بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۹۷

دوره ی بیست و هفتم، شماره ی۱ ، پاییز ۱۳۸۸

آموزشی-تحلیلی - اطلاع رسانی

www.roshdmag.ir

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد ،می پذیرد . لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیأت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت،مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه ، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله ، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد ، باز گشت داده نمی شود.

نشانی دفتر مجله:تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵ - ۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله : ۹- ۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴) و ۸۸۳۰۵۸۶۲
شماره ی پیام گیر مجلات تخصصی رشد: ۱۱۳- ۸۸۳۰۱۴۸۲ -۰۲۱
E-mail: riazi@roshdmag.ir
چاپ : شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان:۱۴۰۰۰

سرمقاله

معلمان ریاضی؛

مخاطبان و صحنه گردانان اصلی مجله

دغدغه ی اصلی مجلات رشد تخصصی

دغدغه ی اصلی مجلات رشد تخصصی، آموزش معلمان در حوزه های مختلف و جدی گرفتن خواسته ها، نیازها، آرمان ها و اعتلای آن هاست. بدین سبب، هر از چند گاهی، این دغدغه پررنگ تر می شود و همه ی دست اندرکاران این مجلات و سیاست گذاران آن برای اطمینان از این که مخاطبان اصلی با دقت در نظر گرفته شده اند، اقدام به ارزیابی های عرضی و طولی مجلات می کنند. ما نیز به عنوان مسئولیت پذیران این مجله، علاقه مندیم تا با ارائه ی شواهد مستند، به این ارزیابی ها کمک کنیم و از نتایج آن ها برای توسعه ی کیفی مجله ی رشد آموزش ریاضی، استفاده نماییم. در واقع، هدف این نوشتار آن است که از خوانندگان خود تقاضا کنیم تا با نقدهای منصفانه، بی غرضانه، صریح و بدون تعارف، هم زحمت کشیده و نقش دیده بان را ایفا کنند و هم به عنوان عضوی از این خانواده ی وسیع، با تلاش خود، محتوای مجله را غنی تر و غنی تر کنند.

اما برای انجام این مهم ـ که همیشه در طول زمان، به شکل های متنوع و ظریفی انجام شده است ـ نیازمند داشتن اطلاعات لازم و سازوکارهای عملی هستیم. به این دلیل، از دو سال پیش، مسئولان دفتر کمک آموزشی، از هیئت های تحریریه مجلات تخصصی درخواست نمودند تا برنامه های سالانه ی خود را تنظیم کرده و نسبت به اجرای با کیفیت آن ها، متعهد شوند. این حرکت که از زمان مدیر مسئول محترم قبلی شروع شد و با مدیر مسئول محترم جدید تداوم یافته است، گام مهمی در جهت پاسخ گو کردن و پاسخ گو شدن است که باید آن را به فال نیک گرفت. مهم تر این که داشتن برنامه، حدود و ثغور فعالیت را روشن می کند و از کارهای بی پشتوانه و بی بهانه، جلوگیری می نماید، و چنین شد که مجله ی رشد آموزش ریاضی نیز برنامه ی سالانه ی خود را ارائه کرد. در این برنامه، جزئیات محتوای مجلات و نسبت آن ها با یک دیگر، بیان شده است. به طور مشخص مسئولیت کلیدی مجلات تخصصی، ارتقای آموزش معلمان و به زبان ادبیات پژوهشی روز آمدتر، توسعه ی دانش حرفه ای یا همان توسعه ی دانش موضوعی، دانش روشی و دانش پداگوژیکی محتواست.

محتوای برنامه ی سالانه مجله

با توجه به این امر، طبق روالی که چندین سال است و هیئت تحریریه بر آن توافق نموده، برنامه ی ارائه شده که از محتوای مجلات استخراج گردیده و در حال حاضر، راهنمای تولید هر شماره است، شامل بخش های زیر می باشد:

- دست کم یک مقاله ی تألیفی یا ترجمه ای در حوزه ی تخصصی آموزش ریاضی که هدف عمده ی آن ها، تعمیق دانش نظری معلمان و آشنا نمودن علاقه مندان با مبانی نظری کلاسیک، جاری و آرمانی این حوزه است. این مقالات، عمدتاً پژوهشی اند و به دلیل ماهیتشان، طولانی، سخت و درک آن ها نیازمند دقت و زمان بیش تر است. در نتیجه، سعی می شود تا با سوتیترهای مناسب، هم به خواننده در انتخاب مقاله، کمک شود و هم امکان تقسیم مقاله به چند بخش و مطالعه ی دقیق آن در چند نوبت فراهم گردد.
- یک یا چند مقاله ی موضوعی ریاضی که هدف اصلی آن ها، دانش افزایی موضوعی معلمان ریاضی و آماده تر کردن ایشان برای ورود به عرصه های ابتکاری و خلاق موضوعات ریاضی مدرسه ای است. این مقاله ها، می توانند زمینه های عملی و مناسبی برای

دخل و تصرف به جای معلمان در برنامه‌ی درسی کلان یا به اصطلاح امروزی، برنامه‌ی درسی مدرسه ـ محور را فراهم نمایند.

در نتیجه در این قسمت، تنها مباحثی مورد پذیرش قرار می‌گیرند که با برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای. که تجلی آن کتاب‌های درسی ریاضی است، هم‌سویی داشته باشند. این مقالات، تألیفی یا ترجمه‌ای هستند و معلمان ریاضی در تهیه‌ی این بخش، مشارکت چشم‌گیری دارند که از همه‌ی آن‌ها قدردانی می‌شود.

○ یک یا چند مقاله‌ی مروری آموزشی مرتبط با برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای و چگونگی تدریس و ارزشیابی که ترکیبی از تألیف و ترجمه‌اند و باز هم معلمان در این بخش، فعالانه سهیم هستند.

○ ستون **روایت معلمان** که ویژه‌ی تجربه‌های کلاس درس است و کاملاً برگرفته از کلاس‌های واقعی تدریس ریاضی است.

○ ستون **دیدگاه** که عرصه‌ی منحصر به فردی برای طرح دیدگاه‌ها، نقدها و نظرهای خوانندگان مجله است. ویژگی این ستون آن است که در چارچوب سیاست‌گذاری‌های کلان مجلات، دیدگاه‌ها بدون **ویرایش** چاپ می‌شوند و دیگران فرصت دارند که پاسخ یا بازتاب خود را بر آن نوشته، در همین ستون و باز هم بدون ویرایش، عرضه کنند.

○ گزارش‌های متنوع از برگزاری کنفرانس‌ها و همایش‌ها، نشست‌های تخصصی، کارگاه‌های آموزشی و فعالیت‌های ابتکاری معلمان در شهرهای مختلف که همگی مرتبط با تدریس و یادگیری ریاضی‌اند.

○ چکیده‌ی پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی در دانشگاه‌های مجری این دوره از زمان تأسیس دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی در ایران که خوانندگان را با تحقیقات انجام شده در این حوزه آشنا می‌کند. انتظار می‌رود که این بخش، بتواند در خدمت کسانی باشد که به ادامه‌ی تحصیل خود در این رشته فکر می‌کنند. از زمانی که این بخش به مجله اضافه گردید، از دانشگاه‌های مجری دعوت عام شد که در صورت تمایل، چکیده‌های این پایان‌نامه‌ها را با امضای استادان محترم راهنما، برای چاپ در مجله ارسال نمایند. این بخش نیز بدون ویرایش، به چاپ سپرده می‌شود.

○ معرفی کتاب که هر چند شماره یک بار انجام می‌شود. علت این کُندی، ملاحظاتی است که در سطوح مختلف، برای معرفی یک کتاب در نظر گرفته می‌شود که مهم‌تر از همه این است که حالت تجاری یا تبلیغاتی به خود نگیرد. علاوه بر این، معرفی‌کننده، کتاب را به خوبی خوانده باشد تا بتواند معرفی آگاهانه و منصفانه‌ای از کتاب را ارائه نماید.

○ پاسخ به نامه‌ها که طبق توافق هیئت تحریریه، به این معناست که افرادی که لطف کرده و برای مجله مطلب ارسال نموده‌اند یا نقد و نظری داشته‌اند، تنها نامشان ذکر می‌شود و برای حفظ حرمت افراد، به محتوای نامه‌ها و پاسخ‌ها، اشاره‌ای نمی‌شود. البته در مکاتبات فردی با همکاران محترم، به جزئیات توجه می‌شود.

○ ترجمه‌ی عنوان‌های هر شماره به انگلیسی به منظور آشنایی دیگران با ماهیت مجله و تسهیل ارجاع دهی به آن‌ها در صورتی که ضرورتی برای این کار باشد.

○ بالاخره **سخن سردبیر** که در آن، سعی می‌شود تا حد امکان، به مباحث روز ریاضی مدرسه‌ای در ایران پرداخته شود. هم چنان که در بعضی مواقع نیز مانند همین شماره، درباره‌ی موضوعاتی ضروری مانند برنامه‌ی سالانه‌ی مجله، اطلاع‌رسانی می‌شود.

در هر صورت، مروری بر شماره‌های پیشین مجله نشان می‌دهد که خوشبختانه، همکاری معلمان ریاضی با مجله، به طور قابل توجهی بیشتر شده و به طور مداوم، این مشارکت افزایشی است. این نکته از اهمیت قابل ستایشی برخوردار است زیرا نشان می‌دهد که برنامه‌ی تدوین شده برای مجله، توانسته است در خدمت مخاطبان و صحنه‌گردانان اصلی آن یعنی معلمان ریاضی باشد. به طور مثال، محتوای مجله با مقالات مروری و ترویجی در خدمت تدریس روزانه‌ی معلمان بوده و از طریق مقالات نظری، سطح انتظارات آن‌ها را بالاتر برده و شوق ترقی و توسعه را در ایشان ایجاد کرده است. بهترین نمونه‌ی این ادعا، چکیده‌ی پایان‌نامه‌هایی است که تقریباً بدون استثنا، پژوهشگران آن‌ها همگی معلمان رسمی یا غیررسمی ریاضی‌اند و این یعنی رساندن این پیام‌رسا به معلمان شاغل که **می‌توانم** اگر بخواهم! جالب این است که معلمان ریاضی از دور افتاده‌ترین شهرهای ایران ـ به دلیل توزیع به روز و مناسب مجله ـ توانسته‌اند جزو مخاطبان مجله باشند و ما به خود می‌بالیم که موفق شده‌ایم این ارتباط معنادار را با معلمان ریاضی ایران برقرار کنیم.

آخرین کلام آن که با وجود اشتیاق و تلاش و همت معلمان ریاضی، مجله از بسیاری از اخبارِ مربوط به تصمیم‌گیری‌های کلان ریاضی به طور رسمی بی‌خبر است و در نتیجه، این فرصت طلایی که می‌توانست از طریق مجله، بین سیاست‌گذاران و تصمیم‌گیرندگان و تصمیم‌سازان برنامه‌ریزی و تألیف برنامه‌ها و کتاب‌های درسی ریاضی و معلمان ریاضی که مخاطبان و مجریان و نفع‌بران اصلی آن تصمیمات هستند به وجود آید، تاکنون به معنای واقعی پیش نیامده است.

امیدواریم دانستن و اطلاع‌رسانی را حق یک دیگر بدانیم و اجازه دهیم تا با نقد مشفقانه و بی‌غرضانه، هم دیگر را در کمک به یادگیری ریاضی آینده‌سازان ایران عزیز، یاری رسانیم.

بخش اول

یادگیری حسابان در دام مفهوم حد و نمادها

یوسف آذرنگ

کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی آذربایجان غربی

مقدمه

قرن هفدهم را به نوعی می‌توان زمان برخورد مفاهیم جبر، هندسه و حسابان نامید. پیدایش نمادها و علائم ریاضی موجب شد بسیاری از فعالیت‌های ریاضی به سادگی صورت گیرند؛ مهارت‌های جبری توسعه یابند؛ جبر و هندسه باهم پیوند خورند و هندسه‌ی تحلیلی را به‌وجود آورد تا گام مهمی به سمت ابداع حسابان برداشته شود. ورود اعمال جبری به حسابان، غنای زیادی به این حوزه می‌بخشد و به همین میزان هندسه و حسابان تأثیر متقابلی برهم می‌گذارند تا پایه‌های هندسه‌ی دیفرانسیل بنا شود. لذا قرن هفدهم را می‌توان قرن به تکامل رسیدن بسیاری از پایه‌های ریاضی دانست؛ یعنی جایی که جبر، هندسه و حسابان به شکل ظریفی درهم عجین می‌شوند و هر یک موجبات رشد و توسعه‌ی دیگری را فراهم می‌آورند. بدین ترتیب، نمادگذاری و کشف روابط ریاضی، بیش‌تر حوزه‌های ریاضی را تسخیر می‌کند، چیزی که امروزه در پناه آن قادریم اعمال ریاضی را با امنیت خاطر بیش‌تری انجام دهیم! و حتی دوست داریم هندسه و مسائل آن را هم به روش تحلیلی پاسخ دهیم. حسابان و مفاهیم آن هم از این قاعده مستثنی نبوده‌اند و به کرات دیده‌ایم که به‌کارگیری قواعد و روابط ریاضیِ این حوزه را به معنای درک مفاهیم آن تلقی کرده‌ایم. این همان هشداری است که کانفری و اسمیت[1] (۱۹۴۴)، متذکر شده‌اند.

به عقیده‌ی آن‌ها، به دلیل آن‌که وارد دنیایی شده‌ایم که جبر، مکانی برای انجام دادن اعمال ایجاد کرده است. یک خطر واقعی وجود دارد که قادر نباشیم اعمال ریاضی را در یک زمینه‌ی هندسی (یا نموداری) ببینیم. کاپوت[2] (۱۹۴۴)، هم در مورد فعالیت‌هایی که افراد مختلف در طول تاریخ رشد و توسعه‌ی حسابان داشته‌اند اظهار می‌دارد تمام آن فعالیت‌ها، بازنمایی[3]هایی هندسی رضایت‌بخشی داشته‌اند و افراد، بازنمایی‌های معادل را برای فعالیت‌های خود بسیار بیش‌تر از فعالیت‌های امروزی که برای رسم نمودارها انجام می‌شود، در نظر می‌گرفتند. حال سؤال اصلی این است که اگر مفاهیم حسابان را با صورت‌های نمادین در قالب مهارت‌های جبری انجام دهیم، درک نمادین، از این مفاهیم تا چه اندازه است؟ در این مقاله، مشکلات حسابان را در ارتباط با مفهوم حد و نمادها بررسی می‌کنیم. در ابتدا به طور خلاصه به ریشه‌های حسابان و بستگی آن به جبر پرداخته می‌شود.

ابداع هندسه تحلیلی با رهایی «اصل هم‌گونی»[4]

رابطه‌ی بین جبر و هندسه را باید در ساده‌ترین مفاهیم آن، یعنی عدد حقیقی و نقطه جستجو کرد. وقتی که طول پاره‌خط را با نماد x و یا مساحت یک مربع را با نماد x^2 نمایش می‌دهیم، در واقع پلی بین مفاهیم جبر و هندسه برقرار کرده‌ایم. هندسه‌ی تحلیلی در سایه‌ی ارتباط بین جبر و هندسه توسط فرما و دکارت ایجاد شد تا بین منحنی‌ها و معادلات، رابطه برقرار شود. ابداع هندسه‌ی تحلیلی باعث ایجاد انقلابی عظیم در ریاضی شد زیرا تا قبل از آن، طبق نظر یونانیان، یک متغیر با طول یک پاره‌خط، حاصل ضرب دو متغیر با مساحت یک مستطیل و حاصل ضرب سه متغیر با حجم یک مکعب مستطیل متناظر بود. یونانیان نمی‌توانستند از این فراتر بروند. زیرا به دلیل سه‌بعدی بودن جهان، x^4 و x^5 و ابعاد بالاتر برای آن‌ها بی‌معنی بود. این اصل نزد ریاضی‌دانان یونانی معتبر بود و به «اصل هم‌گونی» معروف بود. در هندسه‌ی تحلیلی که توسط دکارت به تکامل رسید، x^2 تنها دلالت بر یک مساحت نمی‌کرد، بلکه دال بر جزء چهارم در تناسب $\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$ بود و دکارت نشان داد که چگونه با استفاده از پاره‌خطی به‌عنوان واحد طول، هر توانی از یک متغیر یا حاصل ضرب هر تعدادی از متغیرها را می‌توان به‌صورت یک طول نشان داد.

کاپوت (۱۹۹۴)، به نقل از مرتز تاخ[5] (۱۹۸۹)، در مورد اهمیت کار دکارت بیان می‌کند «دکارت، اساساً سنت یونانی‌ها را شکست و به‌جای در نظر گرفتن x^2 و x^3 به‌عنوان مساحت و حجم، آن‌ها را به‌عنوان خطوط تعبیر نمود. این کار باعث شد تا دکارت، اصل هم‌گونی را با حفظ معنی هندسی آن رها کند. واضح است که دکارت، هم‌گونی در تفکر را جایگزین هم‌گونی در شکل کرد و این گامی بود که جبرِ هندسی او را انعطاف‌پذیرتر ساخت. هم‌چنان که امروزه می‌خوانیم xx یعنی مربع x بدون این‌که حتی یک مربع را در چشم ذهن خود ببینیم» (صص ۱۰۳ و ۱۰۴).

با ابداع هندسه‌ی تحلیلی و ایجاد رابطه بین هندسه و جبر، راه تازه‌ای برای تکامل ریاضیات گشوده شد و روش مختصاتی، این امکان را فراهم آورد تا مسئله‌های هندسی به یاری رابطه‌ها و معادله‌های جبری حل شوند. کاپوت (۱۹۹۴)، اظهار می‌دارد که ارکالد و ورناد[6] (۱۹۸۰)، رفتار موازی آن‌چه را که در طول تاریخ ریاضی شکل گرفته است، در دانش‌آموزان پیدا کرده‌اند. در مطالعه‌ای که آن‌ها با دانش‌آموزان ۱۰ تا ۱۳ سال انجام داده بودند، فرآیند مرتبط کردن اعداد به نقاط روی یک خط راست برای آن‌ها بسیار با اهمیت بود. آن‌ها دریافتند، اکثر دانش‌آموزان تمایل داشتند که اعداد را به‌جای نقاط، به فاصله‌ها متناظر کنند. لذا کاپوت نتیجه گرفته است که هم به لحاظ تاریخی و هم به لحاظ روان‌شناسی، معرفی کردن یک کمیت به‌صورت پاره‌خط به جای نقاط یا معرفی طول به‌جای موقعیت مکانی، ساده‌تر است.

ریشه‌های حسابان و بستگی آن با جبر

حسابان یکی از بزرگ‌ترین ابداعات ریاضی در تاریخ است که به‌طور هم‌زمان توسط نیوتن و لایب نیتز و با دو رویکرد متفاوت به‌وجود آمد. محققان مختلف، نظرات متفاوتی نسبت به ریشه‌های حسابان و چگونگی پیدایش آن دارند که کاپوت (۱۹۹۴)، سه ریشه از حسابان را در نظر گرفته است که به وضوح، به‌طور پیچیده‌ای باهم عجین شده‌اند:

به عقیده‌ی کانفری و اسمیت، به‌دلیل آن‌که وارد دنیایی شده‌ایم که جبر، مکانی برای انجام دادن اعمال ایجاد کرده است، یک خطر واقعی وجود دارد که قادر نباشیم اعمال ریاضی را در یک زمینه‌ی هندسی (یا نموداری) ببینیم

۱. ریشه‌ی اول، مربوط به موارد هندسی و در ارتباط با محاسبه‌ی سطح‌ها، حجم‌ها و مماس‌ها است. در واقع این ریشه، عملی بود و برای مثال ابتدا در کار ارشمیدس نمود پیدا کرد.

۲. ریشه‌ی دوم، آمیزه‌ای از علاقه‌های نظری و عملی و شامل توصیف و بهره‌برداری از تغییرات پیوسته‌ی کمیت‌های فیزیکی است. شروع این ریشه به تصور یونانی‌ها به تولید اشیاء هندسی در اثر حرکت پیوسته برمی‌گردد. اما به‌طور جدی زمان بروز آن به تلاش‌های فیلسوفان آموزشی برای ریاضی‌وار کردن پدیده‌ی تغییر برمی‌گردد و این ریشه تا دهه‌های قبل از نیوتن و حتی دهه‌ی نیوتن نیز توسعه نیافت. این ریشه توسط فیزیک‌دانان / ریاضی‌دانان قرن‌های ۱۸ و ۱۹ که پدیده‌های فیزیکی را بیش‌تر و بیش‌تر کمّی کرده‌اند، شکل انتزاعی به خود گرفت.

۳. ریشه‌ی سوم، ذاتاً نظری است که شروع آن با پارادوکس‌های قدیمی زنون است و تداوم آن مربوط به توسعه‌ی نظریه‌ی رسمی حد در قرن ۱۹ است و شامل بیش‌تر تلاش‌هایی

بود که یک نظریه‌ی کامل از «بی‌نهایت کوچک‌ها» را نتیجه داد.

به گفته‌ی کاپوت (۱۹۹۴)، ریشه‌های اول و دوم حسابان از این لحاظ مهم‌اند که ارتباط نزدیک‌تری با برنامه‌ی درسی مربوط به دانش‌آموزان دارند. هم‌چنین امروزه با اصرار و پافشاری روی روش‌های جبری کارآمد که همه جای برنامه‌ی درسی وجود دارند، به‌نظر می‌آید جایگاه آن‌ها از دست رفته است.

ایده‌ی تغییر و ریاضی‌وار کردن این پدیده که مبنای ریشه‌ی دوم حسابان است، به‌تدریج از قرن‌های ۱۳ و ۱۵ شکل گرفت. کاپوت به نقل از بویر[۷] (۱۹۵۹)، اشاره می‌کند در حالی که یونانی‌ها، برخی گمانه‌زنی‌های کیفی روی موضوع حرکت داشته‌اند، اما به‌نظر نمی‌آید ایده‌ی تغییرات پیوسته به‌وسیله‌ی اهمیت هندسی یا مطالعه‌ی آن برحسب گسستگی اعداد توسط آنان مطرح شده باشد. کاپوت اشاره می‌کند به‌تدریج در قرن‌های ۱۳ و ۱۵ عقاید سیار کلاسیک که تمام حرکت را نتیجه‌ی یک نیروی خارجی می‌دانست، به‌وسیله‌ی عقاید محرک جای‌گذاری شد؛ به این معنا جسمی که در حال حرکت است، تمایل دارد در حرکت باقی بماند. این عقیده به لحاظ ریاضی، ایده‌ی سرعت در یک نقطه و سرعت لحظه‌ای را ممکن ساخت. اما ابداع یک زبان ریاضی دقیق برای بیان این ایده، قرن‌ها به طول انجامید که شروع آن در قرن ۱۳ و احتمالاً در کار دانس اسکات[۸] و دیگران است. به هر حال با تمام پیشرفت‌هایی که تا قبل از قرن هفدهم در حسابان و شکل‌گیری آن صورت گرفت، دستگاه نمادین مناسبی برای آن پیدا نشد و بیش‌تر به زبان طبیعی و در نمودارها قابل بیان بود. اما همان‌گونه که شهریاری (۱۳۸۰)، ابراز کرده است «پیشرفت جبر، روش‌های آن و استفاده از نمادهای حرفی، در پیشرفت یکی از شاخه‌های تازه‌ی ریاضیات، یعنی آنالیز ریاضی، تأثیر جدی داشته است. نوشتن ساده‌ترین مفهوم‌های آنالیز مثل کمیت متغیر و تابع، بدون وجود نمادهای حرفی ممکن نبود. در آنالیز ریاضی به‌ویژه در حسابان به صورتی گسترده از ابزار جبر رسمی استفاده می‌شود» (ص ۹۵).

علاوه بر این، شهریاری در مورد ارتباط جبر و آنالیز بیان می‌کند: «در سده‌های ۱۷ و ۱۸، جبر و آنالیز در بستگی کامل با یکدیگر پیش رفتند. تصور تابعی در جبر نفوذ کرد و نیوتن هم توانست آن را غنی‌تر کند. از طرف دیگر جبر، دستورها و روش‌های تبدیلی خود را به آنالیز داد که برای محاسبه‌ی انتگرال و نظریه‌ی معادله‌های دیفرانسیل نقش عمده‌ای به‌عهده گرفتند. مهم‌ترین پیشامد این دوره، پیدایش دوره‌ی جبر اویلر بود» (ص ۱۰۲).

به گفته‌ی کاپوت (۱۹۹۴)، این فعالیت‌ها باعث شد هم‌چنان که هندسه‌ی تحلیلی حوزه فعالیت خود را گسترش داد (هر معادله منجر به یک منحنی شد)، همین نقش را هم سری‌های نامتناهی بازی کنند، زیرا می‌توانستند به عنوان کلاس جدیدی از توابع بررسی شوند. در واقع هم نیوتن و هم لایب‌نیتز، حسابان را تعمیمی از جبر تلقی کردند؛ جبر نامتناهی یا جبری که تعداد نامتناهی از جملات را بررسی می‌کند. مانند آن‌چه که در سری‌های نامتناهی وجود دارد.

حتی اگر دانش‌آموزان بپذیرند که غیرممکن است به حد دنباله برسند، باز هم تمایل دارند این امر نشدنی و محال را با توجه به زمان محدود و حساب محدود بشری با ماشین حساب‌های الکترونیکی ممکن سازند. آن‌چه به خوبی مشهود است این است که یک تضاد ذهنی در رسیدن یا نرسیدن به مقدار حد برای دانش‌آموزان ایجاد می‌شود

شهریاری در مورد تفاوت جبر و آنالیز و شروع آن اشاره می‌کند که تفاوت جبر و آنالیز در سده‌های ۱۸ و ۱۹، به این ترتیب مشخص شد که جبر با موضوع خاص خود که محدود است با نوعی گسستگی سروکار دارد. این ویژگی را لباچوفسکی در نیمه‌ی اول قرن نوزده در کتاب خود به نام «جبر با محاسبه‌ی محدودها» مشخص کرد. وی در ادامه توضیح می‌دهد که جبر با عمل‌های اصلی (جمع و ضرب) سروکار دارد و این عمل‌ها به تعداد محدودی انجام می‌گیرد. آنالیز نمادها را که بدون آن‌ها نمی‌توانست معنایی داشته باشد از جبر گرفت. از طرف دیگر، جبر اغلب از اندیشه‌ی پیوستگی نیز استفاده می‌کند، ولی به‌تدریج تصور تعداد نامحدودی «چیز» به‌صورت جدید و خاص خود، بر جبر دوره‌ی اخیر مسلط می‌شود. بالاخره فرودنتال (۱۹۷۹)، تأکید می‌کند «اختراع جبر حروفی، هندسه‌ی تحلیلی و حتی حسابان در ابتدا روش‌های سازمان‌دهی دوباره‌ی دانش موجود به وسیله‌ی خلق ابزارهای سازمان‌دهی بود. به‌تدریج که ثابت شد آن ابزارها بسیار

قدرتمند هستند، خود آن‌ها نیز باعث تولید انبوهی از دانش جدید شدند» (ص ۲۹).

ماهیت حسابان و وابستگی آن به جبر، مشکلات ویژه‌ای را برای یادگیری حسابان به‌وجود آورده است که به اختصار به آن پرداخته می‌شود.

مشکلات یادگیری حسابان

شیوه‌ی ارائه‌ی مفاهیم ریاضی و از جمله حسابان در قالب نمادین و مجرد که اکثر معلمان ریاضی به آن عادت کرده‌اند، شاید مجال کمتری به دانش‌آموزان بدهد که با تأمل و نگاه عمیق به مفاهیم مورد بحث نظر افکنند. نمادها و علائم ریاضی چه در جبر و چه در حسابان، حاوی مفاهیم زیادی هستند و ارائه‌ی تجرید زودهنگام مفاهیم آن بر مبنای این نمادها و علائم، نه تنها جذابیت چندانی ندارد، شاید یکی از عوامل بیزاری دانش‌آموزان از ریاضی نیز باشد.

گذر از جبر به حسابان گذر از فرآیندهای متناهی به فرآیندهای نامتناهی است. دانش‌آموزان با توانمندی‌ها و مهارت‌هایی که در جبر یاد گرفته‌اند پا به حوزه‌ی حسابان می‌گذارند. آن‌ها با انجام رویه‌ها بر مفاهیم حسابان، شاید وجود فرآیندهای نامتناهی را حس نکنند. لذا تکنیک‌های موجود در این حوزه، برای مفاهیمی از قبیل حد، دنباله، مشتق و غیره تا حدود زیادی فرآیندهای نامتناهی موجود در این مفاهیم را پنهان می‌کند و این کار موجب می‌شود که دانش‌آموزان، همان اعمال رویه‌ای را که در جبر انجام می‌دانند، در حسابان نیز دنبال کنند.

کاپوت (۱۹۹۴)، وضعیت ریاضی دانش‌آموزانی را که به‌طور سنتی وارد مطالعه‌ی حسابان می‌شوند، متناظر با جنبه‌های مشخصی از ریاضیات یونانی می‌داند. او بیان می‌کند «در ابتدا دانش‌آموزان اشخاصی حسابی هستند و درکشان از حروف جبری به جای متغیرها، مجهولات است و به‌طور واقعی، مفهومی از شتاب ندارند. برای آن‌ها، انواع حرکاتی که در درون ریاضیات می‌بینند آن‌هایی هستند که از طریق فرمول‌های ساده‌ی جبری قابل توصیف‌اند و با حرکت‌های نامنظمی که در زندگی روزانه‌شان تجربه می‌کنند، کاملاً نامشابه است. از این‌رو، آن‌ها به لحاظ شناختی، نمی‌توانند کاربردهای مدرسه را با تجربه‌های روزانه‌ی خود مرتب سازند» (ص ۸۸).

آرتیگ[۹] (۱۹۹۶ به نقل از لگراند ۱۹۹۳)، اظهار می‌دارد که «فعالیت‌های ریاضی در آنالیز، قویاً وابسته به مهارت‌ها و شایستگی‌های جبری است. ولی هم‌زمان، ورود به «تفکر آنالیزی» ما را وادار می‌کند که از «تفکر جبری» فاصله بگیریم» (ص ۲۶). به‌عنوان مثال، وی به این موضوع اشاره می‌کند که در آنالیز، نامساوی‌ها نقش غالب‌تری بر تساوی‌ها دارند و استدلال موضعی با شرایط کافی روی عبارات جبری، به‌صورت روش اصلی در استدلال‌ها درمی‌آید.

تال[۱۰] (۲۰۰۲)، هم در ارتباط با مشکلات یادگیری حسابان، برنامه‌های درسی را خطاب قرار می‌دهد. وی بیان می‌کند بسیاری از برنامه‌های درسی حسابان، به سمت یک معنی منطقی از دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری بنا شده‌اند و به‌همین دلیل، برنامه‌ریزان تصمیم گرفته‌اند حسابان را با ایده‌ی حد شروع کنند. اگرچه چنین شروعی پایه و اساس یک منطق نظری رسمی است؛ اما چنین شروعی، الزاماً یک نقطه‌ی خوب برای آغاز یادگیری دانش‌آموزان نیست. در ارتباط با همین، تال (۱۹۸۵) اشاره می‌کند که معمولاً نخستین رویارویی با حسابان چنین است که با دو نقطه‌ی A و B روی یک نمودار شروع می‌شود و رفته‌رفته، با نزدیک و نزدیک‌تر شدن A به B، وتر AB نیز به خط مماس در نقطه‌ی A میل می‌کند. وی اشاره می‌کند زبان رسمی به‌کار رفته در این مرحله می‌تواند موجب بروز مشکلات زیادی برای یادگیری حسابان توسط دانش‌آموزان شود. تال (۲۰۰۲)، در جایی دیگر یادآور می‌شود که تعداد کمی از دانش‌آموزان را یافته‌ام که به‌طور طبیعی مفهوم حد را برای خودشان ابداع کنند. برای مثال، وی نمودار سهمی $y = x^2$ را همراه خطی که از نقاط (۱ و ۱) و (k, k^2) می‌گذرد معرفی کرده و از

همه می‌دانیم به کارگیری صورت‌های نمادین حد و انجام اعمال جبری با آن، همواره به معنای درک نمادین مفهوم حد نبوده است

به هر حال، بسیاری از مشکلات دانش‌آموزان در درک مفاهیم حسابان ناشی از نمادهای حرفی و انجام اعمال جبری با آن‌هاست؛ نمادهایی که در طول تاریخ برای ساده‌سازی مفاهیم به کار گرفته شده‌اند

وقتی دانش‌آموزان از الگوریتم‌ها و روش‌های قاعده‌مند جبری استفاده می‌کنند، در پناه آن‌ها راحت‌تر و به نتیجه‌ی کارخود مطمئن‌تر هستند

دانش‌آموزان خواسته بود شیب خط مورد نظر را بنویسند و توضیح دهند که چگونه می‌توانند شیب خط مماس را در نقطه‌ی (۱ و ۱) بیابند. تال بیان می‌کند فقط یکی از دانش‌آموزان با بررسی حد تابع وقتی که $k \to 1$ از عهده‌ی این کار برآمد. باز هم در تأیید همین مطلب تال (۲۰۰۲)، مثال دیگری از دانش‌آموز ۱۵ ساله‌ای به نام جیمز ذکر می‌کند که با اصول و مبنای اولیه‌ی حسابان آموزش داده می‌شود. در ابتدا، معلم ایده‌ها را برحسب یک تصویر توضیح می‌دهد که چگونه مدار به موقعیت مماس نزدیک می‌شود. سپس او با مثال‌های عددی برای تابع $y = x^2$، کار را ادامه داد. برای این کار، در ابتدا برای مقادیر $x = 1$ و $x = 2$ و در ادامه به‌ترتیب شیب خط‌ها را از ۱ به ۲، از ۱ به ۱/۱ از ۱ به ۱/۰۱ محاسبه کرد. سپس این ایده‌ها را به لحاظ جبری در نظر گرفت و به‌صورت $(x + \Delta x)^2 - x^2$ بر Δx نوشت. بعد از محاسبه‌ی شیب خط برای $y = x$ و $y = x^2$، معلم الگوی کلی مشق x^n را به فرم nx^{n-1} نمایان ساخت و نشان داد که چگونه این قاعده برای چندجمله‌ای‌های کلی کار می‌کند. جیمز بعد از کلاس به معلم گفت «شما همیشه پیش از پرداختن به روشی ساده برای انجام دادن آن، روش‌های دشوار را به ما نشان می‌دهید».

تال، در ادامه اظهار می‌دارد در این کلاس، تمام دانش‌آموزان مشتق گرفتن از چندجمله‌ای‌ها را یاد گرفتند، اما هیچ یک از آن‌ها نتوانستند این فرآیند را توضیح بدهند.

این مثال، دو چیز را به‌خوبی نمایان می‌سازد، اول این‌که وقتی دانش‌آموزان از الگوریتم‌ها و روش‌های قاعده‌مند جبری استفاده می‌کنند، در پناه آن‌ها راحت‌تر و به نتیجه‌ی کار خود مطمئن‌تر هستند و دوم این‌که، وقتی اصول اولیه‌ی حسابان به روش هندسی و بر مبنای ایده‌ی حد آموزش داده شوند، دانش‌آموزان را آزار خواهد داد. زیرا اساس این مفاهیم درگیر فرآیندهای نامتناهی است و آن‌ها به‌راحتی نمی‌توانند با چنین فرآیندهایی کنار آیند.

در هر حال تال با اشاره به این مثال‌ها، نتیجه‌گیری می‌کند که فرآیند حدگیری شاید یک مفهوم ریاضی «شهودی» باشد؛ اما یک مفهوم «شناختی» نیست و ابراز می‌دارد «اگر ایده‌ی محاسبه‌ی ضریب زاویه‌ی مماس به وسیله‌ی فرآیند حدگیری، یک مفهوم روان‌شناسی شهودی بود؛ دانش‌آموزان در روبه‌رو شدن با این مسئله فوراً با یک استدلال حدی پاسخ می‌دادند» (ص ۴).

بسیاری از محققان دیگر هم مشکلات این حوزه را در ارتباط با مفاهیم و اشیای آن بررسی کرده‌اند. به‌عنوان نمونه، می‌توان از بردنباخ[۱۱] (۱۹۹۲)، و اسفارد[۱۲] (۱۹۹۱)، وینر و دریفوس (۱۹۸۹)، بندر[۱۳] (۱۹۹۶)، مک‌دونالد[۱۴] (۲۰۰۰)، گری[۱۵] (۲۰۰۲)، باگنی[۱۶] (۲۰۰۳)، تال و آکوک[۱۷] (۲۰۰۳) نام برد. هریک از این افراد از زوایای مختلفی مشکلات مربوط به مفاهیم حسابان مانند تابع، دنباله و سری، اعداد حقیقی، حد و مشتق را به تصویر کشیده‌اند که به اختصار به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود.

آرتیگ (۱۹۹۶)، با اشاره به این‌که توابع می‌توانند دو چهره‌ی فرآیندی و شیئی داشته باشند، از وینر و دریفوس (۱۹۸۹)، نقل می‌کند قاعده‌ای که دانش‌آموزان برای تعیین یک تابع به‌کار می‌برند با تعریف رسمی این مفهوم ـ حتی برای دانش‌آموزانی که می‌توانند این تعریف را به‌کار برند ـ متفاوت است. این در حالی است که اسفارد (۱۹۹۱، نقل شده از تال و اکوک ۲۰۰۳)، تمایزی بین ادراک عملیاتی[۱۸] و ادراک ساختاری[۱۹] یک تابع ایجاد می‌کند، که در آن، مقدار یک تابع برای هر ورودی x با ادراک عملیاتی آن متناظر است. با وجود این در نظر گرفتن یک نمودار به‌عنوان یک کل انسجام‌یافته یا به عنوان یک شیء، با ادراک ساختاری مفهوم تابع متناظر است و نتیجه می‌گیرد که دسترسی به ادراک ساختاری توابع مشکل است.

مک دونالد و دیگران (۲۰۰۰) هم، درک مفهوم تابع را

پیش‌شرطی برای درک مفهوم دنباله می‌دانند. آن‌ها در باب اهمیت این موضوع بیان می‌کنند: «اهمیت درک غنی توابع به‌عنوان پیش‌شرطی برای درک بسیاری از پدیده‌های اساسی حسابان، اهمیت انجام تحقیق راجع به چگونگی درک و فهم دانش‌آموزان از مفاهیم حسابان را برجسته کرده است و ما معتقدیم برای داشتن یک درک عمیق از مفهوم دنباله، فهم و درک مفهوم تابع ضروری است» (ص ۸۱). زیرا آن‌ها در بررسی درک دانش‌آموزان از دنباله دریافتند که تصور مفهومی همه‌ی دانش‌آموزان مورد مطالعه از دنباله این بود که دنباله را فهرستی از اعداد می‌دانستند و درک دنباله به‌عنوان تابع برای آنان مشکل‌تر بود.

بندر (۱۹۹۶)، با ارجاع به بُعد تدریسی مفهوم حد و دنباله اشاره می‌کند در بسیاری از موارد حتی پنداره‌ها و ادراکات پویا هم برای شکل‌گیری اولیه‌ی این مفاهیم کمکی نمی‌کند. وی یادآور می‌شود بسیاری از دانش‌آموزان به اشتباه تصور می‌کنند که یک دنباله‌ی ریاضی، عنصر آخر را در اختیار می‌گیرد یا این‌که حداقل یک دنباله می‌تواند به چنین عنصری برسد (هرچه که رسیدن معنی دهد) که اساس شکل‌گیری این بدفهمی اغلب در تدریس ریاضی است. به‌عنوان مثال زمانی که عدد π به‌وسیله‌ی تقریب معین می‌شود:

دانش‌آموزان یک دنباله از چندضلعی‌ها را در نظر می‌گیرند که رأس‌های آن بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود تا آن‌جا که درنهایت به‌صورت یک دایره درآید. حتی اگر معلم دقیقاً از چنین بیان اشتباهی جلوگیری کند، دانش‌آموزان هنوز هم به‌سادگی تلقی می‌کنند که دایره، عنصر آخر دنباله خواهد بود. اولاً به خاطر استدلال‌های بصری و در ثانی به دلیل این‌که هدف از درس، تنها معین کردن یک حد به وسیله‌ی دنباله‌ای از عناصر است. لذا معلم چه به‌طور شفاهی، خواه توضیح دهد یا ندهد که نمی‌توان به آن حد دست یافت، تمام فعالیت‌ها موجب ایجاد این تلقی می‌شود. حتی اگر دانش‌آموزان بپذیرند که غیرممکن است به آن برسد، باز هم تمایل دارند این امر نشدنی و محال را با توجه به زمان محدود و حساب محدود بشری با ماشین‌حساب‌های الکترونیکی ممکن سازند.

آن‌چه به خوبی مشهود است این است که یک تضاد ذهنی در رسیدن یا نرسیدن به مقدار حد برای دانش‌آموزان ایجاد می‌شود. از طرف دیگر، مفهوم بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک هم یکی از موانع معرفت‌شناسی[20] در یادگیری مفاهیم حسابان است. باگنی (۲۰۰۳) با توجه به سیر تاریخی ایده‌ی حد که از قرن ۱۷ به وسیله‌ی والیس[21] و منگولی[22] معرفی شد و به‌وسیله‌ی کوشی تکامل یافت، اشاره می‌کند ایده‌ی حد، عمدتاً به‌وسیله‌ی بازنمایی‌های کلامی معرفی شد و تعریف وایراشتراس از حد، توسعه‌ی یک بازنمایی مدرن از حد بود. درواقع باگنی (۲۰۰۳)، با این توصیفات نشان می‌دهد که بازنمایی‌های کلامی، بیش‌تر حاصل ایده‌ی بی‌نهایت کوچک‌های بالقوه بوده است و در آن معمولاً بی‌نهایت کوچک‌های واقعی مورد توجه نبوده‌اند. لذا اگر دانش‌آموزان وجه فرآیندی حد را راحت‌تر درک می‌کنند، شاید به این دلیل است که تاریخ توسعه‌ی حسابان نیز وضعیت مشابه آن را داشته است. باگنی، در ادامه‌ی همین موضوع و با اشاره به انواع بازنمایی‌های کلامی و نمادین که در طول تاریخ و در جریان توسعه‌ی مفهوم حد وجود داشته است، بیان می‌کند «بازنمایی‌های کلامی به سختی، به طور کامل مفهوم حد را بیان می‌کنند و با توجه به این که تعارض‌های شناختی در یادگیری حدها وجود دارد، بازنمایی کلامی می‌توانند هم به‌عنوان یک محدودیت و هم یک کمک برای ساختن این مفهوم در نظر گرفته شوند» (ص ۲). البته بد نیست اشاره شود که بازنمایی نمادین از مفهوم حد، مفهوم بی‌نهایت کوچک‌ها را در خود کتمان کرده است و همه می‌دانیم به کارگیری صورت‌های نمادین حد و انجام اعمال جبری با آن، همواره به معنای درک نمادین مفهوم حد نبوده است. به همین دلیل است که تال (۱۹۹۴)، اشاره می‌کند اکثر

گذر از جبر به حسابان گذر از فرآیندهای متناهی به فرآیندهای نامتناهی است. دانش‌آموزان با توانمندی‌ها و مهارت‌هایی که در جبر یاد گرفته‌اند پا به حوزه‌ی حسابان می‌گذارند. آن‌ها با انجام رویه‌ها بر مفاهیم حسابان، شاید وجود فرآیندهای نامتناهی را حس نکنند. لذا تکنیک‌های موجود در این حوزه، برای مفاهیمی از قبیل حد، دنباله، مشتق و غیره تا حدود زیادی فرآیندهای نامتناهی موجود در این مفاهیم را پنهان می‌کند و این کار موجب می‌شود که دانش‌آموزان، همان اعمال رویه‌ای را که در جبر انجام می‌دادند، در حسابان نیز دنبال کنند

دانش‌آموزانی که وارد دانشگاه می‌شوند، به‌وضوح ایده‌ی حد را درک نکرده‌اند و بیش‌ترین چیزی که به آن توجه دارند، فرآیندی است که نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود و این درک را جایگزین مفهوم مقدار حد می‌کنند.

به هر حال، بسیاری از مشکلات دانش‌آموزان در درک مفاهیم حسابان ناشی از نمادهای حرفی و انجام اعمال جبری با آن‌هاست؛ نمادهایی که در طول تاریخ برای ساده‌سازی مفاهیم به‌کار گرفته شده‌اند. در ادامه‌ی مقاله، به نقش نمادها در یادگیری مفاهیم و هم‌چنین مشکلات ناشی از آن‌ها اشاره می‌شود.

ادامه‌ی مقاله در شماره‌ی بعد...

پی‌نوشت‌ها

* این مقاله از فصل دوم پایان‌نامه با عنوان «بسترهای لازم برای یاددهی و یادگیری مفاهیم حسابان در برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای» گرفته شده است که با راهنمایی خانم دکتر زهرا گویا نگارش شده است.

1. Comfrey & Smith
2. Kaput
3. Representation
4. Principle of Homogeneity
5. Mertzbach
6. Errecaide & Vergnavd
7. Boyer
8. Duns Scots
9. Artigue
10. Tall
11. Breidenbach
12. Sfard
13. Bender
14. Mc Donald
15. Gray
16. Begni
17. Akkoc
18. Operational
19. Struactiral
20. Epistemological Obstacles
21. Wallis

منابع

1. Akkoc, Hf. & Tall, D. (2003). The Funcation Concept: Comprehension And Complication.
2. Bagni, Gt. (2003). Historical Roots of Limit Nation. Development@@@@@@@, **Canadian Journal of Sciene, Mathematics and Technology Education.**
3. Bender, P. (1996). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concept, 8th International congress on Mathematics Education (ICME 8). Selected Lecture, Sevilla, 14-21.
4. Comfrey, J. &. Smith, E. (1994). Comments on James Kaputs Chapter "Democratizing Sccess to Calculus: New Routs to Old Roots".
5. Gray, E. (2002). Processes and Concept as "False Friends" In D. Tall & M. O.J. Thomas (EDS). **Intelligence, Learning and Understanding Mathematics**, 205-217, Post Pressed, Flaxton Australia.
6. Kaput, J. (1994). Democratizing Access to Calculus: New Routes to Old Roots. In **Mathematical Thinking and Problem Solving**. Edited byt A.H. Schoenfeld.
7. Mc Donald' M.A. Mathews, D.M. & Strobe, K.H. (2000). Understanding Sequences: A Tale of Tow Objects. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld & Kaput (EDS), **Research in Collegiate. Mathematics Education** IV, (PP. 77-102), Providence, RI: American Mathematical Society.
8. Pimm, D. (2002). The Symbol Is and Isn't The Objects. In D. Tall & M.O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and Understanding Mathematics**, 257-271 Post Pressed Flaxton Australia.
9. Demarois, P. (2006). **Begining Algebra Student's Image of Function Concept.**
10. Skemp, R.R. (1989). **Mathematics in the Primary School**. London: Rout Iedge.
11. Tall, D. (2002). Continuities and Discontinuities in Long Term Learning Schemas. In D. Tall & M. O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and Understanding Mathematics**, 151-157, Post Pressed, Flaxton Australia.
12. Tall, D. (1994). **Cognitive Difficulties in Learning Analysis.** Mathematics Education Research Centre, Warwick University.
13. Tall. D. (1995). **Understanding the Calcules**. Mathematics Education Research Centre, Warwick University.
14. Tall, D. & Gray, E. & Ali, M. B. & Crowley, L. & De Marois, P. & MCGrowen, M. & Pitta, D. & Pinto, M. & Thomas, M. & Yusuf, Y. (2001). **Symbols and The Bifurcation Between Procedural and Concept Thinking.** Mathematics Education Research Centre, Warwick University.
15. White, P. & Michelmore, M. (2002). Teaching and Learning Mathematics by Abstraction. In D. Tall & M.O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and understanding Mathematics**, 235-255, Post Pressed, Flaxton Australia.
۱۶. آرتیگ، میشل؛ دی یرم، آلوپ (۱۹۹۶). آموزش و یادگیری آنالیز مقدماتی، ترجمه‌ی علیرضا مدقالچی. (۱۳۷۹ ـ ۱۳۸۰). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**. شماره‌ی ۵۷، صص ۲۳ تا ۳۱، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۱۷. شهریاری، پرویز (۱۳۸۰) **سرگذشت ریاضیات**. نشر مهاجر.
۱۸. فرودنتال، هانس. (۱۹۷۹). ریاضی جدید یا آموزش جدید. ترجمه‌ی زهرا گویا و سحر ظهوری زنگنه (۱۳۸۱). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۷۰، ص ۲۹. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.
۱۹. تال، دیوید. (۱۹۹۶). تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: اشتیاق‌ها، امکان‌ها و واقعیت‌ها، ترجمه‌ی شیوا زمانی. (۱۳۷۵). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۴۷، صص ۱۱ تا ۲۳، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

رد پای پولیا

بر سنگ قبر آخرین قضیه‌ی فرما

محسن یزدان فر
کارشناس ارشد آموزش ریاضی
از دانشگاه شهید باهنر کرمان


فرما

توصیف اندرو وایلز از کاوش هفت ساله‌ی خود برای یافتن جام مقدس ریاضی‌دانان: «**شاید بهترین توصیف من از ریاضیات با تکیه بر تجربه‌ام این باشد که بگویم ابتدا وارد مجتمع بزرگ تاریکی می‌شوید. اتاق اول تاریک است، کاملاً تاریک! تلوتلو می‌خورید، به اشیاء برخورد می‌کنید و رفته رفته می‌آموزید که هر وسیله کجاست، و سرانجام پس از شش ماه، کلید چراغ را می‌یابید و روشن می‌کنید. ناگهان همه جا روشن می‌شود و می‌توانید ببینید که دقیقاً کجا بوده‌اید. سپس به اتاق تاریک بعدی وارد می‌شوید ...**»

مقدمه

ریاضیات با مسئله و ریاضی‌دان با حل مسئله پیوندی ناگسستنی دارند، اما همواره ریاضی‌دانان با مسائلی برخورد می‌کنند که به آسانی تسلیم نمی‌شوند. هدف اصلی این نوشتار، پرداختن به مسئله‌ای است که بیش از ۳۵۰ سال، تلاشِ ریاضی‌دانان حرفه‌ای و غیرحرفه‌ای را به خود مشغول کرد تا سرانجام روی در نقاب حل کشید و نماد مربعی را که هالموس آن را از بزرگ‌ترین یادگارهای خود می‌داند و معمولاً ریاضی‌دانان آن در انتهای برهان‌ها قرار می‌دهند، در پایان برهان خود دید. نمادی که اغلب، آن را سنگ قبر می‌نامند ([۵]، ص ۲۱). برای برخی اگر هر سال ۱ دقیقه باشد، پرداختن به مسئله‌ای که در ۳۵۰ دقیقه حل نشده باشد نیز ممکن است کاری بیهوده باشد. اما اندرو وایلز این جرأت را به خود راه داد، تلاش کرد و سرانجام در سال ۱۹۹۵ اثباتی حدود ۲۰۰ صفحه از آخرین قضیه‌ی فرما ارائه کرد. جورج پولیا آموزش‌گر برجسته‌ی ریاضی در کتاب‌های «چگونه مسئله را حل کنیم» و «خلاقیت ریاضی» راه‌کارهایی کلی برای حل مسائل ریاضی پیشنهاد می‌کند. در این‌جا می‌خواهیم آن راه‌کارها را در مقایسه با حل آخرین قضیه‌ی فرما قرار دهیم.

پولیا: چگونه مسئله را حل کنیم؟

پولیا[1] در کتاب «چگونه مسئله را حل کنیم» (۱۹۴۴)، چهارچوبی کلی برای حل مسئله و راهنمایی‌هایی در مورد ریزه‌کاری‌های لازم برای پیاده کردن آن، ارائه می‌کند. این چهارچوب کلی، توصیفی چهار مرحله‌ای از فرایند حل مسئله ارائه می‌کند: فهم مسئله، طرح نقشه، اجرای نقشه و بازنگریستن به عقب. ریزه‌کاری‌های مذکور همان توصیه‌های رهگشای پولیا یا به قول خودش «رهگشایی نوین» هستند، که به کمک آن‌ها

پولیا

پولیا بیان می‌کند به ندرت می‌توانیم مسئله‌ای را در نظر بگیریم که مطلقاً نو باشد و با مسائلی که پیش‌تر حل کرده‌ایم، شباهت و مناسبتی در آن دیده نشود. از نظر او اگر چنین مسئله‌ای بتواند موجود باشد، غیرقابل حل خواهد بود

می‌توان راهی به سوی حل مسائل دشوار باز کرد. به عنوان مثال می‌توان به راهبردهایی برای فهم مسئله (مشخص کردن مجهول، رسم شکل، ...)، راهبردهایی برای طرح نقشه (یافتن مسئله‌ای مشابه، بیان مسئله به صورتی دیگر، ...) و راهبردهایی برای اجرای نقشه و بازنگری مجدد اشاره کرد ([۱]). در این جا ادعای آن نداریم که اندرو وایلز ابتدا کتاب «چگونه مسئله را حل کنیم» پولیا را مطالعه کرده و سپس شروع به اثبات آخرین قضیه‌ی فرما نموده است، بلکه هدفمان مقایسه‌ی اندیشه‌های پولیا با راهبردهای منجر به اثبات آخرین قضیه‌ی فرما می‌باشد.

پولیا: فهم مسئله

از نظر پولیا، اولین مرحله در حل هر مسئله، فهمیدن مسئله است. او بیان می‌کند پاسخ دادن به یک پرسش که فهمیده نشده باشد کاری ابلهانه است ([۱]، ص ۸).

معادله‌ی $x^n + y^n = z^n$ برای $n \geq 3$ جوابی در اعداد صحیح ناصفر ندارد.

فرما[2] (۱۶۶۵ـ۱۶۰۱) در حاشیه‌ی نسخه‌ای از آثار دیوفانت، چاپ باشه، که متعلق به خودش بود نوشت: «نوشتن یک مکعب یا دو مجذوری [توان چهارم عدد صحیح ناصفر] به صورت مجموع دو عدد مجذوری، یا به طور کلی، هر توان بیش از دو عدد [عدد صحیح ناصفر] به صورت دو عدد صحیح با همان توان، ممتنع است. من اثبات بسیار جالبی برای آن یافتم که در این حاشیه نمی‌گنجد» ([۴]، ص ۱). حکم اخیر ـ که صورت ریاضی آن را در بالا دیدیم ـ آخرین قضیه، حدس یا مسئله‌ی فرما نامیده می‌شود. همان‌طور که اشاره شد، فرما خود مدعی حل این مسئله بود ولی ریاضی‌دانان امروزه معتقدند که فرما در جایی اشتباه کرده و اثبات ساده‌ای برای قضیه‌اش وجود ندارد، اثبات نهایی این قضیه، در واقع حاصل نتایج به دست آمده طی سال‌های بسیار توسط ریاضی‌دانان متعدد و پیشرفت ریاضیات است ([۳]، ص ۱۱).

طرح نقشه
پولیا: تخصیص

از نظر پولیا تخصیص عبارت است از گذشتن از ملاحظه‌ی دسته‌ای از چیزها به دسته‌ای کوچک‌تر یا تنها به یک موضوع و یک شیء مندرج در آن دسته ([۱]، ص ۱۱۳). پولیا بیان می‌کند معمولاً برای ردّ یک حکم، به تخصیص می‌پردازیم؛ یعنی از آن دسته یک موردِ را انتخاب می‌کنیم که با آن حکم نمی‌خواند (مثال نقض). پولیا بیان می‌کند که باید در ابتدا، هر حالت ساده‌ی خاص را مورد آزمایش قرار دهیم؛ یعنی هر چیز که کمابیش به صورت اتفاقی انتخاب شود و بتوانیم آن را به آسانی امتحان کنیم. اگر این امتحان نشان دهد که آن حالت با حکم کلی بیان شده سازگار نیست، آن حکم باطل می‌شود و کار ما به پایان می‌رسد. ولی اگر آن مورد امتحان شده با حکم توافق داشته باشد، امکان آن هست که از امتحان آن مورد خاص، نکته و اشاره‌ای استخراج کنیم. ممکن است این اندیشه برای ما پیدا شود که حکم باید درست باشد و راهی به ذهن ما تلقین شود که از آن راه بتوانیم به اثبات حکم دست پیدا کنیم ([۱]، صص ۱۱۴ و ۱۱۵).

ریاضی‌دانان متعددی حالت‌های خاصی از مسئله‌ی فرما را

در نظر گرفتند و موفق شدند این مسئله را در این حالت‌های خاص اثبات کنند؛ ولی هیچ‌یک از این راه‌حل‌ها منجر به حل مسئله در حالت کلی نشد. به عنوان مثال، مسئله‌ی فرما برای توان ۳ ($x^3 + y^3 = z^3$) از سال‌های ۱۷۹۵ تا ۱۹۴۴ توسط ۱۴ ریاضی‌دان (کاوسلر[3] (۱۷۹۵)، لژاندر[4] (۱۸۲۳ و ۱۸۳۰)، کالزولاری[5] (۱۸۵۵)، لامه[6] (۱۸۶۵)، تیت[7] (۱۸۷۲)، گونتر[8] (۱۸۷۸)، گامبیولی[9] (۱۹۰۱)، کری[10] (۱۹۰۹)، ریشلیک[11] (۱۹۱۰)، استاکهاوس[12] (۱۹۱۰)، کارمیخائیل[13] (۱۹۱۵)، واندر کورپوت[14] (۱۹۱۵)، تو[15] (۱۹۱۷)، دوارت[16] (۱۹۴۴)) به روش‌های متفاوت اثبات شد ([۳]، ص ۴۰) و این روند برای مقادیر دیگر تا ۴×۱۰۶ اثبات گردید (همان، ص ۴۳۱). ولی باز هم به راه‌حل نهایی مسئله منجر نشد. بنابراین بررسی و اثبات حالات خاص ممکن است هیچ کمکی به حل نهایی مسئله نکند.

پولیا: مسئله را به صورتی دیگر بیان کنید

پولیا بیان می‌کند آیا می‌توانید صورت مسئله را دوباره بیان کنید؟ آیا می‌توانید آن‌را به صورتی دیگر بیان کنید؟ از نظر او این پرسش‌ها مایه‌ی تقویت استعداد تغییر شکل دادن مسئله است ([۱]، ص ۷۵).

ریاضی‌دانان متعددی این راهبرد را نیز مورد استفاده قرار دادند که از میان آن‌ها می‌توان به لبگ[17] (۱۸۴۰)، کریستلس[18] (۱۹۶۷)، پرین[19] (۱۸۸۵)و هورویتز[20] (۱۹۰۸) و کاپفرر[21] (۱۹۳۳) اشاره کرد. به عنوان مثال، لبگ بیان کرد که «اگر آخرین قضیه‌ی فرما برای نمای $n \geq 3$ درست باشد آن‌گاه معادله‌ی $x^{2n} + y^{2n} = z^{2n}$ تنها جواب‌های بدیهی دارد.» یا کاپفرر اثباتی منتشر کرد که نشان داد آخرین قضیه‌ی فرما درست است اگر و تنها اگر معادله‌ی $z^3 - y^2 = 3^2 \times 2^{2n-2}x^{2n}$ جوابی برحسب اعداد صحیح ناصفر دو به دو متباین چون x، y و z نداشته باشد ([۴]، ص ۲۸۴). هیچ‌یک از این فرمول‌بندی‌های جدید و نتایج برآمده از آن‌ها نیز کمکی به حل مسئله‌ی فرما نکرد؛ هر چند تلاش‌ها برای حل این مسئله منجر به نتایج زیبایی از قبیل آن‌چه ذکر شد، گردید.

پولیا: آیا از مسئله‌ی وابسته‌ای آگاهی دارید؟

پولیا بیان می‌کند به ندرت می‌توانیم مسئله‌ای را در نظر بگیریم که مطلقاً نو باشد و با مسائلی که پیش‌تر حل کرده‌ایم، شباهت و مناسبتی در آن دیده نشود. از نظر او اگر چنین مسئله‌ای بتواند موجود باشد، غیرقابل حل خواهد بود. در واقع، هنگامی که به حل مسئله می‌پردازیم، همیشه از مسائل حل شده‌ی پیش‌تر بهره‌گیری می‌کنیم و نتیجه یا روش حل یا مهارت و تجربه‌ای را که از حل آن‌ها به دست آمده، مورد استفاده قرار می‌دهیم. البته

وایلز

در این جا ادعای آن نداریم که اندرو وایلز ابتدا کتاب «چگونه مسئله را حل کنیم» پولیا را مطالعه کرده و سپس شروع به اثبات آخرین قضیه‌ی فرما نموده است، بلکه هدفمان مقایسه‌ی اندیشه‌های پولیا با راهبردهای منجر به اثبات آخرین قضیه‌ی فرما می‌باشد

مسئله‌ای که از آن بهره‌مند می‌شویم می‌بایستی از جهتی با مسئله‌ی حاضر ارتباط و وابستگی داشته باشد ([۱]، ص ۶۶).

فرما، خود نشان داد که معادله‌ی $x^4 - y^4 = z^2$، جواب نابدیهی در اعداد صحیح ندارد. او در اثبات خود روشی موسوم به «نزول نامتناهی»[22] ابداع کرد. این روش بدین صورت است که اگر (x_0, y_0, z_0) یک جواب از اعداد صحیح مثبت برای معادله‌ی $x^4 - y^4 = z^2$ باشد، آن‌گاه جواب دیگری چون (x_1, y_1, z_1) از اعداد صحیح مثبت به دست می‌آوریم که در آن $z_0 > z_1$. با ادامه‌ی این روند، دنباله‌ی کاهشی نامتناهی $z_0 > z_1 > z_2, \ldots$ از اعداد صحیح مثبت به دست می‌آید که امکان‌پذیر نیست. استفاده از روش «نزول نامتناهی» نیز کمکی

دو مسئله‌ی کمکی مهم در جریان اثبات آخرین قضیه‌ی فرما نقش اساسی ایفا کردند. اولین مسئله، حدس فری بود که توسط ریبت در ۱۹۸۶ اثبات شد و دیگری اثبات حدس شیمورا ـ تانیاما بود که ریبت آن را در اثبات حدس فری درست فرض کرده بود. اثبات حدس شیمورا ـ تانیاما، آخرین حلقه‌ی زنجیرِ اثبات آخرینِ قضیه‌ی فرما بود که توسط اندرو وایلز صورت گرفت

به حل مسئله‌ی اصلی نکرد و تنها به کمک آن، مسئله‌ی فرما برای حالت $n = ۴$ توسط اویلر[۲۳] (۱۷۷۰) و لژاندر (۱۸۰۸) اثبات شد (همان، ص ۱۶).

تا این جا به برخی از راهبردهایی اشاره شد که اگرچه ریاضی‌دانان آن‌ها را مورد استفاده قرار دادند ولی هیچ‌یک به هدف اصلی که همانا اثبات قضیه‌ی فرما در حالت کلی بود منجر نشد.

اندرو وایلز (- ۱۹۵۳)

فردی که می‌خواست آخرین قضیه‌ی فرما را اثبات کند، اندرو وایلز[۲۴] بود. وقتی که او ده ساله بود به کتابخانه‌ی شهر کوچکش در انگلستان رفت و در کتابی ریاضی، مطالبی درباره‌ی آخرین قضیه‌ی فرما خواند، از جمله این که «طی بیش از سی صد سال هرگز کسی نتوانسته اثباتی برای آن بیابد.»

در سال ۱۹۷۰، اندرو وایلز وارد دانشگاه شد. علاوه بر این که آخرین قضیه‌ی فرما موضوع روز نبود، هیچ استاد راهنمای دکتری حاضر به پذیرش دانشجویی که می‌خواست در مورد چنین معمای باستانی ـ که باهوش‌ترین مغزهای جهان طی سه قرن از حل آن عاجز بودند کار کند ـ نبود. در آن روزها «خم‌های بیضوی[۲۵]» موضوع داغ برای پژوهش در نظریه‌ی اعداد بودند و وایلز وقتش را بر روی پژوهش روی خم‌های بیضوی گذاشت. در یک غروب گرم تابستان که اندرو وایلز در منزل دوستش چای سرد را مزه‌مزه می‌کرد ناگهان در وسط گفتگو، دوستش گفت «راستی شنیدی کنت ریبت[۲۶] حدس اپسیلون (فری)[۲۷] را اثبات کرد؟» وایلز هیجان‌زده شد. می‌دانست که زندگیش در حال تغییر است. رؤیای کودکیش برای اثبات آخرین قضیه‌ی فرما قوت گرفت و نیروی شگفت‌انگیزی یافت ([۳]، صص ۱۰۶ و ۱۰۷).

پولیا: آیا از قضیه‌ای که بتواند سودمند واقع شود آگاهید؟

پولیا بیان می‌کند؛ یک قسمت اساسی از شناخت و دانش ریاضی ما به صورت قضایای پیش‌تر به اثبات رسیده، در ذهنمان ذخیره شده است. به همین دلیل چنین سؤالی مطرح می‌شود که **آیا از قضیه‌ای آگاهی دارید که بتواند سودمند باشد؟** طرح این پرسش مخصوصاً در آن هنگام شایسته است که مسئله‌ی ما یک مسئله‌ی ثابت‌کردنی باشد ([۱]، ص ۶۶).

هنگامی که اندرو وایلز از دوستش شنید کنت ریبت حدس اپسیلون را اثبات کرده است هیجان زده شد. حدس اثبات شده‌ی اپسیلون همان قضیه‌ای بود که به تعبیر پولیا می‌توانست سودمند واقع شود.

خم‌های بیضوی

مطالعه‌ی مسئله‌های دیوفانتی، یعنی مسئله‌های ناشی از معادلات به صورتی که دیوفانت در قرن سوم ارائه کرده بود، در قرن بیستم با استفاده از عناصری به نام خم‌های بیضوی آغاز شد. خم‌های بیضوی نه بیضی هستند و نه تابع بیضوی؛ آن‌ها چند جمله‌ای‌های درجه‌ی ۳ با دو متغیر به صورت $y^۲ = ax^۳ + bx^۲ + cx$ هستند که در آن a و b و c اعدادی صحیح یا گویا باشند ([۳]، ص ۸۵).

خم‌های فری[۲۸]

فری خم بیضوی معادله‌ی $y^۲ = x(x - A)(x + B)$ را که در آن A و B اعداد صحیح مثبت متباین هستند و A بر ۱۶ بخش‌پذیر است را در نظر گرفت و ویژگی‌های آن را مطالعه کرد. او فرض کرد که آخرین قضیه‌ی فرما برای نمای $q \geq ۵$ نادرست باشد، یعنی a و b، c اعداد صحیح مثبت دوبه‌دو متباین باشند که a زوج است و $a^q + b^q = c^q$. حال فرض کنیم که $A = a^q$ و $B = b^q$ در این حالت خم فری متناظر با این اعداد، ویژگی‌هایی کاملاً متضاد با ویژگی‌های خم‌های بیضوی دیگر نشان می‌دهد. فری متقاعد شد که چنین ویژگی‌هایی امکان ندارد و روشی را برای رسیدن به تناقضی با حدس شیمورا ـ تانیاما[۲۹] در سر

می‌پروراند، ولی موانعی جدی وجود داشت که برای برطرف شدن به سال‌ها کار نیاز داشت ([۴]، ص ۴۴۰).

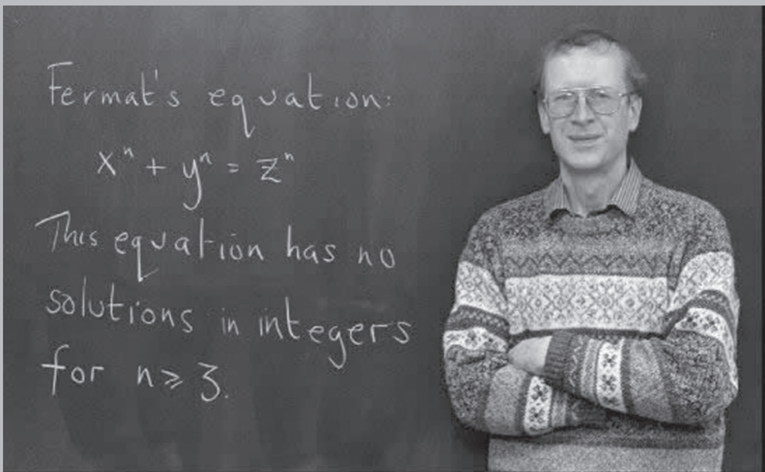
حدس شیمورا ـ تانیاما

هر خم بیضوی، مدولی است (همان، ص ۴۴۵).

در این جا نیازی به توضیح این حدس احساس نمی‌شود چون هدف ما، پرداختن به ساختار اثبات آخرین قضیه‌ی فرما است و شرح و توضیح این حدس، خارج از قلمرو و ریاضیات مقدماتی و مقاله‌ی حاضر می‌باشد. تنها کافی است مدولی بودن را خاصیتی برای هر خم بیضوی بدانیم، بدون این‌که نیازی به توضیح خاصیت مدولی بودن داشته باشیم. این حدس یک دهه بعد از کنفرانس توکیو ـ نیکو که در سپتامبر ۱۹۹۵ برگزار شد و اندرو وایلز نیز در آن شرکت داشت، توسط گورو شیمورا صورت‌بندی شد. هسته‌ی اولیه این حدس توسط یوتاکا تانیاما در کنفرانس مذکور ریخته شده بود.

قضیه‌ای سودمند

در سال ۱۹۸۴ گرهارد فری سخنرانی‌ای در کنفرانس نظریه‌ی اعداد ایراد کرد. او حکمی را که به نظر ادعایی احمقانه می‌آمد مطرح کرد. اوراق تکثیر شده، مملو از فرمول‌های ریاضی، که در کنفرانس توزیع کرده بود، نشان می‌دادند که «اگر حدس شیمورا ـ تانیاما درست باشد، آخرین قضیه‌ی فرما اثبات می‌شود» (حدس اپسیلون (فری)). هنگامی که کنت ریبت برای اولین بار حکم فری را شنید فکر کرد که شوخی است و از خود پرسید مدولی بودن خم‌های بیضوی چه ارتباطی می‌تواند با آخرین قضیه‌ی فرما داشته باشد؟ اما ریبت، مردی که فکر می‌کرد پیشنهاد فری شوخی است، یک سال، بعد قضیه‌ای را صورت‌بندی کرد و نشان داد که اگر حدس شیمورا ـ تانیاما درست باشد آن‌گاه آخرین قضیه‌ی فرما از آن نتیجه می‌شود ([۳]، ص ۱۰۶). اثبات ریبت به طور خلاصه به این صورت است که «فرض کنیم آخرین قضیه‌ی فرما برای نمای q نادرست باشد. فرض کنیم E خم فری متناظر با جواب فرضی معادله‌ی فرما باشد. E یک خم بیضوی نیمه پایا است. حال اگر حدس شیمورا ـ تانیاما درست باشد، خم بیضوی متناظر با جواب فرضی معادله‌ی فرما مدولی است و ریبت در این جا با استفاده از این خاصیت به تناقض می‌رسد ([۴]، ص ۴۴۷).



وایلز در اثبات خود تمام توانایی‌های ابزارهای جدید جبر، هندسه، آنالیز و مباحث دیگر ریاضیات را به کار گرفت. او هم‌چنین توانست از نتایج ریاضی مهم هم‌عصر و پیشینیان تاریخی‌اش استفاده کند

پولیا: مسئله‌های درون مسئله (مسئله‌های کمکی)

پولیا متذکر می‌شود برای حل مسئله‌ی نخستین ممکن است به یک رشته مسئله‌های فرعی برخورد کنیم. او این مسائل را مسائل کمکی می‌نامد. مسئله‌ی کمکی به مسئله‌ای می‌گویند که باید به آن توجه و روی آن کار کنیم. این توجه یا کار، به خاطر خود این مسئله نیست، بلکه به این خاطر است که به حل مسئله‌ی دیگری ـ یعنی مسئله اصلی ما ـ کمک می‌کند ([۲]، ص ۳۲۰).

دو مسئله‌ی کمکی مهم در جریان اثبات آخرین قضیه‌ی فرما نقش اساسی ایفا کردند. اولین مسئله، حدس فری بود که توسط ریبت در ۱۹۸۶ اثبات شد و دیگری اثبات حدس شیمورا ـ تانیاما بود که ریبت آن را در اثبات حدس فری درست فرض کرده بود. اثبات حدس شیمورا ـ تانیاما، آخرین حلقه‌ی زنجیر اثبات آخرینِ قضیه‌ی فرما بود که توسط اندرو وایلز صورت گرفت.

پولیا: متمرکز کردن دقت روی هدف

پولیا بیان می‌کند وقتی که می‌خواهید مسئله‌ای را حل کنید، غالباً درباره‌ی آن فکر می‌کنید. حتی ممکن است تا آن‌جا فکر شما را به خود مشغول کند که به اندیشه‌ای مزاحم تبدیل شود.

ولی تنها فکر کردن ساده به مسئله کافی نیست، باید به صورتی پی‌گیر درباره‌ی آن بیندیشید به نحوی که مسئله را به صورتی روشن در برابر خود ببینید ([۲]، ص ۳۸۸). اندرو وایلز پس از آگاهی از اثبات حدس اپسیلون، با نیرویی شگفت‌انگیز به منزل رفت و فکر کرد که چطور می‌تواند حدس شیمورا ـ تانیاما را اثبات کند. او بعدها محرمانه گفته بود: «برای چند سال اول! می‌دانستم که رقیبی ندارم زیرا می‌دانستم که هیچ‌کس، از جمله خودم، ایده‌ای نداشت که کار را باید از کجا شروع کند.» او تصمیم گرفت که در خفای کامل و انزوا کار کند. «تعداد زیاد تماشاگر، تمرکز ذهن را به هم می‌زند.» به هر دلیل، وایلز خود را در دفتر کار زیر شیروانی‌اش محبوس کرد و به کار مشغول شد. او تمام پروژه‌های پژوهشی دیگر را کنار گذاشت تا وقتش را کاملاً به «فرما» اختصاص دهد. گرهارد فری بعدها می‌گوید: عظمت وایلز در این بود که به کاری که می‌کرد اعتقاد داشت؛ آن هم در زمانی که در واقع همه‌ی ریاضی‌دانان جهان معتقد بودند که حدس شیمورا ـ تانیاما را نمی‌توان در قرن بیستم اثبات کرد ([۳]، ص ۱۰۸).

پولیا: بسیج و سازمان‌دهی

پولیا بیان می‌کند: «هر قدر حل‌کننده‌ی مسئله جلوتر می‌رود، آگاهی‌های بیش‌تر و بیش‌تری در مورد موضوع مورد مطالعه‌اش پیدا می‌کند. آگاهی‌هایی که از قبل و ظاهراً بی‌ارتباط با مسئله‌ی مفروض در ذهن حل‌کننده بوده است، کاربرد مشخص خود را پیدا می‌کنند و به خوبی روشن می‌شود که بله این‌ها مهم‌ترین قضیه‌هایی هستند که به مسئله‌ی من مربوط می‌شوند. حل‌کننده نمی‌تواند به هیچ وجه در ابتدای کار و موقعی که تازه حل مسئله را آغاز کرده، پیش‌بینی کند که این قضیه‌ها هستند که به کار او می‌خورند. این آگاهی‌ها در طول زمان در حافظه‌ی حل کننده جمع می‌شوند و سپس به صورتی مناسب جدا و از ژرفای حافظه بیرون کشیده می‌شوند. جلب چنین آگاهی‌هایی را بسیج و به کار گرفتن آن‌ها را در حل مسئله سازمان‌دهی می‌نامیم ([۲]، ص ۳۷۰)». وایلز در اثبات خود تمام توانایی‌های ابزارهای جدید جبر، هندسه، آنالیز و مباحث دیگر ریاضیات را به کار گرفت. او هم‌چنین توانست از نتایج ریاضی مهم هم عصر و پیشینیان تاریخی‌اش استفاده کند. از روش‌های هوشمندانه‌ی ریبت و همکارانش و نتایجش بهره‌مند شد. هم‌چنین توانست نظریه‌ی باری مازور[۳۰] و ایده‌های شیمورا، فری، سره[۳۱]، آندره ویل[۳۲] و بسیاری از ریاضی‌دانان دیگر را به کار گیرد ([۳]، ص ۱۰۸).

آخرین قضیه‌ی فرما اثبات شد؟

در روز چهارشنبه ۲۳ ژوئن ۱۹۹۳، اندرو وایلز در آخرین سخنرانیش در کنفرانس دانشگاه کمبریج، در حالی که همگان شگفت‌زده شده بودند. در حال تکمیل آخرین سطرهای اثبات خود از حدس شیمورا ـ تانیاما بود و پس از این‌که سطر پایانی را ارائه کرد، بدون مقدمه گفت: «و این آخرین قضیه‌ی فرما را اثبات می‌کند، فکر کنم در همین جا باید سخنرانی را متوقف کنم.» برای چند لحظه سکوت حیرت‌انگیزی در سالن حکمفرما شد و سپس صدای دست زدن‌های بی‌اختیار شرکت‌کنندگان مانند انفجاری در سالن پیچید ([۳]، ص ۵).

پولیا: هرگام را که برمی‌دارید وارسی و امتحان کنید، آیا می‌توانید آشکارا ببینید که گام برداشته شده درست بوده است؟

پولیا بیان می‌کند اطمینان حاصل کردن از درستی گام برداشته شده یا «شهودی» است و یا «صوری». باید تمام توجه ذهن خود را به نکته‌ی مورد بحث چندان معطوف داریم تا به وضوح و روشنی بر ما معلوم شود که آن گام برداشته شده درست بوده است ([۱]، ص ۱۴). وایلز اثبات خود را بارها مورد بررسی قرار داد و هیچ نقصی در آن مشاهده نکرد. مقاله‌ی ۲۰۰ صفحه‌ای وایلز به تعدادی از متخصصان پیشگام در نظریه‌ی اعداد ارسال شد. برخی از آن‌ها بلافاصله اظهار نگرانی و دلواپسی کردند ولی بیش‌تر ریاضی‌دانان فکر می‌کردند که این اثبات احتمالاً صحیح است. به هر حال آن‌ها منتظر قضاوت و رأی متخصصان بودند. یکی از متخصصان منتخب برای بررسی اثبات وایلز، دوست پرینستونی‌اش، نیک کاتز[۳۳] بود. پروفسور کاتز دو ماه تمام، ژوئیه و اوت ۱۹۹۳، کاری جز مطالعه‌ی کل اثبات نداشت. هر روز پشت میزش می‌نشست و هر سطر، هر نماد ریاضی و هر نتیجه‌گیری منطقی آن را به آرامی می‌خواند تا مطمئن شود که کاملاً با معنی است و در واقع قابل قبول هر ریاضی‌دانی است که اثبات را می‌خواند. روزی یکی دو بار به وایلز نامه‌ی الکترونیکی ارسال می‌کرد و از او می‌پرسید منظورت از این سطر چیست؟ یا متوجه نمی‌شوم چطور این نتیجه از سطر بالایی حاصل می‌شود؟ یک روز هنگامی که کاتز حدود دو سوم از دست‌نویس طولانی وایلز را خوانده بود، با مشکلی مواجه شد. در وهله‌ی اول به نظر

می‌رسید که مانند بسیاری از موارد، وایلز پاسخی کاملاً رضایت‌بخش به کاتز دهد؛ اما این بار چنین نشد و پاسخ‌های وایلز، کاتز را راضی نکرد. همان موقع ریاضی‌دانان دیگر جهان نیز به همان مسئله در اثبات وایلز پی بردند، دستگاه اویلر[۳۴] در اثبات وجود نداشت و کاری نمی‌شد کرد. به بیان دیگر شکاف موجود در دستگاه اویلر همه‌چیز را مانند خانه‌ی پوشالی فرو ریخته بود ([۳]، صص ۱۱۷ و ۱۱۸).

پولیا: پیگیری، ولی همراه با نرمش

اندرو وایلز در پاییز سال ۱۹۹۳ به پرینستون بازگشت. برآشفته، شرمسار، مضطرب، عصبانی و ناامید بود. احساس حقارت می‌کرد. در ریاضیات، تقریباً مانند هر مبحث دیگری، «جایزه‌ی دوم» یا «دونده‌ی دوم» وجود ندارد. وایلز سرافکنده به اتاق کوچک زیر شیروانی برگشت تا اثبات را کامل کند. به گفته‌ی نیک کاتز: «در این لحظه او رازی را از جهان مخفی می‌کرد. فکر می‌کنم خیلی احساس ناراحتی می‌کرد». وایلز گفته بود: «من در هر لحظه از هفت سالی که به تنهایی کار می‌کردم، بدون توجه به دشواری یا ناهموار بودن مانعی که پیش رویم قرار می‌گرفت، لذت می‌بردم و حالا کار ریاضی کردن این طور در معرض عام، سبک و شیوه‌ی من نیست. امیدوارم دیگر این تجربه را تکرار نکنم» ([۳]، ص ۱۱۹). «نبوغ، یعنی حوصله»، «نبوغ، عبارت است از یک درصد الهام و نود و نه درصد عرق ریختن.» پولیا بیان می‌کند یکی از این جمله‌ها را بوفون[۳۵] و دیگری را ادیسون گفته است؛ هر دو یک مفهوم دارند: کسی که می‌خواهد از عهده‌ی حل مسئله‌ای برآید، باید پی‌گیر باشد، به هدف خود اعتقاد داشته باشد و قبل از موقع تسلیم نشود، موضوعی را که مورد بررسی قرار داده‌اید، تا وقتی که هنوز امیدی برای رسیدن به اندیشه‌ای ثمربخش وجود دارد ترک نکنید ([۲]، ص ۴۱۵). اندرو وایلز پس از گذشت یک سال از پیروزی کم دوامش در کمبریج، تقریباً داشت امیدش را از دست می‌داد و اثبات زمین‌گیر شده‌اش را رها می‌کرد. دوشنبه ۱۹ سپتامبر ۱۹۹۴، وایلز پشت میزش در دانشگاه پرینستون نشسته بود، توده‌های کاغذ دور و برش پراکنده بود. تصمیم گرفت قبل از این‌که اثباتش را کنار بگذارد و تمام امیدش را برای اثبات آخرین قضیه‌ی فرما رها کند، آخرین نگاه را به آن بیندازد. او احساس کرد اگر قرار است تسلیم شود دست کم باید پاسخی برای عدم موفقیتش ارائه دهد.

فرما خود مدعی حل این مسئله بود ولی ریاضی‌دانان امروزه معتقدند که فرما در جایی اشتباه کرده و اثبات ساده‌ای برای قضیه‌اش وجود ندارد، اثبات نهایی این قضیه، در واقع حاصل نتایج به دست آمده طی سال‌های بسیار توسط ریاضی‌دانان متعدد و پیشرفت ریاضیات است

پولیا: اندیشه‌ی روشن

از نظر پولیا، کار عمده برای حل یک مسئله، دست یافتن به تصور اندیشه‌ای درباره‌ی نقشه و برنامه‌ی حل مسئله است. این اندیشه ممکن است به تدریج حاصل شود یا پس از آزمایش‌های ظاهراً بی‌نتیجه و دوره‌ای از تردیدها، ناگهان به صورت برقی که می‌جهد، هم‌چون یک «اندیشه‌ی روشن» به ذهن حل کننده‌ی مسئله برسد. اندیشه‌های نیکو بر شالوده‌ی تجربه‌ی گذشته و شناختی که از پیش به دست آمده، بنا شده‌اند. برای اندیشه‌ی نیکو، تنها به خاطر آوردن کفایت نمی‌کند؛ بلکه باید چیزی را به دست آوریم که ارتباطی با موضوع مورد بحث داشته باشد ([۱]، ص ۱۰). وایلز مقاله‌ی پیش رویش را مطالعه کرد و حدود بیست دقیقه با دقت روی آن تمرکز کرد و سپس ناگهان متوجه شد که چرا نتوانسته بود دستگاه اویلر را به کار اندازد. او بعدها احساسش را این طور توصیف کرد: «مهم‌ترین لحظه‌ی تمام زندگی کاریم بود. ناگهان به گونه‌ای کاملاً غیرمنتظره، کشفی خارق‌العاده به عمل آوردم. کاری که بعدها دوباره نمی‌توانم انجام دهم». وایلز ساعت‌ها در ساختمان گروه شروع به قدم زدن کرد. نمی‌دانست که خواب است یا بیدار. هر از گاهی به میزش سری می‌زد تا ببیند دست‌آورد خارق‌العاده‌اش هنوز آن‌جاست، و بود. باید با آن می‌خوابید. ممکن است فردا نقصی در آن پیدا شود. صبح روز بعد پشت میز کارش برگشت. کشف خارق‌العاده‌اش هنوز آن‌جا و منتظر او بود. مقاله‌هایش را به نشریه‌ی تخصصی Annals of Mathematics [۳۶] فرستاد، روند داوری چند ماهی طول کشید ولی این بار نقصی در آن پیدا نشد. شماره‌ی منتشر شده‌ی نشریه در ماه مه ۱۹۹۵، شامل مقاله‌ی اصلی ارائه شده در کمبریج و اصلاح آن توسط وایلز بود. سرانجام آخرین قضیه‌ی فرما آرام گرفت ([۳]، صص ۱۲۱ـ۱۲۰).

نتیجه‌گیری

اندرو وایلز اثباتش را «اثبات قرن بیستمی» توصیف کرد. او از کارهای بسیاری از ریاضی‌دانان قرن بیستم و ریاضی‌دانان قبل استفاده کرد. در مجموع کارهای همگی آن‌ها باعث شد که حل نهایی حاصل شود. بدون کار ارنست کومر[۳۷]، نظریه‌ی ایده‌آل‌ها وجود نداشت. بدون ایده‌آل‌ها کار باری مازور وجود نداشت. بدون کار باری مازور، حدس فری نبود و بدون این حدس اساسی و تلفیق ژان پیر سره، اثبات این مطلب از ریبت که حدس شیمورا ـ تانیاما آخرین قضیه‌ی فرما را اثبات می‌کند وجود نداشت ([۳]، ص ۱۲۲). همان‌طور که قبلاً هم متذکر شدیم، هدف این مقاله، رفتن به عمق اثبات اندرو وایلز نبوده ـ چه این هدفی در حیطه‌ی ریاضیات محض و شاخه‌های نظریه‌ی اعداد جبری و هندسه‌ی جبری حسابی می‌باشد. هدف، آموختن حل مسئله و نحوه‌ی تلاش‌ها در جریان حل مسئله بوده و در این حالت، چه مسئله‌ای شایسته‌تر از یکی از بزرگ‌ترین مسائل سه قرن پیش. در این نوشتار به برخی از استراتژی‌های تأثیرگذار در روند اثبات آخرین قضیه‌ی فرما اشاره شد؛ از جمله: امتحان‌کردن یک حالت خاص، بیان مسئله به صورتی دیگر، در نظر گرفتن مسئله‌ای وابسته به مسئله‌ی اصلی، جستجوی قضیه‌ای سودمند و تقسیم مسئله‌ای بزرگ به مسئله‌های کوچک‌تر؛ که برخی از این استراتژی‌ها نیز در عمل راه‌گشا نبودند و این نکته‌ای منفی به حساب نمی‌آید چرا که خود باعث کشف مسائلی مهم شدند. استراتژی‌های پولیا صرفاً حول مسئله نمی‌چرخد، بلکه او برای مسئله حل کردن نیز استراتژی‌های روان‌شناختی خاص خود را ارائه می‌کند: «این اشتباه است که حل کردن مسئله را کار عقلی محض بدانیم. تصمیمی سست به انجام دادن کاری اندک ممکن است برای حل کردن مسائلِ سردستیِ کلاسِ درس، خوب باشد ولی برای حل کردن یک مسئله‌ی علمیِ (ریاضیِ) جدی، قدرت اراده‌ای لازم است که شخص با آن بتواند سال‌های دراز، رنج و کوشش برای حل مسئله و نومیدی‌های حاصل از ناکامی را تحمل کند» ([۱]، ص ۱۱۹). وایلز هفت سال به تنهایی در زیر شیروانی محل کارش کار کرد، بر تمام مشکلات غلبه کرد و سرانجام مسئله را حل کرد.

پی‌نوشت‌ها

1. George Polya
2. Fermat
3. Kausler
4. Legendre
5. Calzolari
6. Lame
7. Tait
8. Gunther
9. Gambioli
10. Krey
11. Rychlik
12. Stockhaus
13. Carmichael
14. Van der Corput
15. Thue
16. Duarte
17. Lebesgue
18. Christilles
19. Perrin
20. Hurwitz
21. Kapferer
22. Infinite Descent
23. Euler
24. Andrew Wiles
25. Elliptic Curves
26. Ribet
27. Epsilon (Frey) Conjecture
28. Frey Curves
29. Shimura - Taniyama conjecture
30. Barry Mazur
31. Serre
32. Andre Weill
33. Nick Katz
34. Euler System
۳۵. ژرژ بوفون (۱۷۰۷-۱۷۸۸) طبیعت‌شناس مشهور فرانسوی
36. "Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem." Annals of Mathematics. Vol. 142,1995,pp.443-551.
37. Ernest Eduard Kummer

منابع

۱. پولیا، جرج (۱۹۴۴): **چگونه مسئله را حل کنیم؟**، ترجمه‌ی احمد آرام، انتشارات کیهان، چاپ پنجم، ۱۳۷۹.

۲. پولیا، جرج (۱۹۶۵): **خلاقیت ریاضی**، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، چاپ چهارم، ۱۳۷۷.

۳. دی. اکزل، امیر (۱۹۹۷): **آخرین قضیه‌ی فرما، افشای اسرار کهن یک مسئله‌ی ریاضی**، ترجمه محمد مهدی ابراهیمی و مژگان محمودی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۸۵.

۴. ریبن بویم، پائولو (۱۹۹۹)، **آخرین قضیه‌ی فرما برای دوستداران غیرحرفه‌ای**، ترجمه‌ی محمد مهدی ابراهیمی و مژگان محمودی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۸۲.

۵. هالموس، پ. ر: چگونه یک ریاضی‌دان محسوب شویم، ترجمه‌ی محمد صال مصلحیان، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره ۵۷، صص ۲۲ ـ ۱۹، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

ایمان هادی
دانشجوی کارشناسی ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور واحد تفرش
محمد دهقاندار
دانشگاه پیام نور واحد تفرش

کارهای ثبت‌شده‌ی کاشانی

و

کارهای ثبت‌شده‌ی پیشینیانِ کاشانی به نام پسینیانِ وی

غیاث‌الدین جمشید کاشانی یکی از ریاضی‌دانان توانمند دوره‌ی اسلامی است که علاوه‌بر علم ریاضیات در نجوم نیز توانایی‌های خود را به اثبات رساند

چکیده

در این مقاله، ابتدا کارهایی که توسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی انجام شده و به نام وی ثبت شده مورد بررسی قرار گرفته است. این کارها عبارت‌اند از: اختراع روش کنونی جذر، محاسبه‌ی عدد پی تا ۱۶ رقم اعشار دقت و محاسبه‌ی نسبت مثلثاتی سینوسِ یک درجه. هم‌چنین روش کنونی جذر به‌طور مفصل‌تری شرح داده شده است و یک مثال جهت تبیین موضوع آورده شده است. سپس کارهایی که در آثار کاشانی آمده، ولی کاشانی خود اذعان داشته که آثار پیشینیان وی می‌باشد و به نام اشخاص بعد از کاشانی ثبت‌شده، معرفی گردیده است. این موارد عبارت‌اند از مثلث حسابی و بسط دوجمله‌ای که در نسخ خطی کاشانی موجود است؛ در ادامه برای هر کدام مثالی از نسخه‌ی خطی کاشانی بیان شده است.

کلید واژه‌ها: کاشانی، جذر، عدد پی، سینوس، مثلث حسابی، بسط دوجمله‌ای

مقدمه

غیاث‌الدین جمشید کاشانی یکی از ریاضی‌دانان توانمند دوره‌ی اسلامی است که در حدود سال ۷۹۰ قمری (۱۳۸۸ میلادی) در کاشان متولد شد. وی علاوه بر علم ریاضیات در نجوم نیز توانایی‌های خود را به اثبات رساند به گونه‌ای که در مدت کوتاه زندگی ۴۲ ساله‌ی خود، آثار ارزشمندی به یادگار گذاشت. مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

زیج خاقانی، مفتاح‌الحساب، رساله‌ی محیطیه، رساله‌ی وتر و جیب، رساله‌ی علم هیئت، آلات رصد و نزهة‌الحدایق.

کاشانی در ۱۹ رمضان سال ۸۳۲ قمری (۱۴۲۹ میلادی)، در خارج شهر سمرقند درگذشت.

کارهایی که توسط کاشانی انجام شده و به نام وی ثبت شده است

الف) اختراع روش کنونی جذر

کاشانی روشی را که قبل از وی بوده اصلاح کرده و سپس روش خود را که خلاصه و ساده شده‌ی همان روش قبلی است به‌دست آورده است. روش کاشانی همان است که امروزه برای یافتن جذر به کار می‌بریم و گرچه چند تفاوت جزئی دارد ولی هنوز می‌توان روش فعلی را از اختراعات کاشانی دانست. این تفاوت‌ها به شرح زیر هستند:

۱. تفاوت در محل ثبت محاسبات فرعی: اعمالی که کاشانی در پایین جدول ثبت می‌کرد، امروزه در بالای جدول و زیر ارقام جذر ثبت می‌شوند.

۲. کاشانی ضرب‌های محاسبات فرعی را روی کاغذ وارد نمی‌کرد و به ثبت نتیجه در جدول اکتفا می‌کرد.

برای درک بهتر شیوه‌ی جذر گرفتن کاشانی مثالی می‌آوریم. توضیح این نکته لازم است که کاشانی در این قسمت، «دور» را معرفی کرده است به این معنی که اگر می‌خواست از عددی مثلاً ریشه‌ی سوم بگیرد، ارقام آن عدد را از سمت راست ۳ تا ۳ تا جدا می‌کرد و هر دسته‌ی ۳ رقمی را یک دور می‌نامید.

مثال: مطلوبست جذر عدد ۳۳۱۷۸۱. در این‌جا نخست باید دورهای دو رقمی را جدا کرد.

مرحله‌ی ۱. بزرگ‌ترین عددی را پیدا می‌کنیم که وقتی در خودش ضرب شود، از عدد دور اول (۳۳) کمتر باشد. این عدد ۵ است. آن را هم در بالای دور اول و هم با فاصله مناسب در پایین جدول زیر آن دور می‌نویسیم. عدد بالایی را در پایینی ضرب کرده (۵×۵) و حاصل ۲۵ را زیر ۳۳ نوشته و از آن کم می‌کنیم. تفاضل را که ۸ می‌شود زیر ۲۵ نوشته و دور دوم را هم جلوی ۸ می‌نویسیم که می‌شود ۸۱۷.

مرحله‌ی ۲. عدد پایین جدول یعنی ۵ را دو برابر می‌کنیم و حاصل ۱۰ را طبق شکل، بالای ۵ می‌نویسیم. سپس بزرگ‌ترین عدد را می‌جوییم که چون جلوی ۱۰ قرار گیرد و حاصل در همان عدد ضرب شود، مساوی یا کمتر از ۸۱۷ شود. این عدد ۷ است که چون در ۱۰۷ (حاصل قرار دادن ۷ جلوی ۱۰) ضرب شود ۷۴۹ می‌شود و آن را طبق شکل، زیر ۸۱۷ می‌نویسیم و تفاضلشان را هم که ۶۸ می‌شود زیرشان ثبت می‌کنیم. ضمناً عدد ۷ را هم جلوی ۵ (هم در سطر بالا و هم در سطر پایین جدول) در ستون مربوط به دور دوم وارد می‌کنیم که تا این‌جا به عدد ۵۷ می‌رسیم.

مرحله‌ی ۳. دور سوم را جلوی ۶۸ نوشته و همان کاری را که در مرحله‌ی دوم برای ۸۱۷ و ۵ انجام دادیم در این مرحله برای ۶۸۸۱ و ۵۷ انجام می‌دهیم.

*** نیوتن که در سال ۱۶۴۲ در انگلستان متولد شد، در حدود ۲۰۰ سال بعد از کاشانی، دستور بسط دوجمله‌ای را مجدداً به‌دست آورد**

مرحله‌ی اول

۵		
۳۳	۱۷	۸۱
۲۵		
۸	۱۷	
۵		

→

مرحله‌ی دوم

۵	۷	
۳۳	۱۷	۸۱
۲۵		
۸	۱۷	
۷	۴۹	
	۶۸	
۱۰	۷	
۵	۷	

→

مرحله‌ی سوم

۵	۷	۶
۳۳	۱۷	۸۱
۲۵		
۸	۱۷	
۷	۴۹	
	۶۸	۸۱
	۶۸	۷۶
		۵
		۱۱۴۶
۱۰	۷	
۵	۷	۶

جدول ۱

کاشانی لزومی به تکرار دورها نمی‌دید یعنی اعداد ۱۷ و ۸۱ را نمی‌نوشت. عدد ۵۷۶ که بالا (یا پایین جدول) ظاهر می‌شود همان جذر ۳۳۱۷۸۱ می‌باشد که باقیمانده‌ای هم مساوی ۵ دارد.

روشی که امروزه به‌کار می‌رود				روشی که کاشانی به‌کار می‌برد		
۶ ۷ ۵	۸۱	۱۷	۳۳	۶	۷	۵
۵×۲=۱۰			۲۵	۸۱	۱۷	۳۳
۱۰۷×۷=		۱۷	۸			۲۵
۷۴۹		۴۹	۷		۱ ۷	۸
۵۷×۲=۱۱۴	۸۱	۶۸			۴ ۹	۷
۱۱۴۶×۶=۶۸۷۶	۷۶	۶۸		۸ ۱	۶ ۸	
	۵			۷۶	۶۸	
				۵		
				۴ ۶	۱ ۱	
					۰ ۷	۱
				۶	۷	۵

جدول ۲

پس از آن‌که کاشانی به دستور استخراج جذر دست یافت، برای آن‌که مقدار جذر عدد دقیق‌تر باشد، کسری به آن اضافه کرده و فرمول زیر را به‌دست آورده است:

$$\sqrt{T^{۲}+r}=T+\frac{r}{۲T+۱}$$

برای مثال بالا به صورت زیر می‌توان عمل کرد:

$$\sqrt{۵۷۶^{۲}+۵}=۵۷۶+\frac{۵}{۲\times ۵۷۶+۱}=۵۷۶+\frac{۵}{۱۱۵۳}$$

که در این فرمول، T ریشه‌ی دوم عدد و r، باقیمانده‌ی آن است.

ب) عدد پی

کاشانی مقدار عدد ۲π را با کسرهای شصت‌شصتی برابر با $۲\pi = ۶$ ؛ ۱۶ ، ۵۹ ، ۲۸ ، ۱ ، ۳۴ ، ۵۱ ، ۴۶ ، ۱۴ ، ۵۰ به‌دست آورد و سپس آن را با کسرهای دهدهی که فکر می‌کرد خود مخترع آن‌هاست، به‌صورت زیر نوشت:

$$۲\pi = ۶/۲۸,۳۱,۸۵,۳۰۷,۱۷۹,۵۸,۶۵$$

همه‌ی ۱۶ رقم اعشاری این عدد دقیق بوده که نهایت ظرافت کاشانی را می‌رساند و قبل از وی کسی به چنین دقتی دست نیافته بود*. وی برای جلوگیری از اشتباهاتی که ممکن بود توسط نسخه‌نویسان به‌وجود آید، مقدار ۲π را در اعداد صحیح ۱ تا ۱۰ ضرب و در جدولی ثبت کرد و برای محکم‌کاری، ارقام ۲π را (از چپ به راست) به ابجد در یک بیت عربی و به رقم در یک بیت فارسی به‌نظم درآورد:

به عربی:

و بَحجا حَهَج صَز اَزَطه حُوةٌ
محیطٌ لقطر هو اثنان منه

به فارسی:

شش و دو هشت و سه یک هشت و پنج و سه صفری
بهفت و یک‌زا و نه پنج و هشت و شش پنج است.

کاشانی عدد پی را، که همان نسبت محیط دایره به قطر آن است، با دقتی به دست آورد که تا حدود ۱۵۰ سال بعد از وی در دنیا بی‌رقیب ماند.

به بیان دقیق‌تر، کاشانی مقدار ۲π را در سال ۱۴۲۴ میلادی تا ۱۶ رقم اعشاری به‌دست آورد و بعدها در اروپا، ویت[۱] در سال ۱۵۷۹ میلادی (یعنی در حدود ۱۵۵ سال بعد از کاشانی) فقط یازده اعشار دقیق پی را به‌دست آورده است و آدرین[۲] در سال ۱۵۹۳ میلادی، فقط ۱۵ رقم اعشار دقیق پی را و لودلف[۳] در سال ۱۶۱۰ میلادی، سی و پنج رقم اعشاری دقیق آن را حساب کرد.

ج) محاسبه‌ی $\sin ۱^\circ$

کاشانی با روشی ابتکاری مقدار $\sin ۱^\circ$ را محاسبه کرده است. وی ابتدا مقدار $\sin ۲^\circ$ را تا ۱۷ رقم اعشار به شرح زیر به‌دست آورد:

$$\sin ۲^\circ = ۲,۵,۳۳۹,۲۶,۲۲,۲۹,۲۸,۳۲,۵۲,۳۲$$

سپس این مقدار را نصف کرد و مقدار $\sin ۱^\circ$ را به‌دست آورد:

$$\sin ۱^\circ = ۰/۰۱۷\ ۴۵۲\ ۴۰۶\ ۴۳۷\ ۲۸۳\ ۵۱۰\ ۳۷۱\ ۲$$

که این هفده رقم اعشار دقیق هستند.

ردیف‌ها	ستون توان نهم	ستون توان هشتم	ستون توان هفتم	ستون توان ششم	ستون توان پنجم	ستون توان چهارم	ستون توان سوم	ستون توان دوم
ردیف توان هشتم	۹							
ردیف توان هفتم	۳۶	۸						
ردیف توان ششم	۸۴	۲۸	۷					
ردیف توان پنجم	۱۲۶	۵۶	۲۱	۶				
ردیف توان چهارم	۱۲۶	۷۰	۳۵	۱۵	۵			
ردیف توان سوم	۸۴	۵۶	۳۵	۲۰	۱۰	۴		
ردیف توان دوم	۳۶	۲۸	۲۱	۱۵	۱۰	۶	۳	
ردیف پایه	۹	۸	۷	۵	۵	۴	۳	۲

جدول ۳

ردیف‌ها	ستون توان پنجم	توان عدد ۴	حاصل ضرب‌ها
ردیف توان چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰
ردیف توان سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰
ردیف توان دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰
ردیف پایه	۵	۴	۲۰

۲۱۰۰ ← حاصل جمع
۱ +
$۵^۵-۴^۵=$ ۲۱۰۱

جدول ۴

ردیف‌ها	ستون توان پنجم	توان عدد ۴	حاصل ضرب‌ها	توان عدد ۳	حاصل ضرب‌های دوم
ردیف توان چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰	۳	۳۸۴۰
ردیف توان سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰	۹	۵۷۶۰
ردیف توان دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰	۲۷	۴۳۲۰
ردیف پایه	۵	۴	۲۰	۸۱	۱۶۲۰

۱۵۵۴۰ ← حاصل جمع
۲۴۳ ← $۳^۵$
$۷^۵-۴^۵=$ ۱۵۷۸۳

جدول ۵

مثلث حسابی										
سطر اول	۱									
سطر دوم	۱	۱								
سطر سوم	۱	۲	۱							
سطر چهارم	۱	۳	۳	۱						
سطر پنجم	۱	۴	۶	۴	۱					
سطر ششم	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱				
سطر هفتم	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱			
سطر هشتم	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱		
سطر نهم	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱	
سطر دهم	۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹	۱

جدول ۶

۳) کارهایی که در آثار کاشانی آمده و به نام اشخاص بعد از کاشانی ثبت شده است.

الف) مثلث حسابی

کاشانی در مثالی، مقدار $۴^۵-۵^۵$ را حساب کرده است. وی برای محاسبه‌ی این مقدار از جدول‌های ۲ و ۳ و ۴ به شرح زیر استفاده کرده است.

با دقت به این چهار جدول، مشخص می‌شود که جدول شماره‌ی ۳، همان جدول شماره‌ی ۶، یعنی مثلث حسابی است که تفاوت‌هایی جزیی در آن به‌چشم می‌خورد؛ از جمله:

۱. وضع قرار گرفتن اعداد در آن تفاوت دارد یعنی اعدادی که در جدول در ستون قائم قرار گرفته‌اند، در مثلث حسابی در سطرهای افقی قرار دارند.

۲. یک‌هایی که در مثلث حسابی در ستون چپ قرار دارد، در جدول دیده نمی‌شود.

کاشانی در مقدمه‌ی مفتاح‌الحساب به این نکته اشاره دارد که جدول‌های ۳، ۴ و ۵ را از پیشینیان اقتباس نموده است.

در مورد مثلث حسابی به‌طور دقیق نمی‌توانیم بگوییم چه کسی مخترع آن بوده است. فقط می‌دانیم سابقه‌ی به‌کارگیری و استفاده از این مثلث، به حدود ۸۰ سال قبل از عمر خیام باز می‌گردد. زیرا بنابر اطلاعات ما، ابوبکر محمدحسین کرجی، نخستین کسی است که این مثلث را در آثار خود ثبت کرده است.

لازم به ذکر است که کرجی ریاضی‌دان ایرانی است که در اواخر قرن سوم و اوایل قرن چهارم زندگی می‌کرده است. از نکات قابل توجه این است که امروزه اروپاییان، جدول شماره‌ی ۵، یعنی مثلث حسابی را «مثلث حسابی پاسکال» می‌نامند. پاسکال در سال ۱۶۲۳ متولد شد؛ یعنی حدود ۲۰۰ سال بعد از کاشانی این مثلث را به نام خود ثبت کرده است.

مهم‌ترین آثار کاشانی زیج خاقانی، مفتاح‌الحساب، رساله محیطیه، رساله وتر و جیب، رساله‌ی علم هیأت، آلات رصد و نزهة‌الحدائق می‌باشد

ب) بسط دوجمله‌ای

از جدول‌های شماره‌ی ۲، ۳ و ۴ نکات دیگری نیز حاصل می‌شود که از این قرارند:

۱. اعدادی که در جدول ۲ قرار گرفته‌اند، ضرایب بسط دوجمله‌ای هستند. به‌طور مثال اعدادی که در ستون توان هشتم قرار دارند یعنی: ۸، ۲۸، ۵۶، ۷۰، ۵۶، ۲۸، ۸، ضرایب بسط دوجمله‌ای $(a+b)^8$ هستند که به‌صورت زیر است:

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

۲. اگر در جدول شماره‌ی ۴، دو عدد صحیح غیر متوالی را a و b بنامیم، حاصل این جدول به‌صورت زیر است:

$$(a+b)^5 - a^5 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

و از آن‌جا

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

که همان دستور بسط دوجمله‌ای است.

همان‌طور که گفتیم کاشانی این جدول‌ها را جزو کارهای خود ندانسته و آن‌ها را کارهای افراد قبل از خود می‌داند.

طبق پژوهش‌هایی، دستور بسط دوجمله‌ای نیز (در حالتی که نماینده‌ی آن عدد صحیح باشد)، در آثار و تألیفات کرجی دیده شده است.

متأسفانه کتاب کرجی موجود نیست، اما بخش‌هایی از آن در کتاب «الباهر فی علم‌الحساب» نقل شده که از جمله تألیفات «ابونصر سموأل‌بن یحیی» است که در سال ۵۷۰ هجری قمری در مراغه درگذشت.

نیوتن که در سال ۱۶۴۲ در انگلستان متولد شد، در حدود ۲۰۰ سال بعد از کاشانی، دستور بسط دوجمله‌ای را مجدداً به‌دست آورد که امروزه دستور بسط دوجمله‌ای را به نام «دستور بسط دوجمله‌ای نیوتن» می‌شناسند.

۴. نتیجه‌گیری

بررسی موارد فوق نشان می‌دهد که بسیاری از آثار مفاخر علمی ما برای خود ما نیز ناشناخته است و متأسفانه بسیاری از آن‌ها علی‌رغم وجود نسخ خطی دال بر مالکیت آن‌ها، به نام کسانی ثبت گردیده‌اند که سال‌ها بعد از آن بزرگان پا به عرصه‌ی وجود گذاشته‌اند. ضرورت پی‌گیری هویت این آثار و ثبت آن‌ها به نام مؤلفین واقعی، امری کاملاً واضح به‌نظر می‌رسد.

پی‌نوشت‌ها

* کسرهای دهدهی قبل از کاشانی هم بوده‌اند البته نحوه‌ی نمایششان فرق می‌کرده است و احتمال دارد که کاشانی بی‌خبر بوده است. چنین به نظر می‌رسد که برخی از کارهای خیام و امثال او به علت آشفتگی حاصل از حمله مغول‌ها و تیموریان به اطلاع همگان نرسیده باشند و کاشانی امتیاز کافی را به پیشینیان خود نداده باشد. به کتاب کاشانی‌نامه مراجعه فرمایید. (رشد آموزش ریاضی)

1. Viete

2. Adrian Romian

3. Ludolf

منابع

۱. **کاشانی‌نامه**، تألیف ابوالقاسم قربانی، چاپ دوم، ۱۳۸۶.

۲. **در قلمرو ریاضیات**، به کوشش مهندس یونس کرامتی، چاپ اول، ۱۳۸۱.

۳. **مفتاح‌الحساب**، تألیف: غیاث‌الدین جمشید مسعود طبیب کاشانی، کتاب‌خانه‌ی آیت‌الله مرعشی نجفی.

۴. **رساله‌ی محیطیه**، تألیف: غیاث‌الدین جمشید مسعود طبیب کاشانی، کتاب‌خانه‌ی آیت‌الله مرعشی نجفی.

زبان

به عنوان یکی از اصول آموزش ریاضی

لیلا احمدلو (دبیر ریاضی منطقه ی درودزن شیراز)
مریم استادی (دبیر ریاضی منطقه جی اصفهان)
افسانه حیدری ارجلو (دبیر ریاضی ناحیه ۱ اهواز)
زهرا صباغ زاده فیروزآبادی (دبیر ریاضی میبد یزد)
نرگس عقیلی (دبیر ریاضی ناحیه ۲ قم)
دانشجویان کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

مقدمه

یکی از چالش های پیش روی محققان آموزش ریاضی این است که پیوندهای بین فرهنگ، زبان و آموزش ریاضی را بیش تر کنند و مطمئن باشند که یافته های آن ها، بر تصمیم گیری های برنامه ی درسی ریاضی تأثیر می گذارد. اما بیش تر ملت ها به این جنبه، توجه کافی نکرده اند، در حالی که نظام های آموزش رسمی نمی توانند جدا از فرهنگی باشند که در آن زندگی می کنند. به طور مثال، سبک یادگیری کودکان، باورها، نظرات شخصی و طرح های شناختی آن ها به بافت فرهنگی که در آن قرار گرفته اند، مربوط می شود.

این مسئله به خصوص در کشورهای در حال توسعه باید مورد توجه قرار گیرد، چرا که در این مناطق، از شروع قرن گذشته بیش تر سعی شده است تا از برنامه های درسی کشورهای غربی در تدریس استفاده شود، بدون توجه به این نکته ی مهم که این نوع برنامه ها هیچ گونه هماهنگی با فرهنگ حاکم بر این جوامع ندارند و بدتر این که این نوع برنامه ها حتی از طرف خود غربی ها نیز کنار گذاشته شده اند.

در واقع، تمام زبان ها توانایی بیان تصورات ریاضی غربی و نمادهای به کار رفته در آن را ندارند و از طرف دیگر، تصورات ریاضی افراد در زبان های بومی را نیز نمی توان به راحتی به زبان انگلیسی یا هر زبان مشترک دیگری بیان کرد. باید دقت داشت که یادگیری زبان و نمادهای به کار رفته در زبان های غربی، خود یک مؤلفه ی اساسی در زمینه ی رواج یک فرهنگ بیگانه در یک جامعه است، اما متأسفانه امروزه دانش آموزان در کشورهای در حال توسعه مجبورند که در کلاس های ریاضی، مفاهیم را به سبک غربی آموزش ببینند. در حالی که تفاوت های این گونه برنامه ها با برنامه های کشورهای در حال توسعه بسیار بیش تر از شباهت های آن هاست.

در برنامه های درسی ریاضی، باید به مواردی مانند مخاطبان برنامه، موضوعات انتخاب شده، روش های یادگیری و تدریس مطلب و نحوه ی ارزشیابی و بسیاری از موارد مهم دیگر توجه کرد. این ها از جمله اصول آموزش ریاضی هستند که نسبی بوده و در هر جامعه ای متناسب با فرهنگ و ارزش های حاکم بر آن جامعه تغییر می کنند.

نیومن، یک آموزشگر زبان استرالیایی است که شیوه ای نظام وار برای تحلیل خطاهایی که دانش آموزان ممکن است در هنگام پاسخ به سؤالات کتبی با آن برخورد کنند، ارائه کرد. این روش تحلیل با سایر روش ها بسیار متفاوت بود و به همین دلیل، توجه پژوهشگران بین المللی آموزش ریاضی را به خود جلب کرد.

ویژگی منحصر به فرد این نوع تحلیل این بود که توجه خاصی به تأثیر عامل زبان بر یادگیری ریاضی و نامناسب بودن بسیاری از

برنامه‌های جبرانی ریاضیات در مدارس داشت. او توجه زیادی به محیط یادگیری ریاضیات داشت و سعی می‌کرد که یک موقعیت عملی مناسب را فراهم کند تا دانش‌آموزان بتوانند تفکر ریاضی گونه را تمرین کنند. این تحلیل آن‌قدر عمیق به عامل زبان در یادگیری ریاضی پرداخته بود که بعضی از پژوهشگران آموزش ریاضی، زبان را یکی از اصول آموزش ریاضی دانستند. برای آشنایی با تحلیلی که نیومن انجام داد، به معرفی اجمالی آن می‌پردازیم.

تحلیل خطای نیومن

طبق نظر نیومن، شخصی که می‌خواهد یک راه‌حل صحیح برای مسائل کلامی به‌دست آورد، سرانجام باید طبق سلسله مراتب زیر اقدام کند:

۱. مسئله را بخواند؛

۲. آن‌چه را خوانده است درک کند؛

۳. تبدیل‌های ذهنی از واژگان کلیدی را برای انتخاب راهبرد ریاضی مناسب انجام دهد؛

۴. مهارت‌های فرایندی موردنیاز را برای راهبردهای انتخابی به‌کار گیرد؛

۵. جواب را به یک شکل نوشته شده‌ی قابل قبول، بنویسد.

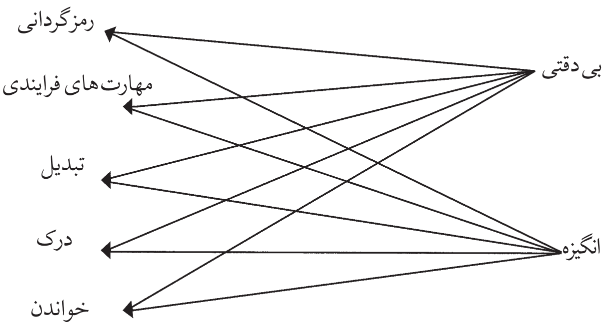
نیومن در مطالعه‌ی اولیه‌اش، دریافت که خطاهای خواندن و درک و تبدیل دانش‌آموزان، بیش از ۵۰ درصد کل خطاها بوده است

نیومن از واژه‌ی «سلسله مراتب» استفاده کرد زیرا شکست در هر سطحی از دنباله‌ی بالا، حل‌کننده‌ی مسئله را از پیشرفت رضایت بخش باز می‌دارد (مگر این‌که به‌طور شانسی و با دلایل ناقص به جواب برسد). کیسی (۱۹۸۷)، (نقل شده در کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶) نقل می‌کند که حل‌کننده‌ی مسئله اغلب در هنگام حل مسئله، به مراحل قبلی سلسله مراتب برمی‌گردد (برای مثال در وسط محاسبات پیچیده، شخص ممکن است تصمیم بگیرد که دوباره سؤال را بخواند و کنترل کند که آیا همه‌ی داده‌های مربوط را به‌کار گرفته است یا خیر؟) به هر حال، حتی اگر بعضی از مراحل در طول حل مسئله بازبینی شود، باز هم سلسله مراتب نیومن، برای توالی مراحل، اساسی است.

کلمنتس و الرتن، (۱۹۹۶) تکنیک تحلیل خطای نیومن را با خطاهای نوع دیگری که در نمودار نمایش داده شده، توضیح داده‌اند. به عقیده‌ی آن‌ها، خطاهای ناشی از صورت مسئله، با خطاهای دیگری مانند «بی‌دقتی» و «انگیزه» تفاوت اساسی دارند، زیرا سرچشمه‌ی این مشکلات بیش‌تر در خود مسئله قرار دارد تا در کشمکش بین مسئله حل کن و مسئله.

این تمایز، در شکل ۱ مشخص شده است و در کنار آن، سلسله مراتب پنج مرحله‌ای تحلیل خطای نیومن آورده شده است؛ خطاهایی که در هر مرحله از فرایند حل مسئله می‌تواند رخ دهد. برای مثال، خطای ناشی از بی‌دقتی می‌تواند ناشی از خطای خواندن، خطای بد فهمیدن یا مانند آن باشد.

به همین نحو، یک شخص ممکن است سؤال را به درستی خوانده و درک کرده باشد و حتی یک راهبرد مناسب برای حل آن در نظر داشته باشد، اما در حین فرایند حل مسئله، ممکن است به هر



شکل۱. سلسله مراتب پنج مرحله‌ای تحلیل خطای نیومن

دلیلی انگیزه‌ی خود را برای ادامه‌ی حل مسئله از دست بدهد و از خود بپرسد که «آیا ارزشی دارد که برای حل چنین سؤالی به زحمت بیفتم؟»

نیومن پیشنهاد کرد که سؤالات زیر در مصاحبه‌هایی استفاده شود که به منظور طبقه‌بندی خطاهای دانش‌آموزان در تکالیف کتبی ریاضی انجام می‌شود:

۱. لطفاً این سؤال را بخوانید (خواندن)؛

۲. سؤال از شما می‌خواهد چه کاری انجام دهید (درک)؛

۳. روشی را که می‌توانید برای یافتن جواب سؤال استفاده کنید، بگویید (تبدیل)؛

۴. چطور جواب سؤال را حساب کردید؟ توضیح دهید که برای حل آن چه کاری انجام دادید (مهارت‌های فرایندی)؛

۵. حالا جواب سؤال را یادداشت کنید (رمزگردانی).

برای آشنایی با روش که نیومن پیشنهاد کرده، مثال زیر می‌تواند مفید واقع شود.

مثالی از یک مصاحبه‌ی نیومنی

مسئله.

من و برادرم امروز پیتزا خوردیم. من فقط $\frac{1}{4}$ از پیتزا را خوردم و

برادرم $\frac{2}{3}$ آن را خورد. ما روی هم چقدر پیتزا خورده‌ایم؟

مصاحبه‌گر از دانش‌آموزان خواست تا مسئله را دقیق بخوانند و با سؤالات زیر، آن‌ها را هدایت کرد.

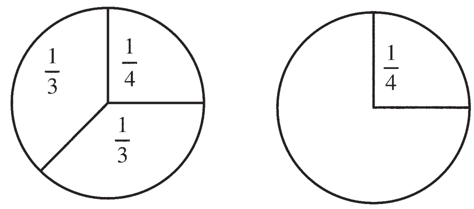
مصاحبه‌گر: سؤال از شما چه می‌خواهد؟

دانش‌آموز: هوم... از ما خواسته شده که بگوییم جمعاً چقدر پیتزا خورده‌ایم.

مصاحبه‌گر: چطور آن را حل کردی؟

دانش‌آموز: شکل یک پیتزا را کشیدم و $\frac{1}{4}$ آن را مشخص کردم و سپس $\frac{2}{3}$ آن را مشخص کردم.

مصاحبه‌گر: چگونه آن‌ها را روی هم حساب کردی؟



دانش‌آموز: این یک مسئله‌ی جمع است!

مصاحبه‌گر: جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم است؟

دانش‌آموز: جمع.

مصاحبه‌گر: می‌توانی نشان دهی که چگونه آن را حل کردی؟ با توجه به این‌که گفتی شکل رسم کرده‌ای، می‌توانی بگویی چگونه این کار را انجام دادی؟

دانش‌آموز: (شکل را رسم می‌کند) و می‌گوید: من $\frac{1}{4}$ پیتزا خوردم.

(و آن را روی شکل نشان می‌دهد.)

مصاحبه‌گر: از کجا می‌دانی که $\frac{1}{4}$ درست است؟

دانش‌آموز: چون این یک قسمت از چهار قسمت است. سپس من $\frac{2}{3}$ پیتزا را که برادرم خورده بود، مشخص کردم.

مصاحبه‌گر: آیا هر کدام از این قسمت‌ها $\frac{1}{3}$ است؟ چگونه می‌دانی که $\frac{1}{3}$ است؟

دانش‌آموز: زیرا این پیتزا ۳ قسمت است.

و مصاحبه هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

در این مثال، دانش‌آموز سؤال را درک کرده است ولی نمی‌تواند راهبرد مناسب را ادامه دهد. مصاحبه بر طبق روش تحلیل خطای نیومن انجام شد و مصاحبه‌کننده موفق شد برخی از مشکلات دانش‌آموز را درک کند، بدون این‌که او را مجبور به انتخاب راه‌حل دیگری نماید.

نیومن در مطالعه‌ی اولیه‌اش، دریافت که خطاهای خواندن و درک و تبدیل دانش‌آموزان، بیش از ۵۰ درصد کل خطاها بوده است. بنابراین، بیش از نیمی از خطاها قبل از کاربرد مهارت‌های فرایندی اتفاق افتاده و کمتر از ۱۰ درصد خطاها مربوط به مهارت‌های فرایندی است.

در مطالعات انجام شده روی دانش‌آموزان مقاطع پایین‌تر از دبیرستان که توسط کلمنتس (۱۹۸۰)، واتسون (۱۹۸۰) و کلارکسون (۱۹۸۳) [نقل شده در کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶] انجام شد، نتایج مشابهی به‌دست آمد که با نتایج به‌دست آمده توسط نیومن سازگاری داشت و آن را تأیید می‌کرد. این نتایج، توجه را به اهمیت عامل زبان در یادگیری ریاضی جلب می‌کند. بنابراین، اگر حدود نیمی از خطاهای ایجاد شده در تکلیف‌های ریاضی کتبی، قبل از کاربرد مهارت‌های فرایندی اتفاق می‌افتد، به‌نظر منطقی می‌رسد که برنامه‌های ریاضی جبرانی (که در همه کشورهای آسیا و اقیانوسیه به‌طور گسترده‌ای در دسترس است)، نیازمند توجه بیش‌تری به این دو سؤال است که «آیا دانش‌آموزان قادرند زبانی را که در مسائل کلامی ریاضی نهفته شده است بخوانند و درک کنند؟» و «آیا قادرند روش‌های مناسبی را برای تنظیم مسائلی که می‌خواهند حل کنند، تدبیر کنند؟»

تفاوت مطالعات اخیر با تحقیق اصلی نیومن این است که جواب‌های درست هم علاوه بر جواب‌های نادرست، تجزیه و تحلیل می‌شوند. بسیاری از جواب‌های درست را دانش‌آموزانی می‌دهند که واقعاً مفهوم سؤال را نفهمیده‌اند. بدین سبب، معلمان و نویسندگان کتاب‌های درسی، باید نسبت به انواع خطاهای دانش‌آموزان که در انواع متفاوتی از تکالیف رخ می‌دهند، بیش‌تر آگاهی یابند. این یافته‌ها که توسط داده‌های به‌دست آمده در مدارس کشورهای آسیا و اقیانوسیه حاصل شده است، می‌تواند یکی از مهم‌ترین یافته‌های تحقیق آموزش ریاضی در زمان حال باشد. با این حال، یافته‌های تحقیق در میان سیاستمداران، تصمیم‌گیرندگان سیاست‌های آموزشی، والدین و حتی معلمان ریاضی، خوب شناخته نشده‌اند. *

پی‌نوشت‌ها

* این نوشته، تلخیصی از بخش **تجزیه و تحلیل خطای نیومن** در کتاب «**تحقیقات آموزش ریاضی: گذشته، حال و آینده**» است که در سال ۱۹۹۶، توسط کلمنتس والرتون، به درخواست یونسکو نوشته شد.

1. Encoding

شمارش با رابطه‌ی

۱ + ۲ + ۳ +…+ n = nI

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی مرکز شهید بهشتی سمنان

مقدمه

تجربه‌ی کار در کلاس هنر حل مسئله، این نتیجه را برایم به ارمغان آورد که دریافتم دانش‌آموزان معمولاً در مسائل شمارشی به گونه‌ای غیر از آن چه معلمان می‌خواهند و عمل می‌کنند، رفتار می‌کنند (البته این امر در هر موضوعی می‌تواند درست باشد). در مسائل مختلفی که مطرح می‌شود، دانش‌آموزان با روش‌های گوناگونی به حل مسئله می‌پردازند که ما به عنوان معلم شاید توقع آن‌را نداشته باشیم. اما در بسیاری از موارد، راه‌حل‌ها به الگوی n+…+۳ + ۲ + ۱ می‌رسند که معمولاً حاصل آن‌را نیز می‌دانند، لذا به آسانی جواب را به‌دست می‌آورند. این موضوع مرا بر آن داشت تا این رابطه را به عنوان پیش‌فرض قبول کرده و بررسی کنم که چه نتایجی را به دنبال خواهد داشت. به عبارتی این مقاله، حاصل مشاهدات و دسته‌بندی کار دانش‌آموزان در چندین جلسه از یک کلاس است. لذا چنین فرض می‌کنیم: nI = n+…+۲ + ۱ و برقراری این رابطه را در چند مسئله بررسی می‌کنیم.

مسائل

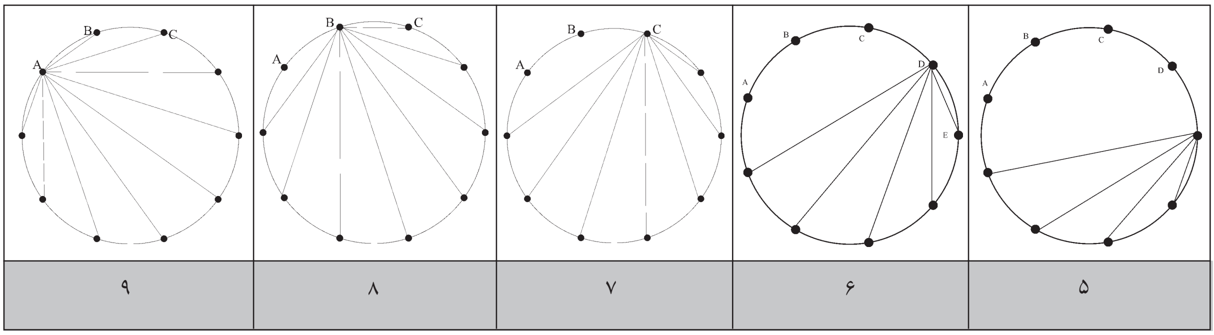
اولین مسئله‌ای که مطرح می‌شود این است که «۱۰ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارد. چند پاره‌خط وجود دارد که ابتدا و انتهای آن‌ها از این نقاط باشد.»

ما معلم‌ها، معمولاً برای حل مسئله، چنین استدلال می‌کنیم:

برای رسم یک پاره‌خط دو نقطه انتخاب می‌شود، برای انتخاب نقطه‌ی اول ۱۰ و برای انتخاب نقطه‌ی دوم ۹ حالت وجود دارد. لذا در کل ۹۰=۹×۱۰ حالت داریم و چون در این روش، هر پاره‌خط دو بار شمرده می‌شود، پس در کل ۴۵ = ۲ ÷ ۹۰ پاره‌خط خواهیم داشت.

اما به ندرت اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزی که برای اولین‌بار به این مسئله بر می‌خورد این روش را انتخاب کند. در بیش‌تر موارد، روش زیر مشاهده می‌شود:

نقطه‌ی A را به سایر نقاط وصل کرده، تعداد پاره‌خط‌هایی که سر آن‌ها A است را می‌شماریم؛ تعداد آن‌ها ۹ تاست.

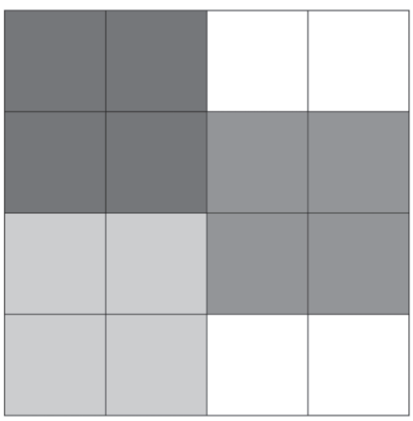


شکل (۱)

سپس نقطه‌ی B را به سایر نقاط وصل کرده، تعداد پاره‌خط‌های حاصل را می‌شماریم؛ که تعداد آن‌ها ۸ تاست؛ چرا که پاره‌خط AB قبلاً شمرده شده است. به همین ترتیب، نقطه‌ی C را به سایر نقاط وصل کرده و تعداد پاره‌خط‌های جدید را می‌شماریم که تعداد آن‌ها ۷ تا است. این کار را ادامه می‌دهیم. در هر مرحله، از تعداد پاره‌خط‌ها یکی کم می‌شود. به آخرین نقطه که برسیم، همه پاره‌خط‌هایی که با این نقطه آغاز می‌شوند را قبلاً شمرده‌ایم. بنابراین تعداد کل پاره‌خط‌ها ۱+۲+۳+...+۹ است و در صورتی که n نقطه داشته باشیم، تعداد آن‌ها $I(n-1) = (n-1)+\cdots+3+2+1$ است.

مسئله‌ی دوم، شمارش تعداد پاره‌خط‌های موجود در یک پاره‌خطی است که به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده است. با روشی مشابه روش بالا، تعداد همه‌ی پاره‌خط‌های مختلف، $I10 = 10+\cdots+2+1$ است و در صورتی که پاره‌خط اصلی، به n قسمت تقسیم شده باشد، این تعداد nI است.

مسئله‌ی سوم، شمارش تعداد مستطیل‌ها در یک صفحه‌ی شطرنجی ۴×۴ است.



شکل (۲)

در محاسبه‌ی تعداد این مستطیل‌ها معمولاً مشکلی وجود ندارد و دانش‌آموزان تعداد مستطیل‌ها را به‌راحتی به‌دست می‌آورند (البته بعد از کمی بحث بر سر این‌که مستطیل‌ها می‌توانند همدیگر را قطع کنند و برهم، هم‌پوشانی داشته باشند یا خیر و...). اما وقتی که از آن‌ها خواسته می‌شود که با منظم کردن داده‌ها، الگوی موجود در راه‌حل این مسئله را بیابند، برخی از آن‌ها به‌صورت زیر عمل می‌کنند:

	۱	۲	۳	۴
۱	۱۶	۱۲	۸	۴
۲	۱۲	۹	۶	۳
۳	۸	۶	۴	۲
۴	۴	۳	۲	۱

یعنی در سطر i و ستون j، تعداد مستطیل‌های نوع $i \times j$ را می‌نویسند که با کمی دقت می‌بینیم که این اعداد، همان اعداد یک جدول ضرب ۴×۴ است که بعد از فاکتورگیری از مجموع همه‌ی آن‌ها، عبارتی به شکل

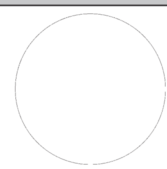
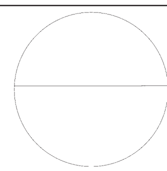
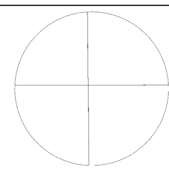
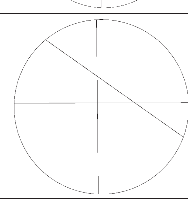
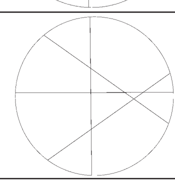
(۱+۲+۳+۴)(۱+۲+۳+۴) = ۴I۴I

به‌دست می‌آید. البته برخی هم بدون تشکیل جدول بالا به این نتیجه می‌رسند. لذا برای حالت کلی در صفحه‌ی شطرنجی $n \times n$، تعداد مستطیل‌ها (nI)(nI) است و اگر صفحه‌ی شطرنجی $m \times n$ باشد، تعداد مستطیل‌ها (mI)(nI) خواهد بود.

البته اگر به این توجه کنیم که هر مستطیل با یک پاره‌خط افقی و یک پاره‌خط عمودی شکل می‌گیرد، رابطه‌ی فوق با کمک مسئله‌ی ۲ به راحتی به‌دست می‌آمد. بنابراین به همین روش تعداد مکعب مستطیل‌های یک مکعب مشبک $n \times n \times n$، (nI)(nI)(nI) به‌دست می‌آید و یک مکعب مشبک $m \times n \times p$، (mI)(nI)(pI) تا مکعب را شامل می‌شود.

چهارمین مسئله، پیدا کردن حداکثر ناحیه‌هایی است که n وتر در یک دایره به‌وجود می‌آورند.

با دقت در اعداد جدول فوق مشاهده می‌شود که بین اعداد دو ردیف، رابطه‌ای به شکل زیر وجود دارد:

تعداد نواحی	نمودار	تعداد وترها
۱		۰
۲=۱+۱		۱
۴=۲+۲		۲
۷=۳+۴		۳
۱۱=۴+۷		۴

۱۱ = ۷ + ۴ , ۷ = ۴ + ۳ , ۴ = ۲ + ۲ , ۲ = ۱+۱

$\Rightarrow$ ۱۱ = (۴ + ۳) + (۲ + ۲)

$\Rightarrow$ ۱۱ = ۴ + ۳ + ۲ + (۱+۱)

$\Rightarrow$ ۱۱ = (۴ + ۳ + ۲ + ۱) + ۱

با توجه به رابطه‌ی بالا حدس می‌زنیم که اگر حداکثر تعداد نواحی ایجاد شده با n وتر در یک دایره را p_n در نظر بگیریم، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

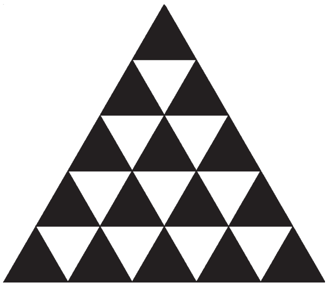
p_n = nI + ۱

اگر ثابت کنیم که $p_n = n + p_{n-1}$، رابطه‌ی ما درست خواهد بود. یعنی حداکثر نواحی در مرحله‌ی n وتر، برابر است با تعداد نواحی مرحله ی قبل به‌علاوه‌ی n. اما رابطه‌ی اخیر به این دلیل درست است که در هر مرحله، آخرین وتر را طوری رسم می‌کنیم که با هیچ کدام از وترهای قبل موازی نباشد و از محل تقاطع وترها هم عبور نکند. با این روش، نواحی قبل باقی می‌مانند و با قطع هر وتر، یک ناحیه‌ی جدید نیز به‌وجود می‌آید و در برخورد با دایره هم یک ناحیه حاصل می‌شود. پس n ناحیه‌ی جدید ایجاد می‌شود.

در این حل از مسئله‌ی بالا، نکته‌ی جالبی وجود دارد که محل خوبی برای شروع بحث «استقرای ریاضی» است. چرا که معمولاً دانش‌آموزان الگو را پیدا می‌کنند اما دلیلی برای درستی آن ندارند. لذا وقتی که نیاز به آن پیدا می‌کنند، بحث استقرای ریاضی ضروری می‌شود.

پنجمین مسئله، شمارش تعداد مثلث‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع مشبک است (شکل ۳).
تعداد مثلث از هر نوع را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

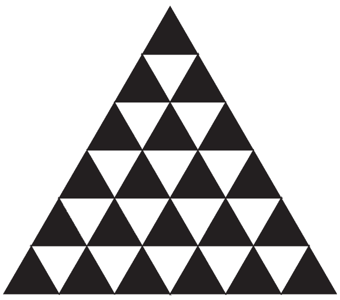
تعداد	طول ضلع
۱+۲+۳+۴+۵ = ۵I	۱ روبه‌بالا
۱+۲+۳+۴ = ۴I	۲ روبه‌بالا
۱+۲+۳ = ۳I	۳ روبه بالا
۱+۲ = ۲I	۴ روبه بالا
۱ = ۱I	۵ روبه بالا
۱+۲+۳+۴ = ۴I	۱ روبه پایین
۱+۲ = ۲I	۲ روبه پایین


شکل (۳)

لذا تعداد مثلث‌ها برابر است با

$$\sum_{n=۱}^{۵} ni+\sum_{n=۱}^{۲}(۲n)I$$

حال تعداد مثلث‌های شکل ۴ را می‌شماریم.
برای این کار، اطلاعات زیر را در جدول خلاصه می‌کنیم.


شکل (۴)

تعداد	طول ضلع
۱+۲+۳+۴+۵+۶ = ۶I	۱ روبه‌بالا
۱+۲+۳+۴+۵ = ۵I	۲ روبه‌بالا
۱+۲+۳+۴ = ۴I	۳ روبه بالا
۱+۲+۳ = ۳I	۴ روبه بالا
۱+۲ = ۲I	۵ روبه بالا
۱ = ۱I	۶ روبه بالا
۱+۲+۳+۴+۵ = ۵I	۱ روبه پایین
۱+۲+۳ = ۳I	۲ روبه پایین
۱ = ۱I	۳ روبه پایین

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از این تجربه می‌توان گرفت چیست؟ آیا چیزی غیر از لزوم بازنگری در کتب درسی و شیوه‌های تدریس است؛ خصوصاً تغییر در شیوه‌های تدریس.

لذا تعداد مثلث‌ها برابر است با

$$\sum_{n=۱}^{۶} ni+\sum_{n=۱}^{۳}(۲n-۱)I$$

ششمین مسئله‌ای که به آن می‌پردازیم، حل معادله‌ی $x+y+z=۷$ با شرط $x,y,z \geq ۰$ است.
برای حل آن، باز هم از جدول استفاده می‌کنیم.

x	۷	۶	۶	۵	۵	۵	۴	۴	۴	۴	۳	۳	۳	۳	۳	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
y	۰	۰	۱	۰	۱	۲	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۴	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
z	۰	۱	۰	۲	۱	۰	۳	۲	۱	۰	۴	۳	۲	۱	۰	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

x	0	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
y	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
z	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

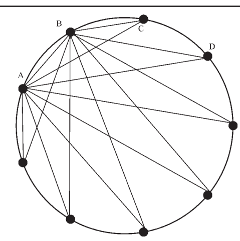
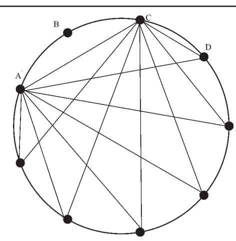
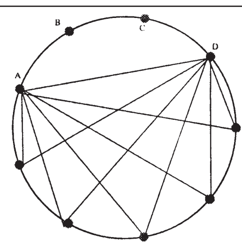
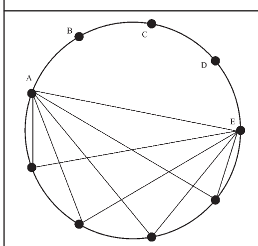
با توجه به جدول، جواب مسئله، $۸I = ۸+...+۳+۲+۱$ است و در حالت کلی نیز تعداد جواب‌های معادله‌ی $x+y+z=n$ ، $(n+۱)I$ می‌باشد. حال به معادله‌ی بالا، یک مجهول اضافه می‌کنیم. یعنی معادله‌ی $x+y+z+t=۷$ را حل می‌کنیم. برای استفاده از راه‌حل مسئله‌ی قبل، معادله را به شکل $x+y+z=۷-t$ می‌نویسیم:

t	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
تعداد جواب $x+y+z=۷-t$	۸I	۷I	۶I	۵I	۴I	۳I	۲I	۱I

لذا دوباره به یک الگوی جالب یعنی $\sum_{n=۱}^{۸} nI$ می‌رسیم.

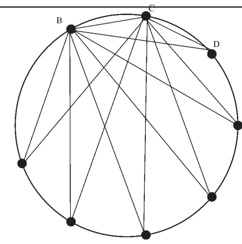
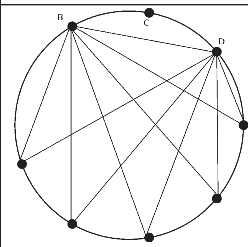
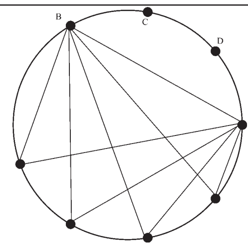
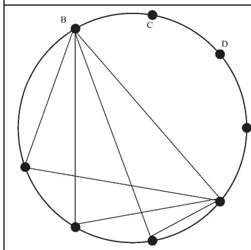
البته مسئله‌ی بالا به این شکل جالب نیست و بهتر است که از صورت‌های دیگر آن استفاده شود. مثلاً به شکل زیر که در کتاب ریاضیات گسسته نیز مطرح شده است.
«گل‌فروشی در مغازه‌ی خود فقط سه نوع گل دارد و می‌خواهد دسته گل‌هایی با ۸ شاخه گل درست کند و در انتخاب نوع گل‌ها کاملاً آزاد است. چند نوع دسته گل می‌تواند درست کند؟»
اینک مسئله به آسانی قابل تعمیم است.

هفتمین مسئله، شمارش تعداد مثلث‌هایی است که با کمک ۹ نقطه روی یک دایره می‌توان رسم کرد. بیش‌تر دانش‌آموزان به روش زیر به شمارش می‌پردازند:
نقطه‌ی A را ثابت می‌گیریم و همه‌ی مثلث‌هایی را که از این نقطه می‌گذرند می‌شماریم.

نوع	مثلث‌هایی که از AB می‌گذرند	مثلث‌هایی که از AC می‌گذرند	مثلث‌هایی که از AD می‌گذرند	مثلث‌هایی که از AE می‌گذرند
نمودار				
تعداد	۷	۶	۵	۴

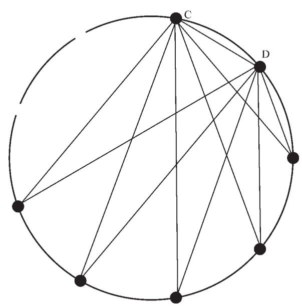
شکل (۵)

اگر به همین روش ادامه دهیم، تعداد آن‌ها ۷I به‌دست می‌آید. در مرحله‌ی بعد، A را حذف کرده و روش بالا را با نقطه‌ی B تکرار می‌کنیم:

نوع	مثلث‌هایی که از BC می‌گذرند	مثلث‌هایی که از BD می‌گذرند	مثلث‌هایی که از BE می‌گذرند	مثلث‌هایی که از BF می‌گذرند
نمودار				
تعداد	۶	۵	۴	۳

شکل (۶)

با توجه به جدول، تعداد مثلث‌ها ۶I به‌دست می‌آید. حال با نقطه‌ی C شمارش را تکرار می‌کنیم:



شکل (۷)

با تکرار شمارش بالا، تعداد آن‌ها ۵I به‌دست می‌آید و در نتیجه کلاً تعداد مثلث‌های حاصل، ۸I + ۷I + ۶I + ۵I + ۴I + ۳I + ۲I + ۱I است. شاید برخی روش بالا را نپسندند؛ ولی باید توجه کرد که این روش توسط دانش‌آموزانی ارائه شده است که هنوز با ترکیبات آشنا نیستند.

نتیجه‌گیری

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از این تجربه می‌توان گرفت چیست؟ آیا چیزی غیر از لزوم بازنگری در کتب درسی و شیوه‌های تدریس است؛ خصوصاً تغییر در شیوه‌های تدریس. چرا که معمولاً مشاهده می‌شود که کتاب‌ها تغییر می‌کنند ولی شیوه‌های تدریس در مدارس و کلاس‌ها، تغییر نمی‌کند. البته دلایل مختلفی بر این امر وارد است؛ از جمله شلوغی کلاس‌ها، ساعت زیاد تدریس معلمان و خستگی ناشی از آن‌که برای معلم جایی برای برنامه‌ریزی و... باقی نمی‌گذارد، بررسی این عوامل، از حیطه‌ی کار ما خارج است.

به هر حال ماده‌ی اولیه این مقاله، که همان راه‌حل‌های زیبای دانش‌آموزان بود حاصل کار دانش‌آموزان سال اول دبیرستان است که این امکان را پیدا کرده‌اند که در حل مسئله تقلید نکنند و آزادانه فکر کنند. لازم به ذکر است که این تجربه، در کلاس‌های مختلف در سال‌های مختلف، در مدارس خاص و معمولی اجرا شده و نتیجه داده است.

منبع: **آموزش هنر حل مسئله**. آرش رستگار، جواد حاجی بابایی. کتب درسی، ۱۳۷۹.

روایت معلمان

تدریس شهودی

واثر آن بر یادگیری

علیرضا کردیانی/ معلم مدارس ابتدایی باخزر

به‌دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

چهاردهم نوروز بود و همان‌طور که عادت بسیاری از بچه‌های ایرانی است، غرق در زیبایی‌های بهار گشته و تعداد زیادی از آن‌ها به مدرسه نیامده بودند. البته قبلاً پیش‌بینی این موضوع را کرده و کارهایم را انجام داده بودم و از جهت عقب ماندن کلاس یا باقی ماندن تمرین‌ها، نگرانی نداشتم.

چهار نفر از دانش‌آموزانم به مدرسه آمده بودند. به سفارش مدیر به کلاس رفتم تا سر آن‌ها را گرم کنم. چند شکلات روی میز مدیر بود که با اجازه‌ی وی آن‌ها را با خود به کلاس بردم تا بچه‌ها دهان خود را شیرین کنند و نیز هدیه‌ای کوچک باشد به پاداش انضباط آن‌ها.

با بچه‌ها خوش و بشی کردم و پس از تبریک سال نو، شکلات‌ها را به آن‌ها تعارُف کردم. با خوشحالی فراوان به باز کردن و خوردن آن‌ها مشغول شدند. بقیه را هم روی میز گذاشتم تا در آخرِ ساعت به آن‌ها بدهم تا زنگ تفریح را مشغول باشند. مشغول صحبت شدیم و هر یک از آن‌ها از موضوع‌های جالبی که در تعطیلات برایش پیش آمده بود و یا بازی‌ها و مشغولیت‌هایی که هر یک داشتند، تعریف کردند. اواخر زنگ بود که پرسیدم: «راستی بچه‌ها، به پیک‌های نوروزی هم سر زدید یا آن‌ها را به گوشه‌ای انداختید و همه‌ی تعطیلات را مشغول بازی شدید؟!» بچه‌ها خندیدند و اطمینان دادند که بیش‌تر قسمت‌های پیک را حل کرده‌اند. در میان حرف‌های بقیه، ناگهان یکی از بچه‌ها به میان صحبت دیگران دوید و با صدای بلند گفت: «آقا معلم اجازه! ما همه‌رو حل کردیم جز همون تقسیم‌ها. من تقسیم‌ها رو یاد ندارم و از تقسیم بدم میاد.» بقیه‌ی بچه‌ها هم مثل این‌که با او هم‌درد بودند، گفتند: «آقا تقسیم سخته، ما تقسیم‌ها رو بلد نیستیم و نمی‌فهمیم.» گفتم: «چه‌طور؟ شماها که جدول ضرب‌و خوب بلدید. هر کس جدول ضرب‌و بلد باشه، تقسیم براش راحت میشه.» اما بچه‌ها معتقد بودند که تقسیم سخت است و نمی‌شود آن را به راحتی یاد گرفت. بلند شدم و تقسیم ۴ | ۷ را پای تخته نوشتم و گفتم: «این چه‌جوری حل میشه؟» توقع داشتم بچه‌ها بتوانند این تقسیم ساده را به‌راحتی حل کنند و ضعف آن‌ها را ناشی از کمبود اعتماد به نفس آن‌ها می‌دانستم. اما وقتی دیدم برای حل آن، احتیاج به کمک و هم‌فکری و راهنمایی کامل من دارند، متوجه شدم که مشکل آن‌ها، جدی است. آن را با ارائه‌ی توضیح حل کردم و تقسیم ۳ | ۱۱ را نوشتم. اما باز هم بچه‌ها آن مهارتی که

اگرچه می‌توان عکس ۱۸ شکلات را در کتاب چاپ کرد و از دانش‌آموزان خواست که آن را بین ۵ نفر قسمت کنند، اما این کار با نشان دادن ۱۸ شکلات واقعی و تقسیم واقعی آن بینِ دانش‌آموزان تفاوت زیادی دارد

توقع داشتم، به‌دست نیاوردند. ناگهان فکری به خاطرم رسید. شکلات‌های روی میز را جلوی بچه‌ها شمردم و دیدم که ۱۵ تا است. گفتم: «هرکس بیاد و سهم خودشو برداره.»

بچه‌ها بلند شدند و هر یک ۳ شکلات برداشتند و ۳ تا اضافی ماند. گفتم: «کاشکی بیش‌تر بود تا همه‌ی شکلات‌ها تقسیم می‌شدند. چند تا کم داریم؟» همگی گفتند: «فقط یکی آقا» گفتم: «اونجوری به هر نفر چند تا می‌رسید؟» گفتند: «۴ تا آقا.» گفتم: «شکلات‌ها رو روی میز من بریزید.» آن‌ها بی‌درنگ این کار را کردند و من ۷ تا از شکلات‌ها را برداشتم و بقیه را جلوی آن‌ها شمردم و گفتم: «حالا هرکس بیاد و سهم خودشو برداره.» هرکس آمد و ۲ تا شکلات برداشت و سر جای خودش نشست. پرسیدم: «بچه‌ها اگر باز هم شکلات رو روی میز بریزید و من یکی بردارم چه‌جوری میشه؟» بچه‌ها جواد دادند: «آن‌وقت به هرکس یکی میرسه و باز ۳ تا اضافی می‌مونه.» گفتم: «پس می‌بینیم که کار سختی نیست که چند شکلات را بین چند نفر تقسیم کنیم و تعداد شکلات‌هایی را که اضافه می‌ماند تشخیص بدهیم.» خندیدند و گفتند: «نه آقا!» گفتم: «به‌نظر شما آیا ۷ شکلات را بین ۴ نفر تقسیم کردن همان تقسیم ۷ | ۴ نیست که به هر نفر یک شکلات رسید و ۳ تا باقی ماند؟» برقی از چشمان بچه‌ها پرید و گفتند: «بله آقا!» گفتم: «اگر ۱۱ شکلات را بین ۳ نفر تقسیم کنیم چی؟ سهم هر یک چند تا میشه؟» بچه‌ها با هیجان و علاقه گفتند: «۳ تا آقا و ۲ هم باقی می‌مونه.» گفتم: «و ۱۸ شکلات بین ۵ نفر چی؟» و فوراً پای تخته نوشتم: ۱۸ | ۵. اما بچه‌ها خیلی زودتر از من، قبل از این‌که آن تقسیم را بنویسم، پاسخ تقسیم و باقی مانده‌ی آن را هم گفته بودند. آن‌گاه بود که دانستم اگرچه می‌توان عکس ۱۸ شکلات را در کتاب چاپ کرد و از دانش‌آموزان خواست که آن را بین ۵ نفر قسمت کنند، اما این کار با نشان دادن ۱۸ شکلات واقعی و تقسیم واقعی آن بینِ دانش‌آموزان تفاوت زیادی دارد.

دو سه روز بعد وقتی همه‌ی دانش‌آموزان که ۱۷ نفر بودند به کلاس آمدند، اگرچه تقسیم را با همان روش و با دیدن سنگریزه‌هایی که آن‌ها را به طرق مختلف بین دانش‌آموزان تقسیم می‌کردیم یاد گرفتند، اما همه می‌دانیم که طعم شیرین شکلات‌های آقای مدیر را فقط همان ۴ نفر دانش‌آموز منضبط چشیدند!

استفاده از ICT در آموزش ریاضیات

سیده زهرا ابوالحسنی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده

با عنایت به توجه روزافزون استفاده از ICT در آموزش مدرسه‌ای و به خصوص درس ریاضی، تحقیقات انجام شده در این حوزه مورد مطالعه قرار گرفت تا مزیت‌ها و محدودیت‌های استفاده از ICT مشخص شود. پس از آن، تجربه‌ی تلخیص شده گزارش آفستد که در سال ۲۰۰۴ در انگلستان تدوین شده بود و در آن، به معرفی ابزارهای ICT پرداخته شده بود، ارایه می‌شود تا علاقه‌مندان به استفاده از ICT در کلاس درس ریاضی، با تنوع ابزارهای آن آشنا شوند و بتوانند در صورت لزوم، از آن‌ها استفاده کنند.

مقدمه

دانش و دانایی از دیرباز، مورد جستجوی اقوام و ملل بوده است. اما امروزه در نخستین دهه از هزاره‌ی سوم میلادی، دانش، عاملی راهبردی برای موفقیت فرد، سازمان و جامعه به شمار می‌رود و تنها منبعی است که ارزش آن در کاربرد آن است (شیخ‌زاده، مهرمحمدی، ۱۳۸۳). از این رو، ساختن دانش و تولید و مصرف آن، محور توسعه‌ی انسانی، توسعه‌ی پایدار و جامعه‌ی دانش ـ محور قرار گرفته است.

فناوری اطلاعات در جهان امروز، چشم‌اندازهایی را برای جهانیان به ارمغان آورده است که بر تمام ابعاد زندگی سیاسی، نظامی، اقتصادی، اجتماعی و آموزشی انسان قرن بیست و یکم تأثیر گذاشته است، به گونه‌ای که بیش‌تر یادگیرندگان را به سمت رایانه‌ها و آموزش کار با آن‌ها سوق داده است. رایانه‌ها با فراهم کردن فرصت لازم برای تمرین و کسب دانش توسط دانش‌آموزان و پرورش استعدادهای آن‌ها، به آموزش مدرسه‌ای یاری رسانده و آن را دچار تحول کرده‌اند. در واقع، همان‌طور که فتحیان (۱۳۸۳) اشاره کرده، پیشرفت فناوری شبکه و بسترهای مخابراتی نظیر انتقال متن، صوت و تصویر، نوع جدیدی از آموزش به نام «آموزش الکترونیکی» را پدید آورده است.

آموزش الکترونیکی، آموزش مبتنی بر فناوری اطلاعات است که گستره‌ی وسیعی از کاربردها، از جمله آموزش مبتنی بر وب، آموزش مبتنی بر کامپیوتر و کلاس‌های مجازی را دربرمی‌گیرد (روزنبرگ[۱]، ۲۰۰۰).

فولر[۲] (۲۰۰۳) توضیح می‌دهد که چگونه محیط‌های آموزشی مجازی، طیف وسیعی از تسهیلات لازم را برای ارائه‌ی پیمانه[۳]های روی خط[۴] ایجاد کرده‌اند تا تکمیل کننده یا جایگزین مدل‌های سنتی شوند. از نظر وی، یک محیط آموزشی مجازی عموماً به طراحی برنامه‌ی آموزشی می‌پردازد و پیمانه‌ها را به منابع آموزشی ارتباط می‌دهد. این کار باعث آسان شدن ارتباطات الکترونیکی بین دانش‌آموزان و بین دانش‌آموزان با معلمان می‌شود، علاوه بر این‌که حضور و عملکرد دانش‌آموزان را طی یک دوره، پی‌گیری و بررسی می‌کند، نقش یک حامی آموزشی را برای آنان ایفا می‌نماید و در نهایت، ارزیابی «روی خط» را تسهیل می‌کند. به همین دلیل، آموزش از طریق رایانه که لازمه‌ی هر نوع آموزش الکترونیکی است، به عنوان یکی از مباحث اصلی برنامه‌ریزی درسی در بسیاری از کشورهای جهان شناخته شده است و سرمایه‌گذاری‌های فراوانی در زمینه‌ی ابعاد گوناگون طراحی، اجرا و ارزیابی آن انجام شده است. (دبرا[۵]، ۲۰۰۱)

به گفته‌ی ریوز[۶] (۱۹۹۴) از جمله ویژگی‌های برتر آموزش به کمک رایانه، امکان پردازش اطلاعات، سرعت در پاسخ‌گویی، تنوع‌بخشی، یادگیری گروهی و ایجاد زمینه‌های تفکر را می‌توان نام برد. در سال‌های اخیر، آموزش به کمک رایانه از طرف ساخت و سازگرایان نیز مورد توجه واقع شده است، زیرا اساس چنین آموزشی، ایجاد فرصت‌های فراوان و دسترسی زیاد برای یادگیران در تولید و ساخت دانش است، به طوری که یادگیرندگان بتوانند در یک محیط فردی و گروهی، به آفرینش اندیشه‌های جدید بپردازند. در رویکرد ساخت و سازگرایانه، از رایانه به عنوان ابزار گردآوری و سازمان‌دهی اطلاعات استفاده می‌شود تا آن‌چه را که یادگیرندگان آموخته‌اند، به نمایش بگذارد. در این بخش، یادگیرنده در حکم جستجوگر فعال، اطلاعات خود را از طریق فرایند گردآوری اطلاعات جدید، اصلاح و به‌روز می‌کند (شیخ‌زاده، مهرمحمدی، ۱۳۸۳).

در هر صورت، امروزه فناوری اطلاعات به مدد فناوری ارتباطات فراگیر شده و جهان را دگرگون ساخته است. مهم‌ترین تغییراتی که این فناوری در جهان به وجود آورده، به وسیله‌ی مک‌لوهان[۷] (۱۹۶۴) در یک عبارت خلاصه شده است و آن «تبدیل جهان به یک دهکده‌ی جهانی» است، بدین معنا که مردم نقاط مختلف در کشورهای سراسر کره زمین، به مثابه ساکنان یک دهکده، امکان برقراری ارتباط با یکدیگر و اطلاع از اخبار و رویدادهای جهانی را دارند. به گفته وی، نزدیکی روزافزون شهروندان دهکده‌ی جهانی به یکدیگر، تبادل فرهنگ‌ها، تعامل اندیشه‌ها، ارتقای بینش سیاسی و اجتماعی مردم و دسترسی سریع به اطلاعات تولیدی در جهان، همگی از دستاوردهای با ارزش فناوری ارتباطات‌اند، از سوی دیگر، فناوری اطلاعات ابزار قدرتمندی است که در کمترین زمان ممکن، می‌تواند بین مردم جهان ارتباط برقرار سازد و این ابزار ارتباطی قدرتمند، با اطلاعات سروکار دارد.

به همین جهت، کاربرد فناوری‌های جدید اطلاعاتی و تغییرات سریع آن، موجب بروز تحولات بسیار در کلیه جنبه‌های یادگیری و آموزش شده است. شبکه‌های ارتباطی و اطلاعاتی به ویژه اینترنت، چهره آموزش سنتی و چگونگی تعامل بین معلم و دانش‌آموز را در تمام سطوح ـ از پیش‌دبستانی تا دانشگاهی ـ دگرگون کرده‌اند. پیشرفت‌های پرشتاب علمی و تکنولوژیک در دهه‌های آخر قرن بیستم، جهان را وارد عرصه جدیدی کرده است که تقریباً همه‌ی امور زندگی بشری را تحت تأثیر خود قرار داده است. پیشرفت‌های چشم‌گیر در عرصه‌ی ارتباطات، با راه یافتن ماهواره‌ها به منازل و ترکیب رایانه‌ها با مودم و خط تلفن، انقلابی را در جهان رقم زده است که دانشمندان از آن به عنوان «انقلاب دیجیتال» یا «انفجار اطلاعات» نام می‌برند. این انقلاب با ایجاد شبکه‌های جهانی اطلاعات و ارتباطات و شاهراه جهانی اینترنت تکامل یافته و هم اکنون شاهد تأثیرات شگرف آن در عرصه‌های علمی، سیاسی، اجتماعی، اقتصادی و فرهنگی زندگی بشری در سطوح جهانی هستیم (اکبری، ۱۳۸۴)[۸]. بنابراین، در شرایط موجود، ایجاد بسترهای مناسب برای استفاده از فناوری اطلاعات و ارتباطات در مدارس به‌طور عام و در برنامه درسی ریاضی و تدریس و یادگیری آن به طور خاص، یک ضرورت محسوب می‌شود.

در حال حاضر، نظام‌های آموزشی، مسئولیت خطیری برای به کارگیری، راهنمایی و هدایت تحولات فناوری اطلاعات از جمله تولید، توزیع و تبادل اطلاعات، برعهده دارند. هم‌چنین، همه‌ی عوامل آموزش‌وپرورش در تلاش برای فهمیدن و سازگارکردن ICT در نظام‌های آموزشی و کاربرد صریح و صحیح آن‌ها هستند. جامعه‌ی امروزی به شهروندانی نیاز دارد که بتوانند با بهره‌گیری مناسب از فناوری‌های اطلاعات و ارتباطات و با تفکر انتقادی و اتخاذ شیوه‌های راهبردی، به حل و فصل مسائل واقعی خود و جامعه‌ی خود بپردازند (شریفی، شهرزاد و رقابی، فرنوش، ۱۳۸۳).

بدین سبب، تحقیقات متعددی در ایران و جهان انجام شده تا به ایجاد چنین بسترهایی کمک نمایند و هر یک از این تحقیقات، به جنبه‌ی خاصی از تلفیق ICT با موضوعات مدرسه‌ای از جمله ریاضی پرداخته‌اند. از آن جمله، تحلیل این یافته‌های تحقیقی، تلفیق ICT را با درس ریاضی مدرسه‌ای تأکید می‌کنند و توصیه‌هایی برای چگونگی انجام این کار دارند.

در گزارش آفستد[۹] «ریاضیات در مدارس دبیرستان» (۲۰۰۴)، تحقیقاتی را که در سال‌های ۲۰۰۲ـ۲۰۰۳ در مدارس انگلستان انجام داده است، را به صورت طرحی برای چگونگی استفاده از ICT ارایه نمود که با وجود گذشت یک دهه از آن، هنوز بخش‌های عمده‌ای از این طرح، می‌تواند مورد استفاده معنادار در ایران قرار نگرفته است. در نتیجه، با عنایت به یافته‌های تحقیقی که بر تلفیق ICT با درس ریاضی در هزاره‌ی جدید تأکید دارند، ترجمه‌ی تلخیص شده این گزارش به معلمان ریاضی ایران تقدیم می‌گردد تا در صورت لزوم، بتوانند برای ارتقای یاددهی ـ یادگیری ریاضی در کلاس‌های درس خود،

توصیه‌های آن را به کار گیرند.

چگونگی استفاده‌ی مؤثر از ICT در یاددهی و یادگیری ریاضی

ICT، منبع قدرتمند دیگری برای معلمان ریاضی است که برای والدین ریاضی دانش‌آموزان در داخل و خارج از کلاس درس، کاربرد دارد. در دنیای جدید، والدین، دانش‌آموزان و معلمان انتظار دارند که بتوان در آموزش تمامی دروس، به بهترین نوع از ICT استفاده کرد و انتخاب و به‌کارگیری منابع ICT به گونه‌ای که منجر به یادگیری بهتر دانش‌آموزان شود، نیازمند تحقیقات جدی است.

البته پیشرفت‌هایی که در ICT انجام گرفته‌اند بسیار سریع بوده‌اند و هزینه‌های عمومی به میزان قابل توجهی کاهش داشته‌اند. به این دلیل، اکنون در بسیاری از منازل، منابع فراوانی از ICT موجود می‌باشند و در اختیار بسیاری از معلمان ریاضی در مدارس و دانشگاه‌ها قرار دارند، اما با توجه به این که اکثر ابزارهای ICT برای استفاده‌های شخصی ایجاد شده‌اند، به‌کارگیری این ابزارها در محیطهای آموزشی، نیازمند دقت فراوان است.

۱) روش‌های به کارگیری ICT در آموزش

در سال‌های اخیر، آموزش ریاضی شاهد نوآوری‌هایی در رویکردهای آموزشی در کلاس درس بوده است. بنابراین لازم است بدانیم که کدام نوع از منابع ICT برای دربرگیری موضوع موردنظر، در دسترس هستند. در بسیاری موارد، لازم است بخواهید دانش‌آموزان، خود به منابع ICT دسترسی پیدا کنند. این کار باید از طریق دسترسی‌های فردی یا کار گروهی یا دو نفره انجام گیرد. یافتن راه‌حل برای در دسترس بودن منابع ICT در ریاضیات در کلاس‌های درس و در دانشکده‌ها، موضوعی است که باید نسبت به آن، توجه ویژه شود.

کار کردن همه‌ی کلاس با ICT

تمام کلاس از راه‌های زیر می‌تواند از ICT به صورت نمایش تصویری بهره‌مند شوند:

- یک کامپیوتر معموی یا Laptop؛
- تکنولوژی دستی مانند ماشین حساب مخصوص نمایش عمومی برای معلمان؛
- سایر ابزار ICT، مانند دوربین دیجیتال، دستگاه DVD یا دوربین فیلمبرداری؛
- پروژکتور اطلاعات ـ متحرک یا ثابت و اغلب بی‌سیم؛
- پروژکتور (Over Head Projector) با نمایشگر (LCD)؛
- دستگاه تعاملی برای تبدیل سیگنال‌های ورودی به خروجی استاندارد مانند ویدئو پال؛
- دوربین نمایش مدارک[۱۰]؛
- تخته سفید معمولی برای استفاده با ماژیک‌های تخته وایت‌برد؛
- یک یا چند صفحه بزرگ مانند مانیتورهای نمایش، دستگاه‌های تلویزیون، نمایشگرهای پلاسما و غیره.

در سال‌های اخیر، آموزش به کمک رایانه از طرف ساخت و سازگرایان نیز مورد توجه واقع شده است، زیرا اساس چنین آموزشی، ایجاد فرصت‌های فراوان و دسترسی زیاد برای یادگیران در تولید و ساخت دانش است، به طوری که یادگیرندگان بتوانند در یک محیط فردی و گروهی، به آفرینش اندیشه‌های جدید بپردازند

استفاده‌های شخصی یا گروهی از ICT

در تعداد کمی از مدارس، کلاس‌های درس ریاضی وجود دارند که با کامپیوترهای شبکه‌ای مجهز شده‌اند و پایه‌ی مناسبی از برنامه‌های نرم‌افزاری را فراهم می‌کنند. در چنین شرایطی، طبیعی است که تعداد کامپیوترها در کلاس‌های درس تعدیل شود. یعنی هر کلاس می‌تواند دسترسی لازم به کامپیوتر را در زمان‌های مناسب داشته باشد.

به صورت ایده‌آل، می‌توان مراحل زیر را فراهم کرد:

- نمایشگری برای تمام کلاس که توسط تمام دانش‌آموزان قابل رؤیت باشد؛
- افزایش تعامل شفاهی و دیداری بین معلم و دانش‌آموزان چه در شرایط یک نفره و چه گروهی؛
- استفاده از دامنه‌ای از نرم‌افزارها که برای یادگیری ریاضی مناسب‌ترند؛

با وجود دسترسی به هر نوع از این ابزارها، لازم است که به دقت، برای فعالیت‌های گروهی برنامه‌ریزی شده و به سؤال‌های زیر پاسخ داده شوند:

- چگونه فعالیت‌ها و کارهای دانش‌آموزان برای دسترسی‌های

بعدی ذخیره خواهد شد؟

● آیا دسترسی به نسخه‌های مکتوب فعالیت‌ها ضروری است یا خیر؟

● آیا امکان نمایش کارهای فردی هر دانش‌آموز به تمام کلاس وجود دارد یا خیر؟

کار گروهی با ICT

امکان دارد که تنها چند کامپیوتر در کلاس‌های درس ریاضی داشته باشیم که می‌توان برای کار در گروه‌های کوچک مثلاً ۳ تا ۴ نفره به کار برد. اگر تعداد این کامپیوترها برای تمام کلاس کافی نباشد، می‌توان از سیستم گروهی گردشی استفاده کرد که وقتی تعدادی از دانش‌آموزان از کامپیوتر استفاده می‌کنند، گروه‌های دیگر به فعالیت دیگری مشغول بوده و در جلسه‌ی بعد یا درس بعد، از کامپیوتر استفاده کنند.

در هر صورت، امروزه فناوری اطلاعات به مدد فناوری ارتباطات فراگیر شده و جهان را دگرگون ساخته است. مهم‌ترین تغییراتی که این فناوری در جهان به وجود آورده، به وسیله‌ی مک‌لوهان (۱۹۶۴) در یک عبارت خلاصه شده است و آن «تبدیل جهان به یک دهکده‌ی جهانی» است، بدین معنا که مردم نقاط مختلف در کشورهای سراسر کره زمین، به مثابه ساکنان یک دهکده، امکان برقراری ارتباط با یکدیگر و اطلاع از اخبار و رویدادهای جهانی را دارند

در هر صورت، نوع فعالیتی که با کامپیوتر انجام می‌شود نیاز به برنامه‌ریزی دقیق دارد و به صورت ایده‌آل، مستلزم کار گروهی دانش‌آموزان است تا فعالیت بعدی با کامپیوتر را برنامه‌ریزی نمایند. به عنوان مثال، می‌توان فعالیتی به صورت شرکت در یک بازی ماجراجویانه، حل مسئله یا مدل‌سازی کامپیوتری طراحی کرد.

۲) تغییر در رویکردهای آموزشی

استفاده از ICT در درس‌های ریاضی به صورتی که شیوه‌ی تدریس را زیر سؤال نبرد، امکان‌پذیر است، زیرا هدف ICT، محدودکردن دانش‌آموزان نیست و در عوض، هدف آن، افزایش دسترسی دانش‌آموزان ما به منابعی است یادگیری آن‌ها را تسهیل و تعمیق کند.

در سال ۱۹۹۵ شورای ملی برای تکنولوژی آموزشی، شش موقعیت زیر را فهرست کرد که از طریق آن‌ها، ICT می‌تواند فرصت‌هایی را برای یادگیری ریاضی دانش‌آموزان ایجاد کند:

❖ **یادگیری از طریق بازخورد:** کامپیوتر اغلب بازخورد سریع و قابل اعتمادی می‌دهد که بی‌طرف و غیرجانبدارانه است. این مطلب می‌تواند دانش‌آموزان را به حدس زدن و آزمایش ایده‌های خود تشویق کند.

❖ **مشاهده‌ی الگوها:** سرعت کامپیوترها و ماشین‌حساب‌ها دانش‌آموزان را قادر به تولیدمثال‌های زیادی در زمان حل یا کشف مسئله‌های ریاضی می‌کند که این کار، مستلزم مشاهده‌ی الگوها و توجیه تعمیم‌هاست.

❖ **دیدن ارتباطات:** کامپیوتر کمک می‌کند تا فرمول‌ها، نمودارها، جدول‌ها و عکس‌ها به هم مرتبط شوند تغییر یک متغیر و مشاهده‌ی تغییرات در سایر متغیرها، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا رابطه‌ی بین آن‌ها را بهتر بفهمند.

❖ **کار با تصاویر پویا:** دانش‌آموزان می‌توانند از کامپیوتر برای تهیه‌ی نمودارهای پویا استفاده کنند. این مطلب به آن‌ها کمک می‌کند تا هندسه را توسط اشکال ذهنی خود مجسم نمایند.

❖ **توصیف داده‌ها:** کامپیوتر به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا با داده‌های واقعی کار کنند و این داده‌ها، می‌توانند به راه‌های متفاوت ظاهر شوند. داده‌های واقعی کمک می‌کنند تا دانش‌آموزان، تفسیر و تجزیه و تحلیل داده‌ها را یاد بگیرند.

❖ **آموزش کامپیوتری:** وقتی که دانش‌آموزان با کامپیوتر، یک الگوریتم را برای رسیدن به یک نتیجه طراحی می‌کنند، انجام دستورات ریاضی را به صورت شفاف و مرتب یاد می‌گیرند.

۳) تأثیر بر برنامه‌ی درسی

بررسی تاریخی نشان می‌دهد که زمان طولانی لازم است تا برنامه‌های درسی ریاضی، نسبت به تغییرات تکنولوژی مانند پیشرفت ماشین حساب‌های الکترونیکی واکنش نشان دهند و از آن‌ها استفاده کنند. اما در هر صورت، اکنون ICT در تمام شاخه‌های صنعتی، تجاری و تحقیقاتی ریاضی و آمار، به عنوان ابزار حل مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اکثر ماشین حساب‌های گرافیکی می‌توانند عملکردهای ریاضیاتی استاندارد مانند تغییر ماتریس‌ها یا ضرب‌های پیچیده

را انجام دهند. به طور مثال، با استفاده از این ماشین حساب‌ها، می‌توان بر شناخت این که چه ماتریس‌ها یا توابع مختلفی وجود دارند و به چه منظوری به کار می‌روند بدون نیاز به انجام کارهای معمولی و طولانی، اهتمام ورزید. با استفاده‌ی گسترده از ماتریس‌ها و اعداد مختلط در مهندسی، علوم و سایر شاخه‌های ریاضی، استفاده از ICT برای کمک به درک بهتر علوم توسط دانش‌آموزان، توصیه می‌شود.

۴) استفاده از کامپیوتر به منظور ایجاد فعالیت‌های ارزشمند در آموزش

سه واژه وجود دارند که با مفهوم ارزشمند رابطه نزدیکی دارند، در حالی که سایر واژه‌ها به صورت کامل، نمی‌توانند مفهوم ارزشمند را بیان کنند.

● **شتاب**[۱۱]؛ دانش‌آموزان را به حوزه‌هایی از برنامه‌ی درسی می‌برد که معمولاً دانش‌آموزان سال‌های بالاتر، بر آن تسلط دارند.

● **گسترش**[۱۲]؛ شامل معرفی و کارکردن با موضوع‌هایی فراتر از سرفصل‌های تعیین شده و مطالبی از ریاضی است که معمولاً در برنامه‌های درسی عادی، مطرح نمی‌شود. ریاضیات، مسائلی را به دانش‌آموزان ارایه می‌دهد که برای حل آن‌ها، نیاز است دانش‌آموزان از مهارت‌های ریاضی خود، در زمینه‌های غیررسمی استفاده کنند.

● **غنی‌سازی**[۱۳]؛ توسعه‌ی درک دانش‌آموزان از ایده‌های ریاضی است که آن‌ها قبلاً در مسائل و موقعیت‌های دیگر، آن‌ها را به کار برده‌اند. هدف از غنی‌سازی، افزایش سطوح حل مسئله و فون ارتباطی می‌باشد و به این ترتیب، استفاده و کاربرد ریاضی افزایش می‌یابد. هدف این کار، پرورش کسانی است که بتوانند ریاضی را در مسائل روزمره‌ی زندگی خود به‌کار گیرند. غنی‌سازی هم‌چنین شامل رویکردهای آموزشی می‌باشد که بحث‌ها و ارتباطهای ریاضی را گسترش می‌دهد.

۵) نتایج مدیریت

به ناچار، معلمان در نظام آموزشی با مدیریت مدرسه در ارتباط خواهند بود. در ضمن، آن‌ها باید در کلاس درس مدیریت یادگیری دانش‌آموزان را به عهده گیرند.

هم‌چنین، مدیران مدرسه فعالیت‌های معلمان را مورد ارزیابی قرار می‌دهند و نیازهای آموزشی را برآورده می‌سازند. مدیران مدرسه‌ها دارای جایگاه بنیادینی هستند که می‌توان در پیشرفت معلمان و دانش‌آموزان و چگونگی استفاده‌ی کارآمد از ICT، نقش مهمی ایفا کند.

۶) ارزیابی تأثیر استفاده از ICT

ارزیابی در تمامی سطوح اتفاق می‌افتد مثلاً در استفاده از ICT در بخش‌هایی از درس‌ها، لازم است. چگونگی استفاده از ابزارهای ICT مورد ارزیابی قرار گیرند و نوع تأثیر این ابزار در یادگیری ریاضی دانش‌آموزان، مورد مطالعه قرار گیرد.

ابزار ICT و ارتباطات ویژه‌ی آن‌ها با آموزش ریاضی

به گزارش آفستد (۲۰۰۴)، طی سال ۱۹۹۰، بکتا[۱۴] سمینارها و کنفرانس‌هایی را برای بررسی پایه‌های نرم‌افزاری مرتبط با موضوعات مختلف درسی در برنامه آموزشی مدارس آموزش

در شرایط موجود، ایجاد بسترهای مناسب برای استفاده از فناوری اطلاعات و ارتباطات در مدارس به طور عام و در برنامه درسی ریاضی و تدریس و یادگیری آن به طور خاص، یک ضرورت محسوب می‌شود

متوسطه برگزار کرد. بکتا (۱۹۹۹) توضیح داد که ICT از انتخاب گسترده‌ی وسیعی برخوردار است که با وجودی که تعداد آن‌ها زیاد نیست، اما در تمام برنامه‌های درسی ریاضیات مدرسه‌ای به خصوص در پایه‌های متوسطه، کاربرد وسیعی دارند. بکتا به معلمان یادآور شد که «به این ترتیب، زمانی که صرف آموزش می‌کنید تا ابزاری را به کار ببرد، به سادگی از طریق ذخیره‌ی زمان یادگیری، جبران می‌شود.»

مهم‌ترین ابزارهایی را که در کلاس‌های درس ریاضی در انگلستان مورد استفاده قرار می‌گیرند، نمایش گرهایی برای نشان دادن به همه‌ی کلاس، ماشین حساب‌های گرافیکی و رویدادنگاری اطلاعات، برنامه‌های کوچک، زبان‌های برنامه‌نویسی، نرم‌افزارهای چندمنظوره، نرم‌افزار آموزش ریاضی می‌باشند (بکتا، ۱۹۹۹).

نتیجه‌گیری

با جمع‌بندی این یافته‌ها، مزایا و محدودیت‌های استفاده از ICT را می‌توان به شرح زیر بیان کرد:

مزایای استفاده از ICT شامل :

✓ ایجاد انگیزه و علاقه در دانش‌آموزان برای یادگیری ؛
✓ ایجاد رغبت معلمان در تدریس منابع درسی ؛
✓ امکان یادگیری، برای هر ردی در هر زمان و هر مکانی ؛
✓ در دسترس بودن منابع اطلاعاتی در تمام بخش‌های ریاضی و امکان برقراری ارتباط لازم بین ریاضی و سایر موضوع‌ها در حداقل زمان ؛
✓ جایگزینی پداگوژی جدید و هوشمند به جای پداگوژی سنتی ؛
✓ تعامل دانش‌آموزان با یکدیگر با استفاده از تشکیل گروه‌های کاری اینترنتی در وبلاگ ؛
✓ برطرف شدن مشکلاتی نظیر کمبود استادان مجرب و فضای آموزشی مناسب ؛
✓ ذخیره شدن مطالب درسی در حافظه کامپیوتر برای استفاده‌های بعدی ؛
✓ تنوع روش‌های یادگیری در زمینه استفاده از ICT، توسط دانش‌آموزان ؛
✓ صرفه‌جویی در وقت و هزینه به دلیل استفاده از کتاب‌خانه‌های دیجیتالی و جست‌وجو در سایت‌های مختلف در حین مطالعه ؛
✓ یاددهی با استفاده از قابلیت افزودن تصاویر گرافیکی، صوت یا تصویر به‌طور عینی ؛
✓ تبادل اطلاعات و سؤالات معلم با سایر معلمان در زمینه‌ی ایجاد بانک سؤالات غنی ؛
✓ کاهش یافتن فاصله بیش از حد نیازهای جامعه و آن‌چه که نظام آموزشی کنونی عرضه می‌کند .

محدودیت‌های استفاده از ICT:

✓ نبود استانداردهای لازم جهت تبدیل برنامه‌های درسی فعلی به برنامه‌ی درسی تلفیق شده با ICT ؛
✓ مشکلات ارزیابی دانش‌آموزان به صورت Online ؛
✓ ناکافی بودن آموزش‌های لازم برای معلمان ریاضی در خصوص تلفیق ICT با ریاضی ؛
✓ ناکافی بودن امکانات نرم‌افزاری و سخت‌افزاری و نامناسب بودن زیر ساخت‌های مخابراتی از نظر محدودیت در پهنای باند ؛
✓ عدم دسترسی به اینترنت در همه‌ی مدارس در سطح کشور ؛
✓ انگلیسی بودن زبان اکثر نرم‌افزارها و ضعف دانش انگلیسی دانش‌آموزان ایرانی .

جمع‌بندی

۱ . تغییرات عمده‌ای در ابعاد گوناگون به وقوع پیوسته است که همگی دلالت بر ضرورت تغییر برنامه‌ی درسی، محتوا، روش تدریس و ارزشیابی ریاضی می‌کنند . مهم‌ترین تغییرات عبارت است از : تغییرات دیدگاه در علم ریاضی و چگونگی کاربرد آن، تغییرات در نقش تکنولوژی به‌خصوص ماشین حساب و کامپیوتر، تغییرات در جامعه‌ی ایران، تغییرات در درک بهتر انواع یادگیری دانش‌آموزان و بالاخره تغییرات در چگونگی رقابت‌های بین‌المللی در نتیجه با توجه به کلیه‌ی نیازها و شرایط و با در نظر گرفتن تغییرات مذکور، باید به تهیه‌ی برنامه‌ی درسی ریاضی پرداخت (گویا، ۱۳۸۰) . لذا لازم به ذکر است در زمینه‌ی تلفیق برنامه‌ی درسی آموزشی ریاضی با ICT، تمهیدات لازم انجام پذیرد .

جامعه‌ی امروزی به شهروندانی نیاز دارد که بتوانند با بهره‌گیری مناسب از فناوری‌های اطلاعات و ارتباطات و با تفکر انتقادی و اتخاذ شیوه‌های راهبردی، به حل و فصل مسائل واقعی خود و جامعه‌ی خود بپردازند

۲ . نرم‌افزارهای آموزشی هندسی پویا و زبان برنامه‌نویسی لوگو، در آموزش هندسه در ترسیم اشکال و تبدیلات هندسی در دوره‌های تحصیلی راهنمایی و دبیرستان به‌کار گرفته شود .

۳ . تخته‌سفید تعاملی (IWB) که برای استفاده با مدادهای ویژه طراحی شده‌اند و ماشین حساب گرافیکی، برای استفاده در کلاس‌های درس، خریداری و در اختیار مدارس قرار گیرد .

۴ . دلیل اصلی شکست تلفیق فناوری در نظام اموزشی ایالات متحده امریکا این است که اگرچه دست‌یابی به فناوری بهبود یافته است، ولی معلمان در تلاش‌هایشان برای استفاده و تلفیق فناوری در کلاس خود مورد حمایت کمتری قرار گرفته‌اند (اُتا[16], ۱۹۹۵) . لذا حمایت مدیران از معلمان ریاضی که از ICT در کلاس درس خود استفاده می‌نمایند، ضروری می‌باشد .

۵ . زیر ساخت‌های مخابراتی لازم جهت استفاده از اینترنت در سطح کشور، فراهم شود؛

۶ . شبکه اینترنت برای کلیه مدارس سطح کشور، ایجاد شود؛

۷ . مدارس مجازی به عنوان ابزاری برای ایجاد محیط یادگیری

آموزش الکترونیکی، آموزش مبتنی بر فناوری اطلاعات است که گستره‌ی وسیعی از کاربردها، از جمله آموزش مبتنی بر وب، آموزش مبتنی بر کامپیوتر و کلاس‌های مجازی را دربر می‌گیرد

مبتنی بر فناوری اطلاعات و ارتباطات تأسیس می‌شود؛

۸. در مقاله‌ی قوانین ارزشیابی ریاضیات برای سنین ۱۹-۱۴ سالگی[۱۷] در گزارش آفتسد (۲۰۰۶)، نیز به استفاده از ICT در افزایش یادگیری و توسعه‌ی مهارت‌های عملیاتی توصیه می‌شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Rosenberg
2 Fuller
3. Module
4. On line
5. Deborath
6. Reeves
7. Herbert Marshall McLuhan
8. http://malardmath.persianblog.ir
9. Ofised (office for standards in education)
10. Camera Documetn
11. Acceleration
12. Extension
13. Enrichment
14. British Education and Communication Technology Agency
15. Hand-helding
16. OTA
17. Evaluating mathematics provision for 14-19-year-olds

منابع

بخش فارسی

۱. برزگر، سمیه (۱۳۸۴). روش‌های ارزیابی کلاس‌های آموزشی در آموزش مبتنی بر وب، سایت اینترانت بانک صنعت و معدن.

۲. بهشتی، زهرا (۱۳۸۳). بررسی نقش آموزش الکترونیکی در حل مشکلات آموزش‌های سنتی و استفاده از آن برای همگانی کردن امر تعلیم و تربیت در ایران، مجموعه مقالات دومین همایش آموزش الکترونیکی

۳. حج‌فروش، احمد و اورنگی، عبدالمجید (۱۳۸۳). بررسی نتایج کاربرد فناوری اطلاعات و ارتباطات در دبیرستان‌های شهر تهران، نوآوری‌های آموزشی، سال سوم، شماره ۹.

۴. خوشدل، مهران (۱۳۸۳). ارائه سیستم آموزشی مطلوب و متناسب با اهداف بانک صنعت و معدن، گزارش نهایی پروژه کارورزی به راهنمایی دکتر احمد شربت‌اوغلی.

۵. شریفی، شهرزاد و رقابی، فرنوش (۱۳۸۳). طرح پیشنهادی بررسی نیازهای مطالعاتی دانش‌آموزان مقطع راهنمایی شهر تهران با توجه به تحولات فناوری آینده، مجله الکترونیکی مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران، دوره سوم، شماره سوم.

۶. شیخ‌زاده، مصطفی و مهرمحمدی، محمود (۱۳۸۳). نرم‌افزار آموزش ریاضی ابتدایی بر اساس رویکرد سازنده‌گرایی و سنجش میزان اثربخشی آن، نوآوری‌های آموزشی، سال سوم، شماره ۹.

۷. عالی، مریم (۱۳۸۴). بررسی نگرش دانش‌آموزان نسبت به درس هندسه، رشد آموزش ریاضی، سال بیست‌ودوم، شماره ۷۹.

۸. گویا، زهرا، رفیع‌پور، ابوالفضل و خلیفه، زهرا (۱۳۸۳). چارچوبی برای تلفیق ICT در آموزش ریاضی، مجموعه مقالات دومین همایش آموزش الکترونیکی.

۹. گویا، زهرا و رفیع‌پور، ابوالفضل (۱۳۸۳). نقش فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات (ICT) در آموزش ریاضی، گزیده مقالات هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران.

۱۰. میرشفیعی، سیدعلی (۱۳۸۴). فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات.
http://www.naftepars.ir/official/2961/view.asp?ID=279977

بخش انگلیسی

[1]Becta, Dynamic geometry:
http://www/curriculum.hecta.org.uk/docserver.php?docid=1937

[2] Becta (2000). Secondary Mathematics with ICT.
http://www.vtc.ngfl.gov.uk

[3] Becta (2002). Using web-based resources in the daily mathematics lesson. http://www.ictadvice.org.uk

[4] Becta (2004). 'Getting the most from your interactive whiteboard'
http://www.ferl.beta.org.uk/display.cfm?resID=7674

[5] Casey, John A. (1995). Developmental issues for school counsel using Technology, Elementary school Guidance & Counseling, V.30, and No.1.

[6] Clark G., Redden, E., Geometrical investigations: a Companion to Cabri II, AAMT http://www.aamt.edu.au

[7] Green, D., Armstrong,. A. & Bridges, R. (1993), Spreadsheets: Exploring their Potential in Secondary Mathematics, MA.

[8] Jones, K. (2004), 'Using Interactive Whiteboards in the Teaching and Learning of Mathematics: a research bibiliography', Micromath 20/2 Summer 2004.

[9] Kalinowski, Michael F (2001). "The Current status of technology in education: lightspeed ahead with Mild turbulence". Informaton Technology in childhood Education Annual (ITCE) V. 2001, issue1.

[10] Kington (2002). Innovative Classroom Practices using ICT in ENGLAND and Alison & Harris, Sue Implications for Schools. National Foundation for Education Research.

[12] Mathematics with ICT in key stage3, Geomatry Lessons,
http://www.standards.dfes.gov.pdf

[13] Myrick, Robert Dand Russell A. Sabella (1995). Cyberspace: New Place For councelor supervision, Elementary School Guidance & Counseling, V.30, No.1.

[14] Oldknow, A. & Flower, J. (1996), Symbolic Manipulation by Computers and Calculators MA,
http://www.m-a.org.uk/resourses/publications/books/books/

[15] OTA, (1995). Teachers and technology: Making the connection. (Publication No. OTA-HER-616). Washington, DC; U.S. Government Pringting Office.

[16] Oftsed (2002) ICT in schools, HMI 423 http://www.ofsted.gov.uk

[17] Ofsted report: ICT in Schools 2004 (HMI 2050)
http://www.ofsted.gov.uk/publications/index.cfm? fuseaction = pubs. summary & id=3652

[18] Ofsted (2006): Evaluating mathematics Provision for 14-19-year-olds, http://www.ofsted.gov.uk/ofsted-home/publications-and-research/Brows-all-by/Education/curriculum/Mathematics/secondary/Evaluating-mathematics-provision-for-14-19-year-olds

[19] Royal Society/JMC (2001), Teaching and Learning Geometry 11-19 http://www.royalsoc.ac.uk/policy/index.html

جایگاه تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی- یادگیری هندسه‌ی فضایی

نورالدین بهین آیین
دانشگاه آزاد واحد علوم و تحقیقات فارس
مریم غلامی
دبیر ریاضی بوشهر و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده

فرایند یاددهی- یادگیری اثربخش، محصول طراحی و سازمان‌دهی دقیق و توجه به تنوع راهبردهای یاددهی- یادگیری و به‌کارگیری کارآمدترین ابزار است. تکنولوژی، رشته‌ای علمی- کاربردی است که برای افزایش کارایی آموزش، از طریق کنترل عوامل، به‌کار برده می‌شود و هدف آن ایجاد شرایطی است که یادگیری را اثربخش نماید. انفجار اطلاعات و رشد سریع تکنولوژی، تأثیرات بنیادین بر همه‌ی عرصه‌ها ازجمله آموزش و پرورش گذاشته است. بر این اساس، نیازها و علائق دانش‌آموزان با نسل گذشته متفاوت است. درنتیجه، چگونگی آموزش آن‌ها نیز تغییر کرده است (مارتین[1]، ۱۹۹۶). لذا در هزاره‌ی جدید، نمی‌توانیم با قانون‌مندی‌های سده‌ی قبل، برای نظام آموزشی، استراتژی [برنامه] تعیین کنیم و جای نگرانی است که ما این دوران را جدی نگرفته‌ایم (گویا، ۱۳۸۱).

درس ریاضی با وجود اهمیت آن به‌عنوان پایه‌ی یادگیری دروس دیگر، همواره به‌عنوان درسی مشکل و هراس‌انگیز در میان دانش‌آموزان مطرح بوده و فرایند یاددهی- یادگیری آن با مشکلاتی روبه‌روست. تا آن‌جا که گاهی دانش‌آموزان به‌جای یادگیری معنادار، به حفظ و به‌خاطرسپاری آن اکتفا کرده و تنها به کسب نمره‌ای در حد عبور از یک مرحله‌ی تحصیلی راضی می‌شوند. اینجاست که ضرورت بهبود فرایند یاددهی- یادگیری، بیش‌تر مورد توجه قرار می‌گیرد.

متأسفانه در کلاس‌های ریاضی، بیش‌تر از روش سخن‌رانی و تنها گاهی از پرسش و پاسخ استفاده می‌شود. درصورتی‌که در عصر حاضر، فناوری می‌تواند به یاری آموزش شتافته و این روند تکراری را خاتمه داده و آموزش را بهبود ببخشد. ولی سؤال اینجاست که چرا دبیران ریاضی، علاقه‌ی چندانی به استفاده از فناوری آموزشی در فرایند یاددهی- یادگیری از خود نشان نمی‌دهند؟ آیا استفاده از فناوری آموزشی را غیر مفید می‌دانند یا دلایل دیگری برای این کار وجود دارد؟ دبیران ریاضی چه اقداماتی را برای راه‌های بهبود جایگاه تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی- یادگیری مؤثر می‌دانند؟ تحقیق حاضر، پاسخ این سؤالات را در مورد موضوع «هندسه‌ی فضایی» بررسی می‌کند.

کلیدواژه‌ها: آموزش، یادگیری، هندسه‌ی فضایی، تکنولوژی آموزشی

مقدمه

با پیشرفت علوم و فنون و پیچیده‌تر شدن جوامع، کسب علوم و فنون جدید در سایه‌ی راهبردهای آموزشی ساده‌ی سنتی امکان‌پذیر نیست. به این سبب، مسئولیت معلم امروز نسبت به گذشته سنگین‌تر و پیچیده‌تر شده است. دیگر نمی‌توان با روش‌های سنتی، جامعه و افراد آن را به سوی یک تحول پیشرفته سوق داد. در دنیای امروز، هیچ‌کس بی‌نیاز از تعلیم و تربیت و یادگیری نیست و به جرأت می‌توان گفت که آموزش، جزء اصلی زندگی انسان‌ها شده است و در این میان، این معلم است که باید سعی کند موقعیت مطلوب یادگیری را فراهم سازد.

یکی از روش‌های بسیار معمول مورد استفاده‌ی معلمان در سراسر جهان که براون[2] و اتکینس[3] (۱۹۹۱) سابقه‌ی آن را به پنج

قرن پیش از میلاد نسبت داده‌اند، روش سخن‌رانی است. اما آموزش صرفاً به ارائه‌ی یک سخن‌رانی محدود نمی‌شود. وولفولک (۱۹۹۵) معتقد است که «هیچ‌کس نمی‌تواند به‌جای دیگری یاد بگیرد. یادگیرندگان، دانش‌ها و مهارت‌های خودشان را خلق می‌کنند. نقش معلم، تدارک دیدن و هماهنگ کردن مواد، تکالیف، موقعیت‌ها، گفت‌وگوها و کاوش‌هایی است که از یادگیری و استقلال یادگیرندگان حمایت می‌کند» (سیف، ۱۳۸۵). اما این‌که جزئیات این ارائه‌ی نقش چیست و چه موادی و چه موقعیت‌هایی مورد نظر است، همواره مورد توجه روان‌شناسان تربیتی و محققان بوده است.

روان‌شناسان، مطالعات گسترده‌ای را در جهت بهبود آموزش آغاز کردند و روش‌های دیگری چون روش اکتشافی، اکتشافی هدایت‌شده، آموزش برنامه‌ای و نظایر آن را پیشنهاد و مورد مطالعه قرار دادند که دقت در سیر تکاملی آن‌ها، نشان می‌دهد که در آن‌ها، بیش‌تر نقش و فعالیت دانش‌آموز و تعامل بین معلم و یادگیرنده و دوری از محوریت معلم در آموزش مورد توجه است. به مرور زمان، استفاده از تکنولوژی آموزشی در آموزش به کمک معلمان آمد و باعث بهبود فرایند یاددهی ـ یادگیری شد. دروس ریاضی، به‌ویژه هندسه نیز از این بهبود بی‌بهره نماندند. رفیع‌پور (۱۳۸۵) به نقل از هاوسون و ویلسون (۱۹۸۶) بیان می‌کند که هیچ زمینه‌ی ویژه‌ای در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای به اندازه‌ی هندسه که آموزش آن طی سی سال اخیر

متأسفانه در کلاس‌های ریاضی، بیش‌تر از روش سخن‌رانی و تنها گاهی از پرسش و پاسخ استفاده می‌شود، درصورتی که در عصر حاضر، فناوری می‌تواند به یاری آموزش شتافته و این روند تکراری را خاتمه داده و آموزش را بهبود بخشد

دچار تحول کلی شده، توجه‌ی ریاضی‌دانان را برنمی‌انگیزد. بدین‌جهت، توسعه‌ی سطوح تفکر هندسی دانش‌آموزان، یکی از اهداف اساسی آموزش ریاضیات می‌باشد. زیرا هندسه در بسیاری از حوزه‌های علمی، تکنیکی و شغلی نیز به همان اندازه‌ی ریاضیات مهم است (الکان سیناپلو، دریاکولو[4]، ترجمه پیروانی‌نیا، ۱۳۸۶). علاوه بر این، هندسه به‌طور تاریخی، علم فضا و اشکال است و تمام پدیده‌های طبیعی در فضا رخ می‌دهند. بنابراین هندسه در واقع زمینه‌ی همه‌ی علوم طبیعی، و به نوعی زبان همه‌ی علوم است.

شاریگین و پروتاسف[5] (۲۰۰۴) ابراز کرده‌اند که برخی افراد تمایل دارند هندسه از برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای حذف شود و برخی نیز تمایل دارند که حجم هندسه در برنامه‌ی درسی کاهش یابد. به گفته‌ی آن‌ها، این تمایل بیش‌تر در بین افرادی دیده می‌شود که در فهم و یادگیری هندسه دچار مشکل هستند و این مسئله، حتی در بین افراد حرفه‌ای در حوزه‌ی ریاضی نیز دیده می‌شود (نقل شده در رفیع‌پور، ۱۳۸۵). پس راه‌حل مناسب برای یادگیری هندسه، نمی‌تواند حذف آن از فهرست دروس دبیرستانی باشد.

از طرف دیگر، تکنولوژی آموزشی قابلیت و توانایی آن را دارد

درس ریاضی با وجود اهمیت آن به‌عنوان پایه‌ی یادگیری دروس دیگر، همواره به‌عنوان درسی مشکل و هراس‌انگیز در میان دانش‌آموزان مطرح بوده و فرایند یاددهی ـ یادگیری آن با مشکلاتی روبه‌روست

که فرایند یادگیری را تصریح، تسریع و تسهیل کند و به آموخته‌ها عمق و معنای بیش‌تری ببخشد. تکنولوژی آموزشی از روش‌ها، فنون، ابزار و امکاناتی برخوردار است که با به‌کارگیری و اعمال درست، به‌جا و به‌موقع آن‌ها، می‌توان سطح یادگیری و بازدهی آموزش را به گونه‌ی شگفت‌انگیزی به حداکثر ممکن و مطلوب رساند.

مثلاً در درس هندسه، تصاویر گرافیکی می‌توانند مورد توجه قرار گیرند که به دو صورت تصاویر بیت نگاشتی و تصاویر شیءـ گرا وجود دارند. تصاویر بیت‌نگاشتی دربرگیرنده‌ی نقاط خیلی کوچکی به‌نام پیکسل هستند که براساس ماتریسی از خطوط نازک غیرچاپی تنظیم شده‌اند. فایل‌های تصویری شیءـگرا (که تصاویر بُرداری نیز نامیده می‌شوند)، با تصاویر بیت‌نگاشتی متفاوتند زیرا ترکیبی از اشکال هندسی هستند که می‌توان آن‌ها را انتخاب کرد، حرکت داد، لایه‌بندی کرد و حتی دست‌کاری نمود. برای این‌که نمایش یک محصول چندرسانه‌ای بتواند ارتباط متقابلی با کاربر برقرار سازد، می‌توان کل پروژه را به‌صورت فیلم ساخته و به‌صورت تصویر متحرک نمایش داد. به‌طور مثال، انیمیشن

می‌تواند صفحه‌ی رابط کاربر را به محیطی پویا و زنده تبدیل کند.

اثربخشی آموزش با کامپیوتر

ورود کامپیوتر به آموزش، پی‌آمدهایی در بر داشته است که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- تغییر کار و وظیفه‌ی معلم؛
- ضرورت کار گروهی و از بین رفتن موانع روانی یادگیرندگان؛
- توجه به کامپیوتر به‌عنوان استاد همیشه در دسترس (ساوجی، ۱۳۷۶).

در مورد استفاده از کامپیوتر در آموزش هندسه، به‌طور کلی چهار سطح را می‌توان در نظر گرفت:

۱. هندسه‌ی ترسیمی

در مرحله‌ی اول از کامپیوترها برای آموزش هندسه، استفاده‌های عمومی و معمول صورت می‌پذیرد. برای مثال، شکل‌های هندسی دقیق‌تر ترسیم می‌شوند و نرم‌افزارهای ویژه‌ای برای این منظور طراحی می‌شوند.

۲. دست‌یار آموزشی

مطالب آموزشی به کمک ابزارهای کامپیوتری دسته‌بندی شده و با شیوه‌ی آموزش برنامه‌ای به‌صورت مرحله به مرحله به یادگیرندگان منتقل می‌شوند. در این مرحله، تفاوت عمده‌ای بین استفاده از رایانه در هندسه و سایر دروس مشاهده نمی‌شود. ارائه‌ی محتوای آموزشی توسط پاورپوینت، از آن جمله است.

۳. نرم‌افزار هندسه‌ی لوگو

لوگو یک نرم‌افزار برنامه‌نویسی ویژه است که برای استفاده‌های آموزشی طراحی شده است. لوگو توسط سیمور پاپرت[۶] (۱۹۸۹) استاد انستیتوی تکنولوژی ماساچوست (MIT) که با پیاژه به مطالعاتی در زمینه‌ی آموزش پرداخت، طراحی و اجرا شد و به‌عنوان چارچوبی برای فهم و درک دانش ترسیمی و حل مسئله‌ی ریاضی مورد استفاده قرار گرفت. کلمه‌ی لوگو نام لاک‌پشتی در برنامه است که توسط دستورات خاص کاربر، ترسیمات هندسی را انجام می‌دهد.

۴. هندسه‌ی پویا

ظهور نرم‌افزارهای هندسه‌ی پویا، آغاز مرحله‌ی تازه‌ای برای استفاده از کامپیوتر در آموزش هندسه بود. نرم‌افزارها، فضای جدیدی را در آموزش ایجاد کردند تا به معلمان کمک کنند با بهره‌گیری از این ابزارها، بستری فراهم سازند که مفاهیم ریاضی به‌صورت پویا (در حال حرکت) معرفی شده و درک عمیق‌تری برای دانش‌آموزان ایجاد کنند.

ساختار فن‌هیلی هم اساس تحقیق در هندسه‌ی ایستا و هم پایه‌ی حداقل دو برنامه‌ی درسی در هندسه‌ی پویا است (باتیستا، ۱۹۹۸). مرحله‌ی ۱ تا ۳ در مدل فن‌هیلی، استفاده‌ی دانش‌آموزان را از زبان هنگام مشاهده‌ی اشکال هندسیِ ثابت توصیف می‌کند. مثلاً، آیا هر یک از این سه مرحله در حیطه‌ی هندسه‌ی پویا نیز همان‌گونه باقی می‌ماند؟ همان‌گونه که دانش‌آموزی در مرحله‌ی اول مدل مستطیل را به در تشبیه می‌کند، در هندسه‌ی پویا نیز از تشبیه‌هایی این چنین استفاده می‌کند و علاوه بر دسته‌بندی اشکال، آن‌ها را براساس حرکتشان روی صفحه‌ی مانیتور نیز، شرح می‌دهد (امین‌الرعایا، ۱۳۸۶).

مطالعه‌ی هارولد ونگ لینسکی[۷] (۱۹۹۸) درباره‌ی تأثیر استفاده از تکنولوژی در تدریس ریاضی، نشان داد که تکنولوژی می‌تواند اثرات و فواید مثبتی بر آموزش ریاضی داشته باشد. البته فواید ذکر شده به چگونگی استفاده از تکنولوژی بستگی دارند. نوروزی (۱۳۷۹ به نقل از ماندی[۸] و همکاران، ۲۰۰۰) بیان می‌دارد که دانش‌آموزان، معمولاً یک گرایش خیلی قوی به طرف تفکر جبری دارند. آن‌ها معتقدند که بسیاری از مشکلات در یادگیری ریاضی را می‌توان با سوق دادن دانش‌آموزان به مسیری که بتوانند مفاهیم اولیه‌ی ریاضی را مشاهده و تجسم و سپس تجزیه و تحلیل نمایند، کاهش داد.

پژوهش انجام شده در بوشهر

در بررسی «جایگاه تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی از نظر دبیران ریاضی و بررسی راه‌های بهبود آن»، جامعه‌ی مورد مطالعه، دبیران ریاضی شهرستان بوشهر شاغل به تدریس در دوره‌ی متوسطه بودند. برای جمع‌آوری داده‌ها، از پرسش‌نامه‌ی محقق ساخته استفاده گردید و روایی آن، طی چند مراجعه به استادان مرتبط و انجام اصلاحات لازم تأیید شد. پایایی پرسش‌نامه نیز با استفاده از ضریب آلفای کرونباخ ۰/۸۵ محاسبه گردید.

این پرسش‌نامه شامل ۲۰ سؤال بود که با مقیاس لیکرت در یک طیف ۵ گزینه‌ای کاملاً موافقم با ارزش ۵، تا حدی موافقم

با نمره‌ی ۴، نظری ندارم با ارزش ۳ و تا حدی مخالفم و کاملاً مخالفم به‌ترتیب با ارزش‌های ۲ و ۱، تنظیم شد.

پس از اجرای پرسش‌نامه و بررسی نتایج حاصل، مشخص شد که ۶۰ درصد دبیران مرد و ۱۰۰ درصد دبیران زن ریاضی (در مجموع ۹۰ درصد دبیران ریاضی) معتقد بودند که استفاده از تکنولوژی آموزشی فرایند یاددهی- یادگیری هندسه‌ی فضایی را بهبود می‌بخشد. در ضمن، اکثر دبیران معتقد بودند که از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی- یادگیری هندسه‌ی فضایی به‌طور مطلوب استفاده نمی‌شود. در راستای بررسی دلایل عدم استفاده از فناوری آموزشی در فرایند یاددهی- یادگیری هندسه‌ی فضایی، کمبود وقت، عدم حمایت مدیران مدارس و عدم آشنایی معلمان با نرم‌افزارهای آموزشی، بیش‌تر از سایرین مورد موافقت قرار گرفته بودند. اما کمبود کامپیوتر در مدارس و کمبود نرم‌افزارهای مناسب مورد تأیید قرار نگرفت.

برخی از دبیران ریاضی، در انتهای پرسش‌نامه، موضوع عدم تسلط به زبان انگلیسی را مطرح ساخته بودند که از دید پژوهشگر به‌دور مانده بود.

مطالعه‌ی نظر دبیران ریاضی نشان داد که از نظر آن‌ها، استفاده از تکنولوژی آموزشی، فرایند یاددهی- یادگیری هندسه‌ی فضایی را بهبود می‌بخشد. اما به دلایل زیر، از این تکنولوژی در فرایند یاددهی- یادگیری هندسه‌ی فضایی به‌طور مطلوب استفاده نمی‌شود.

- عدم برنامه‌ریزی مناسب؛
- نحوه‌ی مرسوم ارزشیابی از عملکرد دبیران؛
- کمبود وقت؛
- عدم آشنایی معلمان ریاضی با نرم‌افزارهای موجود؛
- عدم تسلط معلمان ریاضی بر نرم‌افزارهای موجود آموزش هندسه‌ی فضایی؛
- فقدان برنامه‌ریزی بلندمدت؛
- عدم حمایت مدیران مدارس از معلمان علاقه‌مند به استفاده از تکنولوژی؛
- عدم تسلط معلمان به زبان انگلیسی؛
- نگرانی معلمان از تسلط بیش‌تر دانش‌آموزان بر نرم‌افزارها نسبت به آن‌ها؛
- نگرانی از پایین آمدن سطح قدرشناسی و قدردانی دانش‌آموزان از معلمان؛
- نبود نرم‌افزارهای تهیه‌شده به زبان فارسی.

روان‌شناسان، مطالعات گسترده‌ای را در جهت بهبود آموزش آغاز کردند و روش‌های دیگری چون روش اکتشافی، اکتشافی هدایت‌شده، آموزش برنامه‌ای و نظایر آن را پیشنهاد و مورد مطالعه قرار دادند که دقت در سیر تکاملی آن‌ها، نشان می‌دهد که در آن‌ها، بیش‌تر نقش و فعالیت دانش‌آموز و تعامل بین معلم و یادگیرنده و دوری از محوریت معلم در آموزش مورد توجه است. به مرور زمان، استفاده از تکنولوژی آموزشی در آموزش به کمک معلمان آمد و باعث بهبود فرایند یاددهی- یادگیری شد

جالب است که از نظر دبیرانی که مورد پرسش قرار گرفتند، کمبود کامپیوتر در مدارس، کمبود نرم‌افزارهای آموزشی و نگرانی از اشکال‌های فنی نرم‌افزارهای مورد استفاده، مانع بهره‌گیری آن‌ها از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی- یادگیری هندسه‌ی فضایی نمی‌شود. درنتیجه، برای رفع موانع ذکر شده، می‌توان به برگزاری کلاس‌های ضمن خدمت، تهیه‌ی نرم‌افزار به زبان فارسی و معرفی به موقع و به روز نرم‌افزارهای آموزشی به‌عنوان راه‌های مورد تأیید دبیران ریاضی برای بهبود جایگاه تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی- یادگیری هندسه‌ی فضایی اشاره کرد.

پیشنهادهای آموزشی

چون کامپیوتر بر تمام ابعاد زندگی سایه انداخته و استفاده از آن بر طبق این پژوهش و پژوهش‌های مشابه، بر فرایند یاددهی یادگیری تأثیر مثبت دارد و باعث افزایش یادگیری می‌شود، به دست‌اندرکاران و برنامه‌ریزان آموزشی توصیه می‌شود:

۱. زمینه‌ی استفاده از تکنولوژی آموزشی را در تدریس ریاضی مدرسه‌ای فراهم آورند؛

۲. با برگزاری کلاس‌های ضمن خدمت، معلمان را با نحوه‌ی استفاده از کامپیوتر در کلاس درس ریاضی آشنا سازند؛

۳. با حمایت از معلمان طراح نرم‌افزارهای آموزشی، آن‌ها را به فعالیت در این زمینه ترغیب کنند؛

در هزاره‌ی جدید نمی توانیم با قانونمندی‌های سده‌ی قبل، برای نظام آموزشی استراتژی (برنامه) تعیین کنیم و جای نگرانی است که ما این دوران را جدی نگرفته‌ایم

۴ . با انتشار نشریه‌هایی در زمینه‌ی معرفی نرم‌افزارهای جدید آموزشی، معلمان را با جدیدترین تولیدات در این زمینه آشنا سازند؛

۵ . کمبود نرم‌افزارهای فارسی‌زبان در زمینه‌ی هندسه‌ی فضایی وجود دارد. حمایت از چنین تولیداتی می‌تواند کمک شایانی به آموزش ریاضی کشور کند.

پیشنهادهای پژوهشی

به پژوهشگران توصیه می‌شود که:

۱ . با توجه به این‌که پژوهش حاضر بر روی دانش‌آموزان دختر انجام شده است، پژوهش مشابهی بر روی دانش‌آموزان پسر انجام گیرد؛

۲ . از آن‌جا که پژوهش حاضر با استفاده از نرم‌افزار CABRI.3D انجام شده است و نرم‌افزارهای دیگری هم‌چون Mathematica و Maple و غیره در دسترس می‌باشد، پژوهش مشابهی با سایر نرم‌افزارها انجام شود؛

۳ . چنین پژوهشی در سایر نقاط کشور انجام شود؛

۴ . از آن‌جا که نتایج چنین پژوهش‌هایی می‌تواند برای برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی مورد استفاده قرار گیرد، پژوهش مشابهی در سطح کل کشور انجام گیرد؛

۵ . چنین پژوهشی برای سایر مباحث و دروس انجام پذیرد؛

۶ . از آن‌جا که ممکن است بعضی موانع استفاده از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی- یادگیری هندسه‌ی فضایی از دید محقق به دور مانده باشد، سایر موانع طی پژوهش‌های دیگر بررسی شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Martin
2. Brown
3. Atkins
4. Olkun & Sinnoplu & Deryakulu
5. Sharygin & Protasov
6. Seymour Papert
7. Harold Wenglinsky
8. Mundy

منابع

۱ . احدیان، م. (۱۳۷۴). **اصول مقدمات و تکنولوژی آموزشی**، شهر تهران، نشر و تبلیغ بشری.

۲ . افشین‌منش، م.، کچویی، ا (۱۳۸۶). هندسه‌ی پویا، *تلفیق موفق ICT، با برنامه‌ی درسی*. **گزارش نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران**، زاهدان.

۳ . رفیع‌پور، ا. (۱۳۸۵). *چرایی و چگونگی آموزش هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای*. **گزارش هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران**. شهرکرد.

۴ . پیروانی‌نیا، پ. *یادگیری اکتشافی هندسه با استفاده از ابزارهای هندسه‌ی پویا براساس سطوح ون‌هیل*، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی مجله‌ی ۸۸، صص ۵۵-۴۵. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۵ . ساوجی، م (۱۳۷۶). *یادگیری و آموزش مبتنی بر کامپیوتر*. **مجله‌ی رشد تکنولوژی آموزشی**. سال دوازدهم. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۶ . سیف، ع. (۱۳۸۵). **روان‌شناسی پرورشی**. تهران: آگاه.

۷ . گویا، ز (۱۳۸۱). *فرایند یاددهی- یادگیری در قرن جدید*. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۷۰، صص ۱۲-۴. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۸ . نوروزی، م (۱۳۷۹). *مشاهده و تجسم و نقش آن در آموزش و یادگیری ریاضیات*. **گزارش پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران**، مشهد، بهمن ۱۳۷۹.

9. Battista, M. T. (2001). Research-Based Perspective on Teaching School Geometry. In Jere Brophy (Ed.). **Subject-Specific Instruction Methods and Activies**. Vol 8. Advances in Research on Teaching Series. New York: JAI Press, Elsvire Science.

10. Clements, D. H. and Meredith H. J. S. (1993). My Turn: A Talk With the Logo Turtle. **Arithmetic Teacher**. 41, 189-191.

11. www.geogebra.org/en/wiki/index.php/persian.

12. Olkun, N. B. Sinnoplu, D. D. (?). Geometric Explorations with Dynamic Geometry Aplications Based on Van Hiele Levels. **International Journal for mathematics Teaching and Learning Retrived at:** // www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm.

13. Papert, S. A. (1980). **Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas**, Second Edition, Basic Books, New York, pp 31-32.

پیوست: نمونه‌ی پرسش‌نامه‌ی استفاده‌شده در تحقیق

استاد ارجمند ، همکار گرامی

سؤالاتی که در اینجا به‌نظر شما رسیده ، گامی است در مسیر حرکتی نو آغاز ، در مسیر پرشتاب تکنولوژی آموزشی در ایران در آموزش هندسه‌ی فضایی . تقاضا دارم با نظر لطف خود ، من را در برداشتن این گام یاری نمائید . نیازی به قید نام و مشخصات نمی‌باشد . نظرات شما صرفاً مورد مطالعه‌ی علمی قرار می‌گیرد و هیچ‌گونه مسئولیتی برای شما ایجاد نخواهد کرد .

شرح	سطح موافقت‌ها				
	کاملاً موافقم	تا حدی موافقم	نظری ندارم	تا حدی مخالفم	کاملاً مخالفم
۱ . استفاده از تکنولوژی آموزشی ، فرایند یاددهی ، یادگیری هندسه‌ی فضایی را بهبود می‌بخشد .					
۲ . از تکنولوژی آموزشی در آموزش هندسه‌ی فضایی به‌طور مناسب استفاده نمی‌شود .					
۳ . عدم فرهنگ‌سازی مانع استفاده از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه است .					
۴ . عدم برنامه‌ریزی مناسب مانع استفاده از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه‌ی فضایی است .					
۵ . در نحوه‌ی ارزشیابی از عملکرد دبیران ، جایگاه تلاش ، انگیزه و رغبت آن‌ها در استفاده از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری مشخص و روشن نیست .					
۶ . نحوه‌ی ارزشیابی از عملکرد دبیران ، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه نمی‌شود .					
۷ . کمبود وقت مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه‌ی فضایی است .					
۸ . کمبود کامپیوتر در مدارس مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه‌ی فضایی است .					
۹ . کمبود نرم‌افزارها مانعی برای بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه‌ی فضایی است .					
۱۰ . عدم آشنایی معلمان ریاضی با نرم‌افزارهای موجود ، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه‌ی فضایی است .					
۱۱ . عدم تسلط معلمان ریاضی بر نرم‌افزارهای موجود آموزش هندسه‌ی فضایی ، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در آموزش هندسه‌ی فضایی است .					
۱۲ . با آموزش دبیران و آشنا کردن آن‌ها با نرم‌افزارهای آموزش هندسه‌ی فضایی ، می‌توان این تکنولوژی را به آموزش مدرسه‌ای وارد کرد .					
۱۳ . نگرانی از اشکال فنی نرم‌افزار مورد استفاده ، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه‌ی فضایی است .					
۱۴ . کلاس‌های آموزش ضمن خدمت (به‌طور هفتگی یا ماهانه) و رفع اشکالات و مسائل آنان در استفاده از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه‌ی فضایی نقش سازنده و مؤثری دارد .					
۱۵ . نگرانی از تسلط بیش‌تر دانش‌آموزان بر نرم‌افزارها نسبت به معلمین ، مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی است .					
۱۶ . سطح قدرشناسی و قدردانی دانش‌آموزان از دبیران ، در میزان استفاده‌ی دبیران از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی-یادگیری هندسه‌ی فضایی تأثیر می‌گذارد .					
۱۷ . چون بین کسانی که از نرم‌افزار استفاده می‌کنند و سایرین تفاوتی وجود ندارد ، دبیران ریاضی از این فناوری در تدریس هندسه‌ی فضایی استفاده نمی‌کنند .					
۱۸ . فقدان برنامه‌ریزی بلندمدت ؛ مانع بهره‌گیری از تکنولوژی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه‌ی فضایی است .					
۱۹ . عدم حمایت مدیران مدارس مانع بهره‌گیری از تکنولوژی آموزشی در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه‌ی فضایی است .					
۲۰ . برقراری مشوق‌ها و امتیازهای حرفه‌ای ، عامل مؤثری در ایجاد انگیزه‌ی مناسب برای پویایی دبیران ریاضی در تسلط علمی و عملی به تکنولوژی آموزشی و استفاده از آن در فرایند یاددهی ـ یادگیری هندسه‌ی فضایی است .					

خوشحال خواهم شد چنانچه بتوانم از سایر نظرها و پیشنهادهای شما استفاده نمایم.

....

....

....

معرفی کتاب

مانی رضائی
دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، دانشگاه شهیدبهشتی

عنوان: آموزش ریاضیات به کمک I.C.T

نویسنده: آدرین الدنو و ران تیلور

مترجم: شهرناز بخشعلی‌زاده

ناشر: انتشارات مدرسه ـ تهران

چاپ اول: ۱۳۸۷

شمارگان: ۲۲۰۰

بهاء: ۳۵۰۰۰ ریال.

در حال حاضر واژه‌ی ICT (فناوری اطلاعات و ارتباطات) به سرعت جایگزین واژه‌ی IT (فناوری اطلاعات) شده است. سخت‌افزارها و نرم‌افزارهای متعددی را می‌توان به‌عنوان تجهیزات ICT معرفی کرد، اما چگونگی به‌کارگیری آن در کلاس درس و کمک آن به برنامه‌ی درسی، یکی از سؤال‌های محوری است.

کتاب «آموزش ریاضیات به کمک I.C.T» که توسط انتشارات مدرسه منتشر شد، تلاشی برای پاسخ‌گویی به این سؤال است. این کتاب که در سال ۲۰۰۰ توسط ادرین الدنو و ران تیلور نگارش شده، در پنج فصل به شرح زیر تنظیم شده است:

فصل اول: منابع موجود کدام‌اند و چه منابعی در دسترس خواهد بود؟

فصل دوم: ICT و برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای

فصل سوم: چگونه برای استفاده‌ی مؤثر و کارآمد ICT برنامه‌ریزی و طراحی کنیم؟

فصل چهارم: چرا باید ICT را با آموزش ریاضی تلفیق کنیم؟

فصل پنجم: به کجا می‌رویم؟

در مقدمه‌ی کتاب آمده است: «در این‌جا و در تمام کتاب باید تأکید کنیم که در خصوص آموزش‌وپرورش و تعلیم و تربیت مبتنی بر ICT، ریاضیات با بسیاری موضوعات دیگر تفاوت دارد. ما به این اصل اعتقاد داریم که یکی از دلایل اصلی وجود ریاضیات در دوره‌ی متوسطه در حکم درسی اجباری، کاربردهای وسیع آن در خارج از مدرسه است و این بدان معناست که دانش‌آموزان باید قادر باشند با کمک ابزار ICT مسائل ریاضی را حل کنند و نتایج به‌دست آمده را با دیگران در میان بگذارند و با آن‌ها ارتباط برقرار کنند.

حضور گسترده‌ی ICT در کلاس‌های درس ریاضی لزوماً به معنای به زیر سؤال بردن ویژگی‌ها و نادیده گرفتن جنبه‌های قدیمی و مرتبط حاضر در برنامه‌ی درسی ریاضیات نیست. ... شاید این موضوعات به‌دلیل پیچیدگی‌ها و دشواری‌های یاددهی ـ یادگیری با تکنیک‌های ساده، تاکنون در برنامه‌ی درسی دیده نشده‌اند. اما ابزارهای ICT نیاز به این تکنیک‌های ساده را مرتفع می‌سازند. برای مثال، بسیاری از ماشین‌حساب‌های رسام با ماتریس‌ها و عبارت‌هایی که اعداد مختلط دارند، به راحتی کار می‌کنند. لذا ICT دانش‌آموزان را قادر می‌سازند تا بر ابعاد و جنبه‌های مهم‌تر و جالب‌تر محتوا تمرکز کنند. با وجود جبر و سکون برنامه‌ی درسی رسمی، معلمان باید اساس و پایه‌ی یادگیری دانش، درک و فهم و مهارت‌های موجود در برنامه‌ی درسی را نقادانه بررسی کنند.

موضوعی که وضوح کم‌تر و اهمیت بیش‌تری دارد، این است که شهروندان جامعه‌ای که با انواع گوناگون فناوری سروکار دارند باید به توانایی‌ها و محدودیت‌های کامپیوتر دیدی آگاهانه داشته باشند. بسیاری از مواقع شنیده‌ایم که: «کامپیوتر به ما اجازه‌ی چنین کاری را نمی‌دهد»، گویی کامپیوتر موجودی زنده، یک‌دنده و لجوج است. در موضوعات بسیاری چون جغرافی، شیمی و اقتصاد از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری استفاده می‌کنند. ما می‌دانیم و دانش‌آموزانمان نیز باید بدانند که این موارد خالی از اشتباه نیست، این یک مدل ریاضی از وضعیت موجود است که باید محدودیت‌ها و نواقص آن را شناخت. در حال حاضر، مدل‌سازی و اعتباربخشی از جنبه‌های مهم ریاضیات است که دانش‌آموزان دبیرستان باید آن‌ها را تجربه کنند. این کتاب با هدف پشتیبانی و تلفیق ICT با آموزش ریاضی در دوره‌ی دبیرستان تهیه شده است.»

در اجرای این هدف، فصل اول که مشتمل بر ۸۰ صفحه

است، انواع تجهیزات و ادوات ICT را برمی شمارد و مجموعه‌ای از نرم‌افزارهای موجود برای آموزش ریاضی نیز در این فصل معرفی می‌شود. نرم‌افزارها در چند دسته قرار می‌گیرند:

ـ نرم‌افزارهای کوچک، برنامه‌هایی که به محتوای خاص از برنامه‌ی درسی توجه دارد؛

ـ زبان‌های برنامه‌نویسی مانند لوگو، بیسیک؛

ـ نرم‌افزارهای عمومی؛ به‌طور خاص صفحه‌ی گسترده [web]، و البته پایگاه‌های اطلاعاتی؛

ـ بدون محتوا و موضوع خاص چون نرم‌افزارهای رسم نمودار (GPS)؛

ـ سیستم کامپیوتری جبر (CAS)، نرم‌افزار هندسه پویا (DGS)؛

ـ نرم‌افزار داده‌گردانی و کار با داده‌ها (DHS)؛

ـ درس‌افزار، مواد آموزشی ساختار یافته در برنامه‌ی درسی که از نرم‌افزار استفاده می‌کنند،

ـ ماشین حساب‌های رسام (GC)؛

ـ CD-ROM و اینترنت، به‌عنوان منابع اطلاعاتی.

فصل اول کتاب به بررسی مثال‌هایی از هر یک از این دسته‌ها پرداخته است. در پایان فصل، تلاش شده است با ارائه مثال‌های موردی، ویژگی‌های برخی از انواع اصلی ابزار ICT را که معلمان می‌توانند استفاده کنند، معرفی شود.

فصل دوم به تنوع نقش ICT در برنامه‌ی درسی اختصاص یافته است. نویسنده تأکید می‌کند، «آگاه باشید ایده‌های بسیاری در این فصل آورده شده‌اند. لذا احتمالاً بهتر است چند تا از آن‌ها را در ابتدا برای بررسی انتخاب و زمانی که آن‌ها را خوب تحلیل کردید، بررسی ایده‌های دیگر را شروع کنید.» در ادامه، فصل دوم کتاب به موضوع‌های درسی می‌پردازد: اعداد و جبر؛ هندسه و مثلثات؛ آمار و مدل‌سازی؛ ریاضیات پیشرفته و در نهایت فعالیت‌هایی که با برنامه‌ها و دروس دیگر ارتباط پیدا می‌کنند. هر یک از این موضوع‌های درسی به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است و با ارائه‌ی مثال‌های دقیق در هر یک از موضوع‌ها، به چگونگی استفاده از ابزارهای ICT برای کسب نتایج پرداخته شده است. برای مثال، در اعداد به مباحثی مانند عدد، ارزش مکانی و فعالیت‌هایی برای استفاده از ICT برای آشنایی با آن‌ها ارائه شده است که ویژگی‌های عدد از قبیل عامل (مقسوم‌علیه) عدد، مضرب و مقسوم‌علیه‌های مشترک و اعداد اول، مربع کامل، ... نیز مورد بررسی قرار گرفته است. بدین ترتیب بخش اصلی کتاب، در فصل دوم به معرفی چگونگی استفاده از ICT برای آشنایی دانش‌آموزان با مفاهیم اختصاص یافته است.

فصل سوم کاربردهای دیگر از ICT را بر مبنای تجارب عملی فصل‌های اول و دوم در تکمیل و توسعه‌ی یک ساختار تحلیلی برای طراحی، اجرا و ارزیابی به‌کارگیری ICT در یاددهی ـ یادگیری معرفی می‌کند. در این فصل بررسی‌های موردی و مثال‌هایی از ICT که برای بهبود یاددهی ـ یادگیری ریاضیات استفاده شده بررسی می‌شود. هر یک از مثال‌ها با بررسی‌های موردی تحلیل شده تا چگونگی استفاده از ICT برای دست‌یابی به اهداف و انتظارات سند «کاربرد ICT در ریاضیات دبیرستانی» نشان داده شود. نویسندگان کتاب سه جنبه‌ی اصلی به‌کارگیری ICT را مورد توجه قرار داده‌اند:

ـ **تعلیم و تربیتی**. آیا می‌توان از آن برای تدریس و توسعه‌ی محتوا، افزایش دانش، بهبود درک و تمرین و تقویت مهارت‌ها استفاده کرد؟

ـ **ریاضیات**. آیا می‌توان از آن در محاسبات، کسب نتایج، درست کردن جدول‌ها، رسم نمودارها، حل مسائل، کار کردن با عبارت‌ها و محاسبه‌های آماری و غیره استفاده کرد؟

ـ **سازمان‌دهی**. آیا می‌توان از آن برای تولید مواد آموزشی، ثبت اطلاعات، مدیریت زمان، برقراری ارتباط با دیگران، پیدا کردن منابع و غیره کمک گرفت؟

برای پاسخ به این سؤال‌ها، ابتدا چک‌لیست «حقوق دانش‌آموزان در ICT» ارائه شده است و سپس مثال‌های موردی بررسی شده است.

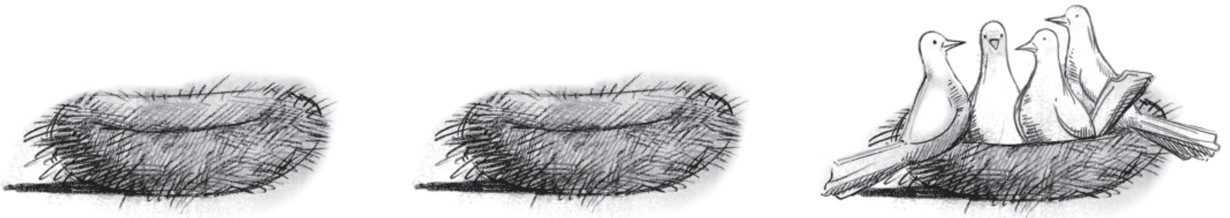
در پایان کتاب برای پاسخ به سؤال «چرا باید ICT را با آموزش ریاضی تلفیق کنیم؟» سه دلیل ممکن ارائه شده است:

۱. مطلوب و پسندیده بودند؛

۲. حتمی و اجتناب‌ناپذیر بودند؛

۳. سیاست‌گذاری و خط‌مشی دولت (که به‌طور خاص خط‌مشی دولت انگلستان در سال‌های ۱۹۷۹ تا ۲۰۰۰ مورد توجه قرار گرفته است).

در برخی موارد جزئی، وجود واژگان تخصصی موجب شده مرز بین متن اصلی و ترجمه مخدوش شود و در پاره‌ای موارد حروف لاتین در جمله پیش از حروف فارسی باشد. با این حال ترجمه‌ی خانم بخشعلی‌زاده، روان و ساده است و در مجموع کتابی مناسب برای آشنایی با ICT و به‌کارگیری آن در آموزش ریاضیات آماده‌سازی و در اختیار خواننده‌ی فارسی‌زبان گذاشته شده است.



مثال‌هایی برای
اصل لانه کبوتری

محمدحسین کریمیان و مجتبی قویدل
از شاهرود

جلمه‌ی «وقتی سه تا کبوتر بخواهند توی دو تا لانه بروند، باید حداقل دوتاشان در یک لانه باشند» را هر عقل سلیمی می‌فهمد و البته با همین یک جمله هم می‌توان شگفتی آفرید!

مضمون جمله‌ی بالا را می‌شود در قالب یک اصل ساده به‌نام «اصل لانه کبوتری» به صورت کلی‌تری بیان کرد:

اگر m کبوتر داخل n لانه قرار داشته باشند و $m>n$ آن‌گاه یک لانه هست که در آن حداقل دو کبوتر وجود دارد.

این اصل به نام‌های اصل **دیریکله** یا اصل **حجره‌ها** نیز بیان شده است.

درست است که این اصل صورتی واضح دارد، اما کلید حل بسیاری از مسائل است که البته باید به صورت صحیح از آن استفاده کرد و بیش‌تر در جاهایی استفاده می‌شود که بخواهیم وجود دو یا چند شیء را که دارای ویژگی مشترک هستند اثبات کنیم. برای این منظور، باید اشیای مورد نظر را طوری دسته‌بندی کنیم که اگر چند شیء در یک دسته قرار گرفتند، همه‌ی این چند شیء دارای ویژگی مشترک مورد نظر باشند.

مثال‌هایی برای اصل لانه کبوتری

مثال۱. ۱۴ عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۲۰\}$ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید تفاضل حداقل دو تای آن‌ها ۷ است.

حل. اگر در دسته‌بندی زیر هر دسته را به‌عنوان یک لانه در نظر بگیریم.

$$\{(۱,۸),(۲,۹),(۳,۱۰),(۴,۱۱),(۵,۱۲),(۶,۱۳),(۷,۱۴),(۱۵),(۱۶),(۱۷),(۱۸),(۱۹),(۲۰)\}$$

در واقع ۱۴ کبوتر و ۱۳ لانه داریم.

یک راه‌حل ابتکاری. فرض کنیم: $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{۱۴}$ اعداد انتخابی باشند. در این صورت

$$x_۱ + ۷ < x_۲ + ۷ < \cdots < x_{۱۴} + ۷$$

که چون $x_{۱۴} \le ۲۰$ پس $x_{۱۴} + ۷ \le ۲۷$. بنابراین ۲۸ عدد متعلق به $\{۱,۲,\ldots,۲۷\}$ داریم که به وضوح باید دوتای آن‌ها یکسان باشند. چون هیچ کدام از x_i ها با هم و هیچ کدام از $x_i + ۷$ ها با هم برابر نیستند، پس باید x_i از دسته‌ی اول با $x_j + ۷$ از دسته‌ی دوم یکی باشد. در نتیجه $x_i = x_j + ۷$ یعنی: $x_i - x_j = ۷$.

****

مثال۲. یک داور و ۲۶ شرکت‌کننده هر یک جدولی ۲۶×۱ در اختیار دارند و هر کدام از ۲۷ نفر در جدول خود، جایگشتی از ۲۶ حروف الفبای انگلیسی را می‌نویسد. داور جدول خود را

با هر یک از شرکت کننده‌ها مقایسه می‌کند و به‌ازای هر خانه از جدول اگر حرف داخل آن خانه در جدول داور با شرکت کننده یکی باشد، امتیاز ۱ و در غیر این صورت صفر می‌گیرد. بنابراین امتیاز هر شرکت کننده، عددی بین ۰ و ۲۶ است. اگر امتیاز هیچ دو شرکت کننده‌ای یکسان نباشد، ثابت کنید شرکت کننده‌ای وجود دارد که جدول او دقیقاً مشابه جدول داور است.

حل. با توجه به این که تعداد حروف الفبای انگلیسی ۲۶ است، امتیاز هیچ شخصی نمی‌تواند ۲۵ باشد (زیرا در این صورت تعداد خانه‌هایی که حروف داخل آن‌ها برای آن شرکت کننده مشابه حروف داخل خانه‌های متناظر در جدول داور است، برابر ۲۵ می‌شود و چون ۲۶ حرف الفبا داریم، به ناچار باید خانه بیست‌وششم نیز برای هر دو یکسان باشد). حال چنان‌چه هیچ شخصی نباشد که جدول او دقیقاً مشابه جدول داور باشد، امتیاز ۲۶ نیز منتفی است و در نتیجه امتیاز هر شخص، عددی از مجموعه‌ی {۲۴ ، ... ، ۲ ، ۱ , ۰} است. بنابراین ۲۶ شرکت کننده (به عنوان کبوتر) و ۲۵ امتیاز (به‌عنوان لانه) داریم و در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ نفر امتیاز یکسان دارند و این با فرض مسئله در تناقض است.

****

مثال۳. اگر S، زیر مجموعه‌ای ۷ عضوی از {۱,۲,۳,...,۲۱} باشد، ثابت کنید دو زیر مجموعه‌ی متمایز از S مانند B و A وجود دارند به‌طوری که مجموع اعضای A با مجموع اعضای B برابر است.

حل. حداقل مجموع اعضای زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی S فوق ۰ و حداکثر آن ۱۲۶=۱۵+...+۲۰+۱۲ است. یعنی مجموع اعضای زیر مجموعه‌های S یکی از ۱۲۷ حالت {۰,۱,۲,...,۱۲۶} است. چون S یک مجموعه‌ی ۷ عضوی می‌باشد، ۱۲۸ = $۲^۷$ زیر مجموعه دارد که آن‌ها را به‌عنوان ۱۲۸ کبوتر و {۰,۱,۲,...,۱۲۶} را به عنوان ۱۲۷ لانه در نظر می‌گیریم. پس طبق اصل لانه کبوتری، مجموع اعضای دوتا از این زیر مجموعه‌ها باید یکی باشد.

****

مثال۴. شطرنج‌بازی ۱۱ هفته فرصت دارد خود را برای شرکت در مسابقه‌ای آماده کند. برای این منظور، تصمیم می‌گیرد حداقل روزی یک بازی داشته باشد. ولی برای آن که خسته نشود، در هیچ هفته‌ای بیش‌تر از ۱۲ بار بازی نمی‌کند. ثابت کنید چند روز متوالی وجود دارد که شطرنج باز طی آن‌ها دقیقاً ۲۰ بار بازی کرده است.

حل. اگر k، تعداد روزها $(k = ۷۷)$ و S_k تعداد بازی‌ها از روز اول تا kامین روز باشد؛ بنابراین $S_{۷۷} \le ۱۲\times۱۱ = ۱۳۲$ و در نتیجه داریم:

$$۱ \le S_۱ < S_۲ < S_۳ < \cdots < S_{۷۷} \le ۱۳۲$$

پس

$$S_۱ + ۲۰ < S_۲ + ۲۰ < \cdots < S_{۷۷} + ۲۰ \le ۱۵۲$$

پس ۱۵۴ تا عدد از مجموعه‌ی {۱,۲,۳,...,۱۵۲} داریم. در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری، باید یک عدد در دسته‌ی اول با عددی در دسته‌ی دوم یکی باشد؛ یعنی $S_i = S_j + ۲۰$. پس $S_i - S_j = ۲۰$ و این رابطه یعنی شطرنج‌باز از روز j+۱ ام تا روز iام دقیقاً ۲۰ بازی داشته است.

****

مثال ۵. ۴ عدد از مجموعه‌ی {۱,۲,۳,۴,۸,۹,۱۲,۱۶} انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید که حاصل ضرب دوتا از این اعداد، مربع کامل است.

حل. دسته‌بندی {۲,۸},{۳,۱۲},{۱,۴,۹,۱۶} برای اعضای این مجموعه را به عنوان سه لانه و چهار عدد انتخاب شده از مجموعه را به عنوان چهار کبوتر در نظر می‌گیریم. بنابراین حداقل یک لانه است که در آن بیش از یک کبوتر قرار دارد. پس حداقل دوتای آن‌ها هستند که حاصل ضربشان مربع کامل است.

تعمیم اصل لانه کبوتری

اگر m کبوتر درون n لانه قرار داشته باشند و m>nk، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل k + ۱ کبوتر قرار دارد.

مثال‌هایی برای تعمیم اصل لانه کبوتری

مثال۶. ثابت کنید در یک گروه ۶ نفری، همواره می‌توان ۳ نفر یافت که با یکدیگر دو به دو آشنایند یا دو به دو با یکدیگر ناآشنایند.

حل. فرض کنیم A یکی از این ۶ نفر باشد، دو لانه، یکی برای افراد آشنا با A و دیگری برای افرادی که A را نمی‌شناسند در نظر می‌گیریم. چون می‌خواهیم ۵ نفر را در این دو لانه قرار دهیم و $۵ \ge ۲\times۲ + ۱$ پس در یکی از لانه‌ها حداقل ۳ نفر قرار می‌گیرند یعنی یا حداقل ۳ نفر هستند که با A آشنایند یا حداقل ۳ نفر هستند

که A را نمی‌شناسند. مسئله را در این دو حالت حل می‌کنیم.

حالت اول: حداقل ۳ نفر باشند که A را می‌شناسند:

در این حالت اگر در بین ۳ نفری که A را می‌شناسند حداقل دو نفر باشند که یکدیگر را می‌شناسند، مسئله حل شده است (زیرا همان دو نفر و A، ۳ نفری هستند که یکدیگر را می‌شناسند) و اگر در بین این ۳ نفر هیچ‌کدام یکدیگر را نشناسند، باز هم مسئله حل شده است.

حالت دوم: حداقل سه نفر باشند که A را نمی‌شناسند:

در این حالت اگر در بین ۳ نفری که A را نمی‌شناسند حداقل دو نفر باشند که یکدیگر را نمی‌شناسند، مسئله حل شده است (زیرا همان ۲ نفر و A، سه نفری هستند که یکدیگر را نمی‌شناسند) و اگر این سه نفر دو به دو یکدیگر را بشناسند، باز هم مسئله حل شده است.

****

مثال ۷. از ۲۰۰۰ شرکت‌کننده در یک کنفرانس، هیچ فردی بیش از ۵ زبان نمی‌داند. در هر جمع سه نفری، حداقل ۲ نفر می‌توانند به یک زبان مشترک صحبت کنند. ثابت کنید دست‌کم ۲۰۱ نفر می‌توانند به یک زبان مشترک صحبت کنند.

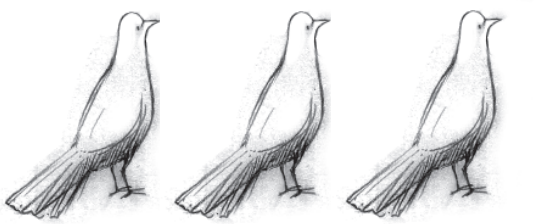
حل. در صورتی که تمام افراد بتوانند به یک زبان مشترک صحبت کنند، مسئله حل شده است. در غیر این صورت حداقل ۲ نفر مانند A و B در بین افراد یافت می‌شوند که هیچ زبان مشترکی ندارند.

حال ۲ لانه، یکی را برای افرادی که با A حداقل یک زبان مشترک دارند و دیگری را برای افرادی که با B حداقل یک زبان مشترک دارند در نظر می‌گیریم و هریک از ۱۹۹۸ نفر دیگر را در این ۲ لانه قرار می‌دهیم.

هر فرد از بین ۱۹۹۸ نفر دیگر را که در نظر بگیریم همراه با A و B یک جمع ۳ نفری تشکیل می‌دهند. لذا بنابر فرض مسئله، حداقل ۲ نفر از آن‌ها می‌توانند به زبان مشترکی صحبت کنند. در واقع این افراد یا با A یک زبان مشترک دارد یا با B.

چون $1+998\times 2\ge 1998$، بنابراین در یکی از لانه‌های گفته شده حداقل ۹۹۹ نفر قرار می‌گیرند. به عبارتی، یا حداقل ۹۹۹ نفر وجود دارند که با A یک زبان مشترک دارند یا حداقل ۹۹۹ نفر وجود دارند که با B یک زبان مشترک دارند.

حالتی را در نظر می‌گیریم که ۹۹۹ نفر باشند که با A یک زبان مشترک دارند. توجه داریم که A حداکثر ۵ زبان می‌داند. اگر ۵ لانه برای این زبان‌ها در نظر بگیریم، چون $1+(5\times 199)\ge 999$ پس در یکی از این لانه‌ها حداقل ۲۰۰ نفر قرار می‌گیرند، یعنی حداقل ۲۰۰ نفر وجود دارد که در یک زبان با A مشترکند. این ۲۰۰ نفر به همراه A، همان ۲۰۱ نفری هستند که در یک زبان مشترکند. در حالت دیگر نیز مسئله به طور مشابه حل می‌شود.



تمرین‌ها

۱. ۶ عدد از مجموعه‌ی $\{1,2,...,10\}$ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل یکی از این عددها بر دیگری بخش‌پذیر است.

۲. ۱۱ عدد از مجموعه‌ی $\{1,2,...,20\}$ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید مجموع دو تا از این اعداد، عددی اول است.

۳. در یک مسابقه، هر نفر ۱۰ تیر شلیک می‌کند و امتیاز هر شلیک ۰، ۱ یا ۳ است. حداقل چند نفر در این مسابقه شرکت کنند تا مطمئن شویم در پایان، دو نفر امتیاز یکسان می‌آورند؟

۴. از مجموعه‌ی $\{1,2,...,9\}$، ۷ عدد انتخاب می‌کنیم ثابت کنید مجموع ۳تای آن‌ها ۱۵ است.

۵. مجموعه‌ای از اعداد ۲ رقمی با ۱۰ عضو متمایز مفروض است. ثابت کنید که همیشه می‌توان دو زیر مجموعه‌ی متمایز از این مجموعه انتخاب کرد به نحوی که مجموع اعضای آن‌ها با هم برابر باشد.

۶. ۳۳عدد طبیعی متمایز مفروض است که در تجزیه‌ی آن‌ها به عوامل اول، فقط اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ ظاهر شده است. ثابت کنید حداقل دو عدد در بین آن‌ها وجود دارد که حاصل ضرب آن‌ها مربع کامل است.

۷. $(n+1)$ عدد از مجموعه $\{1,2,...,2n\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید یکی از این اعداد بر عدد دیگری از آن‌ها بخش‌پذیر است.

منابع

۱. علی‌پور، علیرضا. (۱۳۸۲). **ترکیبات**، جلد اول. انتشارات فاطمی، چاپ دوم.

۲. **آموزش هنر حل مسئله**، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی.

استفاده از اصل لانه کبوتری در حل مسایل متنوع

الکساندر بورِوویک و اِلِنا بِسوونا
ترجمه: فرشته رنگی
دبیر ریاضی شهرستان گناباد

اگر شش کبوتر را در پنج لانه قرار دهید، در این صورت حداقل یک لانه، بیش از یک کبوتر خواهد داشت.

استدلال‌هایی از این دست در حل بسیاری از مسائل ریاضی به‌کار می‌روند و چندین قضیه‌ی جالب به کمک آن‌ها اثبات شده‌اند. تمامی این استدلال‌ها در نام **اصل لانه کبوتری** مشترکند. بیش‌تر مسائل زیر، برای دانش‌آموزان دبیرستانی قابل طرح هستند.

اولین مثال‌های ساده

مثال۱. ۱۵ دانش‌آموز دیکته نوشتند. آرش[1] ۱۳ اشتباه داشت و دیگر دانش‌آموزان هر یک کمتر از این تعداد اشتباه داشتند. ثابت کنید که حداقل دو دانش‌آموز وجود دارد که تعداد اشتباهات یکسانی دارند.

حل. فرض کنیم این دانش‌آموزان (کبوترها) هستند و آن‌ها را در ۱۴ (لانه)، که از صفر تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند، بر اساس تعداد اشتباهاتشان قرار می‌دهیم. در لانه‌ی صفر، دانش‌آموزانی را قرار می‌دهیم که هیچ اشتباهی نداشتند، در لانه‌ی ۱ دانش‌آموزانی را قرار می‌دهیم که دقیقاً یک اشتباه دارند، در لانه‌ی ۲ دانش‌آموزانی را قرار می‌دهیم که ۲ اشتباه دارند و همین طور تا آخر. مطمئناً لانه‌ی ۱۳ صرفاً توسط آرش اشغال خواهد شد. حال اصل لانه کبوتری را اعمال می‌کنیم تا نتیجه حاصل شود.

مثال۲. یک گروه ۳۰ نفری از دانش‌آموزان دیکته نوشتند. آرش ۱۳ اشتباه داشت و دیگر دانش‌آموزان هر یک کمتر از این عدد اشتباه داشتند. ثابت کنید که حداقل ۳ نفر به‌طور مساوی اشتباه دارند.

حل. روش کاهش را برای تناقض به‌کار می‌بریم. فرض کنید که هیچ ۳ دانش‌آموزی به‌طور یکسان اشتباه نداشتند. این بدان معنی است که هر یک از ۱۳ لانه (۰ تا ۱۲) شامل کمتر از ۳ دانش‌آموز است. بنابراین تمام این لانه‌ها روی هم دارای حداکثر $۲۶=۲\times۱۳$ دانش‌آموز است. آرش را به این عدد اضافه می‌کنیم در این صورت، حداکثر ۲۷ دانش خواهیم داشت و نه طبق صورت مسئله ۳۰ دانش‌آموز. به نقطه‌ی تناقض رسیدیم.

اولین تمرین‌ها

(* نشان دهنده‌ی مسائل مشکل‌تر است.)

۱. جمعیت منچستر بزرگ، بیش از ۶۰۰۰۰۰۰ نفر است و هیچ‌کسی بیش از ۱۰۰۰۰۰ مو روی سرش ندارد. ثابت کنید که ۵۹ نفر از ساکنان منچستر بزرگ، تعداد یکسانی مو دارد.

راهنمایی: ۱۰۰۰۰۱ لانه با شماره‌های ۰ و ۱ و ۲، و... و ۱۰۰۰۰۰ در نظر بگیرید که در آن، شماره‌ی لانه برابر با تعداد موهای روی سر افرادی است که در آن نشسته‌اند.

۲. در مدرسه‌ای ۳۰ کلاس و ۱۰۰۰ دانش‌آموز وجود دارد.

ثابت کنید که حداقل یک کلاس، دارای ۳۴ دانش‌آموز است.

۳. درون جعبه‌ای تعدادی مداد وجود دارد: ۱۰ قرمز، ۸ آبی، ۸ سبز و ۴ زرد. با چشم بسته، تعدادی مداد را از جعبه برمی‌داریم. برای این‌که مطمئن باشیم حداقل ۴ مداد یک رنگ داریم، حداقل چند مداد را باید برداریم؟

راهنمایی: ۴ لانه در نظر بگیرید، یکی برای مدادهای قرمز، دومی برای مدادهای آبی، سومی برای مدادهای سبز، چهارمی برای مدادهای زرد.

۴. ۵۰۰ جعبه سیب داریم که تعداد سیب‌های موجود در هیچ یک، بیش‌تر از x نیست. بیش‌ترین مقدار x را بیابید به طوری که بتوان سه جعبه با تعداد مساوی سیب یافت.

اصل لانه کبوتری در مسائل نسبت

فرض کنید رابطه‌ی «آشنایی» متقارن است: اگر حسن با رضا آشنا باشد، در این صورت رضا با حسن آشناست.

مثال۳. ۵۰ نفر در اتاق هستند که بعضی از آن‌ها با یکدیگر آشنا می‌باشند. ثابت کنید در این اتاق دو نفر هستند که تعداد آشنایان یکسانی دارند.

حل. اگر در این اتاق یک نفر باشد که اصلاً هیچ آشنایی نداشته باشد، در این صورت هر یک از سایر افراد حاضر در اتاق ممکن است ۴۸، ...، ۲، ۱ آشنا داشته باشد یا هیچ آشنایی نداشته باشد. بنابراین، ۴۹ لانه با شماره‌های ۰، ۱، ۲، ...، ۴۸ داریم که باید بین ۵۰ نفر تقسیم کنیم.

بقیه‌ی تمرین‌ها

۵. فرض کنید در اتاقی $n>1$ نفر حضور دارند. ثابت کنید حداقل دو نفر از آن‌ها تعداد آشنایان مساوی دارند. (اثبات مثال ۳ را کامل کنید.)

۶. ده تیم فوتبال در یک بازی رو در رو شدند. ثابت کنید هم‌زمان، دو تیمی که تعداد بازی یکسان داشته‌اند، مقابل هم خواهند بود.

راهنمایی: غیرممکن است که تیمی اصلاً بازی نداشته باشد در حالی که تیم دیگری با تمام تیم‌ها بازی کرده باشد.

اصل لانه کبوتری و بخش‌پذیری

مثال۴. ثابت کنید از بین ۱۲ عدد عدد طبیعی دلخواه، می‌توانیم دو عدد را طوری انتخاب کنیم که اختلافشان بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

حل: با تقسیم بر ۱۱، ۱۱ باقیمانده ممکن است: ۱۰، ...، ۲، ۱ و ۰. اما ما ۱۲ عدد داریم. اگر باقیمانده‌ها را «لانه» و اعداد را «کبوتر» در نظر بگیریم، در این صورت بر اساس اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر لانه‌ی یکسان دارند، یعنی دو عدد با باقیمانده‌ی یکسان وجود دارند و لذا اختلاف این دو عدد بر ۱۱، بخش‌پذیر است.

تذکر: از این خاصیت اعداد استفاده کرده‌ایم: اگر باقیمانده تقسیم دو عدد a وb بر c یک عدد باشد، در این صورت a-b بر c بخش‌پذیر است.

مثال۵. ثابت کنید عدد ۱۹۹۷ مضربی دارد که ارقام آن فقط ۰ و ۱ است؟

حل. این ۱۹۹۸ عدد را در نظر بگیرید:

۱۱۱...۱۱۱، ...، ۱۱۱ و ۱۱ و ۱

در تقسیم این اعداد بر ۱۹۹۷ یکی از ۱۹۹۷ باقیمانده‌ی زیر حاصل می‌شود:

۱۹۹۶، ...، ۳، ۲، ۱ و ۰

ما ۱۹۹۸ عدد و ۱۹۹۷ باقیمانده داریم بر اساس اصل لانه‌کبوتری دو عدد باقیمانده‌ی یکسانی دارند. اختلاف این دو عدد بر ۱۹۹۷ بخش‌پذیر است. واضح است که این اختلاف به شکل عددی خواهد بود که رقم‌های آن تنها ۰ و ۱ می‌باشد.

تذکر: مطمئناً شما متوجه نارسایی راه‌حل ما شده‌اید: ما وجود یک عدد طبیعی را که تنها با ۱ و ۰ نوشته می‌شود و بر ۱۹۹۷ بخش‌پذیر است ثابت کرده‌ایم. تنها چیزی که می‌دانیم این است که عدد ما بیش‌تر از ۱۹۹۸ رقم ندارد و می‌تواند به شکل

(رقم n) ۱۱...۱۱ ـ (رقم m) ۱۱...۱۱ = ۱۱...۱۱ ۰۰...۰۰

نوشته شود.

متأسفانه روش ما بیش از این چیزی ارائه نمی‌دهد. در مسائل بعدی با همین مشکل مواجه خواهیم شد. در این مسائل، لازم است تنها وجود اعداد یا جمع خاص را بدون نشان دادن هیچ عدد یا جمع خاصی ثابت کنیم.

۷. ثابت کنید از میان هر سه عدد طبیعی، می‌توانیم دو تا از آن‌ها را با حاصل جمع زوج انتخاب کنیم.

۸. پنج عدد طبیعی دلخواه a_5 و ... و a_1 داریم. ثابت کنید یا یکی از این‌ها بر ۵ بخش‌پذیر است یا مجموع چند تا از آن‌ها بر ۵ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: پنج جمع زیر را درنظر بگیرید:

a_1 و a_1+a_2 و $a_1+a_2+a_3$ و ... و $a_1+a_2+\cdots+a_5$

۹. ثابت کنید از هر ۱۰۰ عدد طبیعی، یک عدد یا جمع چند عدد هست که بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

۱۰. ثابت کنید عددی به شکل ۱۹۹۷۱۹۹۷...۱۹۹۷۰۰...۰۰ وجود دارد که بر ۱۹۹۸ بخش‌پذیر است.

۱۱. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، عددی وجود دارد که تنها با ۵و۰ نوشته می‌شود و بر n بخش‌پذیر است.

راهنمایی: n عدد ۵، ۵۵۵ و... را در نظر بگیرید.

۱۲. ثابت کنید از هر ۵۲ عدد طبیعی، دو عدد n و m را به گونه‌ای می‌توان یافت که حاصل جمع آن‌ها (m+n) و یا اختلاف آن‌دو (m-n) بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد. آیا همین گفته، در مورد ۵۱ عدد طبیعی دلخواه نیز صادق است؟

۱۳. با داشتن n عدد، ثابت کنید بعضی از آن‌ها (شاید یکی) هستند که حاصل جمع‌شان بر n بخش‌پذیر است؟

۱۴. ثابت کنید یک عدد طبیعی به شکل ۱۹۹۷۱۹۹۷...۱۹۹۷ وجود دارد که بر ۱۹۹۹ بخش‌پذیر است.

اصل لانه کبوتری و هندسه

مثال ۶. ۵۱ نقطه به دلخواه داخل مربعی به طول ضلع ۱ قرار داده شدند. ثابت کنید که ۳ تا از آن‌ها را می‌تون با دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۷}$ پوشش داد.

حل. مربع را به ۲۵ مربع کوچک هر یک به طول ضلع $\frac{۱}{۵}$ تقسیم کنید. در این صورت حداقل یکی از این مربع‌های کوچک (لانه) دارای حداقل سه نقطه (کبوتر) خواهد بود. در واقع، اگر این صحت نداشته باشد، در این صورت هر مربع کوچک، دارای دو نقطه یا کمتر خواهد بود که در این صورت تعداد کل نقاط، بیش‌تر از ۵۰=۲×۲۵ نیست. این متناقض با فرضی است که ۵۱ نقطه داریم. حال، دایره‌ای محیط بر این مربع با سه نقطه در داخل آن نیز شامل این ۳ نقطه خواهد بود که شعاع آن

$$r=\sqrt{(\frac{۱}{۵})^۲+(\frac{۱}{۵})^۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۵}<\frac{۱}{۷}$$

است. لذا، اگر دایره‌ای به مرکز محل تلاقی قطرهای مربعی که شامل حداقل سه نقطه است و به شعاع $\frac{۱}{۷}$ رسم کنیم، حتماً ۳ نقطه را شامل می‌شود.

سایر تمرین‌ها

۱۵. هفت خط روی صفحه داده شده است که هیچ دو تای آن‌ها با هم موازی نیستند. ثابت کنید دو خط وجود دارد که زاویه‌ی بینشان کمتر از ۲۶ درجه است. آیا می‌توانیم همین ادعا را درباره ۲۵ درجه نیز داشته باشیم؟

۱۶. پنج نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۱ قرار داده شده‌اند. ثابت کنید دو نقطه از آن‌ها در فاصله‌ی کمتر از ۰/۵ از یک‌دیگر قرار دارند.

راهنمایی: سه میانه‌ی این مثلث را رسم کنید. این میانه‌ها مثلث را به چهار مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر تقسیم می‌کنند.

۱۷. نقاط یک شبکه‌ی مستطیل شکل به دو رنگ، رنگ‌آمیزی شده‌اند. ثابت کند دو خط عمودی و دو خط افقی در این شبکه هستند که نقاط تقاطع‌شان دارای یک رنگ است.

راهنمایی: ۳ خط عمودی و ۹ خط افقی و تمام رنگ‌آمیزی‌های ممکن برای تقاطع‌شان را در نظر بگیرید.

و این هم یک مسئله‌ی واقعاً سخت

چنان‌چه مسائل قبلی را حل کرده باشید چندان هم مشکل نیست!

۱۸. ثابت کنید یکی از توان‌های ۲ هست که با ارقام ۱۹۹۹ شروع می‌شود: $۲^n=۱۹۹۹...$

راهنمایی: $\log_۲ ۱۰$ عددی اصم است (گویا نیست).

پی‌نوشت

۱. برای روان‌تر شدن متن، به جای «جان‌بول» و اسامی دیگر که در مقاله‌ی اصلی آمده، از اسامی ایرانی که برای خواننده‌ی فارسی زبان مأنوس‌تر است، استفاده شد.

منبع اصلی:

Alexandre V. Borovik, Elena V. Bessonova, what is The Pigeon-Hole Principle?
www.maths.manchester.ac.uk/~avb/pigeon.html

درسی که از آموزش ریاضی آموختم!

زهرا صباغ زاده فیروز آبادی
دبیر ریاضی میبد یزد و دانشجوی کارشناسی ارشد
آموزش ریاضی ـ دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

اشاره

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل‌نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیأت تحریریه‌ی مجله، جست‌و‌جو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل‌نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجله‌ی خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال دارند. به همین دلیل، آرزوی دیرینه‌ی دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی می‌رود تا تحقق یابد. درنتیجه، با نظر هیئت تحریریه‌ی مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. درضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ‌گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل‌نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآتر کنند.

البته لازم به توضیح است که دیدگاه‌های مطرح شده، الزاماً همسو با سیاست‌ها و دیدگاه‌های دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نیستند.

> **دبیران و آموزشگران باید با بهبود روش‌های تدریس و طرز تفکر خود، به جامعه‌ی آموزشی روح ببخشند**

روزی که برای انتخاب محل خدمت به اداره‌ی کل استان رفته بودم، به دلیل سابقه‌ی درخشان دوران تحصیلم و کسب رتبه‌ی دوم در دانشگاه، مطمئن بودم که شهرستان محل سکونتم را می‌توانم برای خدمت انتخاب کنم. بعد از مدتی فرم‌هایی به متقاضیان دادند تا امتیازاتمان را در آن بنویسیم. به فرم نگاه کردم، خیلی از موارد از جمله متأهل بودن، همسر فرهنگی بودن، و... شامل حال من نمی‌شد. به‌دنبال امتیاز رتبه و معدل بودم که دیدم رتبه‌ی دوم ۰/۵ نمره. چندبار خواندم فکر می‌کردم اشتباه کرده‌ام ولی نه درست بود. با توجه به امتیازات بالا، به‌عنوان مثال متأهل بودن ۲۰ امتیاز و همسر فرهنگی داشتن ۵ امتیاز، رتبه‌ی دوم ۰/۵ امتیاز برای من که ۸ سال ریاضی را براساس منطق خوانده بودم و همه چیز را می‌خواستم با فرمول و معادله حل کنم و حرفم را با دلیل ثابت کنم، غیر منطقی بود.

چند بار امتیازات را خواندم تا بتوانم رابطه‌ی این امتیازات را به‌دست آورم، ولی این دفعه برخلاف اکثر مواقع، در حل این مسئله شکست خوردم! باور کردنی نبود. من که همیشه بعد از خواندن نمراتم در مدرسه یا دانشگاه بین هم‌کلاسی‌هایم سربلند و خوشحال بودم، این‌بار و شاید برای اولین‌بار از داشتن چنین رتبه‌ای خوشحال نبودم. امتیازاتمان را به مسئول کارگزینی دادیم. بعد از یک ساعت، به‌ترتیب امتیاز وارد اتاق می‌شدیم تا شهرستان محل کارمان را مشخص کنند. نوبت به من رسید. وارد اتاق شدم. شهر محل سکونتم خواهان یک دبیر ریاضی

بود که آن هم توسط نفر قبل از من انتخاب شده بود. البته با پرس و جویی که از رئیس گروه ریاضی شهرمان کرده بودم، می‌دانستم شهرِ ما، بیش‌تر از این‌ها به دبیر ریاضی نیاز دارد ولی به هر دلیل، فقط برای یک نفر درخواست داده بود.

البته می‌دانم که در تمام کشورها، سیاست با آموزش و پرورش عجین شده است. نمی‌دانستم فاصله‌ی چند شهری که باقی مانده بود تا شهر محل سکونتم چقدر است؟ مردمش چه فرهنگی دارند؟... به هرحال، شانسی یکی از شهرها را انتخاب کردم اما تا چند روز از این مسئله گیج و مبهوت بودم.

بعد از پرس و جو، با کوله باری از آموخته‌های ریاضی وارد آن شهر شدم. من دانش‌آموخته‌ی دوره‌ای بودم که بنا به گفته‌ی کلمنتس و الرتون (۱۹۹۶، ص ۶۱ و ۶۲)، اجرای برنامه‌های ریاضی جدید در دبیرستان‌ها اجباری شده و در آن نمادها بسیار اهمیت داشتند. یادم می‌آید که چندین بار به‌خاطر درست ننوشتن، از سوی استادم مورد تمسخر و تنبیه روحی قرار گرفتم. او می‌گفت که معلم ریاضی خودش باید ریاضی و علائم ریاضی را به‌خوبی بداند تا بتواند به‌طور دقیق آن‌ها را به یادگیرندگان منتقل کند. تأکید معلم‌ها بیش‌تر روی فرمول‌ها و نام‌گذاری قوانین (مانند جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و...) تا دانش اساسی ریاضی «در آن زمان، معلم در مرکز یا جلوی کلاس می‌ایستاد یا می‌نشست» همه به او و چیزی که می‌گفت نگاه می‌کردند» (پولیا، ۱۹۶۹). شاید یکی از دلایلی که من رشته‌ی ریاضی را انتخاب کردم این بود که در سه سال دوره‌ی راهنمایی، یک دبیر ریاضی داشتم که مانند برخی از دبیران، عادت نداشت پشت میز بنشیند و به ما بفهماند که بین او و ما فاصله‌ای عمیق وجود دارد. او در نیمکت کنار ما می‌نشست و من گرمی بدنش را احساس می‌کردم.

طراحان برنامه‌ی درسی ریاضی باید جوانان را صاحب فکر و اندیشه بدانند نه جعبه‌های خالی که توسط دبیران، بسته‌های اطلاعات در آن جاسازی می‌شود

در آن زمان رشته‌ی ریاضی برای اقلیتی از دانش‌آموزان بود. اکثر خانواده‌ها بر این عقیده بودند که رشته‌های ریاضی فقط به درد پسرها می‌خورد؛ یا بسیاری معتقد بودند که فقط فرزندان ثروتمندان باید به مدرسه، آن هم رشته‌ی ریاضی بروند. درحقیقت «ریاضی مدرسه‌ای، غربالی برای کسانی بود که توانایی بیش‌تری داشتند» (کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶، صص ۴۲ و ۴۳) و به همین دلیل، کسانی که ریاضی می‌خواندند ـ مخصوصاً دختران ـ احساس غرور و نخبه بودن در بین اطرافیان خود داشتند. به‌خصوص اگر شاگرد ممتاز هم بودند که دیگر هیچ (مانند خود من!!!).

من آموخته بودم که همه‌ی مسائل را می‌توان به صورت ریاضی صورت‌بندی کرده و حل کرد. حال هرچه مسئله بزرگ‌تر و پیچیده‌تر باشد، احتمالاً متغیرهایش بیش‌تر است، ولی می‌شود آن را حل کرد. با این پیشینه وارد آن شهر شدم و به کار تدریس مشغول گشتم. اولین روزی که وارد مدرسه شدم، مدیر مدرسه مرا به جای دانش‌آموز تازه‌واردی اشتباهی گرفت (در آن شهر، اکثراً قوی‌هیکل و درشت‌اندام بودند و من از بیش‌تر دانش‌آموزان، ریزاندام‌تر بودم). به‌هرحال، اولین ساعت تدریسم، ریاضی پایه‌ی اول دبیرستان بود. وارد کلاس شدم. اضطراب تمام وجودم را گرفته بود. هنگامی که دانش‌آموزان بنابر عادت دوره‌ی راهنمایی‌شان، سلام و صبح بخیر گفتند. سعی کردم چیزهایی که در دانشگاه و در کلاس‌های تمرین دبیری آموخته بودم را اجرا کنم، ولی انگار نمی‌شد حرف‌های استادان را تقلید کرد. از کتاب‌های روان‌شناسی که در اوقات فراغت خوانده بودم کمک گرفتم و کمی خود را آرام کردم. خودم را معرفی کردم و وقتی گفتم دبیر ریاضی هستم، رنگ بعضی از آن‌ها پرید. فکر کنم به یاد نمرات بد ریاضی‌شان، دبیران خشک و سخت‌گیرشان، مثلث بی‌روح و... افتاده بودند. بعد از کمی صحبت با آن‌ها، یکی از دانش‌آموزان گفت که «شما اصلاً شبیه دبیران ریاضی نیستید.» با خودم فکر کردم که راستی دبیران ریاضی چه شکلی‌اند؟

به هر حال، کم‌کم در کار تدریس راه افتادم و سعی کردم تمام آموخته‌هایم را به دانش‌آموزانم منتقل کنم. در موقع تدریس، همه گوش می‌دادند و به علامت فهمیدن، بعضی مواقع سر تکان می‌دادند. یک ماه گذشت و از فصل اول که مجموعه‌ها بود امتحان گرفتم. با رضایتی که از دانش‌آموزان داشتم، انتظار نمرات بالایی از کلاس داشتم ولی....

نمره‌ها حاکی از حقیقت تلخی بود. ناامید شده بودم. چون برای فهماندن ریاضی به آن‌ها خیلی تلاش کرده بودم. نمره‌ها را به آن‌ها اعلام کردم و علت را پرسیدم. در عین ناباوری گفتند که شما خیلی خوب توضیح می‌دهید ولی ما زبان شما را نمی‌فهمیم (منظورشان لهجه بود، هر چند من به لهجه‌ی بومی خودم صحبت نمی‌کردم). یکی از دانش‌آموزان زرنگ گفت: «خانم اگر اجازه دهید، من بعد از شما بعضی از چیزها را برای دانش‌آموزان توضیح دهم.» من قبول کردم. خیلی جالب بود، او که توضیح می‌داد، انگار آن‌ها بهتر می‌فهمیدند.

هر چند او جملات مرا به‌کار می‌برد، ولی با گویش و زبان خودش مثلاً به تقسیم بزرگ «تقسیم نردبانی» و به دایره، «گردی» می‌گفت. حالا با تمام وجود این جمله را درک می‌کنم که «آموزش، مستقل از فرهنگ و زبان نیست» (کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶، ص ۳۱). البته معلمان در دانشگاه‌ها چگونگی آموزش و تدریس را فرامی‌گیرند و همین روش را دقیقاً می‌خواهند روی تمام دانش‌آموزان در تمام پایه‌های تحصیلی و در تمام شهرها و روستاها با فرهنگ‌های مختلف پیاده کنند. غافل از این‌که هر دانش‌آموزی مطابق با سن، محیط و فرهنگ جامعه‌ای که در آن زندگی می‌کند، نیازهایی دارد و درحقیقت، «روشی که برای گروهی از یادگیرندگان خوب و مناسب است، برای گروه دیگر چنین نیست» (کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶، ص ۳۴).

به هر حال، اولین امتحان، درس‌های زیادی به من یاد داد و متوجه حقایقی شدم که قبلاً به آن‌ها توجه نکرده بودم. در دانشگاه‌ها، ما به‌دنبال ایده‌آل‌هایی بودیم که در عالم واقعیت وجود ندارند. مثلاً به من آموخته بودند که «دانش‌آموزان باید خلاقانه فکر کنند، راه و رسم ابتکار در عمل را فراگیرند، مشارکت را یاد بگیرند و برای یکدیگر مفید باشند، یک زندگی عاقلانه را دنبال کنند و جنبه‌های زیبایی‌شناختی و هنرمندانه‌ی طبیعت انسانی خود را پرورش دهند.» اما چگونه؟! به‌عنوان آموزشگر می‌گوییم می‌خواهیم دانش‌آموزان مشارکت با یکدیگر را یاد بگیرند ولی از نظام نمره‌دهی استفاده می‌کنیم که اساس آن تشویق رقابت است. می‌گوییم می‌خواهیم جوان‌ها تفکر خلاقانه را یاد بگیرند ولی برای آموزش، فهرستی از هدف‌های رفتاری در اختیار داریم که جایی برای برداشت‌های فردی نمی‌گذارد. آرمان‌های ما با آن‌چه که در جست‌وجوی آن هستیم تا کارایی خودمان را محک بزنیم، سازگار نیستند. درحقیقت آرزوهای آموزشی که آموزشگران برای دانش‌آموزان دارند و گاهی به‌صورت اهدافی باشکوه، در سطح اجرایی اعلام شده و به‌صورت عبارت‌هایی با دیدگاه‌های وسیع منتشر شده‌اند، به‌ندرت به‌طور کامل در مورد دانش‌آموزان به تحقق رسیده است (آیزنر، ۲۰۰۰).

هر دانش‌آموزی مطابق با سن، محیط و فرهنگ جامعه‌ای که در آن زندگی می‌کند، نیازهایی دارد

آموزش ریاضی مستقل از فرهنگ و زبان نیست

اوایل کار توقع داشتم که تمام دانش‌آموزان ریاضی را به‌خوبی یاد بگیرند، تمام اثبات‌ها، قضایا و فرمول‌ها را به‌خوبی بفهمند چون فکر می‌کردم در آینده به آن‌ها نیاز دارند. ولی کم‌کم فهمیدم که سطح تفکر دانش‌آموزان متفاوت است. شاید گروهی امروز مطالب را بفهمند و گروهی یک ماه یا یک سال بعد. ضمناً ریاضی که آن‌ها در آینده لازم دارند با هم متفاوت است. مهندس، بقال، کارگر، حسابدار، خیاط، استاد دانشگاه و زن خانه‌دار، همه نباید اطلاعات ریاضی یکسانی داشته باشند. «ریاضیاتی که مورد نیاز (۱) غیرحرفه‌ای (آماتور)، (۲) ریاضی‌دان کاربردی، (۳) معلم ریاضی و (۴) ریاضی‌دان محقق است، آن‌قدر با هم متفاوتند که هر کدام، نیازمند یک دستور کار متفاوت هستند. حتی زمانی که هر چهار گروه بخواهند بدانند که اصل موضوع چیست، بدون‌شک هر کدام از آن‌ها به گونه‌ای متفاوت به آن می‌پردازند» (آقاسی، ۱۹۸۰).

آقاسی (۱۹۸۰) در ادامه، بیان می‌کند که «طراحان برنامه‌ی درسی ریاضی باید جوانان را صاحب فکر و اندیشه بدانند نه جعبه‌های خالی که توسط دبیران، بسته‌های اطلاعات در آن جاسازی می‌شود. تا کِی دبیران ریاضی به‌خاطر بخش‌نامه‌های بی‌اساس که از تاریخ مصرفشان گذشته، باید مانع استفاده‌ی دانش‌آموزان از تکنولوژی جدید شوند؟ ما هنوز طوری جدول ضرب را تدریس می‌کنیم که انگار ماشین‌حساب‌های جیبی وجود ندارند. اما کودکان می‌دانند که ماشین‌حساب‌های جیبی وجود دارند و [به همین دلیل]، حساب استاندارد را فقط یک تنبیه صِرف می‌بینند.»

سؤال من از سیاستمداران آموزشی این است که شما از چه زمانی دبیران و دانش‌آموزان را کاملاً مسئول و محقق واقعی در نظر می‌گیرید؟ برنامه‌های درسی و به‌خصوص ریاضی طوری باید طراحی شوند که جوانان بتوانند از امکانات به‌روز آن استفاده کنند. با این تجارب فهمیده‌ام که تا بیدار شدن سیاستمداران آموزشی، ما دبیران و آموزشگران نیز نباید خودمان را به خواب بزنیم؛ بلکه باید با تغییر در روش‌های تدریس و طرز تفکر خود، به جامعه‌ی آموزشی روح ببخشیم. هدف ما از آموزش باید تربیت شهروندان مستقل، آزاد و توانا باشد.

منابع

۱. آقاسی، جوزف، (۱۹۸۰)، در باب آموزش ریاضی: انقلاب لاکاتوش. ترجمه‌ی زهرا گویا و یونس فردین‌پور کریمی، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**. شماره‌ی ۷۵، صص ۴-۱۴، دفتر کمک‌آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۲. آیزنر، الیوت دبلیو، (۲۰۰۰) آنان که گذشته را نادیده می‌گیرند...، چمن‌آرا، سپیده، گویا، زهرا. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۶۹، صص ۴-۱۸، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۳. پولیا، جورج، (۱۹۶۹)، اهداف آموزش ریاضی، طالب‌زاده، علیرضا، گویا، زهرا. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۷۲، صص ۳۵-۴۱، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۴. کلمنتس، الرتون. (۱۹۹۶). **تحقیقات آموزش ریاضی، گذشته، حال، آینده**. انتشارات یونسکو. (ترجمه در حال آماده شدن برای چاپ است).

گزارش و خبر

چکیده‌های پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

رشد مفهومی در ریاضیات، سبک‌های مختلف آن: کانون انباشتگی نظریه‌های گوناگون

پژوهشگر: حسین عبدی رکن‌آبادی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدائی

استاد مشاور: دکتر زهرا گویا

داوران: دکتر محمدرضا مولایی، دکتر محمود محسنی مقدم

تاریخ دفاع: ۱۳۸۶/۶/۲۹

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر، کرمان

چکیده

چیستی و چگونگی فرایند یادگیری ریاضیات و تحول ریاضیاتیِ افراد، همواره از سؤالات اساسی حوزه‌ی آموزش ریاضی به شمار می‌رود. نظریه‌های تحول شناختی به دو رده‌ی اساسی تقسیم می‌گردند: **چارچوب‌های عمومی** تحول بلندمدت شناختی در طول دوره‌ی زندگی، و **چارچوب‌های موضعیِ** رشد مفهومی.

در بخش نظری این مطالعه ضمن اشاره به برخی چارچوب‌های عمومی رشد شناختی، مانند نظریه‌ی مرحله‌ای پیاژه، چارچوب رشد هندسی فن‌هیلی و فن‌هیلی (۱۹۸۶) و مدل SOLO از بیگز و کولیس (۱۹۸۲)، چند چارچوب موضعی تأثیرگذار از جمله اصول رشد مفهومی پیاژه، نظریه‌ی اسفارد (۱۹۸۲) و چرخه‌ی UMR در مدل SOLO ارائه شده است.

قسمت بعدی به تبیین نظریه‌ی جهانی دبینسکی و همکاران (۱۹۸۸، ۱۹۹۶، ۲۰۰۱ و...) در مورد رشد مفهومی، تحت عنوان APOS، اختصاص دارد که از مراحل خطّی **عمل ـ فرایند ـ شیئ ـ طرحواره** تشکیل شده است. تال و همکاران او (۱۹۹۴، ۲۰۰۴، ۲۰۰۵ و...) به نقد این نظریه پرداخته‌اند. اهمّ انتقادات تال بر چارچوب دبینسکی، در قالب تفکیک سه جهان ریاضیات **مجسّم ـ مفهومی، نمادین ـ فرهومی و صوری ـ اصل موضوعی،** به این نکته مربوط می‌شود که فرایند APOS عمدتاً منحصر به **ریاضیات نمادی** است و در این حوزه نیز کار دانشجویانی را که با سبک یا دیدگاه‌های شهودی به کار ریاضی می‌پردازند توجیه نمی‌کند (پینتو و تال ۱۹۹۸ و ۲۰۰۲). در ادامه‌ی مطلب، مطالعات وبر و همکاران (۲۰۰۵ و ۲۰۰۶) که در امتداد پژوهش‌های تال به سبک‌های مختلف ساخت و اثبات ریاضی نظر داشته‌اند ارائه شده است.

قسمت اصلی این مطالعه عبارتست از تحلیل مصاحبه‌های دو دانشجوی کارشناسی رشته‌ی ریاضی که از دو دیدگاه متفاوت صوری و غیرصوری برخوردارند. این پژوهش با دو مصاحبه‌ی غیرساختاری با اساتید ریاضیات در مورد نقش سبک‌های مختلف در سه زمینه‌ی کار دانشجویان، تدریس ریاضی و پژوهش ریاضیات تقویت گردیده و ایده‌ای نیز برای تدریس دترمینان در جبر خطی به شیوه‌ی معنایی ارائه شده است.

به‌طور خلاصه، نظریه‌ی APOS برای تحلیل ساخت‌وساز و یادگیری ریاضی، بخصوص در تحلیل سبک‌های متفاوت کار

ریاضی که در زمینه‌های گوناگونی (مانند یادگیری، تدریس و پژوهش) حضور و نقش دارند، چارچوب کاملی نیست. هم‌چنین باید در سه محور فوق به تفاوت‌ها توجه داشته باشیم؛ لکن رده‌بندی، تعیین و تشخیص ویژگی‌ها و حدود و نحوه‌ی توجه به این شیوه‌ها یا سبک‌ها به پژوهش‌های عمیقی نیازمند است.

بررسی بخش آموزش حل مسئله‌ی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی راهنمایی تحصیلی در رفتار و دیدگاه معلمان ریاضی و میزان تأثیر این بخش بر توانایی حل مسئله‌ی دانش‌آموزان

پژوهشگر: مرضیه مهتابی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدائی

استاد مشاور: دکتر زهرا گویا

داوران: دکتر مهدی رجبعلی‌پور، دکتر اسفندیار اسلامی

تاریخ دفاع: ۸۶/۱۱/۶

دانشگاه محل تحصیل: دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر، کرمان.

چکیده

همه‌ی افراد با توجیه‌های مختلف، نیاز روزافزونی به یادگیری ریاضی دارند و اگر نگوییم ریاضیات یعنی حل مسئله، اما باید اذعان کنیم که حل مسئله، باید بخش عمده‌ای از دانش و تجربه‌ی افراد، در عرصه‌ی کار ریاضی باشد. پس هر گامی که در جهت بهتر شدن کیفیت حل مسئله‌ی افراد برداشته شود، تا حد زیادی به بهبود زندگی ایشان کمک خواهد کرد. هدف اصلی این تحقیق، بررسی بخش آموزش حل مسئله‌ی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی راهنمایی در رفتار و دیدگاه دبیران ریاضی و میزان تأثیر این بخش بر توانایی حل مسئله‌ی دانش آموزان بوده است. برای این منظور پس از مطالعه‌ی دقیق جوانب موضوع، دانش‌آموزان و معلمان ناحیه‌ی ۲ کرمان به عنوان جامعه‌ی آماری انتخاب شدند. روش تحقیق توصیفی، و ابزار جمع‌آوری اطلاعات پرسش‌نامه بوده است. نتایج تحقیق نشان داد که:

ـ بخش آموزش حل مسئله تأثیر چندانی در رفتار حل مسئله‌ی دانش‌آموزان نداشته است.

ـ معلم‌های ریاضی از روش‌های تدریس مؤثری برای آموزش حل مسئله استفاده نمی‌کنند و برخی از آن‌ها این بخش را اصلاً تدریس نمی‌کنند.

ـ معلم‌های ریاضی نسبت به مبانی نظری حل مسئله دانش کمی دارند؛ هم‌چنین اگرچه اکثراً وجود آموزش حل مسئله را در برنامه‌ی درسی مدرسه مفید ارزیابی می‌کنند ولی با شرایط حاضر آن را بر عملکرد دانش‌آموزان مؤثر نمی‌دانند.

ـ از دیدگاه معلم‌های ریاضی، محتوای این بخش از کتاب در حدود ۶۰ درصد از معیارهای محتوایی لازم برای یک کتاب درسی را داراست.

درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع

پژوهشگر: بی‌بی زکیه پرهیزگار

استاد راهنما: دکتر زهرا گویا

استاد مشاور: دکتر امیرحسین اصغری

داوران: دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر احمد شاهورانی

تاریخ دفاع: ۸۷/۸/۶

دانشگاه محل تحصیل: دانشکده‌ی ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضیات است که گوناگونی

تفسیرها و بازنمایی هایش شگفت آور است . سیر تحول توسعه ی مفهوم تابع ، تاریخی طولانی و پر فراز و فرود دارد که منجر به ایجاد بازنمایی های مختلف مفهوم تابع شده است . بدین جهت ، محققین به این نتیجه رسیده اند که توانایی شناسایی و نمایش یک مفهوم ریاضی از جمله تابع در بازنمایی های مختلف ، و انعطاف در حرکت از یک بازنمایی به بازنمایی دیگر ، برای یادگیری آن مفاهیم ضروری هستند . این محققان دریافته اند که این فعالیت ها ، همان طور که به دانش آموزان اجازه می دهد تا روابط غنی را ببینند ، به همان اندازه نیز باعث توسعه ی درک عمیق تر مفاهیم می شود . بدین سبب ، تحقیقات بسیاری با هدف شناخت دشواری های دانش آموزان در برخورد با بازنمایی های چندگانه و چگونگی تأثیر آن ها بر تعمیق فهم و درک مفاهیم ریاضی توسط آن ها انجام شده است . در همین راستا نیز ، تحقیقی با دو هدف عمده ی زیر طراحی و اجرا شد :

الف) شناخت دشواری ها و پیچیدگی های احتمالی دانش آموزان در برخورد با بازنمایی های چندگانه ی تابع ؛

ب) بررسی چگونگی استفاده ی دانش آموزان از ویژگی های تعریف تابع در بازنمایی های مختلف .

شرکت کنندگان در این تحقیق ، دانش آموزان متوسطه بودند و جمع آوری داده های این تحقیق ، از طریق پرسش نامه و مصاحبه انجام شد و شامل سؤال هایی در مورد بازنمایی های چندگانه ی تابع از جمله مجموعه ی زوج مرتب ، نمودار ، فرمول و عبارت بود .

تجزیه و تحلیل داده ها نشان داد که دانش آموزان در دیدن ارتباط بین بازنمایی های مختلف تابع ، ناتوان بودند . هم چنین ، دانش آموزان از تعریف تابع برای نمایش تابع به صورت زوج مرتبی یا به صورت نمودارهای ون که جزو مدل های اولیه ی نمایش تابع هستند ، استفاده کردند و در برخورد با دو بازنمایی نموداری و فرمول ، بیش تر بر تجارب قبلی تکیه داشتند و عمدتاً با استفاده از تکنیک هایی که می شناختند ، به استدلال تشخیص تابع بودن پرداختند .

پژوهشگر با نتیجه گیری از یافته های این تحقیق ، بر استفاده از مجموعه ای از مثال های متنوع از تابع های گوناگون برای تقویت تصور دانش آموزان نسبت به مفهوم تابع تأکید می کند . هم چنین ، توصیه می شود که برای معرفی یک مفهوم جدید ریاضی ، از بازنمایی های چندگانه استفاده شود زیرا این مطالعه نیز به این نتیجه رسید که برای یادگیری مفهوم تابع ، اتصال ، مقایسه و تبدیل از یک حالت بازنمایی به حالت دیگر بازنمایی ضروری است . این فعالیت باعث می شود تا دانش آموزان بتوانند مهارت های نمایش و تشخیص مفهوم تابع را در بازنمایی های مختلف کسب کنند و بین آن ها ، اتصال و ارتباط برقرار نمایند .

تصورات و تعاریف از مفهوم تابع

پژوهشگر : مهدی جوادی

استاد راهنما : دکتر احمد شاهورانی

استاد مشاور : دکتر زهرا گویا

داوران : دکتر اسماعیل بابلیان ، دکتر امیرحسین اصغری

تاریخ دفاع : ۸۷/۱۱/۱۲

دانشگاه محل تحصیل : دانشکده ی ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

هدف این تحقیق ، بررسی چگونگی فهم و درک دانشجویان سال اول دانشگاه از مفهوم تابع بود ، که در دوره ی متوسطه در رشته ی ریاضی و فیزیک تحصیل کرده اند و محصول نظام آموزشی موجود هستند . در جهت تحقق این هدف ، از مدل مفهومی «تعریف مفهوم» و «تصور مفهوم» که توسط تال و وینر (۱۹۸۱) به طور رسمی به حوزه ی آموزش ریاضی معرفی شده ، استفاده شد تا بتوان با کمک آن ، با ساختار شناختی دانشجویان و تصورات و تعریف های مفهوم رایج بین آن ها از مفهوم تابع آشنایی عمیق تری پیدا کرد .

به منظور آشکارسازی تصورات و تعریف های مفهوم دانشجویان از مفهوم تابع ، با استناد به ادبیات پژوهشی این حوزه ، آزمونی حاوی هشت سؤال ، طراحی و اجرا شد که یک سؤال برای

شناخت تعریف‌های مفهوم شخصی، و هفت سؤال بعدی برای کشف تصورات مفهوم دانشجویان برای مفهوم تابع بود. سپس، تجزیه و تحلیل داده‌ها براساس مدل مفهومی مذکور انجام گرفت و تعریف‌های مفهوم و تصورات مفهوم استخراج شده از پاسخ‌ها، دسته‌بندی شدند.

این تحلیل نشان داد که تصور ضابطه داشتن یک تابع ـ یعنی هر تابع لزوماً دارای یک ضابطه و فرمول مشخصی است ـ تصوری غالب در بین شرکت‌کنندگان در تحقیق بود که مشخصه‌ی «دلخواه بودن» یک تابع را دربرنمی‌گرفت. در واقع، ضابطه داشتن یک تابع، با دلخواه بودن آن، بدین معنی که مقدار یک تابع در هر نقطه‌ی دلخواه داده شده مستقل از مقدار آن در نقطه‌ی دیگر است، تناقض دارد و این تصور، مانع از درک تعریف رسمی تابع می‌شود. هم چنین، مشخصه‌ی «تک ارزشی بودن» که عنصر کلیدیِ دیگری در تعریف رسمی تابع می‌باشد نیز، در تصورات مفهومِ شرکت‌کنندگان نسبت به مفهوم تابع، نقش کم‌رنگی داشت. در واقع، تصورات مفهوم شناسایی شده در این مطالعه، زمینه‌ی مناسبی برای درک دو مشخصه‌ی اساسی از مفهوم تابع یعنی «تک ارزشی بودن» و «دلخواه بودن» را ایجاد نکردند.

این در حالی است که در کتاب حسابان سال سوم متوسطه‌ی رشته‌ی ریاضی و فیزیک، برای ورود به مبحث تابع، تلاش شده تا فرصت‌های متنوعی برای ساختن تصوراتی از مفهوم تابع برای دانش‌آموزان ایجاد شود و سپس تعریف رسمی تابع ارائه گردد. انتظار می‌رفت که چنین ورودی به مطلب بتواند تصورِ مفهوم دانش‌آموزان را تقویت کند و زمینه‌ی مساعدی برای فهمیدن تعریفِ مفهوم فراهم آورد. این مطالعه نشان داد که تصوراتی که کتابِ حسابان قصد داشته است در دانش‌آموزان ایجاد کند، بیش‌تر در حد یک تمثیل نقش داشته‌اند و می‌توان حدس زد که این امر، بیش‌تر به نوع تدریسی که آن‌ها دریافت کرده‌اند و محدودیت فرصت‌های یادگیری که برای ایشان ایجاد شده است مربوط می‌شود. به بیان دقیق‌تر، این دانش‌آموزان، به اندازه‌ی کافی فرصت درگیر شدن با این تمثیل‌ها و به چالش کشیدن این تصورات را پیدا نکرده‌اند. بدین سبب در آن‌ها، تصوراتی که زیربنای معرفی تعریف رسمی تابع باشد، ساخته نشده است. بررسی چگونگی ایجاد ارتباط بین تصورِ مفهوم و تعریفِ مفهوم دانش‌آموزان و نقش تدریس و فرصت‌های یادگیری درِ تعمق بیش‌تر هر دو، می‌تواند موضوع پژوهش‌های بعدی باشد.

نقش مثال‌ها در آموزش ریاضی

پژوهشگر: حسین کثیری
استاد راهنما: دکتر امیرحسین اصغری
استاد مشاور: دکتر زهرا گویا
داوران: دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر احمد شاهورانی
تاریخ دفاع: ۸۸/۲/۱۳
دانشگاه محل تحصیل: دانشکده‌ی ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

مثال‌ها نقش مهمی در آموزش ریاضیات ایفا می‌کنند به همین دلیل در این تحقیق برآن شدیم تا ارتباط بین مثال‌ها و فهم ریاضیات را مورد پژوهش قرار دهیم. برای پاسخ به این پرسش، ما سؤالات زیر را مدنظر قرار دادیم:

● مثال‌ها از چه طریقی تولید می‌شوند؟
● آیا چک کردن و چک نکردن مثال‌ها با فهم مطالب در ارتباط است؟
● آیا هنگام تولید مثال و چک کردن مثال به یک جنبه از مفهوم توجه می‌شود یا جنبه‌های مختلف آن؟
● آیا توانایی در تولید مثال‌های بیشتر از یک مفهوم با درک بهتر آن مفهوم ارتباط دارد یا خیر؟

در این تحقیق از روش مصاحبه برای جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها استفاده کردیم. برای انجام این پژوهش دانش‌آموزان مقاطع سوم، چهارم و پنجم ابتدایی انتخاب شدند که به اقتضای سنشان دانش ریاضی اندکی داشتند. در این تحقیق سعی بر آن شد تا با انجام مصاحبه و تعقیب روش فکری دانش‌آموزان از طریق پرسش‌های متوالی و بررسی چک‌نویس‌های دانش‌آموزان مثال‌های تولید شده توسط آن‌ها بررسی شود.

نامه‌ها و مطالب دوستان زیر از آغاز سال ۸۸ تا کنون به دستمان رسیده است.

از همه‌ی آن‌ها سپاسگزاریم و منتظر مطالب شما برای صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی هستیم. مهلت ارسال آثار برای این شماره‌ی ویژه، پایان آذرماه است.

یوسف آذرنگ، از آذربایجان غربی؛
علیرضا زارع کردیانی، از خراسان رضوی؛
ندا مهدوی غروی، از آمل؛
مژگان فریدون نژاد، از اصفهان؛
علی اکبر جاویدمهر، از قم؛
زهره ترازی، از خراسان رضوی؛
محمد روزدار و معصومه ندائی، از لردگان؛
نفیسه جواهریان، از کرمان؛
نرگس عصارزادگان، از اصفهان؛
مصطفی شیخ زاده، از خراسان رضوی؛
علی غلامیان، از بجستان؛
فاطمه تکاملی ماسوله؛ از رشت؛
مریم نقدی، از دورود لرستان؛
سعید چتر آبنوس، از شیراز؛
مریم دهقانپور، از کرمان.

Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Roshd Mathematics Education Journal 97

Vol. 27 No. 1 2009 ISSN: 1606 - 9188

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: riazi@roshdmag.ir