف ارائه‌ی روش‌هایی «سریع» برای محاسبه‌ی حد، به کار می‌رود. این‌که چنین مفهومی به چه معناست، حتی در بین بعضی معلمان «متخصص» این نوع آزمون‌ها، توافق وجود ندارد! اما روشن است که کاربرد آن برای این موضوع، می‌تواند موجب بدفهمی شود.

بحث در این باره و موضوعات پیش‌تر گفته شده و ریشه‌یابی این بدفهمی، نیازمند یک تحقیق آموزشی است. اما نباید با ارائه‌ی یافته‌های چنین تحقیقاتی، از جایگاه بحث‌های سازنده برای غنا بخشیدن به محتوای تدریسی کلاس، غافل شد.

• • •

کلاس درس، فرصتی برای اندیشیدن و بحث و تبادل نظر دانش‌آموزان است. در چنین محیطی، امکان بیشتری برای ایجاد ارتباط‌های مفهومی و توسعه‌ی شبکه‌ی مفهومی توسط خود دانش‌آموزان وجود دارد.

پی‌نوشت

1. Static
2. Dynamic

سه مرد گرسنه

و راهبرهای حل مسئله*

اقتباس: سهیلا غلام آزاد
دکترای آموزش ریاضی و عضو مؤسسه‌ی پژوهشی برنامه ریزی درسی و نوآوری‌های آموزشی

در ریاضی مسائلی وجود دارند که با وجود ظاهری ساده، از غنای آموزشی زیادی برخوردارند. از جمله این گونه مسائل می‌توان به مسئله‌ی سه مرد گرسنه اشاره کرد:

سه مرد گرسنه در حالی که کیسه‌ای سیب به همراه داشتند، در جایی به خواب رفتند. در نیمه‌های شب یکی از مردها بیدار شد، $\frac{1}{3}$ سیب‌ها را خورد، و به خواب برگشت. کمی بعد دومین مرد بیدار شد و $\frac{1}{3}$ باقی مانده‌ی سیب‌ها را خورد و برگشت و خوابید. بالاخره، مرد سوم بیدار شد و $\frac{1}{3}$ باقی مانده‌ی سیب‌ها را خورد. وقتی خوردن او تمام شد، ۸ سیب در کیسه باقی مانده بود. در ابتدا چند سیب در کیسه بوده است؟

شاید در نگاه اول، به‌نظر آید که طرح این مسئله به‌عنوان کاربردی از جبر مقدماتی مناسب است. ولی خواهید دید که این مسئله را ندیده‌اید، به شما توصیه می‌شود قبل از ادامه‌ی خواندن این مقاله، مسئله را از هر راهی که به نظر شما می‌تواند راه‌حل زیبا و خوش ساخت این مسئله باشد، حل کنید. این کار باعث خواهد شد که از خواندن ادامه‌ی این مقاله لذت بیشتری برده و ظرافت‌های این مسئله را بهتر ببینید.

جین واتسون** (۱۹۹۸) مسئله‌ی سه مرد گرسنه را در اختیار طیف وسیعی از دانش‌آموزان ابتدایی و متوسطه تا دانشجویان سال سوم دانشگاه قرار داد. این مسئله اساساً به‌عنوان بخشی از آزمون دانشجو-معلمان ابتدایی در قسمت کسرها مطرح بود، که در مقاله‌ی واتسون دست‌مایه‌ی پژوهشی در زمینه‌ی حل مسئله قرار گرفت. در مقاله‌ی حاضر، ضمن ارائه و بحث در مورد راه‌حل‌های منتخب واتسون، ظرفیت این مسئله به‌عنوان ابزاری برای آموزش حل مسئله دیده می‌شود. در پایان توصیه‌هایی برای معلمان در زمینه‌ی چگونگی به‌کارگیری مسئله‌های غنی مانند «سه مرد گرسنه» در آموزش ریاضی ارائه می‌شود.

کلید واژه‌ها: راهبردهای حل مسئله، حل مسئله، راه‌حل‌های متنوع برای یک مسئله.

راهبردهایی که از مسیر آخر به اول مسئله کارآیی دارند

حل مسئله بدون استفاده از کسرها

راه‌حل ارائه شده در زیر، حاصل کار گروهی ۴ دانش‌آموز دختر باهوش و زرنگ کلاس سوم ابتدایی است که هنوز هیچ آموزش رسمی در زمینه‌ی کسرها نداشته‌اند. معلم این دانش‌آموزان فقط در ابتدا اطمینان حاصل کرد که آن‌ها مفهوم $\frac{1}{3}$ را می‌دانند، سپس مسئله را به آن‌ها داد. او به جای کیسه‌ی سیب، از بشقاب سیب استفاده کرد.

حل (۱)

وقتی مردها سیب هایشان را خورده بودند، ۸ سیب باقی مانده بود. سپس مرد آخر ۱۲ سیب در بشقاب داشت قبل از آن که یک سوم خود را بخورد. یک سوم ۱۲، ۴ است، سپس مقدار باقی مانده در بشقاب بعد از آن که مرد سیبش را خورد ۱۲ به علاوه ۶ = ۱۸. سپس بعد از آن که مرد قبل از او سیب بخورد، ۱۸ سیب باقی بود. سپس مرد اول ۹ سیب خورد که جواب می شه ۲۷.

این دختران گفتند که توضیح راه‌حل‌شان سخت‌تر از انجام دادن آن بود.

شرکت‌کنندگان این مطالعه در سنین مختلف، نوعی از این راه‌حل را ارائه دادند که البته توضیحات بسیاری از آن‌ها، بهتر از توضیح ارائه شده در بالا بود.

حل مسئله با استفاده از کسرها

حل زیر، یک راه‌حل نمونه با استفاده از کسرها است که توسط یک دانش‌آموز پایه‌ی ۶ (معادل اول راهنمایی) ارائه شده است. استفاده‌ی ضعیف از علامت تساوی، مانند آن‌چه در حل ۲ مشاهده می‌شود در همه‌ی سطوح، حتی در سطح دانشجو ـ معلمان نیز قابل مشاهده بود.

یکی از مشاهدات جالب در بررسی راه‌حل‌های دانش‌آموزان عدم تمایل به استفاده از کلمات در توضیح راه‌حل مسئله‌ی ریاضی بود. این مشاهده را می‌توان به‌عنوان یک ویژگی نوعیِ بسیاری از حل‌ها دانست.

حل (۲)

$\frac{۲}{۳} = ۸$

$\frac{۱}{۲}$ از ۸ = $\frac{۱}{۳}$

۴ = $\frac{۱}{۲}$ از ۸

$۸ + ۴ = ۱۲$

$\frac{۲}{۳} = ۱۲$

$\frac{۱}{۲}$ از ۱۲ = $\frac{۱}{۳}$

۶ = $\frac{۱}{۲}$ از ۱۲

$۱۲ + ۶ = ۱۸$

$\frac{۲}{۳} = ۱۸$

$\frac{۱}{۲}$ از ۱۸ = $\frac{۱}{۳}$

۹ = $\frac{۱}{۲}$ از ۱۸

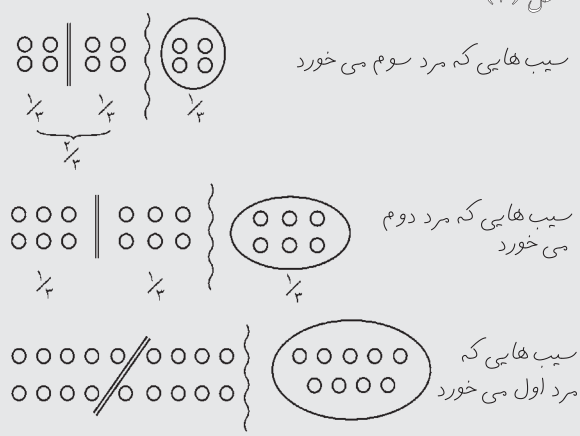
$۱۸ + ۹ = ۲۷$

تعداد سیب‌های داخل کیسه = ۲۷

حل مسئله از طریق رسم نمودار یا تصویر

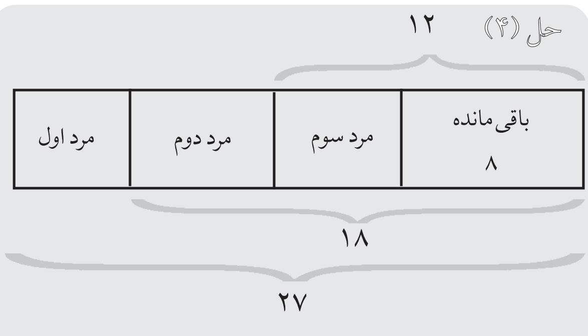
حل (۳)، با استفاده از رسم نمودار توسط یک دانشجو ـ معلم ارائه شد. احتمالاً او در ذهن خود به دنبال یک توضیح ملموس برای دانش‌آموزان ابتدایی بوده است.

حل (۳)



یک دانش‌آموز پایه‌ی ۸ نیز، حل (۴) را به‌عنوان قسمتی از راه‌حل خود ارائه داد.

حل (۴)



می خواهم در ذهنم تصویری از چگونگی خورده شدن سیب ها ببینم

حل مسئله به‌صورت نظام‌دار با استفاده از جبر

دانش‌آموزان پایه‌ی ۱۱ (معادل پایه‌ی سوم متوسطه) عموماً مسئله را با استفاده از جبر حل کردند. حل (۵)، نمونه‌ای از این

راه‌حل‌هاست. بعضی از این دانش‌آموزان نیز به جای یک متغیر از سه متغیر (x, y و z) استفاده کردند. لازم به ذکر است که تعداد بسیار کمی از دانش‌آموزان زیر کلاس ۱۰ قادر به به‌کارگیری موفقیت‌آمیز روش‌های جبری بودند.

حل (۵)

$$\frac{۲}{۳}x = ۸$$
$$\therefore ۲x = ۲۴$$
$$\therefore x = ۱۲$$ سیب

$$\frac{۲}{۳}x = ۱۲$$
$$\therefore ۲x = ۳۶$$
$$\therefore x = ۱۸$$ سیب

$$\frac{۲}{۳}x = ۱۸$$
$$\therefore ۲x = ۵۴$$
$$\therefore x = ۲۷$$ سیب

∴ بنابراین در ابتدا ۲۷ سیب در کیسه بوده است.

حل مسئله با استفاده از وارون یا نسبت

حل (۶) توسط یک دانشجوی سال سوم ارائه شد. او مسئله را با استفاده از مفهوم نسبت و به‌کارگیری وارون $\frac{۲}{۳}$ در یک روند سه مرحله‌ای حل کرد. جالب آن‌که هیچ‌کس حل کاملی از این مسئله با استفاده از تناسب مانند $\frac{۸}{x} = \frac{۲}{۳}$ و در ادامه‌ی آن $\frac{۱۲}{x} = \frac{۲}{۳}$ و غیره، ارائه نداد.

حل (۶)

بعد از سومی $= ۸$

بعد از دومی $۱۲ = ۸ \times \frac{۳}{۲}$

بعد از اولی $= ۱۸ = ۱۲ \times \frac{۳}{۲}$

قبل از اولی $= ۲۷ = ۱۸ \times \frac{۳}{۲}$

∴ ۲۷ سیب

خطاها در راهبردهایی که از مسیر آخر به اول مسئله به کار می‌روند

در نظر گرفتن ثلث‌های مساوی

حل ۷ توسط یک دانش‌آموز پایه‌ی ۶ ارائه شد. البته این فرض نادرست که هر سه مرد به یک تعداد سیب خوردند در راه‌حل بسیاری از دانش‌آموزان تا پایه‌ی ۹ نیز مشاهده شد. در تعیین تعداد سیب‌های خورده شده توسط هر مرد، به نظر می‌آید که دانش‌آموزان سلیقه‌ای عمل کردند. بزرگ‌ترین تعداد انتخاب شده از بین این اعداد ۱۵ بود!

حل (۷)

۱۴ سیب وجود داشتم

مرد اول ۲ سیب خورد

مرد دوم ۲ سیب خورد

مرد سوم ۲ سیب خورد

و ۸ سیب باقی‌مانده بود

نادیده گرفتن سیب‌های باقی‌مانده

حل (۸) توسط یک دانش‌آموز پایه‌ی ۸ انجام شد. البته خطای موجود در این حل در تمام سطوح تا سال سوم دانشگاه نیز مشاهده شد. جالب توجه این‌که تقریباً هیچ‌یک از این افراد از نتیجه‌ی به دست آمده، یعنی خورده شدن ۷۲ سیب توسط مرد اول نگرانی نداشتند!

حل (۸)

$$۸ \div \frac{۱}{۳} = ۲۴$$

$$۲۴ \div \frac{۱}{۳} = ۷۲$$

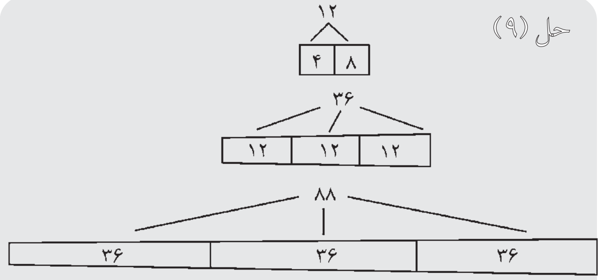
$$۷۲ \div \frac{۱}{۳} = ۲۱۶$$

در ابتدا ۲۱۶ سیب در کیسه بوده است.

تمایز $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$

یکی از مشکلاتی که دانش‌آموزان پایه‌ی ۸ به بالا با آن روبه‌رو بودند این بود که کدام‌یک از کسرهای $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۲}{۳}$ برای نمایش اطلاعات مسئله مناسب است. حل (۹)، یک رویکرد بالقوه موفق با استفاده از رسم نمودار را نشان می‌دهد که در آن، رابطه‌ی صحیح بین ثلث‌ها را در مسئله در نظر گرفته است. اما بعد از مرحله‌ی اول، دوسوم باقی‌مانده را فراموش کرده است. در این حل، یک خطای ضرب نیز مشاهده می‌شود.

حل (۹)



در ابتدا ۸۸ سیب در کیسه وجود داشته است.

بازنمایی جبری

در حل (۱۰)، یک دانش‌آموز پایه‌ی ۸ تلاش کرده است از نمادهای جبری استفاده کند. این حل نشان می‌دهد که دانش‌آموز اصلاً این نکته را که «$\frac{۱}{۳}$» قسمت‌های باقی‌مانده خورده شده‌اند را درک نکرده است.

حل (۱۰)

فرض کنید تعداد سیب‌ها x باشد

$$x=(۸\times\frac{۱}{۳})+(۸\times\frac{۲}{۳})+(۸\times\frac{۳}{۳})+۸$$
$$=۸\frac{۱}{۳}+۸\frac{۲}{۳}+۸+۸$$
$$=۸\frac{۱}{۳}+۸\frac{۲}{۳}+۱۶$$
$$=۱۹+۶$$
$$=۳۷$$

در این حل، مشکلات ضرب اعداد صحیح با کسرها و همین‌طور جمع آن‌ها نیز مشاهده می‌شود. به‌نظر می‌آید دانش‌آموزی که حل (۱۱) را نوشته، فهمیده بود که ۸ قسمتی از سیب‌های باقی‌مانده بوده است. وقتی مرد سوم بیدار شد و در نتیجه کسری بزرگ‌تر از یک برای نشان دادن این رابطه برحسب مقدار باقی‌مانده لازم است. در روند این حل نیز خطاهای جمع به چشم می‌خورد

حل (۱۱)

فرض کنید این تعداد x باشد

$$x=۸+(۱\frac{۱}{۳}\times۸)+(۱\frac{۱}{۳}\times۸\times۱\frac{۱}{۳})$$
$$+(۱\frac{۱}{۳}\times۸\times۱\frac{۱}{۳}\times۱\frac{۱}{۳})$$
$$=۸+۱۰\frac{۲}{۳}+۱۴\frac{۲}{۹}+۱۸\frac{۲۶}{۲۷}$$
$$=۸+۱۰\frac{۱۸}{۲۷}+۱۴\frac{۶}{۲۷}+۱۸\frac{۲۶}{۲۷}$$
$$=۵۱\frac{۲۳}{۲۷}$$

راهبردهایی که از مسیر آخر به اول مسئله کارآیی دارند

حدس و آزمایش

راهبرد حدس و آزمایش در کلاس‌های ۶ تا ۹ رایج بود، خصوصاً بین آن‌هایی که ماشین حساب در اختیار داشتند. حل (۱۲) نشان می‌دهد که نویسندگان آن در مرحله‌ی آزمایش و بررسی جواب‌ها دقیق بودند و می‌دانستند که حدس بعدی باید بزرگ‌تر یا کوچک‌تر باشد. در بسیاری از پاسخ‌هایی که با این رویکرد نوشته شده بودند وقتی نویسنده به جواب غیرصحیح رسیده بود، حل متوقف شده بود.

حل (۱۲)

من از روش حدس و آزمایش استفاده کردم
۲۵ سیب

$$\frac{۱}{۳}\times۲۵=۸/۳$$
$$-۸/۳$$
$$۱۶/۷\quad\div۳=۵/۵۶$$
$$-۵/۵۶$$
$$۱۱/۱۴\quad\div۳=۳/۷۱۳$$
$$-۳/۷۱۳$$
$$۷/۴۲۷$$

این جواب خیلی کوچک است،

پس ۲۷ را امتحان می‌کنم

$$۲۷\div۳=۹$$
$$-۹$$
$$۱۸\div۳=۶$$
$$-۶$$
$$۱۲\div۳=۴$$
$$-۴$$
$$۸$$

این جواب درست است

∴ ۲۷ سیب در کیسه بوده است.

حل مسئله از طریق روش‌های نظام‌دار

دانش‌آموزان پایه‌ی ۱۱ به بالا، بیشتر تمایل داشتند مسئله را از اول به آخر حل کنند. حل (۱۳) نشان می‌دهد که نویسنده موقعیت مسئله را به خوبی درک کرده و کاربرد کسرها را می‌داند، ولی در چگونگی به‌کارگیری علامت تساوی ضعیف است.

حل (۱۳)

$$\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳} \qquad \frac{۳}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹} \qquad \frac{۲}{۳}-\frac{۲}{۹}=\frac{۴}{۹}$$

$$\frac{۴}{۹}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۲۷} \qquad \frac{۴}{۹}-\frac{۴}{۲۷}=\frac{۸}{۲۷}$$

$۸=\frac{۸}{۲۷}$ سیب‌ها

$\therefore ۱=\frac{۱}{۲۷}$ سیب‌ها

$\therefore ۲۷$ تعداد سیب‌ها

تشکیل معادله‌ی جبری

در تحقیقی که انجام شد، هیچ دانش‌آموز مدرسه‌ای نتوانست معادله‌ای برای حل این مسئله تشکیل دهد. حل (۱۴)، حاصل تلاش سخت یک دانشجو-معلم است که به دنبال یک معادله و سپس حل صحیح آن بود. در این حل، معادله بر حسب تعداد سیب‌های باقی‌مانده(۸) تشکیل شده است.

حل (۱۴)

فرض کنید تعداد کل سیب‌ها $= x$

مرد اول $\frac{۱}{۳}$ سیب‌ها را خورد $= \frac{۱}{۳}x$

$\therefore$ تعداد سیب‌های باقی‌مانده $= x-\frac{۱}{۳}x$

مرد دوم $\frac{۱}{۳}$ سیب‌های باقی‌مانده را خورد $= \frac{۱}{۳}\times\underbrace{(x-\frac{۱}{۳}x)}_{\text{سیب‌های باقی‌مانده بعد از مرد اول}}$

$\therefore$ تعداد سیب‌های باقی‌مانده بعد از مرد دوم $= x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}(x-\frac{۱}{۳}x)$

مرد سوم $\frac{۱}{۳}$ سیب‌های باقی‌مانده بعد از مرد دوم را خورد =

$$\frac{۱}{۳}\left[x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}(x-\frac{۱}{۳}x)\right]$$

$$\therefore \quad x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}(x-\frac{۱}{۳}x)-\frac{۱}{۳}\left[x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}(x-\frac{۱}{۳}x)\right]=۸$$

$$x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۹}x-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۹}x+\frac{۱}{۹}x-\frac{۱}{۲۷}x=۸$$

$$x-\frac{۳}{۳}x+\frac{۳}{۹}x-\frac{۱}{۲۷}x=۸$$

$$\frac{۳}{۹}x-\frac{۱}{۲۷}x=۸$$

$$\frac{۹-۱}{۲۷}x=۸$$

$$\frac{۸}{۲۷}x=۸$$

$$۸x=۸\times ۲۷$$

$$۸x=۲۱۶$$

$$\therefore x=۲۷$$

حل (۱۵)، رویکرد مشابه را برحسب تعداد کل سیب‌های داخل کیسه (x) نشان می‌دهد.

حل (۱۵)

فرض کنید x = تعداد کل سیب‌های داخل کیسه

$$x=\frac{x}{۳}+\frac{۲x}{۳}\times\frac{۱}{۳}+(x-\frac{x}{۳}-\frac{۲x}{۹})\times\frac{۱}{۳}+۸$$

مرد اول $\frac{۱}{۳}$ سیب‌ها را خورد.

با وجود این، در بین دانشجویان تا قبل از سال سوم خیلی رایج نبود که معادله‌ای برحسب تعداد سیب‌های باقی‌مانده، مانند آنچه در حل (۱۶) آمده بنویسند.

حل (۱۶)

$$x.\frac{۲}{۳}.\frac{۲}{۳}.\frac{۲}{۳}=۸$$

یعنی $\frac{۸x}{۲۷}=۸$

$$\therefore x=۲۷$$

خطاها در راهبردهایی که از مسیر اول به آخر مسئله کارآیی دارند

مفهوم $\frac{۱}{۳}$

حل (۱۷)، پاسخ نمونه‌ی بسیاری از دانش‌آموزان تا پایه‌ی ۶ (معادل اول راهنمایی) را نشان می‌دهد که فکر می‌کردند هر مرد ثلث یک سیب را خورده است.

حل (۱۷)

سیب درسته $\frac{۱}{۳}\times ۳=۱$

سیب درسته ۸ + سیب درسته ۱

سیب ۹ =

تمایز بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$

حل (۱۸)، پاسخ نمونه‌ی دانشجویانی است که سعی کردند با استفاده از جبر، و لحاظ کردن فرضیات از اول به آخر، مسئله را در قالب یک معادله درآورند. نتیجه‌ی به دست آمده از این حل با نتیجه‌ی حل (۸) که با راهبردهای آخر به اول انجام شده بود، یکی بود.

حل (۱۸)

فرض کنید   مقدار اولیه $= x$

$$\therefore \frac{x}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}=۸$$

$$\therefore \frac{x}{۲۷}=۸$$

$\therefore x=۲۱۶$ ؟ (خیلی بزرگ)

آزمایش $\frac{۲۴}{۳}=۸$ و $\frac{۷۲}{۳}=۲۴$ و $\frac{۲۱۶}{۳}=۷۲$

$\therefore$ در ابتدا ۲۱۶ سیب در کیسه بوده است

حل (۱۹) پاسخی را نشان می‌دهد که در آن، دانش‌آموز سعی کرده برخوردی نظام‌دار را داشته باشد، اما به نظر می‌رسد بعد از گام اول گیج شده باشد.

حل (۱۹)

کیسه سیب با x سیب در آن

بعد از مرد اول $\frac{۲x}{۳}$ سیب‌ها باقی ماند

بعد از مرد دوم $\frac{۴x}{۹}=\frac{۲x}{۳}\times\frac{۱}{۳}$ سیب‌ها باقی ماند

بعد از مرد سوم $\frac{۲x}{۲۷}=\frac{۲x}{۹}\times\frac{۱}{۳}$ سیب‌ها باقی ماند

$$\frac{۲x}{۲۷}=۸$$

(زیرا $\frac{۲x}{۲۷}$ سیب‌ها باقی می‌ماند. بنا به فرض ۸ سیب باقی مانده.)

$$۲x=۲۱۶$$

$$\therefore x=۱۰۸$$

$\therefore$ در ابتدا ۱۰۸ سیب وجود داشته است.

حل (۲۰)، حل معادله‌ی دیگری را نشان می‌دهد که فقط در مؤلفه‌ی آخر این معادله، نویسنده فراموش کرده $\frac{۱}{۳}$ باقی‌مانده را کم کند.

حل (۲۰)

فرض کنید تعداد اولیه سیب‌ها x باشد، حال

$$x-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}(x-\frac{۱}{۳}x)-\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳}(x-\frac{۱}{۳}x)=۸$$

$$x-\frac{x}{۳}-\frac{x}{۳}+\frac{x}{۹}-\frac{x}{۹}+\frac{x}{۲۷}=۸$$

$$۲۷x-۹x-۹x+۳x-۳x+x=۸\times ۲۷$$

$$۱۰x=۲۱۶$$

$x=۲۱/۶$ سیب

بازنمایی جبری $\frac{۱}{۳}$

بسیاری از دانش‌آموزان، از پایه‌ی ۸ تا دانشجو ـ معلمان که می‌خواستند مسئله را از روش‌های جبری حل کنند، در نمایش و به‌کارگیری $\frac{۱}{۳}$ مشکل داشتند. حل (۲۱)، پاسخ یکی از دانشجو ـ معلمان است که نمایانگر مشکلات او در کار با کسرها می‌باشد.

حل (۲۱)

$\frac{۱}{۳}$ از x

$\frac{۱}{۳}$ از $[x-\frac{۱}{۳}]$

$\frac{۱}{۳}$ از $[x-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}]=۸$

$$=\frac{۱}{۳}\times x=۸+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}$$

$$=\frac{۱}{۳}x=۸+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}$$

$$=x=\frac{۸+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}}$$

$$=\frac{۸+\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}}$$

$$=۸\frac{۲}{۳}\times ۳$$

$$=\frac{۲۶}{۳}\times ۳$$

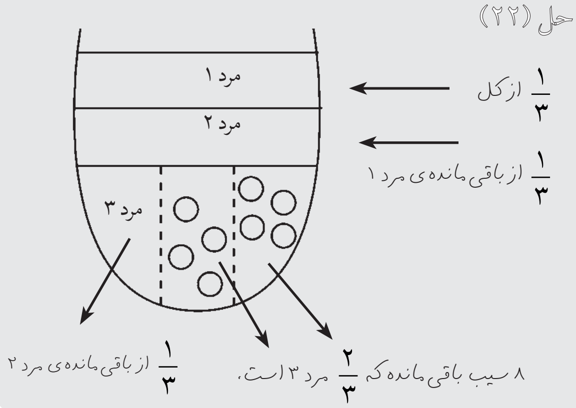
$$\therefore x=۲۶$$

$\therefore$ رویهم ۲۶ سیب وجود داشت.

رسم نمودار اما ناتوانی در تکمیل آن

حل (۲۲)، پاسخی را نشان می‌دهد که سعی در سازمان‌دهی مسئله را در قالب یک نمودار داشته است، ولی بعد از آن هیچ اقدام دیگری صورت نگرفته است. بسیاری از دانش‌آموزان پائین‌تر از پایه‌ی ۱۰ نیز تصاویر مشابه یا کاریکاتورهایی از سه مرد گرسنه ترسیم کردند اما نتوانستند مسئله را حل کنند.

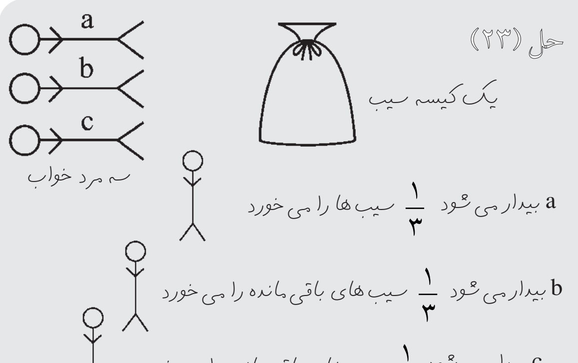
حل (۲۲)



راهبردهایی که از اول به آخر و از آخر به اول مسئله کارآیی دارند
توضیح دقیق

تعدادی از دانش‌آموزان، خصوصاً در پایه‌های ۸ و ۹، با دقت، تعبیر خود را از مسئله، از ابتدا توضیح دادند و بعد مسئله را از آخر حل کردند. گاهی این پاسخ‌ها با رسم تصاویر همراه بود. از این نمونه پاسخ‌ها، حل (۲۳) جالب است زیرا در پایان از روش جمع استفاده کرده است که احتمالاً با علاقه‌ی دانش‌آموز، با مسیر داستان هم‌خوانی دارد.

حل (۲۳)



۸ سیب باقی مانده، بنابراین = $\frac{۲}{۳}$

∴ ۴ سیب = $\frac{۱}{۳}$

∴ c، **۴ سیب** می‌خورد

بعد از آن که b سیب‌هایش را می‌خورد ۱۲ سیب می‌ماند ∴

∴ ۱۲ سیب = $\frac{۲}{۳}$

∴ b، **۶ سیب** می‌خورد

بعد از آن که a سیب‌هایش را می‌خورد ۱۸ سیب می‌ماند ∴

∴ ۱۸ سیب = $\frac{۲}{۳}$

∴ a، **۹ سیب** می‌خورد

∴ $۸+۴+۶+۹=۲۷$

∴ در ابتدا ۲۷ سیب در کیسه بوده است

نگه داشتن حساب هر سه مرد

چندین دانش‌آموز کلاس‌های ۵ و ۶ بعد از شروع حل مسئله، ظاهراً فراموش می‌کنند که چند مرد در مسئله شرکت داشتند. یکی از این پاسخ‌ها در حل (۲۴) آمده است.

حل (۲۴)

اولین مرد $\frac{۱}{۳}$ می‌خورد

دومین مرد $\frac{۱}{۳}$ سیب‌های باقی‌مانده را خورد

سومین مرد $\frac{۱}{۳}$ سیب‌های باقی‌مانده را خورد و ۸ سیب ماند

$۸ = \frac{۲}{۳}$

$۱۲ = \frac{۲}{۳}$

سیب‌هایی که با آن‌ها شروع کردند = ۱۸

اشارات

در عمل، راهبردهای درست و نادرست بسیار زیاد دیگری نیز برای این مسئله مشاهده شد، ولی به نظر می‌آید گزینش انجام شده برای نشان دادن میزان خوبی و امتیازات مسئله‌ی سه مرد گرسنه کفایت کند. در ادامه، اشارات تلویحی مسائل این چنینی در تدریس ریاضی از زاویه‌های مختلف بحث خواهد شد.

تدریس حل مسئله

تنها با در نظر گرفتن تعداد راهبردهای صحیح متفاوت برای مسئله‌ی سه مرد گرسنه، می‌توان آن را ابزاری خیلی خوب و مناسب برای آن دسته از معلمانی به حساب آورد که قصد بررسی راهبردهای حل مسئله را با دانش‌آموزانشان دارند. به‌ویژه، اگر این مسئله در سطح دبیرستان

مطرح شود، تقریباً همه‌ی دانش‌آموزان خواهند توانست مسئله را درک کنند و متوجه ارزش آن باشند.

در به کارگیری این مسئله، معلمان حتی می‌توانند به بعضی از راهبردهایی که به طور صریح در حل‌های ارائه شده در اینجا نیامده بود تأکید کرده و آن‌ها را بحث قرار دهند. برای مثال، راهبرد «خواندن با دقت مسئله» می‌تواند در مواردی که دانش‌آموزان تعبیر درستی از مسئله ندارند، مثلاً می‌گویند «$\frac{1}{3}$ از یک سیب» یا باقی‌مانده را فراموش می‌کنند، مورد اشاره قرار گیرد. به طور مشابه «ساختن یک مدل» به وسیله‌ی اشیای واقعی می‌تواند برای کودکان دوره‌ی ابتدایی با ارزش باشد، یا «ساختن یک جدول» می‌تواند به عنوان راهی برای ضبط اطلاعات مورد استفاده قرار گیرد. البته چک کردن پاسخ‌ها نیز یکی از جنبه‌های مهم حل مسئله است که بعداً مورد اشاره قرار خواهد گرفت.

در ارائه‌ی راه‌حل‌ها هیچ پیشنهادی در مورد این‌که کدام حل بهتر از دیگری است مطرح نشد. ممکن است به عنوان یک معلم، از دیدن این همه تنوع و ابتکار در راه‌حل‌ها ذوق زده شویم. توجه کنید که این تنوع می‌تواند نقطه‌ی شروع خوبی برای بحث و مقایسه‌ی راهبردها در کلاس درس باشد. بررسی طول و زیبایی راه‌حل‌ها می‌تواند میان بُرهایی به مسئله حل‌کن‌های علاقه‌مند پیشنهاد کند، خصوصاً آن‌هایی که مباحث جبر را خوانده‌اند ولی کاربردهای بسیار کمی از آن را دیده‌اند.

مشکلات بیان

ملاحظه شد که به کارگیری نادرست علامت تساوی، حتی در راه حل‌هایی که به جواب صحیح منجر می‌شد، عمومیت داشت. این مشاهده، تدریس اولیه‌ی ما را در مورد رایج‌ترین علامت ریاضی زیر سؤال می‌برد. به عنوان نمونه، آیا تاکنون پیش آمده از دانش‌آموزی که حلی مانند حل (۲۳) ارائه داده بخواهیم برای جلوگیری از ابهام و داشتن دقت لازم آن را دوباره‌نویسی کند؟ به‌ویژه اگر حل ارائه شده به جواب صحیح رسیده باشد! مثلاً در حل (۲)، دانش‌آموز ادعا می‌کند $\frac{2}{3} = 8$. واضح است که این دانش‌آموز متن سؤال را فهمیده بود، اما یقیناً نوشته‌ی او از نظر ریاضی صحیح نیست. در اینجا، آوردن چند واژه‌ی کمکی مانند «$\frac{2}{3}$ از سیب‌های باقی‌مانده» می‌توانست منظور را نشان دهد. یکی از روش‌های کارآمد برای رفع این گونه مشکلات آن دست که یک بحث خوب حول حلی مانند حل (۲) و چگونگی بهبود آن در کلاس به اجرا درآورد.

این مثال‌ها اهمیت زبان را در ریاضیات برجسته می‌کند. بسیاری از دانش‌آموزان نیازمند توجه و آموزش در چگونگی استفاده‌ی مؤثر از زبان در ارائه‌ی راه‌حل‌هایشان هستند.

توانایی استفاده‌ی صحیح از زبان می‌تواند در تجزیه و تحلیل دانش‌آموزان از مسئله‌ی اخیر باشد. هم‌چنین، می‌تواند به معلمان در رصد راهبردهایی که به بی‌راهه رفته‌اند یاری رساند. از نظر بسیاری از دانش‌آموزان، آشنایی با جبر نیاز آن‌ها را در به کارگیری واژگان کم می‌کند. شاید این به دلیل تأکید دائمی ما معلمان باشد که می‌گوییم جبر، زبان ریاضی برای حل مسائل است. بررسی راه‌حل‌های ارائه شده‌ی مسئله‌ی سه مرد گرسنه نشان می‌دهد که ما معلمان با این باور ممکن است برای سال‌ها دانش‌آموزان‌مان را به بی‌راهه هدایت کنیم. همان‌طور که ملاحظه شد حل‌های محض جبری ارائه شده در سطح مدرسه که پایان موفقیت‌آمیزی داشته باشند، خیلی کم بودند.

راه‌حل‌های نادرست

عموماً راه‌حل‌های نادرست مسائل، حرف‌های زیادی برای گفتن دارند. شاید تنوع راه‌حل‌های غَلط مسئله‌ی سه مرد گرسنه شما را متعجب کرده باشد.

ولی اگر بخواهیم مثل یک معلم خوب فکر کنیم، نیاز داریم از بسیاری از راه‌هایی که دانش‌آموزان ممکن است به اشتباه بروند آگاهی داشته باشیم. کلاسی را تصور کنید که در آن، دانش‌آموزان راهبردهای خود را برای جمع حاضر در کلاس توضیح می‌دهند و از ادعاهای خود دفاع می‌کنند. در این گونه بحث‌های کلاسی، دانش‌آموزان ضمن بررسی تفاوت‌های راه‌حل‌هایشان، مطالب زیادی می‌آموزند.

جالب است توجه کنید که در سطح مدارس ابتدایی، تعداد پاسخ‌های غیرواقع‌گرایانه برای مسئله‌ی سه مرد گرسنه بسیار کم بود. در واقع، این دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر بودند که خود را موظف به استفاده از روش‌های پیچیده‌ای شامل جبر می‌دانستند و در آخر نیز پاسخ‌های غیرواقع‌گرایانه‌ی خود را بدون تردید در درستی آن‌ها ارائه می‌دادند. از جمله‌ی این گونه پاسخ‌ها، می‌توان به حل‌های (۸)، (۱۱)، (۱۹) و (۲۰) اشاره کرد.

دانش‌آموزی که حل (۱۸) را نوشت، تنها کسی بود که جواب ۲۱۶ را مورد تردید قرار داد، ولی او نیز در پایان به مسئله‌ی اصلی برنگشت تا منطقی بودن جواب خود را بررسی کند. شاید یکی از مهم‌ترین جنبه‌های تدریس راهبردهای حل مسئله این باشد که از دانش‌آموزان بخواهیم جواب‌های خود را کنترل کنند و منطقی بودن آن را در مسئله‌ی اصلی مورد بررسی قرار دهند.

در اینجا قصد نداریم که اشتباهات را با هم مقایسه کنیم و بگوییم کدام‌یک جدی‌تر از دیگری است. احتمالاً خوانندگان نظر شخصی خود را در این زمینه دارند. ولیکن، این واضح است که بعضی از راهبردها به موفقیت نزدیک‌تر بودند. جالب است توجه کنید که برای این مسئله، جواب‌های غلط یکسان الزاماً از راهبردهای نادرست یکسان نتیجه نشده بودند. مثلاً جواب‌های ۲۱۶ و ۱۰۸ از چندین راه مختلف به دست آمدند. از این‌رو، لازم به نظر می‌رسد که به عنوان معلم مراقب باشیم که دانش‌آموزان را فوری براساس جواب آخری که عرضه می‌کنند طبقه‌بندی نکنیم. در واقع، مسئولیت ما خیلی بیشتر از آن است که فقط با یک علامت ضربدر قرمز، نادرستی پاسخ دانش‌آموزان‌مان را تأیید کنیم.

در واقع این که معلمان ابتدایی فقط به مهارت‌های جبری مجهز باشند باعث می‌شود که یا مسایلی مانند سه مرد گرسنه را در کلاس‌های خود مطرح نکنند یا دانش‌آموزان را به سمت استفاده از روش‌های جبری هدایت کنند که هنوز در حد درک و فهم آن‌ها نیست. لذا ضروری به نظر می‌رسد که در کنار معرفی روش‌های جبری، استفاده از روش‌های بدیل حل مسئله نیز در برنامه‌های آموزشی تربیت معلم لحاظ شود.

تدریس جبر

اگرچه جبر تنها ابزار حل مسئله‌ی سه مرد گرسنه نیست، ولی اگر به طور صحیح مورد استفاده قرار گیرد، قطعاً می‌تواند برای این منظور کافی باشد. با این وجود بسیاری از دانش‌آموزانی که آموزش جبر دیده بودند برای حل این مسئله از راه‌حل جبری استفاده نکردند. شاید دلیل این باشد که ابزار جبری هنوز آن‌قدر مورد استفاده قرار نگرفته بود که آن را به عنوان یک ابزار کمکی ببینند، و بیشتر حکم یک چیز دست و پاگیر را برای دانش‌آموزان، خصوصاً در سال‌های اول دبیرستان، داشت. البته این عملکرد دانش‌آموزان دور از انتظار هم نبود. خود ما نیز وقتی با یک مسئله روبه‌رو می‌شویم، عموماً از آشناترین تکنیک‌ها برای حل آن استفاده می‌کنیم؛ تا استفاده از تکنیک‌های جدیدی که هنوز اعتماد به نفس کافی نسبت به آن‌ها نداریم. تبدیل تکنیک‌های جبری به ابزاری که دانش‌آموزان به طور طبیعی و ناخودآگاه برای حل مسئله به کار برند، نیازمند زمان است.

در طرف دیگر سکه‌ی جبر، دانشجو ـ معلمان بودند که اغلب ادعا می‌کردند به هیچ راه دیگری (غیر از جبر) برای حل این مسئله نمی‌توانستند فکر کنند. این‌که معلمان از جبر به عنوان یک ابزار حل مسئله استفاده کنند جای خوشحالی است، ولی این وضعیت در شرایطی که بخواهند مسئله را در سطح مدارس ابتدایی حل کنند باعث شرمندگی آن‌ها خواهد شد. در واقع این‌که معلمان ابتدایی فقط به مهارت‌های جبری مجهز باشند باعث می‌شود که یا مسایلی مانند سه مرد گرسنه را در کلاس‌های خود مطرح نکنند یا دانش‌آموزان را به سمت استفاده از روش‌های جبری هدایت کنند که هنوز در حد درک و فهم آن‌ها نیست. لذا ضروری به نظر می‌رسد که در کنار معرفی روش‌های جبری، استفاده از روش‌های بدیل حل مسئله نیز در برنامه‌های آموزشی تربیت معلم لحاظ شود.

قالب چند گزینه‌ای

در اینجا ممکن است این سؤال مطرح شد که اگر بخواهیم مسئله‌ی سه مرد گرسنه را در قالب سؤال چند گزینه‌ای قرار دهیم، چند گزینه برای آن مناسب است؟ با توجه به مشاهده‌ی عملکرد دانش‌آموزان، شاید برای پایه‌ی ۶، بهترین پاسخ‌ها می‌توانست ۳۲، ۲۷، ۲۴ و ۹ باشد. برای دانش‌آموزان دبیرستانی و دانشجویان نیز، بهترین بدیل می‌توانست ۲۷، ۷۲، ۱۰۸ و ۲۱۶ باشد. ولی در هر صورت، عرضه‌ی این مسئله در قالب چند گزینه‌ای، به معنای محدود کردن وسعت پاسخ‌های ممکن برای آن است. این همان بلایی است که بر سر بسیاری از مسائل دیگر نیز که در قالب چند گزینه‌ای آورده می‌شوند، می‌آید. تجربه‌ی تدریس ریاضی نشان می‌دهد که قالب سؤالات چندگزینه‌ای فقط برای پاسخ‌های سطح پایین، از نوع به‌یاد آوردن می‌تواند مناسب باشد.

نتیجه گیری

در پایان، شاید بررسی جزئیات مسئله‌ای مانند مسئله‌ی سه مرد گرسنه بتواند به ما کمک کند تا در این باور که **پاسخ، مهم‌ترین چیز در حل مسئله است** تجدیدنظر کنیم. عموماً، ما معلمان تمایل داریم که راه‌حل خودمان را بهترین راه‌حل ببینیم و دانش‌آموزان را به سمت آن روش هدایت کنیم، به ویژه وقتی دانش‌آموزی در حل مسئله گیر می‌کند. در صورتی که تشویق دانش‌آموزان در به کارگیری و امتحان راهبردهای متنوع ضمن ایجاد انگیزه در آن‌ها برای درگیر شدن در فرایند حل مسئله، می‌تواند دسترسی معلمان را به نوع تفکر، مشکلات و بدفهمی‌های محتمل دانش‌اموزان امکان‌پذیر سازد. شاید یکی از راه‌های پرورش دانش‌آموزان مسئله حل کن، ارائه‌ی مسائلی از نوع سه مرد گرسنه باشد و هم‌چنین، تشویق و پاداش درونی برای دانش‌آموزانی که برای پیدا کردن جواب مسئله، راه‌های جدیدی پیشنهاد می‌کنند.

پی‌نوشت

* Watson, J. (1988). Three Hungry Men and Strategies for Problem Solving. In: Pimm, D., Harper, K.O'shea, T. (Eds.). Designs for Learning: Elementary Mathematics (2002). Simon Fraser University.

** Jane Watson

تحقیق عمل

چرایی، ضرورت‌های تاریخی و چیستی

ـ سلسله مقالاتی جهت آشنایی بیش‌تر با تحقیق عمل ـ

(بخش نخست)

سپیده چمن‌آرا

عضو هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

چکیده

در این مقاله و مقالاتی که در چند شماره‌ی آینده به چاپ خواهد رسید، قصد داریم با «تحقیق عمل[۱]» (که در برخی متون و کتاب‌ها، به‌صورت «پژوهش ضمن عمل»، «پژوهش در عمل» و «اقدام‌پژوهی» و نظایر آن نیز معادل‌سازی شده است) بیش‌تر آشنا شویم. در نخستین بخش از این مجموعه مقالات، به بررسی ماهیت و ویژگی‌های پژوهش‌های کلاسیک و انتقادهای وارد بر روش‌های علمیِ پژوهش در حوزه‌های علوم تربیتی و آموزش و علوم اجتماعی می‌پردازیم تا دلایل و ضرورت‌های روی‌آوردن به شکل‌های جدید پژوهش (به‌ویژه گرایش به «تحقیق عمل» در تحقیقات آموزشی و آموزش ریاضی) در این حوزه‌ها برایمان آشکار گردد و با مرور اجمالیِ تاریخچه‌ی پیدایش تحقیق عمل و نیز بررسی شباهت‌ها و تفاوت‌های این نوعِ تحقیق با سایر شکل‌های پژوهش، جایگاه «تحقیق عمل» در بدنه‌ی پژوهش‌های علمی و مشروعیت آن براساس دیدگاه‌های نهفته در پسِ آن را بشناسیم.

در بخش دوم این مقاله ـ که در شماره‌های بعدی این مجله به چاپ می‌رسند ـ با تفصیل بیشتری، «تحقیق عمل» را معرفی کرده و اهداف و نتایج حاصل از آن، پیش‌فرض‌های این نوع تحقیق و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم. مراحل انجام تحقیق عمل، شیوه‌های جمع‌آوری داده‌ها در آن، چگونگی کیفیت‌بخشی و بالاخره روایی نتایج حاصل از آن، موضوع بخش سوم از این مجموعه مقالات خواهد بود. آخرین بخش از این مقاله‌ها، به بررسی چند نمونه از تحقیق‌های انجام شده در حوزه‌ی آموزش ریاضی اختصاص دارد.

کلیدواژه‌ها: پژوهش (تحقیق)، تحقیق عمل (پژوهش ضمن عمل، پژوهش در عمل، اقدام‌پژوهشی)، معلم محقق (معلم پژوهنده، اقدام‌پژوه).

مقدمه

چندین سال است که واژه‌های «اقدام‌پژوهی» و «معلم پژوهنده» در واژگان آموزشی ما وارد شده است و آن‌ها را در بخش‌نامه‌های مختلف می‌خوانیم. جشنواره‌ی معلمان پژوهنده، یکی از مراسمی است که در هفته‌ی پژوهش یا مناسبت‌های مرتبط، به‌منظور شناسایی و تشویق معلمان فعال و اهل پژوهش، برگزار می‌شود. پژوهشکده‌های وابسته به وزارت آموزش‌وپرورش، زمان و انرژی فراوانی را روی بررسی اثر «پژوهنده» بودن معلمان بر روش‌های تدریس آن‌ها صرف کرده‌اند. اما معلمان ما تا چه حد با معنای واقعی این واژه‌ها و فلسفه‌ی وجودی و اهداف این نوع تحقیق آشنا هستند؟ و برگزاری این جشنواره‌ها تا چه حد توانسته است به هدف اصلی تحقیق عمل ـ که در ادامه خواهیم دید که «بهبود عمل تدریس معلم و ارتقای حرفه‌ای وی» است ـ نزدیک شود؟ در این مقاله، تنها قصد داریم به پرسش اول بپردازیم و با اقدام‌پژوهی (بخوانید «تحقیق عمل») بیش‌تر آشنا شویم. یادآور می‌شویم که پاسخ‌گویی به پرسش دوم، نیازمند بررسی اهداف تعیین شده برای این جشنواره‌ها و برنامه‌ها و تطابق آن‌ها با اهداف واقعی و تعریف‌شده برای تحقیق عمل توسط آموزشگران در حالت کلی و نیز اطلاعات بیشتری درباره‌ی پژوهش‌های ارائه شده و برگزیده در این جشنواره‌ها و معلمان پژوهنده‌ی نویسنده‌ی این پژوهش‌ها می‌باشد که دسترسی به آن‌ها از توان نگارنده خارج است.

از این پس در این مقاله، واژه‌ی «تحقیق عمل» را معادل واژه‌ی Action Research به‌کار خواهیم برد، مگر در مواردی که از منابع دیگر، نقل قول‌های مستقیم آورده شده باشد.

تحقیق و انواع آن

پیش از معرفی «تحقیق عمل» لازم است به اجمال مفهوم پژوهش (تحقیق)، انواع آن، ریشه‌های فلسفی‌ای که پژوهش‌های علمی کلاسیک بر مبنای آن استوار است و نیز نقدهای وارد بر آن پژوهش‌ها را بررسی کنیم.

دلاور (۱۳۸۰) به نقل از چند فرهنگ مختلف، واژه‌ی تحقیق را چنین معرفی می‌کند:

«واژه‌ی تحقیق از زبان عربی گرفته شده است و در لغت به معنای رسیدگی کردن، بررسی، بازجویی (فرهنگ قریب)، وارسی واقعیت (فرهنگ نفیسی)، راست و درست کردن، به حقیقت امری رسیدگی کردن و بازجویی کردن (فرهنگ عمید و لغت‌نامه‌ی دهخدا) است.»

وی در ادامه می‌افزاید: «اگر از معنای لغوی تحقیق که در زبان، تعبیرهای متفاوتی دارد و خود، بازتاب ذهنی و ذوقی اهل زبان طی زمان است صرف‌نظر کنیم، تعریف تحقیق از نظر روش‌شناسی، امر مشکلی است و از این جهت در بین صاحب‌نظران و پژوهشگران، اختلاف نظر زیادی وجود دارد. به همین دلیل ارائه‌ی تعریفی که مورد تأیید و موافقت همه‌ی پژوهشگران باشد، آسان نیست. عدم توافق در تعریف تحقیق، بیش از همه ناشی از بهای بیش از حدی است که به نوعی از آن، به نام تحقیق آزمایشی داده می‌شود. به این معنی که با گذشت زمان و با پیشرفت‌های چشم‌گیری که در علوم فیزیکی به‌وجود آمد، دانشمندان سایر روش‌های علمی را مورد بی‌مهری قرار دادند.» (ص ۴۴)

وی هم‌چنین ادامه می‌دهد: «در مباحث علمی، غالباً مفاهیم تحقیق و روش

علمی به‌صورت مترادف به‌کار برده می‌شوند... تحقیق، روندی رسمی‌تر و منظم‌تر و قوی‌تر از روش علمی است. تحقیق با ساختار منظم‌تری از کنکاش توأم است که معمولاً منجر به نوعی ثبت مراحل و گزارش نتایج و دست‌آوردها می‌شود. ... تحقیق، مرحله‌ی تخصصی‌تری از روش‌شناسی علمی است.» (ص ۴۶)

در نهایت، دلاور تحقیق را چنین تعریف می‌کند:

«تحقیق، مجموعه‌ی فعالیت‌های منظمی است که هدف آن کشف حقیقت یا رسیدن از علم اندک به علم بیش‌تر است، خواه با روش آزمایشی صِرف و خواه با روش‌های دیگر.» (ص ۴۷)*

گال، مردیت و گال (۱۳۸۴)، چهار نوع دانشی را که تحقیق برای حوزه‌ی تعلیم و تربیت فراهم می‌آورد، چنین برمی‌شمارند:

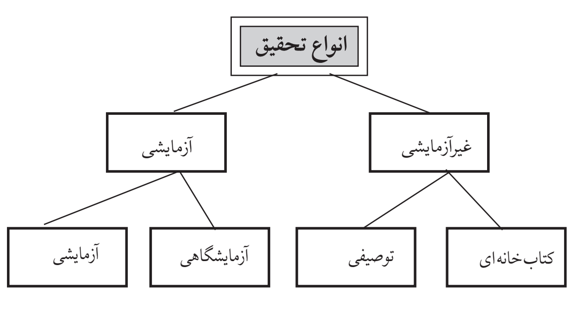
«(۱) توصیف[۲]، (۲) پیش‌بینی[۳]، (۳) بهبود[۴]، (۴) تبیین[۵]» ([۲]، ص ۱۹).

به این ترتیب می‌بینیم که در حوزه‌ی علوم تربیتی و آموزش، **بهبود عمل** یکی از نتایج مهم تحقیقات و پژوهش‌های این حوزه است که در حوزه‌ی علوم تجربی معنایی ندارد.

انواع تحقیق

از نظر ارزش‌ها و مقاصد و منابع مختلف، تحقیقات را به دو دسته‌ی بنیادی[۶] و کاربردی[۷] می‌توان تقسیم کرد ([۱]، صص ۴۸ تا ۵۰). این دو دسته از تحقیقات، از لحاظ هدف، زمان و مکان و شکل بیان مسئله، با یکدیگر متفاوت هستند و توجه به این تفاوت‌ها، ضروری است: از نظر هدف، تحقیق کاربردی در جست‌وجوی دست‌یابی به یک هدف عملی بوده و تأکید بر آن تأمین سعادت و رفاه توده‌ی مردم و مطلوب بودن فعالیت‌ها است. دانشی که از این طریق کسب می‌شود، راهنما و دستورالعملی برای فعالیت‌های عملی خواهد بود. از سوی دیگر، تحقیق بنیادی گرچه ممکن است کاربرد عملی نیز داشته باشد، ولی هدف عمده و اساسی آن، افزایش حیطه‌ی دانش و آگاهی است. هدف این نوع تحقیقات، کسب دانش و آگاهی نو بدون در نظر گرفتن ارزش آن‌ها در ایجاد تغییرات اجتماعی است. در چنین تحقیقی، تأکید بر مطالعه‌ی ارتباط درونی متغیرها است، نه بررسی قابلیت بشر در تأثیر گذاشتن بر ارتباط متقابل متغیرها. از نظر زمان و مکان، یافته‌های تحقیق کاربردی به میزان زیادی وابسته به زمان و مکان هستند در صورتی که تحقیقات بنیادی چنین نیستند. از نظر شکل بیان مسئله، تحقیق کاربردی، معطوف به عمل مؤثر است در حالی که تحقیق بنیادی، برای افزایش فهم و به‌طور کلی دانش بشری تلاش می‌کند. «با در نظر گرفتن ارتباط درونی بین علم و کاربرد، می‌توان نتیجه گرفت که تحقیق بنیادی و کاربردی نه تنها متضاد نیستند، بلکه مکمل یکدیگرند و توسط یکدیگر تغذیه می‌شوند» (دلاور، ۱۳۸۰، ص ۵۰)

یکی دیگر از انواع دسته‌بندی تحقیقات، دسته‌بندی آن‌ها از نظر روش تحقیق است. نمودار زیر این دسته‌بندی را نشان می‌دهد:



از منظر نوع داده‌های جمع‌آوری شده و شیوه‌های تحلیل آن داده‌ها نیز می‌توان تحقیقات را به دو رده‌ی کمّی[۸] و کیفی[۹]، دسته‌بندی کرد. پژوهش‌های علمی و اغلب پژوهش‌های کلاسیک، پژوهش‌های کمّی هستند. این پژوهش‌ها، بر فلسفه‌ی اثبات‌گرایی[۱۰] (یا تحصّل‌گرایی) استوار هستند. فرض اصلی اثبات‌گرایان این است که هر مسئله، راه حل خاص خود را دارد. آن‌ها هم چنین معتقدند که جلوه‌های محیط اجتماعی، واقعیت‌های مستقل را تشکیل می‌دهند و طی زمان و موقعیت‌ها، نسبتاً ثابت هستند.[۱۱] پژوهشگرانِ اثبات‌گرا، دانش را از طریق گردآوری داده‌های عددی و رفتارهای قابل مشاهده‌یِ نمونه‌ها و سپر عرضه‌ی این داده‌ها به تحلیل عددی، فراهم می‌آورند (گال، بورگ؛ گال، ۱۳۸۴، ص ۶۰).

از سوی دیگر، به اعتقاد دنزین و لینکلن، «تحقیق کیفی، تحقیقی ماهیتاً چند روشی است و متضمن رویکرد تفسیری[۱۲] و طبیعت‌گرایانه[۱۳] به موضوع مورد مطالعه می‌باشد. این بدان معناست که پژوهشگران کیفی، اشیاء را در موقعیت‌های طبیعی آن‌ها مطالعه می‌کنند و می‌کوشند پدیده‌ها را برحسب معناهایی که مردم به آن‌ها می‌دهند، مفهوم‌سازی یا تفسیر کنند» (نقل شده در گال؛ بورگ؛ گال، ۱۳۸۴، ص ۶۰). پژوهش‌های کیفی ریشه در فلسفه‌ی مابعد اثبات‌گرایی[۱۴] مانند فلسفه‌ی تفسیری و فلسفه‌ی انتقادی[۱۵] دادند. این پژوهشگران معتقدند که جلوه‌های محیط اجتماعی به عنوان تفسیرهایی به وسیله‌ی افراد ساخته می‌شوند و این تفسیرها، شکل گذرا و وابسته به موقعیت دارند. آن‌ها دانش را در درجه‌ی اول از طریق گردآوری داده‌های کلامی با مطالعه‌ی جدی و عمقی موارد و عرضه‌ی این داده‌ها به استقراء تحلیلی، فراهم می‌آورند (همان، ص ۶۰).

از انواع تحقیق‌های کیفی می‌توان به پژوهش تفسیری[۱۶]، پژوهش مطالعه‌ی موردی[۱۷] و پژوهش قوم‌شناسانه[۱۸] و... اشاره کرد.

نقدهای وارد بر پژوهش‌های کلاسیک و دلایل ظهور پژوهش مابعد اثبات‌گرایان

به‌طور کلی نقدهایی را که به پژوهش‌های کلاسیک در حوزه‌های علوم تربیتی و اجتماعی وارد شده است، می‌توان در موارد زیر خلاصه کرد:

- محقق، فردی خارج از موضوع است که درگیر عمل واقعیِ آن موضوع نیست؛
- نگاه محقق بیرونی، نهایتاً سودار است؛
- نظریه‌ها، بر عمل منطبق نیستند؛
- نتایج تحقیقات اغلب غیرکاربردی هستند؛
- لازم است کارورزان نیز در تحقیق درگیر شوند و در آن مشارکت کنند؛
- پیچیدگی‌های انسان در انقیاد قانون‌مندی‌های عام و فراگیر قرار نمی‌گیرد!

مهرمحمدی (۱۳۷۹) (نقل شده در رضایی، ۱۳۸۳ [۴]) با این باور که شناخت انسان و موقعیت‌های انسانی را نمی‌توان تحت انقیاد قانون‌مندی‌های عام و فراگیر به اصطلاح علمی درآورد، بر این عقیده است که ادعای شناخت، کنترل، پیش‌گویی و تبیین موقعیت‌های انسانی به پشتوانه‌ی قوانین عام و برخوردار از تعمیم‌پذیری عام با واقعیت وجودی آدمی، سازگار نیست. وی در مقابل اظهار می‌دارد: «اقدام‌پژوهی می‌تواند معرف رویکرد مطالعاتی سازگار با این اندیشه باشد. بدین معنا که با استفاده از این رویکرد می‌توان به دانش منطبق با شرایط و ویژگی‌های یک موقعیت خاص نائل آمد و لازم نیست دلالت‌های یافته‌های پژوهش‌های علمی و آکادمیک را به تصور برخورداری از تعمیم‌پذیری مطلق به کار گرفت» ([۴]، ص ۸۲).

کِلِمنتس والِرتون (۱۹۹۶) نیز درباره‌ی حوزه‌ی تحقیقات آموزش

ریاضی ابراز می دارند:

«به خوبی معلوم است که یافته های تحقیقات آموزش ریاضی تأثیر کمی بر روش های تدریس و یادگیری ریاضی در مدارس داشته است... در حقیقت رویکردهایی که توسط وزارت‌خانه های آموزش‌وپرورش پیشنهاد می شوند ـ صرف‌نظر از این که دارای مبنای تحقیقاتی اصیلی باشند یا نه ـ تأثیرات بیشتری بر ریاضیات مدرسه‌ای دارند تا رویکردهایی که بر مبنای یافته های حاصل از مطالعات تحقیقاتی دانشگاهی هستند» ([۵]، ص ۱۱۱).

به اعتقاد ایشان، در واقع در اغلب ایالت‌های کشور آمریکا و در اغلب کشورهای آسیای جنوب‌شرقی و اقیانوسیه (و احتمالاً در بسیاری از کشورهای دیگر)، معلمان ریاضی در هیچ‌یک از تصمیم‌گیری‌هایی که برای بهبود و ارتقای وضع آموزش ریاضی می شود، دخالتی ندارند و تنها به آن‌ها گفته می شود که چه‌کار کنند و چگونه آن کارها را انجام دهند و دائم با ارزیابی بیرونی، عملکردشان مورد ارزیابی قرار می گیرد. آن‌ها معتقدند برنامه هایی مانند **توسعه‌ی معلمان**، **مشارکت معلمان** و **توانمندسازی معلمان**، تنها حرف هایی است که زده می شود و عواملی چون **تمرکز**، **استانداردسازی** و **منطق‌گرایی صرف**، مانع از تحقق آن‌ها می باشد.

منتقدینی مانند کلمنتس والرتون که به انواع برنامه های یکسان‌سازی و نیز به برنامه های یونسکو و کمک‌های بانک جهانی و سایر نهادهای مشابه به پیشرفت آموزشی کشورهای در حال توسعه، انتقادهای جدی دارند، معتقدند بسیاری از پروژه‌هایی که از سوی این نهادها هزینه می شود تا برای آموزش در کشورهای در حال توسعه صورت گیرد، اغلب برای این کشورها بی‌فایده است؛ زیرا برنامه های تجویزی است که در آن‌ها، نیازهای واقعی کلاس‌های درس این کشورها و مشکلات واقعی معلمان و دانش‌آموزان آن کشورها در نظر گرفته نشده است. ایشان معتقدند باید برای پروژه‌هایی هزینه شود که اجازه دهد صدای معلمان و دیگر آموزشگران که در این حوزه‌ها ـ به‌ویژه حوزه‌ی آموزش ریاضی ـ کار می کنند، شنیده شود (نقل به مضمون از [۵]، صص ۱۱۱ تا ۱۱۳).

رابطه‌ی معلمان با پژوهش

مهرمحمدی (۱۳۸۳) در [۴] اظهار می دارد:

«به‌طور کلی معلمان با اِعمال وظایف معلمی در مسیرهای چندگانه‌ی زیر، ایفای نقش پژوهشی می نمایند:

۱. به‌کارگیرنده‌ی یافته های پژوهشی (مصرف‌کننده‌ی دانش)؛

۲. معلم به‌عنوان مدرس پژوهش به دانش‌آموزان؛

۳. معلم به‌عنوان پژوهشگر (محقق در مورد عمل تدریس خویش)» ([۴]، صص ۲۵ـ۴۰).

در اولین زمینه، همان‌گونه که دیدیم، به دلایل بسیار متعددی، من‌جمله عدم کاربردی بودن نتایج بسیاری از تحقیقات دانشگاهی، جدایی نظریه های علمی از عمل واقعی، عدم آشنایی معلمان با زبان این نوع پژوهش‌ها، مقاومت معلمان در مقابل تغییرات، عدم پذیرش نتایج حاصل از تحقیقات توسط معلمان به‌دلیل عدم آشنایی ایشان با مبانی فلسفی و نظری تحقیقات و... بسیاری از تحقیقات آموزشی در حوزه‌ی عمل، مورد استفاده قرار نمی گیرند.

در زمینه‌ی دوم، که در واقع به آموزش مسئله ـ محور بازمی گردد. آشنایی کامل معلمان با شیوه‌های حل مسئله و روش های پژوهش علمی و باور آن‌ها به این نوع آموزش و ایجاد فرهنگ پرسش‌گری و پژوهش در کلاس درس، ضروری است.

و بالاخره زمینه‌ی سوم، همان چیزی است که کلمنتس والرتون (۱۹۹۶) نیز برای رفع مشکلات معلمان ریاضی پیشنهاد کرده‌اند: «تحقیق عمل در مدرسه، تحقیقی است که توسط معلمان انجام می شود، نه تحقیقی که برای معلمان یا در مورد معلمان و کلاس درس ایشان و توسط محققان بیرونی (خارج از کلاس درس) باشد» ([۵]ـ ص ۱۱۳).

«تحقیق عمل» آموزشی

گال و بورک و گال (ترجمه شده در ۱۳۸۶)، تحقیق عمل را به‌طور کلی چنین معرفی می کنند: «شکلی از پژوهش های کاربردی است که هدف اصلی آن، بهبود عملکرد حرفه‌ای محقق می باشد» ([۳]، ص ۱۲۷۰).

گویا (۱۳۸۳) نیز در [۴] نقل می کند که «تحقیق عمل آموزشی، نوعی روش تحقیق است که موضوع اصلی آن نفس عمل تدریس و محقق آن، معمولاً معلم شاغل به تدریس می باشد. معلمانی که در این نوع تحقیق شرکت می کنند، اغلب بر تغییرات عمل خود نظارت دارند و با بازتاب در عمل، هم عمل تدریس را به نظریه می کشند و هم نظریه های عمل یا دانش کاربردی خود را غنی‌تر می سازند» ([۴]، ص ۴۷).

در این تعریف، بر اهمیت نقش بازتاب[۱۹] در تحقیق عمل اشاره شده است که کمی بعد به این موضوع، بیش‌تر خواهیم پرداخت.

در [۴] رضایی (۱۳۸۳) بر این باور است که سابقه‌ی مفهوم تحقیق عمل، به آثار جان دیویی در دهه‌ی ۲۰ میلادی و کرت لوین در دهه‌ی ۴۰ میلادی باز می گردد. این واژه (Action Research) اولین‌بار توسط لوین در سال ۱۹۴۴ معرفی شد و در سال ۱۹۴۹، توسط استفن کُری، برای اولین‌بار در جامعه‌ی آموزشی مطرح شد ([۴]، ص ۶۸).

وی، بر تعاریف ارائه شده از تحقیق عمل، مروری دارد که برای آشنایی بیش‌تر با این روش تحقیق، به بررسی آن می پردازیم ([۴]، صص ۶۸ تا ۷۲):

بورلی (۱۹۹۳) در [۴]، اقدام‌پژوهی را پژوهشی آگاهانه، سنجیده و معطوف به راه‌حل تعریف می کند که به‌صورت فردی یا گروهی انجام می شود. بورلی (۱۹۹۳)، نظر جان الیوت را درباره‌ی اقدام‌پژوهی به این شرح بیان می کند: «اقدام‌پژوهی معلمان به مسائل عملی روزانه‌ای که ایشان تجربه کرده‌اند مربوط می شود، به جای این که به مسائل نظری تعیین شده از سوی پژوهشگران حرفه‌ای در یک رشته‌ی علمی ارتباط یابد.» کُری هم در همان منبع اقدام‌پژوهی را به‌عنوان فرآیندی تعریف کرد که از طریق آن، کارورزان آموزشی، اقدامات خود را مورد بررسی و پژوهش قرار می دهند تا مسائل عملی خویش را حل کنند. اقدام‌پژوهی، فعالیتی مبتنی بر تشریک مساعی و همکاری است که در آن کارورزان آموزشی با هم همکاری می کنند تا یکدیگر را در طراحی و انجام پژوهش در کلاس درس یاری رسانند.

کارسون و همکاران (۱۹۸۹) نیز در [۴] اقدام‌پژوهی را ترکیبی از عمل و پژوهش و تلاش برای شناخت اقدامات تربیتی به منظور اصلاح و بهبود محیط آموزشی تعریف می کنند و بر این نکته تأکید دارند که بیشتر کسانی که در یک پروژه‌ی اقدام‌پژوهی مشارکت داشته‌اند، از نقش و جایگاه تجربه سخن می گویند.

مسترز (۲۰۰۰)، اقدام‌پژوهی را پژوهشی نظام‌دار، گروهی، مبتنی بر همکاری، خود اندیشیده و انتقادی می داند که توسط شرکت‌کنندگان در این پژوهش انجام می شود [۴].

برایان (۱۹۹۶ ,[۴])، اقدام‌پژوهی را صورتی از تحقیقات آموزشی می داند که

در آن محقق، کسی است که عمل آموزشی را انجام می‌دهد یا جریان تغییر را هدایت می‌کند.

گلانز (۱۹۹۹) در [۴] اقدام‌پژوهی را شکلی از پژوهش نظام‌یافته معرفی می‌کند که به‌عنوان روشی برای درگیر کردن کارگزاران، معلمان و مدیران در شناخت بهتر اقداماتشان شکل گرفته و پدید آمده است.

مک نیف و همکاران (ترجمه‌ی آهنچیان ۱۳۸۲ ,[۴]) می‌گویند: «اقدام‌پژوهی نوعی پژوهش کارور است که می‌تواند به شما کمک کند تا در هر جایی که مشغول به کار هستید، وظایف شغلی خود را به نحو بهتری انجام دهید. به زبان ساده، پژوهش کارور بدین معناست که پژوهش توسط خود افراد و ضمن کارشان صورت می‌گیرد.»

کلمنتس والرتون (۱۹۹۶)، تحقیق عمل را رویکردی «جدید» معرفی می‌کنند که بر این فرض استوار است که اگر خود معلمان کاملاً به‌عنوان مشارکت‌کنندگان داوطلب در پروژه‌های تحقیقی آموزشی در نظر گرفته شوند، آن‌گاه یافته‌های تحقیقاتی به احتمال بسیار زیاد به عمل [تدریس] پیوند می‌خورند ([۵]، صص ۱۱۳ـ۱۱۴).

ضرورت تحقیق عمل در فرآیند یاددهی ـ یادگیری

مهم‌ترین ضرورت مطرح شدن تحقیق عمل در تحقیقات آموزشی، همان‌گونه که اشاره شد، انتقادهای وارد بر تحقیقات کلاسیک و در واقع ضرورت تاریخی وجود آن بود.** از سوی دیگر به‌نظر می‌رسد «اقدام‌پژوهی، ابزاری مؤثر در رشد حرفه‌ای معلمان است» (رضایی، ۱۳۸۳ ,[۴]، صص ۸۶ تا ۸۹). لذا وجود آن برای توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان، ضرورت پیدا می‌کند.

در [۴]، کارسون و همکاران (۱۹۸۹) نیز دلایل چندی را برای توجیه درگیر شدن در پروژه‌ی تحقیق عمل برمی‌شمارند. این دلایل عبارتند از:

● تحقیق عمل با سؤالات و مسائل ما سروکار دارد نه مسائل و سؤالات شخص دیگر؛

● تحقیق عمل در لحظه‌ی حال و اکنون شروع می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان اجرای اقدام‌پژوهی را به سرعت آغاز کرد؛

● تحقیق عمل، بارها و بارها از این آزمون که از طریق آن مربیان می‌توانند شناخت بهتری از اقدامات آموزشی به‌دست آورده و آن‌ها را بهبود بخشند، موفق بیرون آمده است؛

● تحقیق عمل می‌تواند به تدریس بهتر و یادگیری مؤثرتر منجر شود؛

● تحقیق عمل می‌تواند به برقراری ارتباط‌های مفیدتر با همکاران کمک کند؛

● تحقیق عمل می‌تواند برخی از مرزهای سلسله مراتبی موجود را که بین مدیران و معلمان مدرسه جدایی ایجاد می‌کند از بین ببرد؛

● تحقیق عمل، مربیان و معلمان را با شیوه‌های دیگر بررسی و رویکرد نسبت به مسائل آموزشی و نیز با روش‌های جدید تأمل و توجه به اقدامات آموزشی آشنا و مجهز می‌سازد؛

● تحقیق عمل به مدیران و معلمان کمک می‌کند تا عاداتی را که کسب کرده‌اند، مورد بررسی و تجدیدنظر قرار دهند؛

● روی هم رفته می‌توان نتیجه گرفت که تحقیق عمل ابزاری در دست کارگزاران و دیگر افراد ذی‌نفع است که به آن‌ها کمک می‌کند تا نیازها را بشناسند، فرآیندهای رشد را ارزیابی کنند و نتایج تغییراتی را که تعریف، طراحی و اجرا کرده‌اند، ارزشیابی نمایند. (صص ۷۷، ۷۸).

شباهت و تفاوت تحقیق عمل با سایر اَشکال پژوهش

تحقیق عمل در مهم‌ترین خصیصه، یعنی استفاده از **روش علمی**، با سایر روش‌های تحقیق، وجه اشتراک دارد ([۴]، ص ۷۸). هم‌چنین، در تحقیق عمل، از داده‌های کمّی یا داده‌های کیفی یا از هر دو نوع داده استفاده می‌شود ([۳]، ص ۱۲۷۶).

رضایی (۱۳۸۳) به نقل از مک نیف و همکاران، وجود اشتراک تحقیق عمل با سایر تحقیقات را در ویژگی‌های زیر بیان می‌کند:

ـ به دانش جدید منجر و منتهی می‌شود؛

ـ شواهدی را برای پشتیبانی از این دانش تدارک می‌بیند؛

ـ فرآیند شکل‌گیری دانش جدید را آشکار می‌سازد؛

ـ دانش جدید را به دانش موجود پیوند می‌زند.

در خصوص تفاوت‌های تحقیق عمل با دیگر اَشکال تحقیق، باید به این نکته توجه کرد که تحقیق عمل، ذاتاً یک پژوهش چند روشی است ([۳]، ص ۱۲۷۶). هم‌چنین، محقق در تحقیق عمل، در جست‌وجوی راه‌حل برای یک مسئله‌ی خاص در یک موقعیت خاص است و این، مهم‌ترین تفاوت تحقیق عمل با سایر پژوهش‌های علمی است. «به‌عبارت دیگر، اقدام‌پژوهی کاملاً وابسته به موقعیت[۲۰] است یعنی محقق، پس از تشخیص مشکلی در یک موقعیت خاص، تلاش می‌کند تا آن مشکل را در همان موقعیت حل کند. این یکی از وجوه تفاوت اقدام‌پژوهی با پژوهش کاربردی است» (رضایی، [۴]، ص ۸۱). بنابراین نتایج حاصل از تحقیق عمل، تعمیم‌پذیر نیست و نیز خواننده در استفاده از آن، نقش دارد (گال، مردیت، گال، [۳]، ص ۱۲۷۸). در واقع محقق در تحقیق عمل، برخلاف سایر پژوهش‌های کاربردی، در پی یافتن نتایج و یافته‌هایی نیست که به موقعیت‌های مشابه، تعمیم‌پذیر باشند؛ بلکه روی یک مسئله‌ی ویژه در یک موقعیت خاص متمرکز می‌شود تا در ارتباط با آن موقعیت یا مقصود خاص، دانش دقیقی کسب کند (نقل به مضمون از رضایی، [۴]، صص ۸۱ و ۸۲).

برای مقایسه‌ی تحقیق عمل با دیگر پژوهش‌های علمی، به جدول پیوست (۳) این مقاله که از گال، بورگ و گال، ۱۳۸۶، ج ۲. ص ۱۲۷۲ گرفته شده است، مراجعه کنید.

بد نیست بدانیم که ساکی (۱۳۸۳)، به نقل از برین (۱۹۹۸)، ابراز می‌دارد که اقدام‌پژوهی با انواع نام‌ها شهرت دارد. پژوهش مشارکتی[۲۱]، بررسی گروهی[۲۲]، پژوهش رهایی‌بخش[۲۳]، یادگیری همراه با عمل[۲۴] و پژوهش در موقعیت[۲۵] از عناوین متعددی است که برای معرفی فعالیت اقدام‌پژوهی استفاده می‌شوند، اما همه‌ی آن‌ها مضمون مشترکی را دربرمی‌گیرند ([۴]، ص ۹۵).

واژه‌ی کارورز[۲۶] که در برخی متون با کارگزار یا کارور نیز معادل‌سازی شده است، به معنی کلیه‌ی افراد درگیر در تحقیق عمل است که با عمل مورد بررسی، ارتباط واقعی و عملی دارند.

هم‌چنین نویدی (۱۳۸۳)، ابراز می‌دارد که اَشکالی از تحقیق با عناوین «تحقیق مشارکتی[۲۷]»، «تحقیق تجربی و عمل‌گرا[۲۸]» که در طول تاریخ توسعه‌ی علمی، توسعه‌یافته‌اند، همگی رویکردهای مختلفی هستند که به خانواده‌ی تحقیق عمل تعلق دارند ([۴]، ص ۱۷۶).

کارورزان در تحقیق عمل، پژوهش را خود طراحی و اجرا می‌کنند. برخلاف پژوهش‌های مرسوم دانشگاهی که هدفشان یافتن روابط بین پدیده‌ها یا متغیرهاست، این نوع تحقیق با هدف بررسی موضوع‌هایی است که فرد یا افراد در محیط کار خود

در خصوص شغلشان با آن درگیر هستند و می‌خواهند از راه پژوهش، آن را حل کرده یا کاهش دهند؛ یعنی وضعیت موجود را تغییر دهند.

در شماره‌ی آینده‌ی این مجله و قسمت بعدی مقاله، با تحقیق عمل بیشتر آشنا خواهیم شد.

پیوست (۱)، مراحل تحقیق علمی

- بیان مسئله؛
- بیان فرضیه؛
- تعیین هدف پژوهش؛
- تعیین اهمیت پژوهش؛
- تعریف عملیاتی واژه‌ها؛
- بررسی پیشینه‌ی پژوهش؛
- روش اجرای پژوهش (نمونه‌گیری، طرح پژوهش، شیوه‌های سنجش)؛
- تجزیه و تحلیل داده‌های پژوهش؛
- نتیجه‌گیری؛
- بیان محدودیت‌ها و پیشنهادهایی در رابطه با پژوهش.

پیوست (۲)، تاریخچه‌ی مختصری از تحقیق عمل

در سال ۱۹۴۴، لوین برای مسائل اجتماعی و جنگ، این روش تحقیق را وضع کرد. هدف وی، بهبود اوضاع و شرایط از طریق بررسی اعمال انجام شده و به دنبال آن تصمیم‌گیری‌های مناسب بود. واضع واژه‌ی Action Research نیز خود لوین است.

در دهه‌ی ۵۰ تا ۷۰ میلادی، این نوع تحقیق عملاً کنار گذاشته شد و روش‌های علمی در انواع پژوهش‌ها در حوزه‌های مختلف علوم، مطرح شدند. پس از موفقیت شوروی سابق در پرتاب ماهواره‌ی اسپوتنیک به فضا در سال ۱۹۵۷ میلادی، و سایر موفقیت‌های فضایی این کشور، و نیز پس از شکست‌های آموزشی آمریکا در دهه‌ی ۷۰ میلادی، عدم کفایت تحقیقات کمّی صرف در تحقیقات آموزشی محرز شد و تحقیق عمل مجدداً اهمیت یافت. هم‌چنین جدایی بین نظریه و عمل، نیاز به تحقیقات متکی بر توسعه‌ی حرفه‌ای و علاقه به برنامه‌ی درسی کاربردی، از دیگر علل ظهور و پیدایش مجدد روش‌های تحقیق کیفی، به‌ویژه تحقیق عمل در آموزش می‌باشد(گویا [۴]، ص ؟).

در سال ۱۹۸۱ میلادی، در کنفرانسی در کشور استرالیا، تحقیق عمل رسماً معرفی شد و در حال حاضر استرالیا، پیش‌تاز این نوع تحقیق در دنیا می‌باشد. مطالعه‌ی ادبیات مربوط به تحقیق عمل این استنباط را به ما می‌دهد که این رویکرد، نوعی پاسخ خردمندانه به نیازهای علمی و اجتماعی انسان است که در بستر زمان به تدریج شکل گرفته و در عصر حاضر پدیدار شده است. علاوه بر عوامل فوق که برشمردیم، فلسفه‌ی عمل‌گرا (Pragmatism)، نظریه‌ی انتقادی (Critical Theory)، نظریه‌ی ساخت و سازگرایی (Constructivism)، روان‌شناسی انسان‌گرا (Humanistic) و روان‌شناسی سلامت (Health)، تفکر سیستم‌ها و معرفت‌شناسی ارسطویی و نیز نهضت فمینیسم و بعضی گروه‌های اقلیت، شرایط مناسب را برای ظهور و توسعه‌ی اقدام‌پژوهی فراهم ساختند.

پیوست ۳. جدول مقایسه‌ی تحقیق عمل با سایر پژوهش‌های علمی

عنوان	پژوهش رسمی	تحقیق عمل
آموزش مورد نیاز	آموزش مفصل	به تنهایی یا با کمک مشاور
اهداف مسئله	تولید دانش تعمیم‌پذیر	تولید دانش کاربردی در موقعیت خاص
شیوه‌ی بیان مسئله	مرور پژوهش‌های پیشین	مسائل یا اهدافی که اخیراً پیش آمده است
شیوه‌ی بررسی پیشینه	مفصل، با استفاده از منابع دست اول	موجز، با استفاده از منابع دست دوم
رویکرد نمونه‌گیری	نمونه‌گیری تصادفی یا خوشه‌ای	دانش‌آموزان یا مراجعانی که با آن‌ها کار می‌کنند
طرح پژوهش	کنترل شدید، چهارچوب زمانی طولانی	رویه‌های انعطاف‌پذیر، تغییر در خلال مطالعه، چهارچوب زمانی کوتاه و کنترل از طریق مثلث‌سازی
شیوه‌های سنجش	ابزارهای پیش آزمون و ارزشیابی	ابزارهای متداول یا آزمون‌های میزان شده
تجزیه و تحلیل داده‌ها	آزمون‌های آماری، تکنیک‌های کیفی	تأکید بر معنی‌داری عملی نه آماری، ارائه داده‌های خام و نمودارها
کاربرد نتایج	تأکید بر معناداری نظری، افزایش دانش درباره‌ی تدریس و یادگیری به‌طور عام	تأکید بر معناداری عملی، بهبود تدریس و یادگیری در یک کلاس خاص
گزارش نتایج	چاپ گزارش تحقیق، ارائه به مجلات علمی یا همایش‌ها	ارائه‌ی غیررسمی به همکاران، ارائه‌ی خلاص‌یه گزارش

پی‌نوشت

* مراحل تحقیق را در پیوست (۱) این مقاله مطالعه کنید.

** تاریخچه‌ی مختصری از تحقیق عمل را در پیوست (۲) این مقاله مطالعه کنید.

1. Action Research
2. Description
3. Prediction
4. Improvement
5. Explanation
6. Basic
7. Applied
8. Quantitative
9. Qualitative
10. Positivism

۱۱. افلاطون‌گرایان در فلسفه‌ی ریاضی، مانند اثبات‌گرایان در علم می‌اندیشند.

12. Hermeneotic
13. Naturalistic
14. Post Postivism
15. Critical Theory
16. Interpretive
17. Case Study
18. Ethnographic
19. Reflection
20. Situational

منابع

[۱] دلاور، علی. (۱۳۸۰). **مبانی نظری و عملی پژوهش در علوم انسانی و اجتماعی**، انتشارات رشد.

[۲] گال، مردیت؛ بورگ، والتر؛ گال، جویس. (۱۳۸۴). **روش‌های تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روان‌شناسی** (جلد اول)، ترجمه‌ی گروه مترجمان (به اهتمام دکتر احمدرضا نصر)، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی و سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت)

[۳] گال، مردیت؛ بورگ، والتر؛ گال، جویس (۱۳۸۶). **روش‌های تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روان‌شناسی** (جلد دوم)، ترجمه‌ی گروه مترجمان (به اهتمام دکتر احمدرضا نصر)، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت)

[۴] گروه نویسندگان (۱۳۸۳) (برنامه‌ریزی، تدوین و تولید رضا ساکی). **اقدام‌پژوهی: راهبردی برای بهبود آموزش و تدریس (اصول، نظریه‌ها و چارچوب عملی)**، چاپ سوم، انتشارات پژوهشکده‌ی تعلیم‌وتربیت، وزارت آموزش‌وپرورش.

[5] Clements, K; Elerton, N. (1996). **Mathematics Education, Past, Present, Future**, UNESCO.

میزگرد

اعضای هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی
به مناسبت انتشار صدمین شماره‌ی مجله

اشاره

با نزدیک شدن به انتشار صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، بر آن شدیم تا به این مناسبت، نشستی با همه‌ی اعضای تحریریه‌ی مجله داشته باشیم و نظرات آن‌ها را بشنویم. آن‌چه می‌خوانید، صحبت‌های ایشان در میزگردی است که در تاریخ ۲۷ آبان ۱۳۸۸ برگزار شد.

خانم دکتر زهرا گویا: خانم چمن‌آرا پیشنهاد دادند که برای صدمین شماره‌ی مجله که تابستان ۸۹ منتشر می‌شود، یک میزگرد دوستانه با اعضای هیئت تحریریه داشته باشیم. با پذیرش این پیشنهاد، موضوع خاصی برای این میزگرد ـ مانند میزگرد اثبات یا میزگرد حل مسئله مشخص نکردیم. ولی مسئله این بود که به هر حال، این مجله به این دلیل تأسیس شده بود که در خدمت آموزش ریاضی باشد و در این مسیر، فراز و فرودهای زیادی از سال ۶۳ تا به الان داشته است. اما مهم این است که خوشبختانه، با تمام این فراز و فرودها، هیچ شماره‌اش از دست نرفته است. یعنی حتی یادم هست که گاهی وقت‌ها، از همان شماره‌های اول اگر اوضاع از نظر تولید و اجرا، بحرانی می‌شد، حتی گاهی دو شماره‌ی مجله در یک شماره درمی‌آمد اما منظم منتشر می‌شد. به هر حال، صدمین شماره را تقسیم بر چهار بکنید، نشانه‌ی تعداد سال‌هایی است که این مجله در خدمت آموزش ریاضی ایران بوده است. مشابه این مجله قبل از انقلاب، مجله‌های پیک‌های دانش‌آموزی،

پیک معلمان و ماهنامه‌ی آموزش و پرورش بود که به شکل‌های مختلف به معلمان خدمات ارائه داده‌اند. ولی بعد از این، توقفی داشتیم تا سال ۶۳ که اولین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی منتشر شد. همه فکر کردیم که برای این صدمین شماره‌ی مجله، به هر حال باید کاری بکنیم و جشن سده‌اش را بگیریم. آقای رضائی گفتند که صددرصد! بعد فکر کردم دیدم تفسیر قشنگی است! صد در صد! واقعاً صد در صد چی؟ چی کار کردیم که استحقاق طرح صددرصد را داشته باشیم! فکر کردم که با توجه به پیشنهادی هم که خانم چمن‌آرا دادند، لطف کنید تا با هم، مروری داشته باشیم بر صد شماره‌ی مجله. به اصطلاح بلند فکر کنیم راجع به اتفاقاتی که در این مدت رخ داده و این که مجله چه تأثیری در آموزش قبل و ضمن خدمت معلمان داشته، هم‌چنان که در ایجاد هویت برای رشته‌ای به نام **آموزش ریاضی** و کمک به تربیت نسل جدیدی از معلمانی که در ضمن، آموزشگر ریاضی هم هستند ایفای نقش کرده است. به هر حال، اگر صد شماره‌ی مجله را مروری بکنیم ـ مانند کاری که برای بیستمین سال تأسیس مجله، از شماره‌ی ۱ تا شماره‌ی ۷۶ را مرور کردیم ـ به نکته‌ی جالبی برمی‌خوریم که در ۷۶ شماره‌ی اول این مجله ندیده بودیم و آن نکته این بود که مخاطبان ما خیلی متنوع‌تر شده‌اند ـ اگرچه متأسفانه تهران هم‌چنان بی‌مخاطب است، زیرا به دلایلی که موضوع بحث الان ما نیست، در تهران توجه چندانی به مجله نشده است. با این وجود، از شهرستان‌هایی نامه گرفته‌ایم که واقعاً نام آن را صرفاً از روی همین مکاتبات شناختم. هم‌چنین، از تمام نقاط کشور، معلمان زیادی با ما همکاری کرده‌اند که برایمان قابل احترام‌اند و واقعاً ممنون همه‌ی آن‌ها هستیم. شمارگان مجله از سه هزارتا به بیست هزارتا رسیده که این، نشان‌دهنده‌ی افزایش چشم‌گیر مخاطبان آن است. به هر حال من فکر می‌کنم احساس مسئولیت کردن در مقابل بیست هزار نفر ـ اگر هر خریدار مجله فقط خودش مجله را مطالعه کند ـ حداقل بیست هزار نفر از نوشته‌های ما تأثیر می‌پذیرند. من خواهشم این است که وقتی بگذاریم و بیاندیشیم که چه کار بکنیم تا این بیست هزار نفر مخاطب ما، از مجله استفاده‌های بهینه کنند و به تدریج، جزو همکارانمان درآیند یعنی تعداد همکاران را بیشتر بکنیم. یادم هست که وقتی می‌خواستیم درخواست ارتقای رتبه‌ی مجله را به علمی ترویجی و حتی علمی ـ پژوهشی بکنیم (چون قابلیت علمی پژوهشی شدن را داشت) تا آستانه‌ی آن هم پیش می‌رفتیم و قاعده‌ها و شرایط این ارتقا را رعایت می‌کردیم، مانند ترکیب مقالات، درصد مقاله‌های پژوهشی و نسبت آن با مقالات ترجمه‌ای و نظایر آن، آقای دکتر رجبعلی‌پور در آن شماره که مخصوص بیستمین سال انتشار مجله درآوردیم گفتند که اگر این کار را بکنیم عملاً مجله، مجله‌ی دانشگاهی می‌شود و چون امتیاز دارد، دانشگاهی‌ها علاقه‌مندی بیشتری نشان می‌دهند. در کل عرض کردم و خطر بالقوه‌اش این است که تمام یا بخش عمده‌ای

تعمیم و تخصیص، از اولین شرط‌های یک کار علمی است یعنی اگر در یک مجله، بخواهیم راجع به عالم و آدم صحبت کنیم و تمام مسائل آموزشی را حل کنیم، امکان‌پذیر نیست. این مجله قرار بوده که در خدمت آموزش ریاضی باشد، پس باید رسالتش، ترویج و توسعه‌ی آموزش ریاضی در ایران باشد

از مخاطب معلم را از دست بدهیم و ما فکر کردیم که واقعاً این یک هشدار جدی است و این هشدار را جدی گرفتیم و اصلاً بی‌خیال آن شدیم که مجله هر رتبه‌ای می‌خواهد داشته باشد. مهم این است که بخشی از تاریخ آموزش ریاضی ایران شده. هم‌چنان که مثلاً فرض کنید ماهنامه‌های آموزش و پرورش همیشه بخشی از آموزش و پرورش نوین ایران هستند، حالا رتبه‌اش هرچه می‌خواسته باشد یا امتیازاتش هرچه که می‌خواسته باشد. عذرخواهی می‌کنم از این مقدمه‌ی شاید بی‌نظمی که خدمتتان گفتم، ولی چیزی بود که دلم می‌خواست مطرح کنم و امیدوارم کمکم کنید تا یک هم‌اندیشی با هم داشته باشیم و نتیجه‌ی آن را در قالب این میزگرد، در اختیار مخاطبان خود قرار دهیم.

آقای میرزا جلیلی: عرض کنم من در این زمینه مقاله‌ای نوشتم و جمع‌بندی کردم. در آن مقاله، ممکن است مطالبی از قلم افتاده باشد یا چیزی که لازم نیست، گفته شده باشد. از این جهت با دقت این مقاله را مرور کردم که اگر صلاح بدانید با عنوان انتخابی «از میلاد تا میلاد» یعنی از «بهار ۶۳ تا تابستان ۸۹» به چاپ برسانید. اما لازم می‌دانم بگویم که مشابه مجلات رشد، از سال

۱۳۴۵ در سازمان کتاب‌های درسی، مجلات غیرتخصصی تحت عنوان **پیک دانش‌آموز**، **پیک معلم** و بعد **پیک راهنمایی** منتشر می‌شد و مستقیماً، هم‌چون کتب درسی ابتدایی، در مدارس توزیع می‌شد. بعد از انقلاب این مجلات با عنوان‌های جدید **رشد دانش‌آموز و رشد معلم**، با آرایش و گام‌های نو، کار خود را آغاز کردند که مورد استقبال مدارس قرار گرفت و هنوز هم توزیع این مجلات در مدارس انجام می‌گیرد. لازم به یادآوری است که تنها مجله‌ی اختصاصی ریاضی قبل از انقلاب مجله‌ی «**یکان**» بود که با هزینه‌ی شخصی و مسئولیت آقای دکتر عبدالحسین مصحفی و مدیریت داخلی همسر ایشان که رئیس مرکز تربیت معلم دختران بود، منتشر می‌شد. در آن مجله، مسائل و مطالب مختلف مورد بحث و تجزیه و تحلیل قرار می‌گرفت، از جمله مسائل کنکور؛ و مخاطبان مجله دبیران و دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی بودند. متأسفانه این مجله در سال ۵۶ با مشکلات مالی مواجه شد و در آستانه‌ی تعطیلی قرار گرفت.

بعد از انقلاب، برای بررسی مسئله‌ی افت تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی، شورای افت مرکب از استادان و دبیران ریاضی، رؤسای مدارس و اعضای گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف در این دفتر تشکیل شد. این شورا بعد از یک سال یا بیشتر جلسات هفتگی خود، به این جمع‌بندی رسید که لازم است یک مجله‌ی ریاضی از طریق گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی انتشار یابد.

شروع انتشار مجله هم‌زمان با تألیف جدید کتب ابتدایی و راهنمایی بود و این فرصت مناسبی بود که تغییرات کتاب‌ها یا موارد حذف شده یا جابه‌جا شده، از طریق مجله به اطلاع معلمان و دانش‌آموزان رسانده شود.

شروع انتشار مجله همزمان با تألیف جدید کتب ابتدایی و راهنمایی بود و این فرصت مناسبی بود که تغییرات کتاب‌ها یا موارد حذف شده یا جابه‌جا شده، از طریق مجله به اطلاع معلمان و دانش‌آموزان رسانده شود

خانم دکتر سهیلا غلام آزاد: من البته از آقای جلیلی که با حضور ذهن کامل و به تمام نکات ریز اشاره کردند، تشکر می‌کنم. ولی نکته‌ای که خیلی به چشم می‌آید این است که در این چند سال اخیر، افراد زیادی با مجله همکاری داشتند و مقاله‌ها، جنبه‌ی آموزشی زیادی داشته است. مقالاتی که در دوازده سال اخیر در مجله چاپ شده سعی کرده جهت‌گیری آموزشی مجله را برجسته‌تر کند. الان که به‌عنوان یک معلم در دانشگاه‌ها دروس رشته‌ی آموزش ریاضی را تدریس می‌کنم می‌بینم که چه‌قدر مقالات مجله‌ی رشد می‌تواند به‌عنوان مواد آموزشی مورد استفاده‌ی دانشجویان قرار گیرد. هم‌چنین در کنفرانس‌های آموزش ریاضی می‌بینم اغلب ارجاع‌های مقالات به مقالات مجلات رشد آموزش ریاضی هست و همین طور مثلاً در پایان‌نامه‌های این رشته، کمتر پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی هست که جایی به یکی از مقالات این مجله ارجاع نداده باشد. به همین خاطر، من می‌خواستم اگر موافق باشید، پیشنهادی بکنم خدمت شما. با توجه به این‌که به هر حال ما منابع آموزشی که خصوصاً در رشته‌ی آموزش ریاضی به زبان فارسی به صورت کتاب یا مجموعه مقالات باشد نداریم، اگر موافق باشید تعدادی از مقالات مجله را که مخاطب بیشتری را داشته یا بیشتر مورد ارجاع بوده را دست‌چین کنیم و بعد از ویرایش جدید، به صورت یک یا چند کتاب چاپ کنیم. به هر حال، مقالات ترجمه‌ای مجله، عمدتاً مقالات کلاسیکی بودند که ترجمه شده‌اند یا به این شکل گردآوری شده‌اند. اگر موافق باشید که چنین کاری انجام شود، فکر می‌کنم که خدمت بزرگی خواهد بود به رشته‌ی آموزش ریاضی که منبع خوبی در اختیار دانشجوها قرار بگیرد. من ایده‌ی این پیشنهاد را از کتاب کلاسیکس گرفتم. این کتاب مجموعه‌ای از مقالات کلاسیک در آموزش ریاضی است که توسط شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) در سال ۲۰۰۴ به چاپ رسیده است.

گویا: چگونه این اطلاعات جمع آوری شد؟

غلام‌آزاد: فکر می‌کنم این شورا، با ۵۰ نفر از کسانی که در واقع آموزشگران سرشناس ریاضی بودند مکاتبه کردند و از آن‌ها خواستند که مقالاتی را که به نظرشان، مقالات کلاسیک در رشته‌ی آموزش ریاضی است و چاپ شده‌اند را معرفی کنند ـ چه در مجلات چه در کتاب‌ها یا بخشی از کتاب‌ها، یعنی به هر شکلی که مقاله در جایی چاپ شده است. این افراد، مقالات را معرفی کردند و هر کسی با توجه به تجربه‌ای که داشت، مقاله‌ای را که احساس می‌کرده در این رشته مقاله‌ی کلاسیک است، معرفی کرد. بعد عده‌ای هم آمدند و این‌ها را داوری کردند. در نتیجه، مقالاتی که بیشترین آراء را به دست آوردند، انتخاب شدند و به صورت یک مُجلد، چاپ شدند. این مقاله‌ها را که آدم مرور می‌کند، واقعاً احساس می‌کند که یک منبع درسی قوی است که در آن، هم زمینه‌های مختلف تحقیقاتی مطرح شده هم سیر تحولی زمینه‌ها و روش‌های تحقیق بیان شده است. مثلاً از سال فرضاً ۱۹۶۰ در رشته‌ی ریاضی چه تحقیقاتی مطرح بوده و تا الان، به چه شکلی تغییر و تحول پیدا کرده است. کلاسیکس مجموعه‌ی قوی و خوبی

است. من فکر می‌کنم با توجه به شرایطی که الان رشته‌ی آموزش ریاضی در ایران دارد، اغلب دانشجوهای این رشته مشکلی که دارند این است که نمی‌توانند مقاله‌ها را خودشان شخصاً پیدا کنند. اگر ما چنین کاری را انجام بدهیم و تعدادی از مقاله‌های چاپ شده در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی را با توجه به محتوای آن‌ها برحسب ترجمه یا تألیف انتخاب کنیم ـ می‌شود روی چگونگی این انتخاب فکر کرد که با چه سازوکاری این کار انجام شود ـ بعد هم عده‌ای مسئولیت ویرایش مجدد آن‌ها را عهده‌دار بشوند، فکر می‌کنم کتاب خیلی مناسبی تهیه شود. تأکید می‌کنم ویرایش مجدد زیرا شاید مقاله‌ای که خودم ۱۵ سال پیش ترجمه کردم را بخواهم الان دوباره انجام‌اش بدهم، با گذشته فرق کند و روان‌تر شود. لازم است واژه‌ها و معادل‌ها را هم‌سان کنیم و واژه‌هایی را که به هر حال در مقالات از آن‌ها استفاده می‌شود به صورت واژه‌نامه درآوریم. چنین کتابی می‌تواند خدمت با ارزشی حداقل به رشته‌ی آموزش ریاضی و آموزش معلمان ریاضی بکند.

آقای دکتر محمدرضا فدایی: ضمن تشکر از این که این جلسه را ترتیب دادید فرمودند که این مجله در خدمت آموزش ریاضی بوده، باشد و باید باشد که در واقع، هدف اصلی ایجاد این مجله همین بوده است. من این را در ذهن خودم چنین تعبیر می‌کنم که مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، باید محور وحدت و یگانگی در آموزش ریاضی در جهت ارتقاء و ترویج آموزش ریاضی به عنوان یک دانش مورد نیاز ملی قرار بگیرد. حالا این محور قرار گرفتن از چند جهت می‌تواند برای جایگاه علمی کشور یک یاری‌رسان باشد. در رابطه با دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، همان‌طور که خانم دکتر هم اشاره کردند، از دو جهت کلی می‌توانیم به این مجله نگاه بکنیم و خدمات آن را ارزیابی کنیم؛ یکی به عنوان منبع بسیار خوبی برای رشته‌ی آموزش ریاضی که به آن اشاره کردیم و دیگری این که جایگاه خوبی برای ایجاد ارتباط بین دانشجویان دوره‌ی کارشناسی ارشد است؛ جایگاهی که در واقع، آن‌ها می‌توانند نقطه نظرات خودشان را ارائه کنند و تحقیقاتی را که انجام داده‌اند، در جامعه مطرح کنند تا سایر آموزشگران ریاضی از آن‌ها استفاده کنند و اصل روابط، از این طریق شکل می‌گیرد. هم‌چنین، از این که گفتم مجله محور وحدت قرار بگیرد، این است که در خدمت توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان ریاضی است. این هم از دو جهت قابل بررسی است؛ یکی این که اگر مطالعات فردی معلمان ریاضی را در نظر بگیریم، دو نکته‌ی حائز اهمیت در آن‌ها می‌بینیم که یکی افزایش دانش حرفه‌ای معلمان از طریق مطالعه‌ی مقالات این مجله است و دیگر این که به معلمان کمک می‌کند تا بتوانند مسیر تدریسی خود را انتخاب کنند و برای این کار، منبع بسیار خوبی است. با این وجود نمی‌دانم که آیا مجله، مورد استفاده‌ی کارشناسان و برنامه‌ریزان آموزش ریاضی هست؟ چقدر این مجله توانسته است که نقاط قوت و نقاط ضعف را در حوزه‌ی آموزش ریاضی مطرح بکند و هشدارها و راهکارهای مناسب ارایه دهد؟

امیدوارم برای انتشار یک مجله زحماتی که کشیده می‌شود، بیشتر مورد توجه نظام برنامه‌ریزی آموزشی کشور قرار بگیرد.

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، باید محور وحدت و یگانگی در آموزش ریاضی در جهت ارتقاء و ترویج آموزش ریاضی به عنوان یک دانش مورد نیاز ملی قرار بگیرد

خانم سپیده چمن‌آرا: می‌خواستم در واقع، مروری کنم بر تجربه‌ی خودم در زمینه‌ی آشنایی با این مجله و بعد آن‌چه که فکر می‌کنم تأثیرات این مجله در جامعه‌ی آموزشی ما باشد. من از زمستان سال ۸۰ افتخار همکاری با این نشریه را پیدا کردم. این سال، مصادف با زمانی شد که من دانشجوی اولین دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آموزش ریاضی شدم.

از همان ترم اول که وارد دانشگاه شدم، مقاله‌ها و مطالب مجله را از یک سو به عنوان مدیر داخلی می‌خواندم که غلط نگارشی نداشته باشد و تصویر مناسب برای هر متن انتخاب کنم تا مجله آماده‌ی چاپ شود. از طرف دیگر به عنوان یک دانشجو مجله را می‌خواندم تا از آن‌ها، مطلب جدید یاد بگیرم و با این حوزه بیشتر آشنا بشوم و بیاموزم. همان‌طور که خانم دکتر غلام آزاد گفتند، واقعاً خیلی از مقاله‌های مجله که طی این سال‌ها چاپ شده، منابع خیلی خوبی برای بسیاری از پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد یا مقاله‌های توصیفی دیگری بوده که درخصوص آموزش ریاضی نوشته شده‌اند. این یک جنبه از اثرگذاری این مجله بر جامعه‌ی آموزشی بوده که به عنوان تأمین منابع، سعی کرده مطالب مناسب را جمع‌آوری کند و در اختیار معلمان ریاضی قرار دهد. اما به نظر من، بُعد دیگرش این است که مجله، محلی است برای این‌که معلمان ریاضی، تجربه‌های آموزشی خود را به ثبت برسانند. حالا این تجربه‌ها ممکن است تجربه‌ی آموزشی به معنی تجربه‌ی تدریس‌شان باشد؛ یعنی مجله یک وسیله‌ی ارتباطی برای تبادل تجربه بین معلمان ریاضی مختلف شده که در غالب روایت معلمان یا مقاله‌های توصیفیِ آموزشی، چاپ شده‌اند.

یک جنبه دیگر هم تجربه‌های آموزشی معلمان از جهت یاد

گرفتن و نوشتن هست؛ یعنی من از این جنبه هم به مجله توجه می‌کنم؛ برای این‌که می‌بینم در جلسات هیأت تحریریه، مقاله‌ها با دقت بررسی می‌شوند و توصیه‌هایی به نویسندگان یا مترجمان مقاله‌ها می‌شود که چه نکاتی را رعایت کنند تا مقاله‌های بهتری بنویسند. اگر مقاله‌ای برای مجله مناسب نبوده، همیشه سعی کرده‌ایم که با توصیه‌های مناسب و آن‌چه که فکر می‌کنیم مقاله را بهتر می‌کند و برای مخاطبش مفیدتر می‌شود، مقاله را به نویسنده برگردانیم که این کار، به افرادی که مایلند بنویسند کمک می‌کند. نوشتن کار سختی است، پس کسانی که علاقه‌مند هستند و وارد این حوزه شده‌اند و این جسارت را داشته‌اند، حداقل از این طریق به نوعی دارند آموزش می‌بینند و به تدریج، وارد جرگه‌ی افرادی می‌شوند که می‌نویسند و از این طریق، با دیگران ارتباط برقرار می‌کنند. من فکر می‌کنم همین جنبه هم یکی از جنبه‌های مهم مجله است که در زمینه‌ی آموزشی تأثیرگذار بوده است.

آقای دکتر مهدی رجبعلی‌پور: من از طرح خانم غلام آزاد استقبال می‌کنم و امیدوارم لطف کنند خودشان زحمتش را به عهده بگیرند. واقعاً تهیه‌ی چنین مجموعه‌ای یک مدیر می‌خواهد.

برای این کار، می‌توانیم مقالات پرارجاع مجله را در نظر بگیریم. هم چنین، پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد و احیاناً دکتری آموزش ریاضی را هم بگردیم ببینیم چقدر و به کدام مقالات مجله ارجاع داده می‌شود. این کار هم می‌تواند خیلی مفید باشد برای این‌که مستندات خوبی به دست می‌دهد.

در این چند سال اخیر، افراد زیادی با مجله همکاری داشتند و مقاله‌ها، جنبه‌ی آموزشی زیادی داشته است. مقالاتی که در دوازده سال اخیر در مجله چاپ شده سعی کرده جهت‌گیری آموزشی مجله را برجسته‌تر کند

آقای دکتر بیژن ظهوری زنگنه: جمع‌آوری مقالات به‌صورت کتاب واقعاً ایده‌ی خیلی خوبی است و چندین بار هم به شکل‌های مختلفی اقدام به این کار شده و مطالب مجله به صورت موضوعی تقسیم‌بندی شد، ولی به دلایلی به نتیجه نرسید. از جمله این که یک سؤال اساسی این بود که ناشر چنین مجموعه‌ای چه کسی خواهد بود؟

نکته‌ای که در مورد یکان بود و من فکر می‌کنم خیلی جالب است این بود که من وقتی که دانش‌آموز بودم، خیلی علاقه‌مند به یکان بود. یادم می‌آید روزی که یکان می‌آمد، یکی دو ساعت کنار روزنامه‌فروشی می‌ایستادیم تا یکان بیاید. ولی فکر می‌کنم دلیلی که از سال ۵۶، دیگر یکان درنیامد این بود که یکان، محور مسائلش براساس مسائل کنکورهای تشریحی پیچیده بود. یعنی فکر می‌کنم چیزی که برای دانش‌آموزان جذبه داشت، به تدریج از بین رفت.

تا قبل از سال ۵۶، مسائلی که در یکان می‌آمد، مسائل سختی بود که فراتر از کتاب‌های درسی بود و فقط بعضی وقت‌ها با مطالب کتاب‌های درسی حل می‌شد و بعضی مواقع هم مسائل یکان از منابع روسی ترجمه می‌شد. فکر می‌کنم سال ۴۷ اولین سالی بود که کنکور تستی جایگزین کنکور تشریحی شد و کم‌کم تبدیل به کنکور سراسری شد. تست زدن فرهنگ دیگری می‌خواست و در واقع، دانش‌آموزان و افرادی که می‌خواستند در کنکور موفق شوند، انگیزه‌ی خود را نسبت به یکان از دست دادند و پایان یافتن دوره‌ی یکان را رقم زدند.

گویا: عذر می‌خواهم، فکر می‌کنم بهترین کار این است که یک مصاحبه با خود آقای مُصَحفی بشود تا ببینیم خودشان در این مورد چه می‌گویند.

زنگنه: بله خیلی خوب است. به هر حال، من خودم جزو مشتاقان این مجله بودم و تمام شماره‌هایش را هم تا وقتی که در سال ۵۲ برای ادامه تحصیل به خارج از کشور رفتم، داشتم.

فدایی: دلیل این‌که الان مجله‌ی یکان با آموزش ریاضی مقایسه می‌شود این است که تصور می‌شد مخاطبانش یکی بودند. احتمالاً در جلسه‌ای که در مورد آموزش برهان ریاضی صحبت می‌شود بحث یکان خیلی پررنگ باشد. زیرا مخاطبانشان یکی هستند. اما اینجا که اصلاً به نظر نمی‌رسد وجه مشترک خیلی مشخص داشته باشند. زیرا رشد آموزَش ریاضی برای معلم‌های ریاضی و دانشجویان کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و برنامه‌ریزی‌های درسی ریاضی است و برهان برای دانش‌آموزان است.

زنگنه: وقتی که رشد شروع شد، در ذهن بسیاری این بود که این مجله، در ادامه‌ی یکان باشد. کم‌کم با گسترش رشته‌ی آموزش ریاضی، مجله بیشتر به سمت آموزش ریاضی که جایگاه طبیعی‌اش بود کشیده شد و برهان به نوعی، جانشین یکان شد ـ من اینجا توضیحی بدهم که یکان قبل از انقلاب، تنها مجله‌ای بود که برچسب ریاضی داشت. مثلاً وقتی که به گذشته نگاه می‌کنم، تنها چیزی که از مجله‌ی ریاضی در ذهنم می‌آمد یکان بود.

آقای دکتر اسماعیل بابلیان: آقای دکتر زنگنه مقداری از علت‌ها را گفتند. قبلاً، مجله‌های ریاضی خیلی کم بود و

کتاب و ترجمه هم اصلاً نبود. خود من آن موقع که دانش‌آموز بودم، واقعاً دنبال مسائل جدید بودیم که پیدا کنیم و حل کنیم. یکی از شگردهایی که یکان داشت این بود که این مسائل را از طریق دانش‌آموزان می‌گرفت و به اسم خودشان چاپ می‌کرد. یادم است خود من وقتی که دبیر بودم، یک مسئله فرستاده بودم که در مجله به اسم من چاپ شد. یعنی چند دسته بودند که این مجله را می‌خریدند؛ یک عده می‌خریدند که مسائل آن را حل کنند، معلم‌ها می‌خریدند که مسائل آن را زودتر از دانش‌آموزان حل کنند و فردا سر کلاس دست بسته نمانند. یک عده هم می‌خریدند ببینند مسئله‌ای که فرستاده‌اند چاپ شده یا نشده است و به این ترتیب، یکان رقابتی بین افراد ایجاد کرده بود.

دکتر مصحفی چون چندین سال را بدون حمایت دیگران گذرانده بود، فکر می‌کرد باز هم می‌تواند بدون کمک مالی ادامه دهد. شاید هم یکی از دلایل افول یکان همین آمدن کنکور تستی بود که باعث شد مجله، رونق خود را از دست دهد. اما در مورد مجله‌ی رشد آموزش ریاضی و این صددرصدی که آقای رضایی گفتند، من فکر می‌کنم مجله صددرصد در کنفرانس‌های آموزش ریاضی، دوره‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و حتی در نقد کتاب‌های درسی، تأثیر داشته است. ولی به گفته‌ی بسیاری از معلمان، ارتباط مجله با دانش‌آموزان صددرصد قطع شد. ما دیگر خود را به عنوان مخاطب دانش‌آموزان نمی‌بینیم و چندین سال بعد که خانم دکتر گویا آمدند و مجله مسیر خودش را پیدا کرد، باعث شد که مجله‌ی برهان به‌وجود بیاید تا خلاء یکان به نوعی پر شود. همان‌طور که اشاره شد، مجله‌ی آموزش ریاضی که از سال ۶۳ شروع شد، در ابتدا سعی کرد همان مسیر یکان را ادامه دهد؛ یعنی آقایان غیور و دارابی و نصیری همه معلمان ریاضی بودند که مسائل دبیرستانی را مرتب توی مجله‌ی رشد مطرح و حل می‌کردند.

گاهی از خوانندگان خواسته می‌شد که حل مسائل را بفرستند و دو سه شماره بعد هم حل آن‌ها نوشته می‌شد. گاهی اوقات هم اشاره می‌شد که این شخص، بهترین حل را فرستاده است. به هر جهت، فکر می‌کنم رسالت مجله‌ی ما این است که به آموزش ریاضی بپردازیم. من فکر می‌کنم چهار شماره‌ی مجله‌ی رشد در هر سال، در ارتقای نحوه‌ی نگارش مقالات توسط افرادی که در کنفرانس‌های آموزش ریاضی شرکت می‌کنند و مقاله می‌دهند، بسیار تأثیر داشته و امیدواریم که این تأثیر همین‌طور ادامه پیدا کند.

این را هم اضافه کنم که بعضی جاها که دوره‌ی کارشناسی ارشد گذاشتند، به پشتیبانی وجود همین مجله گذاشتند و مرتب اگر دانشجو از استادها سؤال کنند، می‌گویند مراجعه کن به مجله‌ی شماره فلان یا برو این مجله را زیر و رو کن که حتماً یک مطلب پیدا می‌کنی.

خانم دکتر شیوا زمانی: برای من که خیلی هم با آموزش ریاضی و دانش‌آموزان تماس ندارم، همین حضور در میان تحریریه‌ی رشد واقعاً فرصتی بود که از مطالبی که می‌شنوم استفاده کنم. نظرات بقیه برای من تجربه‌ی خوبی است. امیدوارم برای شروع صد شماره‌ی دوم بهتر از این بتوانیم کار کنیم.

نوشتن کار سختی است، پس کسانی که علاقه‌مند هستند و وارد این حوزه شده‌اند و این جسارت را داشته‌اند، حداقل از این طریق به نوعی دارند آموزش می‌بینند و به تدریج، وارد جرگه افرادی می‌شوند که می‌نویسند و از این طریق، با دیگران ارتباط برقرار می‌کنند. من فکر می‌کنم همین جنبه هم یکی از جنبه‌های مهم مجله است که در زمینه‌ی آموزشی تأثیرگذار بوده است

گویا: دقت خانم دکتر زمانی در داوری و اصلاح مقالات موضوعی و ترجمه‌ای بسیار باارزش و برای مجله حیاتی است.

آقای مانی رضائی: یک نکته‌ی مهم این است که سطح انتظاری که رشد آموزش ریاضی داریم، بیش از یک مجله است! واقعاً وقتی به یک مجله نگاه می‌کنیم، آن را مجموعه‌ای از مقالات و موضوع‌های مختلف علمی می‌بینیم. ولی الان، ما داریم هدایت دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی را به عهده‌ی این مجله می‌گذاریم. حتی فرض کنید از دل این مجله، می‌خواهیم مجموعه کتاب‌هایی به عنوان مرجع دربیاوریم. حتی از دل این مجله، انتظار داریم چیزهایی به عنوان پوشش دادن به نیازهای جامعه‌ی آموزشی و خیلی چیزهای دیگر بیرون آید، یعنی مجله دارد با صددرصد توانش کار می‌کند.

دکتر زنگنه نکته‌ای را در مورد کنکور و تأثیری که احتمالاً بر سرنوشت یکان گذاشته گفتند. در حال حاضر، مجله‌ی برهان نیازهای ریاضی جامعه‌ی مدرسه‌ای را تا حدی پوشش می‌دهد. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی هم واقعاً این تغییر موضع را داده است که در خدمت آموزش ریاضی باشد. من فکر می‌کنم الان کمی از این زاویه به مجله نگاه کنیم که حالا، خیلی از معلم‌های ما دست به قلم هستند، می‌نویسند و کار می‌کنند اما نیازمند نوعی فرهنگ‌سازی هستیم تا معلمان توانمند ما، بیشتر بنویسند. حالا چه جوری نمی‌دانم شاید مثلاً کمی سخت‌گیرانه‌تر مقاله

بپذیریم. بارها و بارها شاهد این موضوع بودیم که مطلبی فرستاده شده که از نسخه‌ی اولیه تا نسخه‌ای که چاپ شده، شاید نزدیک به ۱۸۰ درجه چرخیده است. این کار بدین صورت انجام شده که داور محترم مقاله، به دقت کار ویرایش علمی و تصحیح و توصیه را انجام داده است. سپس در تماس مکرر با نویسنده، گاهی مثل یک کلاس درس، چند بار مطلب ویرایش و بازنویسی شده، باز برگشته، باز رفته و دوباره برگشته است و در این رفت و برگشت‌ها، نوشته ارتقاء پیدا کرده است. امیدواریم که به تدریج، این فرهنگ ایجاد شود که نویسندگان محترم، تلاش کنند که مطالب ارسالی خود را به گونه‌ای ارتقا دهند که از داوری‌های جدی عبور کند و میزان رفت و برگشت و اصلاح و ویرایش، کاهش یابد. مهم این است که تلاشی که تا به حال شده، تأثیر خوبی بر جامعه‌ی آموزشی گذاشته و توانسته در جمع وسیعی از معلمان ریاضی، جسارت دست به قلم بردن و نوشتن مقاله‌های علمی را ایجاد کند. حتی می‌توان مجموعه‌ای در مورد چگونگی نوشتن و نگارش مقالات تهیه کرد و از طریق آن، آموزش منسجم‌تری برای چگونگی تحقیق و تألیف مقاله ایجاد شود.

وقتی که رشد شروع شد، در ذهن بسیاری این بود که این مجله، در ادامه‌ی یکان باشد. کم کم با گسترش رشته‌ی آموزش ریاضی، مجله بیشتر به سمت آموزش ریاضی که جایگاه طبیعی‌اش بود کشیده شد و برهان به نوعی، جانشین یکان شد.

زنگنه: من این نکته را بگویم که می‌توان سرمقاله‌های مجله را به صورت یک کتاب جداگانه منتشر کرد.

چاپ این سرمقاله‌ها می‌توانند خیلی مفید باشند زیرا شما می‌توانید سیر زمان را در آن‌ها ببینید و تغییر و تحولات اجتماعی ـ آموزشی را دنبال کنید.

جلیلی: ما الان شیوه‌ی برنامه‌ریزی کتاب‌هایمان طوری است که اگر سؤال کنید، ۵ درصد دبیران هم به حرف‌هایی که می‌زنیم توجه ندارند به علت این که در چارچوب خاصی باید حرکت کنند و امتحان‌های مکرر برگزار کنند. وقتی پای صحبت معلمان می‌نشینیم می‌گویند که ما تمام فشارمان روی برنامه و کتاب است که تمام شود. اگر بخواهیم این نکاتی که در رشد آموزش ریاضی مطرح می‌شود در کلاس مطرح کنیم، شاید در طول سال $\frac{1}{2}$ کتاب را هم نتوانیم تدریس کنیم.

معلم چیزی می‌خواهد که کاربرد داشته باشد و در کلاس به دردش بخورد.

بابلیان: عرض کنم من در یک جمله جواب آقای جلیلی را بدهم. اگر معلم واقعاً بداند که دردش چیست، دوایش در این مجله هست، منتها چه دردهایی؟ اگر درد معلم این باشد که دنبال پاسخ سؤال‌هایی از این قبیل باشد که «چه کار کنم که دانش‌آموز انگیزه‌اش بیشتر شود» یا «چگونه درس بدهم که بازده کارم بالاتر برود و دانش‌آموزان بتوانند بهتر به سؤال‌ها پاسخ بدهند و نتیجه‌های بهتر بگیرند» و اگر دغدغه‌اش از این نوع باشد، جوابشان در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی هست. ولی این که فلان حد را چگونه حساب بکنید، الان تا بخواهید، کتاب‌های موضوعی هست که این نوع مسائل را حل کرده‌اند و معلمان می‌توانند پاسخ سؤال‌ها موضوعی خود را آن‌جا پیدا کنند.

رجبعلی‌پور: من حرفی را که چند سال پیش زدم عوض می‌کنم! ببینید اگر واقعاً برهان و مجلات موضوعی ریاضی مشابه مانند فرنود و غیره هم هستند، آن وقت اشکال ندارد که حتی صدبار هم که لازم است تکرار بکنند که مثلاً پوشایی تابع یعنی چه؟ اینجکتیو یعنی چه؟ سوبجکتیو یعنی چه؟ زیرا معلم‌ها پیوسته در تدریس خود، به آن‌ها احتیاج دارند. در چنین حالتی، می‌توانیم کمک کنیم که این مجله به سمت یک مجله علمی ـ پژوهشی برود و اگر در این مسیر، تعدادی از مخاطبان قبلی خود را از دست بدهیم، بگذاریم بدهیم. این مشکل نیست زیرا در عوض، مخاطبان جدید پیدا می‌کنیم. من نگران دوستان یکانی بودم که برای جای خالی آن، چیزی نداشته باشند، اما حالا اگر مأوایی دارند که به آن تکیه کنند و خواسته‌های موضوعی آن‌ها برآورده شوند، خوب بگذارید ما مجله‌ی خودمان را به سمت مباحث علمی-پژوهشی آموزش ریاضی ببریم.

گویا: اگر اجازه بدهید، از حضور فعال همه‌ی اعضای محترم هیأت تحریریه که کمک کردند و میزگردی که خیلی به آن فکر کرده بودیم و برایش هیچ ساختاری نداشتیم را به پیش ببرند، تشکر کنم. به نظر من، این میزگرد خود به خود ساختار پیدا کرد و جلو رفت و پیشنهادهای جالبی شد که به جمع بندی آن می‌پردازم: پیشنهاداتی که مطرح شد و اغلب مورد توافق جمع قرار گرفت، به قرار زیرند:

۱. انتشار مجموعه یا مجموعه‌هایی از مقالات پرارجاع مجله؛ ۲. انتشار مجموعه‌ای از سرمقاله‌ها؛ ۳. تلاش در جهت ارتقای توانایی‌های مخاطبان و معلمان ریاضی در ایران؛ ۴. بازتاب نقاط قوت و ضعف آموزش ریاضی در ایران؛ ۵. تشویق و ترغیب به انتشار مجله‌ها مناسب برای مخاطب‌های

گوناگون؛ ۶. تلاش برای ارتقای رتبه‌ی علمی ـ پژوهشی مجله.

یعنی فکر می‌کنم به جای این‌که همیشه، انتظار همه چیز را از یک مجله داشته باشیم، می‌توانیم مشوق و ترغیب‌کننده‌ی کسانی باشیم که بالقوه می‌توانند مجلات مختلف برای نیازهای گوناگون موضوعی و حرفه‌ای معلمان ریاضی منتشر کنند. مثلاً، ما می‌توانیم ماهنامه‌ی دانش‌آموزی دربیاوریم، ماهنامه‌ی تجربه‌های معلمان دربیاوریم، می‌توانیم مجله‌ای مربوط به روش‌های تدریس ریاضی دربیاوریم و می‌توانیم...! یعنی افراد توانمند را تشویق کنیم و منابع در اختیارشان بگذاریم تا مجله‌های متنوع دربیاورند.

من فکر کردم که کار دیگری که می‌توانیم انجام دهیم این است که اگر بتوانیم، صد نامی که با ما مکاتبه کرده‌اند و از دورترین نقاط ایران برای مجله مقاله فرستاده‌اند را از شماره‌های مختلف مجله استخراج کنیم. تلاش داریم که این کار را بکنیم و به نظرم کار قشنگی است. اما اگر بتوانیم! زیرا وقت زیادی می‌طلبد. نکته‌ی دیگری که می‌خواستم عرض کنم این است که تعمیم و تخصیص، از اولین شرط‌های یک کار علمی است یعنی اگر در یک مجله، بخواهم راجع به عالم و آدم صحبت کنیم و تمام مسائل آموزشی را حل کنیم، امکان‌پذیر نیست. این مجله قرار بوده که در خدمت آموزش ریاضی باشد، پس باید رسالتش، ترویج و توسعه‌ی آموزش ریاضی در ایران باشد. طبیعی است وقتی که دوره‌های تحصیلات تکمیلی در این رشته راه افتاده‌اند، از این طریق هم می‌شود به توسعه‌ی آموزش ریاضی کمک کرد و همان‌طور که دکتر رجبعلی‌پور فرمودند و بقیه همکاران نیز بر آن تأکید کردند، آموزش معلمان ریاضی از جمله هدف‌های اصلی مجله است. اتفاق مهمی که افتاده این است که معلمانی که معمولاً دست به قلم نبودند و نمی‌نوشتند. الان سالانه بین ۵۰۰ تا ۶۰۰ مقاله برای کنفرانس‌های آموزش ریاضی ارسال می‌کنند و این شهامت و جسارت را پیدا کرده‌اند که خودشان را در عرصه‌ی نقد و داوری قرار بدهند. من فکر می‌کنم این خود، گام بلندی در جهت آموزش معلمان ریاضی بوده است. ما برای معلمان عزیز ریاضی جایگاه والایی قائلیم و امیدواریم که از تجربیاتشان استفاده کنیم.

باز هم از همکاری اعضای محترم هیئت تحریریه در برگزاری این میزگرد و از پیشنهادهای ارزنده‌ای که دادند تشکر می‌کنم و امیدوارم که این توصیه‌ها، راهنمای عمل ما از شماره‌ی ۱۰۰ به بعد باشد.

یک نکته‌ی مهم این است که سطح انتظاری که رشد آموزش ریاضی داریم، بیش از یک مجله است! واقعاً وقتی به یک مجله نگاه می‌کنیم، آن را مجموعه‌ای از مقالات و موضوع‌های مختلف علمی می‌بینیم. ولی الان، ما داریم هدایت دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی را به عهده‌ی این مجله می‌گذاریم

چه می‌دانیم و چگونه می‌دانیم؟*

میشل آرتیگ، دانشگاه پاریس دیدرو- پاریس -۷
جرمی کیل پاتریک، دانشگاه جورجیا

ترجمه‌ی **فاطمه اصل مرز (با همکاری علی رجالی)**
خانه‌ی ریاضیات اصفهان

درباره‌ی نویسندگان این مقاله: خانم پرفسور میشل آرتیگ[1]، استاد بخش ریاضی «دانشگاه پاریس – ۷»[2] و سرپرست مشترک برنامه‌ی فوق‌لیسانس آموزشی در آن دانشگاه و رئیس کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی[3] است. بعد از دریافت درجه‌ی دکترا در منطق، او به تحقیقات در زمینه‌ی آموزش ریاضی در سطوح ابتدایی تا دانشگاه پرداخت. یاددهی و یادگیری ریاضیات با استفاده از فناوری‌های الکترونیکی، موضوع اصلی تحقیق ایشان در ۱۰ ساله‌ی اخیر است.

آقای پروفسور **جرمی کیل پاتریک**[4] نیزاستاد آموزش ریاضی دانشگاه جورجیا[5] در آمریکاست که قبلاً در کالج معلمان دانشگاه کلمبیا[6] و قبل از آن در دبیرستانی در برکلی کالیفرنیا تدریس کرده است. جرمی لیسانس و فوق‌لیسانس خود را از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی[7]، و دکترای خود را از دانشگاه استانفورد[8] اخذ کرده و یک دکترای افتخاری نیز از دانشگاه گوتنبرگ[9] سوئد دریافت نموده است.

او درس‌های زیادی را در دانشگاه‌های اروپا و آمریکای لاتین تدریس کرده و به دریافت جوایز فولبرایت[10] برای کارهایش در نیوزیلند، اسپانیا، کلمبیا و سوئد نایل شده است. به علاوه عضو کمیسیون آموزش علوم و ریاضی آمریکا و دو دوره هم معاون کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی بوده است. دیگر فعالیت‌های او عبارت است از سردبیر سری مطالعات مسکو در زمینه‌ی روان‌شناسی یادگیری ـ یاددهی ریاضی، سردبیری مجله‌ی تحقیقات در آموزش ریاضی و سردبیر و عضو هیئت تحریریه‌ی مطالعات متعددی در زمینه‌های آموزش ریاضی. وی در یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی (۲۰۰۷) نیز به دریافت مدال فلیکس کلاین[11] کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی نایل آمد.

متن زیر که با دریافت اجازه‌ی خاص برای ترجمه و انتشار در مجله‌ی فرنود آماده شده است، در اصل سخن‌رانی عمومی نخستین روز کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی یازدهم، است که توسط این دو استاد ایراد شد. این متن توسط خانم **اصل مرز** با همکاری این‌جانب ترجمه و توسط خانم دکتر **غلام‌آزاد** ویرایش شد.

علی رجالی

سمت راست: جرمی کیل پاتریک؛
سمت چپ: میشل آرتیگ

کمیته‌ی بین‌المللی برنامه‌ریزی یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME-11) پیشنهاد کرده بود که ما فعالیت‌های علمی این کنگره را با گفت‌وگو درباره‌ی مباحث مهم آموزش ریاضی، مانند مباحث زیر آغاز کنیم:

- در زمینه‌ی آموزش ریاضی، اکنون چه می‌دانیم که ۱۰ سال پیش نمی‌دانستیم و چگونه به آن دست یافته‌ایم؟
- چه نوع شواهد و مستنداتی قابل دست‌رسی است و در آموزش ریاضی بایستی در جست‌وجوی چه بود؟
- انتظارات اجتماعی از رشته‌ی ریاضی که زمینه‌ی کاری ماست چیست و ما خود را با این انتظارات چگونه تطبیق می‌دهیم؟
- دیدگاه‌های یاددهی ـ یادگیری ریاضیات و شواهد مربوط به آن تا چه حد می‌تواند از چندگونگی[12] فرهنگی و محتوای آموزشی فراتر رود؟
- امروزه آموزش ریاضی با چه چالش‌های اساسی روبه‌روست؟

ما، در این سخن‌رانی مشترک، با ارائه‌ی نظرات خود نسبت به تحولات رشته‌ی ریاضی بررسی عوامل و نیروهای مؤثر در این زمینه و نتایج حاصل در طول ۱۰ الی ۱۵ سال اخیر، سعی کرده‌ایم چنین گفت‌وگویی را آغاز کنیم و نظرات خود را در رابطه با چالش‌های اساسی که امروزه با آن روبه‌رو هستیم و

چگونگی رویارویی و برخورد با آن‌ها مورد بحث قرار دهیم. مقاله‌ی حاضر برای گزارش در این کنگره نوشته شده است و بحث را از دو جنبه‌ی محتوایی و شکل ظاهری آن منعکس می‌کند.

توضیحات مقدماتی: ما چه می‌دانیم و چگونه به آن دست یافته‌ایم؟

سخنان میشل آرتیگ

همان‌گونه که هرکسی می‌تواند تصور کند، پاسخ دادن به این سؤال بسیار دشوار است. مشکلاتی که هنگام تلاش برای پاسخ‌گویی به این سؤال با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم، خود سرچشمه‌ی نگرشی نو برای درک رشته‌ی آموزش ریاضی و پویایی آن است و این‌که دانش در این زمینه چگونه پیشرفت می‌کند.

این سؤال می‌تواند بر اساس مفهومی که برای آموزش ریاضی منظور می‌شود و بر اساس موقعیت و تجربه‌ی شخصی فرد در این زمینه، از جنبه‌ها و موقعیت‌های متفاوتی مورد بررسی قرار گیرد. من شخصاً یک عضو هیئت علمی وابسته به بخش ریاضی هستم و به تدریس ریاضیات مشغولم. اولین زمینه‌ی پژوهشی من منطق بود، اما در حال حاضر زمینه‌ی پژوهش در تعلیم و تربیت ریاضیات را دنبال می‌کنم. تجربه‌ی پژوهشی من به طرز چشم‌گیری تحت تأثیر فرهنگ تعلیم و تربیت کشوری که در آن زندگی می‌کنم، یعنی فرانسه شکل گرفته است. شکی نیست که دیدگاه من در آموزش ریاضیات در دهه‌ی اخیر، به دلیل شرکت در جلسات تحت نظارت کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی (ICMI)، به طرزی قابل توجه تحت تأثیر قرار گرفته است. هنگام آماده‌سازی این سخن‌رانی، اولین سؤال مطرح شده را برای دوستان و همکاران خود در کشورهای گوناگون مطرح کردم که مایلم در این‌جا از آن‌ها به خاطر پاسخ‌های الهام بخششان تشکر کنم. همان‌گونه که انتظار می‌رفت، پاسخ‌هایی که دریافت کردم، بسیار گوناگون بودند. با این حال، این گوناگونی‌ها، روندهای مشترکی را دنبال می‌کردند. پاسخ‌های دیگران، در درک بهتر آن‌چه که سعی در بیان کردن آن داشتم به من کمک کرد و حالا، حتی اگر سؤال به تفصیل بیان شده باشد و از کلمه‌ی «ما» به مفهوم گروهی استفاده کنم، پاسخ من الزاماً پاسخی فردی خواهد بود.

سخنان جرمی کیل پاتریک

پاسخ‌های من نیز، بسیار مشروط و محدود به موقعیت و تجربه است. من به مدت ۵۰ سال، آموزشگر ریاضی بوده‌ام و در حال حاضر، در یک دانش‌سرای تربیت‌معلم در بخش آموزش ریاضیات و علوم مشغول تدریس هستم. من از میان دانشجویان کارشناسی، که دوره‌های آمادگی دبیری را طی می‌کنند و دانشجویان دوره‌ی دکترای آموزش ریاضی، بیشتر به دانشجویان دوره‌ی دکترا آموزش می‌دهم؛ ضمن این‌که از گذشته تا امروز، در هر نوع فعالیت تحقیقاتی، از حل مسئله گرفته تا کارهای اخیر در ارزش‌یابی، تدوین برنامه‌ی درسی و تاریخ آموزش ریاضی نیز شرکت داشته‌ام.

علاقه‌ی من به تاریخ رشته‌مان به نوعی مرا مظنون ساخته بود. اغلب می‌شنیدم که آموزشگران ریاضی می‌گویند: «اکنون می‌دانیم که ...»، و بعد آن‌چه را اکنون می‌دانیم، می‌گویند. برخی از ما که کمی بیشتر از دو یا سه سال در صحنه بوده‌ایم، می‌گوییم: «خب در واقع قبلاً کسانی بوده‌اند که این را می‌دانستند». بنابراین، داشتن دیدگاهی تاریخی در زمینه‌ی کاری خودمان مفید خواهد بود. پاسخ من نیز همانند میشل، فردی خواهد بود و احتمالاً وابسته به ویژگی‌های شخصی‌ام. من قطعاً خود را نماینده‌ی ایالات متحده که مکانی با فرهنگ‌های گوناگون است، نمی‌دانم.

ما در آموزش ریاضیات چه می‌دانیم که ۱۰ سال قبل نمی‌دانستیم و چگونه به آن دست یافته‌ایم؟

میشل:

در پاسخ به این سؤال که ما در زمینه‌ی آموزش ریاضی چه می‌دانیم که ۱۰ و یا حتی ۱۵ سال پیش نمی‌دانستیم، قطعاً برخی پاسخ خواهند داد: «هیچ». همان‌گونه که شما تصور می‌کنید، این نظر من نیست. با نگاهی به ۱۵ سال گذشته (من زمان را اندکی طولانی‌تر گرفته‌ام)، من شخصاً زمینه‌ای از دانش را می‌بینم که در آن پیشرفت آشکاری صورت گرفته است. این پیشرفت دارای ابعاد گوناگونی بوده است: نه تنها با مباحث ریاضی که به‌طور گسترده‌ای مورد نظر پژوهش‌های علمی‌اند، مانند اعداد، جبر و یا هندسه مرتبط بوده است، بلکه در مباحثی نیز که بیش از پیش اهمیت خود را در ریاضیات و آموزش نشان داده‌اند، مانند احتمالات و آمار، پیوند خود را نشان داده است. این‌که کمیته‌ی اجرایی ICMI چند سال پیش اعلام کرد، زمان آن رسیده است که این کمیسیون در آموزش آمار مطالعه‌ای را آغاز کند، به هیچ وجه تصادفی نبوده است. همایش مربوط به این مطالعه اخیراً در مونتری برگزار شد.

حتی زمانی که تمرکز روی مباحث ریاضی است ـ مانند آن‌چه که اشاره کردم ـ پیشرفت زمینه‌ی مورد نظر، کاملاً به تکامل جهانی آن، به ساخت‌ها و دیدگاه‌هایی که تدریجاً معرفی و اصلاح شده‌اند و به تلاش‌های انجام شده در دهه‌ی اخیر وابسته‌اند که به منظور درک این که چرا پژوهش‌های آموزشی ظاهراً این‌قدر غیر مؤثر بوده، و این‌که چرا در عمل تأثیر چندانی نداشته، صورت پذیرفته‌اند. از نقطه‌نظر جهانی مایل هستم سه عامل اصلی این پیشرفت را در این‌جا یادآور شوم:

اولین آن‌ها همبستگی روش‌های فرهنگی ـ اجتماعی و ماهیت طبیعت انسانی در آموزش ریاضیات است. من فکر می‌کنم این موضوع به ما کمک کرده است تا درک و دیدگاه بهتری از بعد اُسلوب‌پذیر واقعیت آموزشی که آن را مطالعه می‌کنیم، داشته باشیم. این موضوع به ما کمک کرده است تا محدودیت‌هایی را که آموزش در سطوح متفاوت قطعیت[13] (این اصطلاح اولین بار توسط ایوز شوالارد[14] سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۷ معرفی شده است) شکل می‌دهد، درک کنیم؛ از آن‌هایی که در سطح مباحث ریاضی هستند گرفته تا آن‌هایی که در اوج تمدن قرار گرفته‌اند. درست در زمانی که محدودیت‌های دیدگاه «ساخت‌وسازگرایی»[15] آشکار می‌شد، نگرشی نو در طبیعت روندهای آموزشی به ما ارائه داد. این مسئله تصاویر جدیدی برای رسیدن به این‌که چگونه معلمان می‌توانند در فرایند یادگیری هدایت و راهنمایی کنند ارائه داد؛ آن هم در زمانی که عده‌ای قصد داشتند فراموش کنند معلمان نمی‌توانند برای ایجاد ارتباط دانش‌آموزانشان با دانش ریاضی، فقط نقش تشکیلاتی داشته باشند. آن‌ها باید آموزش دهند. همان‌طور که همکاران ژاپنی ما می‌گویند، آن‌ها باید «راه را نشان دهند».

نکته‌ی دوم رشد پژوهش پیرامون باورها، بازنمایی‌ها[16]، شیوه‌ها، دانش،

تجربه‌ی آماده‌سازی و پیشرفت حرفه‌ای معلمان بوده است. برای مثال، انتشار مجله‌ی آموزشی معلمان ریاضی[۱۷] و اخیراً یک کتاب مرجع ویژه[۱۸] مؤید آن است. می‌توانم بگویم در ۱۵ سال اخیر، معلم به عنوان یک بازیگر مشکل‌ساز در روابط تعلیم و تربیتی، همانند دانش‌آموزان دو دهه قبل مطرح بوده است. این موضوع به جست‌وجو در مورد نیازهای ریاضی لازم برای حرفه‌ی معلمی و تفاوت‌های آن با نیازهای ریاضی‌دانان حرفه‌ای منجر شد. و هم‌چنین به شناسایی طبیعت کار حرفه‌ای معلمان و دلایلی که بیانگر علت انتخاب روش‌های تعلیم و تربیتی خاص خودشان برای درک معقول بودن شیوه‌های تجارب معلمی آنان شد. من فکر می‌کنم در نتیجه‌ی این پژوهش، ما امروز درک بهتری از تأثیرات محدود طرح‌های تحقیقاتی بر شیوه‌های مؤثر آموزشی داریم. ما شاهد محدودیت‌های آشکار بسیاری از برنامه‌های آماده‌سازی معلمان هستیم و نیز دارای درک بهتری از این که چگونه می‌توان این برنامه‌ها را بهبود بخشید. خواننده می‌تواند در کتاب منتشر شده توسط «مطالعه‌ی پانزدهم کنگره» (Even & Ball, 2008)، اطلاعات بیشتری در زمینه‌ی آخرین پیشرفت‌های انجام شده در این موضوع را بیابد.

نکته‌ی سوم، توجه روزافزونی است که به ابعاد نمادگذاری و استدلالی روش‌های ریاضی داده می‌شود (Saenz-Ludlow & Presmeg, 2006). این کاملاً با اولین نکته‌ی مطرح شده در بالا مرتبط است. این توجه روزافزون، ارتباط منطقی موجود بین بازنمایی نمادین و ادراک دانش ریاضی را آشکار می‌سازد. هم‌چنین، ما را نسبت به اهمیت نقش واسطه‌ای نمادگذاری در پیشرفت دانش ریاضی حساس کرده و نیز ما را به سمت توسعه‌ی دستگاه نمادگذاری خارج از دستگاه‌های شناخته شده‌ی پیشین، راهبری نموده است که در آن‌ها، مثلاً حرکت نشانه‌ای[۱۹] (ژست) نیز مورد توجه لازم قرار گیرد. پژوهش در فناوری از کارهای اولیه‌ی **جیم کاپوت (۱۹۹۲)** تا جدیدترین پیشرفت‌ها اثر آمیخته شده در مطالعه‌ی هفدهم ICMI (Hoyles & Lagrange)، در حال انتشار، در این تکامل نقش به‌سزایی داشته است و بالعکس از این تکامل بهره‌مند بوده است. البته بسیاری از ریشه‌های این تکامل جهانی در ۱۵ سال پیش آشکار بودند و بدون شک غیرممکن است نظریه‌ای که امروز مهم تلقی می‌شود، معین کنیم و ادعا کنیم در آن زمان در جایی وجود نداشته است. اما این ریشه‌ها پیشرفت کرده و منتشر شده‌اند و دارای نقش مرکزی‌تر و رضایت‌بخش‌تری شده‌اند. بررسی علمی آن‌ها با تعداد فزاینده‌ای از مطالعات تجربی تغذیه شده است. این احساس در من به وجود می‌آید که امروزه بسیاری از ما به آموزش ریاضی به عنوان یک زمینه‌ی پژوهشی و یک زمینه‌ی اسلوبی نمی‌توانیم چنان بنگریم که ۱۵ سال پیش از این، آن را مشاهده می‌کردیم.

جرمی: همان‌طور که خواهید دید، من با تحلیل میشل بسیار موافقم. اگر پایه‌گذاران این گفت‌وگو انتظار نظرات اساساً متفاوتی را دارند، متأسفانه آن‌ها مأیوس خواهند شد. همان‌طور که میشل بیان کرد، پاسخ هر کسی به این سؤال که ما در حال حاضر چه می‌دانیم، بستگی به مفهوم آموزش ریاضی دارد و این یک رشته‌ی **پژوهشی** و در عین حال یک رشته‌ی **عملی** است. هم پژوهش و هم عمل و شیوه‌ی کار می‌توانند یا به تعلیم ریاضیات یا به تعلیم آموزش ریاضیات مربوط شوند. این رشته در مورد آماده‌سازی کسانی که معلمان را برای آموزش مهیا می‌کنند، دارای یک صفت بازگشتی است.

این سؤال که ما اکنون چه می‌دانیم که قبلاً نمی‌دانستیم، در کنگره‌های بین‌المللی آموزش ریاضی یک سؤال جالب توجه و دائمی است. من این سؤال را بارها شنیده بودم. این سؤال اغلب توسط کسانی مطرح می‌شود که همایش‌های بین‌المللی ریاضیات را دنبال می‌کنند و می‌خواهند بدانند یافته‌های جدید در آن‌جا چگونه اعلام شده است. و یا می‌توان گفت آن‌ها در مورد دارو و روش‌هایی از معالجات جدید و مؤثر که هر از گاهی توسط پژوهشگران بهداشتی اعلام می‌شود، فکر می‌کنند.

آموزش ریاضی همواره با خود ریاضی و هم‌چنین شاید حتی اغلب اوقات با علم طب مقایسه می‌شود. در این رشته‌ها، پیشرفت دانش بدیهی به نظر می‌رسد؛ البته اگر از خیلی نزدیک به آن نگاه نکنید. اما این پیشرفت بسیار متفاوت از حالتی است که در آموزش ریاضی اتفاق می‌افتد، چرا که در این رشته همان سؤالات همیشگی مرتباً تکرار می‌شوند و به نظر می‌رسد هرگز پاسخ رضایت‌بخش یا نهایی دریافت نمی‌کنند. به نظر من چنین می‌رسد که سؤالات در زمینه‌ی آموزش ریاضی در منتهای مراتب به‌طور موقت پاسخ داده می‌شوند و با هر نسل نو بایستی دوباره مطرح شوند. همان‌طور که در جایی دیگر نیز گفته‌ام، این مسائل همانند هیولایی است که مرتب شبانگاهان از خواب برمی‌خیزد و ما هیچ‌وقت موفق نمی‌شویم قلب آن را کاملاً، آن‌طور که در سایر رشته‌ها می‌توان، مورد هدف قرار دهیم.

در پاسخ به این سؤال که ما در زمینه‌ی آموزش ریاضی چه می‌دانیم که ۱۰ و یا حتی ۱۵ سال پیش نمی‌دانستیم، قطعاً برخی پاسخ خواهند داد: «هیچ»

آموزش ریاضی همانند سایر رشته‌های علمی نیست. بهتر است بگوییم که نوعی از علوم اجتماعی است. **فلیکس کلاین**، در سخن‌رانی افتتاحیه‌ی خود در «ارلانگن» در سال ۱۸۷۲، به یک تفاوت مهم بین ریاضیات و سایر زمینه‌های علمی اشاره کرده است که می‌باید ما را از تلاش در جهت این مقایسه باز دارد. او اظهار داشت: «هر نسل ریاضیات، براساس دستاوردهای نسل‌های ماقبل خود بنیان‌گذاری می‌شود، در حالی که در رشته‌های دیگر غالباً، پیش از آن که ساختارهای نو پایه‌ریزی شوند، ساختمان‌های ماقبل آن متلاشی می‌شوند» (ترجمه‌ی انگلیسی از راو، ۱۹۸۵، ص ۱۳۶). قطعاً چنین به نظر می‌رسد که در آموزش ریاضی نیز، ما ساختارهای قبلی را در صورتی که برای اهداف، ارزش‌ها و فعالیت‌هایمان مفید نباشند، از بین می‌بریم. ما همیشه کاملاً از حذف کامل شروع نمی‌کنیم، بلکه به‌طور هم‌زمان، هم تخریب و هم ساختمان‌سازی انجام می‌دهیم.

در هر صورت، من می‌خواهم با افزودن چند نکته و مثال از خودم، عوامل پیشرفتی را که میشل معرفی کرده است تصدیق کنم. در مورد مسئله‌ی رویکردهای مردم‌شناسی و رویکردهای فرهنگی ـ اجتماعی در رشته‌ی خودمان، من به هیچ وجه نمی‌توانم برای همکاری‌های میشل و دیگران که ساختار **پیدایش ابزاری** را توسعه داده‌اند، شرح بیشتری داشته باشم. روشی که توسط آن، کاربران به

مصنوعاتی که استفاده می‌کنند شکل می‌دهند و مصنوعات به کاربران شکل می‌دهند و ابزار این‌گونه حاصل می‌شود. بلکه من می‌خواهم اذعان کنم که این ساختار به عنوان نمونه‌ای از پیشرفت که براساس درک ما از تعامل بین اشخاص یادگیرنده و ابزارهایشان ساخته شده است، بسیار مفید بوده است. من خواندن گزارشات جدید در آثار ابتکاری که با این اندیشه‌ها صورت می‌گیرند را دنبال می‌کنم و انتظار دارم تأثیر و نفوذ آن‌ها ادامه یابد.

من می‌خواهم این نظر میشل را که در رشته‌ی ما توجه بسیار و احتمالاً بیشترین توجه پژوهشگران، طی ۱۰ تا ۱۵ سال گذشته از اشخاص یادگیرنده به اشخاص یاددهنده تغییر جهت داده است، تأیید کنم. در حال حاضر پژوهش‌های قابل ملاحظه‌ای در زمینه‌ی دانش، طرز نگرش و طرز عمل معلمان انجام می‌شود. من فرصت پرداختن به دو مورد آخر را ندارم، ولی می‌خواهم خاطرنشان کنم که امروزه تعداد بسیار اندکی از آموزشگران ریاضی در جست‌وجوی ساختار «**دانش پداگوژی محتوا**»[۲۰] که چند سال پیش توسط **لی شولمان** (۱۹۸۶ و ۱۹۸۷) معرفی شد، هستند و سعی در فهم آن دارند. برخی سعی دارند چگونگی به کار بردن آن را در آموزش ریاضی به تصویر بکشند. برخی دیگر در جست‌وجوی ساختار آن‌چه که دانش ریاضی برای آموزش[۲۱] (MKT) نامیده می‌شود هستند و سعی در فهمیدن آن دارند. این‌که چگونه به دانش‌های دیگر مربوط می‌شود؟ با دانش پداگوژی محتوا چه ارتباطی دارد؟ با تمامی انواع دانش‌های دیگری که آموزش ریاضی نیازمند آن‌هاست، چه ارتباطی دارد؟ به‌خصوص، من مایل هستم آثار **دبورا بال** و **هایمن باس** (بال و باس، ۲۰۰۰ و ۲۰۰۳) را یادآوری کنم که سعی داشتند به ما در درک این‌که MKT معمولاً به عنوان یک نوع خاص از ریاضیات کاربردی انگاشته می‌شود، کمک کنند و من فکر می‌کنم بهتر است در مورد آن این‌گونه فکر کرد.

رشته‌ی ما در دهه‌ی اخیر به شیوه‌های آموزشی توجه زیادی مبذول داشته است. در این روند، مطالعه‌ی ویدیویی کلاس‌های آموزش، که امکان مطالعه‌ی دقیق و جزء به جزء کلاس‌های متداولی که در آن‌ها ریاضیات تدریس و آموخته می‌شود را فراهم می‌کند، بسیار سودمند بوده است. ما در سطح ملی و بین‌المللی مطالعات ویدیویی گوناگونی داشته‌ایم ـ نه تنها مطالعات ویدیویی TIMSS[۲۲] بلکه مطالعه‌ی LPS[۲۳] و دیگر مطالعاتی که آموزش در کشورهای مختلف را مقایسه کرده‌اند. این مطالعات منجر به نظریاتی شده است مبنی بر این‌که هر کشوری روش آموزشی خاص خود را دارد؛ نظراتی که من فکر می‌کنم در چند سال اخیر به شدت مورد بحث قرار گرفته است. هر دو سوی این سؤال قابل بحث است. این‌که آموزش ویژگی‌های مشترکی ورای مرزهای جغرافیایی دارد و یا محدود به آن است، به نظر من شبیه این سؤال است که بپرسیم: آیا مثلاً یک برنامه‌ی درسی معیار[۲۴] برای ریاضیات مدرسه‌ای در سطح بین‌المللی، مانند آنچه TIMSS و PISA فرض کرده‌اند، یا حتی در سطح ملی وجود دارد؟

مطالعه‌ی شیوه‌های آموزشی در کشورهای متفاوت کار بسیار مشکلی است، چرا که ما واژگان لازم برای گفت‌وگو در مورد آموزش را آن‌گونه که برای برنامه‌ی درسی داریم، در اختیار نداریم. هنگامی که ما در مورد برنامه‌ی درسی صحبت می‌کنیم، واژه‌های شناخته شده و پذیرفته شده‌ی ریاضی وجود دارند که از آن‌ها استفاده می‌کنیم. وقتی در مورد آموزش صحبت می‌کنیم، به اجبار وارد دسته‌ای از اصطلاحات خاص می‌شویم که ممکن است در کشورهای دیگر همان مفهوم را نداشته باشد. به عنوان یک مثال، عبارت «آموزش متمرکز بر یادگیرنده» را در نظر بگیرید، که به روش‌های گوناگونی تعبیر شده است و می‌تواند معانی بسیار متفاوتی داشته باشد. نهایتاً، مایل هستم سخن خود را متوجه کاربران فناوری، مزایای آن و برخی مشکلاتی که برای معلمان می‌آفرینند، نمایم. مزایای آن به کار گرفته می‌شوند و ما در مورد آن‌ها بیشتر می‌دانیم. ولی از میشل می‌خواهم این موضوع را مورد بحث قرار دهد.

در رشته‌ی ما در بسیاری از موضوعات به قدر کافی مدارک معتبر وجود ندارد. ما در واقع در زمینه‌ی تعداد اندکی از موضوعات، مجموعه‌ای از تحقیقات انجام شده داریم که می‌توان گفت اجازه‌ی ادعاهای محکمی به ما می‌دهد

میشل: بسیار خوب، تاکنون سخن من نسبتاً کلی بوده است. اکنون مایل هستم با بررسی دو مثال شخصی آن را ملموس‌تر کنم و توسط این مثال‌ها می‌خواهم بیان کنم که همبستگی‌های حاصل از رویکردهای فرهنگی ـ اجتماعی و مردم‌شناسی، دیدگاه شخصی مرا تحت تأثیر قرار داده است. اولین مثال را «غلبه بر دوئیت‌های کاذب[۲۵]» نام‌گذاری کرده‌ام. شکی نیست که دوگانگی‌ها هنگام سخن گفتن از آموزش ریاضی بیشتر ظاهر می‌شوند. در حالت کلی، آن‌ها ساده و خطرناک هستند.

یکی از آن‌ها، دوگانگی در مقابل مفاهیم و روش‌هاست. تصور می‌شود عمل آموزش روی اولین یا دومین آن‌ها متمرکز باشد. در حین پژوهش‌های خود، با کمک همکاران فرانسوی **ژان باپتیست لاگرانژ**، **لوک تروش**، و بسیاری دیگر، در زمینه‌ی فناوری دیجیتال، به خصوص سیستم‌های جبری رایانه(CAS; e.g., Artigue, 2002)، من نسبت به آن واقعاً حساس شدم. در اوایل دهه‌ی ۱۹۹۰، پژوهش در آن زمینه، با وانمودکردن این که استفاده از CAS، توسط آزادکردن دانش‌آموزان از بار فنی، به آن‌ها اجازه می‌دهد روی مفاهیم و درک آن‌ها تفکر کنند، بر دوگانگی تأکید داشت. ولی مشاهدات کلاسی که من در آن زمان انجام می‌دادم به هیچ وجه بر این مطلب گواهی نمی‌داد. این ما را به فکر فرو داشت و سعی کردیم آن را در چارچوب رویکرد ابزاری که خود ایجاد کرده بودیم، درک کنیم.

برای درک بهتر این دوگانگی، بر آن شدیم به تکنیک‌ها دو ارزش، یکی شناخت‌گرایانه و دیگری عمل‌گرایانه منسوب کنیم. یک ارزش عمل‌گرایانه، چرا که آن‌ها عملی هستند و از آن‌ها نتایج حاصل می‌شود و یک ارزش معرفت‌شناسانه[۲۶] چرا که به درک ما از موضوعات مربوط به آنان کمک می‌کنند. یک نکته‌ی مهم در این دیدگاه این است که اگر تکنیک‌های ریاضی آموزش داده می‌شوند، فقط به علت قدرت عمل‌گرایانه‌ی آن‌ها نیست، به دلیل قدرت معرفت‌شناسانه‌ی آن‌ها نیز هست. برای یک لحظه به تکنیک یک تقسیم طولانی، که امروزه بین آموزشگران ریاضی و ریاضی‌دانان یک موضوع مورد بحث برنامه‌ی درسی در آموزش ریاضی است فکر کنید.

این حرکت برای من یک نتیجه‌ی روشن‌گرایانه داشت. برای من دیگر مانند قبل

سؤال در مورد استفاده‌ی آموزشی از فناوری دیجیتال مطرح نبود. مقاومت در برابر فناوری دیجیتال ـ به‌خصوص، بازگشت باور نکردنی مذاکرات در مورد استفاده از ماشین حساب در مقاطع ابتدایی ـ می‌توانست به عنوان یک توازن شکسته شده بین ارزش‌های عمل‌گرایانه و معرفت‌شناسانه در تکنیک‌های معمول تعبیر شود. استفاده‌ی معمول از فناوری دیجیتال نقش قدرت عمل‌گرایانه‌ی فناوری را نمایش می‌دهد؛ انجام کار بیشتر با سرعت بیشتر زیر سایه‌ی قدرت معرفت‌شناسانه‌ی آن. ولی آن‌چه که استفاده از یک تکنیک را در مدرسه مجاز می‌کند، نمی‌تواند تنها قدرت عمل‌گرایانه‌ی آن باشد که یک تفاوت اساسی بین مدرسه و دنیای بیرون است. مجاز کردن فناوری و مفید کردن آن از جنبه‌ی ریاضی، مستلزم وجوه به هم پیوسته‌ی عناصر آن است که یک توازن منطقی بین قدرت عمل‌گرایانه و معرفت‌شناسانه‌ی تکنیک‌های ابزاری شده را فراهم می‌آورد. این توازن، که تحقیقات با شواهد آن را اثبات کرده است، نیازمند وظایف و شرایطی است که نمی‌توان آن را به استفاده‌ی ساده از قلم و کاغذ تقلیل داد. و این وظایف، که تحقیقات آن را نیز اثبات کرده است، هنگامی که مانند بسیاری از معلمان، شما با فرهنگ قلم و کاغذ وارد دنیای فناوری شوید، چندان ساده برنامه‌ریزی نمی‌شوند (لابورد، ۲۰۰۱).

این فقط یک مثال خاص است که خیلی خلاصه بیان شده است. اما با یکی از لحظات نادر در زندگی من، هنگامی که احساس می‌کردم به عنوان یک پژوهشگر یک چیز مهم آموخته‌ام، مربوط است. چیزی که مرا وادار می‌کرد به مقاومت‌های آموزشی، به معلمان به گونه‌ای متفاوت بنگرم و این هم‌چنین مرا وادار کرد که منابعی را که ما به عنوان پژوهشگر، برای آموزگاران و مؤسسات فراهم می‌کنیم، زیر سؤال ببرم. به علاوه، من احساس می‌کردم می‌توانم این دانش را به زبان نسبتاً ساده‌تری بیان کرده و آن را برای جامعه‌ی خارج از جامعه‌ی محققین قابل درک کنم.

مثال دوم مربوط می‌شود به تغییرات سازمانی (شغلی). من نسبت به این واقعیت، زمانی که پایان‌نامه‌ی دکتری خانم **بریژیت ژروگن** (۱۹۹۵) را نظارت می‌کردم، حساس شدم. او مایل بود علت ناتوانی عمومی دانش‌آموزان در درس جبر هنگام ورود به دبیرستان پس از اتمام موفقیت‌آمیز یک برنامه‌ی شغلی را پیدا کند. او می‌خواست تعابیر متداول از این ناتوانی را که براساس این ایده شکل می‌گرفت ـ که این ناتوانی‌ها برای این دسته از دانش‌آموزان نسبتاً عادی است چرا که همه می‌دانند دانش‌آموزان شاغل از استعداد کمتری در ریاضیات بهره‌مند هستند ـ زیر سؤال ببرد. او نشان داد که دانش‌آموزان شاغل و دانش‌آموزان دبیرستان، اگرچه موضوع واحدی را دنبال کرده و از زبان یکسانی استفاده می‌کنند، اما در واقع، دو نوع متفاوت از فرهنگ جبری را انتقال می‌دهند. این تفاوت، دانش‌آموزان را در فهمیدن این‌که در سازمان جدید از آن‌ها چه انتظاراتی می‌رود، و معلمان را در تشخیص دانش جبری دانش‌آموزانشان و بنا کردن بر آن، دچار مشکل می‌کرد. به محض این که ناپیوستگی‌های نامرئی بین دو سازمان ـ دو فرهنگ ـ شناخته شد، تدابیر آموزشی جدید دست‌یافتنی شدند و موفقیت‌آمیز بودن خود را در موقعیت‌های آموزشی و هنگام به کار بردن، اثبات نمودند.

حتی زمانی که تمرکز روی مباحث ریاضی است ـ مانند آن‌چه که اشاره کردم ـ پیشرفت زمینه‌ی مورد نظر، کاملاً به تکامل جهانی آن، به ساخت‌ها و دیدگاه‌هایی که تدریجاً معرفی و اصلاح شده‌اند و به تلاش‌های انجام شده در دهه‌ی اخیر وابسته‌اند که به منظور درک این که چرا پژوهش‌های آموزشی ظاهراً این‌قدر غیر مؤثر بوده، و این که چرا در عمل تأثیر چندانی نداشته، صورت پذیرفته‌اند

سپس من همین روش را با همکاری **فردریک راسلون** (۲۰۰۰)، در تحقیق در مورد درس آنالیز در گذر از دوره‌ی دبیرستان به دانشگاه، به کار بردم. برای مدتی طولانی، مشکلات دانش‌آموزان در این گذر به تحقیق در مورد ویژگی‌های تفکر ریاضی در سطح پیشرفته، شناسایی موانع معرفت‌شناسانه و مشکلات شناختی در این گذر منجر شده بود (برای نظرات ترکیبی تال را ببینید، ۱۹۹۱ و ۱۹۹۶). پیشرفت دیدگاه‌های مردم‌شناسی و سازمانی (شغلی) این نظریه را مردود نکرد، بلکه ما را وادار نمود که آن را در دامنه‌ی گسترده‌تری قرار دهیم؛ یعنی گذر بین دو سازمان. بنابراین، نقطه‌ی توجه از دانش‌آموز به سازمان انتقال پیدا کرد، بر مبنای این اصل که آگاهی دانش‌آموزان آن چیزی خواهد بود که سازمان‌هایی که تابع آن‌ها هستند به آن‌ها اجازه‌ی یادگرفتن آن را می‌دهند و برای درک مشکلات دانش‌آموز در هر دو سازمان، پیوستگی‌ها و ناپیوستگی‌های آن‌ها و نحوه‌ی برخورد با آن‌ها، در معرض چه نوع تکنیک‌های ریاضی قرار خواهد گرفت. به علاوه، این انتقال بسیار پربار بود و دیدگاه‌های جدیدی را برای بررسی ناپیوستگی‌های این گذر شغلی نه تنها برای ما بلکه برای پژوهشگران دیگر که از آن زمان در همین راستا فعالیت می‌کردند، عرضه داشت. من فکر می‌کنم به عنوان مثال، می‌توان از پایان‌نامه‌ی **آنالیزه برژه** (۲۰۰۸) از آرژانتین و هم‌چنین کارهای همکاران اسپانیایی‌مان (بوش، فونسکا و گاسکن، ۲۰۰۵) نام برد.

چه شواهد و مدارکی قابل دست‌رسی است و در آموزش ریاضی بایستی به دنبال چه بود؟

جرمی: من سخن خود را با بیان این‌که در رشته‌ی ما در بسیاری از موضوعات به قدر کافی مدارک معتبر وجود ندارد، آغاز می‌کنم. ما در واقع در زمینه‌ی تعداد اندکی از موضوعات، مجموعه‌ای از تحقیقات انجام شده داریم که می‌توان گفت اجازه‌ی ادعاهای محکمی به ما می‌دهد. هر مدرکی باید از معیارهای زیر تبعیت کند: (۱) باید به سؤالاتی که مطرح می‌کنیم، مربوط باشد؛ (۲) باید صحیح، یعنی معتبر باشد؛ (۳) باید تا اندازه‌ای عمومی باشد، یعنی قابل تعمیم به یک زمینه‌ی وسیع‌تر.

اگر مطالعات چندگانه‌ای در موضوع داده شده‌ای داریم، باید به نوعی «هم‌گرا» باشند. آن‌ها باید در نهایت به سمت موقعیت‌ها، شرایط، پژوهشگران، گروه‌ها و روش‌ها هم‌گرا شوند و حتی مهم‌تر از هر چیز، من فکر می‌کنم آن‌ها باید در یک محدوده‌ی شبکه مانند که مفهومی هم نظری و هم عام داشته باشند، قرار گیرند. این‌ها معیارهایی بودند که ما در تحقیق در یادگیری ریاضیات که کتاب «جمع آموخته‌ها[۲۷]» حاصل آن است (کیل پاتریک، سوافورت، و فیندل، ۲۰۰۱: ۲۴-۲۱)، مورد استفاده قرار دادیم.

اگر معیارها را محدودتر کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ کوشش‌هایی در دست انجام است که پژوهش پیرامون آموزش ریاضی با معیارهای بسیار محدودی را جهت مطالعه قرار دهد. مثلاً، وقتی که شما اصطلاحاً استاندارد طلایی را در آزمایش‌های کنترل شده‌ی تصادفی به کار می‌برید، وارد مسائل می‌شوید. شما در می‌یابید که ما تقریباً هیچ تحقیقی نداریم که با این استاندارد مطابقت کند و

در نتیجه شما تقریباً هیچ مدرکی برای کار کردن ندارید. سؤالات پژوهشی بسیاری وجود دارد که در مورد آن‌ها، یا آزمایش‌های کنترل شده‌ی تصادفی غیرممکن خواهد بود و یا یک مطالعه‌ی مناسب لازم است که در این کنترل‌ها، مداخلات را، هرچه که هستند، غیرواقعی کند. آزمایش‌های کنترل شده‌ی تصادفی، یا چیزی که آن‌ها را تقریب می‌زنند، صراحتاً بگوییم در صورت استفاده از استنتاج‌های اتفاقی مورد نیاز هستند[۲۸]. در هر صورت، ما در زمینه‌ی خودمان موضوعات بسیاری داریم که به چنین شواهدی نیاز ندارد. هنگامی که معیارهای محدودی به‌کار برده می‌شوند، چیزی که اتفاق می‌اُفتد ـ در مواردی که من دیده‌ام ـ این است که نظرات آزمایش نشده و تجارب فردی بسیاری باقی مانده است. از داوری جامعه‌ی متخصصین و تجارب آن‌ها به اندازه‌ی کافی استفاده نشده است.

ما به مدارکی بیش از آن‌چه داریم نیازمندیم. به نظر من، باید ثابت شود، تنها مداخله کارایی ندارد. ما در بیان این‌که چه زمانی و به چه دلیل این مداخله به ثمر می‌رسد و این‌که منظور از کارایی چیست، به کمک نیازمندیم. ما هم‌چنین به شواهد توصیفی و تحلیلی در مورد روش‌های آموزشی ریاضی حتی اگر این روش‌ها «مداخله» نباشند، اما به‌طور طبیعی در یک محیط ظاهر شوند، نیازمندیم. تشبیه نمودن با علم پزشکی برای ما الزاماً مناسب نیست، اما حتی علم طب آزمایش‌های کنترل شده‌ی تصادفی را که با تعداد زیادی عملکردهای کاوش گرایانه قبل از آن آزمایش نشده باشد، بر عهده نمی‌گیرد؛ از جمله مطالعه‌ی حالت‌ها، مطالعات انجام شده توسط همکاران، و آزمایشات بالینی.

میشل: من در مجموع با شما موافق هستم و برای حضار متأسفم. شما در ابتدا به علاقه‌ی خود در زمینه‌ی تاریخ آموزش ریاضی اشاره نمودید. من فکر می‌کنم، در رابطه با این نکته، جالب است اگر یک نگاه بازتابی به تاریخ این موضوع بیندازیم. از دهه‌ی ۱۹۶۰، آموزش ریاضی سعی داشته است خود را به عنوان یک موضوع علمی پایه‌گذاری کند و این البته به همان سند مورد جست‌وجو شکل داده است. در بسیاری از کشورها کوشیدند به این موضوع در مراحل اولیه‌ی خود، توسط استفاده از روش‌های الهام گرفته از علوم تجربی، مثلاً روان‌شناسی تجربی در آن زمان، وضعیت علمی بدهند. تشکیل گروه‌های کنترل و تجربی و گرفتن پیش‌آزمون‌ها و پس آزمون‌ها متداول بود. ما نمی‌توانیم محدودیت‌های این روش‌ها را که در مورد پدیده‌های آموزشی مشاهده می‌شدند، فراموش کنیم. از سویی، متغیرهای مربوطه چندان ساده شناسایی و کنترل نمی‌شدند و از سوی دیگر، حتی اگر این روش‌ها قادر بودند تفاوت‌ها را نشان دهند، آن‌ها دست‌رسی به سازوکار زیربنایی را فراهم نمی‌آوردند. این پدیده‌ها به توسعه‌ی روش‌هایی که امروزه حکمفرماست، هنگامی که مدرک اساساً توسط «مثلث‌سازی»[۲۹] منابع چندگانه‌ای از اطلاعات و تجزیه و تحلیل جست‌وجو می‌شود، منجر شد.

این روش‌ها کارایی خود را برای شناسایی پدیده‌های تعلیم و تربیتی و درک آن‌ها، برای آشکار کردن منطق نهفته در رفتارهای دانش‌آموزان و معلمان و قابل فهم کردن پویایی کلاس درس و مسیرهای یادگیری، به اثبات رساندند. مثلاً در کشور فرانسه، تحقیقات کلاسی همیشه یک نقش اساسی را در این زمینه ایفا کرده است. قطعاً این به علت دیدگاه موقعیتی و نظام‌دار موجود در نظریه‌ی موقعیت‌های تعلیم و تربیتی ابداع شده توسط **گای بروسو** (۱۹۹۷) است که در این زمینه بسیار مؤثر بوده و هست. این نظریه از اوایل دهه‌ی ۱۹۸۰ به توسعه‌ی یک روش خاص برای تحقیق کلاسی موسوم به مهندسی تعلیم و تربیتی منجر شد که شدیداً الگوی گروهی کنترل بر مبنای تجربه را رد می‌کرد و به دنبال مدرک کمیتی و کیفیتی توسط مقایسه‌ی بین آن‌چه ما در موقعیت‌های تعلیم و تربیتی، «آنالیز بر مبنای قیاس یا استقرا» می‌نامیم، بوده است (آرتیگ، ۱۹۹۲). شکی نیست که مهم‌ترین پیشرفت‌ها در نظریه‌ی موقعیت‌های تعلیم و تربیتی از مورد استفاده قرار دادن این روش حاصل شده است. در دهه‌ی ۱۹۹۰، توسعه‌ی پژوهش در زمینه‌ی عملکرد معلمان، به توسعه‌ی روش‌های کمتر تهاجمی نیاز داشت و به استفاده‌ی روز افزون مشاهدات طبیعی هدایت می‌کرد. البته این‌ها منابع دیگری از شواهد را مورد استفاده قرار می‌دهند، ولی همواره از همان فلسفه‌ی کلی تبعیت می‌کنند.

این پژوهش‌ها در اُسلوب شناسی، به دلیل توضیحات روشنگر و گاهی نیروی پیش‌گویی کننده‌ی دانشی که تولید می‌کنند، پربار بوده و هستند. آن‌ها ابزاری اساسی برای پژوهش‌های بنیادی در آموزش ریاضی محسوب می‌شوند، ولی در ارتباط با نوع شواهدی که فراهم می‌کنند، محدودیت‌هایی نیز دارند. یک مسئله‌ی اساسی در رشته‌ای که به فرهنگ و دیرینه وابستگی زیادی دارد، مسئله‌ی عمومیت است. اغلب اوقات، مستندات در آموزش ریاضی از مطالعات موشکافانه و دقیقاً موضعی نتیجه می‌شود. آن‌چه که این مطالعات به‌طور صریح فراهم می‌آورند، نوعی از قضایای وجودی هستند. می‌توان حدس زد که پدیده‌ی شناسایی شده و نتایج به‌دست آمده، از ارزش عام‌تری برخوردار هستند، اما این ارزش عام‌تر به هیچ‌وجه توسط خود تحقیق تضمین نمی‌شود. همان‌طور که **شونفیلد** (۲۰۰۷) خاطرنشان کرده است، «به‌طور نمونه نویسندگان به عمومیت یک پدیده به‌صورت ضمنی یا صریح، با بیان خاص بودن شرایط مورد بحث در مطالعه اشاره می‌کنند. اما اشاره کردن به عمومیت یک‌چیز، و فراهم نمودن مدرک محکم برای آن، چیز دیگری است» (ص۹۳). این واقعیت باعث شد که او بین عمومیت‌های ادعا شده، ضمنی، بالقوه و تضمین شده، به عنوان مسیرهایی برای تفکر در حیطه‌ی عمومیت یک مطالعه، تمایز قائل شود. من با او در این نظریه کاملاً موافق هستم.

آیا ما می‌توانیم از پژوهش‌های آموزشی انتظار بیشتری داشته باشیم؟ من امیدوارم چنین باشد، چرا که شکی نیست که حتی اگر پژوهش در نتیجه روش‌هایی که تاکنون ارائه کرده است و نوع مستنداتی که فراهم می‌آورد، به پیشرفت ادامه دهد، این برای تأمین انتظارات اجتماعی و نیز برای توسعه‌ی پیوندهای سودبخش بین پژوهش و عملکرد، برای بالا بردن میزان پیامدهای مثبت در شرایط واقعی در سطح محلی، کافی نیست و این مرا به سؤال بعدی رهنمون می‌کند.

انتظارات اجتماعی از رشته و زمینه‌ی کاری ما چیست و ما با آن‌ها چگونه برخورد می‌کنیم؟

میشل: شکی نیست که امروزه در بسیاری از کشوها آموزش ریاضی از اهمیتی حساس برخوردار است. آموزش ریاضی به کیفیت مناسب، به‌عنوان یک شرط برای پیشرفت علمی و اقتصادی و همچنین برای پیوستن و عضویت در جوامع مدرن و دمکراتیک محسوب می‌شود. جدای از انتقال میراث فرهنگی که از بزرگ‌ترین دستاوردهای جامعه‌ی انسانی است. آن‌چه که جامعه از آموزش ریاضی انتظار دارد، از یک طرف اطمینان از فراهم آوردن یک سطح منطقی از سواد ریاضی برای کلیه‌ی دانش‌آموزان است به‌طوری که آن‌ها را قادر سازد در زمان مقتضی به دانش ریاضی و در صورت نیاز، به تفکر در دنیای واقعی مجهز شوند و از طرف دیگر نیروی کار مورد نیاز و از لحاظ ریاضی واجد شرایط را برای

پاسخ هر کسی به این سؤال که ما در حال حاضر چه می‌دانیم، بستگی به مفهوم آموزش ریاضی دارد و این یک رشته‌ی پژوهشی و در عین حال یک رشته‌ی عملی است. هم پژوهش و هم عمل و شیوه‌ی کار می‌توانند یا به تعلیم ریاضیات یا به تعلیم آموزش ریاضیات مربوط شوند. این رشته در مورد آماده‌سازی کسانی که معلمان را برای آموزش مهیا می‌کنند، دارای یک صفت بازگشتی است

جوامع ما فراهم آورد. در دنیای پیچیده و در حال تغییری که ما در آن زندگی می‌کنیم، آن‌چه که از آموزش ریاضی انتظار می‌رود تغییر می‌کند، اما به هیچ‌وجه کاهش پیدا نمی‌کند. به‌طور کلی تأیید شده است که اغلب نظام‌های آموزشی در تحقق بخشیدن این انتظارات، همانند ۵۰ سال گذشته، هنگامی که دوره‌ی جدید اصلاحات ریاضی شروع شد، ناکام مانده‌اند.

حتی اگر به همان دلیل، پژوهش در آموزش ریاضی توسعه یافته باشد، با سعی در ساختن دانش مورد نیاز برای بهبود بخشیدن شرایط، ما باید تصدیق کنیم که پیشرفت‌های آن هرچه باشد، در جهان تغییری به‌وجود نیاورده است. پژوهش در آموزش ریاضی، نقش محدودی در حمایت از تصمیمات اتخاذ شده در رابطه با محتوای برنامه‌ی درسی و سازمان‌دهی دیدگاه‌های تدریس، روش‌های ارزش‌یابی و آماده‌سازی معلمان ایفا کرده است و اغلب آن را کم فایده و دارای پشتوانه‌ی علمی محدود تلقی می‌کنند. امروزه از پژوهش در زمینه‌ی آموزش انتظار می‌رود که نوع شواهد و مستنداتی که در پزشکی و داروشناسی با آزمایش‌های تصادفی میزان تأثیرات عینی و تجربیات وسیع متداول است، فراهم آورد. به‌خصوص در ایالات متحده وضع چنین است، ولی تنها خاص آن کشور نیست.

تصویر عینیت[۳۰] و اعتبار که توسط مقایسات بین‌المللی مانند PISA (سازمان توسعه و همکاری اقتصادی، ۲۰۰۳) داده می‌شود و صفحه‌ی اول رسانه‌ها را به خود اختصاص داده است، میل دارد تأثیر عظیمی روی جوامع ما اعمال کند. قطعاً ما به عنوان یک انجمن، و با همکاری ICMI، باید یک وضعیت انتقادی در مورد عقاید و ارزش‌هایی که جامعه مایل است به ما تحمیل کند، توسعه بدهیم. ما بهتر از دیگران قادر هستیم دعاوی عینیت را زیر سؤال ببریم. در مقابل نیز، به نقطه‌نظراتی که در آموزش ریاضی فاقد معنی است واکنش نشان دهیم و ابزارهای اندازه‌گیری مورد استفاده را در تعیین این‌که چه چیز دانش محسوب می‌شود و چه چیز نه، مورد سؤال قرار دهیم. هم‌چنین ما باید تأکید کنیم که دانش ریاضی با چندگونگی صوری که داراست، نمی‌تواند به سادگی در یک ساختار تک‌بعدی تصرف شود. اما با تمام این‌ها، ما نمی‌توانیم خواسته‌های اجتماعی و سؤالات آن‌ها را در مورد این‌که چگونه اقدامات پژوهشی را انجام داده‌ایم و این‌که چگونه نتایج آن را خارج از جامعه‌ی محققین این موضوع، پخش و توزیع نموده‌ایم، نادیده بگیریم. من دو چالش اساسی را که نسبتاً به یکدیگر وابسته هستند، برای آینده‌ی نزدیک پیش‌بینی می‌کنم:

- جدی گرفتن مسائل مقیاس‌گذاری یا سنجش و در نظر گرفتن آن‌ها به عنوان سؤالات پژوهشی واقعی که راه‌حل آن‌ها نیازمند دانش به‌خصوصی است، توسعه‌ی ساختارها و اُسلوب‌شناسی‌های ویژه، مشارکت متخصصین موجود در این رشته و معرفی همکاران جدید و انواع جدید طرح‌های تعلیم و تربیتی، قوی‌تر از محصولات تصنعی که معمولاً توسط محققین ساخته می‌شود.
- یافتن روش‌هایی برای قابل درک نمودن نتایج تحقیقات انجام شده در آموزش ریاضی و مفید نمودن آن‌ها برای به کار بردن. به عنوان مثال، ICMI سعی دارد توسط مجموعه مطالعات ICMI برای تحقق بخشیدن به این تلاش همکاری کند. این مطالعات که به‌صورت کتاب در دست‌رس است، به زودی پس از گذشت سه سال از انتشار آن‌ها، از طریق اینترنت برای همگان قابل دست‌رس خواهد بود. اما هنوز کارهای بیشتری پیش‌روی داریم.

جرمی: در مورد سؤال انتظارات اجتماعی در هر جامعه، مردم انتظار دارند که فرزندانشان ریاضیات را در سطح بالایی، در وهله‌ی اول برای استفاده‌ی شخصی خودشان یعنی این‌که هر کودکی لازم است برای عملکرد در جامعه‌ی ریاضی بداند ـ فرا گیرند. اما یک نیاز اجتماعی نیز ایجاب می‌کند که مردم از دانش ریاضی برخوردار باشند. این مجموعه از انتظارات دوگانه، برای ما مسائل زیادی مطرح می‌کند. یکی از مهم‌ترین مسائلی که در تلاش برای تغییر ریاضیات در جامعه با آن روبه‌رو می‌شویم، این است که عامه‌ی مردم مایل‌اند ریاضیات را آن‌گونه که خود در مدرسه آموخته‌اند، تعریف کنند و این اغلب مانعی برای تغییر است. و تجربه به ما می‌گوید، تغییر این‌که ریاضیات چگونه آموخته شود، احتمالاً مشکل‌تر از تغییر موضوعاتی است که تدریس می‌شوند؛ هر چند که هر دو این‌ها اقداماتی دشوار هستند.

جامعه هم‌چنین انتظار دارد که تحقیق در آموزش ریاضی بتواند پاسخ‌هایی قطعی در مورد یادگیری و یاددهی ریاضیات فراهم آورد. تلاش برای آمیختن تحقیقات روی یک موضوع مفروض، تقریباً همواره مأیوس کننده بوده است. سیاست‌گذاران مایل‌اند بتوانند ادعاهایی در مورد علت مؤثر بودن اقدامات آموزشی متفاوت، ابراز کنند، اما دلایل ضعیفی وجود دارد که باور کنیم یک اقدام یگانه می‌تواند به‌طور یکسان در همه‌ی مباحث، همه‌ی معلمان و همه‌ی دانش‌آموزان مؤثر باشد. پژوهشگران و سیاست‌گذاران باید از مقایسه‌ی میانگین میزان عملکرد گروه‌هایی که اقدامات تعلیمی ابتکاری و جایگزین دریافت می‌کنند، دوری کنند. آن‌ها باید به واریانس و نه به میانگین، توجه کنند. این‌که در چه موضوعاتی تفاوت وجود دارد؟ برای کدام معلمان؟ برای کدام گروه از دانش‌آموزان؟

راه‌های متفاوت بسیاری برای دست‌یابی به مسئله‌ی آهسته به جریان انداختن تحقیق هنگام اعمال پیشنهادات مورد نظر وجود دارد. همان‌طور که قبلاً در بحث شواهد اشاره کردم، انجمنی که کتاب «جمع آموخته‌ها» را منتشر کرد و (کیل پاتریک، و همکاران، ۲۰۰۱)، نظر سخاوتمندانه و معقولی به آن‌چه که تحقیقات می‌تواند به ما بگوید، انداخته و توانسته است طیف وسیعی از شواهد را بررسی کند. فرهنگستان تعلیم و تربیت ایالات متحده در سال جاری، اصطلاحاً ابتکار برگه‌های سفید را به‌کار گرفته است تا برای سیاست‌گذاران در دولت آینده و مجلس بهترین مدارک و شواهد قابل دست‌رس در مورد مسائل مربوط به خط‌مشی‌های آموزشی انتخاب شده را فراهم آورد. گروهی که روی سیاست آموزش ریاضی و علوم کار می‌کند، مانند کمیته‌ی مطالعه‌ی یادگیری ریاضیات، شبکه‌ی نسبتاً گسترده‌ای برای جمع‌آوری اطلاعات که سیاست‌گذاران را آگاه سازد، دایر کرده است.

در مقابل، یکی از مسائل مطرح شده توسط هیئت ملی مشاوره‌ی ریاضیات (۲۰۰۸) در گزارش اخیر خود، استفاده از معیار بسیار دقیق، برای بررسی کیفیت مدارک بررسی شده بود. این رویکرد خارج از نظریه بر مبنای تجربه‌ی شخصی، هیئت را با دستاورد اندکی در مورد این‌که فرهنگ در موضوعات مختلف چه

می‌گوید، رها کرد. پاسخ‌های قطعی برای اغلب پرسش‌هایی که جامعه انتظار جواب آن را دارد ممکن نیست، اما در هر صورت محققین بر آن‌اند که راه‌های بهتری برای بررسی این پرسش‌ها بیابند. هرگز مدرک کافی وجود ندارد و من با میشل در مورد مقیاس گذاری و سنجش تحقیقاتمان و پیدا کردن راه‌هایی برای انتشار آن به صورتی روشن و مفید، موافقم.

دیدگاه‌های آموزش و یادگیری ریاضیات و شواهد مربوط به آن تا چه حدی می‌تواند از چندگونگی فرهنگی و مفادهای آموزشی فراتر رود؟

جرمی: چندگونگی، آن‌چه را که ما می‌توانیم به عنوان اعضای آن‌چه که ما یک جامعه‌ی یکسان می‌پنداریم، به یکدیگر بگوییم مشروط می‌کند. هنگامی که ما می‌گوییم «جبر» و یا «برنامه‌ی درسی» و یا همان‌طور که قبلاً گفته‌ام «یادگیرنده محور»، بین فرهنگ‌ها و حتی داخل فرهنگ‌ها، منظورمان چیست؟ به علاوه تلاش برای موضعی کردن ریاضیات همواره موفقیت‌آمیز نبوده است.

مثلاً کار با ارزش **اوبی دامبروسیو** در ریاضیات قومی، در برنامه‌ی درسی ریاضیات بسیاری از کشورها به طرز گسترده‌ای نفوذ کرده است، ولی در جاهای دیگر اثر چندانی نداشته است. مردم می‌خواهند به آن‌چه که فکر می‌کنند، عمومیت دهند و در عین حال ما باید به نوعی برای ریاضیات مدرسه راه‌هایی پیدا کنیم که به طور جدی به شرایط قومی توجه کند.

برمی‌گردیم به مسئله‌ی مطالعات تطبیقی بین‌المللی مانند TIMSS و PISA. باید توجه کرد که این گونه مطالعات به نوعی به برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه که در آن‌جا متعارف است، وابسته است و می‌تواند به عنوان الگویی برای سنجش و ارزیابی برنامه‌ی درسی کشورهای مختلف، مورد استفاده قرار گیرد. این برنامه درسی متعارف یا ایده‌آل برنامه‌ای نیست که بتوان آن را در کشور خاصی یافت. بلکه، یک ساختار فرضی است که برای ممکن نمودن استفاده از مجموعه‌ای مشترک از پرسش‌های ارزیابی در سراسر مرزهای ملی، طراحی شده است (کایتل و کیل پاتریک، ۱۹۹۹). در نتیجه، بنیان‌گذاران مطالعات تطبیقی بین‌المللی، مسئله‌ی چندگونگی فرهنگ‌ها و متون آموزشی را با کنار زدن سؤالات توصیفی و تنها شرایط موضعی بررسی کردن این پرسش که آیا دانش‌آموزان «فرصت برای یادگیری» محتویات احتمالاً ارزیابی شده توسط پرسش‌های ارزیابی را داشته‌اند، تقلیل می‌دهند.

ما هنوز با این مشکل که مدت‌ها پیش توسط **هانس فرودنتال** (۱۹۷۵) معرفی شده است، یعنی ساختن ابزارهای ارزش‌یابی که از لحاظ بین‌المللی هم‌ارز باشد و در عین حال شرایط محلی را نیز در نظر گرفته باشند، روبه‌رو هستیم. آموزشگران ریاضی مدت‌هاست که اعتراف کرده‌اند، آن‌چه به عنوان برنامه‌ی درسی ارائه می‌شود، شباهت اندکی به برنامه‌ی درسی رسمی مصوب وزارت آموزش و پرورش دارد و قطعاً در کلاس درس می‌تواند مانع سهمگینی برای تغییر باشد. هم‌چنین جالب است بدانیم که نظام‌های متمرکز غالباً آن‌چنان که ما فکر می‌کنیم، متمرکز نیستند و نظام‌های غیرمتمرکز آن‌طور که عموماً تصور می‌شود، غیرمتمرکز نیستند (هاوسون، کایتل، و کیل پاتریک، ۲۰۰۸/ ۱۹۸۱). مدت‌ها قبل، پیش از آن‌که انگلیسی‌ها یک برنامه‌ی درسی ملی داشته باشند، یک بازرس آموزشی فرانسوی یک بار عقیده‌ی زیر را ابراز کرد که من فکر می‌کنم فقط در مورد فرانسه و انگلستان صدق نمی‌کند:

در فرانسه، فرض بر این است که تمام معلمان در زمان یکسان کار یکسانی انجام دهند، اما هیچ‌کس چنین نیست و در انگلستان، که فرض بر این است که هر کسی به روش خود عمل کند، هیچ‌کس این‌طور نیست.

میشل: من با شما موافق هستم. مدت‌ها پیش چنین بود و امروزه هیچ بازرس فرانسوی جرئت گفتن این را ندارد.

من مایل هستم به چندگونگی از زاویه دیگری نگاه کنم. همان‌طور که در مراسم افتتاحیه گفتم، به گوناگونی می‌توان از دید منفی، به عنوان مانعی در راه نوع شواهد کلی که رشته‌ی آموزش ریاضی، اگر یک زمینه‌ی علمی واقعی بود می‌بایست تهیه کند، نگاه کرد. به نظر من، این یک دیدگاه کاملاً نادرست است. من می‌خواهم روی جنبه‌ی مثبت گوناگونی در آموزش ریاضی تأکید کنم. در ۱۵ سال گذشته، زمینه‌ی کاری ما از چندگونگی، واقعیت‌های بسیار زیادی را فرا گرفته است.

یک مثال جالب به طور غیر مستقیم از مقایسات بین‌المللی که چند لحظه پیش مورد انتقاد قرار دادم، نتیجه می‌شود. TIMSS توجه خود را به سمت برخی مناطق ناحیه‌ای مانند آسیا، که در آن‌جا چندین کشور نتایج درخشان‌تری نسبت به بیشتر کشورهای غربی در آزمون‌های پیشرفت TIMSS به دست آورده بودند معطوف کرده است. با بررسی‌های تکمیلی، محققین تلاش کرده‌اند دلایل ممکن برای تفاوت‌های مشاهده شده را شناسایی کنند. در این بررسی‌ها ICMI با یک جلد کتاب زیبا (لونگ، گراف و لوپز ـ رییل، ۲۰۰۶)، همراه با مطالعه‌ی سیزدهم ICMI، همکاری کرده است. این کتاب در سال ۲۰۰۶ منتشر شد و آموزش ریاضی را در سنت‌های فرهنگی متفاوت، مقایسه کرده است. به طور دقیق‌تر بگوییم، این کتاب آموزش ریاضی در کشورهای آسیای شرقی وابسته به سنت کنفوسیوس را با آموزش ریاضی در برخی از کشورهای غربی مقایسه کرده است. آن‌چه که ما از این بررسی‌ها آموختیم واقعاً جالب است، چرا که نشان می‌دهد تفاوت اساساً نه از شکل برنامه‌ی درسی نتیجه می‌شود و نه از تعداد ساعاتی که در مدرسه وقف ریاضیات می‌شود و نه از علاقه‌ی دانش‌آموزان به ریاضیات. بلکه تفاوت عمیقاً از آن‌چه که تحصیل کرده‌ی ریاضی در یک فرهنگ کنفوسیوسی معنی می‌دهد، ارتباطی که با دانش و مدرسه ایجاد می‌کند و راه‌هایی که ارتباط دانش‌آموزـ معلم و موقعیت‌های آموزشی آنان را شکل می‌دهد، ناشی می‌شود. دانشی که این بررسی‌ها عرضه می‌کنند، هر نوع تلاشی را برای بهبود بخشیدن به وضعیت آموزش ریاضی در هر کشوری، با صرفاً پرداختن به سطح و ویژگی‌های اداری، هرچند هم مهم باشند، فاقد صلاحیت می‌داند و مسیر را به سوی بازتابی پربارتر، با تلاش در درک نقاط قوت و محدودیت‌های انتخاب آموزشی نسبی خود، با قرار دادن آن‌ها در یک ساختار کلی‌تر با مؤلفه‌های فرهنگی قومی و استفاده از این درک برای تفکر در مورد جایگزینی و تغییر، هموار می‌کند. هم‌چنین وظیفه‌ی ماست که سیاست گذاران را از این امر آگاه کنیم. چرا که آن‌ها غالباً به خودی خود آگاه نیستند و در انتظار یک معجزه و یا ارزان‌ترین راه‌حل برای مسئله هستند.

آن‌چه که در این پدیدار جالب توجه نیز هست، این واقعیت است که چشم بیگانگان، شناسایی طرح‌های اصیل با ظرفیت تعلیم و تربیتی مهم را که به عنوان واقعیت‌های طبیعی در این فرهنگ‌ها موجود بوده، مجاز کرده است. به عنوان مثال، نظام بررسی دروس را (که در ژاپن برای پیشرفت تخصصی و حرفه‌ای استفاده می‌شد، توسط این مطالعات تطبیقی آشکار شد و از آن زمان خود یک موضوع تحقیق شده است) می‌توان نام برد.

می‌توانم مثال‌های بسیار دیگری در مورد آن‌چه که از چندگونگی یاد گرفته‌ام نام ببرم. تنها مثال دیگری که بیشتر شخصی است را به‌طور خلاصه ذکر می‌کنم. با مطالعات مقایسه‌ای پیرامون یادگیری و یاددهی جبر که توسط بررسی‌های ICMI روی این موضوع (ستیسی، چیک، و کندال، ۲۰۰۴) انجام شده بود، من نسبت به گوناگونی راهبردهای آموزشی که در سطح جهانی برای آشنا کردن دانش‌آموزان با دنیای جبر به‌کار می‌رود، آگاه شدم. در نتیجه‌ی این بررسی، من الزامات نسبی این راهبردهای متفاوت را در مورد مشکلات حاصل از گذر بین دروس حساب و جبر، بهتر درک می‌کردم. شکی نیست که پایان‌نامه‌ی خانم **بریژیت گروژن** (۱۹۹۵) که در بالا به آن اشاره کردم، مرا نسبت به این الزامات حساس کرده بود. اما بدون این بررسی‌های مقایسه‌ای، من فاقد نوع شواهدی که توسط تجزیه و تحلیل استفاده از راهبردهای آموزشی متفاوت در مقیاس وسیع تهیه می‌شود، بودم.

امروز آموزش ریاضی با چه چالش‌های اساسی روبه‌روست؟

میشل: در فرصت باقی‌مانده، دادن یک پاسخ منطقی به این سؤال مشکل است، اما ما سه چالش اساسی را انتخاب کرده‌ایم:

● چالش فناوری

من به مدت بیش از ۲۰ سال در فعالیت‌های پژوهشی و آموزشی در ارتباط با فناوری سروکار داشته‌ام، لذا نسبت به آن خیلی حساس هستم. واضح است که نظام‌های آموزشی هنوز با دستورهایی که هنگام استفاده از محصولات فناوری با آن‌ها برخورد می‌کنند، در ستیزند. این مشکلات نه تنها به تازه‌ترین فناوری‌ها مربوط می‌شود، بلکه حتی آن‌هایی که بیش از دو دهه قبل توسعه یافته‌اند، مانند ماشین حساب‌های گرافیکی و نرم‌افزار هندسه‌ی دینامیک را نیز در برمی‌گیرد. اما امروزه تکامل فناوری ما را وارد دوره‌ی جدیدی کرده است که در آن فناوری نه تنها اشیای ریاضی، بازنمایی آن‌ها و روش‌هایی که توسط آن‌ها می‌توانیم این بازنمایی‌ها را اداره و به یکدیگر مرتبط کنیم را تحت تأثیر قرار داده است، بلکه تعاملات تعلیم و تربیتی، و کلی‌تر بگوییم، راه‌های دست‌رسی به اطلاعات را نیز تحت تأثیر قرار داده است. امروزه فناوری دیجیتال می‌تواند از کارهای مشترک ـ چه از راه دور و چه نزدیک ـ بین دانش‌آموزان، بین معلم و دانش‌آموزان، بین معلمان، و بین معلمان و پژوهشگران، پشتیبانی کرده و آن‌ها را پرورش دهد. نتایجی که این کار می‌تواند بر فرایند یادگیری دانش‌آموزان و تکامل عملکرد معلمان و پیشرفت حرفه‌ای آنان داشته باشد، قطعاً یکی از ابعاد اساسی است که تحقیقات آموزشی باید در آینده، به‌طور نظام‌مند آن را کشف کند. مطالعه‌ی هفدهم ICM در فناوری دیجیتال (هویلس، لاگرانژ، سان و سینکلر، ۲۰۰۶) که به‌صورت کتاب (هویلس و لاگرانژ، در حال چاپ) در سال آینده ظاهر خواهد شد، در بررسی این چالش همکاری خواهد داشت.

جرمی:

● چالش انسجام[۳۱]

انسجام چالشی است که ما هر دو آن را مهم تلقی می‌کنیم. هرگونه چالشی که در آموزش ریاضیات در برابر ما قرار می‌گیرد، دارای دو جنبه‌ی داخلی و خارجی است و این در مورد چالش انسجام نیز صادق است. از جنبه‌ی داخلی، حوزه‌ی آموزش ریاضی لازم است بهتر از قبل، با گسترش روزافزون نظریه‌ها و ساختارهایی که راهنمای کار ما هستند، روبه‌رو شود. برخی از این نظریات، مانند نظریه‌ی **بروسو** (۱۹۹۷) در زمینه‌ی موقعیت‌های تعلیم و تربیتی یا نظریه‌ی وان **هیلی** (۱۹۸۴) در مدل تفکر ریاضی، در درون این حوزه گسترش یافته‌اند. نظریه‌های دیگر، مانند آن‌هایی که به کارهای **پیاژه** و **ویگوتسکی** مربوط می‌شوند، از خارج وارد شده و در حوزه‌ی ما اقتباس شده‌اند. ما انسجام بیشتری بین نظریه‌های مورد استفاده‌ی خود نیازمندیم.

ما دارای گسترش ساختارها نیز هستیم. من برخی از آن‌ها، مانند دانش پداگوژی محتوا را در بالا معرفی کرده‌ام، ولی می‌توانستم تعداد بیشتری، مانند «شناخت موقعیت‌مدار»[۳۲] یا «نُرم‌های ریاضی ـ اجتماعی»[۳۳] را نام ببرم. این ساختارها امروزه توسط آموزشگران ریاضی با چندین معنی متفاوت مورد استفاده قرار می‌گیرند و این معانی به تحلیل، انتقاد و توضیح نیاز دارند. از نقطه‌نظر بین‌المللی، ما به عنوان یک جامعه در برقراری ارتباط بین زبان‌های بومی خود هنوز مشکل داریم. هنگامی که ما از یک واژه با معانی متفاوت استفاده می‌کنیم، این مشکل بزرگ‌تر می‌شود.

در بسیاری موارد، نوع دیگر چالش داخلی، از شکاف بین پژوهشگران و معلمان ناشی می‌شود. هر چند من بر این باورم که حرکت به سمت این‌که به معلمان بیش از پژوهشگران بها داده شود، در کاهش دادن این شکاف مؤثر بوده است. با وجود این، هنوز تلاش‌های زیادی هست که همه ـ و به خصوص پژوهشگران ـ بایستی برای توسعه‌ی یک رویکرد منسجم در پژوهش، توسط استماع دقیق و همکاری نزدیک‌تر با یکدیگر انجام دهند.

از نقطه نظر خارجی، آن‌هایی که خارج از رشته ما هستند آن را تکه‌تکه می‌پندارند. آموزشگران ریاضی به ندرت با صدای واحدی از اهمیت دستاورد در آموزش سخن می‌گویند. تحقیقات بنیادی در رشته‌ی ما برخی اوقات به عنوان هدایتگر به نتایج متضاد و حمایت‌کننده از عملکردهای کاملاً متفاوت تعبیر می‌شود. غالباً عامه‌ی مردم، ریاضی‌دان و آموزشگران ریاضی را برای حل مسائل آموزش ریاضی در حال ارائه‌ی پیشنهادات متعارض می‌بینند. در واقع، ممکن است این پیشنهادات با هم ناسازگار باشند، ولی من فکر می‌کنم اگر قبل از آن‌که مردم متوجه این تفاوت‌ها شوند و رأی صادر کنند، این تضادها با مصالحه حل شوند، به نفع رشته خواهد بود.

اگر قرار باشد آموزش ریاضی به‌طور جدی به عنوان یک رشته‌ی علمی و عملی محسوب شود، باید در مباحثاتی که خود توسعه می‌دهد، از هر دو جنبه‌ی درونی و بیرونی منسجم‌تر باشد. میشل خبر می‌دهد که در اروپا آموزشگران ریاضی در سال‌های اخیر در این مسیرها تلاش‌هایی را شروع کرده‌اند.[۳۴] پروژه‌های گوناگونی در دست انجام است که از دیدگاه‌های منسجم و ائتلافی حمایت می‌کنند و روشن کننده‌ی وجوه مشترک و تفاوت‌ها هستند. این نوع پژوهش‌ها نمی‌تواند کار فردی باشد و نیازمند هم‌یاری بین‌المللی و ساختارهای مناسب است. این‌ها مسائلی هستند که سازمانی مانند ICMI می‌تواند در بررسی آن همکاری و کمک کند.

میشل: تجاربی که من در پنج سال اخیر روی برقراری یک نوع ائتلاف نظری یا لااقل شبکه‌سازی بین چارچوب‌های نظری در محدوده‌ی فعالیت‌های گروهی CERME که در بالا به آن اشاره شد یا در پروژه‌های مربوط به جامعه‌ی اروپا با تمرکز بر آموزش بر مبنای استفاده از فناوری در ریاضیات داشته‌ام، نشان دهنده‌ی آن است که این تلاش‌ها قابل ستایش است. اما من با جرمی در این مورد که این

تلاش‌ها برای توسعه و پیشرفت، به سازمان‌دهی و ساختار بین‌المللی نیازمند است موافقم. برای من، اولین گواه که از این تلاش نتیجه می‌شود این واقعیت است که تنها با خواندن نوشته‌های محققان که در یک بافت دیگر و یک فرهنگ دیگر زندگی می‌کنند و رویکردهای دیگری دارند، نمی‌توان دریافت که رویکردهای آنان چگونه عملاً روی کار پژوهشی و ادعاهای آنان در مورد شیوه‌ی عمل تأثیر می‌گذارد. برای این کار باید نوعی شیوه‌ی مشترک را توسعه داد که اجازه می‌دهد بین رویکرد نظری و شیوه‌ی عمل وارد فرایند عملکرد شویم. در چارچوب دو پروژه در اروپا به نام‌های TELMA[35] و ReMath[36]، من این فرصت را یافتم که در چنین شیوه‌ای توسط یک روش‌شناسی مبنی بر آزمایش‌های متقابل[37] که از دستورات سختی پیروی می‌کرد همکاری کنم (Artigue et al., 2007).

اکنون، پس از گذشت پنج سال احساس می‌کنم بهتر می‌توانم برخی مقایسات را انجام دهم، این که شبکه‌سازی در کجا مفید و در کجا غیرمفید است، چه چیز مکمل است و چه چیز سازگار نیست. این تلاش‌ها دیدگاه دیگری نسبت به موضوع به شما می‌دهد، اما این که چگونه می‌توانیم دانشی را که به صورت جمعی در این پروژه‌های مربوط به اروپا با مخاطبین بیشتر به‌دست آورده‌ایم با هم سهیم شویم، برای من هنوز یک مسئله‌ی باز است.

● چالش مساوات

در این‌جا قطعاً همه‌ی ما عقیده داریم که دست‌رسی به آموزش ریاضیات با کیفیت، یک حق انسانی است و آموزش ریاضی بایستی در خدمت داعی تساوی باشد. اما همه‌ی ما می‌دانیم که امروزه وضع غیر از این است. حتی ایده‌ی ریاضیات برای همه و پرورش استعدادهای ریاضی دو آرزوی مخالف هم هستند و این به هیچ وجه یک موضع‌گیری حاشیه‌ای نیست. آموزش ریاضی در بسیاری از نقاط جهان به تفاوت اجتماعی کمک می‌کند و حتی خود، سرچشمه‌ی تبعیض است. تحقیقات شواهد بسیاری را در این مورد فراهم آورده است، به‌ویژه از زمان پژوهش ابداعی **کاراهر**، **کاراهر** و **شیلدمن** (۱۹۸۵ و ۱۹۸۷) با فروشندگان خیابانی برزیلی، که نشان می‌داد مدرسه نتوانسته است از دانش و تجاربی که این شاگردان از فعالیت‌های خارج از مدرسه به دست آورده بودند، استفاده کند. تجارب و مطالعات انجام شده در دهه‌ی اخیر ـ مثلاً پژوهش توسعه یافته توسط **جوبولر** (۲۰۰۰ و ۲۰۰۸) در انگلستان و سپس در ایالات متحده. البته مثال‌های بسیار دیگری هم وجود دارد که نشان می‌دهد که وضعیت جاری وخیم نیست. نتایج حاصل از کار آن‌ها، امروز فضایای وجودی را برای ما به ارمغان آورده است. من واقعاً امیدوارم که مطالعه‌ی جدید ICMI روی یاد دادن و یاد گرفتن ریاضیات در بافت‌های چندزبانه، اساساً به تفکر و اندیشه در این دامنه کمک کند.

من سخن خود را با جمله‌ای از سرمقاله‌ی خانم **جیل آدلر**، نایب‌رییس ICMI در خبرنامه‌ی ICMI ژوئن (۲۰۰۸) به پایان می‌رسانم. او سؤالی که در ماه مارس در نشست روم به مناسبت سده ICMI مطرح شده بود را تکرار کرده است: «کارهایی که ما انجام می‌دهیم، چگونه به هدف (پروژه) میلینیوم در مورد جهانی کردن آموزش ابتدایی تا سال ۲۰۱۵، کمک می‌کند؟» در این سرمقاله، او اظهار امیدواری کرده است که ICME-11 با فعالیت‌های گوناگون خود و مورد توجه خاص قرار دادن این چالش، به ما کمک خواهد کرد گام‌هایی محکم در این راستا برداریم، به‌طوری که در سال ۲۰۱۲، در کنفرانس بعدی ICME که در سئول برگزار خواهد شد، بتوانیم شواهدی از پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای در این راستا را با خود به ارمغان ببریم. من در این امید با او همراهی می‌کنم و مطمئن هستم جرمی نیز همین احساس را دارد.

پی‌نوشت

* مطلب حاضر، با کسب اجازه از آقای دکتر علی رجایی (مترجم مقاله) و آقای محمود تلگینی (مدیرمسئول نشریه‌ی فرنود) و اندکی ویرایش مجدد، در ویژه‌نامه‌ی شماره‌ی ۱۰۰ چاپ شده است.

1. Michele Artigue
2. University Paris-Diderot-Paris7.
3. ICMI
4. Jeremy Kilpatrik
5. University of Georgia
6. Teacher College, Columbia University
7. University of California at Berkeley
8. Stanford University
9. Gothenburg University
10. Fulbright Awards
11. 2007 Felix Klein Medal
12. Diversity
13. Didactics
14. Determination
15. Yves Chevallard
16. Constructivism
17. Representation
18. The Journal of Mathematics Teacher Education
۱۹. رساله آموزشی معلمان ریاضی که در سال ۲۰۰۸ توسط انتشارات سنن چاپ شده است و حاوی چهار جلد است که به ترتیب توسط پیتر سولیوان و تری وود (ج ۱)، دینا تیروش و تری وود (ج ۲)، کنراد کرینرو تری وود (ج ۳)، باربارا جاورسکی و تری وود (ج ۴) نگارش شده است.
20. Gesture
21. Pedagogical Content Knowledge
22. Mathematical Knowledge for Teaching
23. (Trends in International Mathematics and Science Study), (Hiebert et al., 2003; Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll, & Serrano, 1999)
24. Learner's Perspective Study (Clarke, Emanuelsson, Jablonka, & Mok, 2006; Clarke, Keitel, & Shimizu, 2006)
25. Canonical Curriculum
26. (Programme for International Student Assessment)
27. Overcoming False Dichotomies
28. Epistemic
29. Adding it Up
۳۰. برای یک نظریه‌ی توسعه یافته در مورد استنتاج‌های اتفاقی، به ماکسول مراجعه کنید (۲۰۰۴).
31. Triangulation
32. Objectivity
33. Coherence
34. Situated Cognition
35. Sociomathematical Norms
۳۶. به‌عنوان مثال، این تلاش‌ها توسط یک گروه که به‌طور خاص خود را وقف پاسخ‌گویی به این سؤالات کرده است، در کنفرانس‌های اخیر انجمن اروپایی پژوهش در آموزش ریاضی اثبات شده است (CRME4, CERME5, CERME6). برای اطلاعات بیشتر به مجموعه مقالات ERME که به‌صورت آنلاین در سایت http://eremeweb.free.fr موجود است، مراجعه کنید.
۳۷. TELMA یک تیم پژوهشی در اروپاست که وابسته به یک شبکه‌ی اروپایی کلایدوسکوپ است. فعالیت‌های آن روی آموزش توسعه‌ی فناوری در ریاضیات متمرکز است. انتشارات TELMA از طریق سایت اینترنتی آن قابل دست‌رس است:
http://telma.noe-kaleidoscope.org
38. ReMath (Representing Mathematics with Digital Media)
(نماینده‌ی ریاضیات با دستگاه‌های تبلیغاتی دیجیتال) یک پروژه در کشور اروپا از طرف (Information Society Technologies, Programme IST 4-26751) است.
اطلاعات در مورد پروژه ReMath را می‌توان از طریق سایت http://www.remath.cti به دست آورد.
39. Cross-experiments

جای a چه خالی است!

امیرحسین اصغری، دانشگاه شهید بهشتی

این یادداشت با چند «تجربه‌ی جبری» شروع و با یک «پندِ جبری» خاتمه می‌یابد. از آن‌جایی که به دل (ذهن) نشستنِ یک پند جبری، مانند هر پند دیگری، نیازمند تجربه‌ای آشناست، لطفاً بعد از پر کردن «جای خالی» در هر یک از مسائل زیر، کمی مکث کنید و به نقشی که شکلِ جایِ خالی و رنگ آن در مسأله ایفاء می‌کند (یا نمی‌کند) فکر کنید.

ریاضی اول دبستان: $۳ = \square + \square$

(هر دو جای خالی زرد است.)

ریاضی چهارم دبستان: $\square \times \square = ۴ \times ۷$

(هر دو جای خالی صورتی است.)

ریاضی دوم راهنمایی: $-۱۲ = \triangle + \square$

(مثلث بنفش و مربع زرد است.)

اگر هنوز دلیل سازگاری برای انتخاب شکل و رنگ جاهای خالی پیدا نکرده‌اید ناامید نشوید؟ مثال بعدی نشان می‌دهد که شاید اصولاً چنین دلیلی وجود ندارد.

ریاضی دوم راهنمایی:

(مربع بالایی، زرد و مربع پایینی سبز است.)

تفسیر شکل با مربع‌های غیر هم‌رنگ (مثلِ شکل کتاب): مربع زرد، a و مربع سبز ۳a است.

تفسیر شکل با مربع‌های هم رنگ (مثل شکلِ روی تخته): مربع یک «مکان نگه‌دار» است، بعضی وقت‌ها a را نگه می‌دارد، بعضی وقت‌ها، ۳a را.

هر دو تفسیر از $\square \times ۳$ دورند؛ اما به هر حال تفسیر اول کمی بهتر از تفسیر دوم است. بالاخره رنگ به کار آمد! ولی آیا در میان این همه جای خالیِ رنگی رنگی، رنگ این یکی اهمیت دارد؟

خُب اگر ما مجبوریم به هر دلیلی از این «ترفندهای آموزشی» استفاده کنیم چه بهتر است یک پند جبری را به خاطر بسپاریم:

جای a را با احتیاط خالی کنید!

چون ممکن است دانش‌آموز شما بعداً در جایی بخواند:

«در ریاضی معمولاً به جای استفاده از علامت $\square$ از نمادهای حروف انگلیسی، مانند a، b، c، ... استفاده می‌شود.» (ریاضیات ۱، سال اول دبیرستان)

و ممکن است شما مایل نباشید که او $\square + \square = ۲\square$ را به شکل $a + b = ۲c$ یا $\boxed{۱۱} + \boxed{۱۱} = ۲\boxed{۲}$ تعبیر کند. اما اگر چنین کرد بر او خُرده نگیرید چرا که او به مدت هشت سال همه گونه تعبیر جای خالی را تجربه کرده است.