

آموزش ریاضه

دوره ی بیست و هفتم / شماره ی ۳ / بهار ۱۳۸۹

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

مدیر مسئول: محمد ناصری

سرمدبیر: زهرا گویا

مدیر داخلی: سپیده چمن آرا

هیئت تحریریه: اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی،
سپیده چمن آرا، مهدی رجبعلی پور، مانی رضائی،
شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد و
محمد رضا فدائی

طراح گرافیک: مهدی کریم خانی

سخن سردبیر ۲ زهرا گویا

داستان جبر، منافع و دام های شیء انگاری (قسمت اول) ۴ آنا اسفارد و لیوا لینچوسکی

ترجمه: زهرا کامیاب و امیرحسین اصغری

بازنگری یک تجربه؛ ضرورت تلفیق در برنامه ی درسی ۱۵ سپیده چمن آرا

درک دانش آموزان از مفهوم اصلی تابع ۲۴ بی بی زکیه پرهیزگار و زهرا گویا

روایت معلمان: بررسی ویژگی های چهارضلعی ها ۳۴ نغمه حاجی صادقی

چگونگی انتخاب تکالیف برای کلاس درس ۳۸ افسانه حیدری ارجلو

دیدگاه (۱): تعلم و تربیت قرون وسطایی به سبک جدید! ۴۲ مریم گویا

دیدگاه (۲): درباره دیدگاه تحلیل و روش تدریس ریاضی ۲ متوسطه و... ۴۵ مؤلفان ریاضی ۲

اثبات نامساوی ها به کمک توابع محدب (قسمت ۲) ۴۷ علی غلامیان

استفاده از کتاب های کمک آموزشی ریاضی؛ آری یا نه؟ ۵۲ محسن تنده

سرگرمی های تاریخی در آموزش ریاضی ۵۶ نرگس عصارزادگان

معرفی نشریه ۶۴

عکس روی جلد: رضا بهرامی

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نشر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- بی نوشت ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از اثر و مقاله ی ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
- در مقاله های تحقیقی یا توصیفی، واژه های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود.
- هم چنین:
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبنی بر نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی شود.

- نشانی دفتر مجله: تهران، ایران شهر شمالی، پلاک ۲۶۶.
- صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
- تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹ (داخلی ۲۷۴)
- شماره: ۸۸۳۰۱۴۷۸
- پایگاه اینترنتی: www.roshdmag.ir
- رایانامه: riazi@roshdmag.ir
- تلفن پیام گیر نشریان رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲
- کد مدیرمسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۳ ●
- کد امور مشترکین: ۱۱۴
- نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱
- تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۶۶۵۵
- چاپ: شرکت افست (سهامی عام)
- شمارگان: ۱۲۰۰۰

مدرسه: حق یا امتیاز



هر که در این سرا درآید، نانش دهید
نانش دهید و از نامش پرسید
چه آن کس که به درگاه باری تعالی به جان ارزد،
البتہ بر خوان بوالحسن به نان ارزد.

شیخ ابوالحسن خرقانی

کتاب نورالعلوم

قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری

اما در عصر جدید، موازنه‌ها به هم ریخته است و به جهت شأنیت و جایگاه، مدرسه تداوم آموزش در گذشته نیست. به طور مثال، در ایران مدارس متنوعی تأسیس شده‌اند که افراد را برای بهره‌مندی از حق طبیعی خود یعنی آموزش دیدن، سرّند می‌کنند و به خیال خویش، سره را از ناسره جدا می‌کنند و برای آن، توجیهات مردم‌پسندانه می‌آورند. در حالی که از منظر علم تعلیم و تربیت - نه سلیقه‌های آموزشی که اغلب ریشه در آرمان‌های افراد دارد و بسیاری از آن‌ها از نظر علمی قابل دفاع نیستند - روش‌های مورد استفاده در بسیاری از این مدارس متنوع، از چنان یکنواختی و کهنگی برخوردارند که شگفت آورند و این فرصت‌سوزی غریب است.

از شروع قرن تمام شده، مدرسه جزو حقوق اولیه‌ی بشری شد و بدین سبب، نهادی به نام آموزش عمومی و جایگاهی به نام مدرسه، تأسیس شد. طبیعی است که این حرکت در تداوم خود، بیشتر و بیشتر به وظیفه‌ی اصلی‌اش که همانا آموزش همگانی باشد، نزدیک شد. مهم‌ترین علت وجودی تمام آموزش‌های عمومی، تأمین این حقوق - یعنی حق آموزش - بیان شده است و در نتیجه، در سراسر جهان، تمام دولت‌ها موظف‌اند که مدرسه رفتن افراد را تسهیل کنند. در واقع، حق آموزش، وظیفه‌ی هر دولتی در قبال جامعه‌ی خود است و این حقی است که هر شهروندی - در هر جای دنیا - از جامعه‌ی خویش طلب می‌کند.

واقعیتی که در ایران اتفاق افتاده این است که حتی مدرسی که دارای امکانات فراوان اجتماعی و اقتصادی هستند، باز هم از نظر اصول علمی - آموزشی، دچار مشکلات فراوان اند زیرا برنامه های این مدارس، از کهنگی دیدگاهی رنج می برند.

در حقیقت، به دلیل فقدان چشم اندازهای آموزشی پیشرو، و کمبود دانش تخصصی آموزشی مبتنی بر مدرسه، حتی بسیاری از افراد توانمند و تحصیل کرده نیز، جز تجربه های دوران تحصیل خود، به ندرت الگوی دیگری دارند و در نتیجه، تعالی آموزشی را با تکرار آموزش دوره ی خودشان، انتظار می کشند. گاهی پدر و مادرهای تحصیل کرده و آرمان خواه نیز، تجربه های آموزشی خود را به عنوان بهترین الگو، به مدارس ویژه تحمیل می کنند؛ الگوهایی که بدون قضاوت و نقد منصفانه، انگار که تنها الگوهای موجود بوده اند.

به گفته ی گاردنر، اگر یک نفر از قرن نوزدهم وارد مدارس کنونی ما شود، به راحتی با این مدارس سازگار می گردد و احساس غربت نمی کند و در واقع، احساس می کند که هیچ مشکلی با آن ها نخواهد داشت! زیرا به گفته ی وی، در همین کلاس قرن بیست و یکم، هم چنان معلم پای تابلو مشغول نوشتن است، دانش آموز یادداشت برمی دارد، درس گفته می شود، آموزه ها در سکوت - و گاهی با چاشنی تنوع در قالب کاری در گروه های کوچک یادگیری! - دریافت می شوند! تمرین داده می شود، تکرار می شود و داستان با همین یکنواختی، ادامه می یابد. گاردنر در ادامه می گوید؛

این در زمانی است که اگر آن قرن نوزدهمی وارد جامعه ی واقعی شود، وحشت زده می گردد و به شدت احساس غربت می کند، زیرا تکنولوژی آن چنان موازین جامعه را زیر و رو کرده که بین این دنیا و دنیای قرن نوزدهم خود، هیچ فصل مشترکی نمی بیند، ولی در مواجهه با مدرسه و درون حصار مدرسه، مثل آن است که دوران خودش را تجربه می کند!

مدرسه در مواجهه با تغییرات، بیشتر ماهیت محافظه کارانه دارد و این امر، منحصر به ایران نیست، اما شدت و ضعف دارد. در بعضی از مناطق دنیا، خیلی شدیدتر است و در بعضی جاها ضعیف تر. به این علت، تلاش های بسیاری می شود تا فاصله ی بین مدرسه و دنیای واقعی کمتر شود.

با این وجود، انتخاب روش آموزشی اغلب چنین است که می شنویم و می بینیم که دیگران چگونه عمل کرده اند! اگر از محصول آموزش آن ها خوشمان آمد، آن روش ها را صرف نظر از

تناسبشان با ویژگی های دانش آموزان خود، به کار می بندیم تا محصول مشابه تولید کنیم! در نتیجه، چون چشم اندازهای روشن آموزشی و الگوهای کلان و منعطف نداریم، تقریباً به روزمرگی می افتیم و هر الگوی جدیدی را هم که به بدنه ی آموزشی تزریق می کنیم، عملاً پاسخ نمی گیریم.

اما با وجود این کهنگی دیدگاهی که در بطن آموزش ما وجود دارد، محصولات خوبی تولید می شوند زیرا جامعه خارج از چارچوب های تنگ مدرسه، به حیات طبیعی خود و رسیدن به تعالی ادامه می دهد. هم چنان که انکار تکنولوژی مانند انکار روشنایی روز است، نادیده گرفتن ظرفیت های پیدا و پنهان جمعیت عظیم دانش آموزان فهیم و کم بهره از آموزش های خوب فکر شده اما توانمند در بهره بردن از حداقل های موجود و امیدوار به آینده ای که متعلق به آن هاست، خطایی جبران ناپذیر است. حیف است که با سرند کردن های به جا و نابه جا، جامعه ی کلان دانش آموزی را از هم تفکیک کنیم و برای جمع قلیلی از آن ها، آموزش های به اصطلاح ویژه تدارک ببینیم. حیف است که از ادبیات و فرهنگ غنی ایرانی - اسلامی خود بهره نبریم که در هزار سال پیش نیز، حقوق عمومی افراد را محترم می شمرد و از زبان پیر دانا - شیخ ابوالحسن خرقانی، نهیب می زد که «چه آن کس که به درگاه باری تعالی به جان ارزد، البته بر خوان بوالحسن به نان ارزد!» این سخن نغز خرقانی، تمثیل زیبایی برای آموزش مدرسه ای در ایران است که آموزش عمومی، خوان گسترده ای است که همه ی دانش آموزان - تیزهوش و معمولی و دیر یادگیرنده - حق بهره بردن جمعی از آن را دارند و خوشبختانه، یافته های پژوهشی فراوانی بر این نظر صحه گذاشته اند که تفکیک دانش آموزان از هر نظر - استعداد، هوش، قابلیت یادگیری، سطح آموزشی و نظایر آن - و اغلب با پشتوانه ی نتایج آزمون های عدیده و کثیره، صدماتی که در درازمدت به آموزش عمومی می زند، بیش از اندک باری است که ممکن است از دوش آموزش عمومی بردارد.

هر سال جدید، همیشه نویدبخش تحول در قلب هاست که عاجزانه در موقع تحویل سال، از مقلب القلوب طلب می نمایم. امیدوارم سال ۱۳۸۹، سالی از هر نظر پر برکت و نشاط آور و مولد باشد. در ضمن، به معلمان عزیز هم که روزشان را در همین فصل جشن می گیرند تبریک مضاعف گفته و برایشان، موفقیت بیشتر را آرزو دارم.

داستان جبر

منافع و دام‌های شیء انگاری

بخش اول

نویسندگان: آنا اسفارد و لیرا لینچوسکی

مترجمان: زهرا کامیاب

دانشجوی دکتری آموزش ریاضی واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی

امیرحسین اصغری

دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند. درحقیقت، آنچه از نمادها درک می‌شود، وابسته به شرایط مسئله‌ای است که نمادها برای آن به کار رفته‌اند. علاوه بر این، این مسئله به آنچه فرد می‌تواند درک کند و آمادگی توجه کردن به آن را دارد، وابسته است. آخرین عبارت، موضوع مهم این مقاله است، یعنی تمرکز اصلی بر تغییرپذیری^۱ و انطباق‌پذیری^۲ دانش جبری دانش‌آموزان است.

تجزیه و تحلیل، در درون چارچوب نظریه‌ی شیء انگاری مفاهیم انجام شده است. براساس این نظریه، یک دوگانگی فرایند-شیء ذاتی در بیش‌تر مفاهیم ریاضی وجود دارد. اساس نظریه این است که در ابتدا، مفهوم عملیاتی (فرایندمحور^۳) ایجاد می‌شود و پس از آن از طریق شیء انگاری فرایندها، اشیای ریاضی (مفاهیم ساختاری) ایجاد می‌شوند. شواهد بسیاری وجود دارد که نشان می‌دهند رسیدن به شیء انگاری مفاهیم، دشوار است.

در این مقاله، ابتدا ماهیت و رشد تفکر جبری از دیدگاه شناخت‌شناسی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. حامی این دیدگاه، مشاهدات تاریخی است. درنهایت، رشد تفکر جبری به عنوان دنباله‌ای از انتقال‌های همواره رو به پیشرفت، از نگاه عملیاتی به ساختاری معرفی شده است. سپس، این مدل برای یادگیری فردی به کار رفته است. تمرکز بر دو انتقال تعیین‌کننده است: انتقال از جبر عملیاتی محض به جبر ساختاری از «یک مقدار ثابت» (از یک مجهول) و سپس از این جا به جبر تابعی (از یک متغیر). بعد از این، دشواری‌هایی که یادگیرندگان در این نقاط اتصال تجربه می‌کنند، با استفاده از داده‌های تجربی بیش‌تری که از دامنه‌ی وسیعی از منابع به دست آمده، شرح داده شده است.

کلیدواژه‌ها: جبر مدرسه‌ای، شیء انگاری مفاهیم، تفکر جبری. می‌کنید، چه چیزی می‌بینید؟ بستگی دارد. احتمالاً در بعضی موقعیت‌ها خواهید گفت، این توصیفی جبری.

زمانی که به یک عبارت جبری مانند $3(x+5)+1$ نگاه کوتاه و رسا از یک فرایند محاسباتی است. در این حالت

با مسئله و راه حل های متفاوت را نتیجه می دهد: در حالت اول، فرد ریشه های معادله را با به کار بردن فرمول $x_1, x_2 = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / 2a$ پیدا می کند و در حالت دوم، با مساوی قرار دادن ضرایب توان های یکسان x در دو عبارت $(p + 2q = 5)$ و $(3p - q = 1)$ ،

**ریاضی دان
فرانسوی فرنکوئیز
ویست (۱۶۰۳-)
اولین کسی
بود که مقادیر معین
عددی را با نمادها
جایگزین کرد. این
ابداع، منجر به
تغییرات مفهومی
دور از دسترس در
جبر شد**

مقادیر پارامترهای p و q به دست می آیند. حالت دیگری هم وجود دارد که ممکن است نمادها برای فرد معنایی نداشته باشند. این دیدگاه در ابتدا، کمکی به حل مسئله نمی کند. اما ممکن است فرد یک عکس العمل غیر ارادی نشان دهد. او احتمالاً به طور غیر ارادی کاری را انجام می دهد که برای آن شرطی شده است، یعنی در مواجهه با یک معادله ی درجه ی دوم، بدون توجه به سؤالی که پرسیده شده، به فرمول ریشه ها متوسل می شود.

تعدد دیدگاه ها نسبت به شی ظاهرآ ساده ای مانند $3(x+5)+1$ ، حقیقتاً گیج کننده است. در بخش های بعدی خواهیم گفت این مسئله، هم چنین منشأ قدرت جبر است.

۱. مقدمات: جبر از نگاه نظریه ی شیء انگاری مفاهیم

نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند. درحقیقت، آن چه از نمادها درک می شود، وابسته به شرایط مسئله ای است که نمادها برای آن به کار رفته اند. هم چنین این مسئله به هرچه که فرد می تواند درک کند و آمادگی توجه کردن به آن را دارد، وابسته است. آخرین عبارت، موضوع مهم این مقاله است. تمرکز اصلی بر تغییرپذیری و انطباق پذیری دانش جبری دانش آموزان است. سؤالی که در این جا مطرح است این است که یادگیرنده تا چه اندازه می تواند تفاسیر گوناگون احتمالی از ساخت های جبری را درک کند و به کار برد. قبل از درگیر شدن با این مسئله، بر نوع تجزیه و تحلیلی که در این جا انجام خواهد شد، تأمل می کنیم.

تمایزهایی که در مثال های ابتدای مقاله مطرح کردیم، بسیار ظریف هستند و به آن چه که در ذهن افراد رخ می دهد اشاره دارد،

$3(x+5)+1$ هم چون دنباله ای از دستورالعمل ها است: ۵ را به عددی که دارید اضافه کنید، نتیجه را در ۳ ضرب و سپس ۱ را اضافه کنید. در موقعیتی دیگر ممکن است این عبارت جبری را طور دیگری ببینید: $3(x+5)+1$ عدد معینی را نمایش می دهد. این عبارت، نتیجه ی محاسبات است نه خود محاسبات. اگرچه عدد x مجهول است و در هر لحظه نمی توان نتیجه را مشخص کرد، با این وجود، این عبارت جبری هنوز یک عدد است و انتظار می رود کل عبارت به عنوان یک عدد عمل کند. تعبیر دیگری هم وجود دارد: ممکن است $3(x+5)+1$ را به عنوان یک تابع در نظر بگیریم. تابع، نگاشتی است که هر عدد x را به عدد دیگری می برد. در این حالت، فرمول هیچ مقدار ثابتی (حتی مجهول) را نشان نمی دهد. در عوض، نشان دهنده ی یک تغییر است. اگر در این عبارت جبری به جای یکی از ضرایب عددی (مثلاً ۳) یک حرف قرار گیرد (مثلاً a)، عبارت جبری حاصل $a(x+5)+1$ ، پیچیده تر به نظر می رسد. در این حالت ممکن است عبارت به عنوان خانواده ای از توابع از IR به IR در نظر گرفته شود. علاوه بر این، تعبیر دیگری نیز وجود دارد: ممکن است فردی ادعا کند آن چه در پس نمادها پنهان شده، تابعی از دو متغیر، از IR^2 به IR است.

البته شیوه ی ساده تری نیز برای مشاهده ی $3(x+5)+1$ وجود دارد: ممکن است این عبارت، براساس شکل ظاهری آن صرفاً به عنوان رشته ای از نمادها که چیزی را نمایش نمی دهند، در نظر گرفته شود. این عبارت جبری به خودی خود یک شیء جبری است. اگرچه این عبارت از نظر معنایی تهی است، اما هنوز ممکن است با آن دست ورزی شود و براساس قواعد مشخصی که به خوبی تعریف نشده اند، با سایر عباراتی از این نوع ترکیب شود. در این جا می توان پرسید که آیا در عمل نیز، مشاهدات بالا از معانی جبر مهم هستند؟ پاسخ مثبت است. به عنوان مثال، زمانی که با معادلاتی از قبیل $(p+2q)x^2 + x = 5x^2(3p-q)x$ مواجه می شویم، بدون دانستن این که آیا تساوی مربوط، عددی یا تابعی است، نمی توانیم مسئله را حل کنیم. در این جا این سؤال مطرح است که آیا هدف، به دست آوردن مقدار x است به طوری که تساوی برقرار باشد (این مقدار باید برحسب p و q بیان شود)؟ یا هدف، به دست آوردن مقادیر پارامترهای p و q است، به طوری که دو تابع $(p+2q)x^2 + x$ و $5x^2(3p-q)x$ مساوی باشند؟ تفاسیر مختلف، شیوه های متفاوت درگیر شدن

ریاضی یک ساختار چندسطحی است، موضوعی که در آن ایده‌های اساساً یکسان اگر از موقعیت‌های مختلف مشاهده شوند، متفاوت خواهند بود

نه به آن چه که روی کاغذ می‌نویسند و به معلم تحویل می‌دهند. درواقع، تفاوت بین تفاسیر مختلف معادله‌ی $(3p-q)x^2 + x = 5x^2 + (p+2q)x$ همیشه در یک آزمون استاندارد نشان داده نمی‌شود. علت این است که دانش‌آموز، چه عبارت را یک تساوی عددی تصور کند، چه آن را فقط به عنوان رشته‌ای از نمادها در نظر بگیرد، احتمالاً فرمول‌های یکسانی به کار می‌برد و دست‌ورزی‌های یکسانی انجام می‌دهد. یک بررسی بسیار دقیق و با جزئیات از رفتارها و اظهارات دانش‌آموز لازم است تا بتوانیم نسبت به تفکر او بصیرتی پیدا کنیم (به عنوان مثال شونفیلد^۴ و همکاران را ببینید، ۱۹۹۳؛ نویسندگان این نوع از تجزیه و تحلیل را میکروژنتیک^۵ می‌نامند).

ما در این جا سعی می‌کنیم تجزیه و تحلیل دقیق و همراه با جزئیات را با اتکا به یک چارچوب نظری معین که آن را نظریه‌ی شیء‌انگاری مفاهیم می‌نامیم، انجام دهیم (یادآور می‌شویم که ممکن است سایر نویسندگان، اصطلاحات

علمی متفاوتی برای ایده‌های مرتبط یکسان یا تقریباً یکسان به کار برده باشند؛ فهرست نام‌های احتمالی را در هرل^۶ و کاپوت^۷، ۱۹۹۱ ببینید). با کمک این چارچوب، حقایق بی‌قاعده‌ی فراوانی تبدیل به یک کل معنادار و قابل کنترل می‌شوند. مانند هر مدل نظری دیگری، این مدل نیز بر جنبه‌های خاصی از حوزه‌ی مورد جست‌وجو تأکید دارد و سایر جنبه‌ها را کنار می‌گذارد. با این وجود، این مدل به عنوان ابزاری برای تجزیه و تحلیل توسعه‌ی مفاهیم گوناگون ریاضی، به خصوص مفهوم تابع، مورد توجه است (اسفارد، ۱۹۹۲؛ بریدنباخ^۸ و همکاران، ۱۹۹۲). هم چنین، این مدل برای نظم بخشیدن به بخش عمده‌ای از یافته‌های روبه‌رشد در مورد تفکر جبری به کار رفته است (کیپرن^۹، ۱۹۹۲). در قسمت‌های بعدی، جبر را از دریچه‌ی این مدل خواهیم دید.

در باقی مانده‌ی این بخش، ایده‌ی اصلی نظریه‌ی شیء‌انگاری مفاهیم را ارائه خواهیم کرد. ادعاهایی که داریم، نظامی را شکل می‌دهند. در سرتاسر این مقاله، عناصر مختلف

این نظام، مورد بحث قرار خواهند گرفت. توصیه می‌شود، خواننده برای شناخت جامع‌تر ایده‌های اصلی این مدل، به اسفارد (۱۹۹۱) و کیپرن (۱۹۹۱) مراجعه کند. علاوه بر این، دوبینسکی^{۱۰} (۱۹۹۱) و هرل و کاپوت (۱۹۹۱)، مدل تقریباً مشابهی را توصیف می‌کنند. ایده‌های دوبینسکی، تعمیمی از نظریه‌ی تجرید بازتابی^{۱۱} پیازه است (بت^{۱۲} و پیازه، ۱۹۶۶). مشاهدات کاپوت و هرل براساس مفهوم گرینو^{۱۳} از هستی‌مفهومی^{۱۴} است (گرینو، ۱۹۸۳). خاطر نشان می‌سازیم، ایده‌ی دوییت فرایند-شی اشیای ریاضی که در این مقاله نقش اساسی دارد، دوگانگی ابزار-شیء دواڈی^{۱۵} (۱۹۸۵) را به یاد می‌آورد.

در مثال ابتدای مقاله، اشیای ریاضی گوناگونی به عنوان مصداق‌های عبارت جبری معرفی شده‌اند. مثلاً یک عدد، یک تابع، یک خانواده (مجموعه) از توابع مصداق‌هایی از عبارت‌های جبری هستند. اما یکی از تعابیر عبارت جبری ماهیت متفاوتی داشت؛ زمانی که $1 + (x + 5) \times 3$ به عنوان یک سری از عملیات خوانده شد، این فرایند محاسباتی بود که به نمادها معنا بخشید. نه هر شیء مجرد دیگری (البته صرف نظر از اعدادی که در فرایند به کار رفته‌اند). چیزی که در این مثال مشاهده شد، ظاهراً در کل ریاضی شایع است: نمایش یکسان و مفاهیم ریاضی یکسان، ممکن است گاهی به عنوان فرایندها و گاهی به عنوان مفاهیم تفسیر شوند؛ یا، به بیان اسفارد (۱۹۹۱)، ممکن است هم عملیاتی و هم ساختاری درک شوند. بنابراین، شیوه‌های به ظاهر ناسازگار در درک ساخت‌های ریاضی، در هر نوع فعالیت ریاضی حضور دارند و مکمل یکدیگرند. این واقعیت، نقطه‌ی شروع مدل یادگیری و حل مسئله‌ی ریاضی ما را شکل می‌دهد. مفهوم مکمل به همان شیوه‌ای که در فیزیک به کار می‌رود (براساس ایده‌های نیل بوهر^{۱۶})، در این جا نیز به کار رفته است. در فیزیک برای توجیه برخی مشاهدات، موجودات درون‌اتمی را هم به عنوان ذره‌های مادی و هم به عنوان موج در نظر می‌گیریم.

مدل‌های تفکر عملیاتی و ساختاری، تفاوت‌های ظریفی دارند و تمایز قائل شدن بین آن‌ها ساده نیست. توانایی درک ریاضی به این شیوه‌ی دوگانه، جهان ایده‌های مجرد را به تصویری از جهان مادی تبدیل می‌کند: مشابه جهان واقعی، اعمالی که در این جا انجام می‌شوند، «مواد خام» و محصولات دارند. این

مواد خام و محصولات، موجوداتی هستند که با آن‌ها به عنوان اشیای اصیل و پایدار رفتار می‌شود. با این وجود، برخلاف زندگی واقعی، یک نگاه دقیق‌تر به این موجودات آشکار می‌کند که نمی‌توان آن‌ها را به عنوان موجودات قائم به ذات^{۱۷} که بتوانند از فرایندها جدا باشند، در نظر گرفت. اشیای مجردی مانند $\sqrt{-1}$ و -2 یا تابع $1 + 3(x+5)$ نتیجه‌ی نگاه‌های متفاوت به رویه‌های به دست آوردن ریشه‌ی دوم از -1 ، منفسی کردن 2 و نگاشت اعداد حقیقی روی

زمانی که ایده‌های جبری فقط با کلام بیان شده‌اند، به دشواری می‌توان رویکرد ساختاری پیشرفته‌تری را تصور کرد. در رویکرد ساختاری، فرایندهای محاسباتی به طور کلی از دید بالاتری مورد ملاحظه قرار می‌گیرند، اما رویکردهای عملیاتی و ساختاری، بازنمایی‌های یکسانی دارند. به عبارت دیگر، کلمات، مانند نمادها قابل دست‌ورزی نیستند. قابل دست‌ورزی بودن است که این امکان را فراهم می‌کند تا مفاهیم جبری، کیفیت شیء ماندنی داشته باشند. امکان انجام فرایندهای سطح بالاتر در فرایندهایی که با عبارات فشرده نمایش داده شده‌اند، تفکر ساختاری را ترغیب می‌کند

مفهوم ساختاری است، می‌توان بحث‌های نظری و تجربی بسیاری به کار برد. آنچه در یک سطح به عنوان یک فرایند درک می‌شود، در سطح بالاتر به عنوان یک شیء درک می‌شود (به عنوان مثال؛ اسفارد، ۱۹۹۱ و ۱۹۹۲ را ببینید). به نظر می‌رسد زمانی که کاپوت (۱۹۸۹) بیان می‌کند که «موجودات ذهنی که از طریق شیء انگاری مفاهیم (دیدن اعمال، رویه‌ها و مفاهیم به عنوان اشیای پدیدارشناختی) ساخته شده‌اند، می‌توانند به عنوان پایه‌هایی برای اعمال، رویه‌ها و مفاهیم جدید در سطح بالاتری از

خودشان از طریق یک تبدیل خطی است. بنابراین، اشیای ریاضی نتیجه‌ای از شیء انگاری مفاهیم هستند و شیء انگاری مفاهیم حاصل توانایی ذهنی ما برای دیدن نتیجه‌ی فرایندها به عنوان موجودات پایدار قائم به خود است.

این مشاهده‌ی هستی‌شناسانه، نتایج نظری متعددی دربردارد، نظام کاملی از ادعاها در مورد حل مسئله‌ی ریاضی تدارک می‌بیند و مدلی از شکل‌گیری مفاهیم را به وجود می‌آورد. این مدل، هم‌چنان که برای درک تحول تاریخی مفاهیم به کار می‌رود، برای یادگیری فردی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و دلایلی برای دشواری‌هایی که دانش‌آموز در فهمیدن یک ایده‌ی ریاضی جدید تجربه می‌کند، ارائه می‌دهد. در ادامه، همه‌ی این موضوعات را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش ۲، بحث را با یک تجزیه و تحلیل معرفت‌شناختی که توسط مشاهدات تاریخی حمایت می‌شود، آغاز می‌کنیم. در بخش ۳، یک دیدگاه روان‌شناسی مطرح می‌کنیم و تلاش خواهیم کرد نشان دهیم که مدل شکل‌گیری جبر که از طریق تجزیه و تحلیل تاریخی و معرفت‌شناختی ساخته شده، تا حدود زیادی متناسب با فرایندهایی است که همراه با یادگیری فرد رخ می‌دهند.

۲. جبر چیست و چگونه توسعه یافته است؟

برای نشان دادن این که در ریاضی، مفهوم عملیاتی مقدم بر

سازمان‌دهی به کار روند» (ص. ۱۶۸)، مشاهدات مشابهی داشته است. هرچند ممکن است نقطه‌ی شروع برای ما و کاپوت کاملاً متفاوت باشد (به نظر می‌رسد ایده‌های کاپوت براساس نظریه‌ی تجرید بازتابی پیازه بوده است)، اما اتفاق نظر اساسی در مورد نقش فرایندها و اشیای ریاضی و وابستگی متقابل آن‌ها وجود دارد. فرودنتال یکی از صریح‌ترین طرفداران تصور ریاضی به عنوان سلسله‌مراتبی از دیدگاه‌های متناوب است: «تجزیه و تحلیل من از فرایند یادگیری ریاضی سطوحی را در فرایند یادگیری آشکار ساخته است، جایی که ریاضیاتی که در یک سطح انجام می‌شود، ریاضی مشاهده شده در سطح بعدی می‌شود» (فرودنتال، ۱۹۷۸، ص. ۳۳). هرچند این ادعا براساس تجزیه و تحلیل‌های متفاوتی بنا شده است، اما مانند نظریه‌ی ما، به ویژگی‌های اساسی یکسانی از ساخت‌های ریاضی اشاره دارد؛ یعنی بر این حقیقت تأکید دارد که ریاضی یک ساختار چندسطحی است، موضوعی که در آن ایده‌های اساسی یکسان اگر از موقعیت‌های مختلف مشاهده شوند، متفاوت خواهند بود.

همان‌طور که قبلاً گفتیم، ساخت‌های جبری باید دویست فرایند-شیء را انتقال دهند. اما انعطاف‌پذیری در هستی‌شناسی موجب می‌شود تا رسیدن به توانایی درک جنبه‌ی ساختاری، ساده نباشد. بنابراین، نقاط اتصال مهم در رشد ریاضی جایی است که انتقال از یک سطح به سطح دیگر رخ می‌دهد. این نقاط،

دشواری‌ترین و جالب‌ترین نقاط هستند. بار دیگر عبارات فرودنتال را به کار می‌بریم؛ «اگر فرایند یادگیری را مورد مشاهده قرار دهیم، لحظات مهم و ارزشمند، ناپیوستگی‌ها هستند. آن‌ها جهش‌هایی‌اند که در فرایند یادگیری رخ می‌دهند» (ص ۷۸). بدین سبب، در تجزیه و تحلیلی که در ادامه می‌آید، تمرکز بر نقاط منفرد در رشد مفاهیم جبری است. برای آن‌که پیشرفت بیش‌تری صورت گیرد، دیدگاه هستی‌شناسی باید انطباق (فرایند-شیء) را در این نقاط بپذیرد.

قبل از توضیح رشد جبر، ماهیت تحقیق مان را مورد ملاحظه

قرار می‌دهیم. مانند هر حوزه‌ی دیگری

از دانش بشری، امکان دارد ساخت جبر

از دیدگاه‌های گوناگونی مورد بررسی

قرار گیرد. فرد ممکن است بر ساختار

منطقی موضوع تمرکز کند و پرسد که

چگونه بخش‌های مختلف دانش به یک

نظام منسجم مرتبط می‌شوند؟ این نوع

تجزیه و تحلیل را منطقی^{۱۸} می‌نامیم.

دیدگاه دیگر، رویکرد تاریخی است.

این رویکرد تلاش‌های جمعی را که در

طول زمان برای ساخت نظام مفروض

مفاهیم انجام شده، مورد توجه قرار

می‌دهد. درنهایت، ممکن است،

محقق فرایندهای شناختی را که باعث

شکل‌گیری یادگیری فردی می‌شوند،

مورد بررسی قرار دهد. فرد قطعاً انتظار

ندارد که این سه نوع تجزیه و تحلیل

نتایج یکسانی دربرداشته باشند.

همان‌طوری که برخی از نویسندگان

نوشته‌اند، این، یک افسانه است که

«ساختار [منطقی] ریاضی به طور دقیق

تاریخ آن را منعکس کند» (کرو^{۱۹}،

۱۹۸۸). علاوه بر این، فرد باید دقت

کند که روان‌شناسی، نسخه‌ی دوباره نوشته شده‌ای از تاریخ

نیست. به عبارت دیگر، فرایند هدایت عامده‌ای دوباره‌سازی

مفاهیم جبری همان مسیر پرپیچ و خم اولین نویسندگانی که این

راه نرفته را طی کرده‌اند، نیست. با این وجود، فرد ممکن است

انتظار داشته باشد، شباهت‌های برجسته‌ای بین نتایج انواع مختلف تجزیه و تحلیل ببیند. گارسیا^{۲۰} و پیازه (۱۹۸۹)، برای مقایسه‌ی تحولات تاریخی و روان‌شناسی، مورد ویژه‌ای را بررسی کردند. بهتر است احتیاط کنیم، اما نباید تجزیه و تحلیل منطقی را کنار بگذاریم، زیرا منطق می‌تواند یک منشأ بالقوه‌ی ایجاد بصیرت در مورد فرایند یادگیری ریاضی است. ریاضی یک ساختار سلسله‌مراتبی است که در آن، بعضی از لایه‌ها قبل از کامل شدن بقیه، ساخته نمی‌شوند. درنتیجه، بعد از این‌که براساس تجزیه و تحلیل‌های منطقی، هستی‌شناسی و تاریخی، ادعاهایی در رابطه با توسعه‌ی جبر ارائه کردیم، نشان خواهیم داد که این مراحل، در یادگیری فردی نیز وجود دارند.

۱.۲. جبر به عنوان حساب تعمیم‌یافته: جنبه‌ی عملیاتی

در تمام تجزیه و تحلیل، نوعی از جبر را «عملیاتی» و نوع دیگر را «ساختاری» می‌نامیم. این بدین معنا نیست که در گام‌های متفاوت، در توسعه‌ی جبر، فقط یکی از انواع جبر (عملیاتی یا ساختاری) حضور دارد. ماهیت مکمل فرایندها و اشیا نشان می‌دهد که حضور یکی بدون دیگری ممکن نیست. علاوه بر این، روشن است که اگر فرایندها (مؤلفه‌های عملیاتی) مورد توجه قرار گیرند، باید اشیای معینی (عوامل ساختاری) وجود داشته باشند که این فرایندها برای آن‌ها به کار روند. ادعاهای ما مبنی بر این که انواع معینی از جبر ویژگی عملیاتی دارند درحالی‌که انواع دیگر ساختاری هستند، نشان می‌دهد تمرکز اولیه بر کدام نوع جبر است. به عنوان مثال، این عبارت که «جبر در ابتدا ویژگی عملیاتی دارد» یعنی؛ پیشرفته‌ترین و اصلی‌ترین ایده‌هایی که در این مرحله مورد توجه قرار می‌گیرند، به طور عملیاتی درک می‌شوند نه ساختاری.

تاریخ جبر، بیش‌تر مؤید این فرضیه است که رویکرد عملیاتی مقدم بر رویکرد ساختاری است زیرا طی چند هزار سال، جبر چیزی بیش از علم رویه‌های محاسباتی نبود.

از نقطه نظر توسعه‌ای، جبر ادامه‌ی حساب است. مشابه حساب (حداقل در مراحل اولیه‌اش) با اعداد و با محاسبات عددی کار می‌کند، اما نوع سؤالاتی که می‌پرسد متفاوت است و الگوریتم‌ها را به شیوه‌ی عمومی‌تری مورد دست‌ورزی قرار می‌دهد. آن‌هایی که نمایش نمادین را به عنوان ویژگی لازم جبر

گروهی از صورت‌گرایان انگلیسی (ای. دمورگان، جی. پی‌کات و دی. اف. گریگوری) پیشنهاد کردند که جبر باید از بار تفسیر اولیه‌اش رها شود. از این به بعد، باید با یک فرمول جبری به خودی خود به عنوان یک شیء رفتار کرد. شبیهی که به شیوه‌های مختلف قابل تفسیر است اما خودش معنایی ندارد

نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند. درحقیقت، آن‌چه از نمادها درک می‌شود، وابسته به شرایط مسئله‌ای است که نمادها برای آن به کار رفته‌اند

نمی‌دانند، اتفاق نظر دارند که هم در تاریخ و هم در فرایند یادگیری ریاضی، تفکر جبری خیلی زودتر از معرفی هر نماد خاصی ظاهر می‌شود. به عنوان مثال، تفکر جبری با اولین تلاش برای پیدا کردن عدد مجهول شروع می‌شود. عدد مجهول عددی است که یک عملیات مشخص روی آن انجام شده و یک نتیجه‌ی معین به دست آمده است. در این نوع فعالیت، شیوه‌ی متداول حساب که به کار بردن یک الگوریتم محاسباتی برای یک عدد محسوس است، باید به طور معکوس انجام شود: به عنوان مثال، در یک

معادلات درجه‌ی دوم هستند (یا حداقل مسئله حل کن امروزی از چنین روشی استفاده می‌کند). در هر دو نمونه، به جای ضرایب عمومی، از اعداد محسوس استفاده می‌شود و راه حل به شکل توصیف کلامی برای پیدا کردن مجهول ارائه می‌گردد. بنابراین، رویکردی کاملاً عملیاتی است؛ تمرکز بر فرایندهای عددی است و هیچ اشاره‌ای به اشیاء مجرد غیر از اعداد نیست. از اولین دوران‌ها تا قرن شانزدهم، جبر لفظی^{۲۴} (آن‌چه مورخین برای اشاره به جبر کلامی به کار می‌برند) مورد استفاده

جدول ۱ جبر لفظی - مثال‌ها

۱. بابلی‌ها، دو (؟) هزار سال قبل از میلاد (برگرفته از بویر ^{۲۲} ، ۱۹۸۵، ص ۳۴)	
مسئله:	اگر مساحت منهای ضلع برابر ۱۴:۳۰ باشد، ضلع مربع را به دست آورید (اعداد در مبنای ۶۰ نمایش داده شده‌اند).
راه حل:	نصف یک را بگیرید که ۰:۳۰ است، سپس ۰:۳۰ را در ۰:۳۰ ضرب کنید که می‌شود ۰:۱۵. این را به ۱۴:۳۰ اضافه کنید تا ۱۴:۳۰:۱۵ را به دست آورید. این عدد مربع ۲۹:۳۰ است. حال ۰:۳۰ را به ۲۹:۳۰ اضافه کنید. نتیجه ۳۰ است که همان ضلع مربع است.
۲. خوارزمی، ۸۲۵ بعد از میلاد، (برگرفته از استروئیک ^{۲۳} ، ۱۹۸۶، ص ۵۸)	
مسئله:	مجذوری که اگر با ده برابر ریشه اش جمع شود عدد ۳۹ به دست آید، چند است؟
راه حل:	... نصف ۱۰ را بگیرید، ۵ به دست می‌آید که اگر در خودش ضرب شود ۲۵ می‌شود، مقداری که اگر به ۳۹ اضافه کنید، ۶۴ به دست می‌آید. ۸ ریشه‌ی دوم ۶۴ است. عدد ۵ را از ۸ کم کنید، ۳ باقی می‌ماند. بنابراین، عدد سه یک ریشه از این مجذور است. بنابراین، مجذور ۹ است.

مسئله، فرد باید قیمت تعداد معینی مداد و یک دفتر یادداشت را به دست آورد، در مسئله‌ای دیگر، فرد باید تعداد مدادها را با «معکوس انجام دادن»^{۲۱} آن‌چه برای محاسبه‌ی قیمت مدادها و دفتر انجام شده، به دست آورد. اگرچه این معکوس سازی در ابتدا کاملاً ساده و شهودی است، اما زمانی که مسائل کلامی نسبتاً دشوار ظاهر می‌شوند، این امر بدیهی نخواهد بود.

مراحل اولیه در توسعه‌ی جبر را مورد توجه قرار می‌دهیم. دو نمونه از جبر کهن و جبر قرون وسطایی را در نظر می‌گیریم (جدول ۱ را ببینید).

هرچند این نمونه‌ها از لحاظ زمانی سه هزار سال با هم فاصله دارند، اما ویژگی‌های اصلی آن‌ها یکسان است زیرا هر دو،

قرار می‌گرفت. این جبر، همان جبری است که دانش‌آموزان مدرسه‌ای امروز، قبل از این که هر نماد صوری به آن‌ها معرفی گردد، با آن مواجه می‌شوند. طبیعتاً آن‌چه دانش‌آموزان به طور لفظی حل می‌کنند، ساده‌تر است و عباراتی که آن‌ها برای راه حل هایشان به کار می‌برند، کاملاً متفاوت است، اما هنوز به طور اساسی نوع یکسانی از ریاضیات را نشان می‌دهند: کلامی یا عملیاتی.

در این جا باید تأکید شود که ویژگی عملیاتی جبر، جدا از کلامی بودن آن نیست. زمانی که ایده‌های جبری فقط با کلام بیان شده‌اند، به دشواری می‌توان رویکرد ساختاری پیشرفته‌تری را تصور کرد. در رویکرد ساختاری، فرایندهای محاسباتی به طور

کلی از دید بالاتری مورد ملاحظه قرار می گیرند، اما رویکردهای عملیاتی و ساختاری، بازنمایی های یکسانی دارند. به عبارت دیگر، کلمات، مانند نمادها قابل دست ورزی نیستند. قابل دست ورزی بودن است که این امکان را فراهم می کند تا مفاهیم جبری، کیفیت شی مانندی داشته باشند. امکان انجام فرایندهای سطح بالاتر در فرایندهایی که با عبارات فشرده نمایش داده شده اند، تفکر ساختاری را ترغیب می کند. بنابراین، به نظر می رسد، معرفی یک نمادگذاری برای شیء انگاری مفاهیم لازم باشد. اما این نمادگذاری برای انتقال به حالت ساختاری کافی نیست. همان طور که قبلاً در مثال اول ذکر شد، مفاهیم عملیاتی از طریق بازنمایی های نمادین هم

انتقال می یابند. اما، ابزارهای کلامی، تفکر عملیاتی را دائمی می سازند. شاید این مسئله، یکی از دلایلی باشد که حوزه جبری عملیاتی چند هزار سال طول کشید.

۲.۲. جبر به عنوان حساب تعمیم یافته: جنبه ی ساختاری

قبل از این که گام های بیش تری را در تاریخ جبر برداریم، لازم است بعضی مقدمات نظری را روشن سازیم.

اولاً، لازم است بر آخرین تذکر بخش قبل تأکید کنیم که تاریخ جبر، تاریخ نمادها نیست، هر چند از مرحله ای به بعد، مفاهیم جبری از نمادها جداناپذیر شدند. این درست مانند مفهوم ذهنی هنرمند از یک تصویر یا یک مجسمه است که از آن مجسمه یا تصویر، جداناپذیر است. در واقع، مفاهیم جبر جدید را به سختی می توان با هر وسیله ای غیر از نمادهای جبری انتقال داد. علاوه بر این، دانش جبری جدید از طریق دست ورزی و بررسی عبارات صوری ساخته شده است و بدین جهت، تغییرات در نمادگذاری به موازات تغییر شکل های مفهومی می باشد. اگرچه تاریخ جبر و تاریخ نمادها مجزا بودند، اما از لحظه ای که نمادگذاری جبری جدید معرفی شد، به طور ماهرانه ای درهم آمیختند، به طوری که از لحاظ عملی، بیان تاریخ یکی از آن ها بدون دیگری، غیرممکن است.

گریگوری می نویسد، جبر در حال تبدیل شدن به دانشی بود که «موضوع آن ترکیب عملیات است؛ در حالی که، این عملیات با ماهیت خودشان، یعنی آن چه هستند یا آن چه را که انجام می دهند، تعریف نشده اند، بلکه توسط قواعد ترکیبی که روی آن ها اعمال می شود تعریف شده اند»

موضوع مهم دیگری که در این جا مطرح است، ارتباط بین پیشرفت از جبر عملیاتی به ساختاری و دشواری هایی است که ایده های جبری برای فرد ایجاد می کنند. نکته ای که می خواهیم بگوییم این است که بالا رفتن از سلسله مراتب ایده های جبری، لزوماً معادل با پیچیدگی تفکر فرد نیست. حتی ممکن است فردی بگوید که انتقال از جبر عملیاتی به جبر ساختاری، اگرچه یک گام رو به جلو در افزایش درجه ی تجرید و تعمیم است، نه تنها بر دشواری نمی افزاید، بلکه تسهیل در عملکرد را نتیجه می دهد. هر چند رسیدن به شیء انگاری مفاهیم دشوار است، اما زمانی که رخ دهد، منافع آن فوراً آشکار می شود. تا حدود زیادی دشواری کاهش می یابد و قابلیت دست ورزی افزایش می یابد. ممکن است آن چه در چنین انتقالی رخ می دهد، با رویدادی مقایسه شود که در آن، فردی اشیای متفاوت زیادی را با دست حمل می کند. او تصمیم می گیرد همه ی آن ها را در یک کیف بگذارد و کیف را حمل کند. برای آن که کاملاً قادران اثر تسهیل کننده ی شیء انگاری مفاهیم باشیم (که از طریق یک نمادگذاری مناسب به دست آمده است) کافی است نگاهی اجمالی به نمونه ی جبر لفظی ارائه شده در جدول (۱) داشته باشیم. الگوریتم ها، زمانی که از طریق دست ورزی های صوری روی فرمول های کوتاه انجام می شوند، بسیار ساده و آشکار به نظر می رسند، اما زمانی که با بازنمایی کلامی و صرفاً عملیاتی به کار می روند، واقعاً دشوارند. بنابراین، ریاضی دانان قرون وسطی سزاوار بیش ترین قدر و اعتبار هستند زیرا اقدام به حل مسائل پیشرفته و پیچیده ای مانند معادلات درجه دو و سه می کردند، بدون آن که ابزارهای مبتکرانه ی جبر نمادین ساختاری را در اختیار داشته باشند (الگوریتم های پیچیده ای که در حالت لفظی به وسیله کاردان^{۲۶} در اثر معروفش^{۲۷} در سال ۱۵۴۵ ارائه شده است). تا آن جایی که توانایی و تکامل تفکر آن ها مورد توجه است، می توان آن ها را به بهترین ریاضی دانان امروزی که با پیشرفته ترین مسائل ریاضی مدرن سروکار دارند، مقایسه کرد. زمانی که بر جریان های یادگیری فردی و حل مسئله تمرکز داریم، باید همه ی این حقایق را در ذهن داشته باشیم.

۲.۲.۱. جبر مقدار ثابت^{۲۸} (از یک مجهول). همان طور که قبلاً گفته شد، نمادگذاری جبری در قدرتش برای مختصر کردن ایده های عملیاتی و تبدیل کردن آن ها به قطعه های فشرده^{۲۹} و در

توانایی بالقوه‌اش برای تسهیل درک و ایده‌ها و دست‌ورزی با آن‌ها بی‌نظیر است. اگر صرفه‌جویی نمادین زودتر معرفی شده بود، می‌توانست میزان توسعه‌ی جبر را تغییر دهد و به دانشمندان در محاسبات کمک کند. در مقایسه با هندسه، جایی که ابزارهای تفکر ساختاری به شکل بازنمایی‌های تصویری به سادگی در دسترس هستند، پیشرفت جبر بسیار کند و با شک و تردید بود. تا آخر قرن شانزدهم، جبر به درجه‌ای از دشواری رسید که بدون انتقال به حالت ساختاری، پیشرفت بیش‌تر آن ممکن نبود. مورخان ریاضی غالباً تعجب کرده‌اند که چرا متفکران گذشته که انگیزه‌ی قوی برای یک تغییر بنیادین در روش داشته‌اند، زودتر از این‌ها به ایده‌ی بازنمایی‌های غیرکلامی دست نیافتند.

اگرچه مفهوم علامت‌گذاری نمادین برای ما خیلی طبیعی است، اما از قرار معلوم، برای آن‌ها اصلاً آشکار نبوده است. در حقیقت، دشواری صرفاً مرتبط با ایده‌ی به‌کار بردن حروف به جای اعداد و علامت‌ها نیست (این مطلب، از زمانی به زمان دیگر در نوشته‌های قدیمی دیده شده است)، بلکه مرتبط با نیاز به فرمول‌های نمادین با دو معنی رویه‌های محاسباتی و اشیائی که تولید شده‌اند نیز می‌باشد. در حساب، به سادگی می‌توانیم این دو معنی را با استفاده از دو عبارت، مجزا سازیم: $2+3$ عملیات را نشان می‌دهد و ۵ نتیجه است. در جبر، چنین مجزاسازی در عبارتی مانند $a+b$ یا $1+(x+5)$ امکان‌پذیر نیست. در این‌جا، فرایند نمی‌تواند به‌طور واقعی شکل بگیرد؛ از عملیات هیچ مقدار دیگری به دست نمی‌آید. فرمول با جنبه‌ی عملیاتی برجسته (شامل علائم و نشانه‌هایی^{۳۰} برای عمل به شکل عملگر است)، باید به عنوان نتیجه‌ی فرایندی که نمایش می‌دهد نیز تفسیر شود. حتی معجزه‌ترین تفکر ما با استفاده از استعاره‌هایی شکل گرفته‌اند که توسط تجربه‌ی حسی ایجاد شده‌اند (لاکف^{۳۱} و جانسن^{۳۲}، ۱۹۸۰). این تجارب حسی، برخلاف ایده‌ی فرایند است که هیچ مقدار دیگری اضافه نمی‌کند و طوری عمل می‌کند مثل این که خودش نتیجه است. در واقع، هیچ چیزی مانند این در زندگی واقعی امکان‌پذیر نیست: ما نمی‌توانیم دستورپخت یک کیک را بخوریم و تظاهر کنیم که خود کیک است (اگرچه می‌توانیم کیک یا این که کیک را می‌خوریم را تصور کنیم)! بنابراین، حداقل در ابتدا شهود ما در مقابل دوگانگی عملیاتی-ساختاری نمادهای جبری مقاومت می‌کند. (انواع جدید اعداد همواره در طول تاریخ با عدم باورپذیری مواجه شده‌اند. در این‌جا

مثال دیگری از پدیده‌ای که احتمالاً به ناهماهنگی هستی‌شناسانه‌ی یکسانی نسبت داده می‌شود، می‌آوریم: اشیایی مانند $\sqrt{-1}$ ، ۲- یا $\sqrt{-1}$ از عملیات تقسیم، تفریق و به دست آوردن ریشه‌ی دوم به وجود آمدند، در حالی که به نظر نمی‌رسید این اعمال، هرگز چیزی تولید کنند.)

درست است یک بار موفق شدیم بر این مشکل (دوگانگی فرایند-شیء) غلبه کنیم، اما به سرعت آن را فراموش کردیم. برای آن‌هایی که در دست‌ورزی‌های جبری بسیار متبحرند (مثلاً معلمان)، این مسئله خیلی زود عادی می‌شود. در واقع، عادت و باورهای هستی‌شناسانه‌ی ما به سادگی چشمان را کور می‌کند. با این حال، ممکن است در

مدل‌های تفکر عملیاتی و ساختاری، تفاوت‌های ظریفی دارند و تمایز قائل شدن بین آن‌ها ساده نیست

کلاس‌های امروزی، شواهد بیش‌تری برای دشواری شی‌انگاری مفاهیم یافت شود، مشروط بر این که کسانی که به دانش‌آموزان گوش می‌دهند، به اندازه‌ی کافی بی‌تعصب باشند تا شکاف بین خودشان و یادگیرندگان کم تجربه را درک کنند. در بخش ۳.۲ و ۳.۳ (در شماره‌ی آینده‌ی مجله)، با استفاده از مثال‌هایی، این ادعا را مستند می‌سازیم.

حقایق تاریخی نشان می‌دهد که ایده‌ی دوگانگی عملیاتی-ساختاری برای نسل ریاضی‌دانان نیز دشوار بود. احتمالاً دیوفانتوس^{۳۳} (سال ۲۵۰ بعد از میلاد) اولین گام معنادار را در جهت یک رویکرد ساختاری برای رویه‌های محاسباتی برداشت. او با ادغام نظام‌مند حروف با کلمات، برای خودش نوع خاصی از جبر ابداع کرد که به عنوان «مختصرکننده‌ی واژه‌ها»^{۳۴} شناخته می‌شود. در هنگام حل مسئله‌های کلامی، دیوفانتوس عباراتی مانند $x-10$ و $x+10$ ساخت (البته با استفاده از حروف یونانی نوشت) و مانند اعداد واقعی، آن‌ها را مورد دست‌ورزی قرار داد (به عنوان مثال، او عبارت‌ها را ضرب کرد و x^2-100 را به دست آورد (فاول^{۳۵} و گری^{۳۶}، ۱۹۸۷، ص ۲۱۸) را ببینید). این حقیقت که سیزده قرن پس از دیوفانتوس، ریاضی‌دانان هنوز طولانی نویسی جبر لفظی را ترجیح می‌دادند، حاکی از دشواری ذاتی شیوه‌ی تفکر دیوفانتوس است. در عبارات جبری که دیوفانتوس به کاربرد، یک حرف به عنوان

یک مجهول با مقدار ثابت است. برای او عبارات حاصل، اعدادی هستند که از ترکیب مجهول با سایر اعداد به دست آمده‌اند. خواهیم گفت آن چه به وجود آورد، جبر مقدار ثابت بود که در مقابل جبر تابعی^{۳۷} قرار دارد. در جبر تابعی، حروف تغییرات را نشان می‌دهند نه مقادیر ثابت را. ایده‌ی حرف به عنوان متغیر (به عنوان نمادی که به جای آن هر عددی ممکن است قرار گیرد) امروزه برای ما بسیار روشن است، اما برای دیوفانتوس آشکار نبود. در ادامه، راه حل او را برای مسئله‌ای مانند «پیدا کردن دو عدد با داشتن جمع و ضرب آن‌ها» می‌آوریم. او اعداد محسوس را به عنوان مقادیر معین به کار می‌برد. ایده‌ی یک عبارت جبری به عنوان یک بازنمایی که نتیجه‌ی نهایی ایده‌ی به کار بردن فرمول‌ها به عنوان بازنمایی‌های موقت و دست‌ورزی‌ها روی مجهول است، کاملاً متفاوت و پذیرفتن آن دشوارتر است. این ایده - این توانایی که فرمول پارامتری بالا به صورت یک عدد در نظر گرفته شود و نه عبارتی که امکان انجام عملی با آن نیست - قطعاً نیاز به یک دیدگاه ساختاری تمام و کمال نسبت به عبارات جبری دارد.

جبر یک ساختار سلسله مراتبی است؛ آن چه در یک سطح به طور عملیاتی درک می‌شود، در سطح بالاتر باید به طور ساختاری درک شود. درک تفاسیر عبارات جبری و ارتباط‌های متقابل آن‌ها بسیار مهم است

۲.۲.۲. جبر تابعی (از یک متغیر). از قرن شانزدهم به بعد، عبارات جبری برای نشان دادن توابع به کار رفت نه مقادیر ثابت. کشفیات مهمی در گام‌های متعددی رخ داد که اولین آن‌ها، معرفی نمادهای خاص برای عملیات و روابط بود که با ایده‌ی یک حرف به عنوان یک پارامتر (یک مقدار معین) دنبال شد.

ریاضی‌دان فرانسوی فرنکوئیز ویت^{۳۸} (۱۶۰۳-۱۵۴۰) اولین کسی بود که مقادیر معین عددی را با نمادها

جایگزین کرد. این ابداع، منجر به تغییرات مفهومی دور از دسترس در جبر شد: اولاً، دوگانگی فرایند - نتیجه‌ی عبارت جبری، هم‌زمان با ایده‌ی به کار بردن حروف به عنوان اعداد نامعین، به ریاضی‌دانان تحمیل شد (عملیات روی حروف، مثلاً $1 + (x+5) \cdot 3$ ، نمی‌تواند در عمل انجام شوند، پس برای این که فرد پیش رود و روی عدد نهایی کاری انجام دهد، انتخابی ندارد

مگر این که فرمول را به عنوان نتیجه‌ی محاسبه در نظر بگیرد). ثانیاً، زمانی که فرمول‌های حرفی برای نمایش اشیای معین پذیرفته شدند، یک حساب نمادین جبری ابداع شد که شیوه‌های دست‌ورزی معادلات را مشخص می‌کرد و یک تغییر مؤثر در مقایسه با جبر عملیاتی بود، جایی که مسائل عمدتاً با معکوس کردن فرایندهای محاسباتی حل می‌شوند. ثالثاً، بعد از این که اختراع جدید (عمدتاً توسط دکارت و فرما) به هندسه انتقال یافت تا به عنوان نوع دیگری از بازنمایی‌های تصویری استاندارد به کار رود و سپس در علوم، برای نمایش پدیده‌های طبیعی، مورد استفاده قرار گیرند (توسط گالیله، نیوتن و لایب‌نیتز)، جبر نهایتاً از یک علم مقادیر ثابت به علم اندازه‌های متغیر تبدیل شد. از این زمان به بعد، تلاش برای اصول منطقی جبر آغاز شد. معنای عبارات جبری و اجزای نمادین آن‌ها به گونه‌ای بود که به دست آوردن تعریف ریاضی برایشان دشوار بود. نام‌هایی مانند «عدد تعمیم یافته» یا «عدد متغیر» به زودی به خاطر عدم دقت مردود شدند (فرگه، ۱۹۷۰ را ببینید). سرانجام، مسئله با رها کردن تعریف ایده‌ی متغیر و ارائه‌ی تفسیری کلی برای یک فرمول جبری، حل شد. تابع به عنوان نوع جدیدی از شیء ریاضی مجرد، ابداع شد تا به صورت مصداقی برای عباراتی مانند $1 + (x+5) \cdot 3$ یا $x^2 + 2y + 5$ به کار رود.

ماهیت دشوار مفهوم جدید که با جزئیات، مورد ملاحظه و تجزیه و تحلیل مورخان و روان‌شناسان قرار گرفت (به عنوان مثال، کلیئر^{۳۹}، ۱۹۸۹؛ دویینسکی و هرل، ۱۹۹۲ را ببینید)، موضوع جداگانه‌ای است و در این مقاله، به آن نمی‌پردازیم (مقاله‌ی دیگری منحصراً به این موضوع اختصاص داده شده است). با این وجود، درک دشواری‌های ذاتی مفهوم تابع برای آن‌هایی که می‌خواهند بینش عمیقی سبب به فرایند یادگیری داشته باشند، لازم است.

۳.۲. جبر مجرد: جبر عملیات صوری و جبر ساختارهای مجرد

در نقاط اتصال رشد دانش ریاضی، جایی که برخی فرایندهای جدید معرفی می‌شوند، اشیای مجرد مانند انواع مختلف اعداد و توابع پدید می‌آیند. این فرایندهای جدید باید برای فرایندهای معین دیگری به کار روند که از قبل شناخته شده هستند. یک شیء مجرد بین دو تای دیگر واسطه می‌شود، ممکن است به

عنوان نتیجه‌ای از فرایند سطح پایین‌تر در نظر گرفته شود که برای دست‌ورزی‌های سطح بالاتر به کار می‌رود. بنابراین، در ارتباط با یک شیء مفروض، فرایندهای سطح پایین‌تر و بالاتر را به ترتیب اولیه^{۴۰} و ثانویه^{۴۱} می‌نامیم. به عنوان مثال، ایده‌ی اعداد گویا، ریشه در تقسیم اعداد صحیح بر اعداد صحیح دارد (فرایند اولیه)، اما موجودی مانند $\frac{3}{4}$ به خودی خود یک عدد را شکل می‌دهد که مورد دست‌ورزی قرار می‌گیرد و با سایر اعداد ترکیب می‌شود (فرایندهای ثانویه). در جبر، فرایندهای اولیه عملیات حسابی روی

اعدادند و فرایندهای ثانویه آن‌هایی هستند که ورودی آن‌ها، عملیات حسابی است. فرایندهای ثانویه در دست‌ورزی روی فرمول‌های جبری به کار می‌روند. پس ایده‌ی تابع، یک پیوند مفهومی را بین محاسبات عددی و دست‌ورزی‌های جبری نمادین شکل می‌دهد. این ایده، به عنوان اتصالی است که از طریق آن، دانش جبری جدید به نظام مفاهیم حسابی مرتبط می‌شود. بعد از این که جبر ویت تبدیل به ابزار مهمی برای انجام دادن ریاضی شد، مرحله‌ی بعدی، بالا رفتن به نقطه‌ی بالاتری است که از آن‌جا بتوان عملیات ثانویه‌ای را که روی توابع اجرا می‌شوند و بر دست‌ورزی‌ها روی فرمول‌ها دلالت می‌کنند، مورد مطالعه قرار داد (یک فرایند که در یک سطح فرایند ثانویه است، در سطح بالاتر، فرایند اولیه می‌شود).

این مرحله از رشد جبر در دهه‌ی سوم قرن نوزدهم در انگلیس شروع شد. در ادامه، داستانی را مطرح می‌کنیم که به دلایلی ارزش گفتن دارد. این دلایل زمانی روشن خواهد شد که دیدگاه‌های امروزی دانش‌آموزان در مورد فرمول‌ها و معادلات نمادین، مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد (بخش ۳.۳).

تا قرن نوزدهم، جبر به عنوان «حساب کلی»^{۴۲} در نظر گرفته می‌شد، موضوعی که مختص بیان قواعد حاکم بر رویه‌های حساب به یک شیوه‌ی عمومی بود. این تفسیر تا حد زیادی هدف و کارایی عملیات در فرمول‌های جبری را محدود می‌کند (به عنوان مثال، محدودیت $a > b$ یک مکمل لازم برای عبارت $\sqrt{a-b}$ است). حالا زمانی که تمرکز بر دست‌ورزی‌های صوری تغییر کرده است، ریاضی‌دانان اصرار بر تنظیم جبر، جدا از هر محدودیتی دارند. گروهی از صورت‌گرایان انگلیسی (ای).

اگر فرایند یادگیری را مورد مشاهده قرار دهیم، لحظات مهم و ارزشمندی ناپیوستگی‌ها هستند. آن‌ها جهش‌هایی‌اند که در فرایند یادگیری رخ می‌دهند

دمورگان، جی. پی‌کات^{۴۳} و دی. اف. گریگوری (پیشنهاد کردند که جبر باید از بار تفسیر اولیه‌اش رها شود. از این به بعد، باید با یک فرمول جبری به خودی خود به عنوان یک شیء رفتار کرد. شیئی که به شیوه‌های مختلف قابل تفسیر است اما برای خودش معنایی ندارد. در واقع، عبارت جبری تبدیل به یک وسیله‌ی نقلیه‌ی تهی شد که منتظر است یک بار معنایی را حمل کند. مکتب صورت‌گرایی به اندازه‌ای که به قواعد حاکم بر حرکت وسیله‌ی نقلیه علاقه داشت به «بار»^{۴۴} بالقوه‌اند وسیله علاقه نداشت.

همان‌طور که گریگوری می‌نویسد، جبر در حال تبدیل شدن به دانشی بود که «موضوع آن ترکیب عملیات است؛ در حالی که، این عملیات با ماهیت خودشان، یعنی آن‌چه هستند یا آن‌چه را که انجام می‌دهند، تعریف نشده‌اند، بلکه توسط قواعد ترکیبی که روی آن‌ها اعمال می‌شود تعریف شده‌اند» (گریگوری، ۱۸۴۰؛ نقل قول شده توسط نوی، ۱۹۷۳، ص ۱۹۴). در این جا، کلمه‌ی عملیات برای نشان دادن فرایندهای اولیه به کار رفته است در حالی که ترکیب‌ها به وضوح، فرایندهای ثانویه هستند. بدین دلیل، صورت‌گرایان انگلیسی، مرحله‌ی عملیاتی سطح بالاتری را در جبر آغاز کردند. این اولین گام در رشد جبر مجرد بود.

اگرچه داستان جبر در این جا پایان نمی‌یابد، اما جایی است که توضیحات تاریخی ما متوقف می‌شود. علم اشیای مجرد مانند گروه‌ها، حلقه‌ها، میدان‌ها یا ایده‌آل‌ها که در ابتدا در قرن نوزدهم توسعه یافت، به موضوع ما ارتباطی ندارد، همان‌طور که در سطح دبیرستان نیز تدریس نمی‌شوند. فقط برای کامل کردن این تصویر یادآور می‌شویم که با ظهور نظریه‌ی گروه‌ها، یک جنبه‌ی ساختاری آغاز می‌شود که جانشینی طبیعی برای جبر عملیاتی سطح بالاتر صورت‌گرایان انگلیسی است.

مراحل گوناگون در توسعه‌ی جبر در جدول (۲) خلاصه شده است و ادعای اولیه‌ی ما را تقویت می‌کند: جبر یک ساختار سلسله‌مراتبی است؛ آن‌چه در یک سطح به طور عملیاتی درک می‌شود، در سطح بالاتر باید به طور ساختاری درک شود. درک تفاسیر عبارات جبری و ارتباط‌های متقابل آن‌ها بسیار مهم است. در بحث‌های بعدی، یادگیری جبر توسط دانش‌آموزان مدرسه‌ای

مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت .

(ادامه ی مطلب در شماره های آینده...)

جدول ۲ مراحل توسعه ی جبر

نوع	مرحله	تمرکز جدید	بازنمایی	نکات برجسته ی تاریخی
۱. حساب تعمیم یافته	۱.۱. عملیاتی	۱.۱.۱. محاسبات عددی	کلامی (لفظی)	پاپیروس رابند سال ۱۶۵۰ قبل از میلاد
			ادغام کلامی - نمادین (مختصرکننده ی واژه ها)	دیوفانتوس سال ۲۵۰ بعد از میلاد
	۲.۱. ساختاری	۱.۲.۱. (عددی) نتیجه ی محاسبات (جبر مقدار ثابت)	نمادین (حرف به عنوان یک مجهول)	قرن شانزدهم از همه مهم تر ویت (۱۵۴۰ - ۱۶۰۳)
		۲.۲.۱. (عددی) تابع (جبر تابعی)	نمادین (حرف به عنوان متغیر)	ویت، لایب نیتز (۱۶۴۶ - ۱۷۱۶) نیوتن (۱۶۴۲ - ۱۷۲۷)
۲. جبر مجرد	۱.۲. عملیاتی	فرایندها روی نمادها (ترکیب عملیات)	نمادین (حرف بدون هیچ معنایی)	مکتب صورت گرایی انگلیسی (دمورگان، پی کاک، گریگوری) از سال ۱۸۳۰
	۲.۲. ساختاری	ساختارهای مجرد	نمادین	قرن ۱۹ و ۲۰: نظریه ی گروه ها، حلقه ها، میدان ها و غیره و جبر خطی

توضیحات تکمیلی برای خواننده ی این مقاله :

۱. متن حاضر ترجمه ی دو بخش اول مقاله است ، دو بخش انتهایی در شماره های بعدی خواهد آمد .
۲. مترجمان به متن اصلی پای بند بوده اند ولی مقاله ، مقاله ی «سختی» است بنابراین احتمالاً باید بیشتر از یک بار خوانده شود .
۳. این مقاله به دلیل ارتباط با مقالات دیگری که در مورد جبر نوشته شده ، ترجمه شده است . به خصوص توصیه می شود این مقاله در کنار «a چه ساکت است» خوانده شود چرا که این دو مقاله به دو جنبه ی کاملاً متفاوت «سکوت نمادها» اشاره دارند .

پی نوشت

1. Versatility
2. Adaptability
3. Process-Oriented

4. Schoenfeld
5. Microgenetic
6. Harel
7. Kaput
8. Breidenbach
9. Kieran
10. Dubinsky
11. Reflective Abstraction
12. Beth
13. Greeno
14. Conceptual Entity
15. Douady
16. Niels Bohr
17. Self-sustained
18. Logical
19. Crowe
20. Garcia
21. Undo
22. Boyer
23. Struik
24. Rhetoric Algebra
25. Cardm
26. Ars Magna
27. Algebra of a Fixed Value
28. Compact Chunks
29. Prompts
30. Lakeoff
31. Johnson
32. Diophantus
33. Syncopaed
34. Fauvel
35. Grey
36. Functional Algebra
37. Francois Viete
38. Kleiner
39. Primary
40. Secondary
41. Universal Arithmetic
42. Peacock
43. Cargo
44. Novy

* منابع و مراجع این مقاله را در شماره ی آینده خواهید دید .

بازنگری یک تجربه ضرورت تلفیق در برنامه‌ی درسی

سپیده چمن‌آرا

کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی منطقه ۲ تهران

مقاله‌ی ارائه شده در دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، یزد، مرداد ۱۳۸۷

چکیده

در مقاله‌ی حاضر، ضمن مروری بر رویکرد تلفیقی در برنامه‌ی درسی، یک تجربه‌ی عملی در تدریس مبحث معادله‌ی خط راست و مفهوم شیب و عرض از مبدأ خط در پایه‌ی سوم راهنمایی ارائه می‌شود.

کلید واژه‌ها: برنامه‌ی درسی تلفیقی، برنامه‌ی درسی بین‌رشته‌ای، تدریس ریاضی، تدریس مبحث معادله‌ی خط راست، ریاضی سوم راهنمایی.

مقدمه

همواره یکی از اهداف آموزش و پرورش، تربیت افرادی برای احراز شغل‌های آینده بوده است. در سال‌های خیلی دور - آن زمان که «آموزش» در «مدرسه»، اولین سال‌های تولد خود را می‌گذراند، شاید تنها هدف از آن، همین تربیت برگزیدگان برای مناصب و مشاغل خاصی بود که در جوامع آن زمان تعریف شده بودند. به مرور که آموزش رسمی عمومی تر شد و طیف وسیع‌تری

از افراد جامعه را تحت پوشش خود قرار داد، اهداف عمومی‌تری نیز به این اهداف خاص اضافه شدند و امروزه که در بسیاری از کشورها، آموزش رسمی، اجباری است و جزو وظایف دولت‌ها محسوب می‌شود و با توجه به شرایط و ویژگی‌های قرن حاضر - که حدود یک دهه از آن را پشت سر گذاشته‌ایم - علاوه بر تربیت افرادی برای مهارت‌ها و شغل‌های آینده، تربیت شهروندانی توانمند برای زندگی در قرن بیست و یکم و مواجه شدن با مسائل و مشکلات مختص آن نیز هدف مهم‌تری برای آموزش و پرورش است.

سازمان‌های بین‌المللی، برای انسان قرن بیست و یکم، ویژگی‌هایی را تعریف و مشخص کرده‌اند که بسیار پیچیده‌تر از ویژگی‌های لازم برای زندگی در ۳۰۰ سال پیش است - زمانی که «مدرسه» تازه در جامعه موجودیت می‌یافت. این امر، رسالت ما معلمان را بسیار سنگین‌تر از حتی قرن پیش از این می‌کند. معلمان این نسل باید توجه کنند که دانش‌آموزان امروز آن‌ها، نسبت به دانش‌آموزان بیست - سی سال پیش، برای زندگی آینده‌ی خود در جامعه، با مسائل

برنامه‌ی درسی بین‌رشته‌ای، برنامه‌ای است که چند موضوع مدرسه‌ای را باهم ترکیب می‌کند و یک پروژه‌ی فعال از آن‌ها می‌سازد و در نتیجه‌ی آن، چگونگی برخورد کودکان با موضوعات دنیای واقعی شکل می‌گیرد

موضوعات مختلف با یکدیگر، و ارتباط عناصر زندگی خارج از مدرسه، فی‌نفسه متقاضی درک و فهم وسیع‌تر و عمیق‌تر است. به علاوه اتحاد طبیعی میان کسانی که برای تدریس برای درک و فهم تلاش‌های ویژه‌ای می‌کنند با کسانی که برای آموزش تلفیقی در حال تلاش هستند، وجود دارد» [۳].

با توجه به همه‌ی این شواهد، و با توجه به این که در حال حاضر در بعضی از کشورها مانند آمریکا و کانادا، برنامه‌های درسی تلفیقی و بین‌رشته‌ای در حال تدوین و اجرا است، ضروری است ما معلمان ایرانی نیز با این مقوله آشنا شویم و سعی کنیم آن را در روش‌های تدریس خود وارد کنیم.

چیستی تلفیق

«پشتیبانی حرکت از رویکردی که موضوعات را جدا از هم می‌بیند به سمت یک برنامه‌ی درسی کل‌نگرانه، سنتی طولانی دارد. اوایل سال ۱۸۹۹ میلادی، بخش شیکاگو در انجمن ریاضی آمریکا^۳ از برنامه‌ی «همبستگی کاری»^۴ بین موضوعات حساب و هندسه و جبر، حمایت کرد. در دهه‌ی ۱۹۲۰ میلادی، با نام‌های مختلف دروس ترکیبی، دروس عمومی، یا دروس یک‌پارچه، حرکت به سوی ریاضی تلفیقی با طراحی سال‌های اولیه‌ی دبیرستان، شدت گرفت. در اثر اصلاحات در دوره‌ی راهنمایی در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰، مناسب بودن ریاضی تلفیقی برای یادگیرندگان نوجوان، پیشرفت بیش‌تری کرد. رویکرد تلفیقی به ریاضی به دو مؤلفه در فلسفه‌ی آموزش دوره‌ی راهنمایی وابسته است: تدریس بین‌رشته‌ای و یادگیری مشارکتی» [۴].

زمانی که به تعریف برنامه‌ی درسی تلفیقی می‌پردازیم، لازم است به واژگان وابسته به آن، مانند تدریس بین‌رشته‌ای؛ تدریس موضوعی؛ آموزش از طریق همیاری؛... نیز توجه کنیم. هم‌چنین آگاهی از تعاریف افراد مختلف از برنامه‌ی درسی تلفیقی، به ما کمک می‌کند از زاویه‌های مختلف به این موضوع بنگریم و جنبه‌های مختلف آن را دریابیم. همفزی، پُست و الیس، تعریف اساسی زیر را پیشنهاد

پیچیده‌تری مواجه خواهند شد و لذا نقش خویش در تربیت و آماده‌سازی این نسل را هرگز نباید از خاطر ببرند.

از سوی دیگر نظریه‌های جدید یاددهی - یادگیری (به ویژه نظریه‌ی ساخت و سازگرایی) که متناسب با نیازهای دانش‌آموزان و جامعه، روش‌های جدیدی برای یاددهی و یادگیری پیشنهاد می‌کنند و روش‌های سنتی تدریس را در رسیدن به اهداف آموزشی این دوره، ناکارآمد و ناقص می‌دانند، ضمن تکبیه بر تجربه‌های شخصی و عملی دانش‌آموزان،

یکی از جنبه‌های مهم یادگیری عمیق و معنادار را ایجاد ارتباط میان مفاهیم مختلف - اعم از یک حوزه یا از حوزه‌های مختلف - می‌دانند. این رویکرد درست در نقطه‌ی مقابل سنت‌های علمی - آموزشی قرون گذشته است که با شتاب به سوی شاخه‌شاخه شدن علوم و تخصصی شدن رشته‌های درسی حرکت می‌کرد. امروزه علوم بین‌رشته‌ای، در تحقیقات و آموزش‌های دوره‌های عالی، حرف اول را می‌زنند. لذا این تلفیق و نزدیک شدن مجدد علوم مختلف به هم باید به دوره‌های آموزشی پایین‌تر - از دوره‌ی پیش‌دبستان تا دیپلم - نیز وارد شود.

علاوه بر این، به نظر می‌رسد با پیشرفت روزافزون علوم مختلف و وارد شدن آن‌ها به آموزش مدرسه‌ای، برنامه‌ی درسی روز به روز سنگین‌تر می‌شود و این امر، ضرورت حرکت به سوی یک برنامه‌ی درسی تلفیقی را به منظور کاهش فشار از دوش معلمان و مجریان این برنامه، دوجندان می‌کند [نقل به مضمون از لیک (Kathy Lake)، ۱۹۹۴، ص ۵]

لیک (۱۹۹۴) به نقل از بنجامین (Benjamin, 1989) دلایل ضرورت برنامه‌ی درسی تلفیقی و بین‌رشته‌ای را چنین برمی‌شمارد: «گرایش به وابستگی^۱ و درهم‌تنیدگی^۲ سراسری در سیستم‌های پیچیده، رشد آهنگین قرن بیست و یکم و پیچیدگی‌های آن، بدنه‌ی در حال توسعه‌ی دانش و نیاز به افراد شاغلی که در بسیاری از حوزه‌ها توانمند بوده و توانایی حل مسئله‌هایی را داشته باشند که شامل عوامل متعدد مرتبط باشد.» وی از پرکینز (Perkins, 1991) نیز نقل می‌کند که «تمایل به مرتبط ساختن اشیا باهم، تلفیق ایده‌های مرتبط با یک موضوع یا

می کنند:

«مطالعه‌ی تلفیقی، مطالعه‌ای است که در آن دانش آموزان به طور وسیعی دانش را در موضوعات مختلف مرتبط با جنبه‌هایی خاص از محیط اطراف خود، کشف می‌کنند» (همفری، پُست و الیس، ۱۹۸۱، نقل شده در لیک [۳].)

شومیکر (۱۹۸۹) برنامه‌ی درسی تلفیقی را چنین تعریف می‌کند:

«آموزش تلفیقی، آموزشی است که به گونه‌ای سازمان‌دهی شده است که خطوط

موضوع-محور را قطع کرده، به منظور تمرکز بر روی حوزه‌های وسیع مطالعه، جنبه‌های مختلف برنامه‌ی درسی را در یک وابستگی معنادار، کنار هم قرار می‌دهد» (شومیکر، ۱۹۸۹؛ نقل شده در لیک [۳].)

درس در تعریف خود، از مرتبط کردن موضوعات مختلف برای تولید مدل‌های جدیدی از درک و فهم دنیا، فراتر می‌رود. وی معتقد است:

«در برنامه‌ی درسی تلفیقی، تجربه‌های یادگیری طراحی شده نه تنها (با یادگیری مدل‌ها و سیستم‌ها و ساختارهای فرهنگی) به یادگیرندگان یک نگاه یک پارچه به دانش می‌دهد، بلکه توانایی یادگیرنده برای دریافت ارتباط‌های جدید و در نتیجه خلق مدل‌ها و سیستم‌ها و ساختارهای جدید را توسعه می‌دهد» (درس، ۱۹۵۸؛ نقل شده در لیک [۳].)

اورت نیز معتقد است:

«برنامه‌ی درسی بین‌رشته‌ای، برنامه‌ای است که چند موضوع مدرسه‌ای را باهم ترکیب می‌کند و یک پروژه‌ی فعال از آن‌ها می‌سازد و در نتیجه‌ی آن، چگونگی برخورد کودکان با موضوعات دنیای واقعی شکل می‌گیرد» (اورت، نقل شده در لیک [۳].) لیک یادآوری می‌کند که همه‌ی تعاریف ارائه شده برای برنامه‌ی درسی تلفیقی یا بین‌رشته‌ای، شامل موارد زیر است:

● ترکیبی از موضوعات؛

● تأکید بر پروژه‌ها؛

● منابعی فراتر از کتاب‌های درسی؛

● ارتباط میان مفاهیم مختلف؛

مطالعه‌ی تلفیقی، مطالعه‌ای است که در آن دانش آموزان به طور وسیعی دانش را در موضوعات مختلف مرتبط با جنبه‌هایی خاص از محیط اطراف خود، کشف می‌کنند

- واحدهای موضوعی به عنوان اصول سازمان‌دهنده؛
- برنامه‌های انعطاف پذیر؛
- گروه‌بندی انعطاف پذیر دانش آموزان [۳].



یک تجربه: تدریس مبحث معادله‌ی خط راست و مفهوم شیب خط

دانش آموزان ایرانی با معادله‌ی خط راست نخستین بار در نیم سال دوم پایه‌ی سوم راهنمایی آشنا می‌شوند. این موضوع در صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۲۰ کتاب ریاضی سوم راهنمایی آمده است. در راهنمای معلم این کتاب، موضوعات این بخش در یک نگاه چنین ذکر شده است:

«درس معادله‌ی خط مهم‌ترین درس در کلاس سوم راهنمایی است. دانش آموزان با این درس برای اولین بار مواجه می‌شوند؛

گرایش به وابستگی و درهم تنیدگی سراسری در سیستم‌های پیچیده، رشد آهنگین قرن بیست و یکم و پیچیدگی‌های آن، بدنه‌ی در حال توسعه‌ی دانش و نیاز به افراد شاغلی که در بسیاری از حوزه‌ها توانمند باشند، از جمله دلایل ضرورت برنامه‌ی درسی تلفیقی و بین‌رشته‌ای است

داده شده و با استفاده از جدول نقطه‌یابی، نمودار آن رسم شده است. بسیار طبیعی است که با این شیوه‌ی تدریس، اغلب دانش‌آموزان نتوانند بین این دو نوع معادله‌ی خط (مبدأ گذر و غیر مبدأ گذر) ارتباط معنادار برقرار سازند و اساساً مفهوم معادله‌ی خط را به درستی و عمیق درک نمی‌کنند!

مفهوم شیب خط نیز با همین نگرش معرفی شده است: «به طور کلی اگر معادله‌ی خطی به صورت $y = ax + b$ نوشته شود، ضریب x (یعنی a) شیب خط نامیده می‌شود» [۲]، ص ۱۱۳.

بالاخره شیوه‌ی معرفی «صورت دیگر معادله‌ی خط راست» و باز هم فقدان ارتباط میان مطلب جدید با آنچه از معادله‌ی خط راست در حالت‌های مختلف پیش از آن گفته شده، مشکلات موجود در این بخش را تکمیل می‌کند! به اعتقاد من، مسیر معرفی معادله‌ی خط راست در کتاب درسی، درست عکس مسیری است که با یک نگاه ساخت و سازگرایانه به آموزش این موضوع می‌توان طی کرد. در واقع دانش‌آموزان باید ابتدا با مفاهیم کلی، یعنی مفهوم معادله‌ی چند نقطه که بین مختصه‌ی اول و دوم تک تک آن‌ها، یک رابطه‌ی مشترک وجود دارد، آشنا شوند. سپس حالت خاص آن، یعنی معادله‌ی خط راست و ویژگی‌های آن و شکل‌های مختلف آن را بشناسند و بین این بازنمایی‌های جبری با تصویر هندسی خط، ارتباط معنادار برقرار سازند. بالاخره با مفهوم شیب به صورت عینی و فیزیکی آشنا شوند و از طریق محاسبات ساده‌ی جبری، نقش آن را در معادله‌ای که به صورت $y = ax + b$ است، بیابند. برای دستیابی به این رویکرد در تدریس این مبحث، علاوه بر جابه‌جایی در ترتیب مطالب و ادغام برخی از آن‌ها برای رسیدن به دید کلی نسبت به موضوع، به اعمال زیر نیز مبادرت کردم:

- برای آغاز مبحث، یک فعالیت کتبی گروهی طراحی کردم (پیوست ۱). ایده‌ی اصلی آن را از فعالیت ابتدای مبحث در کتاب گرفتم لیکن آن را توسعه دادم و با تغییر پرسش‌ها و دقت در کلمات به کار رفته در آن‌ها، سعی کردم مفهوم معادله‌ی چند نقطه

بنابراین تمرکز و تأکید بر آن ضروری به نظر می‌رسد. در ابتدا با بیان رابطه‌ی بین طول و عرض نقاط معادله‌ی خط‌های مبدأ گذر معرفی و چگونگی رسم آن‌ها آموزش داده می‌شود. پس با بیان خط‌های غیر مبدأ گذر، شیب و عرض از مبدأ آموزش داده می‌شود. در پایان با طرح شکل کلی معادله‌ی خط، خط‌های موازی با محورهای آموزش داده می‌شوند» [۱] ص ۱۹۹.

با توجه به پاراگراف اخیر و با بررسی کتاب درسی، متوجه می‌شویم که نگاه مؤلفان به این موضوع، جزءنگرانه بوده است:

ابتدا در یک فعالیت و کار در کلاس پس از آن، دانش‌آموزان با حالت خاصی از

مجموعه نقاطی که روی یک خط راست قرار دارند، آشنا می‌شوند که در همه‌ی آن‌ها، مختصه‌ی دوم مضربی از مختصه‌ی اول است و این رابطه‌های مضربی را به عنوان معادله‌ی خط راست می‌شناسند. پس از آن، رسم خطی که معادله‌ی آن داده شده است با مثال‌های خاص (به قول کتاب؛ فقط خطوط مبدأ گذر) آموزش داده می‌شود و سپس با نمودار مجموعه‌ای از نقاط صفحه آشنا می‌شوند. ولی در این قسمت، با مجموعه نقاط گسسته و متناهی در صفحه مواجه می‌شوند. هیچ فعالیت یا تمرینی این دو موضوع را به هم مرتبط نمی‌کند و هیچ‌جا به تفاوت بین یک خط راست که از بی‌نهایت نقطه تشکیل شده است و مثال‌های متناهی ارائه شده، اشاره نمی‌شود؛ حتی هیچ پرسشی مبتنی بر این که آیا نقاط هر مجموعه روی یک خط راست قرار دارند یا نه و اگر چنین است، سایر نقاط آن خط کجا هستند و چه رابطه‌ای بین x و y آن نقاط وجود دارد، نمی‌شود.

مطلب بعدی، خط‌های غیر مبدأ گذر است که بدون هیچ فعالیت آموزشی و تنها با دو مثال معرفی می‌شود که در مثال نخست، تعدادی نقطه روی یک خط راست مشخص شده و از دانش‌آموز خواسته شده رابطه‌ی بین مختصات آن‌ها را بیابد و بلافاصله بیان شده: «معادله‌ی خط ۱ عبارت است از $y = x + ۱$ » [۲]، ص ۱۱۱. در مثال دوم، معادله‌ی $y = ۲x + ۴$

در حال حاضر در بعضی از کشورها مانند آمریکا و کانادا، برنامه‌های درسی تلفیقی و بین‌رشته‌ای در حال تدوین و اجرا است

(با شیب منفی) است. هم‌چنین در طراحی آزمایش‌هایی برای مشاهده‌ی پدیده‌های خطی با شیب‌های مختلف (در واقع به زبان دقیق‌تر؛ بانرخ تغییر متفاوت) از وی کمک گرفتیم.

- برای ادامه‌ی تدریس، دانش‌آموزان در یک فعالیت گروهی عملی و با استفاده از ترمومتر دیجیتالی، در جدول مناسبی (شکل ۲) دمای آب و زمان را برای آبی که با یک گرم‌کن (Heater) گرم می‌شد، ثبت کرده (شکل ۱) و آن‌ها را به عنوان نقاط روی یک صفحه‌ی مختصات رسم کردند و خط برازش آن‌ها را ترسیم کردند (شکل ۳).

بحث خطا در آزمایش و انواع آن به‌طور کلی و خطاهای محتمل در آزمایشی که انجام شد؛ هم‌چنین تکرار آزمایش برای گروه‌هایی که داده‌های پرنمایی داشتند نیز صورت گرفت. بعضی از گروه‌ها که داده‌هایشان را به‌دقت جمع‌آوری کرده بودند، کاملاً یک خط راست درآوردند. - با استفاده از این تجربه‌ی عملی و از روی نمودار گروه‌های مختلف، مفهوم شیب به عنوان نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان در این آزمایش و سپس در حالت کلی برای دو متغیر، معرفی شد و دانش‌آموزان هر گروه، شیب خط نشان‌دهنده‌ی آزمایش گروه خود را به‌دست آوردند.

- برای تعمیق بیش‌تر مفهوم شیب، دو آزمایش دیگر نیز انجام شد: گرم کردن آب با دو گرم‌کن؛ گرم کردن الکل (یا محلول آب و الکل) با یک گرم‌کن. مقایسه‌ی داده‌های حاصل از این آزمایش‌ها و شکل خط‌ها و شیب آن‌ها با هم، موضوع را برای دانش‌آموزان به زیبایی روشن می‌کرد.

- پس از این که دانش‌آموزان با مفهوم شیب و نقش آن در نمودار خط راست آشنا شدند، نقش مقدار شیب در معادله‌ی خط به آن‌ها معرفی شد (ضریب x در معادله‌ی $y = ax + b$) و حتی در کلاس‌هایی که دانش‌آموزان آن از توان ذهنی بیش‌تری برخوردار بودند، با استفاده از مفهوم شیب، مقدار آن از معادله‌ی $y = ax + b$ (که همان a بود) به‌دست آمد. سپس دو جلسه به تمرین کتبی و حل مسئله برای تسلط بیش‌تر بر موضوع و آشنایی

را به عنوان یک رابطه‌ی مشترک موجود بین مختصه‌ی اول و دوم این نقطه‌ها معرفی کنم و ضمناً با توسعه‌ی مثال‌ها، دانش‌آموزان را با انواع خط (اعم از مبدأ گذر یا غیر مبدأ گذر؛ به جز خطوط موازی محورها) در صفحه‌ی مختصات مواجه سازم. اغلب گروه‌ها در انتهای پرسش ۶ در این فعالیت، این تصور نادرست را دارند که وجود هر نوع

رابطه‌ی جبری بین x و y مجموعه‌ای از نقاط، متضمن این است که آن نقاط روی یک خط راست باشند. از این‌رو در پرسش ۷ در انتهای فعالیت، با ارائه‌ی مثالی از نقاط روی سهمی $y = x^2$ (بدون ذکر نام سهمی)، موقعیتی ایجاد کردم که تجربه‌ای داشته باشند که متوجه این بدفهمی یا تعمیم نادرست خود بشوند و نهایتاً در جمع‌بندی کلاسی، به این نتیجه برسیم که معادله‌ی خط راست باید دارای ویژگی‌هایی باشد. پس از رسیدن به این مرحله، ویژگی‌های معادله‌ی خط راست را به آن‌ها معرفی کردم و فرم کلی آن را که به صورت یک معادله‌ی دومجهولی درجه یک است (دانش‌آموزان را با این واژه‌ها در مبحث عبارات جبری به‌خوبی آشنا کرده‌ام) و نیز حالت ساده شده یا به قولی، استاندارد آن $y = ax + b$ را بیان کردم.

- پس از این که طی این فعالیت، دانش‌آموزان با بازنمایی جبری خط راست (یعنی معادله‌ی آن) آشنا شدند، روی ارتباط بین بازنمایی جبری و بازنمایی هندسی (یعنی نمودار خط در صفحه‌ی مختصات) تمرین کردیم و ضمن این مثال‌ها و تمرین‌ها، عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط را نیز روی نمودارها معرفی کردم و ارتباط بین نقش هندسی و مقادیرهای آن‌ها در معادله‌ی جبری خط توسط خود دانش‌آموزان در تمرین‌های مختلف، کشف شد.

- برای درک بیش‌تر مفهوم رابطه‌ی خطی و نیز آشنایی تجربی با مفهوم شیب، با یکی از همکارانم در بخش علوم مشورت کردم و با مطرح کردن ایده‌ام مبنی بر استفاده از اعداد واقعی و ملموس برای نقطه‌های روی یک خط راست، وی راهنمایی‌ام کرد که گرم شدن آب، یک پدیده‌ی خطی است که شیب مثبت دارد و البته یادآوری کرد که سرد شدن آن تنها در یک محدوده‌ی دمایی، خطی

با خطوط موازی محورها، اختصاص یافت.
- آخرین جلسه‌ی این مبحث، دانش‌آموزان یک تکلیف گروهی انجام دادند (پیوست ۲) که هدف آن، به کار بستن دانش و آمادگی برای موضوع بعدی (دستگاه معادله‌های خطی و حل آن‌ها) بود.

نتیجه‌گیری

در یک جمع‌بندی کلی، می‌توان تجربه‌ی تدریس تلفیقی مبحث معادله‌ی خط راست در پایه‌ی سوم راهنمایی را در ۱۰ جلسه به صورت زیر خلاصه کرد:

✓ جلسه‌های ۱ و ۲: فعالیت گروهی کتبی؛ درک مفهوم معادله‌ی مجموعه‌ای از نقاط و معرفی شکل کلی معادله‌ی خط راست $(y = ax + b)$ و ویژگی‌های آن.

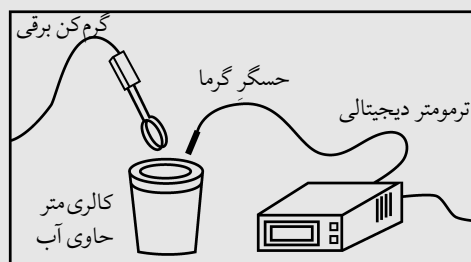
✓ جلسه‌ی ۳: تدریس رسم خط راست با داشتن معادله‌ی آن برای ایجاد ارتباط بین بازنمایی جبری و بازنمایی هندسی خط؛ معرفی عرض از مبدأ خط راست و نقش آن در معادله‌ی خط. معرفی طول از مبدأ خط راست.

✓ جلسه‌ی ۴: فعالیت گروهی عملی: بررسی تغییرات دمای آب در حال گرم شدن با یک گرم‌کن؛ برداشت داده‌های واقعی و رسم نمودار خط برازش آن‌ها و بررسی خطی بودن آن‌ها.

✓ جلسه‌ی ۵: استفاده از تجربه و نتایج آزمایش انجام شده برای معرفی شیب خط راست به عنوان نسبت تغییرات y به تغییرات x و معرفی نقش آن در معادله‌ی خط. نوشتن معادله‌ی خط داده‌های برداشت شده از آزمایش و مشاهده‌ی شیب در تغییرات داده‌ها نسبت به هم.

✓ جلسه‌های ۶ و ۷: دو فعالیت گروهی عملی: بررسی تغییرات دمای آب در حال گرم شدن با دو گرم‌کن؛ بررسی تغییرات دمای الکترول در حال گرم شدن با یک گرم‌کن؛ برداشت داده‌های واقعی و رسم نمودار خط برازش آن‌ها و بررسی خطی بودن آن‌ها و مقایسه‌ی شیب‌ها و معادله‌های خطوط آن‌ها و مشاهده‌ی عینی نقش شیب در داده‌ها.

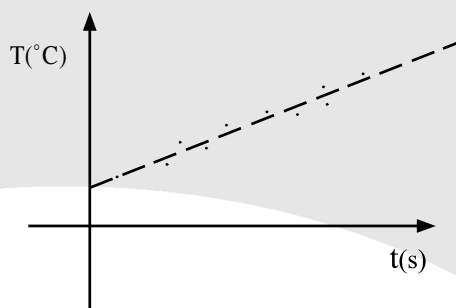
✓ جلسه‌های ۸ و ۹: آشنایی بیش‌تر با صورت‌های مختلف معادله‌ی خط راست؛ کسب مهارت بیش‌تر در اعمال جبری و آشنایی با خطوط موازی محورها و به دست آوردن شیب هریک با



شکل ۱. آزمایش گرم شدن آب با یک گرم‌کن

$m(\text{gr})$	$T(^{\circ}\text{C})$	$t(\text{s})$
	$T_0 = \dots$	

شکل ۲. جدول مربوط به آزمایش گرم شدن آب با یک گرم‌کن



شکل ۳. نمودار خط برازش مربوط به آزمایش گرم شدن آب با یک گرم‌کن

5. Integrated Curriculum Guide; available at: <http://www.archeworks.org/projects/tcsp/ic-guide.html>.

پیوست ۱: برگه‌ی فعالیت گروهی (جلسه‌ی اول)

توجه: همراه این برگه‌ها، چند برگ کاغذ شطرنجی در اختیار شما قرار می‌گیرد. در صورت لزوم، از آن‌ها استفاده کنید. سایر وسایل لازم: خط‌کش، ماشین حساب، مداد یا خودکار رنگی.

هدف از انجام این فعالیت، برقرار کردن ارتباط بین مفهوم خط راست در هندسه، با اعداد و محاسبات در حساب است. پیش از این، بین نقطه‌های یک صفحه (در هندسه) و مختصات (یعنی یک جفت عدد در حساب)، ارتباط برقرار کرده‌ایم. (۱) نقطه‌های زیر را (با دقت)، در یک دستگاه مختصات رسم کنید:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

اگر این نقطه‌ها را به ترتیب به هم وصل کنیم، آیا یک خط راست به وجود می‌آید یا یک خط شکسته؟
آیا در اولین نقطه، رابطه‌ای میان مختصه‌ی اول و مختصه‌ی دوم وجود دارد؟
آیا این رابطه، در تک‌تک نقاط دیگر نیز میان مختصه‌ی اول و مختصه‌ی دوم وجود دارد؟

اگر x ، به جای مختصه‌ی اول و y به جای مختصه‌ی دوم این نقطه‌ها باشد، آیا می‌توانید رابطه‌ی به دست آمده برای همه‌ی نقاط در قسمت قبل [در صورت وجود] را به صورت یک عبارت جبری با استفاده از x و y ، بنویسید؟

(۲) همان پرسش‌ها را برای این نقطه‌ها، دوباره پاسخ دهید:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۳) همان پرسش‌ها را برای این نقطه‌ها، دوباره پاسخ دهید:

استفاده از تعریف شیب.

✓ جلسه‌ی ۱۰: فعالیت گروهی کتبی؛ تعمیق مفاهیم قبلی و ورود به مبحث جدید دستگاه معادلات و حل آن.

نکته‌ی قابل توجه این است که در این طرح درس، به جز تعریف شیب و مشاهده‌ی شهودی آن در چند آزمایش، هیچ فرمول یا رابطه‌ی دیگری به دانش‌آموزان گفته نمی‌شود و در عین حال آن‌ها می‌توانند به راحتی با استفاده از تعریف شیب، همه نوع مسئله از این مبحث را با هر نوع داده و مجهولی حل کنند. مهم‌ترین نکته این که نقش ریاضیات را در مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی اطراف خود می‌بیند و پیش از پیش، قدران ریاضی و آن‌چه یاد گرفته‌اند می‌شوند.

سخن آخر این که:

به دانش‌آموزان کمک کنیم برای زندگی در قرن بیست و یکم آماده‌تر شوند!

به آن‌ها فرصت دهیم از یادگیری ریاضی لذت ببرند...

برای تحقق این اهداف و اهداف مشابه، با مطالعه و استفاده از نظرات آموزشی جدید، با تعداد کم در یک سال تحصیلی آغاز کنیم و ضمن بازخورد گرفتن از آن، به مرور آن را توسعه دهیم.

تشکر و قدردانی

لازم می‌دانم در این جا از همکاری‌های همکارانم در بخش علوم مدرسه، که ایده‌های من در خصوص جمع‌آوری داده‌های واقعی خطی برای ملموس ساختن این مبحث برای دانش‌آموزان را جامه‌ی عمل پوشاندند و آن را به یک فعالیت عملی واقعی تبدیل کردند؛ قدردانی کنم.

منابع

۱. داودی، خسرو؛ پندی، زهره؛ دلشاد، کبری؛ وزیری حامانه، سید حامد. کتاب معلم (راهنمای تدریس) ریاضی سال سوم راهنمایی؛ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۸۴.
۲. فرزانه، مسعود؛ باهمن شیروانه، ده، صفر؛ دیبایی، محمدتقی؛ فره‌ودی مقدم، پرویز. کتاب درسی ریاضی سال سوم راهنمایی؛ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۸۴.

3. Lake, Kathy, Integrated Curriculum; available at: <http://www.nwrel.org/scpd.sirs/8/c016.html>

4. Berlin; Danna F. Integrated Mathematics for Middle School: Internatinal Impressions, available at: <http://www.nctm.org/resources/content.aspx?id=1696>.

۶، درست بود؟ چرا؟
 ۹) با مرور مراحل طی شده، این فعالیت را جمع بندی کنید:

پیوست ۲: برگه‌ی تکلیف گروهی (جلسه‌ی ۱۰)

۱. داده‌های جدول‌های زیر، مربوط به دو آزمایش هستند که هم‌زمان صورت گرفته‌اند. در هر دو آزمایش، مایعی درون کالری‌متر با heater گرم شده است و دمای مایع، با گذشت زمان، در فواصل زمانی معین، ثبت شده است. از آن‌جا که مایع‌های درون دو کالری‌متر، متفاوت بوده و دمای مایع‌ها در آغاز آزمایش یکسان نبوده است، داده‌های دو آزمایش، متفاوت است.

با توجه به این اطلاعات، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:
 - در زمان ۱۵ ثانیه، دمای مایع دوم چند درجه بوده است؟
 - در چه زمانی دمای مایع اول، ۵۵ درجه بوده است؟
 - آیا زمانی وجود داشته که دمای دو مایع، در آن لحظه از زمان، برابر بوده باشد؟ چرا؟

T(°C)	t(s)
۴۰/۰	۰
۴۳/۲	۴
۴۶/۴	۸
۴۹/۸	۱۲
۵۳/۰	۱۶
۵۶/۲	۲۰
۵۹/۴	۲۴
۶۲/۶	۲۸
۶۵/۸	۳۲
۶۹/۰	۳۶

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع اول

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

۴) همان پرسش‌ها را برای این نقطه‌ها، دوباره پاسخ دهید:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

۵) همان پرسش‌ها را برای این نقطه‌ها، دوباره پاسخ دهید:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۶) به نظر شما، آیا در هریک از موارد بالا می‌توانستیم بدون ترسیم نقطه‌ها، در یک دستگاه مختصات، و تنها با استفاده از عبارت‌های جبری که یافته این، بفهمیم که نقاط مورد نظر روی یک خط راست هستند یا نه؟

۷) اگر پاسخ شما به سؤال ۶ مثبت است، نظریه‌ی خود را برای هریک از مجموعه نقاط زیر امتحان کنید:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$$

۸) چه نتیجه‌ای از سؤال ۷ می‌گیرید؟ آیا حدس شما در سؤال

تکلیف ۲. داده‌های جدول‌های زیر نیز، مربوط به دو آزمایش هستند که هم‌زمان صورت گرفته‌اند. در هر دو آزمایش، مایعی درون کالری متر با heater گرم شده است و دمای مایع، با گذشت زمان، در فواصل زمانی معین، ثبت شده است. با توجه به این اطلاعات، آیا زمانی وجود داشته که دمای دو مایع، در آن لحظه از زمان، برابر بوده باشد؟ چرا؟

T(°C)	t(s)
۵۳/۰	۸
۵۷/۸	۱۲
۶۲/۶	۱۶
۶۷/۴	۲۰
۷۲/۲	۲۴
۷۷/۰	۲۸
۸۱/۸	۳۲

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع اول

T(°C)	t(s)
۴۳/۲	۸
۴۸/۰	۱۲
۵۲/۸	۱۶
۵۷/۶	۲۰
۶۲/۴	۲۴
۶۷/۲	۲۸
۷۲/۰	۳۲

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع دوم

T(°C)	t(s)
۲۵/۰	۰
۳۰/۶	۴
۳۶/۲	۸
۴۱/۸	۱۲
۴۷/۴	۱۶
۵۳/۰	۲۰
۵۸/۶	۲۴
۶۴/۲	۲۸
۶۹/۸	۳۲
۷۵/۴	۳۶

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع دوم

پس از جمع‌بندی فعالیت فوق در کلاس، تکالیف زیر را در گروه انجام دهید:

تکلیف ۱. داده‌های جدول‌های زیر نیز، مربوط به دو آزمایش هستند که هم‌زمان صورت گرفته‌اند. در هر دو آزمایش، مایعی درون کالری متر با heater گرم شده است و دمای مایع، با گذشت زمان، در فواصل زمانی معین، ثبت شده است.

با توجه به این اطلاعات، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

- در زمان ۱۰ ثانیه، دمای مایع دوم چند درجه بوده است؟

- در چه زمانی دمای مایع اول، ۶۵ درجه بوده است؟

- آیا زمانی وجود داشته که دمای دو مایع، در آن لحظه از

زمان، برابر بوده باشد؟ چرا؟

T(°C)	t(s)
۴۰/۰	۰
۴۵/۶	۴
۵۱/۲	۸
۵۶/۸	۱۲
۶۲/۴	۱۶
۶۸/۰	۲۰

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع اول

T(°C)	t(s)
۲۵/۰	۰
۲۸/۲	۴
۳۱/۴۴	۸
۳۴/۶	۱۲
۳۷/۸	۱۶
۴۱/۰	۲۰

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع دوم

پی‌نوشت

1. Interdependence
2. Interconnectedness
3. American Mathematical Society
4. Correlation of Work

تابع

درک دانش آموزان از مفهوم اصلی

بی بی زکیه پرهیزگار
کارشناس ارشد آموزش ریاضی
زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

۳) یاد بگیرند که از آن‌ها در زندگی روزانه استفاده کنند. یک رابطه، عبارتی است که چگونگی ارتباط بین دو شیء یا بیش‌تر را نشان می‌دهد و به شکل‌های مختلفی به نمایش گذاشته می‌شود، مانند جدول و نمودار و تصویر. الگوها نیز این رابطه‌ها را به خوبی تعریف می‌کنند، رابطه‌هایی که از تغییر اشیاء حاصل می‌شوند.

اما تابع به عنوان یکی از مفاهیم اساسی ریاضیات، می‌تواند این امر را که ریاضی علم الگوها و روابط است توجیه کند، چرا که تابع، خود یک رابطه است و الگویی است که بسیاری از روابط پیچیده‌ی پدیده‌های جهان واقعی را روشن می‌سازد.

بنابراین، درک صحیح و همه‌جانبه‌ی دانش آموزان از مفهوم تابع، می‌تواند در جهت تحقق اهداف سوادآموزی علوم، بسیار مهم و اساسی باشد.

کلیدواژه‌ها: مفهوم تابع، بازنمایی‌های مختلف تابع، درک دانش آموزان از تابع، فرهوم.

دنیا از کهکشان‌ها، کوه‌ها، مخلوقات، ماشین‌ها و چیزهایی ساخته شده که هر یک به نظر منحصر به فرد می‌آیند. هم چنین، دنیا یک امر آشوبی است که در آن، همه‌ی آن چیزها به راه‌های گوناگون و اغلب به طور خشنونت‌بار اما گاهی هم بسیار نافذ، در کار هم دخالت می‌کنند. در چنین اوضاعی، باید از ریاضی ممنون بود که مردم را قادر ساخته است تا درباره‌ی دنیای اشیاء و رخدادها فکر کنند و با آن افکار، به گونه‌ای که وحدت و نظم را آشکار می‌سازد، ارتباط برقرار کنند (پروژه‌ی علوم برای تمام آمریکایی‌ها، ۱۹۹۷، ترجمه‌ی گویا و مرتاضی مهربانی، ۱۳۸۳، ص ۴).

این پروژه در ادامه، با توجه به هدف‌های سوادآموزی عمومی علوم، تأکید کرده است که برای دانش آموزان مهم است که ۱) بفهمند که به چه معنا، ریاضی مطالعه‌ی الگوها و روابط است؛

۲) با بعضی از آن الگوها و روابط آشنا شوند؛

استفاده از بازنمایی‌های چندگانه در یادگیری ریاضی و به ویژه یادگیری مفهوم تابع، یعنی اتصال، مقایسه و تبدیل از یک حالت بازنمایی به حالت دیگر بازنمایی به دانش آموزان کمک می‌کند تا بتوانند مهارت‌های نمایش و تشخیص مفهوم تابع را در بازنمایی‌های مختلف کسب کنند و بتوانند بین آن‌ها، اتصال و ارتباط برقرار نمایند

دانش آموزان و مفهوم تابع

مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که یادگیرنده‌ها از دوران ابتدایی تا دانشگاه، با آن سروکار دارند. آموزش این مفهوم نیز در تمام سطوح، معمولاً با یک تعریف رسمی آغاز می‌شود و سپس، برای بهتر فهمیدن آن توسط دانش آموزان، مثال‌هایی با بازنمایی‌های مختلف ارائه می‌شوند که از آن جمله، می‌توان به نمایش تصویری مانند استفاده از نمودار ون، ماشین تابع، جدول مقادیر، نمودار مختصاتی و فرمول اشاره کرد که هر کدام از این بازنمایی‌ها، ویژگی‌های خاص خود را دارند و برای درک عمیق‌تر مفهوم تابع توسط دانش آموزان به کار می‌روند. استفاده از بازنمایی‌های چندگانه برای یک ایده‌ی مشابه و انتقال از یک بازنمایی به بازنمایی دیگر، به درک عمیق‌تر مفهوم کمک می‌کند، چون زمانی می‌توان مطمئن شد دانش آموز معنای واقعی رابطه‌ای را درک کرده است که بتواند آن رابطه را در جدول‌ها، نمودارها، نمادها و کلمات نشان دهد (پروژه‌ی علوم برای تمام آمریکایی‌ها، ۱۹۹۷، ترجمه‌ی گویا و مرتاضی مهربانی، ۱۳۸۳، ص ۴). از طرف دیگر، یافته‌های تحقیقی نشان می‌دهند که دانش آموزان در دیدن ارتباط بین بازنمایی‌های چندگانه، ناتوان هستند (کارلسون، ۱۹۹۹). هم‌چنین، قاعده‌ای که توسط دانش آموزان برای تعیین یک تابع به کار می‌رود با تعریف رسمی این مفهوم - حتی برای دانش آموزانی که می‌توانند این تعریف را به کار برند - متفاوت است (مدقالچی، ۸۰ - ۱۳۷۹، ص ۲۴ به نقل از وینر و دریفوس، ۱۹۸۹). این یافته‌ها نشان می‌دهند که آگاهی از چگونگی درک دانش آموزان از مفهوم تابع و مشکلاتی که حین استفاده از بازنمایی‌های چندگانه برای یادگیری تابع به وجود می‌آید، حائز اهمیت زیادی است. به خصوص با توجه به کاربردهای وسیعی که تابع در زمینه‌های مختلف ریاضی دارد، انجام تحقیقاتی که به قصد بهبود آموزش این مفهوم انجام می‌شوند، ضروری‌اند.

اهمیت مفهوم تابع در برنامه‌ریزی درسی ریاضی مدرسه‌ای

یکی از اولین کسانی که بر اهمیت و نقش اساسی مفهوم تابع در کل برنامه‌ی آموزش ریاضیات تأکید زیادی داشت، فلیکس کلاین بود (هملی^۱، ۱۹۳۴). وی در سال ۱۸۹۳ در یک سخنرانی قبل از شروع کنگره‌ی بین‌المللی ریاضیات که در شیکاگو برگزار شد، توجه تمام معلمان ریاضی را به اهمیت اساسی آن چه که او آن را «تفکر تابعی» نامیده بود، جلب کرد. کلاین بارها در کنفرانس‌های بین‌المللی اظهار داشت که «مفهوم تابع» باید یک مفهوم محوری در آموزش ریاضیات باشد. وی مجدداً در ارائه‌ی گزارشی به کنگره‌ی بین‌المللی ریاضیات که در سال ۱۹۰۸ در رم برگزار شد، دوباره بر روی مفهوم تابع تأکید کرده و اعلام نمود که «نه تنها معلمان باید این مفهوم را به عنوان یک روش ریاضی در نظر بگیرند، بلکه باید آن را به عنوان قلب و روح آموزش ریاضی به شمار آورند. وی در ادامه اظهار داشت که «این اعتقاد من است» که مفهوم تابع، باید روح مطالعه‌ی ریاضیات در مدارس باشد» (نقل شده در هملی ۱۹۳۴، ص ۱۷۰-۱۶۹).

به گفته‌ی هدریک^۲ (۱۹۳۸)، مفهوم تابع در مراحل ابتدایی، با ایده‌ی تناظر متغیرها مرتبط می‌شود. وی توضیح می‌دهد که مثلاً در بحث اثر مقاومت هوا بر حرکت یک اتومبیل، هنگامی که می‌گوییم مقاومت به سرعت بستگی دارد، تفکر تابعی ظاهر می‌شود. برای تفکر تابعی، الزاماً نیاز به داشتن یک فرمول دقیق نیست. هرگونه مشاهده‌ای مانند این که افزایش سرعت باعث افزایش مقاومت می‌شود، در حوزه‌ی تفکر تابعی قرار می‌گیرد. علاوه بر این، هدریک اظهار می‌دارد که تحقیق درباره‌ی داده‌های تجربی نیز، یکی دیگر از مراحل تفکر تابعی است. مثلاً بررسی اطلاعات آماری که برای مقاومت در سرعت‌های مختلف به دست می‌آید و کشیدن نموداری که اطلاعات صریح‌تری درباره‌ی ماهیت رابطه ارائه می‌دهد نیز جزو تفکر تابعی محسوب

می شوند. وی در ادامه، بیان می کند که حتی در هر مرحله ای از حساب ابتدایی، تفکر تابعی ممکن است ظاهر شود؛ مثل وقتی که با دانستن قیمت یک واحد از هر شیء، قیمت چند واحد دیگر را به دست می آوریم که با چنین محاسباتی، ایده ی رابطه ی بین متغیرها می تواند به ذهن دانش آموز خطور کند. به همین ترتیب، مفهوم تابع و تفکر تابعی در تمام حوزه های ریاضیات مانند جبر، هندسه، حسابان، مثلثات و ریاضیات پیشرفته ظاهر می شود که همه ی آن ها، نیازمند درک صحیحی از مفهوم تابع می باشند.

بنابراین، با مفهوم تابع در کل ریاضیات - از اولین گام ها در حساب ابتدایی گرفته تا ریاضیات پیشرفته در سطح دانشگاهی، سروکار داریم زیرا به گفته ی هدریک (۱۹۳۸)، مفهوم تابع، موضوعی است که مستعد هماهنگ کردن کل ریاضیات است و ریاضیات را با زندگی و علم تلفیق می کند. در تأیید چنین دیدگاهی، آکوک و تال (۲۰۰۶) به نقل از استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی (NC TM) (۱۹۸۹) بیان می دارند:

مفهوم تابع، یک ایده ی هماهنگ کننده^۳ و مهم در ریاضی است. توابع که تناظرهای خاص بین دو مجموعه هستند، در سراسر برنامه ی درسی مشترک اند. در حساب، توابع به عنوان عملیات مفید بر روی اعداد مانند تناظر شدن یک جفت عدد به یک عدد خاص و مانند جمع دو عدد به نظر می رسند؛ در جبر، توابع روابطی بین متغیرها هستند که اعداد را ارائه می دهند؛ در هندسه، توابع مجموعه ای از نقاط را به تصویرشان تحت حرکت هایی مانند برگرداندن ها^۴، سریدن ها^۵ و چرخش ها، مرتبط می کنند؛ و در احتمال، توابع، پیشامدها را به احتمالات آن ها مربوط می سازند. هم چنین، اهمیت دیگر تابع این است که تابع، رابطه ی ریاضی متشکل از موقعیت های ورودی و خروجی جهان واقعی است.

هم چنین، کارلسون (۱۹۹۹) معتقد است که داشتن درک بالا و قوی از مفهوم تابع، برای هر دانش آموزی ضروری است تا بتوان امیدوار بود که وی، حسابان را درک کند. از طرف دیگر، به گفته ی ساجکا (۲۰۰۳)، تابع یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که در گوناگونی تفسیرها و بازنمایی هایش شگفت آور است و توجه و زمان زیادی در فرایندهای آموزشی بر روی آن صرف شده است. با این حال، تابع هم چنان مفهومی پیچیده و مشکل باقی مانده است، زیرا با وجودی که دوگانگی فرآیند - شیء و بازنمایی های مختلف، ظرافت و پیچیدگی مفهوم تابع را نشان می دهد، دانش آموزان اغلب بر ایده های شهودی و غیرمتفکرانه

از روابط تابعی متکی هستند. بدین سبب و همان طور که دیویس و مک گان (۲۰۰۲)، مشاهده کرده اند، مفهوم تابع با طیف وسیعی از نمادهایش با بدفهمی های گسترده ای همراه است.

با توجه به اهمیت قابل ملاحظه ای که تابع در ریاضی و حتی سایر علوم دارد، به نظر می رسد تحقیقات بر روی آموزش و درک این مفهوم ضروری است. به ویژه این که تحقیقات نشان می دهند درک مفهوم تابع برای دانش آموزان سخت است و حتی دانش آموزانی که نمره های بالایی در حسابان دارند، درک ضعیفی از این مفهوم دارند (بردناخ^۶، دویینسکی، هاوس^۷ و نیکولز^۸، ۱۹۹۲؛ کارلسون^۹، ۱۹۹۹).

معرفی یک پژوهش

با توجه به نقش و اهمیت تابع در ریاضی و مشکلاتی که دانش آموزان در یادگیری این مفهوم محوری دارند، تحقیقی با تبیین اهداف زیر طراحی شد:

- ۱) شناخت دشواری ها و پیچیدگی های احتمالی دانش آموزان در برخورد با بازنمایی های چندگانه ی تابع؛
 - ۲) بررسی تصورات دانش آموزان نسبت به مفهوم تابع؛
 - ۳) بررسی چگونگی استفاده ی دانش آموزان از ویژگی های تعریف تابع برای بازنمایی های مختلف.
- با توجه به اهداف بالا، یکی از سؤال هایی که در این پژوهش طراحی شد، چنین بود:

دانش آموزان در برخورد با بازنمایی های مختلف تابع، چگونه از تعریف تابع استفاده می کنند؟

چارچوب نظری این تحقیق، براساس دیدگاه تامسون از مفهوم اصلی تابع شکل گرفت.

تامسون (۱۹۹۴) اظهار می دارد که مفهوم اصلی تابع، تنها از طریق ارائه ی بازنمایی های چندگانه حاصل نمی شود بلکه لازم است که به جای تمرکز بر این بازنمایی های مجرد، ابتدا یک حس ذهنی غیرمتزلزل در دانش آموزان ایجاد کنیم.

هم چنین، آکوک و تال (۲۰۰۳)، با استناد به یافته های تامسون بیان می کنند که ضروری است که دانش آموزان هنگام کار کردن با بازنمایی های مختلف تابع، ایده های نهفته در آن ها را درک کنند. در غیر این صورت برای دانش آموزان، بازنمایی تبدیل به موضوعی می شود که جداگانه باید یاد گرفته شود.

معلمان، برنامه ریزان درسی و مؤلفان کتاب های ریاضی مخاطبان اصلی این تحقیق هستند. معلمان ریاضی می توانند از

آشنایی معلمان با تصورات دانش آموزان نسبت به مفهوم تابع، می تواند به برطرف کردن مشکلات و پیچیدگی هایی که ممکن است با تعریف رسمی مفهوم تابع در ذهن آن ها شکل گیرد، کمک کند

می شود. این بررسی براساس ویژگی های تابع است که از کتاب های ریاضی ۲* و حسابان استخراج شده اند. این ویژگی ها عبارتند از:

فرض کنید A و B به ترتیب نمایانگر دامنه و هم دامنه تابع f باشد، آن گاه:

۱. به ازای هر $x \in A$ ، y ای متعلق به B وجود داشته باشد به طوری که $(x, y) \in f$ باشد.

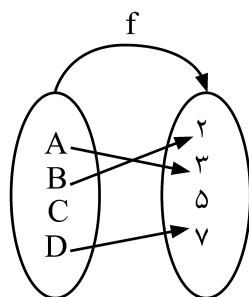
۲. اگر $(x, y_1) \in f$ و $(x, y_2) \in f$ باشند. آن گاه $y_1 = y_2$ است.

۳. عضوهای متفاوت در A می توانند به یک عضو یکسان در B نسبت داده شوند.

۴. برخی عضوها در B ممکن است نظیر هیچ عضوی از A نشوند.

جمع بندی پاسخ های مربوط به نمودارهای ون

سؤال ۱. آیا نمودار ون زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



هدف این سؤال، بررسی درک دانش آموزان از این ویژگی تابع بود که به هر عضو در دامنه، باید عضوی در هم دامنه نسبت داده شود. نمونه های زیر معرف پاسخ های دانش آموزان است.

- تابع است، چون هر x به یک y می رود.
- تابع است، چون مؤلفه های اول با یکدیگر برابر نیستند و به هر یک از مؤلفه های اول عددی خاص تعلق گرفته است.

نتایج به دست آمده در این تحقیق برای ارتقای کیفیت تدریس و بهبود یادگیری دانش آموزان استفاده کنند. برنامه ریزان درسی و مؤلفان کتاب های درسی نیز می توانند با بهره گیری از نتایج این تحقیق، هم در انتخاب محتوای کتاب های درسی ریاضی و هم در سازمان های تألیف، از به کارگیری آن چه که با ساختارهای شناختی دانش آموزان مغایرت دارد، اجتناب ورزند.

این تحقیق تمرکز خود را تنها بر روی درک دانش آموزان پایه های دوم و سوم دبیرستان از مفهوم تابع قرارداد و نتایج به دست آمده درباره ی درک دانش آموزان از مفهوم تابع، محدود به شرکت کنندگان در این تحقیق است. هرچند پژوهشگر برای رفع بعضی ابهامات و سؤالات ذهنی، در منطقه ی دیگر از کشور، همین تحقیق را عیناً تکرار کرد و نتایج به دست آمده تا حد زیادی مؤید یکدیگر بودند.

در این پژوهش، واژه های تابع، بازنمایی، فرهوم با تعریف های عملیاتی زیر استفاده شد:

تابع؛ عبارت است از یک تناظر بین دو مجموعه ی ناتهی که به هر عنصر از مجموعه ی اول (دامنه) دقیقاً یک عنصر در مجموعه ی دوم (هم دامنه) نسبت داده می شود (مفهوم دریکله - بورباکی).

گاهی اوقات، برای اجتناب کردن از واژه ی تناظر، تابع به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب که شرایط خاصی دارند معرفی می شوند (وینر و دریفوس، ۱۹۸۹).

بازنمایی؛ روشی برای ارائه ی یک مفهوم ریاضی است. مثلاً، بازنمایی عددی، رویه ای عددی برای محاسبه ی یک نتیجه ی عددی است؛ بازنمایی نموداری وقتی به کار می رود که ورودی و خروجی محاسبات با نمودار نمایش داده شود و بازنمایی نمادین هنگامی است که برحسب نمادگذاری جبری نمایش داده شوند (سرشتی، ۱۳۸۴).

فرهوم^{۱۱}؛ ترکیبی از فرآیند، مفهوم و نماد است، تال ۱۹۹۷، به نقل از گری و تال ۱۹۹۴، در توضیح فرهوم مثال زیر را بیان کرده اند:

یک فرآیند (مانند جمع ۳ و ۴)، یک مفهوم (که به وسیله ی فرآیند تولید می شود مانند عمل جمع) و یک نماد که فرآیند یا مفهوم را فرامی خواند (یعنی ۳+۴).

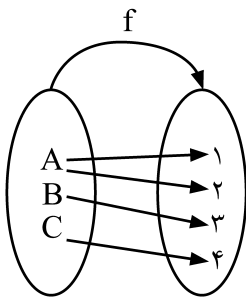
در این بخش، بعضی از نتایج این پژوهش به اجمال بررسی

تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان نشان داد که تنها تعداد کمی از دانش‌آموزان در حین کار کردن با بازنمایی‌های مختلف تابع، بر روی ویژگی‌های تعریف تابع متمرکز شدند

هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از این ویژگی تابع بود که عضوهای متفاوت در دامنه می‌توانند به یک عضو یکسان در هم‌دامنه نسبت داده شوند. نمونه‌های زیر معرف تنوع پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال است:

- تابع است، چون دو x می‌تواند به یک y برود.
- تابع است، چون مؤلفه‌های اول هر کدام فقط به یکی از مؤلفه‌های دوم وصل‌اند، مانند مورد (۲).
- تابع است، چون مؤلفه‌های x شان متفاوت ولی y هایشان یکی است، اشکالی ندارد.

سؤال ۴. آیا نمودار f زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از این ویژگی تابع بود که به هر عضو دامنه، عضو معین و منحصر به فردی از هم‌دامنه نسبت داده می‌شود. نمونه‌های زیر معرف پاسخ‌های متنوع دانش‌آموزان است:

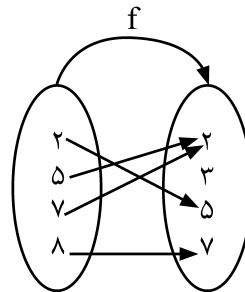
- تابع نیست، چون یک x نمی‌تواند به دو y برود.
- تابع نیست، چون به A یک دفعه ۱ و یک دفعه ۳ داده است.
- تابع نیست، مؤلفه‌های x شان یکی است، y هایشان هم باید یکی باشد.
- طبق تعریف در تابع نباید هیچ دو زوج دارای مؤلفه‌ی (x) یکسان باشند.

نتایج تجزیه و تحلیل داده‌های مربوط به نمودارهای f نشان داد که ۵/۶۲٪ و ۵۶/۲۵٪ از دانش‌آموزان به ترتیب، به سؤال یک و دو پاسخ نادرست دادند و تمام دانش‌آموزان، به سؤال‌های ۳ و ۴ پاسخ درست دادند. در واقع، می‌توان عوامل احتمالی که سبب شد دانش‌آموزان به نمایش‌های نمودار f اول و دوم پاسخ

- تابع نیست، زیرا به ازای هر عضو در B عضوی در B وجود ندارد.

- تابع نیست، زیرا به ازای هر عضو در A عضوی در B وجود ندارد.

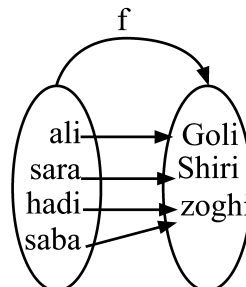
سؤال ۲. آیا نمودار زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از این ویژگی تابع بود که برخی عناصر در هم‌دامنه، ممکن است نظیر هیچ عضوی از دامنه نشوند. نمونه‌های زیر معرف پاسخ‌های دانش‌آموزان است:

- تابع است، چون دو x می‌تواند به یک y برود.
- تابع است، زیرا مؤلفه‌هایشان یکی است و y هایشان هم باید یکی باشد، ولی این جا x ها متفاوت‌اند، اشکالی ندارد y هایشان یکی باشد.
- تابع نیست، زیرا به ازای هر عضو در B عضوی در A وجود ندارد.
- تابع نیست، زیرا به ازای هر عضو در A عضوی در B وجود ندارد.

سؤال ۳. آیا نمودار f زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



درست دهند را به صورت زیر جمع آوری نمود.

● آگاهی نداشتن و یا توجه نکردن به این نکته که باید به ازای هر عضو در دامنه، یک عضو در هم دامنه نسبت داده شود، یعنی تابع باید به ازای تمام اعضای دامنه تعریف شده باشد (ویژگی (۱)).

● آگاهی نداشتن نسبت به این نکته که برخی عناصر در هم دامنه ممکن است نظیر هیچ عضوی از دامنه نشوند (ویژگی (۴)).
هم چنین، دانش آموزان نسبت به ویژگی های (۲) و (۳) از تعریف تابع، «یعنی عناصر متفاوت در دامنه می توانند به عنصر یکسانی از برد نسبت داده شوند» و «اگر دو زوج دارای مؤلفه های اول یکسان باشند، آن گاه مؤلفه های دوم آن ها نیز باید باهم برابر باشند»، آگاهی کافی داشتند و به سادگی توانستند آن ها را در دیاگرام ها و ن بپینند.

در مجموع، تجزیه و تحلیل پاسخ های این قسمت این حدسیه را تقویت کردند که آگاهی نداشتن نسبت به ویژگی های (۱) و (۴)، می تواند یک عامل جدی برای ایجاد پیچیدگی های شناختی در ذهن دانش آموزان شود که این عامل، حتی مانع توجه دانش آموزان به ویژگی هایی شد که از آن ها آگاهی داشتند.

یافته های حاصل از تجزیه و تحلیل مجموعه ی جفت های مرتب

سؤال: آیا نمایش زوج مرتبی زیر تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.

$$f: \{1, 2, 3, 7, 9\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 2), (7, -1), (9, 1)\}$$

هدف از طرح این سؤال، بررسی درک دانش آموزان از تعریف تابع به صورت بازنمایی زوج مرتبی بود. نمونه های زیر معرف تنوع پاسخ های متفاوت دانش آموزان به این سؤال است:

● تابع است، چون هیچ زوج مرتبی را نمی توان یافت که مؤلفه های اول آن یکسان باشد.

● تابع است، چون اعداد f باهم یکی نیست و متفاوت است.

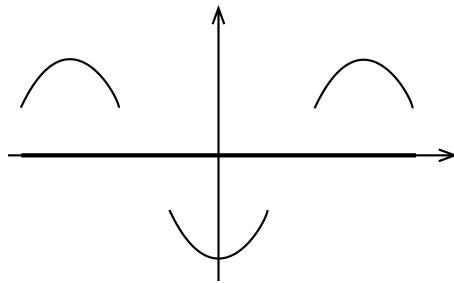
● تابع است، چون به ازای هر x یک y وجود دارد.

تمام دانش آموزان نیز به این سؤال، با تکیه بر ویژگی (۲) پاسخ صحیح ارائه دادند. دانش آموزان مصاحبه شونده نیز، با استفاده از ویژگی (۲) استدلال کردند که «اگر یک داشته باشیم، دو مقدار برای یک نداریم». در نتیجه، به این سؤال پاسخ صحیح دادند.

این پاسخ ها نشان دادند که دانش آموزان، بازنمایی زوج مرتبی تابع را به خوبی می شناختند و توانایی استفاده از آن را داشتند.

یافته های حاصل از تجزیه و تحلیل سؤالات مربوط به بازنمایی نموداری

سؤال ۱. آیا نمودار زیر تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



هدف این سؤال، بررسی درک دانش آموزان از مفهوم تابع در بازنمایی نموداری و به خصوص مفهوم دامنه بود. البته، این نمودار با مثال هایی که دانش آموزان به عنوان تابع با آن ها آشنا بودند، متفاوت بود و همین، عاملی برای انتخاب این سؤال بود. نمونه های زیر معرف تنوع پاسخ های متفاوت دانش آموزان به این سؤال است:

● تابع است، زیرا دامنه تمام اعداد حقیقی است.

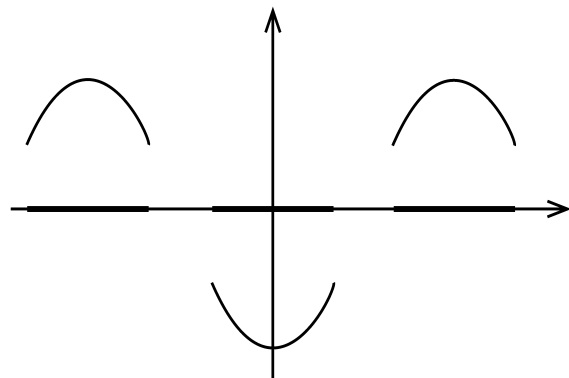
● تابع است، زیرا در این دامنه هر خط موازی محور y ها، آن را در یک نقطه قطع خواهد کرد.

● تابع است، چون دامنه ی نمودار آن تمام اعداد حقیقی است و در نتیجه هر خط موازی محور y ها آن را در یک نقطه قطع خواهد کرد.

این پاسخ ها نشان می دهند که اکثر دانش آموزان در پاسخ به این سؤال، موفق نبودند. یکی از دانش آموزان، با مقایسه ی نمودار شماره ی (۱) و نمودار شماره ی (۲) باهم، به این نتیجه رسید که «تابع نمی تواند دامنه های قطعه قطعه داشته باشد، بنابراین، چون دامنه ی این نمودار تمام اعداد حقیقی است، پس باید این نمودار تابع باشد» (البته دامنه تمام اعداد حقیقی نیست). بعضی از دانش آموزان، به استناد ملاک تشخیص تابع از روی نمودار به راحتی نتیجه گرفتند که این نمودار تابع است. در حالی که مسئله ی مهمی که در این سؤال مطرح بود، توجه به نقاطی از دامنه بود که هیچ y ای برای آن ها تعریف نشده بود و دانش آموزان به این شرط مهم توجه نکرده بودند که «ملاک تشخیص تابع از روی نمودار» در دامنه ی تعریف شده معنا دارد نه هر نقطه ی دلخواه.

از این گذشته، ۱۲ نفر (۷۵٪) از دانش‌آموزان، دو دلیل برای تابع بودن ارائه دادند و دلیل دوم را نتیجه‌ی دلیل اول، معرفی کردند. از این دو دلیل، دو برداشت متفاوت می‌توان داشت؛ یکی این که از طریق مقایسه‌ی دو نمودار حدس زده بودند که اگر دامنه تمام اعداد حقیقی باشد، امکان آن بیش‌تر است که آن نمودار، تابع باشد و برداشت دیگر این که دانش‌آموزان، خط موازی محور y ها را در نقاطی که تابع در آن‌ها تعریف نشده بود نیز رسم کردند که این خط، در هر صورت دامنه را در یک نقطه قطع می‌کرد و بدین سبب، نتیجه گرفتند که این نمودار، در تمام نقاط دامنه تابع است. این حدس از آن جا تقویت می‌شود که اکثر دانش‌آموزان، بدون این که این خط را رسم کنند، چنین استدلالی ارائه کردند. این پاسخ‌ها نشان می‌دهند که دانش‌آموزان درکی عمیق از مفهوم دامنه‌ی تابع نداشتند.

سؤال ۲. آیا نمودار زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



اگرچه این سؤال، همان اهداف سؤال قبل را دنبال می‌کرد، اما این تفاوت را داشت که این نمودار، یک تابع بود و به بررسی عمیق‌تر درک دانش‌آموزان از مفهوم دامنه می‌پرداخت. پیش‌بینی پژوهشگر این بود که دانش‌آموزان، از تکنیک خط موازی محور y ها استفاده کنند و نسبت به دامنه توجه کمتری داشته باشند. نمونه‌های زیر معرف پاسخ‌های گوناگون دانش‌آموزان به این سؤال است:

- تابع نیست، چون دامنه‌ی اعداد حقیقی محدود است و قسمتی از اعداد x می‌باشد.
- تابع نیست، زیرا دارای دامنه‌های متفاوتی است.
- تابع نیست، چون دامنه‌ی نمودار آن محدود است و می‌توان

خطی موازی محور y ها رسم کرد که تابع را در هیچ نقطه‌ای قطع نکند و آن خط تابع را باید حداکثر در یک نقطه قطع کند.

- نمی‌دانیم، چون تشخیص تابع در صورتی که دامنه‌های متفاوت داشته باشد در حوزه‌ی تعلیمات ما نمی‌باشد.
- و تنها پاسخ صحیح به این سؤال این بود که:
- تابع است، چون هر خطی که موازی محور y ها بکشیم، تابع را فقط در یک نقطه قطع خواهد کرد.

در مجموع، از بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان استنباط می‌شود که اغلب آن‌ها، نموداری را که دارای دامنه‌های قطعه‌قطعه باشد، تابع نمی‌دانستند. هم‌چنین، اکثر دانش‌آموزان از تکنیک خط موازی محور y ها برای قضاوت راجع به تابع بودن یا نبودن تابع استفاده کردند و نتیجه گرفتند که «این نمودار نمی‌تواند تابع باشد». در واقع، آن‌ها خط موازی محور y ها را در بین قطعه‌های مختلف نمودار رسم کردند و چون نمودار را در هیچ نقطه‌ای قطع نکرد، آن را دلیل محکمی برای تابع نبودن دانستند. شاید علت این نوع استفاده از تکنیک خط موازی محور y ها، این توصیه‌ی کتاب ریاضی سال دوم، ص ۲۴ باشد که:

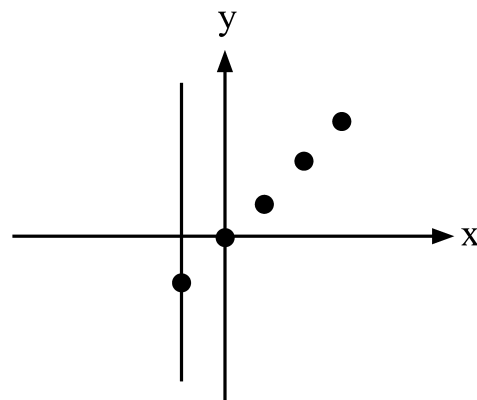
«از نظر نموداری، رابطه‌ای تابع است که هر خط موازی محور y ها به صورت $x=a$ ، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند».

در نتیجه، دانش‌آموزان بیش‌تر به دنبال این بودند که خط موازی محور y ها، تابع را در بیش‌تر از یک نقطه قطع نکند. در حالی که اکثر آن‌ها، به این نکته توجهی نداشتند که این خط، باید در محدوده‌ی نمودار رسم شود.

اگرچه دانش‌آموزان، ظاهراً از تکنیک خط موازی محور y ها استفاده کردند، ولی چون این نمودارها را با نمونه‌ها و مثال‌هایی که قبلاً تجربه کرده بودند مقایسه می‌کردند، چنین استدلال‌هایی را ارائه کردند. شاید عدم سازگاری دانش موجود با تجربه‌های قبلی، یکی از دلایلی بود که دانش‌آموزان، «محدود بودن دامنه» را «دلیلی برای تابع نبودن» به حساب آوردند.

به طور مثال، یکی از دانش‌آموزان پایه‌ی دوم، به عدم آشنایی با نموداری که دارای دامنه‌های مجزاست، اشاره نمود. در حالی که در صفحه‌ی ۲۴ کتاب ریاضی ۲، نموداری ارائه شده است که نمودار نقطه‌ای است.

قاعده‌ای که توسط دانش‌آموزان برای تعیین یک تابع به کار می‌رود با تعریف رسمی این مفهوم - حتی برای دانش‌آموزانی که می‌توانند این تعریف را به کار برند - متفاوت است



دارند. از طرف دیگر، تعبیر و تفسیر درست نمودارها توسط دانش‌آموزان، به درک آن‌ها از مفهوم تابع وابسته است. در مجموع، یافته‌های این بخش را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد که دانش‌آموزان:

- به نقاطی از دامنه که y ای برای آن‌ها تعریف نشده بود، توجهی نکردند.

- تکنیک خط موازی محور y ها را به راحتی به کار می‌بردند، ولی از این نکته غافل بودند که خط موازی محور y ها، باید نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در واقع دانش‌آموزان درک صحیحی از دامنه نداشتند.

- نموداری که دارای دامنه‌ی محدود یا قطعه قطعه باشد را تابع نمی‌دانستند.

- به طور کلی، آن‌ها استدلال‌های قانع‌کننده‌ای برای پاسخ‌هایشان ارائه نکردند و این ناتوانی تا حدی، مربوط به درک ضعیف دانش‌آموزان از مفهوم دامنه و عدم سازگاری این دانش با تجربه‌های قبلی آن‌ها بود.

این یافته‌ها بیانگر این حقیقت بودند که برای درک مفهوم تابع، دانش‌آموزان نیازمند فهم عمیق تری از بازنمایی نموداری هستند.

یافته‌های حاصل از تجزیه و تحلیل سؤالات مربوط به فرمول‌ها

سؤال ۱. آیا فرمول زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.

$$f: R \rightarrow R$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع در بازنمایی فرمولی بود و سعی شد این سؤال جزو مثال‌هایی باشد که برای دانش‌آموزان آشنا است. نمونه‌های زیر معرف پاسخ‌های

بنابراین استدلال این دانش‌آموزان می‌تواند چند پیام داشته باشد که یکی عدم توجه و دقت وی به مثال‌های ارائه شده در کتاب درسی و دیگری عدم استفاده‌ی معلم از کتاب‌های درسی یا عدم تأکید معلم به مثال‌های خاص است که منجر به ناسازگاری دانش موجود با تجربه‌های قبلی دانش‌آموز شده است. همه‌ی این دلایل و دلایل دیگری که شاید وجود داشته باشند و هنوز برای پژوهشگر ناشناخته هستند، باعث شد تا همه‌ی دانش‌آموزان به جز یک نفر، نتوانند در برخورد با این سؤال پاسخ درست دهند. تنها فردی هم که به این سؤال پاسخ درست داد، به قطعه قطعه بودن دامنه‌ی نمودار توجهی نکرده بود. با این حال، این فرد در پاسخ به نمودار شماره‌ی (۱) دچار اشتباه شد. یعنی با وجودی که وی به این سؤال پاسخ داد، ولی پاسخ نادرست او به نمودار شماره‌ی یک، عدم توجه و درک دامنه را نشان می‌دهد. که این قضاوت، نیازمند بررسی‌های عمیق‌تر می‌باشد.

چهار دانش‌آموز شرکت‌کننده در مصاحبه نیز، این دو نمودار را تابع دانستند. آن‌ها با استفاده از تکنیک خط موازی محور y ها، استدلال کردند که این خط، نمودار را در دو نقطه قطع نمی‌کند. هم‌چنین، وقتی از آن‌ها در مورد نقاطی از دامنه‌ی نمودار (۱) سؤال شد، پاسخ دادند که «هیچ مقداری برای آن‌ها وجود ندارد» ولی در نهایت گفتند که «نمودارها هر دو تابع اند». شاید دلیل این امر، این باشد که آن‌ها در مواجهه شدن با نمودار، تعریف تابع را فراموش کردند و فقط سعی کردند که با استفاده از این تکنیک، تابع بودن نمودارها را تشخیص دهند.

یافته‌های این بخش نشان داد که نمودارها به عنوان یکی از مهم‌ترین بازنمایی‌های تابع، همیشه به طور مستقیم با ایده‌ی تابع در ذهن دانش‌آموزان مرتبط نمی‌شوند. دانش‌آموزان در تفسیر مفهوم تابع با استفاده از بازنمایی نموداری، به شکل جدی مشکل

دانش آموزان، روش های مختلفی را می دانستند و آن ها را به کار می بردند، ولی سرانجام در ارائه ی درست ناموفق ماندند.

یافته های حاصل از تجزیه و تحلیل سؤالات مربوط به تابع ثابت

سؤال: آیا عبارت های زیر تابع هستند؟ دلایل خود را شرح دهید.

$$y = 4$$

$$y = 4 \quad (x \text{ برای همه ی مقادیر } x)$$

$$y = 4 \quad (x \geq 2)$$

هدف این سؤال، بررسی درک دانش آموزان از مفهوم تابع ثابت در عبارت های مختلف و شناسایی مشکلات احتمالی آن ها در حرکت از یک حالت بازنمایی به حالت دیگر بود.

پاسخ به سؤال اصلی تحقیق

یکی از اهداف این تحقیق، بررسی و تحلیل چگونگی استفاده ی دانش آموزان از تعریف های رسمی تابع و تصورات مفهوم شکل گرفته در ذهن آن ها بود. تجزیه و تحلیل پاسخ های دانش آموزان نشان داد که تنها تعداد کمی از دانش آموزان در حین کار کردن با بازنمایی های مختلف تابع، بر روی ویژگی های تعریف تابع متمرکز شدند. به طور کلی، می توان گفت که اکثر دانش آموزان در برخورد با نمایش نمودارهای ون و نمایش زوج مرتبی، توانستند ویژگی های تعریف تابع را به وضوح ببینند. دانش آموزان در برخورد با بازنمایی های نموداری و فرمول، تعریف تابع را کنار گذاشتند و با استفاده از تکنیک هایی که در دست داشتند به استدلال تشخیص تابع بودن پرداختند. همین امر، پیچیدگی های متفاوتی را در برخورد با هر کدام از این بازنمایی ها برای آن ها به وجود آورد. علت این امر این بود که دانش آموزان بیش تر به تجارب قبلی خود تکیه داشتند تا تعریف تابع، به طوری که در برخورد با یک نمودار ناآشنا دچار مشکل می شدند و با توجه به خواص مثال های اولیه و نمونه های آشنا به این نوع سؤال ها پاسخ دادند. به طور کلی، می توان چگونگی استفاده ی دانش آموزان از تعریف تابع را به صورت زیر خلاصه کرد:

● بیش تر دانش آموزان قادر بودند تعریف تابع را برای بازنمایی های ساده از جمله نمایش تابع به صورت زوج مرتب یا نمایش آن به صورت نمودارهای ون که جزو نمونه های اولیه ی

لازم است تا فرصت کافی برای ایجاد تصورات دانش آموزان نسبت به مفهوم تابع و زمینه سازی برای درک مفهوم اصلی تابع ایجاد شود

دانش آموزان به این سؤال است:

● تابع نیست، چون تعریف نشده، بی معنی است. به ازای $x = 0$ مقداری برای y به دست نمی آید $f(0)$ ، اگر دامنه به صورت $f: R \rightarrow 0$ باشد، تابع است.

● تابع نیست، $\{0\} - R$ ، $x = 0$.

● تابع است، زیرا طبق تعریف و هم از روی نمودار و هم از دامنه ی آن تابع محسوب می شود.

● تابع است،

$$f(x) = 2 \quad f(x) = 1$$

$$y = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{1}$$

سؤال ۲. آیا فرمول زیر تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.

$$f: R \rightarrow R$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

- اکثر دانش آموزانی که به سؤالات بازنمایی مربوط به فرمول، پاسخ درست دادند، به راحتی توانستند اعضای از دامنه ی داده شده را که تابع در آن تعریف نشده بود، ببینند.

- یکی از دلایلی که باعث شد برخی از دانش آموزان پاسخ نادرست دهند، عدم توجه آن ها به نماد معرفی تابع $(f: R \rightarrow R)$ بود. در واقع، بعضی از دانش آموزان، قبلاً با این دو فرمول به عنوان مثال های اولیه از تابع که دامنه های صحیح داشتند، آشنا شده بودند و بدین جهت، این ها را تابع دانستند. مثلاً این دانش آموزان، با رسم نمودار تابع $\sqrt{x}$ برای $x \geq 0$ و با استفاده از تکنیک خط موازی محور y ها، استدلال کردند که این فرمول تابع است.

- علاوه بر این ها، هیچ یک از چهار مصاحبه شونده، به این سؤال پاسخ درستی ندادند و این نکته قابل توجه بود که این

مفهوم تابع یکی از اساسی ترین مفاهیم ریاضی است که یادگیرنده ها از دوران ابتدایی تا دانشگاه با آن سروکار دارند

سخن پایانی: چند توصیه ی آموزشی

نمایش تابع هستند ارائه دهند؛
● زمانی که دانش آموزان از ویژگی های تعریف تابع استفاده نمی کردند، بیش تر به مثال هایی که قبلاً تجربه کرده بودند تکیه داشتند و به طور کلی، درک کلی و مبهمی از تعریف تابع داشتند.

براساس یافته های این مطالعه، توصیه های آموزشی زیر ارائه می شود:

● لازم است تا فرصت کافی برای ایجاد تصورات دانش آموزان نسبت به مفهوم تابع و زمینه سازی برای درک مفهوم اصلی تابع ایجاد شود.

● آشنایی معلمان با تصورات دانش آموزان نسبت به مفهوم تابع، می تواند به برطرف کردن مشکلات و پیچیدگی هایی که ممکن است با تعریف رسمی مفهوم تابع در ذهن آن ها شکل گیرد، کمک کند.

● فراهم آوردن مجموعه ای از مثال های متنوع از تابع های مختلف توسط معلمان، برای تقویت تصورات دانش آموزان مفید است.

● استفاده از بازنمایی های چندگانه در یادگیری ریاضی و به ویژه یادگیری مفهوم تابع، یعنی اتصال، مقایسه و تبدیل از یک حالت بازنمایی به حالت دیگر بازنمایی به دانش آموزان کمک می کند تا بتوانند مهارت های نمایش و تشخیص مفهوم تابع را در بازنمایی های مختلف کسب کنند و بتوانند بین آن ها، اتصال و ارتباط برقرار نمایند.

پی نوشت

1. Hamley
2. Hedrick
3. Unifying
4. Flips
5. Slides
6. Bredenbach
7. Hawks
8. Nichols
9. Carlson
10. Dreyfus
11. Procept*

* فرهوم از دو کلمه ی process به معنی فرآیند و concept به معنی مفهوم ساخته شده است.

منابع

الف) فارسی

۱. سرشتی، حمیده. (۱۳۸۴). نقش تکنولوژی در ارتقاء مفاهیم ریاضی عمومی، پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.
۲. گویا، زهرا؛ مرتضی مهربانی، نرگس. (۱۳۸۳). ماهیت ریاضی. مجله ی رشد آموزش ریاضی، شماره ی ۷۶، صص ۲۸-۳۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۳. مدقالچی، علیرضا. (۱۳۷۹-۸۰)، چالش های آموزش ریاضی در حوزه ی حسابان. مجله ی رشد آموزش ریاضی، شماره ی ۶۱، صص ۴-۱۰، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

ب) انگلیسی

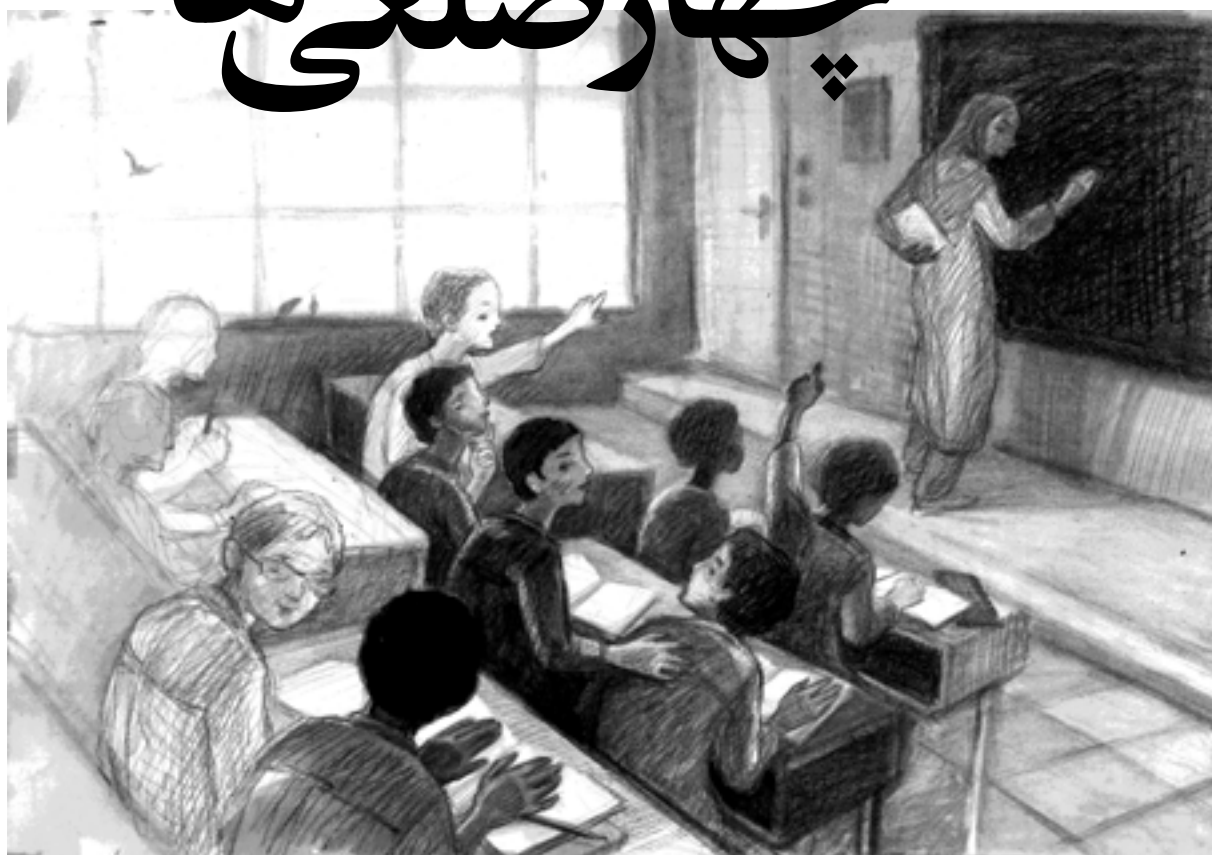
4. Akkoc, H. & Tall, D. (2006). AMismatch Between Curriculum Design and Student Learning: The Case of the Function Concept, *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at University of Warwick*, pp.1-8.
5. Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process Conception of Function, *Educational Studies in Mathematics*, 23, (3), pp. 247-285.
6. Carlson, M. (1999). A Study of Second Semester Calculus Students' Function Conceptions. *Published in Proceeding of PME 23*.
7. Davis, Gray E; Mc Gowen, Mercedes A. (2002). Function Machines & Flexible Algebraic Thought. *Proceeding of the 26th International Group for the psychology of Mathematics Education*, University of East Anglia, Norwich, U.K.
8. Hamley, H. R. (1934). The Function Concept in School Mathematics. *The Mathematical Gazette*, Vol. 18, No. 229. pp. 169-179.
9. Hedrick, E.R. (1938). The Function Concept in Dlementary Teaching and in Advanced Mathematics, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 45, No. 7. pp. 448-455.
10. Sajka, M. (2003). A Secondary School Students' Understanding of the Concept of Function: A Case Study, *Educational Studies in Mathematics*, 53, (3), pp. 229-254.
11. Tall, D. (1997). Function and Calculus, In A. J. Bishop et al (Eds), *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 289-325.
12. Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Defintion in Mathematics with Particular Reference to Limit and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.
13. Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, (4), pp. 356-366.

نغمه حاجی صادقی

کارشناس ریاضی و معلم ریاضی ابتدایی، منطقه ۲ تهران

بررسی ویژگی‌های

چهارضلعی‌ها



تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و

مقدمه

روایتی که به دنبال می‌آید، تجربه‌ی جدیدی را در ایران مطرح می‌کند؛ تجربه‌ای که با وجود قدمتش در خارج از ایران و رواجش در مجامع تحقیقی، در حوزه‌ی آموزش معلمان در ایران، مورد کم‌توجهی قرار گرفته است. این تجربه، فیلم‌برداری تدریس کلاس درسی توسط خود معلم، و به منظور آموزش وی است. از طرف هیأت تحریریه‌ی مجله به ایشان تبریک می‌گوییم که جسارت خودنقدی را که مقدمه‌ای بر یادگیری‌های عمیق‌تر است، در خود ایجاد نموده‌اند.

امیدواریم که این تجربه‌ها، به تدریج موضوع تحقیقات اثربخش و متنوعی در این حوزه گردد.

سردبیر

قسمتی از برنامه‌ی آموزش درس هندسه در سال چهارم دوره‌ی ابتدایی بر مبنای یادگیری فهرستی از تعاریف و ویژگی‌های چهارضلعی‌ها توسط دانش‌آموزان است. بررسی و اثبات ویژگی‌های چهارضلعی‌ها در سال دوم راهنمایی هم مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. زمانی که دوره‌ی کارآموزی خود را در سال دوم راهنمایی می‌گذراندم، متوجه شدم که به خاطر سپردن این ویژگی‌ها و تعاریف، بیش‌تر موجب گمراهی دانش‌آموزان شده و چه بسا تعداد زیادی از آن‌ها این خواص را فراموش کرده بودند. در حقیقت، شواهد نشان می‌دادند که اگر دانش‌آموزان، فقط با تکرار و به شکل طوطی‌وار بخواهند به حفظ کردن این ویژگی‌ها بپردازند، برایشان مشکل خواهد بود که شباهت‌ها و تفاوت‌های چهار ضلعی‌ها را بیان کنند و در سال دوم راهنمایی هم به خوبی نمی‌توانند دوباره به این مفاهیم برگشته و درک عمیق‌تری از این مفاهیم پیدا کنند.

با توجه به این نکته که مشاهده و مقایسه‌ی دقیق اشکال، وسیله‌ی بسیار مناسبی برای کشف و درک حقایق و روابط هندسی است، پس از بررسی فعالیت‌های مربوط به آشنایی با خواص چهارضلعی‌ها در کتاب درسی با این هدف که

دانش‌آموزان به طور شهودی با اندازه‌گیری و تجربه، به خواص موجود در چهارضلعی‌ها پی ببرند و از آن خواص برای رسم شکل آن‌ها استفاده کنند، فعالیتی را برای پایه‌ی چهارم ابتدایی طراحی کردم.

در کلاس من، فعالیت‌های گروهی مختلفی از ابتدای سال اجرا شده بود، دانش‌آموزان با کار گروهی آشنا بودند و از آنجا که نقش من در کلاس به عنوان هدایت‌کننده‌ی دانش‌آموزان بود، انتظار نداشتند که در فعالیت آن‌ها دخالت مستقیم کنم و من را به عنوان معلمی که فقط موضوعی را تدریس و تمرین‌های مربوط به آن موضوع را حل کنم نمی‌شناختند. بنابراین، دانش‌آموزان درگیر فعالیت‌ها می‌شدند و به کمک هم گروه‌های خود، فعالیت‌ها را پیش برده و اگر با مشکلی روبه‌رو می‌شدند، تلاش می‌کردند خودشان در گروه آن را حل کنند.

طبق برنامه‌ی قبلی، قرار بود یکی از همکاران برای فیلم‌برداری به کلاس من بیایند. از این که می‌خواستم در مقابل دوربین کلاس را اداره و فعالیتی را که تا به حال تجربه نکرده بودم برای اولین بار اجرا کنم، با هیجان و تپش قلب وارد کلاس شده و مراحل زیر را برای اجرای فعالیت انجام دادم.

ابتدا دانش‌آموزان در گروه‌های ۵ یا ۶ نفری خود نشستند. سپس یک پاکت شامل شکل‌های مقوایی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع، گونیا و خط‌کش در اختیار هر گروه گذاشتم.

اسامی شکل‌های هندسی اگرچه با توجه به صفات شکل انتخاب شده‌اند، ولی بیشتر جنبه‌ی قراردادی داشته و در جلسات قبل با نشان دادن شکل‌ها، نام آن‌ها را به دانش‌آموزان معرفی و یادآوری کرده بودم.

دانش‌آموزان فعالیت خود را آغاز کرده و از آن‌ها خواستم ابتدا درستی یا نادرستی خاصیت نوشته شده را حدس بزنند. سپس با استفاده از ابزار موجود، درستی حدس خود را بررسی کنند.

جدولی مانند جدول کشیده شده در برگه‌ی فعالیت را در پای تخته کشیدم. نمونه‌ای از برگه‌ی فعالیت در زیر آمده است.

تا کمترین خطای اندازه‌گیری را داشته باشد. گاهی گروه‌ها برای اطمینان بیشتر، از دو یا سه خط کش مختلف استفاده کرده و درستی حدس خود را بررسی می‌کردند. پس از ۲۰ دقیقه، کار گروه‌ها پایان یافت و جدول کشیده شده روی تخته توسط یکی از اعضای هر گروه کامل شد، و ضمن آن، دانش آموز مراحل کار و حدس گروه خود را بیان می‌کرد.

در این مرحله، از دانش آموزان هر گروه خواستیم تا با مداد رنگی، دور علامت‌های مربوط به هر ویژگی را که با شکل دیگری شباهت دارند، خط بکشند و هم‌زمان، همان کار روی تخته، توسط یکی از دانش آموزان در جدول مشابه، با استفاده از گچ‌های رنگی انجام شد.

در زیر، نمونه‌ای از جدول کامل شده توسط گروه‌ها ارایه می‌شود:

راهنمای جدول: ○ ← رنگ قرمز، □ ← رنگ آبی، Δ ← رنگ سبز

ویژگی‌ها	متوازی الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع
ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی هستند.	○	○	○	○
ضلع‌های روبه‌رو با هم موازی هستند.	○	○	○	○
زاویه‌های روبه‌رو با هم مساوی هستند.	○	○	○	○
قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.	○	○	○	○
اندازه‌ی دو قطر با هم مساویند.		□		□
همه‌ی زاویه‌ها قائمه هستند.		□		□
قطرها برهم عمود هستند.			△	△
همه‌ی ضلع‌ها هم اندازه هستند.			△	△

پس از تکمیل جدول، این سؤال توسط یک دانش آموز پرسیده شد که با توجه به این جدول، آیا درست است که مربع، همه‌ی ویژگی‌های لوزی، مستطیل و متوازی الاضلاع را دارد؟ با طرح

به نام خدا				
درس: ریاضی		فعالیت چهار ضلعی‌ها		
کلاس: چهارم		تاریخ:		
نام اعضای گروه:				
در جدول زیر، ویژگی‌های چهار ضلعی‌ها نوشته شده است. برای هر شکل، ویژگی را بررسی کن و آن را علامت بزن.				
ویژگی‌ها	متوازی الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع
ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی هستند.				
ضلع‌های روبه‌رو با هم موازی هستند.				
زاویه‌های روبه‌رو با هم مساوی هستند.				
قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.				
اندازه‌ی دو قطر با هم مساویند.				
همه‌ی زاویه‌ها قائمه هستند.				
قطرها برهم عمود هستند.				
همه‌ی ضلع‌ها هم اندازه هستند.				
از انجام این فعالیت به چه نتیجه یا نتایجی می‌رسید؟ توضیح دهید.				

در حین انجام فعالیت، به گروه‌ها سرزده و مشاهده کردم که برخی از گروه‌ها، ویژگی اول (تساوی ضلع‌های روبه‌رو) را برای هر چهار شکل بررسی می‌کردند و برخی دیگر، همه‌ی ویژگی‌ها را برای یک شکل (ستون اول) بررسی کرده و سپس شکل بعدی را مورد مطالعه قرار می‌دادند. یک سؤال موجب تعجب اکثر گروه‌ها شده بود که چرا برخی از ویژگی‌ها را هر چهار شکل دارا هستند؟ با مطرح کردن این پرسش، به نظر می‌رسید که گروه‌ها در جهت مناسبی حرکت می‌کنند. دانش آموزان با هم تبادل نظر کرده و از ابزار مربوطه استفاده می‌کردند و با افزایش مهارت اندازه‌گیری که یکی از اهداف این فعالیت بود، درگیر شده بودند

مربع و لوزی) را به کمک خود دانش آموزان تعریف کنیم.

در پایان فعالیت و خاتمه‌ی فیلم برداری، خوشحال بودم. هر چند این کلاس بدون نقص نبود، ولی حداقل با دیدن فیلم می‌توانستم عیب‌های فعالیت و کلاس را مشاهده کنم و از آن به عنوان تجربه‌ای در سال‌های بعدی تدریس استفاده کنم.

**شواهد نشان می‌دهد که
اگر دانش آموزان
بخواهند با تکرار و به
شکل طوطی وار به حفظ
کردن ویژگی‌های
چهارضلعی‌ها بپردازند،
مشکل خواهد بود که
بتوانند شباهت و
تفاوت‌های چهارضلعی‌ها
را بیان کنند**

این پرسش، دانش آموزان با توجه بیشتری به رابطه‌ی خط‌هایی که با مداد رنگی کشیده بودند پی بردند و دست‌های زیادی برای طرح سؤال بالا رفت. آن‌گاه، به گروه‌ها فرصت دادم تا با یکدیگر بحث کنند و نتایج به دست آمده از این فعالیت را در برگه‌ی فعالیت خود، ثبت نمایند. در پایان، نتیجه‌گیری و سؤال‌های هر گروه مطرح شد. سؤال‌هایی از قبیل این‌که ویژگی‌های هر شکل کدامند؟ شباهت‌ها و تفاوت‌های چهارضلعی‌ها چیست؟

- آیا مربع، لوزی و مستطیل، نوعی متوازی‌الاضلاع هستند یا خیر؟

- آیا می‌توان دوزنقه را نیز نوعی متوازی‌الاضلاع نامید؟

آیا مربع نوعی مستطیل است یا مربع نوعی لوزی است؟

...

همه‌ی این سؤال‌ها مورد بحث قرار گرفتند و به پرسش‌های مطرح شده در کلاس، با مشارکت همه‌ی دانش آموزان، پاسخ داده شد.

بالاخره، جمع‌بندی نهایی توسط یکی از دانش آموزان و با کمک من انجام شد و این فعالیت به پایان رسید.

این فعالیت برای یک جلسه تنظیم شده بود و در جلسه‌ی بعدی، مطالب مربوط به چهارضلعی‌ها که در کتاب درسی آمده، مرور شد. چون دانش آموزان خود ضمن اندازه‌گیری و تجربه‌ی عملی به خواص پی برده بودند، فعالیت‌های کتاب درسی را کامل و بدون مشکل انجام می‌دادند و هنگام رسم چهارضلعی‌ها، به خوبی از تجربه‌های خود استفاده می‌کردند. با بازبینی در برنامه‌ی این فعالیت، به نظر می‌رسد اگر زمان بیشتری برای انجام فعالیت توسط دانش آموزان در نظر گرفته می‌شد، با توجه به گفتگوهای پرچالشی که برای پاسخ به سؤال‌های دانش آموزان در کلاس و هنگام نتیجه‌گیری انجام شد، می‌توانستیم حتی چهارضلعی‌ها (متوازی‌الاضلاع، مستطیل،



در جستجوی راهی برای کشف ایده های بزرگ باشیم

افسانه حیدری ارچلو

دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی

می شود تا توسط کس دیگری، اجرا شود؛ آن ها برای هدفی با اثر قصد شده، طراحی می شوند» (تامپسون و همکاران، ۲۰۰۷).

کلید واژه ها: تکلیف ریاضی.

معمولاً، تکلیف به عنوان کاری تکمیلی از سوی مؤلفان کتاب های درسی یا معلمان، برای دانش آموزان تهیه می شود تا آنان در کلاس یا در خانه، به انجام آن ها بپردازند. طراحی، انتخاب و انجام تکلیف، وقت زیادی از دانش آموز و معلم را - چه در خانه و چه در مدرسه - به خود اختصاص می دهد و در صورت استفاده ی مناسب، می تواند باعث توسعه ی فکر و تعمیق یادگیری دانش آموزان شود. لذا ضرورت آموزش معلمان در این زمینه، امری اجتناب ناپذیر است. آموزشگران ریاضی توصیه می کنند که تکالیف یا مسائل به گونه ای طراحی شوند تا دانش آموز را درگیر مفاهیم پیش بینی شده در کتاب های درسی ریاضی آنان کنند (نقل به مضمون از چمن آرا، ۱۳۸۲).

چنین تکالیفی می توانند دانش آموز و معلم را نسبت به هماهنگی ریاضی آگاه تر کنند، زیرا همانطور که گویا (۱۳۸۴) به نقل از هوو (۲۰۰۱) اظهار داشته است، «معلمی که نسبت به

بشر برای این نیامده که کورکورانه و از روی نادانی کار کند، بلکه باید پیوسته با آن چه نادرست است در جدال و با آن چه نارواست در جنگ باشد.

«ژوزف ارنست رنان»

مقدمه

مطالعه ی چگونگی توسعه ی حرفه ای معلمان ریاضی یک هدف تحقیقی مهم در آموزش ریاضی بیان شده و در این راستا، تحلیل انواع نگرش ها و مطالعه ی روش های تدریس، سازماندهی گفتمان کلاسی و فعالیت های دانش آموزان از اهمیت ویژه ای برخوردار است. یکی از نتایج این مطالعات این است که به معلمان ریاضی کمک کنیم تا در طرح و انتخاب یک تکلیف خوب، ماهیت این گفتمان ها و مهارت های ایجاد آن را به خوبی دریابند. لذا توصیه می شود که این توسعه، از طریق برنامه های آموزش ضمن خدمت و قبل از خدمت صورت پذیرد. در این نوشته، نمونه ای از روش تدریس یک تکلیف در یک کلاس درس ریاضی ارائه می شود.

طبق تعریف، تکلیف های آموزشی توسط کسی طراحی

هماهنگی ریاضیات نابینا است، نمی تواند به دانش آموزان کمک کند تا آن را ببینند. « برای ایجاد چنین بصیرتی در معلمان، لازم است که دانش ریاضی مورد نیاز تدریس شناخته شده و به دنبال آن، برنامه های آموزش های قبل و بعد از خدمت معلمان طراحی و اجرا گردند. یادگیری ریاضی دانش آموزان، در گرو یادگیری معلمان است و این هر دو یادگیری، از ظرافت ها و پیچیدگی های ژرفی برخوردار است. تامپسون و همکاران (۲۰۰۷)، برای هر تکلیف، یکی از سه هدف زیر را در نظر می گیرند:

۱. یادگیرندگان را مشغول فعالیت های تکراری می کند^۱ (که گاهی به عنوان تمرین شناخته می شوند).
۲. یادگیرندگان را درگیر بازتاب انتزاعی^۲ می کند.
۳. تمایلات^۳ مدرسان برای ایجاد بحث هایی که یادگیرندگان و معلمان، فعالیت در حال انجام خود را به عنوان هدف گفتگو در نظر می گیرند، حمایت می کنند. اگرچه این سه هدف در طول زمان^۴ درهم تنیده می شوند^۵ اما در هر لحظه قابل تمیز هستند» (ص ۴۱۶). آن ها در ادامه، با اشاره به ضرورت آموزش طراحی و انتخاب تکلیف به معلمان ریاضی، ۹ تکلیف را از دو جنبه، در توسعه ی حرفه ای معلمان ریاضی مهم می دانند:

الف) به دانشجو- معلمان و معلمان ریاضی کمک می کنند تا بتوانند به مفاهیم ریاضیاتی که یاد گرفته اند، انسجام بخشند؛
 ب) می توانند زمینه ای ایجاد کنند که در آن ها، فرصت بحث و به کارگیری و استفاده از فهم و درک منسجمی که در دانش آموزان ایجاد شده فراهم شود (تامپسون، کارلسن و سیلورمن، ۲۰۰۷).
 تحلیل انواع تکالیف ریاضی و سازماندهی درست آن ها و مطالعه ی ارتباط بین آن تکالیف و فعالیت های دانش آموزان، اساس طرح و انتخاب هر تکلیف ریاضی را تشکیل می دهد و برای این که انتخاب مناسبی ایجاد شود، لازم است که معلمان، این ارتباط را ایجاد کنند.

به این منظور در سال های اخیر، مقاله های زیادی در زمینه ی طرح تکالیف ریاضی در سطح جهانی منتشر شده است که هریک به نحوی، می تواند راهنمایی مفیدی برای معلمان ریاضی باشد. به عنوان مثال، پرس تیج و پرکز^۶ (۲۰۰۷) مدلی در زمینه ی طراحی تکالیف در کلاس درس ریاضی ارائه داده اند و بیان داشته اند که ساختار آن برای آموزش معلمان می تواند مؤثر باشد. این مدل، مطابق نقشه ای براساس موضوع اصلی تشکیل دهنده ی دانش

معلمان که مرتبط با اتفاقات کلاس درس هستند، مطرح شده است:

۱. خرد عملی^۷: خردی که در اثر بودن و حضور در کلاس درس کسب می شود؛
۲. سنت های حرفه ای^۸: دانشی که از برنامه های درسی موجود مدارس و تجربه ها و تحقیقات حاصل می شود؛
۳. دانش خود دانش آموزان ریاضی دانش یادگیرنده^۹ (ص ۳۸۲).

نمونه ای از طراحی یک تکلیف برای آموزش معلمان ریاضی

تامپسون و همکاران (۲۰۰۷)، درسی را برای آموزش معلمان طراحی کردند و در آن از فعالیت هایی استفاده کردند که معلمان، با تجربه های شخصی خود، نیاز به انجام تکلیف را درک کنند. به طور مثال، آن ها تابع mod را طراحی کردند که حدس می زدند معلمان، راه های حاضر و آماده ای برای فکر کردن به آن ندارند. آن چه که در پی می آید، خلاصه ای از انجام این تکلیف توسط آنان است که در آن مقاله به آن اشاره شده است.

به گفته ی آن ها، «معمولاً فکر می کنیم که a و b در تعریف « $a \bmod b$ » برای اعداد حسابی برقرار است. مثلاً $27 \bmod 3 = 0$ زیرا ۲۷ بر ۳ تقسیم کنیم، باقیمانده اش صفر می شود و $27 \bmod 5 = 2$ است زیرا اگر ۲۷ را بر ۵ تقسیم کنیم باقیمانده ی آن ۲ است. اما می توانیم این ایده را برای کسرها و اعداد گنگ نیز تعمیم دهیم. تعریف « $a \bmod b$ » که اجازه ی این تعمیم را می دهد این است. $a \bmod b$ باقیمانده ای است که از کم کردن mb از a به دست می آید. وقتی که m ، بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی $\frac{a}{b}$ است. با این تعریف،

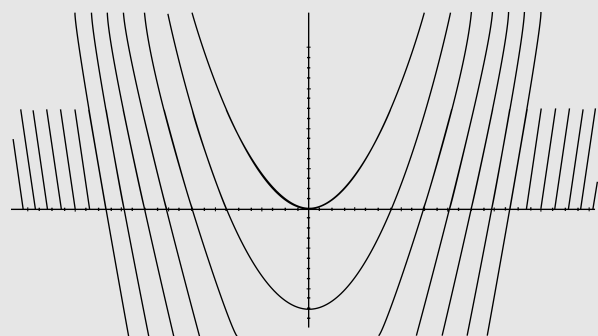
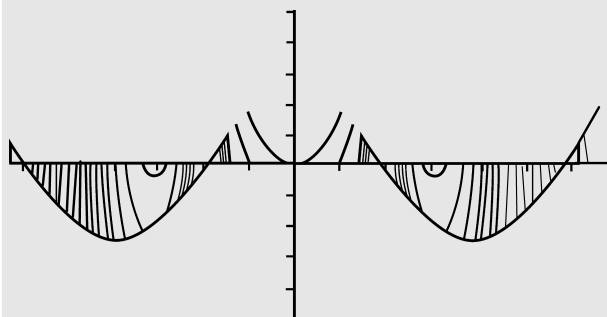
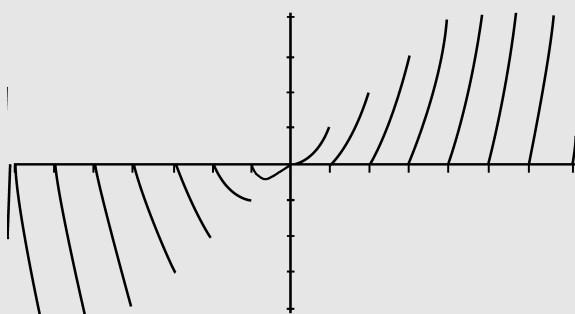
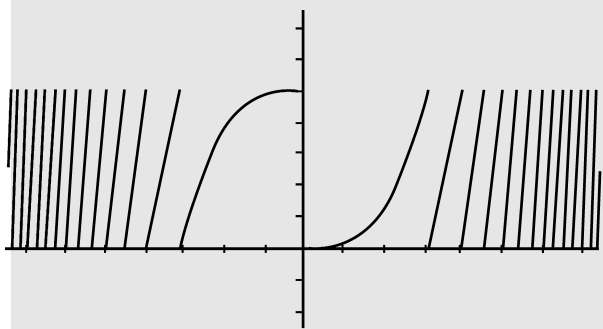
$$0/2 = 0/1 \bmod 2/5/6 \text{ زیرا } 3, \text{ بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی } \frac{6/5}{2/1} \text{ است و } 0/2 = 3(2/1) - 6/5.$$

به طور مشابه، $-1/9 = 6/5 \bmod (-2/1)$ زیرا -4 بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی $\frac{6/5}{-2/1}$

$$-1/9 = (-2/1)(-4) - 6/5 \text{ است.} \quad (\text{ص } ۱۱ \text{ و } ۱۲)$$

در کلاس، تمرین کردیم که چگونه $a \bmod b$ را برای مقادیر مختلف a و b محاسبه کنیم. معلمان ۱۷ دقیقه ۶ مقادیر مختلف کار کردند تا بالاخره یک تصویر ذهنی پیدا کردند که فرد موقع

محاسبه‌ی $a \bmod b$ ، ابتدا بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی $\frac{a}{b}$ را محاسبه می‌کند (آن را g بنامید) و سپس ، $a - gb$ را محاسبه می‌کند. درضمن این ۱۷ دقیقه ، معلمان با محاسبات مختلف ، اول تعریف $\bmod$ را برای مقادیر غیر صحیح a, b درونی کردند و در پایان ، برای تعمیم‌های خود ، به طور کلی استدلال کردند که $a \bmod b \leq 0$ وقتی که $b < 0$ و $a \bmod b \geq 0$ وقتی که $b > 0$ باشد. آن‌ها این فعالیت را با این سؤال ادامه دادند که «با داشتن این تعریف از $\bmod$ در ذهن ، نمودار $y = \bmod(x^2, 2)$ را حدس بزنید.» هنگامی که معلوم شد تکلیف درباره‌ی تابع $\bmod(x^2, 2)$ است ، معلمان واقعاً فرایند درک $\bmod$ را می‌ساختند به گونه‌ای که فرد ، هم‌زمان بتواند تغییرات $x, \bmod(x^2, 2)$ را تصور کند. سپس بحث کردیم که نمودار $\bmod(a^2, 2)$ با تغییر جزیی مقدار a چه شکلی خواهد بود. معلمان باید هم‌چنین با پیچیدگی مربع کردن x^2 آشنا شوند تا بتوانند مقدار $\bmod(x^2, 2)$ را محاسبه کنند. ما هم‌چنین ، بحث کردیم که چرا و کجا تابع شکسته می‌شود ، بعد از مدتی ، آن‌ها استدلال کردند که هر وقت x^2 عددی زوج ، باشد ، مقدار تابع صفر خواهد شد. بنابراین ، برای $\sqrt{2} < x < 0$ ، رفتار کلی نمودار تابع مانند نمودار تابع



شکل ۲: نمودار توابع $y = \bmod(x^2, \cos(x))$ ،

$$y = \bmod(x^2, x) \text{ و } y = \bmod(x^2, 2)$$

شکل ۱: نمودار $y = \bmod(x^2, 2)$ و

$$y = x^2 - a, a = 0, 2, 4, \dots$$

در هر مرحله ، از معلمان درخواست کردیم که شرح دهند که در هر مورد ، نمودارها چه رفتاری دارند و اصرار داشتیم از

توضیحاتشان، ریشه در درک آن‌ها از مفهوم $\text{mod}(a, b)$ و این‌که مقدار $\text{mod}(x^2, 2)$ با تغییر مقدار x تغییر می‌کند داشته باشد. بدین ترتیب، فرصتی برای معلمان فراهم کردیم تا تصورشان را از تابع mod عمیق‌تر کنند. سپس تکلیفی به آن‌ها دادیم و از ایشان خواستیم که رفتارهای تابع‌های $y = \text{mod}(x^2, \cos(x))$ ، $y = \text{mod}(x^3, 2)$ و $y = \text{mod}(x^2, x)$ را ابتدا با حدس زدن نمودار آن مشخص کنند و سپس، توضیحاتشان را با دیدن نمودار، دقیق‌تر کنند. بالاخره، از آن‌ها خواستیم که رفتار نمودار را شرح دهند و بگویند نمودار چرا و در کجا شکسته می‌شود. (شکل ۲)

همه‌ی معلمان به جز یک نفر، درباره‌ی دو تابع اول توضیحات رضایت‌بخشی دادند، اما فقط یکی از توضیحات درباره‌ی تابع سوم رضایت‌بخش بود. در این توضیحات، هم مفهوم تابع mod به کار برده شده بود و هم مفهوم هم‌تغییری^{۱۱} نشان داده شده بود، اگرچه همه‌ی معلمان، به طور صریح، از مفهوم هم‌تغییری استفاده نکرده بودند.

البته امیدواریم که معلمان با در نظر گرفتن تجربه شخصی خود از این تکالیف، ابتدا دانش‌آموزان را در مرحله‌ی انجام تکلیف و تمرین قرار دهند و سپس آن‌ها را به مرحله‌ی تجرید سوق دهند.

البته توضیح این نمودارها، تنها پایانی برای یک مرحله‌ی آماده‌سازی برای سؤالی بود که واقعاً می‌خواستیم معلمان آن را در نظر بگیرند و آن سؤال این بود که:

از این تکلیف، برای این‌که چگونه ممکن است به دانش‌آموزان کمک کنید تا فرایند تصورات خود را از تعریف‌های تابع و درک هم‌تغییری توسعه دهند، چه یاد گرفتید؟ (خلاصه‌ای از صفحات ۴۲۵ تا ۴۲۷ مقاله‌های تامپسون و همکاران، ۲۰۰۷).

بحث و نتیجه‌گیری

زمانی که تکلیفی را برای دانش‌آموزان مطرح می‌کنیم، باید به دانش‌آموزان فرصت دهیم تا هم با این تکالیف به صورت انفرادی یا گروهی دست و پنجه نرم کنند و هم راه‌حل‌ها و استراتژی‌های خود را با تمام کلاس درمیان بگذارند و درباره‌ی آن‌ها بحث کنند. انتخاب تکالیف خوب مستلزم

آن است که معلمان، هر روز به شیوه‌های فکر کردن دانش‌آموزان درباره‌ی ریاضیاتی که در حال بحث کردن روی آن هستند، گوش فرادهند. انتخاب تکلیف برای روز بعد باید چنان صورت گیرد، که به دانش‌آموزان در بازتاب بر آن‌چه که شما قصد ایجاد و توسعه‌ی آن‌ها را دارید کمک کند. سعی کنید، در جست‌وجوی راهی برای کشف ایده‌های بزرگ باشید. در یک تکلیف خوب، دانش‌آموزان به درون ریاضیات مهمی که قصد دارید آن‌ها یاد بگیرند، خواهند افتاد (لاپان و برایوز، ۱۹۹۵، نقل شده در چمن‌آرا زمستان ۱۳۸۲).

البته لازم است که معلمان، محتوای ریاضی درسی را که تدریس می‌کنند کامل بدانند تا بتوانند آن را به طور واضح به دانش‌آموزان ارائه دهند و ایده‌های ریاضی را برای طیف وسیعی از دانش‌آموزان، قابل دسترسی نمایند و دانش‌آموزان را درگیر فعالیت‌های چالش‌آور ریاضی کنند (گویا، تابستان ۸۴).

پی‌نوشت

1. Repetitive
2. Reflective Abstraction
3. Intention
4. Overtime
5. Intertwined
6. Prestage and Perks
7. Practical Wisdom
8. Professional Traditions
9. Learner Knowledge
10. Adaptation
11. Covariation

منابع

۱. گویا، زهرا. (۱۳۸۳). دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس در دوره‌های ابتدایی. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۸۰. تابستان ۸۴. ارائه شده در هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی.
۲. هیبرت و همکاران. (۱۹۹۶). توسعه و فهم درک ریاضی. ترجمه‌ی سپیده چمن‌آرا. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۷۴. زمستان ۸۲.
3. Prestage, S., & Perks, P. (2007). Developing teacher knowledge using a tool for creating tasks for the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10: 381-390. Springer.
4. Thompson, P. W.; Carlson, M. P.; Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 10: 415-432. Springer.

چه کسی پاسخ‌گوی این رفتارها در مدارس است؟

مریم گویا

دبیر بازنشسته‌ی ریاضی

اشاره

متأسفانه نیروهای نظارتی یا نمی‌بینند یا نمی‌خواهند ببینند. چرا که گذر از ارتفاعی چنین کوتاه جرم محسوب نمی‌شود و در صورت مشاهده، کسر شأن ناظرین است که به این گونه تخلفات بها بدهند. بگذریم که قصه فراوان است و هر روز ماجرای تازه‌آنها هم از نوع ابتکاری و شکوفا شده‌اش! - در این دیار به وقوع می‌پیوندد. به نمونه‌ای از روش‌های خلاق! و در عین حال مفید!! که نتایج درخشانی در امر یادگیری داشته و باعث رتبه‌های دورقمی در کنکور سراسری و نخبه‌پروری و رشد و شکوفایی و خلاقیت! و... شده است اشاره می‌کنم.

و اما بشنوید - ببخشید؛ بخوانید - قصه‌ی امروز را: بخش نخست (سال ۱۳۸۷): یکی بود، یکی نبود. غیر از خدا هیچ‌کس نبود. در شهر رنگارنگ و پردود و غبارآلود و پرسروصدای ما؛ قرار شد برای کمک به بودجه‌ی دولت، بخش خصوصی فعال شود و همان‌طور که می‌دانید بهترین جا و پربازده‌ترین حوزه‌ها در زمینه‌ی سوددهی، آموزش و پرورش بود. به همین جهت با حمایت‌های بی‌دریغ مسئولان و کارشناسان از جنبه‌ی مالی و غیرمالی؛ مدارس غیرانتفاعی - غیرانتفاعی برای کاربران نه مؤسسان - یکی پس از دیگری به ثبت رسیدند و صاحب امتیازان آنها با هدف پرورش نسلی خلاق و زبده و با فرهنگ و با... و با... به ارائه‌ی ایده‌های مبتکرانه‌ی خود پرداختند. ابتکارات هم در تربیت بود و هم در تعلیم و در این مورد هر کس سعی می‌کرد گوی سبقت را از دیگری بریاید و روی دست دیگران بلند شود. مدرسه‌ی «الف»، کلاس تست می‌گذاشت، مدرسه‌ی «ب» علاوه بر آن، اردوی آموزشی برگزار می‌کرد.

مدرسه‌ی «پ» به غیر از موارد فوق، به ایجاد کلاس‌های هوش هیجانی و مدیریت زمان، هوش اجتماعی و... مبادرت می‌کرد.

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیئت تحریریه‌ی مجله، جست‌وجو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجله‌ی خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال دارند. به همین دلیل، آرزوی دیرینه‌ی دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی می‌رود تا تحقق یابد. درنتیجه، با نظر هیئت تحریریه‌ی مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. درضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ‌گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل نظر را از طریق بازتاب بر آنها، معنادارتر و کارآتر کنند. البته لازم به توضیح است که دیدگاه‌های مطرح شده، الزاماً هم‌سو با سیاست‌ها و دیدگاه‌های دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نیستند.

این روزها بازار انواع و اقسام نوآوری‌ها در زمینه‌های مختلف گرم است و اختراع و ابتکار و... رواج فراوان دارد؛ به‌ویژه در آموزش و پرورش که ظاهراً دیوارش از همه کوتاه‌تر است و همه می‌توانند به نوعی از آن بالا بروند. طبیعی است بیش از همه قدکوتاهان مشتاق پیمودن چنین دیوارهایی هستند، چون هم می‌توانند و هم پس از بالا رفتن احساس بلندی و برتری می‌کنند.

مدرسه‌ی تازه تأسیس دیگری به غیر از بهره‌گیری از ابتکارات دیگران، برنامه‌ی زمان‌بندی در خانه و خارج از مدرسه برای دانش‌آموزان در نظر می‌گرفت که بتواند همه‌ی ساعات شبانه‌روز دانش‌آموزان را تحت کنترل داشته باشد و مطمئن باشد که معجونی که تدارک دیده حتماً پخته می‌شود و طرحی نو درمی‌اندازد. به هر حال روزها یکی پس از دیگری اما با شتاب می‌گذشت و روزه‌به‌روز، هم به تعداد و هم به ابتکارات چنین مدرسی افزوده می‌گشت. نمی‌خواهم سرتان را درد بیاورم که پیه این طرح و لایحه و قانون‌ها در امر آموزش و پرورش تقریباً به تن همه خورده است و همه به نوعی از مزایای بی‌شمار روش‌های خودسرانه و مبتکرانه و چه و چه در تعلیم و تربیت بهره‌مند شده‌اند و نتایج درخشان چنین اقداماتی را در ادبیات کلامی و رفتار و کردار نسل جوان مشاهده می‌کنند. بگذریم از پشت صحنه‌ی این روش‌ها و آموزش‌ها که با اندکی تحمل و تعقل - آن هم تنها اندکی و نه بیشتر! - می‌توان انواع بیماری‌های



روانی، افسردگی‌ها، پشت پا زدن به همه‌ی اصول و تعالیم و... را در گروهی از نسل جوان مشاهده کرد. در همین آشفته‌بازاری که ذکر آن رفت؛ پدر و مادر عزیزی که خواهان قبولی فوری و بی‌قید و شرط فرزند نازنینشان در کنکور سراسری بودند و می‌خواستند هر آن‌چه از دستشان برمی‌آید انجام دهند تا به وظایف شرعی و قانونی و عرفی و... خود عمل کرده باشند و کم نگذاشته باشند؛ پس از ماه‌ها جست‌وجو و پی‌گیری و پرسش از افراد مختلف بالاخره نام او را در یکی از مدارس غیرانتفاعی برای دوره‌ی پیش‌دانشگاهی نوشتند و نفس راحتی کشیدند. علت این همه تلاش هم در ظاهر به خاطر ناکامی فرزندشان در سه سال دوره‌ی دبیرستان دولتی بود که نتیجه‌ی مطلوبی عایدشان نشده بود. این مرکز از همان ابتدا به آن‌ها اطمینان داد که فرزندشان بسیار بهتر از تصور آن‌ها

است و با برنامه‌های ویژه‌ی مدرسه حتماً در کنکور سراسری قبول می‌شود؛ به شرط آن که نعل به نعل مطابق روش‌ها و برنامه‌های مدرسه عمل کنند. کلاس و درس مطابق سایر مراکز پیش‌دانشگاهی غیرانتفاعی از تابستان شروع شد و رفت و آمد در روزهای گرم ادامه داشت. این مرکز نیز نتوانست در دانش‌آموز مذکور رضایت‌خاطری ایجاد کند زیرا تحمل قوانین و مقررات مدرسه - منظور همان مرکز پیش‌دانشگاهی است - و برنامه‌های تحمیلی و اطاعت کورکورانه و بی‌قید و شرط از اولیاء مدرسه را نداشت و هر روز دل‌زده‌تر و ناراضی‌تر می‌شد - شاید دلیلش تشابه او با بقیه افراد خانواده‌ی بزرگ‌پدری و مادری‌اش بود که همه تقریباً غیرمتعارف بودند و در قالب عرف تحمیلی نمی‌گنجیدند و رفتارهای غیرمعقول - از نظر تعریف اجتماعی -

داشتند. در چنین حال و هوایی از بد حادثه یک روز صبح که باید به موقع به مدرسه می‌رسید و سر کلاس حاضر می‌شد و اتفاقاً از روزهای بسیار خسته‌کننده هم بود - از نظر خودش - حال بسیار بدی داشت و بدنش به شدت درد می‌کرد. به این درد آن بی‌زاری و دل‌زدگی از چنین روزی نیز اضافه شده بود و با بی‌میلی و سختی و درد و... همراه پدر خود راهی مدرسه شد زیرا اندکی از ساعت کلاس گذشته بود و اجازه‌ی ورود به مدرسه را بدون ولی خود نداشت. چون دیر به کلاس رسیده بود، مشمول قانون خانم دبیر شد (قانونی که طبق گفته‌ی خود دبیر و مسئولین مدرسه در مدارس دیگر هم، باعث

شده دانش‌آموزان ایشان با رتبه‌های دورقمی به دانشگاه‌های معتبر راه پیدا کنند) و اما قانون این دبیر گرامی که ظاهراً خودشان طرحش را داده و خودشان در ذهن خودشان تصویب کرده‌اند؛ این است که هر کس دیر به کلاس بیاید تا آخر ساعت باید سر پا بایستد و حق نشستن روی صندلی یا نیمکت را ندارد. موضوع به همین جا ختم نشد. همان‌طور که ذکر شد این روز از روزهای بسیار خسته‌کننده بود زیرا از ۷:۳۰ الی ۱۶:۳۰ لاینقطع ریاضی درس داده می‌شود آن هم با همان دبیر و هر سه درس ریاضی (البته برنامه‌های مدرسه از نظر مسئولین از پشتوانه‌ی غنی آموزشی و استحکام کافی برخوردار می‌باشد). حال تصور کنید دختری که مریض است و به همین دلیل دیر به کلاس رسیده، در طول ۸

در عصر پرشتاب امروز
در کجای دنیا،
ساعت‌ها جوانی را
سرپا نگه می‌دارند و
تحقیر می‌کنند تا
آن‌که متنبه شود
مشکلات و
گرفتاری‌های روحی،
روانی و رفتاری جوانان
کم است که چنین
مشکلاتی را هم به
آن‌ها اضافه می‌کنیم؟

ساعت سرپا بایستد و هر لحظه به میزان درد و بیزاری اش افزوده شود. مسأله‌ی جدی‌تر این‌که بقیه‌ی دانش‌آموزان هیچ اعتراضی نمی‌کنند و از روش تربیتی و تدریس خانم دبیر بسیار استقبال می‌کنند و معتقدند که چنین روش‌هایی باعث می‌شود آن‌ها منضبط شده و وقتشان بیهوده تلف نشود.

این دانش‌آموز عزیز آن روز را با هر زحمت و مشقتی که بود تحمل می‌کند و وقتی نالان و اشک‌ریزان به خانه می‌رسد، پاهایش دیگر تحمل کشیدن بدنش را ندارد و به زمین می‌افتد و از درد جسمی و بیشتر از آن درد روحی و تحقیری که شده و دیگران حتی ککشان هم نگزیده است، ساعت‌ها به خود می‌پیچد و مسئول همه‌ی کج رفتاری‌های دیگران و ناکامی و درد خود را پدر و مادرش می‌داند که به خواسته‌ها و حرف‌های او توجهی نکرده و علی‌رغم نق‌زدن‌ها و نالیدن‌ها و اعتراض‌های او در مورد مدرسه، حاضر نشده بودند مدرسه‌ی او را تغییر دهند و او را از این همه مصیبت نجات دهند.

چند روزی از این ماجرا گذشت و این نازنین سرخورده و دلخور حتی اجازه نداد هیچ‌کس از مدرسه و دبیر و چنین روش‌هایی شکایت کند یا با آن‌ها حرف بزند. در نهایت خود را مقصر دانست و نتیجه گرفت که اشکال از او است. چون دیگران هم درس را خوب می‌فهمند و هم از دبیر و روشش راضی هستند و او که تحمل چنین روش یا روش‌هایی را ندارد و درس را نمی‌فهمد حتماً غیرعادی و غیرمتعارف و خنگ و ضعیف است! و مدرسه و معلم و... تقصیری ندارند.

قصه‌ی ما در همین حد باقی مانده اما تمام نشده است. بقیه‌ی داستان و سرانجام این قصه‌ی پرغصه، باشد برای سال بعد که نتایج

کنکور اعلام می‌شود.

در حال حاضر روی سخنم با پدرها و مادرها، با مسئولین و دست‌اندرکاران و با همه‌ی کسانی است که هنوز دارای خرد و تعقل و احساس و عاطفه‌اند. چرا به خود نمی‌آییم؟ چرا تفکر و تعقل جای خود را به روش‌های خلق‌السّاعه و قرون وسطایی داده؟ در زمان حاضر، در عصر پرشتاب امروز در کجای دنیا، ساعت‌ها جوانی را سرپا نگه می‌دارند و تحقیر می‌کنند تا آن‌که متنبه شود تا پس از این، چنین عمل بد و زشتی!! - دیر آمدن به کلاس! - را

**عده‌ای از چنین جوانان،
یا سرکش و عاصی و
لجوج و خودخواه
می‌شوند یا مطیع و
بله‌قربان گو و خوار و
ذلیل؛ کسانی که چشم به
بزرگ‌ترها و توانگرها
می‌دوزند تا برایشان
تصمیم بگیرند
آن‌ها که آگاهانه و یا
ناآگاهانه در جهت
تخریب نسل جوان
می‌کوشند باید در دنیا و
آخرت پاسخ‌گو باشند**

انجام ندهد. اگر با نیم‌ساعت دیرکرد بخش کوچکی از درس را متوجه نمی‌شد، با این روش تمام هشت ساعت کلاس یعنی یک روز کامل درسی را از دست داد.

واقعاً چه کسی پاسخ‌گو است؟ چه کسی مسئول چنین اقدامات خودسرانه‌ای است؟

چه کسی مسئولیت ناشی از عواقب چنین روش یا روش‌هایی از این دست را به عهده می‌گیرد؟ مشکلات و گرفتاری‌های روحی، روانی و رفتاری جوانان کم است که چنین مشکلاتی را هم به آن‌ها اضافه می‌کنیم؟ با این روش‌ها به کجا می‌خواهیم برسیم؟ این عزیزان در کجا باید آموزش زندگی ببینند؟ چند درصد آن‌ها پس از ورود به دنیای واقعی، کار، ازدواج و... از پس مشکلات واقعی برمی‌آیند و توان حل مسائل و تطبیق دادن خود با شرایط ناهماهنگ را دارند؟ عده‌ای از چنین جوانان، یا سرکش و عاصی و لجوج و خودخواه می‌شوند یا مطیع و بله‌قربان گو و خوار و ذلیل؛ کسانی که چشم به بزرگ‌ترها و توانگرها می‌دوزند تا برایشان تصمیم بگیرند. زمان می‌گذرد و ما باید پاسخ‌گوی آیندگان باشیم و درباره‌ی عواقب تصمیماتی که می‌گیریم، بیندیشیم. باید بدانیم هیچ عملی از ذهن تاریخ پاک نمی‌شود و همه‌ی تصمیم‌ها و برنامه‌ریزی‌ها، چه خوب و چه بد، در سابقه‌ی تاریخی یک ملت ثبت می‌شود. به‌ویژه در دنیای امروز که هیچ حرف و حرکتی در هیچ کجای دنیا از چشم دیگران پوشیده نمی‌ماند و برای ابد ثبت و ضبط خواهد شد. آن‌ها که آگاهانه و یا ناآگاهانه در جهت تخریب نسل جوان می‌کوشند باید در دنیا و آخرت پاسخ‌گو باشند. به خود آییم و بیش از این عاقبت خود را تبه‌نازیم. زمستان می‌گذرد و ما می‌مانیم و روسیاهی زغال.

بهار ۱۳۸۸: سال جدید (۱۳۸۸) آغاز می‌شود. مدرسه دست به ابتکار تازه‌ای می‌زند. برای دانش‌آموزان کلاس‌های جمع‌بندی در تالار... برگزار می‌کند و هر دانش‌آموز برای شرکت در کلاس‌ها باید مبلغی بپردازد. این کلاس‌ها بنا به اظهارنظر مسئولان مدرسه توسط بهترین دبیران اداره می‌شود به این ترتیب که کل مطالب هر درس از ابتدا تا پایان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، در یک روز (۸ ساعت)، مرور و جمع‌بندی می‌شود. این ابتکار، هم مروری است بر درس‌های گذشته و هم در ایام عید و دید و بازدید حواس دانش‌آموزان پرت نمی‌شود و وقتشان بیهوده تلف نمی‌گردد و... اما بشنوید پایان ماجرا را...

شهریور ۸۸: قصه‌ی ما به سر رسید ولی دختر عزیز ما نه تنها رتبه‌ی دورقمی نیاورد که با رتبه‌ی پنج‌رقمی در هیچ رشته‌ای در کنکور سراسری موفق نشد و این قصه‌ها هم چنان ادامه دارد و قربانی می‌گیرد.

درباره‌ی دیدگاه

«دوره‌ی تحلیل و روش تدریس ریاضی ۲ متوسطه و بازآموزی علمی آن»

مؤلفان کتاب ریاضی (۲)

یکی از مشکلات کتاب‌های فعلی ما آن است که مفاهیم در زمینه‌های مناسب و طبیعی عرضه نمی‌شوند و دانش‌آموزان در مرتبط کردن مفاهیم ریاضی با زندگی روزمره‌ی خود، دچار مشکل می‌شوند. عرضه‌ی مفاهیم در زمینه‌های طبیعی از اصول آموزش است و اتفاقاً با نشست‌هایی که با معلمان در نقاط مختلف کشور داشته‌ایم، همگی از این فصل احساس رضایت می‌کردند. ناگفته نماند که در نسخه‌ی نهایی کتاب، عنوان «هنر شمارش» وجود ندارد و ظاهراً ناقد محترم، نقد خود را بر مبنای نسخه‌ی عرضه‌شده در دوره‌ی تأمین مدرسی گذاشته‌اند. هم‌چنین، ناقد محترم نقدهایی هم در مورد «بردار» انجام داده‌اند که آن نیز در نسخه‌ی نهایی وجود ندارد.

۲. ناقد: مؤلفان بر خودآموز نبودن کتاب تأکید داشته‌اند در حالی که قسمت‌های بسیاری از کتاب خودآموز است. آن‌چه که مؤلفان تأکید داشته‌اند این است که کتاب درسی به صورت کتاب خودآموز نوشته نمی‌شود و اگر احیاناً در برخی موارد کتاب توانسته باشد مطلبی را خوب پرورش داده باشد که بدون هدایت و کمک معلم مفهوم یاد گرفته شود، اتفاق مبارکی است و آن را باید حُسن کتاب محسوب کرد.

۳. ناقد: مؤلفان گفته‌اند رویکرد حل مسئله را در کتاب پیاده کرده‌اند. در حالی که با مروری بر کتاب، این ادعا رنگ می‌بازد. رویکرد حل مسئله یکی از روش‌های نوین آموزشی است و محور اصلی تألیف کتاب‌های درسی خواهد بود. اما این که تا چه حد در این کار موفق باشیم، بستگی به موضوعات و توانایی‌های آموزشی ما دارد. رویکرد حل مسئله مورد توجه ما

در بخش دیدگاه مجله‌ی رشد شماره‌ی ۹۸، مقاله‌ای با نام بالا به چاپ رسیده است که مؤلفان کتاب ریاضی ۲ را بر آن داشت که توضیحاتی را ارائه کنند.

ابتدا باید بگوییم که نقد یکدیگر، عملی نیکو و پسندیده است به شرط آن که در جهت رفع نقص‌ها و رشد یکدیگر باشد و این نمونه‌ای از همان فریضه‌ی امر به معروف و نهی از منکر است. ما با همین نگاه، نقدهای انجام شده در آن مقاله را خواندیم و امیدواریم خوانندگان نیز با همین نگاه، نقدهای ما را بخوانند.

بخشی از نقدهای انجام شده در آن مقاله، مربوط به دوره‌ی تأمین مدرسی بود که نیازی به سخن گفتن درباره‌ی آن نیست و بخش دیگر این نقدها، مربوط به کتاب بود که نیازمند بررسی است.

پیشاپیش، گروه مؤلفان اذعان می‌دارند که این کتاب دارای نقایص فراوانی است که بخشی از آن به طور طبیعی در هر تألیف جدیدی رخ می‌دهد و بخش دیگری نیز مربوط به مشکلات فراوانی بود که به طور غیرطبیعی بر مؤلفان تحمیل شد. انتظار ما از همه‌ی معلمان و کارشناسان آموزشی آن است که با مطالعه‌ی سنجیده‌ی کتاب، ما را با این نقیصه‌ها آشنا کنند تا اصلاحات لازم در آن صورت بگیرد.

اما مناسب است نقدهای ناقد محترم را یک به یک بررسی کنیم.

۱. ناقد: در فصل «هنر شمارش»، مقدمه‌ای طولانی برای مفهوم ساده‌ی اصل ضرب آمده است و نهایتاً، با مثال‌های ابتدایی این مفهوم توضیح داده شده است.

و بدیهی است که در نوشتن بسیاری از مطالب از مراجع مختلف استفاده شده است.

۶. ناقد: کتاب‌های ریاضی ۱ و ۲ قبلی تجرید بالایی داشتند و کتاب‌های فعلی شهود زیادی دارند و دانش‌آموزان دانشمند فردا را از جذابیت‌های ریاضی محروم می‌کنند.

گزینش مواد درسی و شیوه‌های ارایه و اهداف کتاب‌های درسی، در برنامه‌ی درسی تعیین می‌شوند و ما نمی‌توانیم از پیش خود هدف‌های سلیقه‌ای برای خود انتخاب کنیم و کتاب‌ها را طبق ذوق و سلیقه‌ی خود تألیف کنیم. کتاب‌های درسی برای کل دانش‌آموزان کشور و تحت اهداف مشخص نوشته می‌شوند و مخصوص قشر نخه‌ی دانش‌آموزان نیستند. بنابراین، اگر قرار است در مورد مواد و روش‌های ارائه و هدف‌ها نقدی صورت بپذیرد باید راهنمای برنامه‌ی درسی را نقد کرد. شاید قبلاً در تألیف کتاب‌های درسی ذوق و سلیقه‌ی مؤلفین نقش اصلی را در تألیف کتاب بازی می‌کرده است و فرض شده است مؤلفین جدید هم به خاطر سلیقه‌های شخصی خود به چنین روندهایی در تألیف روی آورده‌اند. اما مسئله عمیق‌تر از این حرف‌ها است.

۷. ناقد: تألیف کتاب‌های درسی حساسیت‌های بالاتری را می‌طلبد و نباید کوچک‌ترین اشکالی در آن‌ها باشد. در این مورد کاملاً با ناقد محترم هم عقیده‌ایم ولی کجاست آن شرایط و محیط مطلوبی که چنین امکانی را به ما بدهد. در حال حاضر تألیفات جدید در شرایطی سخت و با کمترین امکانات صورت می‌گیرد و ما نیز متأسفیم.

بوده است و هر کجا توانسته‌ایم آن را پیاده کرده‌ایم و رگه‌های آن در کتاب قابل مشاهده است. ولی قبول می‌کنیم که هنوز در پیاده‌سازی این روش، در اول راه قرار داریم.

۴. ناقد: برخی تعریف‌ها غیردقیق، در برخی موارد غیرعلمی است.

کسانی که با آموزش ریاضی به طور جدی سروکار دارند می‌دانند که یادگیری یک مفهوم با تعریف دقیق و منطقی آن آغاز نمی‌شود، بلکه ابتدا درک‌های شهودی رخ می‌دهند بعد ارتباطات کشف می‌شوند و بعد در زمینه‌های مختلف مشاهده می‌شوند و تعریف دقیق مفهوم آخرین مرحله‌ی آموزش است. بنابراین، هر جا که قرار است دانش‌آموزان را با مفهوم جدیدی آشنا کنیم، آن سخن‌های غیردقیق و توصیف‌های غیردقیق رخ می‌دهند که دقیق شدن آن‌ها شاید به سال‌های بعد هم موکول شود. البته رعایت دقت در تعاریف تا حد امکان که موجب غامض شدن مفهوم نشود و آموزش را مختل نسازد کاملاً ضروری است و حتماً انجام شده است و اگر موارد خاصی خلاف آن باشد مؤلفان خوشحال می‌شوند که این موارد برای گروه تألیف فرستاده شوند.

۵. ناقد: برخی مطالب از منابعی آمده است و هیچ ارجاعی به آن‌ها نشده است.

در کتاب‌های درسی رسم بر آن نیست که مرجع هر مطلبی بلافاصله ذکر شود و معمولاً در آخر کتاب این مراجع می‌آیند و در این کتاب نیز همین عمل انجام شد ولی به خاطر برخی ملاحظات در تعداد صفحات که باید مضرب ۸ باشند صفحه مراجع حذف شده است. مطمئناً هیچ عمدی در کار نبوده است

اثبات نامساوی‌ها به کمک

توابع محدب (۲)

اشاره

در قسمت اول این مقاله به معرفی توابع محدب و همچنین بیان و اثبات نامساوی ینسن پرداختیم. نامساوی ینسن کاربردهای متنوعی دارد و از آن می‌توان در اثبات تعداد زیادی از نامساوی‌های کلاسیک و مهم استفاده کرد. در این مقاله، قصد داریم دنباله‌ای از نامساوی‌های کلاسیک و مشهور را به دست آوریم.

یادآوری

تابع محدب. تابع حقیقی مقدار f روی بازه I محدب^۱ است هرگاه برای هر x و $y \in I$ و $\lambda \in [0, 1]$ ؛

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

تابع f اکیداً محدب نامیده می‌شود هرگاه

برای هر $x \neq y$ ، $x, y \in I$ و $\lambda \in (0, 1)$ ؛

$$f(x + (1-\lambda)y) < f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

توجه. f مقعر (اکیداً مقعر) روی I نامیده می‌شود اگر $-f$ روی I محدب (اکیداً محدب) باشد.

نامساوی ینسن^۲. فرض کنید $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. هم‌چنین فرض کنید $x_1, \dots, x_n \in I$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ به طوری که $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. در این صورت

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (۱)$$

● اگر f یک تابع مقعر باشد، آن‌گاه

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (۲)$$

● اگر f یک تابع اکیداً محدب (اکیداً مقعر) باشد، آن‌گاه وقتی $x_1 = \dots = x_n$ تساوی در (۱) و (۲) برقرار است.

قبل از بیان نامساوی مهم و کاربردی میانگین توانی وزن دار، دو نامساوی کلاسیک را بیان و اثبات می‌کنیم.

نامساوی میانگین حسابی-میانگین هندسی وزن دار^۳

فرض کنید $x_1, \dots, x_n \geq 0$ و $w_1, \dots, w_n > 0$ باشند. در این صورت؛

$$\frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n} \geq (x_1^{w_1} x_2^{w_2} \dots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + \dots + w_n}} \quad (۳)$$

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

اثبات. فرض کنیم $x_1, \dots, x_n > 0$ (در غیر این صورت، نامساوی به وضوح برقرار است.) در این صورت، با استفاده از نامساوی (۲) با تابع اکیداً مقعر $f(x) = \ln x$ روی $(0, \infty)$ با

$$\text{انتخاب } \lambda_i = \frac{w_i}{w_1 + \dots + w_n} \quad (1 \leq i \leq n) \text{ داریم}$$

$x_1, \dots, x_n$ ، نامساوی موردنظر به دست می آید.

□

با قرار دادن $w_1 = w_2 = \dots = w_n = 1$ در نامساوی (۵)

داریم:

نامساوی میانگین هندسی - میانگین هارمونیک (GM-HM):

اگر $x_1, \dots, x_n > 0$ ، آن گاه

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (6)$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

میانگین توانی وزن دار^۲

فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $w_1, \dots, w_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند. در این صورت برای هر عدد حقیقی $t \neq 0$ ، میانگین توانی وزن دار از مرتبه t را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$M_t(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{w_1 x_1^t + \dots + w_n x_n^t}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{1}{t}} \quad (7)$$

بعضی از میانگین های وزن دار اسامی خاص دارند:

● $M_1(x_1, \dots, x_n) = \frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n}$ میانگین حسابی وزن دار^۳ (WHM)

● $M_{-1}(x_1, \dots, x_n) = \frac{w_1 + \dots + w_n}{\frac{w_1}{x_1} + \dots + \frac{w_n}{x_n}}$ میانگین هارمونیک وزن دار^۴ (WHM)

● $M_2(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{w_1 x_1^2 + \dots + w_n x_n^2}{w_1 + \dots + w_n}}$ جذر میانگین

مربعات وزن دار^۱ (WRMS)

● اگر قرار دهیم $M_t(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t(x_1, \dots, x_n)$ ، آن گاه با استفاده از خواص تابع لگاریتم و قاعده ی هوییتال داریم:

$$\text{Ln} M_{\infty}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Ln} \left(\frac{w_1 x_1^t + \dots + w_n x_n^t}{w_1 + \dots + w_n} \right)}{t}$$

$$\text{Ln} \left(\frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n} \right) \geq \frac{w_1 \text{Ln} x_1 + \dots + w_n \text{Ln} x_n}{w_1 + \dots + w_n}$$

یا

$$\text{Ln} \left(\frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n} \right) \geq \text{Ln} (x_1^{w_1} \dots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + \dots + w_n}}$$

چون $f(x) = \text{Ln} x$ یک تابع اکیداً افزایشی روی $(0, \infty)$ است. از این رو

$$\frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n} \geq (x_1^{w_1} \dots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + \dots + w_n}}$$

□

با قرار دادن $w_1 = \dots = w_n = 1$ در نامساوی (۳) داریم

نامساوی میانگین حسابی - میانگین هندسی (AM-GM): اگر $x_1, \dots, x_n \geq 0$ ، آن گاه

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \quad (4)$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1 = \dots = x_n$.

نامساوی میانگین هندسی - میانگین هارمونیک وزن دار^۵

فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ و $w_1, \dots, w_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند. در این صورت؛

$$\frac{w_1 + \dots + w_n}{\frac{w_1}{x_1} + \dots + \frac{w_n}{x_n}} \leq (x_1^{w_1} \dots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + \dots + w_n}} \quad (5)$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1 = \dots = x_n$.

اثبات.

راه اول. به طور مستقیم از نامساوی (۱) با تابع اکیداً محدب

$$\lambda_i = \frac{w_i}{w_1 + \dots + w_n} \text{ با انتخاب } f(x) = \text{Ln} \frac{1}{x} \text{ روی } (0, \infty)$$

نامساوی موردنظر حاصل می شود. ($1 \leq i \leq n$)

راه دوم. با جای گذاری $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$ در نامساوی (۳) به جای

مرتبه t و M_1, M_{-1}, M_2 و M_0 را به ترتیب میانگین حسابی (AM)، میانگین هارمونیک (HM)، جذر میانگین مربعات (RMS) و میانگین هندسی (EM) می‌نامیم. حال می‌خواهیم ارتباط بین میانگین‌های کلاسیک را به دست می‌آوریم.

نامساوی میانگین توانی وزن دار

فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $w_1, w_2, \dots, w_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند. در این صورت اگر s و t اعداد حقیقی مخالف صفر باشند، به طوری که $s < t$ ، آن‌گاه

$$\left(\frac{w_1 x_1^s + \dots + w_n x_n^s}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\frac{w_1 x_1^t + \dots + w_n x_n^t}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{1}{t}} \quad (A)$$

اثبات.

حالت اول. اگر $0 < s < t$ یا $s < 0 < t$ آن‌گاه با به کار بردن

نامساوی (۱) برای $x_1^s, \dots, x_n^s$ و $\lambda_i = \frac{w_i}{w_1 + \dots + w_n}$ و $1 \leq i \leq n$ با تابع

کاملاً محدب $f(x) = x^{\frac{t}{s}}$ داریم:

$$f\left(\frac{w_1 x_1^s + \dots + w_n x_n^s}{w_1 + \dots + w_n}\right) \leq \frac{w_1 f(x_1^s) + \dots + w_n f(x_n^s)}{w_1 + \dots + w_n}$$

یا

$$\left(\frac{w_1 x_1^s + \dots + w_n x_n^s}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{t}{s}} \leq \frac{w_1 (x_1^s)^{\frac{t}{s}} + \dots + w_n (x_n^s)^{\frac{t}{s}}}{w_1 + \dots + w_n}$$

از این رو

$$\left(\frac{w_1 x_1^s + \dots + w_n x_n^s}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\frac{w_1 x_1^t + \dots + w_n x_n^t}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{1}{t}}$$

حالت دوم. اگر $s < t < 0$ آن‌گاه $-s < -t < 0$. حال طبق

حالت اول برای $\frac{1}{x_1}$ و $\frac{1}{x_2}$ و $\dots$ و $\frac{1}{x_n}$ داریم:

$$\left[\frac{w_1 \left(\frac{1}{x_1}\right)^{-t} + \dots + w_n \left(\frac{1}{x_n}\right)^{-t}}{w_1 + \dots + w_n} \right]^{\frac{1}{-t}} \leq \left[\frac{w_1 \left(\frac{1}{x_1}\right)^{-s} + \dots + w_n \left(\frac{1}{x_n}\right)^{-s}}{w_1 + \dots + w_n} \right]^{\frac{1}{-s}}$$

$$\frac{w_1 x_1^t \text{Ln} x_1 + \dots + w_n x_n^t \text{Ln} x_n}{w_1 + \dots + w_n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{w_1 x_1^t + \dots + w_n x_n^t}{w_1 x_1^t + \dots + w_n x_n^t}$$

$$= \frac{w_1 \text{Ln} x_1 + \dots + w_n \text{Ln} x_n}{w_1 + \dots + w_n} = \text{Ln}(x_1^{w_1} \dots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + \dots + w_n}}$$

از این رو $M_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1^{w_1} \dots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + \dots + w_n}}$ است. میانگین هندسی وزنی 11 (WAM) نامیده می‌شود.

● اگر قرار دهیم $M_\infty(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t(x_1, \dots, x_n)$ آن‌گاه،

$$M_\infty = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{w_1 x_1^t + \dots + w_n x_n^t}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{1}{t}}$$

حال وجود دارد زایی $(1 \leq j \leq n)$ که $x_j = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. با توجه به این که

$$(1 \leq i \leq n) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{x_i}{x_j} \right)^t = 0 \quad \text{یا} \quad 1$$

داریم:

$$M_\infty(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{x_j^t [w_1 \left(\frac{x_1}{x_j}\right)^t + \dots + w_n \left(\frac{x_n}{x_j}\right)^t]}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{1}{t}}$$

$$= x_j \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{w_1 \left(\frac{x_1}{x_j}\right)^t + \dots + w_n \left(\frac{x_n}{x_j}\right)^t}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{1}{t}} = x_j$$

از این رو $M_\infty(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$.

به همین ترتیب اگر $M_{-\infty}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow -\infty} M_t(x_1, \dots, x_n)$ ، آن‌گاه می‌توان ثابت کرد

$$M_{-\infty}(x_1, \dots, x_n) = \min\{x_1, \dots, x_n\}$$

تبصره. اگر در تعریف (۷) قرار دهیم $w_1 = \dots = w_n = 1$ ،

آن‌گاه $M_t(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^t + \dots + x_n^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}}$ را میانگین توانی از

یا

مثال‌ها

مثال ۱. اگر $\alpha, \beta > 0$ و $a, b \geq 0$ و $\alpha + \beta = 1$ آن گاه

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$$

حل. با استفاده از نامساوی (۳) و انتخاب $w_1 = \alpha$ ، $w_2 = \beta$ و $x_1 = a$ ، $x_2 = b$ در حالت $n=2$ ، نامساوی به وضوح برقرار است.

مثال ۲. اگر r یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه

$$(1^r + 2^r + \dots + n^r)^n \geq n^n (n!)^r$$

حل. با استفاده از نامساوی (۴) (نامساوی AM-GM) داریم:

$$\frac{1^r + 2^r + \dots + n^r}{n} \geq \sqrt[n]{1^r \cdot 2^r \cdot \dots \cdot n^r}$$

یا

$$1^r + 2^r + \dots + n^r \geq n \sqrt[n]{(n!)^r}$$

و از این رو

$$(1^r + 2^r + \dots + n^r)^n \geq n^n (n!)^r$$

مثال ۳. اگر $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ آن گاه

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$$

حل. با استفاده از نامساوی (۴) داریم:

$$1 + a_1 \geq 2\sqrt{a_1}$$

$$1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_2}$$

⋮

$$1 + a_n \geq 2\sqrt{a_n}$$

حال با ضرب دو طرف نامساوی در هم داریم:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}$$

با توجه به این که $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ نامساوی برقرار است.

مثال ۴. اگر $a, b, c > 0$ آن گاه

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \right) \geq \frac{9}{2}$$

حل. با انتخاب $x_1 = a+b$ ، $x_2 = b+c$ و $x_3 = a+c$

$$\left(\frac{w_1 x_1^s + \dots + w_n x_n^s}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\frac{w_1 x_1^t + \dots + w_n x_n^t}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{\frac{1}{t}}$$

تبصره. با توجه به نامساوی‌های (۳) و (۵) و (۸) به وضوح دنباله‌ی نامساوی کلاسیک زیر را داریم:

$$\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq \frac{w_1 + \dots + w_n}{\frac{w_1}{x_1} + \dots + \frac{w_n}{x_n}} \leq (x_1^{w_1} \dots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + \dots + w_n}}$$

$$\leq \frac{w_1 x_1^r + \dots + w_n x_n^r}{w_1 + \dots + w_n} \leq \sqrt{\frac{w_1 x_1^r + \dots + w_n x_n^r}{w_1 + \dots + w_n}} \leq \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

(۹)

اگر در دنباله‌ی نامساوی بالا $w_1 = w_2 = \dots = w_n = 1$ قرار دهیم، آن گاه

$$\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

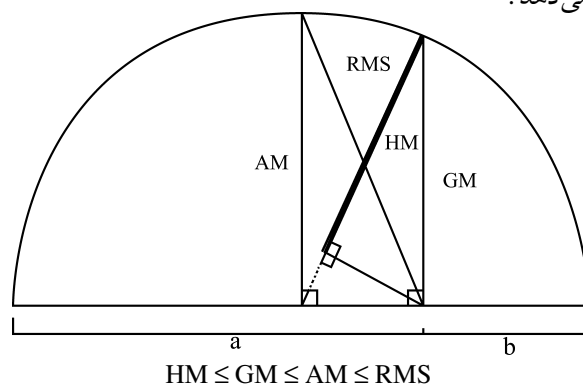
$$\leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \leq \max\{x_1, \dots, x_n\} \quad (10)$$

نتیجه. اگر $x_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$) آن گاه

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2 \quad (11)$$

اثبات. با توجه به دنباله‌ی نامساوی (۱۰) به وضوح برقرار است.

نمودار زیر، دنباله‌ی نامساوی (۱۰) را برای حالت $n=2$ نشان می‌دهد.



نامساوی (۱۱) داریم:

$$[(a+b) + (b+c) + (a+c)] \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \right) \geq 9$$

$$2(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \right) \geq 9$$

و از این رو

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \right) \geq 9$$

مثال ۵. (روسیه ۱۹۹۵) برای هر $x, y > 0$ ثابت کنید

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$$

حل. با استفاده از نامساوی (۶) (نامساوی GM-HM) داریم:

$$\frac{x}{x^4 + y^2} = \frac{1}{\frac{x}{x^4} + \frac{y}{y^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^4} \cdot \frac{x}{y^2}} = \frac{1}{2xy}$$

$$\frac{y}{y^4 + x^2} = \frac{1}{\frac{y}{y^4} + \frac{x}{x^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{y^4} \cdot \frac{y}{x^2}} = \frac{1}{2xy}$$

حال با جمع دو طرف، نامساوی مورد نظر به دست می آید.

مسائلی برای حل

۱. اگر $a, b \geq 0$ ، $p, q > 0$ ، $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ آن گاه

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

راهنمایی: مانند مثال یک عمل کنید.

۲. اگر $a, b, c > 0$ آن گاه

$$(a+b)(a+c)(c+a) \geq 8abc$$

راهنمایی: از نامساوی (۴) (نامساوی AM-GM) استفاده

کنید.

۳. اگر a و b و c اعداد مثبتی باشند به طوری که مجموع

هر دو تای آن ها بزرگ تر از سومی باشد، آن گاه

$$\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1$$

راهنمایی: از نامساوی (۳) با انتخاب $x_1 = 1 + \frac{b-c}{a}$ ،

$$w_1 = c, w_2 = b, w_3 = a, x_2 = 1 + \frac{a-b}{c}, x_3 = 1 + \frac{c-a}{b}$$

کمک بگیرد.

۴. اگر مجموع n عدد مثبت $a, b, \dots, L$ ($n > 1$) و $a, b, \dots$ برابر با s فرض شود، آن گاه

$$\frac{s}{s-a} + \frac{s}{s-b} + \dots + \frac{s}{s-L} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

راهنمایی: از نامساوی (۱۱) استفاده کنید.

۵. برای اعداد حقیقی مثبت a و b و c نشان دهید:

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$$

راهنمایی: از نامساوی (۴) استفاده کنید.

پی نوشت

1. Jensen Inequality
2. Weighted AM-GM Inequality
3. Weighted GM-HM Inequality
4. Weighted Power Mean
5. Weighted Arithmetic Mean
6. Weighted Harmonic Mean
7. weighted Root Mean Square
8. Weighted Geometric Mean

منابع

۱. رودین، والتر، (سال اصل اثر). اصول آنالیز ریاضی، ترجمه ی دکتر علی اکبر عالم زاده، انتشارات علمی و فنی، ۱۳۶۲، صفحه ی ۱۲۶.
2. Hrimiuc Dragos, (2001). Inequalities for Convex Functions (Part I), "π in the Sky". PIMS
3. Kedlaya Kiran, $A < B$ (A is less than B), based on notes for the Math Olympiad Program (Mop) version 10, last revised August, 1999.
4. Mildorf, T.J., (2005). Olympiad Inequalities. December 22, 2005.
5. Popescu, P.G. and Diaz-Barrero, J. L. Certain, (2006): Inequalities for Convex Function, J. Ineq. Pure and Appl. Math. 7(2)Art. 47, 2006.

استفاده از کتاب‌های کمک آموزشی ریاضی آری یا نه؟

سال دوره‌ی دبیرستان و پیش‌دانشگاهی و سه سال دوره‌ی راهنمایی تحصیلی، تحت فشار و بمباران کتاب‌های کمک‌آموزشی قرار داشته که او را از هدف اصلی درس و مدرسه دور ساخته است. البته خوب یا بد این کتاب‌ها، صرفاً از طریق ارزیابی دقیق و کارشناسی شده امکان‌پذیر است. اما آنچه واقعیت دارد، وجود پر حجم این کتاب‌ها در نظام تعلیم و تربیت فعلی است؛ کتاب‌هایی که با طرح سؤالات و تست‌های مختلف، دانش‌آموزان را به دستگاه‌های زنده‌ی تست‌زن تبدیل کرده‌اند! در چنین شرایطی، سؤال اساسی این است که آیا واقعاً این کتاب‌های کمک‌درسی می‌توانند جایگزین کتاب‌های درسی یا

مقدمه

یکی از اهداف اصلی کتاب‌های درسی، انتقال مطالب علمی روز به دانش‌آموزان است. اما هدف جنبی دیگر این است تا لذت کتاب‌خوانی را در کام دانش‌آموزان شیرین کند و خودشان کنجکاوانه به سراغ کتاب‌های علمی و ادبی و هنری بروند و علاوه بر تکمیل آموزش علم روز، به زیور ادب و هنر نیز آراسته شوند. اما در نظام آموزش و پرورش، گاهی جریانی جایگزین این هدف اصلی می‌شود که نه تنها دانش‌آموزان را به کتاب و کتاب‌خوانی نزدیک نمی‌سازد، بلکه با اشتباهات برخی از معلمان و اولیا، دانش‌آموز از کتاب و مطالعه، بیزار هم می‌شود و این تنفر تا آن‌جا ادامه می‌یابد که با وجود حضور در معروف‌ترین مدارس، دانش‌آموز نه تنها نتیجه‌ی دلخواه اولیا در کسب رتبه‌های برتر آزمون‌های ورودی به دانشگاه‌ها را به دست نمی‌آورد، بلکه گاهی رتبه‌ی او از دانش‌آموزان معمولی در یک مدرسه‌ی متوسط هم پایین‌تر می‌آید؛ چرا که چنین دانش‌آموزی، حداقل در چهار

دولتی و بعضی خصوصی هستند چاپ و انتشار می یابد و توسط بخش دولتی بر آن ها نظارت عام (توسط وزارت ارشاد نه آموزش و پرورش) انجام می گیرد.

انواع کتاب های آموزشی

کتاب های کمک آموزشی به طور گسترده ای در نظام آموزشی فعلی ایران مورد استفاده می باشد. از طرف دیگر، جامعه ی آموزش ریاضی کشور نیز اهدافی را برای آموزش ریاضی در نظر گرفته است که برای اطلاع از این اهداف، می توان به کتاب های معلم (راهنمای تدریس) که به طور خلاصه اهداف آموزش ریاضی را در هر پایه مشخص کرده است، یا به سندهای بالادستی که توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی تهیه شده، مراجعه کرد (حاجیان زاده، ۱۳۷۹).

دفتر انتشارات کمک آموزشی، انواع کتاب های آموزشی را به شش دسته تقسیم بندی کرده و برای هر کدام تعریفی داده است که در این جا می آوریم:

الف) کتاب های دانش افزایی دبیران

کتاب هایی هستند که به افزایش و ارتقای دانش پایه ی ریاضی یا توسعه ی توانایی های حرفه ای آن ها در زمینه ی روش های تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی می پردازند. از آن جا که در دوره ی متوسطه، درس های ریاضی تا حدود زیادی تخصصی می شوند (جبر، هندسه، هندسه تحلیلی، آمار و احتمال، حسابان و ریاضیات گسسته)، ارتقای توانایی ها در زمینه ی دانش موضوعی ریاضی، از نیازهای ضروری دبیران ریاضی برای آموزش مطلوب تر است. از طرف دیگر، یک دبیر برای موفقیت در تدریس و آموزش، باید دانش حرفه ای خود را در زمینه هایی مثل روان شناسی یادگیری، برنامه ریزی درسی، شیوه های ارزشیابی و نظایر آن افزایش دهد. کتاب های دانش افزایی دبیران ریاضی دوره ی متوسطه، برای پاسخ گویی به این دو نیاز دبیران تولید می شوند.

ب) کتاب های جنبی و سرگرمی

کتاب هایی هستند که شگفتی ها و زیبایی های ریاضیات را قابل مشاهده می کنند، دانش آموزان را با جنبه های متفاوت و مختلف ریاضی - که در برنامه ی درسی فرصت های کمتری برای بروز و ظهور داشته اند - آشنا می سازند و تاریخ کشف، بسط و

مکمل آن ها شوند؟ آیا معلم، دانش آموز و اولیا از تأثیر مفید و مؤثر و یا احیاناً مخرب این کتاب ها آگاه هستند؟ آیا آموزش و پرورش به عنوان نهاد متولی آموزش، این کتاب ها را آفت زدایی و آسیب شناسی کرده است؟ آیا این کتاب ها سبب نمی شوند که دانش آموزان نه تنها از کتاب های غیر درسی، که حتی از کتاب های درسی هم متنفر و فراری شوند؟

در کنار آن، این سؤال اساسی هم مطرح است که آیا واقعاً فقط کتاب های درسی وزارت آموزش و پرورش باید ملاک آموزش علم و پرورش فضائل اخلاقی تلقی شود؟ به عنوان نمونه، آیا کتاب درسی کامپیوتر می تواند با اطلاعات به روز، دانش آموز را در رشته ی کامپیوتر، به فردی کارآمد تبدیل سازد؟ شیوه ی کشورهای توسعه یافته در این زمینه چیست؟ آیا نمی توان همانند بسیاری از کشورها، از منابع مختلف و آزاد برای یک درس استفاده کرد و دست معلم و دانش آموز را با رعایت استانداردهای مورد تأیید نظام آموزش و پرورش آزاد گذاشت؟

در اکثر نظام های آموزش و پرورش موفق، چه از نوع متمرکز آن مثل ژاپن و چه از نوع غیرمتمرکز آن مانند کانادا و استرالیا در دوره های مختلف تحصیلی، سیاست های آموزشی، رئوس مواد و سرفصل های برنامه ی درسی و سیاست های کلی تدریس، توسط بخش های دولتی آموزش و پرورش (ایالتی، فدرال، منطقه یا کشور) تهیه و تنظیم و به جامعه ی آموزشی ابلاغ می شود. اما در مکان های گوناگون آموزشی مثل مدرسه، ناحیه، منطقه های آموزش و پرورش؛ دانشگاه ها و مؤسسات تحقیقات تربیتی، ناشران خصوصی و گروه های مؤلفان، دست اندرکاران طراحی و تولید کتاب های درسی و آموزشی هستند که با داشتن استقلال نسبی و اقتدار در زمینه ی کار خود و در نظر گرفتن چارچوب های تعیین شده در برنامه و رئوس تعیین شده و محتوای دروس دوره های تحصیلی و از جمله دوره ی متوسطه، به طراحی، تدوین و تولید کتاب های آموزشی، با طرح های متفاوت می پردازند. البته این کتاب ها قبل از چاپ سپاری (به خصوص در مورد کتاب های درسی) باید به نوعی با توجه به درجه ی تمرکز نظام آموزشی، مراحل گرفتن مجوز و تأییدیه را از کمیته ی تخصصی و دفاتر مربوطه در سطح محلی، منطقه ای یا وزارت آموزش و پرورش طی کنند [سرکارآرانی، ۱۳۷۹].

در ایران، کتاب های درسی به صورت متمرکز و توسط دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی تهیه می شوند. اما کتاب های کمک آموزشی توسط ناشرانی که بعضی از آن ها وابسته به بخش



یکی از اهداف «طرح سامان بخشی کتاب های آموزشی»، تشویق مؤلفان و ناشران به تولید کتاب های آموزشی مطلوب و منطبق با معیارهایی علمی و تربیتی است

گسترش مفاهیم گوناگون ریاضی را با آنان در میان می گذارند. این نوع کتاب ها به طور معمول مستقل از کتاب های درسی هستند و در صورت تغییر محتوای برنامه ی درسی، موجودیت خود را حفظ می کنند و کمتر دست خوش تغییر می شوند.

پ) کتاب های سنجش و ارزشیابی پیشرفت تحصیلی

کتاب هایی هستند که به منظور آشنا کردن دانش آموزان با ارزشیابی های پایانی از جمله آزمون های ورود به دانشگاه ها و آماده کردن آنان برای شرکت در چنین آزمون هایی تولید می شوند. این کتاب ها در چارچوب برنامه ی درسی مصوب، برای یک دوره یا یک واحد درسی، به منظور ارزشیابی پیشرفت تحصیلی دانش آموزان منتشر می شوند.

ت) کتاب های کمک درسی

کتاب هایی که در چارچوب برنامه ی درسی مصوب، به تکمیل، تعمیق و توسعه ی آموزش محتوای مورد نظر می پردازند و کاستی ها و کمبودهای کتاب درسی را رفع می کنند و به تفصیل توضیح می دهند. هم چنین، فرصت های تازه ای برای تمرین فراهم می آورند. قالب اصلی این نوع کتاب ها را بخش آموزش تشکیل می دهد. این کتاب ها که برای یک موضوع و یا یک واحد درسی معین منتشر می شوند، ابتدا به شرح، بسط، توضیح و آموزش مفاهیم و محتوای مورد نظر می پردازند و سپس، نمونه سؤال ها و تمرین ها، مثال های حل شده و مطالب جنبی را ذکر می کنند. در هر صورت، ساختار غالب کتاب های کمک درسی را محتوای کتاب های درسی شکل می دهند.

ج) کتاب های دایرة المعارف و فرهنگ

کتاب هایی هستند که جنبه ی مرجع دارند و در چارچوب برنامه ی درسی، به ارائه ی اطلاعات و دانش های مورد نیاز دانش آموزان به صورت طبقه بندی شده می پردازند. این آثار، منبع و مرجع دانش آموزان و دبیران برای دستیابی به تعریف ها، اطلاعات فرهنگ و دایرة المعارفی، فرمول ها و روابط، زندگی نامه ی دانشمندان و مانند این ها در حوزه ی دانش ریاضی هستند.

سامانه بخش کتاب های آموزشی

وضعیت نشر کتاب های آموزشی تا پیش از سال ۱۳۷۸، به لحاظ عدم توجه به اصول علمی و آموزشی در تألیف و چاپ این

ث) کتاب های دانش افزایی دانش آموزان

کتاب هایی هستند که به منظور ارائه ی مطالب و مفاهیم

نوع کتاب‌ها و هم‌سویی ناچیز با هدف‌های برنامه درسی، موجب بروز انتقاداتی از سوی رسانه‌های جمعی، مدیران، متخصصان آموزشی و معلمان شد. این مطلب، علاقه‌مندان و دلسوزان آموزش و پرورش را واداشت که از «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» بخواهند در این زمینه چاره‌اندیشی کند. سازمان پژوهش نیز با توجه به رسالت خطیر خود در هدایت و سمت‌دهی بازار نشر کتاب‌های آموزشی، تصمیم گرفت طرح

سامان بخشی کتاب‌های آموزشی را به اجرا در آورد. در نتیجه، «طرح سامان بخشی کتاب‌های آموزشی» از سال ۱۳۷۸ و با هدف دست‌یابی به مقاصد زیر به اجرا گذاشته شد:

۱. هدایت ناشران و تولید کنندگان کتاب‌های آموزشی مورد نیاز معلمان و دانش‌آموزان، به سمت تولید و نشر کتاب‌های کمک‌آموزشی و کمک‌درسی مناسب و منطبق با معیارها و استانداردهای آموزشی؛

۲. تشویق مؤلفان و ناشران به تولید کتاب‌های آموزشی مطلوب و منطبق با معیارهای علمی و تربیتی؛

۳. شناسایی و معرفی آثار برتر.

یکی از فعالیت‌های مهمی که در راستای «طرح سامان بخشی کتاب‌های آموزشی» انجام گرفته است، برگزاری هفت جشنواره کتاب‌های آموزشی به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۹ (دوره ابتدایی)، ۱۳۸۰ (دوره راهنمایی)، ۱۳۸۱ (دوره متوسطه نظری و فنی و حرفه‌ای)، ۱۳۸۳ (دوره‌های آموزش ابتدایی و راهنمایی)، ۱۳۸۴ (دوره آموزش متوسطه نظری، پیش‌دانشگاهی، فنی و حرفه‌ای و کاردانش)، ۱۳۸۶ (دوره آموزش ابتدایی و راهنمایی) و بالاخره، ۱۳۸۷ (دوره متوسطه نظری، پیش‌دانشگاهی و فنی و حرفه‌ای و کاردانش) است که در آن، به دنبال رسیدن به اهداف زیر بوده‌اند:

۱. تبیین و انتقال سیاست‌ها، هدف‌ها و برنامه‌های آموزش و پرورش در حوزه انتشار کتاب‌های آموزشی؛

۲. ارزشیابی کتاب‌های آموزشی موجود، به منظور بررسی کیفیت، انتخاب و معرفی کتاب‌های برگزیده؛

۳. انتخاب مؤلفان و ناشران برتر در حوزه تألیف و نشر کتاب‌های آموزشی؛

۴. فراهم آوردن امکانی برای تبادل نظر میان پدیدآورندگان

در اکثر نظام‌های آموزش و پرورش موفق، سیاست‌های آموزشی توسط بخش‌های دولتی تهیه و تنظیم و به جامعه‌ی آموزشی ابلاغ می‌شود

کتاب‌های آموزشی؛

۵. شناخت مشکلات و تبیین راهبردهایی برای انتشار کتاب‌های آموزشی؛

۶. پشتیبانی و تشویق آن دسته از پدیدآورندگان کتاب‌های آموزشی که در راستای تحقق هدف‌های برنامه‌های آموزشی بیش‌ترین نقش را داشته‌اند.

با توجه به این اهداف، جایگاه کتاب‌های کمک‌آموزشی شامل کتاب‌های سنجش و ارزشیابی پیشرفت تحصیلی و کتاب‌های

کمک‌درسی مورد بررسی قرار گرفت.

این بررسی نشان داد که هر دوی کتاب درسی و کتاب کمک‌آموزشی، جایگاه و نقش بالایی در فرایند آموزش مدرسه‌ای در ایران دارند.

این کتاب‌ها به وفور در آموزش مدرسه‌ای وجود دارند و با وجود بسیاری از تصوراتی که کتاب‌های کمک‌آموزشی را در فرایند آموزش ریاضی-آن گونه که مورد استفاده قرار می‌گیرد- مؤثر و مفید فایده نمی‌دانند، باز هم بعضی از معلمان معتقدند که کتاب‌های کمک‌آموزشی، تأثیر زیادی در بهبود وضعیت آموزش ریاضی مدرسه‌ای دارند و این تصورات، این سؤال را به ذهن می‌آورد که با این اوصاف، جایگاه کتاب درسی در آموزش مدرسه‌ای کجا قرار دارد؟ و با توجه به این که مجوز اکثر کتاب‌های کمک‌آموزشی از سوی مراکز مرتبط وزارت آموزش و پرورش صادر می‌شود، آیا این به منزله‌ی خفیف کردن نقش کتاب درسی در فرایند آموزش مدرسه‌ای توسط خود آموزش و پرورش نیست؟



منابع

۱. بیانی‌هی‌ات داوران چهارمین دوره جشنواره کتاب‌های آموزشی رشد، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی.
۲. حاجیان‌زاده علیرضا (۱۳۸۷)؛ افقی نو در سامان ملی کتاب‌های آموزشی، جواهر، شماره ۲۴.
۳. سومین جشنواره کتاب‌های آموزشی رشد، دوره‌ی آموزش متوسطه، ۱۳۸۱، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، دبیرخانه‌ی کتاب‌های آموزشی.
۴. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی (www.roshdmag.org).
۵. دفتر تألیف و برنامه‌ریزی درسی (www.talif.net).
۶. شبکه‌ی ملی مدارس ایران (www.roshd.ir).

سرگرمی‌های تاریخی در آموزش ریاضی

نرگس عصارزادگان

دبیر ریاضی، کارشناس ارشد مدیریت آموزشی،
سرگروه ریاضی آموزش و پرورش منطقه ۵
برخوار استان اصفهان

ریاضیات هستند که در جلب توجه نوآموزان و غیرحرفه‌ای‌ها نقش زیادی دارند. سرگرمی‌های ریاضی اغلب در قالب عناصری از زندگی روزمره حتی به طور غیرواقعی بیان می‌شوند به گونه‌ای که غیر ریاضیدانان هم مجذوب آن‌ها می‌شوند و برای حل آن‌ها تلاش می‌کنند. این نکته برای برانگیختن علاقه‌ی دانش‌آموزان به ریاضیات بسیار مهم است و آن‌ها را به سوی قلمروهای تازه‌تری سوق می‌دهد. از دیگر سو، با بررسی ریشه‌های تاریخی این نوع سرگرمی‌ها، می‌توان به رواج جهانی برخی از آن‌ها در محیط‌ها و زمان‌های گوناگون دست یافت که تبادل‌های فرهنگی را نشان می‌دهد. هم‌چنین، پرداختن به ریاضیات قومی و استفاده از مسایلی که ریشه در فرهنگ و تاریخ ما دارند، می‌تواند به فراگیرندگان کمک کند تا درک بهتری از گذشته داشته باشند. ما به تاریخ علاقه‌مندیم نه به این دلیل که احساس می‌کنیم به گذشته تعلق داریم، بلکه می‌خواهیم درک بهتری از اکنون داشته باشیم و آینده را پیش‌بینی کنیم. تاریخ ریاضی ابزار مناسبی برای مشاهده‌ی ریاضیات است، نه تنها به طور مستقل و در قالب دانش کلاسیک، بلکه به عنوان یک فعالیت بشری مداوم که به

چکیده

در نوشته‌ای که پیش رو دارید، چندین مسئله‌ی کلامی از سه منبع تاریخی ارائه شده است. این مسایل از سه وجه قابل تأمل هستند: ۱. بیان معماگونه و سرگرم‌کننده‌ی این مسایل برای دانش‌آموزان جذاب است، ۲. از آن‌جا که مسایل از نسخه‌های تاریخی مربوط به سده‌های ۵ و ۶ هجری گردآوری شده‌اند به این وسیله می‌توان به هنگام آموزش، نگاهی به فرهنگ گذشتگان و تاریخ علم ریاضی داشت، ۳. از لحاظ آموزش ریاضی دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که چگونه مسایل کلامی را به زبان ریاضی برگردانند و روش‌های مناسب حل مسئله را برای آن‌ها به کار گیرند.

کلیدواژه‌ها: تاریخ ریاضی، مسائل تاریخی ریاضی.

پیش‌گفتار

سرگرمی‌ها و معماهای ریاضی از ابعاد جذاب و آموزنده‌ی



عراقی بوده است. بغدادی در بغداد به دنیا آمد. پدرش او را به نیشابور برد تا ادامه تحصیل دهد و در آنجا مقیم شد. گروهی از علمای خراسان از شاگردان وی بودند زیرا او هفده فن مختلف و به خصوص حساب و فقه و فرائض را تدریس می کرد. وی به علت فتنه‌ی ترکمان‌ها نیشابور را ترک کرد و به اسفراین رفت و اندکی بعد در سال ۴۲۹ در آنجا درگذشت. کتاب التکمله فی الحساب بسیار معروف بوده و تحصیل آن برای محصلان ریاضی واجب بوده است. التکمله فی الحساب به زبان عربی است و یک نسخه‌ی نفیس آن در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران موجود است. از بغدادی، آثار دیگری نیز موجود است: الایضاح عن اصول صناعة المساح و کتاب فی المساحت. در این نوشته ترجمه‌ی برخی مسایل به زبان فارسی آورده می شود.

۲. مفتاح المعاملات حاسب طبری

رساله‌ی فارسی مفتاح المعاملات تألیف ابوجعفر محمدبن ایوب طبری معروف به حاسب طبری، ریاضی دان و اخترشناس ایرانی اهل طبرستان (مازندران کنونی) است. طبری در نیمه‌ی دوم قرن پنجم فعالیت علمی داشته است. شمارنامه عنوان اثر دیگر اوست که قدیمی ترین متن فارسی موجود درباره‌ی حساب هندی است مفتاح المعاملات برای غیر ریاضیدان‌ها نگاشته شده است. نمونه‌هایی از مسایل جالب با عنوان نوادر و مضمرات در فصل چهارم کتاب مفتاح المعاملات وجود دارد که حاوی ۵۴ مسئله است. نمونه‌هایی از این مسایل ریشه در آثار تاریخی کهن تر دارد که نزد اقوام مختلف نیز بیان می شود.

۳. لب الحساب

لب الحساب تصنیف علی بن یوسف بن علی (منشی، مستوفی یا محاسب) متعلق به سده‌ی پنجم و ششم هجری قمری است. این نسخه‌ی منحصر به فرد فارسی شامل ۲۷۴ صفحه است و در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران به شماره ۵۲۱۳ نگهداری می شود. از آنجا که لب الحساب شامل همه‌ی موضوعاتی که در حوزه‌ی حساب و هندسه‌ی آن زمان وجود داشته می شود، به واقع دایرة المعارف بی نظیری از حساب و هندسه است. از نویسنده‌ی لب الحساب اطلاعی در دست نیست. آقای ادیب برومند در کتاب خردنامه تألیف و نگارش ابوالفضل یوسف بن علی مستوفی (از اوائل سده ششم هجری) از احوال و هویت نویسنده که به احتمالی اهل خراسان است اظهار بی اطلاعی

سایر حوزه‌ها پیوند خورده، و برای کمک به حل بسیاری از انواع مسایل در زندگی واقعی انسان ابداع شده است.

مسئله‌های کلامی برای آموزش روش حل مسئله بسیار مفید هستند. دانش آموز در این مسایل یاد می گیرد که چگونه می توان مسئله‌ای را به زبان عادی داده شده است، با نشانه‌های ریاضی و به زبان جبری ترجمه کرد. در مواردی این ترجمه روشن است، ولی مواردی وجود دارد که، برای تبدیل شرط‌های مسئله به معادلات یا دستگاه معادلات، به تجربه‌ای بیشتر، یا نیروی خلاقانه‌ای بیشتر و یا صرف وقت بیشتری نیاز دارد. این نوع مسایل را می توان برحسب شرایط فراگیرندگان در کلاس‌های دوره‌ی راهنمایی به هنگام آموزش راهبردهای حل مسئله و یا کلاس اول دبیرستان به کار برد.

در این مقاله، نمونه‌هایی از مسایل سرگرم کننده‌ی مشابه از کتاب‌های لب الحساب تألیف علی بن یوسف بن علی منشی سده‌ی ششم هجری قمری، مفتاح المعاملات ابوجعفر محمدبن ایوب حاسب طبری ریاضی دان سده‌ی پنجم هجری قمری، و التکمله فی الحساب ابومنصور بغدادی سده‌ی پنجم هجری قمری بررسی می شود.

معرفی کوتاه نسخه‌های منبع و مؤلفان آن‌ها

۱. التکمله فی الحساب ابومنصور بغدادی

التکمله فی الحساب تألیف ابومنصور بغدادی است. ابومنصور بغدادی (عبدالقاهر بغدادی) فقیه شافعی و ریاضیدان

کرده‌اند و در زیرنویس کتاب عنوان کرده‌اند که محتمل است صاحب لب الحساب فرزند نویسنده خردنامه باشد.

منشی در لب الحساب از بغدادی به عنوان استاد معظم نام برده است. احتمال می‌رود که وی در نیشابور شاگرد بغدادی بوده است. در بسیاری از موارد مسئله با نگارش اصلی قابل درک است، از این رو برای حفظ شیوه‌ی بیان اصلی، فقط در برخی موارد به زبان فارسی جدید برگردانده شده است.

سرگرمی‌های ریاضی موجود در سه نسخه‌ی التکمله فی الحساب، مفتاح المعاملات و لب الحساب

۱. درختی است که ثلث آن در خاک، ربعش در آب، و ۳ ذرع آن بیرون است، طولش چقدر است؟ (نگر: التکمله فی الحساب: باب ۱۱ فی نوادر الحساب من فنون مختلفه، ص ۲۸۹)

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x + 3 = x \Rightarrow \frac{5}{12}x = 3 \Rightarrow x = \frac{36}{5}$$

۲. «اگر پرسند ما را از درختی که بالای او سه یک در آب است، و چهار یک او در گل، بر هوا شده است ده گز. جمله چند گز باشد بالای درخت؟» (نگر: مفتاح المعاملات حاسب طبری، مسئله‌ی ۱۸) که پاسخ به صورت زیر است.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 10 = x \Rightarrow x = 24$$

۳. همین مسئله در باب ۳۸ کتاب آمده که در آن یک سوم درخت در آب، یک چهارم در گل، یک پنجم در ریگ، و ۱۰ گز در هواست. همین داده‌ها در مسئله‌ی ۳۱ با ساختاری متفاوت ظاهر می‌شود که در آن‌جا از ارتفاع درختی یک دوم در آب، یک سوم در گل و جذرش در هواست، که حل آن به صورت زیر است:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \sqrt{x} \Rightarrow x = 36$$

۴. «اگر پرسند ما را از ماهی که سرش سه یک اوست و دنبش پنج یک او، میانش بی سر و دنب ده من. جمله چند من باشد؟» (نگر: مفتاح المعاملات حاسب طبری، مسئله‌ی ۳۷)

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 10 = x \Rightarrow \frac{7}{15}x = 10 \Rightarrow x = \frac{150}{7}$$

۵. حوضی ۳ مجرا دارد، یکی از آن‌ها حوض را در سه روز، و دیگری در چهار روز، و سومی در پنج روز پر می‌کند. این سه

مجرا را در یک ساعت واحد باز می‌کنیم. چه مدتی طول می‌کشد تا حوض پر شود؟ (نگر: التکمله فی الحساب باب ۱۱ فی نوادر الحساب من فنون مختلفه ص ۲۸۹)

$$1 \div \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{60}{20+15+12} = \frac{60}{47}$$

۶. حوضی ۳ مجرا دارد، یکی از آن‌ها حوض را در یک روز، دومی در دو روز، و سومی در سه روز پر می‌کند، هر سه را باز می‌کنیم، حوض پس از چه مدتی پر می‌شود؟ (نگر: التکمله فی الحساب باب ۱۱، ص ۲۸۹)

$$1 \div \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{11}$$

جورج پولیا نیز مسئله‌ای از همین نوع عنوان کرده است: یک لوله‌ی آب، حوض را در ۱۵ دقیقه، لوله‌ی دوم در ۲۰ دقیقه و لوله‌ی سوم در ۳۰ دقیقه پر می‌کنند. اگر هر سه لوله باز باشند، در چه مدت حوض پر می‌شود؟ (نگر: خلافت ریاضی، ص ۷۰)

گنجایش حوض را a لیتر می‌گیریم. در این صورت سرعت جریان آب، از لوله‌ی اول، برابر است با $\frac{a}{15}$ لیتر در دقیقه. چون گنجایش برابر است با سرعت ضرب در زمان پس، مقدار آبی که در t دقیقه، از لوله جاری می‌شود، برابر است با $\frac{a}{15}t$ لیتر. اگر با باز بودن هر سه لوله، حوض در t دقیقه پر شود، مقدار آب وارد به حوض را، به دو طریق می‌توان بیان کرد:

$$\frac{a}{15}t + \frac{a}{20}t + \frac{a}{30}t = a$$

سمت چپ برابری، مقدار آبی را که از هر لوله وارد حوض می‌شود، بیان می‌کند؛ و سمت راست، مجموع آبی که به وسیله‌ی سه لوله وارد حوض شده است. اگر دو طرف برابری را بر a تقسیم کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{t}{15} + \frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1$$

که از روی آن می‌توان مجهول t را به دست آورد.
۷. «چون حوضی هست و او را چهار مجرا آب هست از یک مجرا حوض پر می‌شود به یک روز شبان و به دیگر به نصف روز شبان و به دیگر به ربع و به دیگر به ثلث، این زمان اگر هر چهار مجرا بگشایند به چند ساعت پر می‌شود؟» (نگر: لب الحساب، ص ۵۷)

پانزده روز پر شود. (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۲)

$$1 \div (2 + 5 + \frac{1}{2}) = \frac{2}{15}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{2}{15}$$

۱۰. «دیگر اگر سؤال کنند که یکی در ربع روزی و یکی در سُدس (یک ششم) روزی پر می کند و یکی در سُبُع (یک هفتم) روزی و این حوض یک مجری دارد که اگر حوض پر باشد در تُسَع (یک نهم) روزی خالی می شود هر ۳ چشمه را گشودند به چند پر می شود با مجری حوض که خالی می شود؟ از سؤال معلوم می شود که هر ۳ چشمه در یک روز هفده بار پر می کنند و مجری ۹ بار تهی می کند پس فصل ۱ پر شدن بر تهی شدن در یک روز به هشت نوبت باشد پس در ثَمَن (یک هشتم) روزی پر می شود، والسلام. (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۲)

$$4 + 6 + 7 - 9 = 8 \text{ و } \frac{1}{8} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

۱۱. دو نفر ۸ قرص نان دارند، یکی ۳ قرص و دیگری ۵ فرص: مهمانی برای آن ها می رسد، آن ها نان ها را بین ۳ نفرشان به تساوی تقسیم می کنند، مهمان به ازای نانی که خورده ۸ دینار می پردازد، به نفر اول و دوم هر کدام چند دینار می رسد؟ دارنده ۳ نان ۱ دینار و صاحب ۵ نان ۷ دینار، چرا که اگر هر کدام نان ها را به ۳ قسمت تقسیم کنند، می شود ۲۴ قسمت نان که بین ۳ نفر تقسیم می شود و هر کدام ۸ قسمت می گیرد. اما نفر او ۱۵ قسمت داشته و ۷ قسمت داده، و نفر دوم ۹ قسمت داشته و ۱ قسمت داده پس به نفر اول ۷ دینار و به نفر دوم ۱ دینار می رسد. (نگر: التکمله فی الحساب باب ۱۱ فی نوادر الحساب من فنون مختلفه، ص ۲۹۰)

$$5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

$$3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

مشابه این مسئله در مفتاح المعاملات عنوان شده است:

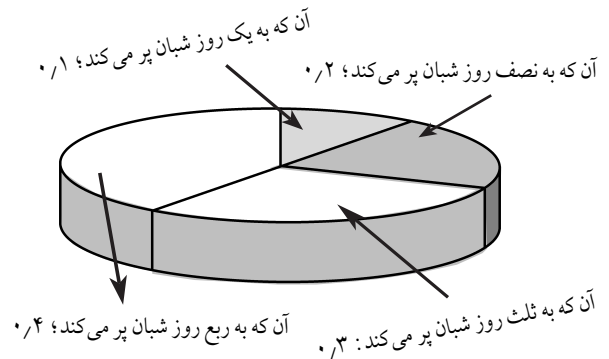
۱۲. سه نفر مقداری نان با هم به تساوی خوردند. یکی از آنان ۳ قرص نان و دیگری ۲ قرص نان آورده بود. نفر سوم نانی نیاورده بود بنابراین ۵ درم داد تا آن ها بین خود تقسیم کنند این ۵ درم چگونه باید بین دو نفر تقسیم شود؟ (نگر: مفتاح المعاملات، مسئله ۵۴)

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\frac{1}{10} = \frac{x}{24}$$

$$x = 24 / 10 = 2 \frac{2}{5}$$

جالب است بدانید مؤلف لب الحساب، نموداری شبیه نمودار زیر در انتهای حل مسئله رسم کرده است.



مسئله ی مشابهی با عنوان شستن ظرف ها در کتاب قدیمی چینی (کتاب ریاضی Sun Chi، ۲۰۰ سال پیش از میلاد) وجود دارد: پیرزنی در حال شست و شوی ۶۵ ظرف غذا است، از او می پرسند چند نفر مهمان داشته ای می گوید: هر ۲ نفر در یک ظرف سبزی، هر ۳ نفر در یک ظرف ماهی، و هر ۴ نفر در یک ظرف مرغ شریک بوده اند. تعداد مهمان ها را پیدا کنید.

$$65 \div (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = 60$$

۸. «حوضی ۳ چشمه آب به این حوض می رود، یک چشمه در یک روز پر می کند و یکی در دو روز و یکی در سه روز. این ۳ چشمه را به یک بار در آن حوض گشودند در چند ساعت پر کند. از سؤال معلوم می شود که در ۶ روز یازده بار پر می شود پس نسبت ۶ با یازده هم چنان باشد که نسبت مطلوب با یکی پس به شش جزو از یازده روز پر شود.» این مسئله در التکمله نیز عنوان شده است. (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۲)

$$\frac{6}{11} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{6}{11}$$

۹. «در این مسئله اگر سؤال کنند که یکی در نصف روزی پر می کند و یکی در خمسی و یکی در دو روز، از سؤال ایضاً معلوم می شود که هر ۳ این را در دو روز پانزده بار پر می کنند پس نسبت دو با پانزده چون نسبت مطلوب بود با یکی پس در دو جزو از

دنباله ی $3, 3, 3, \dots$ به دست می آید، یعنی اگر بر ربع لشکر تقسیم کنیم به هر یکی ۱۲ درهم می رسد. پس باید بینیم دو دنباله ی $1, 2, 3, 4, \dots$ و $12, 12, 12, \dots$ چه وقت با هم مساوی می شوند.

$$12n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n = 23$$

لشکر	غنیمت	ربع لشکر
۹۲	۲۷۶	۲۳

۱۷. «اگر سؤال کنند که مربع را چهار ضلع او با مساحت ۱۴۰ است یک ضلع چند بود؟» (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۵)

$$x^2 + 4x = 140 \Rightarrow x = 10$$

«و اگر سؤال کند که از مساحت مربع چون چهار ضلع وی از وی اسقاط می کنی باقی ۶۰ می بود ضلع چند بود؟»

$$x^2 - 4x = 60 \Rightarrow x = 10$$

«اگر گویند این مربع مثل مساحت است ضلعش چند بود؟»

$$x^2 = 4x$$

«اگر گویند اضلاع مربع دو مثل یا ۳ مثل مساحت است عدد اضلاع را بر عدد امثال قسمت باید کرد آنچه خارج شود قدر ضلع باشد.»

$$4x = 2x^2$$

$$4x = 3x^2$$

«اگر مساحت مستطیل ۴۸ باشد و تفاضل میان طول و عرض ۲، طول چند بود؟»

$$\begin{cases} ab = 48 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$a = ?$$

«اگر قطر مستطیل عشره بود و مساحت ۴۸ طولش چند بود؟»

$$\begin{cases} ab = 48 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{cases}$$

«اگر قطر مستطیل عشره بود و تفاضل میان طول و عرض ۲ مساحت چند بود؟»

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$S = ?$$

$$3 + 2 = 5, \quad 5 \div 3 = \frac{5}{3}$$

$$3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}, \quad 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

۱۳. «حیوانی هر روز از سوراخ خمسی از بدن بیرون می آورد و سدسی (یک ششم) باز پس می رود به چند روز از این سوراخ بیرون آید؟» (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۳)

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}, \quad \frac{24}{30} + \frac{1}{30} = 1$$

۱۴. «دو برید۲ یکی از یزد تا کرمان و یکی از کرمان تا یزد دوانیدند به شرط آن که یکی هر روز ثلث راه قطع کند و آخر ربع راه به چند به هم رسند؟» (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۳)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

۱۵. «بریدی را فرستادند به جایی بر وجهی که هر روز ۳ فرسنگ برود، بیست روز رفت، بریدی دیگر را در عقب وی فرستادند بر وجهی که هر روز هفت فرسنگ برود به چند روز به وی رسد؟» (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۳)

$$60 + 3n = 7n$$

$$n = 15$$

جدول زیر را مؤلف در پایان حل مسأله ارائه داده است.

اولی	دومی	
روز	۱۵	$15 + 20 = 35$
فرسخ	$7 \times 15 = 105$	$3 \times 35 = 105$

۱۶. لشکری غنیمتی گرفتند اگر این غنیمت را بین یک چهارم لشکر تقسیم کنند به اولی ۱، دومی ۲، سومی ۳ درهم و به بقیه نیز به همین ترتیب تعلق می گیرد، حال اگر این غنیمت را بین همه (کل لشکر) به طور مساوی تقسیم کنند به هر یکی ۳ درهم می رسد، اصل غنیمت چقدر بوده است؟ (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۳)

طبق داده های مسأله اگر غنیمت را بر ربع لشکر تقسیم کنیم دنباله ی $1, 2, 3, 4, \dots$ و اگر بر همه ی لشکر تقسیم کنیم

برای هر دو ۱۲۰ فرسخ است :

اول ۲۰	ثانی ۱۵	
۱۲۰	۱۲۰	مسافت

۲۰. «۲ رسول را فرستادند از دو بلد مختلف در یک روز و شرط کردند یکی را که هر روز ثمن (یک هشتم) طریق قطع کند و ثانی عشر (یک دهم) طریق خواستیم که مدت الحاق بدانیم و بعد بین البلدین و سیر هر یکی تا مدت الحاق.» (نگر: لب الحساب، ص ۲۷۰)

مؤلف راه حل زیر را بیان داشته است :

زمان رسیدن دو فرد به هم عبارت است از :

$$1 \div \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right) = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$$

مسافت های طی شده توسط نفر اول و دوم عبارت است از ۲۰۰ و ۱۶۰.

$$x_1 = \left(\frac{1}{8} \cdot 40\right)(40) = 200, \quad x_2 = \left(\frac{1}{10} \cdot 40\right)(40) = 160$$

$$x_1 + x_2 = 360$$

$$\frac{1}{8} \cdot 360 = 45$$

$$\frac{1}{10} \cdot 360 = 36$$

نفر اول هر روز ۴۵ و نفر دوم هر روز ۳۶ فرسخ طی می کنند تا به هم برسند.

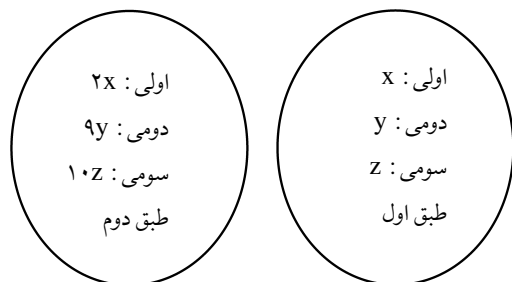
۲۱. «دو کس هر یکی مالی دارند اولی به ثانی می گوید اگر تو ۲ خمس آنچه داری به من دهی بها جامه بود و ثانی می گوید اگر تو ۳ سبع آنچه داری به من دهی بها جامه بود؛ فرا گرفتیم مخرج خمس ۵ و مخرج سبع هفت پس اسقاط کردیم از مخرج خمس ۲ باقی ماند ۳ ضرب کردیم در مخرج سبع شد ۲۱ این از آن صاحب سبع بود و نقصان کردیم از مخرج سبع ۳ باقی ماند ۴ ضرب کردیم در مخرج خمس شد ۲۰ این از آن صاحب خمس بود.» (نگر: لب الحساب، ص ۲۷۲)

$$\begin{cases} x + \frac{2}{5}y = z \\ \frac{3}{7}x + 7 = z \end{cases} \Rightarrow x = 21, y = 20$$

۱۸. «یکی آمد و طبقی فندق آورد و ده دانه از آن به سه کس داد که هر یکی چندی برگیرند، و صد دانه دیگر در طبقی کرد، به اول می گوید آنچه تو داری دو چندان از این طبق برگیر و به ثانی می گوید ۹ چندان که داری از این طبق برگیر و به ثالث می گوید ده چندان برگیر، باقی که بماند بر هشت قسمت کن آنچه صحیح بیرون آید از آن اول بود، و باقی که قسمت پذیر نبود از آن ثانی و باقی عشره از آن ثالث، والسلام» (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۶)

$$x + y + z = 100$$

$$x = \left[\frac{100 - (2x + 9y + 10z)}{8} \right] - \frac{y}{8}$$



۱۹. «رسولی را فرستادند و شرط کردند که هر روز ۶ فرسخ برود و رسولی دیگر را فرستادند بعد از وی در پنج یوم و شرط کردند که در روز اول یک فرسخ بود و در روز دوم دو فرسخ و در روز سوم ۳ فرسخ و علی هذا بر نظم طبیعی تا این زمان که به وی رسد خواستیم که مدت الحاق بدانیم؟» (نگر: لب الحساب، ص ۲۷۰)

برای نفر اول دنباله ی ... و ۶ و ۶ و ۶ و ۶ و ۶ برای نفر دوم دنباله ی ... و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را در نظر می گیریم، از آن جا که نفر دوم ۵ روز دیرتر از نفر اول آغاز کرده است پس داریم :

$$\frac{n(n+1)}{2} = 6n + 5(6)$$

$$n^2 + n = 12n + 60$$

$$n^2 - 11n - 60 = 0$$

$$(n - 15)(n + 4) = 0$$

$$n = 15, n = -4$$

پس بعد از ۱۵ روز به هم می رسند، و مسافتی که پیموده اند

$$= \frac{x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - xy - 10y}{x + y - 10} = \frac{y(x + y - 10)}{(x + y - 10)} = y$$

$$x = 13 - y$$

۲۳. استخراج نام‌ها: «از مضمّر سؤال

کردیم که این نام چند حرف است. او را بگویند تا حرف اول را ترک کند و باقی به حساب جمل برگردد، و بگویند که چند است بعد از آن حرف دوم را ترک کند و باقی برگردد و بگویند که چند است و علی هذا تعداد این جمع کند و بر عدد حروف الّا واحدی قسمت کند آنچه خارج شود عدد حروف باشد به حساب جمل چون جمله اول از این اسقاط کند باقی حرف اول بود و علی هذا مثلاً او گفت این نام ۳ حرف است گفتیم که اول از این طرح کن و باقی برهم گیر گفت چهل است دیگر گفتیم ثانی طرح کن گفت هشتاد است دیگر گفتیم ثالث طرح کن گفت صد است بر هم افزودیم شد ۲۲۰ بر دو قسمت کردیم خارج آمد صد و ده این عدد حروف است جمله اول از وی برفتیم بماند هفتار

جمله ثانی از وی برفتیم بماند ۳۰ جمله ثالث از وی برفتیم بماند ده پس معلوم شد که این اسم علی است. (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۴)

برای مثال به کسی که اسم علی را نزد خود در نظر گرفته می‌گوییم حرف اول آن را حذف کند و جمع بقیه را بازگو کند، می‌داند که در حساب جمل ع معادل ۷۰، ل معادل ۳۰، و ی معادل ۱۰ است، پس اگر بخواهیم که بار اول ع، بار دوم ل، و بار سوم ی را حذف کند و جمع بقیه را بگوید داریم:

$$y + z = 40$$

$$x + z = 80$$

$$x + y = 100$$

حال اگر معادلات فوق را با هم جمع کنیم داریم:

$$2(x + y + z) = 220$$

$$x + y + z = 110$$

تا اینجا جمع حروف معلوم می‌شود، اینک معادله ی



استخراج اعداد مضمّر: استخراج اعداد مضمّر یعنی یافتن عددی که کسی در ذهن خود انتخاب کرده است از طریق گرفتن اطلاعات جانبی از او. در هر سه کتاب منبع این مقاله، در بخش‌هایی به این موضوع پرداخته شده است. در لغت مضمّر به معنی آن چه پوشیده و پنهان است و در ضمیر نگه داشته و در دل پنهان شده می‌باشد.

۲۲. «یکی ۶ و ۷ در دل گرفت از مجموع هر دو که ۱۳ است خبر باید داد و آن ۱۳ مربع کند باشد ۱۶۹ بعد از آن یکی از آن عدد مثلاً هفت را در مجموع که ۱۳ است ضرب کند نود و یک باشد بعد از آن عدد دیگر را که ۶ است در عددی که کمتر از ۱۳ بود ضرب کند مثلاً عشره ۶۰ باشد این دو مبلغ جمع کند باشد ۱۵۱ این از مربع ۱۳ برود. باقی مانده هجده قسمت کند بر فصل میان ۱۳ و عشره و آن ۳ است خارج آید ۶ از ۱۳ برود باقی ماند ۷. (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۴)

$$x + y = 13, \quad x = ?, \quad y = ?$$

$$\frac{(x + y)^2 - [x(x + y) + 10y]}{x + y - 10}$$

$$8x = 100 - 2x - 10y \Leftrightarrow$$

$$8x + 2x + 10y = 100 \Leftrightarrow$$

$$x + y = 10$$

سخن آخر

هنرمعلم ریاضی این است که بتواند زمینه‌ی یادگیری فعال را برای دانش‌آموزان فراهم کند، در آن‌ها بهترین انگیزه‌ها را ایجاد کند و آن‌ها را به تفکر و اندیشیدن وا دارد و چه قدر لحظات کلاس درس دلپذیر است وقتی معلم بتواند علاوه بر موارد مذکور به تاریخ و فرهنگ و ریاضیات قومی نیز بپردازد و به این وسیله فضای سرشار از شادابی به شاگردان درس ریاضی هدیه کند.

پی‌نوشت

۱. تفاضل
۲. پیک، قاصد
۳. کم کن

منابع

1. HPM newsletter. No. 69. July 2008. Available: <http://www.clab.edu.uoc.gr/hpm>
۲. التکملة فی الحساب، عبدالقاهر بن طاهر بغدادی. با تحقیق و مقدمه دکتر احمد سلیم سعیدان. چاپ اول. کویت. ۱۴۰۶ هجری.
۳. چاپ عکسی لب الحساب، مقدمه و فهرست جمال‌الدین شیرازیان. بنیاد دایرة المعارف اسلامی. مرکز انتشارات نسخ خطی. ۱۳۶۸.
۴. خردنامه. ابوالفضل یوسف بن علی مستوفی. به تصحیح و کوشش ادیب برومند. انتشارات انجمن آثار ملی. تهران. ۱۳۴۷.
۵. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. مترجم: پرویز شهریار. انتشارات فاطمی. چاپ سوم. تهران. ۱۳۷۵.
۶. دهمین کنفرانس آموزش ریاضی. *Chenge Chun Chor. Problem Solving through Pattern Recognition Litwin*. یزد. مرداد ۸۷.
۷. زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی. ابوالقاسم قربانی. مرکز نشر دانشگاهی. چاپ اول ۱۳۶۵.
۸. شماره‌نامه. محمد ایوب طبری (حاسب طبری). مقدمه تقی بینش. چاپ بنیاد فرهنگ ایران. ۱۳۴۵.
۹. کنزالحساب. شیخ بهایی. ترجمه اعتماد السلطنه. چاپ اصفهان. ۱۲۸۳.
۱۰. گوشه‌هایی از ریاضیات دوره‌ی اسلامی. جی ال برگن. ترجمه‌ی محمد قاسم وحیدی و علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی. ۱۳۷۴.
۱۱. مجموعه مقالات سومین همایش تاریخ ریاضی. دآوری و تدوین احمد شرف‌الدین. دانشگاه هرمزگان. چاپ اول. ۱۳۸۰.
۱۲. مفتاح المعاملات. محمد بن ایوب طبری، به کوشش محمد امین ریاحی، تهران. ۱۳۴۹.
۱۳. موزه آن لاین تاریخ علم آکسفورد: www.mhs.ox.ac.uk/exhibits/

$y + z = 40$ را در آخرین رابطه جایگزین کرده برای x عدد 70 که متناظر با c است به دست می‌آید، و بقیه نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شود. پس نام پنهان شده علی بوده است.

۲۴. «استخراج خاتم هرگه که شخصی خاتمی از زر در دستی نهد و خاتمی از نقره در دستی دیگر که خواهند که بدانند که خاتم زر در کدام دست است و نقره در کدام طریق آن باشد که در آن دست که خاتم زر است عددی زوج بگیرد و آن نقره عددی فرد آن عدد که در دست راست است ضرب کند در عدد زوج، و آنچه در دست چپ است ضرب کند در عدد فرد، و هر دو مبلغ برهم گیرد اگر بعد از تنصیف کسری باشد خاتم زر در دست راست بود و اگر کسری نباشد در دست چپ بود.» (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۵)

مشابه این مسئله در مفتاح المعاملات و التکملة نیز آمده است. فرض می‌کنیم خاتم زر در دست راست و نقره در دست چپ باشد، پس در دست راست عدد $2k_1$ در نظر می‌گیریم و در دست چپ $2k_3 + 1$ ، آن گاه طبق راه حل مؤلف داریم:

$$\frac{2k_1 \cdot 2k_3 + (2k_3 + 1)(2k_1 + 1)}{2} = \frac{4k_1k_3 + 4k_3k_1 + 2k_3 + 2k_1 + 1}{2} = \frac{2k_5 + 1}{2}$$

چون عدد کسری (ناصحیح) به دست آمد پس خاتم زر در دست راست است.

حال اگر خاتم زر در دست چپ و نقره در دست راست باشد داریم:

$$\frac{2k_1(2k_3 + 1)(2k_1 + 1) \cdot 2k_3}{2} = \frac{2k_5}{2} = k_5$$

عدد صحیح به دست آمد پس خاتم زر در دست چپ است و نقره در دست راست.

۲۵. «دو کس می‌گویند میان ما ده عدد پنهان است هر یکی چند داریم به یکی گو آنچه تو داری مضاعف کن و به آخر گو آنچه تو داری یکی ده گردان پس مجموع آن باز پرس و از مربع عشره اسقاط کن آنچه بماند بر هشت قسمت کن آنچه خارج آید از آن اول بود.» (نگر: لب الحساب، ص ۲۶۶)

$$x = \frac{100 - (2x + 10y)}{8} \Leftrightarrow$$



Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Roshd

Mathematics 99 Education Journal

Vol. 27 No. 3 2010 ISSN: 1606 - 9188

2. Editor's Note

4. The Story of Algebra (part1)

by: Ana Esfard & Lyora Linchovski

trans: Z. Kamyab & A. H. Asgari

15. Review of an Experience; The Necessity of Curriculum Integration

by: S. Chamanara

24. Students' Understanding of the Basic Concept of Function

by: B. Parhizkar & Z. Gooya

34. Teachers' Narrative

by: N. Hajisadegi

38. How to Choose Tasks For Classroom

by: A. H. Orgloo

42. View point(1)

by: M. Gooya

45. View point (2)

by: Authors of Math(2)

47. Prooving Inequalities by Convex Functions (Part 2)

by: A. Golamian

52. Using Books As Teaching Aides; Yes or No?!

by: M. Tandeh

56. Historical Amusements in Mathematics Education

by: N. Assarzagdegan

64. Journal Presentation

Managing Editor : Mohammad Naseri

Editor : Zahra Gooya

Executive Director : Sepideh Chamanara

Editorial Board :

Esmail Babolian, Mirza Jalili

Sepideh Chamanara, Mehdi Radjabipour

Mani Rezaie, Shiva Zamani, Bijan Zangeneh

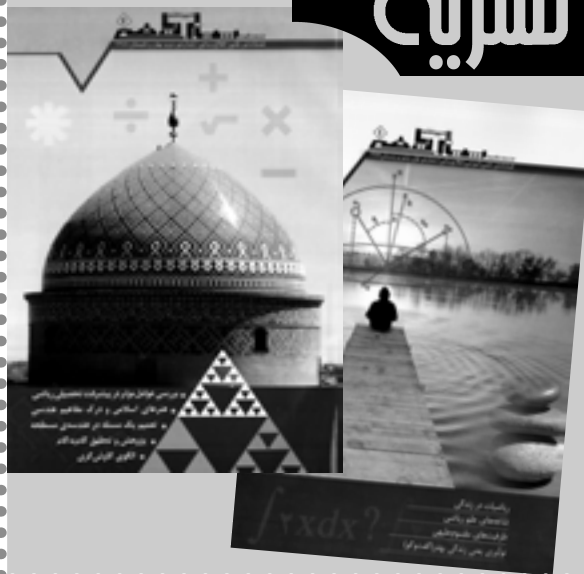
Mohammad Reza Fadaie and Soheila Gholamazad

Graphic Designer : M. Karimkhani

P.O. Box : Tehran 15875 - 6585

E-mail: riazi@roshdmag.ir

معارف نشریه



پیام دبیرخانه ریاضی

شماره های ۱ و ۲ پیام دبیرخانه ریاضی به ترتیب در پاییز و زمستان ۱۳۸۷ و بهار و تابستان ۱۳۸۸ به چاپ رسیده است. این فصل نامه علمی، آموزشی، اطلاع رسانی که توسط دبیرخانه ریاضی کشور به چاپ می رسد، شامل اخبار مرتبط با این نهاد و نیز مقاله هایی در حوزه های ریاضی و مرتبط با آموزش ریاضی می باشد. از آن جمله می توان به این مطالب اشاره کرد:

- هنرهای اسلامی و درک مفاهیم هندسی (در شماره ی ۲)؛
- الگوهای کاوش گری (در شماره ی ۲)؛
- کاربرد صفحه گسترده ی Excel برای درک بهتر حد یک دنباله (در شماره ی ۲)؛
- بررسی عوامل مؤثر در پیشرفت تحصیلی (در شماره ی ۲)؛
- تاریخچه ی عدد صفر (در شماره ی ۱)؛
- زیرمجموعه های فارسی (در شماره ی ۱)؛
- ریاضیات در زندگی (در شماره ی ۱)؛
- الگوهای یادگیری (در شماره ی ۱)؛
- و...

math.teo.ir

math-gs@yahoo.com

جهت آشنایی و اطلاعات بیش تر، به نشانی

مراجعه کنید یا برای نشانی

نامه ی الکترونیکی بفرستید.