



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
دوره‌ی بیستم / شماره‌ی ۱ / پاییز ۱۳۸۹

سال همت مضاعف، کار مضاعف

سرمقاله/۲

ریاضیات در ایران (۸) / پرویز شهریاری/۳

گراف‌های منتظم و کامل / حمیدرضا امیری/۵

تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران (۲) / غلامرضا یاسی‌پور/۸

مسائل (x)ها / احمد قندهاری/۱۲

آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری Mathematica / دکتر محمدعلی فریبرز عراقی/۱۷

کشف یک عدد با بازی ریاضی / میرشهرام صدر/۲۱

روشی دیگر برای محاسبه‌ی وارون ماتریس / سیدمحمد رضا هاشمی موسوی/۲۲

گزیده‌ای از مسائل المپیادهای ریاضی لنینگراد / هوشنگ شرقی/۲۷

رویکرد هندسی - رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۲) / محمد هاشم رستمی/۳۰

درباره‌ی یکی از نظریات هوشمندانه‌ی ابوالوفای بوزجانی در هندسه / دکتر احمد شرف‌الدین/۳۵

اثبات بازگشتی یا اثبات از آخر به اول / عنایت‌الله راستی‌زاده/۳۸

اعداد موهومی / غلامرضا یاسی‌پور/۴۲

تعیین دامنه‌ی توابع با استفاده از رسم نمودار / احسان یار محمدی/۴۵

سرگرمی برای اندیشه‌پروزی و ذهن‌ورزی / حسن نصیرنیا/۵۰

هم‌نهشتی و کاربردهای آن (۱۱) (رمزنگاری و رمزگشایی) / سید محمد رضا هاشمی موسوی/۵۳

نابرابری‌ها / احمد قندهاری/۵۷

با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۸) / غلامرضا یاسی‌پور/۶۱

● مدیر مسئول: محمد ناصری ● سردبیر: حمیدرضا امیری

● مدیر داخلی: میرشهرام صدر ● طراح گرافیک: جعفر وافی

● هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی،

احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،

سید محمد رضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور

و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری

● ویراستار ادبی: لعلیا عروجی

● پایگاه اینترنتی: www.roshdmag.ir

● رایانامه: Borhanm@roshdmag.ir

● پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲ - ۰۲۱

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

● تلفن دفتر مجله: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۵۸۶۲

● تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۷۳۳۶۶۵۵ - ۰۲۱

● شمارگان: ۱۳۰۰۰ نسخه

● چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در

زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط

رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی

دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح معماهای ریاضی

● نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی

ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و...)

● رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود. ● مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافی مقاله‌ها آزاد است.

● مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

سرمقاله

«هذا من فضل ربّي»

وقتی برای چاپ اولین شماره‌ی مجله‌ی ریاضی رشد برهان و تولد این مجله، اولین جلسه‌ی هیئت تحریریه تشکیل شد و برای نام مجله، هریک از اعضا پیشنهادی دادند، استاد پرویز شهریاری نام برهان را به زبان آورد و این کلمه را خیلی با معنی و برای مجله‌ی ریاضی مناسب دانستند همه‌ی اعضای هیئت تحریریه نیز به اتفاق با این نام موافقت کردند و سرانجام این نام که هم یک اصطلاح ریاضی و هم یک واژه‌ی قرآنی است، برای مجله انتخاب شد.

از آن روزها حدود ۲۰ سال می‌گذرد و در آستانه‌ی ورود به بیستمین سال انتشار این مجله هستیم؛ مجله‌ای که در طول این ۲۰ سال فراز و نشیب‌های بسیاری را پشت سر گذاشته است و چه بسیار دانش‌آموزانی که از خوانندگان این مجله بوده‌اند و الآن در مشاغل گوناگون مشغول خدمت هستند. حتی تعدادی از این عزیزان، هنوز با مجله ارتباط دارند و آن را مطالعه می‌کنند. شما هم از هر کجا که در زمره‌ی علاقه‌مندان و خوانندگان این مجله قرار گرفته‌اید، می‌توانید با حفظ و نگه‌داری شماره‌های این مجله، جزو کسانی باشید که پس از حداکثر چهار سال دیگر که ان شاء الله وارد دانشگاه شدید، هم‌چنان با ما ارتباط داشته باشید (البته دفتر انتشارات کمک آموزشی در نظر دارد، تمام شماره‌های ۱ تا آخرین شماره‌ی امسال را در یک لوح فشرده در اختیار علاقه‌مندان قرار دهد).

به هر صورت ادامه‌ی کار مجله و رسیدن آن به ۲۰ سالگی در درجه‌ی اول مرهون لطف و فضل الهی بوده و در درجه‌ی دوم مدیران زحمات اعضای محترم هیئت تحریریه و مدیران مسئول و پشتیبانی شما خوانندگان عزیز که همواره پیشنهادات و انتقادات سازنده و راه‌گشایان توشه‌ی راه ما بوده و خواهد بود.

از شما دانش‌آموزان که مخاطبان اصلی این مجله هستید، درخواست دارم که با مجله ارتباط بگیریم (از طریق ارسال نامه یا سایت) و هیئت تحریریه را با نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود آشنا کنید. شاید سؤالات زیر بتواند سمت و سوی مناسب‌تری برای ایجاد این ارتباط فراهم سازد:

۱. چند درصد از مقالات و مطالب مجله برای شما قابل استفاده است؟
 ۲. از چه مقاله یا مطلبی بیشتر استفاده کردید؟
 ۳. آیا مطالب عمومی مانند تاریخ ریاضیات، مسئله، سرگرمی و... برای شما قابل استفاده بوده است؟
 ۴. کدام یک از مقالات از نظر روان‌تری برخوردار بوده است؟
 ۵. کدام مقاله کمک درسی، خودآموزتر از بقیه بیان شده است؟
 ۶. آیا جای مقاله یا مطلبی را در مجله خالی می‌بینید؟
 ۷. گرافیک مجله (صفحه‌آرایی، تیترها، طرح‌ها و...) را چگونه ارزیابی می‌کنید؟
 ۸. دستیابی شما به مجله از چه طریقی است و برای تهیه‌ی آن چه پیشنهادی دارید؟
 ۹. آیا «سرمقاله‌ی» هر شماره را مطالعه کرده‌اید؟ چقدر برای شما سودمند بوده است؟
 ۱۰. آیا معلمین شما از این مجله استفاده می‌کنند و آن را می‌شناسند؟
 ۱۱. چرا برای ما مقاله یا مسئله ارسال نمی‌کنید؟
 ۱۲. اگر قبلاً هم این مجله را مطالعه کرده‌اید و خاطره یا نکته‌ی مهمی در ارتباط با مجله دارید، برای ما بفرستید.
- در خاتمه، سال تحصیلی بسیار خوب و پراز موفقیتی برای همه‌ی شما عزیزان دانش‌آموز آرزو دارم و از درگاه حضرت حق، توفیق روزافزون برای شما خواستارم.

والسلام - سر دبیر



ریاضیات در ایران (۸)

پرویز شهریاری

کلیدواژه‌ها:

پورسینا، ابوعلی سینا، ابو عبدالله جوزانی، رساله‌های ریاضی پورسینا.

پورسینا

بوعلی حسین، فرزند عبدالله فرزند سینا که غالباً او را فرزند سینابوعلی می‌نامند، نزد اروپاییان به آوسین شهرت دارد. او در سال ۹۸۰ میلادی، در نزدیکی‌های «بخارا» متولد شد و در سال ۱۰۳۷ میلادی در همدان درگذشت. اکنون مقبره‌اش در همدان است.

پورسینا هم فیلسوف و پزشک بود و هم ریاضی‌دان و اخترشناس؛ دانشمند مشهوری که برای شرح زندگی او، باید به نوشته‌ی خودش که سرگذشت ۳۰ سال نخست زندگی‌اش را نوشته و نوشته‌ی شاگردش، از روزی که به نزد او آمد و تا آخر عمر که با او بود، مراجعه کرد.

«پدرم مردی بود از اهل بلخ و از آن‌جا به بخارا رفت. در زمان نوح‌بن منصور، او کارهای دیوانی را انجام می‌داد. پدرم دختری از اهل قریه بخواست و در آن‌جا بماند. من و برادرم همان‌جا به دنیا آمدیم... پدرم مرا نزد مردی فرستاد که سبزی فروختی و در ضمن حساب هندی هم می‌دانست تا از وی تعلیم یابم... پدرم، ابو عبدالله ناتلی را که دعوی فلسفه می‌کرد، به خانه‌ی ما آورد به این امید که از او فلسفه بیاموزم... تا آن که منطق را خواندم... بعد از آن خودم کتاب‌ها را مطالعه می‌کردم تا دانش منطق را محکم ساختم... در این حال، ناتلی از ما مفارقت کرد... در این وقت شانزده سال داشتم... پس از این پدرم فوت شد.»

ابوعلی سینا در سال ۴۰۴ به ری و سپس از ری در سال ۴۰۵ به قزوین و سپس همدان نزد شمس‌الدوله دیلمی رفت و در آن‌جا قرار یافت. او به ریاضیات و اخترشناسی کمتر پرداخته است، با وجود این کتاب‌های ریاضیات و اخترشناسی او را معرفی می‌کنم.

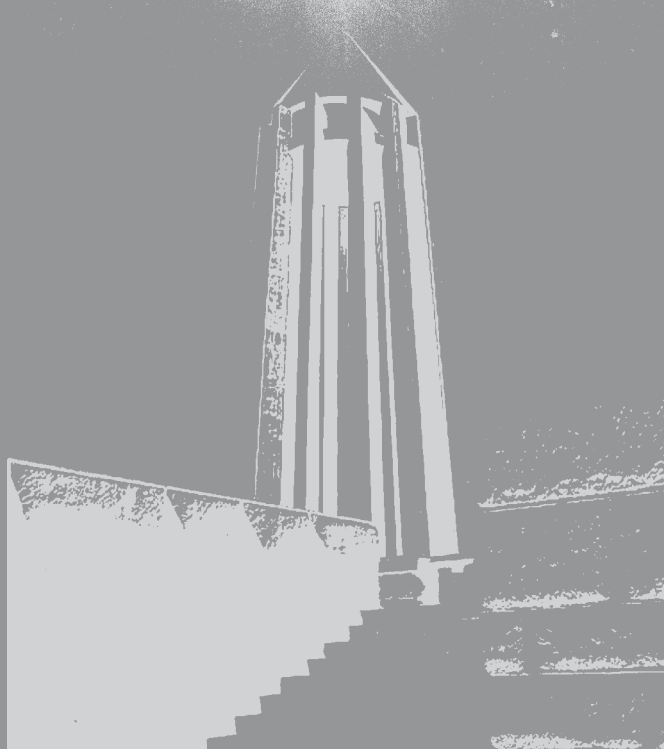
پورسینا به ریاضیات بیشتر از جنبه‌ی فلسفی می‌نگریست. او «اصل‌های اقلیدسی» را به عربی ترجمه کرده است. هم‌چنین، طرح نه‌نه را برای عددها و استفاده از آن را برای جذر و کعب بیان کرده است (در همدان).

مفهوم‌های عمده‌ی فیزیکی مثل حرکت، نیرو، اصطکاک، نور و حرارت را نیز بررسی کرده است. کراوره می‌گوید: رساله‌ای نوشته است و «احکام نجوم» را در آن ابطال کرده است که چند نسخه‌ی خطی از آن وجود دارد. ابوعبدالله جوزانی که شاگرد پدر سینا بود، سرگذشتی برای پورسینا نوشته است. «... در مجسطی ده شکل در اختلاف منظر ایراد کرد و در آخر مجسطی در دانش اخترشناسی چیزهایی آورد که سابق بروی کسی اثبات به آن‌ها ننموده بود. و در اقلیدس شبهه‌ای چند ایراد کرد ... و در موسیقی مسئله‌ها افزود که از آن غافل بودند. مهم‌ترین نوشته‌های پورسینا، یعنی نوشته‌های ریاضی و اخترشناسی همان است که خود پورسینا در کتابی از آن‌ها یاد کرده است. این کتاب به زبان آلمانی هم برگردان شده است. در حال حاضر این رساله‌ها از پورسینا در دست هستند.

۱. رساله‌ای درباره‌ی زاویه‌ها که از آن یک نسخه‌ی خطی موجود است.
۲. رساله‌ای تحقیقی و هندسه و از آن دو نسخه موجود است.
۳. رساله‌ای برای دیدن ستارگان که یک نسخه‌ی خطی از آن در مشهد است و نسخه‌های خطی دیگری در «ایاصوفیه» و «بریتیش میوزیوم» موجود است. در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران نیز فیلمی از آن وجود دارد.
۴. قانون عمل خورشید و ماه و زمان‌های شب و روز که تنها یک نسخه از آن در «اسکوریال» موجود است.
۵. رساله‌ای که پورسینا در جرجانیه برای احمدبن محمدسهلی نوشته است و چند نسخه خطی از آن موجود است.
۶. رساله‌ای درباره‌ی دانش اخترشناسی و از آن چند نسخه‌ی خطی وجود دارد.
۷. کوتاه شده‌ای از مجسطی که از آن یک نسخه در پاریس و یک نسخه هم در «آکسفورد» موجود است.

پی‌نوشت

۱. این مقاله را قبل از مطالب دیگری که در نظر داشتم، نوشتم و شامل همان چیزهایی است که پورسینا درباره‌ی ریاضیات و اخترشناسی نوشته است.



گراف‌های منتظم و کامل

حمیدرضا امیری

کلید واژه‌ها:

گراف منتظم، گراف کامل، تعداد یال‌های گراف کامل، مسائل گراف‌های کامل و منتظم

گراف کامل

گراف‌های کامل، دسته‌ی خاصی از گراف‌های منتظم محسوب می‌شوند و همان‌طور که از اسم آن‌ها می‌توان دریافت، گراف‌هایی هستند که اندازه‌ی آن‌ها کامل است. گراف کامل از مرتبه‌ی p که با K_p نمایش داده می‌شود، گرافی است که درجه‌ی هر رأس آن $(p-1)$ باشد. به عبارت دیگر، «هرگراف $(p-1)$ - منتظم از مرتبه‌ی p را کامل می‌گوییم». بنابراین در هر گراف کامل از مرتبه‌ی P داریم:

$$r = p-1 \quad rp = 2q \Rightarrow p(p-1) = 2q$$

$$\Rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، q حداکثر مقدار خود را دارد. زیرا q تعداد یال‌های یک گراف از مرتبه‌ی p است که چون مجموعه‌ی یال‌های یک گراف شامل زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه‌ی رأس‌های آن است و تعداد کل زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه‌ی p عضوی برابر است با: $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ ، پس q در گراف کامل، حداکثر است.

یک نکته‌ی مهم: گراف‌های r -منتظم از مرتبه‌ی p که $r < p-1$ ، در بسیاری از موارد منحصر به فرد نیستند، ولی گراف‌های کامل از هر مرتبه، منحصر به فردند. برای مثال، گراف‌های 2 -منتظم از مرتبه‌ی 9 را رسم کرده‌ایم که تعداد آن‌ها 4 عدد است، اما تعداد گراف‌های کامل از مرتبه‌ی 9 فقط یکی است.

گراف منتظم

اگر در یک گراف از مرتبه‌ی p ، درجه‌ی r همه‌ی رأس‌ها با هم برابر باشند، چنین گرافی منتظم است و اگر درجه‌ی رأس‌ها برابر با عدد حسابی r باشند، آن را گراف r -منتظم می‌نامیم. به بیان دیگر، اگر بزرگ‌ترین درجه‌ی رئوس یک گراف را ماکزیمم درجه‌ی گراف و کوچک‌ترین درجه‌ی رئوس یک گراف را مینی‌مم درجه‌ی گراف بنامیم، و آن‌ها را به ترتیب با Δ و δ نمایش دهیم، داریم:

$$G \text{ گرافی } r\text{-منتظم است} \Leftrightarrow \Delta = \delta = r$$

از طرف دیگر، با توجه به قضیه‌ی کتاب درسی که بیان می‌کند: «مجموع درجات رئوس یک گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q همواره دو برابر تعداد یال‌های آن گراف است»، می‌توان نتیجه گرفت که «در هرگراف r -منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ، همواره داریم: $pr = 2q$ ». بنابراین در هرگراف r -منتظم با مفروض بودن r ، همواره رابطه‌ای بین q و p برقرار است و اگر یک معادله‌ی دیگر برحسب p و q مفروض باشد، با حل دستگاه دو معادله، دو مجهول p و q محاسبه می‌شوند.

مثال: در یک گراف 4 -منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ، داریم:

$$5p - 3q = -9 \quad \text{مجموع درجات رئوس این گراف را بیابید.}$$

حل:

$$\begin{cases} 4p = 2q & q = 2p \\ 5p - 3q = -9 \end{cases} \Rightarrow 5p - 6p = -9 \Rightarrow p = 9$$

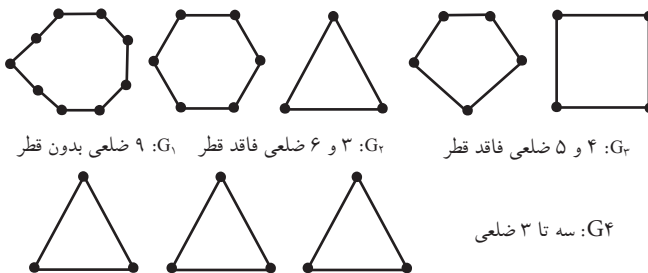
$$q = 2p = 2 \times 9 = 18$$

مجموع درجات رئوس $36 = 2q$

$$\begin{cases} q = \frac{p(p-1)}{2} \\ q = p \end{cases} \Rightarrow p = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow$$

$$2p = p(p-1) \Rightarrow (p-1) = 2 \Rightarrow p = 3$$

رسم کنید.



G_1 : ۹ ضلعی بدون قطر G_2 : ۳ و ۶ ضلعی فاقد قطر G_3 : ۴ و ۵ ضلعی فاقد قطر

G_4 : سه تا ۳ ضلعی

مثال: اگر گراف G دارای ۳۸ یال باشد، این گراف حداقل چند رأس دارد؟

حل: برای پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها کافی است مشخص کنیم تعداد یال‌های گراف موردنظر بین تعداد یال‌های کدام دو گراف کامل قرار دارد! در این مثال داریم: $\binom{10}{2} < 38 < \binom{9}{2}$. به عبارت دیگر، با ۹ رأس حداکثر ۳۶ یال می‌توان تعریف کرد. لذا برای تعریف دو یال دیگر، به حداقل یک رأس دیگر نیاز داریم. پس جواب این سؤال عدد ۱۰ است. درواقع گراف G با نزدیک‌ترین گراف کامل از نظر تعداد یال مقایسه شد.

تذکر مهم: مقایسه کردن یک گراف با گراف کامل نزدیک به آن، روشی است که مسائل دیگری را نیز می‌توان توسط آن حل کرد. چون گراف‌های کامل گراف‌های خاص و منحصر به فردی هستند، گاهی حذف یک یا چند یال از یک گراف کامل می‌تواند راه‌گشا باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۹ دارای ۳۵ یال است، این گراف چند رأس از درجه‌ی ۸ (از درجه‌ی ماکزیمم) و چند رأس از درجه‌ی مینی‌م دارد؟

حل: می‌دانیم K_9 دارای ۳۶ یال است، لذا اگر یک یال از K_9 حذف کنیم، گراف G حاصل می‌شود. واضح است که اگر از K_9 یک یال حذف شود، دو رأس آن آسیب می‌بینند و از درجه‌ی ۸ به درجه‌ی ۷ تنزل پیدا می‌کنند! بنابراین، گراف G دارای $7 = 9 - 2$ رأس از درجه‌ی ماکزیمم و دو رأس از درجه‌ی مینی‌م دارد.

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۸ دارای ۲۶ یال است. این گراف حداقل و حداکثر چند رأس از درجه‌ی ماکزیمم است؟

حل: در این مثال باید ۲ یال از گراف K_8 حذف کنیم تا گراف G حاصل شود. حذف این دو یال به دو صورت امکان‌پذیر است: یا هر دو یال را از یک رأس حذف کنیم (۳ رأس آسیب می‌بینند)، و یا دو یال را طوری حذف کنیم که رأس مشترک نداشته باشند (۴ رأس آسیب می‌بینند).

در حالت اول از یک رأس دو درجه و از دو رأس دیگر هر کدام ۱ درجه کم می‌شود و گرافی دارای ۵ رأس ماکزیمم (از درجه‌ی ۷) و ۱ رأس مینی‌م (از درجه‌ی ۵) خواهیم داشت.

(G_1 و G_2 گراف‌های دو بخشی و G_3 گراف سه‌بخشی هستند.)

تمرین: تعداد گراف‌های ۳-منتظم از مرتبه‌ی ۱۲ را بیابید و آن‌ها را رسم کنید. (جواب: ۴ گراف)
در جدول زیر، به دلیل اهمیت و موارد استفاده‌ی بسیار، تعداد یال‌های گراف‌های کامل از K_1 تا K_{11} آمده است:

گراف K_p	$q = \frac{p(p-1)}{2} = \binom{p}{2}$ (تعداد یال‌ها)
K_1	۰
K_2	$\binom{2}{2} = 1$
K_3	$\binom{3}{2} = 3$
K_4	$\binom{4}{2} = 6$
K_5	$\binom{5}{2} = 10$
K_6	$\binom{6}{2} = 15$
K_7	$\binom{7}{2} = 21$
K_8	$\binom{8}{2} = 28$
K_9	$\binom{9}{2} = 36$
K_{10}	$\binom{10}{2} = 45$
K_{11}	$\binom{11}{2} = 55$

مثال: در گراف کامل K_p ، اگر داشته باشیم: $p = q$ ، این گراف را

گراف $G \leftarrow K_8$

مثال: گراف G از مرتبه 14 دارای چهار بخش است و داریم:
 $\delta = 1$. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

حل: گراف G طبق فرض رأس ایزوله ندارد و به صورت زیر است.



$$\text{تعداد یال های } G: \binom{8}{2} + 3 = 31$$

مثال: گراف G از مرتبه 18 دارای سه بخش است. اگر در این گراف داشته باشیم: $\delta = 2$ ، در این صورت G حداکثر چند یال می تواند باشد؟

حل: طبق فرض، گراف G رأس ایزوله و رأس از درجه 1 ندارد و باید به شکل زیر باشد:



$$\text{تعداد یال های } G: \binom{12}{2} + 6 = 66 + 6 = 72$$

مثال: گراف G از مرتبه P_1 دارای K بخش است. اگر در این گراف داشته باشیم: $\delta = P_2$ ، در این صورت G حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

حل: گراف G باید دارای $(K-1)$ بخش با حداکثر یال و $\delta = P_2$ باشد که $(K-1)$ گراف کامل از مرتبه $(P_2 + 1)$ است و یک بخش کامل از مرتبه P_2 رأس های باقی مانده که تعداد رأس های باقی مانده برابر است با:

$$P = P_2 - [(K-1) \times (P_2 + 1)]$$

حداکثر تعداد یال های چنین گراف K بخشی برابر است با:

$$\text{تعداد یال های } G: \binom{P}{2} + (K-1) \times \binom{P_2 + 1}{2}$$

تمرین: از گراف های کامل برای به دست آوردن شرط هم بندی و ناهم بندی چگونه می توان استفاده کرد؟

پی نوشت

۱. مرتبه ی گراف: تعداد رأس های یک گراف را مرتبه ی آن گراف می گوئیم.
۲. درجه ی یک رأس: تعداد یال هایی که از یک رأس عبور می کنند، درجه ی آن رأس نامیده می شود.
۳. اندازه ی گراف: تعداد یال های یک گراف را اندازه ی آن گراف می گوئیم.

در حالت دوم نیز تعداد رأس های ماکزیمم (از درجه 7) برابر است با: $4 - 4 = 8$. رأس نیز از درجه ی مینی مم (از درجه 6) در گراف موجود است.

مثال: گراف G از مرتبه 10 دارای 42 یال است. اگر در این گراف داشته باشیم: $\delta = 1$ ، در این صورت گراف G چند رأس ماکزی مم و چند رأس مینی مم دارد؟

حل: بدیهی است که اگر از K_8 که 45 یال دارد، 3 یال حذف کنیم، گرافی با تعداد یال های برابر با G به دست می آید. اما چون طبق فرض $\delta = 1$ ، حذف این سه یال باید به گونه ای باشد که از هیچ رأسی دو یال حذف نشود. زیرا در این صورت خواهیم داشت: $2 = \delta - \delta$ که خلاف فرض است. پس سه یال حذف شده نباید رأس مشترک داشته باشند که در این صورت، درجه ی 6 یال هر کدام 1 درجه کاهش می یابد و $4 - 6 = 10$ رأس از درجه ی ماکزیمم (از درجه 9) و 6 رأس از درجه ی مینی مم (از درجه 8) در گراف G موجود است.

تمرین: مثال قبل را با فرض $\delta = 2$ حل کنید.

تذکر مهم: یکی دیگر از کاربردهای گراف های کامل در تعیین ماکزیمم تعداد یال های یک گراف چندبخشی است که در مثال های زیر به آن می پردازیم.

مثال: گراف G از مرتبه 7 گرافی دو بخشی است. این گراف حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

حل: توجه داریم که رأس ایزوله یا تنها، یک بخش محسوب می شود. برای مثال، گراف های $\bullet\bullet\bullet$ و $\bullet\bullet\bullet\bullet$ هر یک دو بخشی هستند. در این مثال اگر بخواهیم گرافی دوبخشی با 7 رأس و حداکثر یال داشته باشیم، کافی است یک رأس از 7 رأس را ایزوله کنیم و با 6 رأس دیگر یک گراف کامل (K_6) بسازیم. در این حالت $\binom{6}{2} = 15$ یال برای گراف حاصل می شود که این تعداد یال ماکزیمم خواهد بود.

تمرین: گراف G از مرتبه 10 از سه بخش تشکیل یافته است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟ (جواب: $\binom{8}{2} = 28$)

مثال: گراف G از مرتبه 12 فقط دارای دو رأس ایزوله است و از چهار بخش تشکیل یافته است. این گراف حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

حل: از 12 رأس گراف G ، دو رأس را به صورت ایزوله کنار می گذاریم و بین دو رأس دیگر یک یال رسم می کنیم و با 8 رأس باقی مانده، یک گراف کامل تشکیل می دهیم. در این حالت، گراف G

$$\text{دارای ماکزیمم تعداد یال، یعنی } 1 + \binom{8}{2} = 29 \text{ یال است.}$$

تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران (۲)

غلامرضا یاسی پور

کلید واژه‌ها: مسائل هندسه، اصل تسهیل، اصل تمثیل، اصل پویایی



اشاره:

از شماره‌ی ۲ الی ۲۷ برهان متوسطه، سلسله مقاله‌هایی با عنوان «تاریخچه‌ی مجلات ریاضی در ایران» به قلم استاد یاسی پور در مجله به چاپ می‌رسید که بنا به استقبال خوانندگان محترم و تأیید هیأت تحریریه از شماره‌ی ۶۶ مجله، دنباله‌ی این مقالات در برهان از سرگرفته شد. در این شماره استاد به معرفی مجله‌ی کوانتوم پرداخته و یک مقاله خواندنی و جذاب از آن را انتخاب کرده‌اند.

هدف از انتشار ماهنامه‌ی ریاضی - فیزیک کوانت یافتن استعداد‌های جوان و شکوفا کردن و پرورش دادن این استعدادها بود.

مجله‌ی کوانت به سرعت جای خود را در میان مجلات ریاضی - فیزیک آن‌چنان باز کرد که از طرف یونسکو مورد تأیید قرار گرفت و مقاله‌های آن به زبان‌های فرانسوی، ژاپنی، آلمانی، یونانی، بلغاری و نیز زبان‌های دیگر ترجمه شد.

چاپ نسخه‌ی انگلیسی این مجله به سال ۱۹۹۰ و تحت نام کوانتوم، مجله‌ی دانش‌آموزی ریاضی و علوم و به عنوان نشریه‌ی از انجمن ملی معلمان علوم و دایره‌ی کوانتوم فرهنگستان علوم شوروی و در رابطه با انجمن معلمان فیزیک آمریکا و شورای ملی معلمان ریاضی، در آمریکا آغاز شد.

در مورد نسخه‌ی فارسی مجله در سرمقاله چنین می‌خوانیم: «و اما نسخه‌ی فارسی این مجله، یعنی همین نسخه‌ای که پیش رو دارید و قرار است به یاری خداوند به صورت فصل‌نامه منتشر شود، از دو بخش اصلی تشکیل شده است. بخش اول آن، شامل مقالات جالب و مفید مجله‌ی کوانتوم آمریکایی است که عیناً به زبان فارسی درآمده و گهگاه مقاله‌ای از کوانت روسی نیز به همراه دارد. بخش دوم آن، شامل مطالب و مواردی است خاص دانش‌آموزان و دانشجویان خودمان. از ویژگی‌های بخش دوم پرداختن به مسائل متناسب با برنامه‌ی دبیرستان‌های ایران و تهیه‌ی شرح احوال و آثار

یکی دیگر از مجلات ریاضی، مجله‌ی «کوانتوم» است مجله‌ای که خوش درخشید، ولی دولت مستعجل بود. از این مجله تنها یک شماره در پاییز ۱۳۷۲ به چاپ رسید و عدم انتشار آن به علت فوت صاحب امتیاز آن بود.

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: دکتر محمد رجبی‌طرخورانی، استاد دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران و سردبیر: غلامرضا یاسی پور

هیئت تحریریه: محمد رجبی‌طرخورانی، پرویز شهریاری، سیدحسین سیدموسوی، مجید ملکان و غلامرضایاسی پور

ویراستار ریاضی: غلامرضایاسی پور

ویراستار فیزیک: مجید ملکان

در سرمقاله‌ی مجله چنین آمده است:

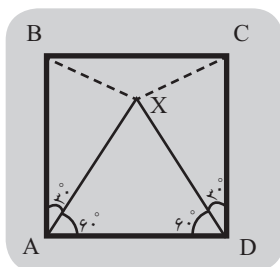
«در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰، شش تن از اعضای برجسته‌ی فرهنگستان علوم شوروی، از جمله کاپیتسا و کولموگوروف، طی نامه‌ای به عالی‌ترین مرجع اداره‌ی کشور، پیشنهاد نشر ماهنامه‌ی ریاضی - فیزیک کوانت را مطرح کردند. پیشنهاد از جانب بزرگان فن بود و مورد تأیید قرار گرفت. بدین ترتیب نخستین شماره‌ی مجله‌ی کوانت در آغاز سال ۱۹۷۰ منتشر شد.

سردبیری نخستین شماره‌های مجله را دوتن از مهم‌ترین اعضای این فرهنگستان: آندره نیکلایه‌ویچ کولموگوروف و ایساک کنستانتی نوویچ کی‌کوا، به عهده داشتند، و هر دو تا آخرین روزهای زندگی خود به این کار ادامه دادند.

واتسون: (با وحشت دست‌هایش را به طرف جلو حرکت می‌دهد)
رازآمیزی این مسئله مرا به یاد شاه ربوده شده می‌اندازد! راستی آن را به‌خاطر داری؟

هلمز: رفیق عزیز، راجع به چه صحبت می‌کنی؟ من، هم الآن پاسخ مسئله را می‌دهم. در این مورد از «اصل آغاز از انتها» استفاده می‌کنیم. امیدوارم از حل مسئله متوجه بشوی که اصل مزبور چیست؟ نقطه‌ی X را، که رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاعی است که دو رأس دیگرش A و D اند، در نظر می‌گیریم.

واتسون: اما دو نقطه از چنین نقاطی موجودند.
هلمز: البته. ولی ما آن را که داخل مربع است اختیار می‌کنیم (شکل ۲). حالا زاویه‌های XBC و XCB را پیدا می‌کنیم. خوب، واتسون، با توجه به پیوستگی علوم دقیقه، رابطه‌ها را در این مورد می‌دانی. انجام دادی؟



(شکل ۲)

واتسون: یک لحظه ... باید از این حقیقت که BAX و XCD مثلث‌هایی متساوی‌الساقین‌اند، استفاده کنیم. اوه! هریک از آن‌ها ۱۵ درجه است. هوم! بعد چه؟

هلمز: این بدان معنی است که نقاط O و X منطبق‌اند. اما دوست عزیز، این مطلب، مطلبی مقدماتی است.
واتسون: عالی‌ه! اما ... این اصل شما کمکی به حل مسئله‌ی دوم نمی‌کند.

هلمز: خب، در این صورت از اصل دیگری استفاده می‌کنیم. و بنابراین ...

مسئله‌ی ۲: طول‌های اضلاع چهارضلعی محدب $ABCD$ (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) برابر a ، b ، c و d اند. ثابت کنید که مساحت $ABCD$ بزرگتر از $\frac{1}{4}(a+b)(c+d)$ نیست.

بله، این مسئله، مسئله‌ای کاملاً متفاوت است ... نابرابری. واتسون، این مسئله ناگهان مرا به یاد معمای پروفیسور موریارتی انداخت.
واتسون (رو‌یایی): بله، کلکی در این موضوع نهفته بود. او، در صورتی که بخواهیم حق مطلب را ادا کنیم، ریاضی‌دانی برجسته بود... اما هلمز، مثل این که از موضوع منحرف شدی.
هلمز: این تویی که از مطلب پرت افتاده‌ای واتسون. درضمن من

ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان ایرانی و مسلمان و مطالب مربوط به تعلیم و تربیت ریاضی و فیزیک در این گوشه از جهان است. به‌خصوص در مورد این بخش، به یاری و مساعدت صاحب‌نظران نیاز مبرم داریم و در همین‌جا از آنان دعوت می‌کنیم که به یاریمان برخیزند و از کمکمان دریغ نورزند.»

در این مرحله به ذکر یکی از مقاله‌های مجله، تحت عنوان «هندسه‌ی جزایی یا پیروی از اصول» می‌پردازیم.

هندسه‌ی جزایی یا پیروی از اصول

نمایشنامه‌ی روش‌شناسی در یک پرده

نوشته‌ی د.و. قومین

صحنه تاریک است. آهنگی آرام و شیرین به گوش می‌رسد. چراغ‌ها روشن می‌شوند. سالن پذیرایی در ۲۲۱B، «بیکراستریت»^۱. شرلوک هلمز^۲ در حال نگرستن به روزنامه‌ی عصر نشسته است. واتسون^۳ وارد می‌شود.

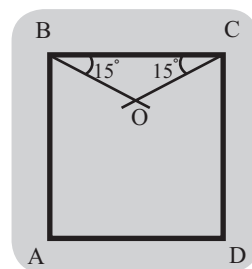
هلمز: عصر به‌خیر، رفیق عزیز. به‌نظر می‌رسد که قصد داری مدتی به‌جای طبابت به هندسه بپردازی.

واتسون: چه‌طور فهمیدی؟

هلمز: روزنامه‌ی دیلی‌جوک دیروز، با مسابقه‌ی هندسه‌اش، از جیبیت بیرون زده است. معلوم است که وقت زیادی برای حل حداقل یکی از مسائل آن صرف کرده‌ای.

واتسون: اما از کجا فهمیدی که هیچ یک از آن‌ها را حل نکرده‌ام؟ راستش را بخواهی، صددرصد حق به جانب توست ... (می‌نشیند)
هلمز: واتسون عزیز، ناراحت نشو. توجه داشته باش که تمام مسئله‌ها عملاً از یک طریق حل می‌شوند؛ البته، اگر راه صحیح رسیدن به آن‌ها را پیدا کنیم. راستش، هنوز مسائل مسابقه‌ای مورد بحث را ندیده‌ام، اما ... خب، اجازه بده نگاهی به آن‌ها بکنیم.

مسئله‌ی ۱. نقطه‌ی O داخل مربع $ABCD$ مفروض است. زاویه‌های OCB و OBC هر دو ۱۵ درجه‌اند. ثابت کنید که مثلث OAD متساوی‌الاضلاع است.



(شکل ۱)

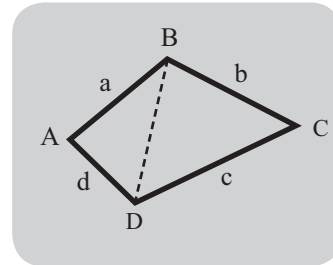
مسئله را حل کردم. ابتدا پُرانتزها را برمی‌داریم:

$$\frac{1}{4} (a + b) (c + d)$$

$$= \frac{1}{4} (ad + bc) + \frac{1}{4} (ac + bd)$$

واتسون «اصل تسهیل» را به‌خاطر بسیار: ابتدا ساده‌ترین و طبیعی‌ترین طریق حل مسئله را بررسی کن.

واتسون: بسیار خب، اثبات این موضوع را که مجموع $ad + bc$ کمتر از دو برابر مساحت چهارضلعی مورد بحث نیست، می‌توانم خودم انجام دهم: ad کمتر از دو برابر مساحت مثلث ABD (شکل ۳) و bc کمتر از دو برابر مساحت مثلث BCD نیست؛ این که هیچ. اما با عبارت $ac + bd$ چه کار می‌توان کرد؟



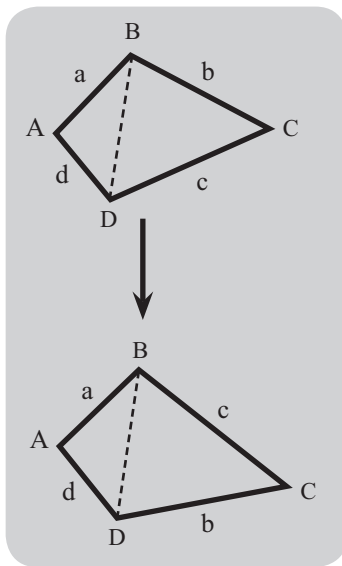
(شکل ۳)

هلمز: در این جا «اصل تمثیل» به کارمان می‌آید. دوست عزیز، تمام چیزی که در این مورد لازم داریم، تفکر سازگار و منطقی است. این کار در ریاضیات، به اندازه‌ی جرم‌شناسی، اساسی است. موفقیت در محاسبه‌ی قبلی مرهون چه موردی بود؟ از این حقیقت کمک گرفتی که اضلاع a و d پهلوی یکدیگر قرار گرفته‌اند. همین‌طور اضلاع b و c ، درست است؟ بنابراین باید کاری کنی که a را پهلوی c بیاوری.

واتسون: در مورد b و d چی؟

هلمز: خوب فکر کن واتسون: اگر a پهلوی c باشد، در این صورت b نیز پهلوی d خواهد بود. همواره شرایط نالازم را بررسی کن! اما این کار در درجه‌ی دوم اهمیت است و بنابراین: برای این که مساحت چهارضلعی‌مان، هنگامی که ضلع a پهلوی c قرار می‌گیرد، یکسان باقی بماند، با آن چه می‌کنیم؟ ... دوست عزیز، موضوع چیست؟ ... چاقوی جراحی‌ات را همراه نیاورده‌ای؟

واتسون (متوجه نمی‌شود): نه، نیاورده‌ام. چرا این سؤال را ...؟ (به شکل نگاه می‌کند و ناگهان متوجه می‌شود). عالی! صرفاً $ABCD$ را در امتداد قطر BD قطع می‌کنیم و ... و یکی از تکه‌ها را برمی‌گردانیم (شکل ۴). و بعد، البته، با استدلالی شبیه قبل، مشخص می‌کنیم که $ac + bd$ کمتر از دو برابر مساحت چهارضلعی مورد بحث نیست. با ترکیب آن با نامساوی پیشین، آنچه را به دنبال اثباتش بودیم، برقرار می‌کنیم. عالی!



(شکل ۴)

هلمز: توجه داشته باش که در این جا هنگام حل مسئله، زمانی که مفروضاتمان را تغییر دادیم، از «اصل پویایی» نیز استفاده کردیم. این اصل که اصلی کاملاً چشم‌گیر است، به‌صورت زیر است: در مسئله، هر چیزی را که مایل به تغییر دادنش هستیم - تنظیمش، مفروضاتش، احکامش - به شرطی که راه حل مسئله‌ی جدید راه حل مسئله‌ی قدیم را به دستمان دهد، تغییر می‌دهیم. اصل مزبور، به‌خصوص بر این است که: مفروضات مسئله را به عنوان مطالبی غیرقابل تغییر در نظر بگیریم. برای مثال، اگر به دنبال دستگیر کردن جنایتکاری هستیم، نباید فراموش کنیم که او موجودی زنده است و می‌تواند آزادانه با «عملکرد»مان تغییر موضع دهد.

واتسون: در این مورد مطلبی است که هنوز خوب متوجه آن نشده‌ام...

هلمز: اجازه بده نگاهی به سومین مسئله‌ی مسابقه بیندازیم، واتسون.

واتسون: هلمز، خواهش می‌کنم نه تنها راه حل، بلکه جمیع مراحل استدلال را بلافاصله برایم توضیح بدهی. تا همین جا هم از حیرت فرسوده شده‌ام. (از جایش برمی‌خیزد و به طرف هلمز حرکت می‌کند).

هلمز: سعی‌ام را می‌کنم، دوست عزیز، و بنابراین،

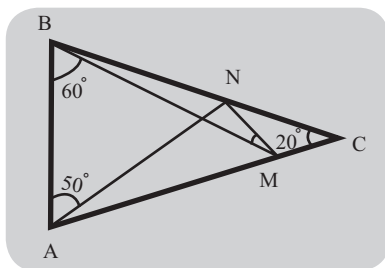
مسئله‌ی ۳: دو دایره‌ی S_1 و S_2 در نقاط A و B برهم عمودند. نقطه‌ی X واقع بر دایره‌ی اول، اما داخل دایره‌ی دوم است. شعاع‌های AX و BX دایره‌ی S_2 را در نقاط P و Q تلاقی می‌کنند. ثابت کنید که قطعه خط PQ قطر دایره‌ی S_2 است.

واتسون: من اصلاً صورت این مسئله را نمی‌فهمم. یعنی چه «دایره‌ها برهم عمودند»؟ مهمل است.

هلمز: ابداً، واتسون. این عبارت صرفاً به این معنی است که

می‌رسند، اما بعداً مشخص می‌شود که تصادف محض یا تاکتیک‌هایی انحرافی از جانب مقصر اصلی بوده‌اند. مورد نیم‌تاج یا قوت نشان را به‌خاطر داری؟ ... بسیار خوب، به هر تقدیر، این هم آخرین مسئله است.

مسئله‌ی ۴. مثلث ABC متساوی‌الساقین، و C زاویه‌ی رأس آن 20° درجه است. نقاط M و N بر ساق‌های AC و BC ی آن چنان در نظر گرفته شده‌اند که زاویه‌ی NAB برابر 50° درجه و زاویه‌ی MBA برابر 60° درجه است. ثابت کنید زاویه‌ی NMB برابر 30° درجه است (شکل ۶).



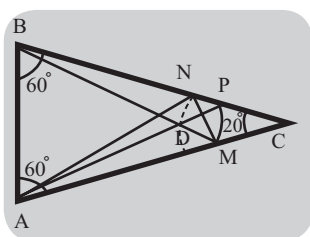
(شکل ۶)

واتسون: من سعی داشتم این زاویه را با استفاده از مثلثات حساب کنم ...

هلمز: دوست عزیز، خواهش می‌کنم نیروهایت را ذخیره کن! شاید بتوانی، هنگامی که من چند دقیقه‌ای را صرف این مسئله می‌کنم، روزنامه‌ات را بخوانی.

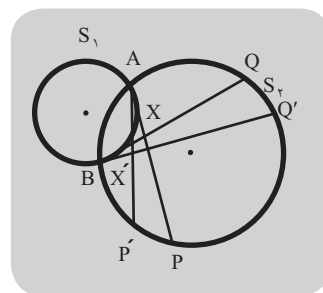
(طی پنج یا شش دقیقه‌ی بعد، واتسون هنگامی که هلمز شکل زیر را به دقت مطالعه می‌کند، روزنامه‌اش را می‌خواند. موسیقی آرامی نواخته می‌شود.)

هلمز: خب واتسون، این مسئله در واقع کمی پوست کلفت است. بگذار به نقطه‌ی P واقع بر ضلع BC ، چنان که زاویه‌ی PAB برابر 60° درجه باشد، نگاهی بیندازیم. روشن است که خط PM موازی AB است، و مثلث PDM متساوی‌الاضلاع می‌شود (D نقطه‌ای است که قطعات PA و BM در آن تقاطع می‌کنند - شکل ۷. چون مثلث BNA متساوی‌الساقین است، طول‌های قطعه خط‌های BA ، BN و BD برابرند و زوایای BND و BDN هر دو 80° درجه‌اند. از این مطلب به سادگی نتیجه می‌شود که زاویه‌ی NDP برابر 40° درجه است. لذا، مثلث NDP متساوی‌الساقین است و در نتیجه، MN نیمساز زاویه‌ی BMP . بنابراین، زاویه‌ی NMB نصف زاویه‌ی DMP و برابر



(شکل ۷)

خطوط مماس در نقاط تقاطع دوایر برهم عمودند. اکنون، دقت کن که اصل پویایی چگونه در این مورد به‌کار می‌رود. نقطه‌ی X را در امتداد کمان AB از دایره‌ی S_1 حرکت می‌دهیم - این نقطه X' می‌شود و شعاع‌های AX' و BX' ، دایره‌ی S_2 را در نقاط P' و Q' قطع می‌کنند - نگاه کن، آن را روی این تکه کاغذ رسم می‌کنم (شکل ۵).



(شکل ۵)

روشن است که زوایای $X'AX$ و $X'BX$ مساوی‌اند. به همین علت است که اندازه‌های زاویه‌ای کمان‌های PP' و QQ' برابرند. اما این بدان معنی است که اندازه‌ی زاویه‌ای کمان $P'Q'$ مساوی اندازه‌ی زاویه‌ای کمان PQ است.

واتسون (درحالی که سخن هلمز را قطع می‌کند): ولی هلمز، از کجا فکر اثبات آن را به‌دست آوردی؟

هلمز: دوست عزیز، خودت راجع به آن فکر کن: اگر قطعه خط PQ به ازای هر موضع نقطه‌ی X واقع بر کمان AB ، قطری از دایره باشد، در این صورت اندازه‌ی زاویه‌ای کمان PQ ، هرچه نقطه‌ی X را حرکت دهیم، تغییر نخواهد کرد. اگر چیزی که حکم مسئله است، راست باشد، در این صورت این مطلب نیز به وضوح باید راست باشد. و بار دیگر اصل آغاز از انتها.

و حالا، واتسون، نقطه‌ی X مان را به طرف نقطه‌ی B حرکت می‌دهیم. چه چیزی به دست می‌آوریم؟ در این حالت، اندازه‌ی زاویه‌ای کمان PQ دقیقاً 180° درجه خواهد شد.

واتسون: آخر چرا این اصل؟ اوه. بله ... از این حقیقت که دوایر مورد بحث در زوایای قائمه تقاطع کرده‌اند، استفاده می‌کنیم. ضمناً، هلمز، اصل دیگری نیز در این مورد موجود است. تمام مفروضات مسئله را به‌کار ببرد و به خاطر داشته باشید که آن‌ها باید به طریقی مورد استفاده قرار گیرند! این اصل را چه بنامیم؟

هلمز (با متانت): آن را «اصل تکمیل راه حل» می‌نامم.

واتسون: باید بگویم بسیار خوب! اما آدم فکر می‌کند تو در هر جیت یک اصل داری!

هلمز: نه، دوست عزیزم، من آن‌ها را در سرم دارم. اما باید تذکر بدهم که گاهی، اصلی که هم‌اکنون برایت مطرح شد، در زندگی واقعی کاربردناپذیر است. بعضی از حقایق در نگاه اول مشکوک یا صریحاً متهم‌کننده به‌نظر

۳۰ درجه است. و به این ترتیب اثبات مان به اتمام می‌رسد.

واتسون (مبهوت): ولی ... ولی ... چه‌طور؟ چه‌طور به یک چنین راه حل ماهرانه‌ای رسیدی؟

هلمز: واتسون عزیز، فکر می‌کنم بتوانم داستان مهیجی در مورد چگونگی پیدا کردن راه حل مورد بحث، به کمک یک دوجین اصل با مهارت انتخاب شده، برایت تعریف کنم ... چرا می‌خندی، واتسون؟! البته، بعضی اصل‌ها سهل‌الوصول‌اند. فی‌المثل، «اصل هدف» قابل توجه است: همواره به خاطر داشته باشید که برای رسیدن به هدف‌تان چه کارهایی برای انجام دادن باقی مانده است. و محققاً، معدودی مطالب کوچک در گوشه و کنار ... به هر تقدیر، دوست من، برای حل یک مسئله، به مطالبی بیش از تنها یک مجموعه قواعد استاندارد تفکر نیاز داریم. به چیزهایی چون تجربه و شهود احتیاج است. تصور می‌کنی کارها این‌قدر ساده‌اند که برای انجام دادنشان، تنها چیزی که لازم داریم به‌خاطر سپردن تعدادی اصل و آموختن طرز به‌کار بردن آن‌ها به‌ترتیبی خاص است؟

خوش‌بختانه، برهان بشری به گونه‌ای اندازه‌ناپذیری وسیع‌تر از این‌هاست ... البته این اصول نیز که در اساس چیزی بیش از کلیشه‌های فکری نیستند، می‌توانند کاربردهایی داشته باشند. واتسون، آدمی نباید از چیزی که عقلایی است تغافل کند!

واتسون (با خستگی روی صندلیش می‌نشیند، و روزنامه‌اش را برمی‌دارد): هی! به این گوش کن هلمز: «شب گذشته، تبهکاران ناشناسی، پس از داخل شدن به دفتر روزنامه‌ی دیلی جوک، صندوق سردبیر روزنامه را شکستند و جایزه‌ی مسابقه‌ی سالانه‌ی هندسه را دزدیدند. این جایزه نوار مویوس طلایی^۴ به اندازه‌ی واقعی و به قیمت ...» مطلب جالب دیگری ندارد ... اوه، گوش کن! «کارآگاه رایبسون اعلام کرد که پلیس سرخ‌ی در این مورد به دست نیاورده

است. سردبیر دیلی جوک به خبرنگاران گفت، روزنامه برای افزایش تعداد مشترکین و اصلاح وضع مادی‌اش، در یکی از شماره‌های آینده مسابقه‌ی حل مسئله‌ی مخصوصی را مطرح خواهد کرد...»

دوست عزیز، پس از تمام چیزهایی که امروز شنیده‌ام، باید این تبهکاران را دستگیر کنی، چه بالاخره، این مورد نیز از موارد پیروی از اصول است!

هنگامی که این آخرین کلمات گفته می‌شود، صحنه تاریک می‌شود و آخرین ضربه‌های آهنگ همراه صحنه، در تاریکی شنیده می‌شود.

موارد زیر مسائلی از مسابقه‌ی مخصوص اعلام شده در روزنامه است. به‌خاطر داشته باشید که هریک از آن‌ها شگردی مخصوص خود دارد که آن را می‌توان با استفاده از اصول مطرح شده توسط کارآگاه بزرگ، آسان‌تر یافت.

۱. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است و طول قطعه خط AD برابر مجموع طول‌های قطعات AB و CD است. ثابت کنید که نیم‌سازهای زوایای B و C بر ضلع AD تقاطع می‌کنند.

۲. دزد بی‌دستی می‌خواهد سکه‌ای را از میز پول خردکنی با هول دادن سکه با استفاده از بینی‌اش بر میز، بدون برخورد دادن آن با هیچ یک از سکه‌های میز بدزدد. آیا موفق می‌شود؟ سکه‌ها گردند، به اندازه‌های متفاوت‌اند، و با یکدیگر تماس ندارند.

۳. مربعی به چند مستطیل تقسیم شده است. نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر هریک از این مستطیل‌ها را می‌توان محاسبه کرد. ثابت کنید که مجموع این نسبت‌ها کمتر از ۱ نیست.

پی‌نوشت

۱. خیابانی که منزل شرلوک هلمز در آن بوده است.
۲. کارآگاه معروف داستان‌های شرلوک هلمز
۳. دکتر واتسون، دوست شرلوک هلمز
۴. نوری که از پیچ دادن یک نوار معمولی و وصل کردن دو سر آن به هم حاصل می‌شود و یک روبه دارد.

ادب ریاضی

نظرما تغییر یافته است و باز هم تغییر می‌یابد و تکامل پیدا می‌کند. به کلام دکارت: «فضا و حرکت را به من بدهید و من دنیایی به شما خواهم داد.» اینشتاین امروز چنین جواب می‌دهد: «آنچه خواسته شده است، به واقع زیاد است و حقیقت آن است که اصولاً تقاضای دکارت فاقد مفهوم است: بدون وجود «دنیا» (یعنی بدون وجود ماده)، نه فضایی وجود دارد و نه حرکتی موجود است.»

ریاضی‌دانان نامی
اریک تمپل بل، حسن صفاری





مسائل $f(x)$ ها

احمد قندهاری

کلید واژه‌ها: تابع، تابع مرکب، مسائل $f(x)$ ها.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5xyz$$

هر عبارتی برحسب x را می‌توان به صورت $f(x)$ نشان داد؛ و مانند:

$$f(x, y, z) = \sin(x + y) + \cos(y + z)$$

۱. مسئله‌ی اصلی $f(x)$

یعنی $f(x)$ معلوم است و می‌خواهیم $f(h(x))$ را محاسبه کنیم. $h(x)$ می‌تواند هر عبارتی برحسب x باشد. برای محاسبه‌ی $f(h(x))$ ، باید در عبارت $f(x)$ به جای x عبارت $h(x)$ را قرار دهیم. باید توجه داشته باشیم که این عمل، یک عمل جای‌گذاری است و به معنی برابری $h(x)$ با x نیست.

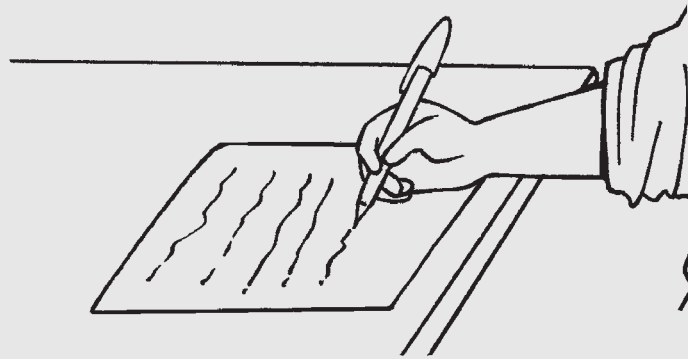
$$f(x) = \sin x + \cos^4 x, \quad f(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

و هر عبارتی برحسب x و y را می‌توان به صورت $f(x, y)$ نشان داد، مانند:

$$f(x, y) = \sin x + \cos y \quad \text{و} \quad f(x, y) = x^2 + xy + \frac{4x}{y}$$

هر عبارتی برحسب x و y و z را می‌توان به صورت $f(x, y, z)$ نشان داد، مانند:



الف) $4x+1$ ب) $4x+2$
ج) $4x+3$ د) $4x+4$
حل: روش اول:

$$x+5=a \Rightarrow \text{فرض می‌کنیم } x=a-5$$

$$f(x+5)=4x+23$$

$$f(a)=4(a-5)+23 \Rightarrow f(a)=4a+3 \Rightarrow f(x)=4x+3$$

روش دوم: در این روش که به «روش تبدیل» معروف است، در سمت راست عبارت $(x+5)$ را می‌سازیم. سپس در سراسر مسئله $(x+5)$ را به X تبدیل می‌کنیم.

$$f(x+5)=4x+23$$

$$f(x+5)=4(x+5)+3$$

$$(x+5) \xrightarrow{\text{تبدیل}} x; f(x)=4x+3$$

روش سوم: به X عددی نسبت می‌دهیم؛ مثلاً $x=1$. آن‌گاه عبارت $f(x+5)$ بدین صورت خواهد شد:

$$f(6)=4+23 \Rightarrow f(6)=27$$

می‌گوییم گزینه‌ای درست است که اگر به جای x عدد ۶ را قرار دهیم، حاصل برابر ۲۷ شود. پس گزینه‌ی ج صحیح است. (این روش برای مسائل چند گزینه‌ای به کار می‌رود)

مثال ۲. اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$ ، آن‌گاه $f(\frac{1}{x})$ را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$$

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3x(\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})$$

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$

$$(x+\frac{1}{x}) \xrightarrow{\text{تبدیل}} \frac{1}{x}; f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^3}-3(\frac{1}{x})=\frac{1-3x^2}{x^3}$$

مثال ۳. اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^4+\frac{1}{x^4}$ ، آن‌گاه $f(\frac{1}{4x})$ را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{1}{x})=x^4+\frac{1}{x^4}$$

$$f(x+\frac{1}{x})=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2x^2(\frac{1}{x^2})=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2$$

$$f(x+\frac{1}{x})=\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)^2-2$$

$$(x+\frac{1}{x}) \xrightarrow{\text{تبدیل}} \frac{1}{4x}$$

$$f(\frac{1}{4x})=\left(\left(\frac{1}{4x}\right)^2-2\right)^2-2$$

مثال ۴. اگر $f(x+y, x-y)=2xy$ ، آن‌گاه $f(x, y)$ کدام است؟

مثال ۱. اگر $f(x)=3x-4x^3$ ، مطلوب است محاسبه‌ی

عبارت‌های زیر:

$$f(2x-5), f(\frac{2x+1}{2x-1}), f(x+\sqrt{x^2+1}), f(\sin \alpha), f(f(x))$$

حل:

$$f(x)=3x-4x^3$$

$$۱) f(2x-5)=3(2x-5)-4(2x-5)^3$$

$$۲) f(\frac{2x+1}{2x-1})=3(\frac{2x+1}{2x-1})-4(\frac{2x+1}{2x-1})^3$$

$$۳) f(x+\sqrt{x^2+1})=3(x+\sqrt{x^2+1})-4(x+\sqrt{x^2+1})^3$$

$$۴) f(\sin \alpha)=3 \sin \alpha-4 \sin^3 \alpha=\sin 3\alpha$$

$$۵) f(f(x))=f(3x-4x^3)=3(3x-4x^3)-4(3x-4x^3)^3$$

مثال ۲. اگر داشته باشیم: $f(x, y)=x^2+5xy$ ، مطلوب است

محاسبه‌ی عبارت‌های زیر:

$$f(2-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{11}) \text{ و } f(x+y, x-y)$$

$$f(x, y)=x^2+5xy$$

حل:

$$۱) f(2-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{11})=(2-\sqrt{2})^2+5(2-\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{11})$$

$$۲) f(x+y, x-y)=(x+y)^2+5(x+y)(x-y)$$

مثال ۳. اگر $f(x, y, z)=x^2-3xyz$ باشد، مطلوب است

محاسبه‌ی:

$$f(a-b, b-c, c-a)$$

حل:

$$f(x, y, z)=x^2-3xyz$$

$$f(a-b, b-c, c-a)=(a-b)^2-3(a-b)(b-c)(c-a)$$

۲. مسئله‌ی معکوس $f(x)$

یعنی $f(h(x))$ معلوم است و می‌خواهیم $f(x)$ را محاسبه کنیم.

به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱. اگر $f(x+5)=4x+23$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

$$\begin{cases} x+y \xrightarrow{\text{تبدیل}} x \\ x-y \xrightarrow{\text{تبدیل}} y \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = r \cos \frac{x}{r} \cdot \cos \frac{y}{r}$$

مثال ۷. اگر $f(\frac{y}{x}) = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + y^2}$ و $x < 0$ ، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

حل: در سمت راست x را به داخل رادیکال می‌بریم و چون $x < 0$ است، باید در خارج رادیکال منفی بگذاریم:

$$f(\frac{y}{x}) = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + y^2} = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}} = -\sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}$$

$$\frac{y}{x} \xrightarrow{\text{تبدیل}} x \Rightarrow f(x) = -\sqrt{1 + x^2}$$

مثال ۸. اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ و $x > 0$ و $x > \frac{1}{x}$ ، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

$$f(x + \frac{1}{x}) = x^2 - \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x})$$

حل:

$$x + \frac{1}{x} = a \quad \text{فرض می‌کنیم}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = a^2 - 4$$

$$\text{داریم: } x > \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{x})^2 = a^2 - 4 \Rightarrow (x - \frac{1}{x}) = \sqrt{a^2 - 4}$$

$$f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x})$$

$$f(a) = a\sqrt{a^2 - 4} \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$$

۳. مسئله‌ی گسترده‌ی $f(x)$

در این گونه مسائل که به صورت

$$af(h(x)) + bf(t(x)) = k(x)$$

هستند، می‌خواهیم $f(x)$ را بیابیم. ابتدا باید تبدیلی صورت گیرد تا $h(x)$ و $t(x)$ به یکدیگر تبدیل شوند. سپس دستگاه حاصل را حل می‌کنیم و آن‌گاه $f(x)$ محاسبه می‌شود.

مثال ۱. اگر $3f(x) + 2f(-x) = 15x$ ، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

$$\text{حل: } x \xrightarrow{\text{تبدیل}} -x \Rightarrow 3f(-x) + 2f(x) = -15x$$

$$\begin{cases} 3f(x) + 2f(-x) = 15x \\ 3f(-x) + 2f(x) = -15x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9f(x) + 6f(-x) = 45x \\ -6f(-x) - 4f(x) = 30x \end{cases}$$

$$5f(x) = 75x \Rightarrow f(x) = 15x$$

$$\text{الف) } \frac{1}{\lambda}(x^2 - y^2) \quad \text{ب) } \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2)$$

$$\text{ج) } \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2) \quad \text{د) } \frac{1}{\lambda}(x^2 - y^2)$$

حل: روش اول: در عبارت f قرار می‌دهیم:

$$f(x+y, x-y) = rxy$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$$

$$f(a,b) = r(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2}) \Rightarrow$$

$$f(a,b) = \frac{1}{\lambda}(a^2 - b^2) \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{\lambda}(x^2 - y^2)$$

روش دوم:

$$f(x+y, x-y) = rxy$$

$$f(x+y, x-y) = \frac{1}{\lambda}((x+y)^2 - (x-y)^2)$$

$$\begin{cases} x+y \xrightarrow{\text{تبدیل}} x \\ x-y \xrightarrow{\text{تبدیل}} y \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{\lambda}(x^2 - y^2)$$

روش سوم: به x و y دو عدد نسبت می‌دهیم:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow f(3,1) = r(2)(1) \Rightarrow f(3,1) = 4$$

می‌گوییم گزینه‌ای صحیح است که $f(3,1)$ آن برابر ۴ شود. بنابراین گزینه‌ی (ج) قابل قبول است.

مثال ۵. اگر $f(x+y, x-y) = 2 \sin x \cos y$ ، آن‌گاه $f(x,y)$ را بیابید.

حل: عبارت سمت راست را به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم:

$$f(x+y, x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$f(x+y, x-y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$\begin{cases} x+y \xrightarrow{\text{تبدیل}} x \\ x-y \xrightarrow{\text{تبدیل}} y \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = \sin x + \sin y$$

مثال ۶. اگر $f(x+y, x-y) = \cos x + \cos y$ ، آن‌گاه $f(x,y)$ را بیابید.

حل: عبارت سمت راست را به حاصل ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$f(x+y, x-y) = \cos x + \cos y$$

$$f(x+y, x-y) = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

مثال ۲. اگر $f(2x-3)+f(3-2x)=4x$ ، آن گاه $f(x)$ را بیابید.

$$2x-3=a \Rightarrow \begin{cases} 3-2x=-a \\ 2x=a+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \int 2f(a)+f(-a)=2(a+3) \\ 2 \int f(-a)+f(a)=2(-a+3) \end{cases} \quad a \xrightarrow{\text{تبدیل}} -a$$

$$\begin{cases} -4f(a)-2f(-a)=-4(a+3) \\ 2f(-a)+f(a)=2(-a+3) \end{cases}$$

$$-3f(a)=-4a-12-2a+6 \Rightarrow -3f(a)=-6a-6$$

$$\Rightarrow f(a)=2a+2 \Rightarrow f(x)=2x+2$$

مثال ۳. اگر $f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x$ ، آن گاه $f(x)$ را بیابید.

$$f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x \quad x \xrightarrow{\text{تبدیل}} (\frac{\pi}{2}-x)$$

$$f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)+2f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\begin{cases} f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x \\ -2 \int f(\cos x)+2f(\sin x)=2\cos^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x \\ -2f(\cos x)-4f(\sin x)=-4\cos^2 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3f(\sin x)=-4\cos^2 x+2\sin^2 x$$

$$-3f(\sin x)=-4(1-\sin^2 x)+2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow -3f(\sin x)=6\sin^2 x-4$$

$$\Rightarrow f(\sin x)=-\frac{2}{3}\sin^2 x+\frac{4}{3} \quad \sin x \xrightarrow{\text{تبدیل}} x$$

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}$$

۴. مسئله‌ی ترکیبی (نوع اول)

در این حالت $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم است و می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم. با توجه به ساختن $f(g(x))$ ، $g(x)$ به راحتی محاسبه می‌شود.

مثال. اگر $f(x)=2x-5$ و $f(g(x))=4x^6+2x^2-1$ ، آن گاه $g(x)$ را بیابید.

حل:

$$f(g(x))=2g(x)-5=4x^6+2x^2-1 \Rightarrow g(x)=2x^6+x^2+2$$

۵. مسئله‌ی ترکیبی (نوع دوم)

در این مسئله $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم است و می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم.

مثال: اگر $f(x)=2x+3$ و $g(f(x))=8x+11$ ، آن گاه $f(x)$ را بیابید.

حل:

$$g(f(x))=g(2x+3)=8x+11$$

$$g(2x+3)=4(2x+3)+11=4(2x+3)-12+11$$

$$g(2x+3)=4(2x+3)-1 \quad (2x+3) \xrightarrow{\text{تبدیل}} x$$

$$g(x)=4x-1$$

مثال. اگر $f(\frac{x-1}{x+1})=2^x$ ، آن گاه $f(\frac{x+1}{x-1})$ را بیابید.

حل:

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=2^x$$

صورت و مخرج کسر را در (-1) ضرب می‌کنیم:

$$x \xrightarrow{\text{تبدیل}} -x \Rightarrow f\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=2^{-x}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2^{-x}$$

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=2^x, f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2^{-x}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x-1}{x+1}\right).f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2^x \times 2^{-x}=2^0=1 \quad (x \neq \pm 1)$$

مثال: اگر $f(x)=x^2-5x+4$ و $g(x)=x^2+5x$ ، آن گاه معادله‌ی $f(g(x))=0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

حل:

$$f(x)=x^2-5x+4, f(g(x))=f(x^2+5x)$$

$$f(x)=(x-1)(x-4) \quad x \xrightarrow{\text{تبدیل}} (x^2+5x)$$

$$f(x^2+5x)=(x^2+5x-1)(x^2+5x-4)$$

$$f(x^2+5x)=0 \Rightarrow (x^2+5x-1)(x^2+5x-4)=0$$

$$x^2+5x-1=0, \Delta > 0$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

$$x^2+5x-4=0, \Delta > 0$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

پس معادله‌ی $f(g(x))=0$ چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

سؤال: آیا ممکن نیست دو معادله‌ی $x^2+5x-1=0$ و $x^2+5x-4=0$ ، یک ریشه‌ی مشترک داشته باشند؟ چرا؟



آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری Mathematica

قسمت اول

مقدمه

دکتر محمدعلی فریبرزى عراقى
عضو هیئت علمى گروه ریاضى دانشگاه
آزاد اسلامى، واحد تهران مرکزى

کلید واژه‌ها:

بسته‌های نرم‌افزاری Mathematica

. Evaluate Cells .Cells .Basic mathInput .Palettes

بسته‌ی نرم‌افزاری Mathematica حدود ۲۲ سال پیش توسط استفن ولفرم^۱ به عنوان یک نوآوری علمى کارا برای امور تحقیقاتی ارائه شد. وی مؤسس شرکت معتبر نرم‌افزاری ولفرم است که در سال ۱۹۸۷ پایه‌گذاری شد. اولین نسخه‌ی Mathematica در سال ۱۹۸۸ معرفی شد و طی دو دهه، نسخه‌های کامل‌تر این بسته‌ی نرم‌افزاری وارد بازار شد؛ به‌طوری که هم‌اکنون نسخه‌ی ۷ آن در بازار موجود



است.

از دو دهه، به عنوان یک سیستم تعریف شده برای طیف گسترده‌ای از محاسبات هم‌چنان مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. در این راستا تصمیم گرفته شد، مجموعه‌ای از مقالات برای آشنایی دانش‌آموزان و خوانندگان گرامی با این بسته‌ی نرم‌افزاری نوشته شود. در این مقالات براساس مطالب موجود در ریاضیات دوره‌ی دبیرستان، چگونگی انجام محاسبات در محیط این بسته‌ی نرم‌افزاری مطرح خواهد شد. ابتدا با توجه به محتوای کتاب‌های ریاضی ۱ و ۲ دبیرستان، به معرفی توابع مقدماتی و نحوه‌ی اجرا و به کارگیری آن‌ها در محیط این بسته می‌پردازیم. در ادامه‌ی این مقالات، در چارچوب دروس حسابان، حساب دیفرانسیل و انتگرال، چگونگی محاسبه توابع، حد، مشتق، انتگرال، رسم منحنی و ... در این بسته آموزش داده می‌شود. به این منظور نسخه‌ی Mathematica 6 در نظر گرفته شده است و تمامی محاسبات و دستورات عمل‌ها در محیط این نسخه از نرم‌افزار معرفی می‌شوند. بسته‌ی نرم‌افزاری Mathematica تحت سیستم عامل ویندوز قابل اجرا است.

نصب نرم‌افزار

به منظور نصب Mathematica روی رایانه‌ی شخصی خود، ابتدا سی‌دی حاوی این بسته نرم‌افزاری را در سی‌دی‌خوان قرار دهید و فایل Setup.exe را اجرا کنید تا اجرای مراحل نصب به‌طور خودکار آغاز شود. در ابتدا اطلاعات شما و کلمه‌ی عبور خواسته می‌شود. با اجرای فایل Keygen.exe می‌توانید پس از قرار دادن شماره‌ی MathID و فشار دکمه‌ی Generate، «شماره‌ی شناسایی»^۲ و «کلمه‌ی عبور»^۳ را اخذ و در قسمت مربوط کپی کنید تا مراحل نصب دنبال شود. پس از اتمام نصب، رایانه‌ی خود را restart کنید.

مشخصات نرم‌افزار

صفحه‌ی اصلی Mathematica شامل گزینه‌های Edit، File، Windows و Help است. توصیه می‌شود هم‌زمان با مطالعه‌ی این توضیحات، برای یادگیری بهتر، هر کدام از توابع و دستورات عمل‌های معرفی شده را روی رایانه‌ی شخصی خود اجرا کنید. به منظور ایجاد یک فایل جدید، گزینه‌ی «New» را در پنجره‌ی «File» انتخاب و اطلاعات موردنظر خود را روی صفحه تایپ و اجرا می‌کنیم. برای ذخیره‌ی اطلاعات، گزینه‌ی «Save» از پنجره File را انتخاب و با یک نام نظیر «Sample» فایل را ذخیره می‌کنیم. تمام یادداشت‌های Mathematica که در صفحه‌ی اصلی درج می‌گردند، به صورت فایلی با پسوند «.nb» در ماشین ذخیره می‌شوند. هم‌چنین، برای باز کردن فایل‌های قبلی در محیط این نرم‌افزار، گزینه‌ی «Open»

این بسته‌ی نرم‌افزاری نه تنها به منظور انجام محاسبات ریاضی، بلکه با هدف مدل‌سازی، شبیه‌سازی، تجسم، مستندسازی و پیشرفت و توسعه در زمینه‌های گوناگون علوم فنی و کاربردی طراحی شد. Mathematica سرآغازی برای محاسبات فنی مدرن بود. تا قبل از پیدایش این بسته، بسته‌های متفاوتی وجود داشتند که تنها قادر به انجام محاسبات جبری و عددی مشخص و انجام اعمال گرافیکی محدودی بودند. در حالی‌که با ابداع این نرم‌افزار جدید، کاربران قادر به انجام محاسبات پیشرفته و جامعی شدند.

زمانی‌که نسخه‌ی اول Mathematica به بازار آمد، به عنوان یکی از مهم‌ترین ده محصول اول آن سال معرفی شد. چرا که از اهمیت عملکرد آن نمی‌شد چشم پوشید. نخستین نسخه‌ی آن برای استفاده در علوم ریاضی و فیزیک و مهندسی طراحی شده بود، ولی در ادامه و طی سال‌های بعد، در سایر علوم نظیر پزشکی، زیست‌شناسی، علوم اجتماعی و بازرگانی نیز مورد استفاده قرار گرفت. در مهندسی نیز به عنوان ابزاری استاندارد برای طراحی، تولید و توسعه‌ی محصولات موردنظر به کار می‌رود.

Mathematica به شکل اساسی در طول تحصیلات مقدماتی و دانشگاهی و در سطوح متفاوت آموزش از دبیرستان به بعد، به عنوان یک ابزار آموزشی مناسب در سطح جهان مورد استفاده قرار گرفته است. به ویژه به دلیل طراحی ساده، جذاب و قابل فهم آن و امکان دسترسی ساده به این نرم‌افزار، دانش‌آموزان دبیرستانی در سراسر جهان به شکل عمومی از آن استفاده می‌کنند. تنوع موجود در این بسته به گونه‌ای است که کاربران از سن ۱۰ سال به بالا می‌توانند حتی برای سرگرمی از آن استفاده کنند.

در حال حاضر این بسته نرم‌افزاری در بسیاری از سازمان‌ها، شرکت‌ها و ارگان‌های دولتی کشور آمریکا و بزرگ‌ترین دانشگاه‌های جهان مورد بهره‌برداری قرار دارد. طی سال‌های اخیر، طراحی این بسته نرم‌افزاری به شکل قابل توجهی توسعه یافت، به‌طوری که پس

از پنجره‌ی File را انتخاب می‌کنیم و فایل موردنظر را می‌یابیم و باز می‌کنیم.

از جمله پنجره‌های قابل توجه در Mathematica، «Palettes» است. در این پنجره، گزینه‌ای به نام «BasicMathInput» وجود دارد که با انتخاب آن، صفحه‌ای شامل نمادهای اصلی در ریاضی، چون توان‌رسانی، کسر، ریشه‌گیری، مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری، مجموع، حاصل‌ضرب، ماتریس و ... به همراه اعمال اصلی ریاضی و حروف الفبای یونانی ظاهر می‌شوند. با انتخاب هر یک از این نمادها، عیناً آن نماد در صفحه‌ی اصلی ظاهر می‌شود که باید با پر کردن جاهای خالی، عبارت موردنظر برای محاسبه را آماده کنیم.

چند مثال

مثلاً به منظور محاسبه‌ی 5^7 ، گزینه $\square$ را انتخاب می‌کنیم. با این عمل یک سلول روی صفحه پدید می‌آید، که با یک گروه‌ی بسته مشخص می‌شود. حال داخل دومربع را در پایه و توان پر می‌کنیم. با دکمه‌ی «Tab» روی صفحه‌ی کلید، به سادگی می‌توان از مربع پایینی به بالایی منتقل شد. پس از تایپ 5^7 با فشار هم‌زمان دکمه‌های «Enter» و «Shift»، نتیجه روی صفحه به صورت 78125 مشخص می‌شود. در این حالت ورودی با «In» و نتیجه با «Out» در یک سلول نمایش داده می‌شود. لازم به ذکر است، در Mathematica هر عبارت ورودی جهت محاسبه در یک «سلول» قرار می‌گیرد و پس از اجرا، نتیجه نیز در همان سلول به نمایش درمی‌آید. هر سلول داخل یک علامت به شکل گروه‌ی بسته قرار دارد. به جز دکمه‌های Enter و Shift، برای محاسبه می‌توان از گزینه‌ی «محاسبه‌ی سلول‌ها»^۵ در پنجره‌ی Evaluation نیز استفاده کرد.

حال سلول دیگری را ایجاد می‌کنیم تا در آن عبارت $\frac{2}{7} + \frac{3}{4}$ محاسبه شود. ابتدا گزینه‌ی $\frac{\square}{\square}$ را در پنجره‌ی «BasicMathId» انتخاب و در مربع‌های خالی به ترتیب ۲ و ۷ را تایپ می‌کنیم. سپس جلوی کسر $\frac{2}{7}$ نماد + را تایپ و پس از آن مجدداً روی گزینه‌ی $\frac{\square}{\square}$ کلیک می‌کنیم و در مربع‌های خالی به ترتیب ۳ و ۴ را تایپ می‌کنیم. از کلید Tab برای انتقال از صورت به مخرج کسر می‌توان استفاده کرد. حال سلول حاصل را با فشار هم‌زمان دکمه‌های Enter و Shift محاسبه می‌کنیم. در این لحظه کسر $\frac{29}{28}$ به عنوان خروجی در صفحه‌ی نمایش ظاهر می‌شود.

ممکن است تمایل داشته باشیم مقدار این کسر را به شکل اعشاری ببینیم. به این منظور کافی است یک سلول جدید زیر همین کسر با تایپ حرف N و قرار دادن علامت % داخل یک گروه جلوی آن، ایجاد کنیم. با اجرای دستور N[%]، نتیجه‌ی کسر فوق به صورت $1/0.3571$ در صفحه ظاهر می‌شود. در حالت کلی دستور N[]، عبارت قرار

گرفته داخل گروه را به صورت عددی و با نمایش اعشاری مشخص می‌کند. در این حالت، ۵ رقم از ارقام قسمت اعشاری نمایش داده می‌شود که می‌توان با قراردادن عددی در کنار عبارت مربوط، تعداد ارقام اعشار موردنظر را مشخص کرد.

به طور کلی دستور N[n و عبارت]، مقدار عبارت داخل گروه را به صورت تقریبی و تا $n-1$ رقم اعشار نمایش می‌دهد. همچنین اگر عبارت در سلول یا سلول‌های قبلی وجود داشته باشد، نیازی به تایپ مجدد عبارت نیست و کافی است از علامت % استفاده کرد.

دستور N[%،n] مقدار عبارت موجود در آخرین سلول را به صورت عددی تا $(n-1)$ رقم اعشار مشخص می‌کند. برای مثال، اگر بخواهیم نتیجه‌ی عبارت $(\frac{9}{7})^4$ را به صورت تقریبی تا ۲۰ رقم اعشار ملاحظه کنیم، ابتدا گزینه‌ی توان‌رسانی را انتخاب و داخل مربع اول، روی گزینه کسر $(\frac{\square}{\square})$ کلیک می‌کنیم. حال ابتدا ۹، سپس ۷ و در نهایت ۴ را در مربع‌ها تایپ می‌کنیم. با دکمه‌ی Tab سریع‌تر می‌توان به مربع بعدی رفت. پس از اجرای سلول حاوی $(\frac{9}{7})^4$ ، حاصل این عبارت به صورت $\frac{6561}{2401}$ نمایش داده می‌شود. حال زیر این نتیجه تایپ می‌کنیم: N[%،20]. با محاسبه‌ی این سلول نتیجه‌ی عبارت به صورت 2.7326114119117034569 مشخص می‌شود.

57

78125

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{29}{28}$$

N [%]

1.03571

$$\left(\frac{9}{7}\right)^4$$

$$\frac{6561}{2401}$$

N [%، 20]

2.7326114119117034569

جذرگیری از جمله اعمال دیگری است که در پنجره‌ی BasicMathInput وجود دارد. فرض کنید که می‌خواهیم $\sqrt{2}$ را با ۱۰ رقم اعشار محاسبه کنیم. به این منظور، ابتدا روی علامت $\sqrt{\square}$ در این پنجره کلیک می‌کنیم تا عین همین علامت روی صفحه ظاهر شود. سپس درون مربع عدد ۲ را تایپ می‌کنیم. حال برای محاسبه‌ی تقریبی $\sqrt{2}$ آن را درون تابع محاسبه عددی N به صورت $N[\sqrt{2}, 10]$

Plus [2.5, 0.97, 31.29, 0.405]

35.165

{3, 8, -4, -10, 23} +6

{9, 14, 2, -4, 29}

تابع تفریق^۷: دستور Subtract[a,b] حاصل a-b را به عنوان نتیجه مشخص می کند.

مثال:

Subtract [67, 31]

36

تابع ضرب^۸: دستور Times [x,y,z] حاصل ضرب x, y, z را به صورت xyz مشخص می کند.

مثال:

Times [54, 3.1, 7.64, 1.77]

2263.72

تابع تقسیم^۹: دستور Divide [x,y] نتیجه ی تقسیم x بر y را مشخص می کند.

لازم به ذکر است، هنگام استفاده از این تابع اگر x بر y بخش پذیر نباشد، نتیجه ی تقسیم مشخص نمی شود. در این حالت می توان از دستور محاسبه ی عددی N استفاده کرد و حاصل تقسیم را به شکل اعشاری یافت.

مثال:

Divide [825, 75]

11

N [Divide[19, 7]]

2.71429

تابع توان^{۱۰}: دستور Power [x,n] حاصل x^n را مشخص می کند. این دستور به صورت x^n نیز می تواند بیان شود.

هم چنین اگر بخواهیم چند عدد را هم زمان به توان یکسان برسانیم، فهرست این اعداد را در یک مجموعه قرار می دهیم و بعد از آن علامت $^$ (نماد توان) و به دنبال آن توان مورد نظر را تایپ می کنیم.

مثال:

Power [3, 10]

59049

3^10

59049

{4.5, 7, 1.2, 10}^3

{91.125, 343, 1.728, 1000}

تابع جذرگیری^{۱۱}: دستور Sqrt [x] جذر عدد x را مشخص

قرار می دهیم. با اجرای این سلول، پاسخ $1/414213562$ را دریافت می کنیم.

توجه داشته باشید، اگر $\sqrt{2}$ را درون دستورالعمل محاسباتی $N[0,n]$ قرار ندهیم، خود $\sqrt{2}$ در نتیجه ی اجرای سلول ظاهر می شود. هم چنین می توان با استفاده از نماد $\sqrt[n]{}$ در این صفحه، ریشه گیری یک عدد را انجام داد. مثلاً برای محاسبه ی $\sqrt[5]{3}$ روی این نماد کلیک می کنیم و ابتدا ۳ را در مربع زیر رادیکال و سپس ۵ را در مربع داخل فرجه ی رادیکال تایپ می کنیم. به منظور انتقال به مربع دوم از دکمه ی Tab استفاده می کنیم. حال $\sqrt[5]{3}$ را درون تابع N قرار می دهیم و سلول حاصل را به صورت $N[\sqrt[5]{3}]$ با فشار دکمه های Enter و Shift محاسبه می کنیم. در این لحظه، مقدار $1/24573$ به عنوان نتیجه مشخص می شود. البته می توان با مشخص کردن تعداد ارقام اعشار مورد نظر، تقریب این عدد را با رقم های بیشتری ملاحظه کرد.

$N[\sqrt{2}, 10]$

1.414213562

$N[\sqrt[5]{3}]$

1.24573

با استفاده از دستور محاسبه ی عددی N می توان مقدار عدد پی را تا هر تعداد رقم اعشاری محاسبه کرد. به منظور مشاهده ی عدد پی با یک دقت معلوم، از نماد Pi استفاده می کنیم. به این منظور در صفحه ی نمایش تایپ می کنیم. $N[Pi,50]$ و با محاسبه ی این سلول مقدار عدد π تا ۴۹ رقم اعشار مشخص می شود. اگر فقط سلول حاوی Pi را اجرا کنیم، نتیجه به صورت π در صفحه ی نمایش ظاهر می شود.

N [Pi, 50]

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751

Pi

π

توابع حسابی

تابع جمع^{۱۲}: فرمول کلی این تابع به شکل $Plus[x_1, x_2, \dots, x_n]$ است. نتیجه ی این تابع برابر است با: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ ؛ یعنی مجموع اعداد مندرج در داخل کروشه. اگر بخواهیم یک دسته عدد را با یک عدد ثابت جمع کنیم، ابتدا این اعداد را داخل آکلاด تایپ می کنیم و بین هر کدام یک کاما قرار می دهیم. سپس علامت + و بعد از آن عددی را که باید با مقادیر داخل آکلاد جمع شود، تایپ می کنیم. با محاسبه ی سلول، حاصل مجموعه اعداد مورد نظر حاصل می شود.

پی‌نوشت

۱. Stephen Wolfram
۲. License Number
۳. Password
۴. Cell
۵. Evaluate Cells
۶. Plus

۷. Subtract
۸. Times
۹. Divide
۱۰. Power
۱۱. Sqrt

می‌کند. اگر x عددی مربع کامل نباشد، نتیجه‌ی اجرای این دستور به شکل $\sqrt{x}$ مشخص می‌شود. به منظور محاسبه‌ی عددی این مقدار باید از دستور N استفاده کرد. هم‌چنین اگر x عددی منفی باشد، اجرای این دستور به صورت یک عدد موهومی برحسب مضربی از i (که $i^2 = -1$) نمایش داده می‌شود.
مثال:

Sqrt [81]

9

Sqrt [35]

$\sqrt{35}$

N [Sqrt [35]]

5.91608

Sqrt [-4]

2 i

نکته: حرف اول هر یک از توابع به کار رفته در محیط Mathematica باید به صورت بزرگ تایپ شود.

محاسبه‌ی عبارت‌های جبری

تابع **Expand**: دستور، **Expand []** عبارت داخل کروشه را به صورت بسط داده شده مشخص می‌کند.

در مثال زیر، دو عبارت $(x+y)^3$ و $(4x+7y^2)^2$ و $(3x-5y^2)^2$ محاسبه شده‌اند.

Expand [{x+y}^3]

$\{x^3 + 3xy^2 + y^3\}$

Expand [(3x-5y^2)^2 + (4x+7y^2)^2]

$25x^2 + 26xy^2 + 74y^4$

تابع **Factor**: دستور **Factor []** عبارت جبری داخل کروشه را به شکل حاصل ضربی از عوامل اول تجزیه می‌کند. در مثال زیر، عبارت‌های $1+4x+4x^2$ ، x^4-y^4 ، a^3-b^3 و $6x^2+13x-5$ تجزیه شده‌اند.

Factor [1+4x+4x^2]

$(1+2x)^2$

Factor [x^4-y^4]

$(x-y^2)(x+y^2)(x^2+y^4)$

Factor [a^3-b^3]

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Factor [6x^2+13x-5]

$(5+2x)(-1+3x)$

تفریح اندیشه

کشف یک عدد با بازی ریاضی

میر شهرام صدر

با یک بازی ریاضی برای کشف یک عدد آشنا شوید. در این بازی شما می‌توانید از دوست خود بخواهید که عددی را در ذهن خود در نظر بگیرد، سپس با انجام یک الگوریتم می‌توانید آن عدد را کشف کنید. برای مثال، عددی که دوست شما در نظر می‌گیرد می‌تواند مقدار پول توجیبی یا شماره‌ی شناسنامه یا تاریخ تولد یا هر عدد دیگری باشد. در این جا با انجام یک بازی ریاضی می‌خواهیم تاریخ تولد دوست خود را کشف کنید.

برای این کار ابتدا از دوست خود بخواهید که تاریخ تولدش را به صورت یک عدد شش رقمی در ذهنش تصور کند. برای مثال، عدد شش رقمی متناظر با تاریخ پانزدهم مردادماه سال ۷۳ به صورت زیر است:

۷۳ ۰۵ ۱۵

روز ماه سال

سپس از دوست خود بخواهید که الگوریتم زیر را انجام دهد.

مرحله‌ی (۱) عدد شش رقمی را دو برابر کند.
مرحله‌ی (۲) به عدد حاصل از مرحله‌ی ۱، سه واحد بیافزاید.

مرحله‌ی (۳) عدد حاصل از مرحله‌ی ۲ را ۵ برابر کند.
مرحله‌ی (۴) از عدد حاصل از مرحله‌ی ۳، شش واحد کم کند.

مرحله‌ی (۵) عدد حاصل از مرحله‌ی ۴ را به شما اعلام کند.

اکنون با حذف رقم یکان عدد اعلام شده، تاریخ تولد دوست خود را می‌یابید.

بقیه در صفحه‌ی ۶۰

روش دیگر برای محاسبه ی وارون ماتریس (با قابلیت کنترل خطا)



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 3 & 6 & 10 & \\ 4 & 10 & 20 & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \quad \quad \quad \end{bmatrix}$$

کلید واژه‌ها: وارون ماتریس، دستگاه سه معادله ی سه مجهولی، دترمینان، ترانهاد ماتریس.

سید محمد رضا هاشمی موسوی

hashemi-moosavi@yahoo.com

مقاله را با ارائه ی روش محاسبه و اثبات وارون ماتریس:

بر حسب درایه های مجهول A^{-1} به ترتیب زیر به دست می آید:

از تساوی دو ماتریس اخیر سه دستگاه سه معادله ی سه مجهولی

به شکل زیر حاصل می شود، یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 & b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1 & c_1x_1 + c_2y_1 + c_3z_1 \\ a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2 & b_1x_2 + b_2y_2 + b_3z_2 & c_1x_2 + c_2y_2 + c_3z_2 \\ a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3 & b_1x_3 + b_2y_3 + b_3z_3 & c_1x_3 + c_2y_3 + c_3z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

آغاز می کنیم. همان طور که می دانیم، وارون ماتریس A را با نماد A^{-1} نمایش می دهیم و شرط لازم و کافی برای این که ماتریس A وارون پذیر باشد، این است که دترمینان A مخالف صفر باشد ($|A| \neq 0$). هم چنین می دانیم، حاصل ضرب وارون A در خودش، ماتریس مربع واحد مرتبه ی سوم می شود:

$$A^{-1} \times A = I_3$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\text{دستگاه (۱)} \begin{cases} a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 = 1 \\ b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1 = 0 \\ c_1x_1 + c_2y_1 + c_3z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{دستگاه (۲)} \begin{cases} a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2 = 0 \\ b_1x_2 + b_2y_2 + b_3z_2 = 1 \\ c_1x_2 + c_2y_2 + c_3z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{دستگاه (۳)} \begin{cases} a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3 = 0 \\ b_1x_3 + b_2y_3 + b_3z_3 = 0 \\ c_1x_3 + c_2y_3 + c_3z_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از ضرب وارون A در A^{-1} و متحد قرار دادن ماتریس حاصل و ماتریس مربع واحد مرتبه ی سوم، سه دستگاه سه معادله ی سه مجهولی

بدیهی است، در این جا از حل سه دستگاه فوق، درایه های ماتریس A^{-1} به دست می آیند. اکنون سه دستگاه را در یک سیستم حل می کنیم



	x_i	y_i	z_i	k_1	k_2	k_3	Σc
(مرحله ۱)	a_1	a_2	a_3	۱	۰	۰	$a_1 + a_2 + a_3 + 1 = \delta_1$
	b_1	b_2	b_3	۰	۱	۰	$b_1 + b_2 + b_3 + 1 = \delta_2$
	c_1	c_2	c_3	۰	۰	۱	$c_1 + c_2 + c_3 + 1 = \delta_3$
(مرحله ۲)	$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{A_1}$		$\frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{A_1}$	$-b_1$	a_1	۰	$a_1 \delta_2 - b_1 \delta_1 = \delta_4$
	$\frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{B_1}$		$\frac{b_1 c_3 - b_3 c_1}{B_1}$	۰	$-c_1$	b_1	$b_1 \delta_3 - c_1 \delta_2 = \delta_5$
(مرحله ۳)	$D = A_1 B_2 - A_2 B_1$ شرط لازم و کافی برای وجود وارون $D \neq 0$			$\frac{b_1 B_1}{S_1}$	$-\frac{(A_1 c_1 + a_1 B_1)}{S_1}$	$\frac{A_1 b_1}{S_1}$	$A_1 \delta_5 - B_1 \delta_4 = \delta_6$

$$A_1 y_i + A_2 z_i = k'_i$$

$$y_i = \frac{k'_i}{A_1} - A_2 \frac{k_i}{DA_1};$$

$$i=1: y_1 = \frac{k'_1}{A_1} - \frac{A_2 k_1}{A_1 D} = \frac{-b_1}{A_1} - \frac{A_2 S_1}{A_1 D}$$

$$= \frac{-(b_1 D + A_2 S_1)}{A_1 D} = \frac{t_1}{D}$$

$$i=2: y_2 = \frac{k'_2}{A_1} - \frac{A_2 k_2}{A_1 D} = \frac{a_1}{A_1} - \frac{A_2 S_2}{A_1 D}$$

$$= \frac{a_1 D - A_2 S_2}{A_1 D} = \frac{t_2}{D}$$

$$i=3: y_3 = \frac{k'_3}{A_1} - \frac{A_2 k_3}{A_1 D} = \frac{-A_2 S_3}{A_1 D} = \frac{t_3}{D}$$

از مرحله ۱، مقادیر x_1 ، x_2 و x_3 به شکل زیر محاسبه می شوند. باید توجه داشت، از هر مرحله ساده ترین معادله را انتخاب می کنیم. از مرحله ۱ داریم:

$$a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1 = k'_1$$

و به طور مشابه داریم:

$$i=1: x_1 = \frac{U_1}{D}, i=2: x_2 = \frac{U_2}{D}, i=3: x_3 = \frac{U_3}{D}$$

بنابراین، ماتریس وارون A چنین می شود:

تذکر ۱. ستون Σc برای کنترل هر سطر است و مقدار آن همیشه برابر مجموع سطر مربوطه است. اگر δ_4 ، δ_5 و δ_6 برابر مجموع عناصر سطر مربوطه ی خود نشوند، در محاسبه خطا وجود دارد که این اشتباه باید رفع شود. درواقع، ستون Σc در هر لحظه هر سطر عملیات انجام شده ی هر مرحله را کنترل می کند و به ما امکان می دهد که بلافاصله به خطای موجود در هر سطر پی ببریم و آن را اصلاح کنیم.

تبصره: در مرحله ی آخر عملیات (در این جا برای ماتریس مربع مرتبه ی سوم) می توان مقدار دترمینان A را نیز محاسبه کرد. در این جا مقدار دترمینان A چنین است:

$$|A| = \frac{D}{b_1} \neq 0$$

تذکر ۲. همان طور که گفته شد، مقدار دترمینال A از مرحله ی نهایی عملیات به دست می آید و شرط لازم و کافی برای آن که A وارون پذیر باشد، آن است که داشته باشیم: $D \neq 0$. از مرحله ۳، مقادیر z_1 ، z_2 و z_3 به شکل زیر محاسبه می شوند. از مرحله ۳ داریم:

$$D z_i = k_i \quad (D \neq 0)$$

$$z_i = \frac{k_i}{D}; i=1: z_1 = \frac{k_1}{D} = \frac{b_1 B_1}{D} = \frac{S_1}{D},$$

$$i=2: z_2 = \frac{S_2}{D}, i=3: z_3 = \frac{A_1 b_1}{D} = \frac{S_3}{D}$$

از مرحله ۲، مقادیر y_1 ، y_2 و y_3 به شکل زیر محاسبه می شوند. از مرحله ۲ داریم:



روش محاسبه

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

روش محاسبه‌ی ماتریس وارون A چنین است که ابتدا ترانزاده‌ی A را به دست می‌آوریم و سپس ماتریس واحد هم‌مرتبه‌ی A را کنار آن می‌نویسیم.

پس از آن، عملیات روی سطر و ستون را انجام می‌دهیم و از هر مرحله، سه درایه‌ی مجهول ماتریس A^{-1} را به دست می‌آوریم. در آخر، به همان صورتی که درایه‌های مجهول را نوشته‌ایم، مقدار هر درایه‌ی مجهول را جای‌گزین آن می‌کنیم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{D} & \frac{t_1}{D} & \frac{S_1}{D} \\ \frac{U_2}{D} & \frac{t_2}{D} & \frac{S_2}{D} \\ \frac{U_3}{D} & \frac{t_3}{D} & \frac{S_3}{D} \end{bmatrix}$$

مثال ۱. وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

حل: وارون ماتریس A را چنین فرض می‌کنیم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

اکنون ترانزاده‌ی A را به دست می‌آوریم و ماتریس واحد مرتبه‌ی سوم را کنار ماتریس حاصل می‌نویسیم. سپس عملیات روی سطرها

x_i	y_i	z_i	k_1	k_2	k_3	Σc
۱	۰	۱	۱	۰	۰	۳
۲	۱	۳	۰	۱	۰	۷
۴	۶	۲	۰	۰	۱	۱۳
۱	۱	۱	-۲	۱	۰	۱
۸	-۸	۰	۰	-۴	۲	-۲
-۱۶	۱۶	-۱۲	۲	۰	۰	-۱۰
$ A = \frac{-16}{2} = -8$ (دترمینال A) $z_1 = \frac{16}{-16}$ $z_2 = \frac{-12}{-16}$ $z_3 = \frac{2}{-16}$						
$z_1 = -1$						
$z_2 = \frac{3}{4}$						
$z_3 = -\frac{1}{8}$						

را انجام می‌دهیم:

توجه ۱. در هر سطر، مقدار Σc باید برابر مجموع عناصر آن سطر باشد. در غیر این صورت، در سطر فوق، یعنی سطری که مجموع عناصرش برابر مقدار Σc نیست، اشتباهی وجود دارد که باید اصلاح شود.

توجه ۲. از مرحله‌ی ۳ درایه‌های ستون آخر ماتریس وارون A به دست می‌آید.

با توجه به z_1, z_2, z_3 و مرحله‌های ۲ و ۱ درایه‌های A^{-1} را حساب می‌کنیم.

حال از مرحله‌ی ۲ معادله‌ی اول آن را که ساده‌تر است، انتخاب و درایه‌های ستون میانی A^{-1} را حساب می‌کنیم. یعنی از مرحله‌ی ۲، مقادیر y_1, y_2 و y_3 را محاسبه می‌کنیم. با توجه به معادله‌ی اول مرحله‌ی ۲ داریم:

$$y_i + z_i = k_i$$

$$i=1: y_1 + z_1 = k_1; y_1 - 1 = -2; \boxed{y_1 = -1}$$

$$i=2: y_2 + z_2 = k_2; y_2 + \frac{3}{4} = 1; y_2 = 1 - \frac{3}{4}; \boxed{y_2 = \frac{1}{4}}$$

$$i=3: y_3 + z_3 = k_3 \Rightarrow y_3 - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \boxed{y_3 = \frac{1}{8}}$$

در این‌جا از مرحله‌ی ۱، ساده‌ترین معادله را انتخاب و x_1, x_2 و x_3 را نیز محاسبه می‌کنیم. با توجه به معادله‌ی اول مرحله‌ی ۱ داریم:

$$x_i + z_i = k_i$$

$$i=1: x_1 + z_1 = k_1; x_1 - 1 = 1; \boxed{x_1 = 2}$$

$$i=2: x_2 + z_2 = k_2; x_2 + \frac{3}{4} = 0; \boxed{x_2 = -\frac{3}{4}}$$

$$i=3: x_3 + z_3 = k_3; x_3 - \frac{1}{8} = 0; \boxed{x_3 = \frac{1}{8}}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

در این جا ماتریس وارون A^{-1} یعنی A به دست می آید.
مثال ۲. وارون ماتریس زیر را حساب کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا ترانوادهی A یعنی A' را به دست می آوریم. کنار آن ماتریس واحد مرتبه ۴ را می نویسیم و عملیات روی سطرها را



	x_i	y_i	z_i	t_i	K_1	K_2	K_3	K_4	Σc
(مرحله ۱)	۱	۰	-۳	-۱	۱	۰	۰	۰	-۲
	-۱	۱	-۲	۱	۰	۱	۰	۰	۰
	۲	-۱	۰	۳	۰	۰	۱	۰	۵
	۳	۱	۱	۲	۰	۰	۰	۱	۸
(مرحله ۲)		۱	-۵	۰	۱	۱	۰	۰	-۲
		-۱	۴	-۵	۰	-۲	-۱	۰	-۵
		۵	۲	-۵	۰	۰	-۳	۲	۱
(مرحله ۳)			-۱	-۵	۱	-۱	-۱	۰	-۷
			-۲۲	۳۰	۰	۱۰	۸	-۲	۲۴
(مرحله ۴)				-۱۴۰	۲۲	-۳۲	-۳۰	۲	-۱۷۸

توجه: بدون این که به عمومیت مسئله خللی وارد شود همیشه می توان عناصر میانی ستون اول مرحله ۱ و مرحله ۲ را غیر صفر در نظر گرفت؛ زیرا با جابه جایی سطرها یا جمع سطرها این فرض مسلم است.

انجام می دهیم:

از مرحله ۴ نتیجه می شود:

از مرحله ۳ داریم:

$$-z_i - 5t_i = k_i \Rightarrow z_i + 5t_i = -k_i$$

$$i=1: z_1 + 5t_1 = -k_1; z_1 + 5t_1 = -1$$

$$z_1 + 5(-\frac{1}{5}) = -1; z_1 = -\frac{3}{5}, i=2: z_2 + 5t_2 = -k_2$$

$$z_2 + 5(\frac{1}{5}) = -(-1); z_2 = 1 - \frac{1}{5}; z_2 = \frac{4}{5}$$

$$i=3: z_3 + 5t_3 = -k_3; z_3 + 5(\frac{3}{5}) = -(-1); z_3 = -\frac{1}{5}$$

$$i=4: z_4 + 5t_4 = -k_4; z_4 + 5(-\frac{1}{5}) = 0; z_4 = \frac{1}{5}$$

از معادله ۱ اول مرحله ۲ داریم:

$$y_i - 5z_i = k_i$$

$$i=1: y_1 - 5z_1 = k_1; y_1 - 5(-\frac{3}{5}) = 1;$$

$$|A'| = |A| = \frac{-140}{(-1)(2)(-1)} = -70$$

$$-140t_i = k_i; t_i = \frac{k_i}{-140}$$

$$i=1: t_1 = \frac{22}{-140} = -\frac{11}{70};$$

$$i=2: t_2 = \frac{k_2}{-140} = \frac{-32}{-140} = \frac{8}{35};$$

$$i=3: t_3 = \frac{k_3}{-140} = \frac{-30}{-140} = \frac{3}{14};$$

$$i=4: t_4 = \frac{k_4}{-140} = \frac{2}{-140} = -\frac{1}{70}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}} = ?$$

حل: حاصل نسبت را X در نظر می گیریم. بنابراین داریم:

$$\frac{B}{A} = X ; B = AX$$

برای محاسبه ی X کافی است طرفین رابطه ی اخیر را در وارون A (از طرف چپ) ضرب کنیم، یعنی:

$$A^{-1}B = A^{-1}AX ; A^{-1}B = I_3X ; X = A^{-1}B$$

بنابراین، نسبت فوق برابر با حاصل ضرب وارون مخرج در صورت (از طرف چپ) است. همان طور که دیده می شود، مسئله ی نسبت دو ماتریس نیز به محاسبه ی وارون ماتریس مخرج منتهی می شود. در این جا برای حل مسئله کافی است ابتدا وارون ماتریس A را محاسبه و سپس در ماتریس B ضرب کنیم.

* توجه: این روش برای هر ماتریس مربع $n \times n$ نیز قابل تعمیم است.

$$y_1 = 1 - \frac{15}{14} ; y_1 = -\frac{1}{14}$$

$$i = 2: y_2 - 5z_2 = k_2 ; y_2 - 5(-\frac{1}{14}) = 1 ; y_2 = \frac{2}{7}$$

$$i = 3: y_3 - 5z_3 = k_3 ; y_3 - 5(-\frac{1}{14}) = 0 ; y_3 = -\frac{5}{14}$$

$$i = 4: y_4 - 5(\frac{5}{14}) = 0 ; y_4 = \frac{5}{14}$$

از معادله ی اول مرحله ی ۱ داریم:

$$x_1 - 3z_1 - t_1 = k_1$$

$$i = 1: x_1 - 3z_1 - t_1 = k_1 ;$$

$$x_1 - 3(-\frac{3}{14}) - (-\frac{11}{14}) = 1 ; x_1 = \frac{1}{5}$$

$$i = 2: x_2 - 3z_2 - t_2 = k_2 ;$$

$$x_2 - 3(-\frac{1}{14}) - (\frac{1}{35}) = 0 ; x_2 = -\frac{1}{5}$$

$$i = 3: x_3 - 3z_3 - t_3 = k_3 ;$$

$$x_3 - 3(-\frac{1}{14}) - \frac{3}{14} = 0 ; x_3 = 0$$

$$i = 4: x_4 - 3z_4 - t_4 = k_4 ;$$

$$x_4 - 3(\frac{5}{14}) - (-\frac{1}{14}) = 0 ; x_4 = \frac{1}{5}$$

* توجه: این روش برای تعیین وارون هر ماتریس مربع قابل تعمیم است که در این مختصر به همین دو مثال اکتفا می کنیم. بنابراین، در این جا تمام درایه های A^{-1} به دست می آید و کافی است مقادیر درایه های مجهول را جانشین کنیم؛ یعنی:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{bmatrix} ;$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & -\frac{11}{14} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{35} \\ 0 & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{5} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix}$$

مثال ۳. نسبت دو ماتریس زیر را به دست آورید.

تئوری مقدماتی اعداد باید یکی از بهترین موضوع ها برای تعلیم اولیه ی ریاضیات باشد. چندان اطلاع قبلی نمی خواهد، موضوعش ملموس و مأنوس است، طریقه های استدلال که به کار می گیرد، ساده و تعدادشان کم است و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی در علوم ریاضی مانند ندارد.

یک ماه تعلیم فهمیده تئوری اعداد دو بار آموزنده تر و مفیدتر و حداقل ده بار سرگرم کننده تر از همان مدت تعلیم حسابان برای مهندسی می باشد. (هاردی)

منبع:

تئوری مقدماتی اعداد/ دکتر غلام حسین مصاحب

در پنج دوره‌ی متوالی مقام نخست این رقابت‌ها را از آن خود کرد و در مجموع چهارده بار (تا سال ۱۹۹۳ که با نام اتحاد شوروی شرکت کرده است) مقام نخست و شش بار مقام دوم را کسب کرد!

پس از فروپاشی شوروی سابق نیز، کشور روسیه و سایر جمهوری‌های شوروی سابق توانسته‌اند موفقیت‌های بسیاری در المپاد بین‌المللی ریاضی به‌دست آورند. مسائلی که در جریان رقابت‌های این جمهوری‌ها طی سال‌های متمادی مطرح شده‌اند، منبع عظیمی از مسائل ناب ریاضی هستند که متأسفانه دست‌رسی کاملی به آن‌ها وجود ندارد. ای کاش می‌شد مجموعه‌ی همه‌ی آن‌ها را جمع‌آوری و طبقه‌بندی کرد و در اختیار علاقه‌مندان قرار داد. کتاب «المپاد‌های ریاضی لنینگراد» که مجموعه‌ی مسائل مسابقات ریاضی این شهر از سال ۱۹۶۱ تا سال ۱۹۹۳ را در برمی‌گیرد، یک مجموعه‌ی عالی از مسائل کم‌نظیر ریاضی است که به‌راستی و بی‌اغراق باید آن را غنیمت شمرد و در واقع جزو معدود منابع منتشرشده‌ی مسائل ریاضی شوروی سابق است. این کتاب که توسط دیمیتری ولادمیروویچ فومین و آلکسی کرچنکو نگارش یافته، تاکنون

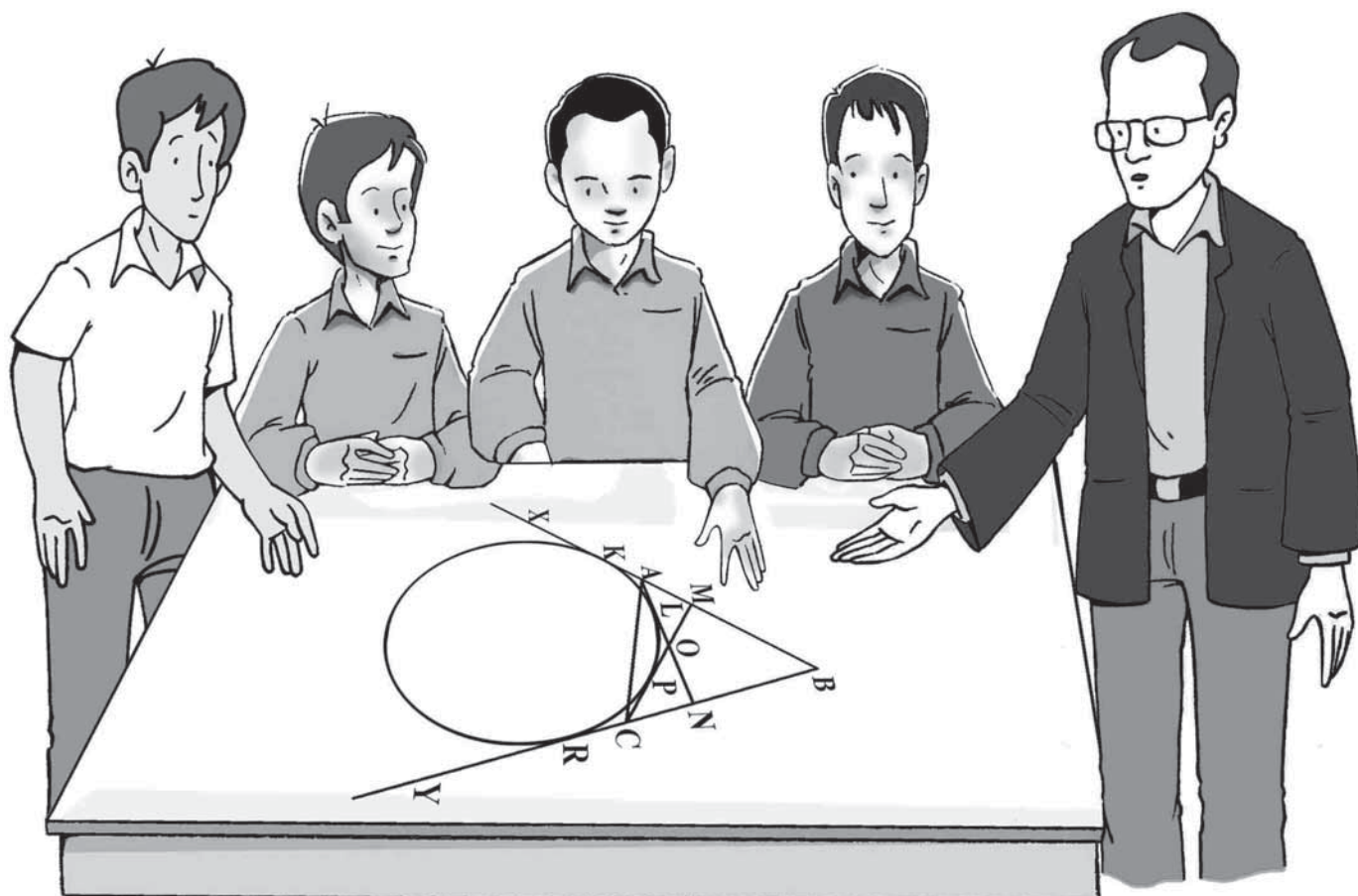
«سن پترزبورگ» نام پایتخت روسیه‌ی تزاری بود که پس از انقلاب ۱۹۱۷ و تغییر رژیم، به «لنینگراد» تغییر نام یافت. تا قبل از فروپاشی این اتحادیه (شوروی) و تجزیه‌ی آن به کشورهای گوناگون، المپاد‌های ریاضی به‌طور مستقل در هریک از جمهوری‌ها برگزار می‌شد و برگزیدگان در قالب تیم‌هایی در المپاد سراسری اتحاد شوروی شرکت می‌کردند. تیم نهایی المپاد ریاضی این کشور نیز از دل این رقابت‌ها انتخاب می‌شد. با این توضیحات می‌توان حدس زد که سطح سؤالات این آزمون‌ها بسیار قوی بوده است و همین طور هم بود.

درباره‌ی تاریخچه‌ی المپاد ریاضی در شوروی سابق و روسیه و جمهوری‌های استقلال‌یافته‌ی بعدی بسیار می‌توان نوشت و امیدوارم در فرصتی دیگر بتوانم به طور مستقل به این موضوع بپردازم. ولی همین‌قدر باید گفت که کشور شوروی از بنیان‌گذاران المپاد بین‌المللی ریاضی در سال ۱۹۵۹ بود و از نخستین دوره تا زمان فروپاشی، در تمام المپاد‌ها شرکت داشت. همواره هم جزو ۱۰ تیم برتر این رقابت‌ها بود. تنها در فاصله‌ی سال‌های ۱۹۶۳ تا ۱۹۶۷ این کشور

گزیده‌ای از مسائل المپاد‌های ریاضی لنینگراد

هوشنگ شرقی

کلید واژه‌ها: المپاد لنینگراد، صورت مسائل المپاد‌های لنینگراد، حل مسائل المپاد‌های لنینگراد.



$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

$$(n > 1) \quad 2 - \frac{1}{n} < x < 2 \quad \text{ثابت کنید:}$$

۴. برای عددهای طبیعی a و b می‌دانیم $a^2 + ab + 1$ بر $b^2 + ab + 1$ بخش پذیر است. ثابت کنید: $a = b$.

۵. نقطه‌ی دل‌خواه P را روی ضلع BC از مربع $ABCD$ انتخاب کرده‌ایم. دایره‌ای که از سه نقطه‌ی A ، B و P می‌گذرد، قطر BD را در نقطه‌ی دیگری Q قطع می‌کند. دایره‌ای که از سه نقطه‌ی C ، P و Q می‌گذرد، BD را در نقطه‌ی دیگری R قطع می‌کند. ثابت کنید A ، R و P بر یک امتدادند.

حل مسائل

۱. این نخستین و آسان‌ترین مسائل است!

مجموع این رقم‌ها را در نظر بگیرید:

$$1+2+3+4+5+6 = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$

اما می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۱۱، برابر است با باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی که از جمع و تفریق یک در میان ارقام این عدد بر ۱۱ (از سمت راست) به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$\overline{abcdef}^{11} \equiv f - e + d - c + b - a$$

و اگر بخواهیم این عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$f - e + d - c + b - a = 11m \Leftrightarrow \overline{abcdef}^{11} \equiv 0$$

اگر $m=0$ باشد، نتیجه می‌شود: $f+d+b=a+c+e$. یعنی مجموع سه تا از رقم‌ها مساوی مجموع سه‌تای دیگر باشد و با توجه به این که مجموع هر شش رقم مساوی ۲۱ است، چنین چیزی ممکن نیست. (چرا؟)

به‌ازای $m=1$ نیز، با توجه به مجموع رقم‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} f+d+b-(e+c+a)=11 \\ f+d+b+(e+c+a)=21 \end{cases} \Rightarrow f+d+b=16$$

$$e+c+a=5$$

که این هم ممکن نیست. (چرا؟) برای $m>1$ نیز به سادگی مشخص می‌شود که امکان‌پذیر نیست. لذا پاسخ منفی است.

۲. ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم.

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ با ضرایب صحیح مفروض باشد، $f(b)-f(a)$ بر $b-a$ بخش‌پذیر است. اثبات لم آسان است.

به ده‌ها زبان زنده‌ی دنیا ترجمه شده و مورد استفاده‌ی میلیون‌ها نفر از علاقه‌مندان رشته‌ی ریاضی قرار گرفته است. در کشور ما نیز این کتاب به زبان فارسی ترجمه شده است و مترجم آن کسی نیست جز استاد پرویز شهریاری که زحمت ترجمه‌ی بسیاری از کتاب‌های المپیاد ریاضی را نیز متحمل شده‌اند. نگارنده به‌خوبی به یاد دارد، از هنگامی که نخستین چاپ این کتاب در سال ۱۳۷۴ منتشر شد، تاکنون بارها و بارها آن‌را به دانش‌آموزان داوطلب شرکت در المپیاد ریاضی معرفی کرده است و یقین دارد که یکی از بهترین منابع سؤال است و شاید برترین آن‌ها باشد. از جمله امتیازات این مجموعه مسائل آن است که چون مسابقات المپیاد ریاضی در لنینگراد (و در دیگر شهرهای شوروی سابق) در همه‌ی سطوح دبیرستانی برگزار می‌شده است، بنابراین مسائلی مناسب همه‌ی سنین دارد و می‌تواند هر دانش‌آموز علاقه‌مند را با مسائل خود ساعت‌ها به چالش بکشد. نکته‌ی جالب توجه آن است که بعضی از مسائل کتاب که برای دانش‌آموزان سال ششم و هفتم این شهر (معادل اول و دوم راهنمایی کشور خودمان) مطرح شده‌اند، مسائل بسیار دشواری هستند که حل آن‌ها برای بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستان‌ها می‌تواند کاملاً چالش‌برانگیز باشد! وقتی تصمیم گرفتیم بعضی از مسائل این المپیادها را برای این شماره انتخاب کنیم، حیف آمد که آن‌را به یک شماره و چند مسئله محدود کنیم و تصمیم گرفتیم طی چند شماره‌ی پیاپی به این مسائل بپردازیم. در این شماره پنج مسئله از مسائل ویژه‌ی کلاس‌های دهم در سال ۱۹۹۰ را انتخاب و مطرح می‌کنم و در شماره‌های بعد به مسائل دیگری می‌پردازم. سعی کرده‌ام مسائلی را انتخاب کنم که حل یا راهنمایی آن‌ها در کتاب مزبور وجود نداشته باشد. امیدوارم که خوانندگان مجله از این مسائل لذت کافی ببرند و قبل از ملاحظه‌ی راه حل آن‌ها، خود نیز سعی کنند با آن‌ها، ولو اندک زمانی به چالش بپردازند. من خود طی سال‌های متمادی از این مسائل به‌راستی لذت برده‌ام و امیدوارم برای شما نیز چنین باشد. در انتها ذکر این نکته هم بد نیست که پس از فروپاشی شوروی سابق، نام شهر لنینگراد دوباره به سن پترزبورگ تغییر یافته است و المپیاد ریاضی آن با این نام هم‌چنان برگزار می‌شود.

صورت مسائل

۱. آیا می‌توان با استفاده از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ (و از هرکدام یک بار) عددی شش‌رقمی و بخش‌پذیر بر ۱۱ درست کرد؟
۲. چند جمله‌ای f با ضرایب‌های درست داده شده است. می‌دانیم $f(2)$ بر ۵ و $f(5)$ بر ۲ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $f(7)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.
۳. برای عدد حقیقی و مثبت x می‌دانیم:

$$\frac{n - (\frac{1}{n})^n}{n} < 0$$

$$(-\frac{1}{n})(\frac{1}{n})^n + 1 < 0$$

$$f(\frac{1}{n}) < 0$$

$$\frac{1}{n} < x < 2$$

و در نتیجه:

بنابراین:

و طبق قضیه ی بولتزانو:

۴. از ویژگی های رابطه ی بخش پذیری (عادکردن) استفاده می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} b^2 + ab + 1 &| a^2 + ab + 1 \\ b^2 + ab + 1 &| b^2 + ab + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$b^2 + ab + 1 | b(a^2 + ab + 1) - a(b^2 + ab + 1) = b - a$$

$$\Rightarrow b^2 + ab + 1 | b - a$$

ولی روشن است که اگر $a, b \in \mathbb{N}$ باشند، داریم:

$$\Rightarrow b^2 + ab + 1 > b - a$$

(زیرا $b^2 \geq b$). پس باید $b - a = 0$ باشد و از آن جا: $a = b$.

۵. بدون آن که دایره ی محیطی مثلث CPQ را رسم کنیم، ثابت می کنیم که نقطه ی برخورد BD و AP (نقطه ی R') و سه نقطه ی C، P و Q رؤس یک چهارضلعی محاطی اند. بنابراین دایره ی محیطی مثلث CPQ از R' می گذرد و R' همان R است. در نتیجه A، R و P بر یک استقامت اند.

مطابق شکل، دو مثلث CBQ و ABQ به حالت (ض.ض)

همنهشت اند ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 45^\circ$ و $AB = BC$ و $BQ = BQ$). بنابراین:

$$\hat{C}_1 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$$

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_2 = \frac{\widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \hat{A}_2 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_1 + 45^\circ \quad (1)$$

در مثلث $AR'B$ نیز زاویه ی خارجی R'_1 برابر است با:

$$\hat{R}'_1 = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = 45^\circ + \hat{A}_1 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{R}'_1$$

$$\hat{R}'_1 + \hat{R}'_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{R}'_2 = 180^\circ$$

بنابراین، چهارضلعی CQR'P محاطی است و طبق آن چه که گفتیم، دایره ی محیطی مثلث CPQ از R' می گذرد. لذا نقطه ی برخورد آن با BD همان R' و R' بر R منطبق است. یعنی حکم اثبات شده است.

$$f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0$$

$$f(b) - f(a) =$$

$$C_n (b^n - a^n) + C_{n-1} (b^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + C_1 (b - a)$$

و با توجه به اتحاد

$$b^m - a^m = (b - a)(b^{m-1} + ab^{m-2} + \dots + a^{m-1})$$

بدیهی است که همه ی پرانتزها عامل $b - a$ را دارند و در نتیجه:

$$b - a | f(b) - f(a)$$

اکنون با توجه به لم فوق داریم:

$$7 - 2 | f(7) - f(2) \Rightarrow 5 | f(7) - f(2), 5 | f(2)$$

$$\Rightarrow 5 | f(7) \quad (*)$$

$$7 - 5 | f(7) - f(5) \Rightarrow 2 | f(7) - f(5), 2 | f(5)$$

$$\Rightarrow 2 | f(7) \quad (**)$$

و با توجه به دو رابطه ی $*$ و $**$ بدیهی است که: $10 = 2 \times 5 | f(7)$

؛ یعنی $f(7)$ بر 10 بخش پذیر است.

۳. معادله را به صورت زیر تغییر می دهیم:

$$f(x) = x^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = 0$$

حال از قضیه ی موسوم به قضیه ی بولتزانو استفاده می کنیم:

قضیه: اگر f تابعی پیوسته در بازه ی $[a, b]$ باشد و داشته باشیم:

$f(a) > 0$ و $f(b) < 0$ یا $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ ، آن گاه معادله ی

$f(x) = 0$ در بازه ی $[a, b]$ لااقل یک ریشه ی حقیقی دارد.

اکنون می نویسیم:

$$f(x) = x^n - \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{x^{n+1} - x^n - x^n + 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1}$$

$$= \frac{x^n(x - 2) + 1}{x - 1}$$

$$f(2) = 1 > 0$$

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{(\frac{1}{n})^n - 1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{(\frac{1}{n})^n - 1}{1 - \frac{1}{n}}$$

و چون $n > 1$ ، پس، $1 - \frac{1}{n} > 0$ و به کمک قضیه ی استقرای ریاضی می توان ثابت کرد: $(\frac{1}{n})^n > n$ (برای گذر استقرایی از بسط دوجمله ای نیوتون استفاده کنید). بنابراین:

$$n - (\frac{1}{n})^n < 0$$

و از آن جا:

رویکرد هندسی- رویکرد جبری

در آموزش هندسه (۱۲)

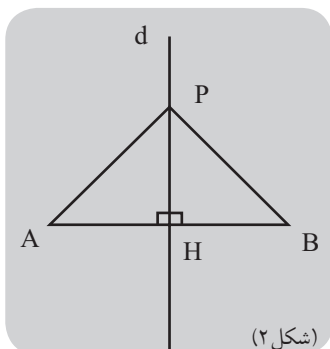
محمد هاشم رستمی

کلید واژه‌ها: عمود منصف پاره خط، نیم سازه، مکان هندسی.



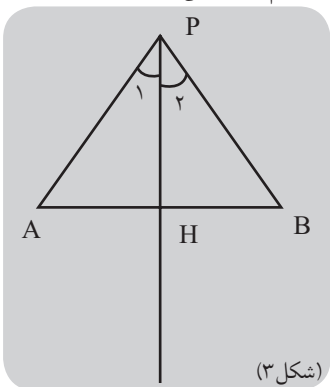
به منظور استفاده‌ی عده‌ی بیشتری از دانش آموزان از این رویکرد در حل مسئله‌های هندسه، به ارتباط این دو رویکرد در حل مسئله‌های هندسه در صفحه می‌پردازیم. به این ترتیب با دستگاه مختصات دکارتی در صفحه سروکار خواهیم داشت.

$$\begin{cases} AH = BH \\ PH = PH \\ \hat{P}HA = \hat{P}HB = 90^\circ \end{cases}$$



(شکل ۲)

بنابراین ضلع‌های سوم این دو مثلث با هم برابرند؛ یعنی: $PA=PB$ و حکم ثابت می‌شود.

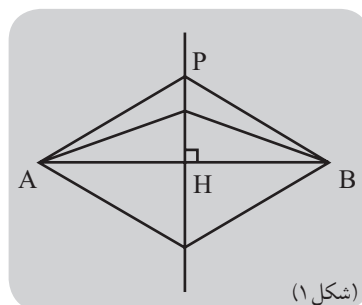


(شکل ۳)

۲. نقطه‌ی P و پاره خط AB در یک صفحه چنان واقع‌اند که داریم: $PA=PB$. می‌خواهیم ثابت کنیم که نقطه‌ی P روی عمود منصف پاره خط AB است. برای اثبات نیم سازه زاویه‌ی درونی از مثلث PAB را رسم می‌کنیم و پای این نیم سازه را H می‌نامیم. دو مثلث PHA و PHB به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت هستند، زیرا داریم:

$$\begin{cases} PA = PB \\ \hat{A}PH = \hat{B}PH & \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \\ PH = PH \end{cases}$$

ویژگی‌های عمود منصف یک پاره خط در یک صفحه قضیه: ثابت کنید عمود منصف هر پاره خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله قرار دارد.
یعنی:



(شکل ۱)

۱. هر نقطه‌ای که روی عمود منصف این پاره خط باشد، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.
۲. هر نقطه‌ای که از دو سر این پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف این پاره خط قرار دارد.
این قضیه را با دو روش هندسی و جبری - مختصاتی ثابت می‌کنیم.

الف) اثبات به روش هندسی

۱. عمود منصف پاره خط AB را d و نقطه‌ی برخورد آن با پاره خط AB را که در واقع همان وسط پاره خط AB است، H می‌نامیم. از نقطه‌ی دل‌خواه P واقع بر خط d (عمود منصف پاره خط AB)، به دو نقطه‌ی A و B وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که: $PA=PB$. دو مثلث PAH و PBH هم‌نهشت‌اند، زیرا داریم:

اکنون ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف این پاره خط واقع است. بدین ترتیب که اگر $P=(x, y)$ نقطه‌ای واقع در صفحه مختصات قائم ذکر شده در بالا باشد و از دو سر پاره خط AB ($B=(a, 0)$ و $A=(-a, 0)$) به یک فاصله باشد، خواهیم داشت:

$$P=(x, y), A=(-a, 0), B=(a, 0), PA=PB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$

$$\Rightarrow (x+a)^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow (x+a)^2 - (x-a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4ax = 0, a \neq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P = (0, y)$$

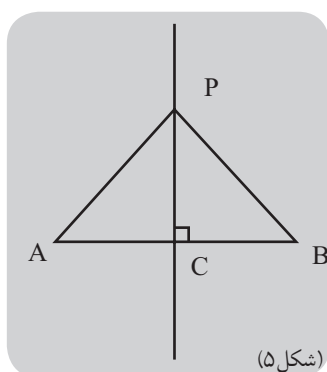
یعنی نقطه‌ی P روی محور yها واقع است که همان عمودمنصف پاره خط AB محسوب می‌شود. بنابراین، به روش تحلیلی نیز ثابت کردیم که عمودمنصف هر پاره خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است؛ زیرا:

الف) هر نقطه مانند P که روی عمودمنصف پاره خط AB باشد، از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است؛ یعنی $PA=PB$.

ب) هر نقطه‌ای که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد (یعنی $PA=PB$)، روی عمودمنصف پاره خط AB است.

نکته: به طوری که دیده می‌شود، اثبات این قضیه به روش جبری - مختصاتی، ساده‌تر از اثبات آن به روش هندسی است. اینک به چند مثال توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید هر نقطه مانند P روی عمودمنصف پاره خط AB، از نقاط A و B به یک فاصله است (مسئله‌ی ۱۹ صفحه‌ی ۲۷ کتاب هندسه‌ی ۱).



(شکل ۵)



حل: این مثال قسمت اول مسئله‌ی ابتدای مقاله است که با دو روش هندسی و جبری - مختصاتی حل شده است.

مثال ۲. دو نقطه‌ی A و B و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند، نقطه‌ای روی خط Δ بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.

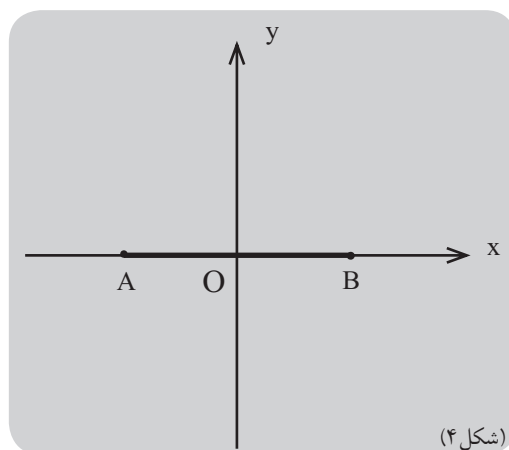
در نتیجه $AH=BH$. یعنی H وسط پاره خط AB است. از طرف دیگر: $\hat{AHP} = \hat{BHP}$ که چون $\hat{AHP} + \hat{BHP} = 180^\circ$ است، پس: $\hat{AHP} = \hat{BHP} = 90^\circ$. یعنی PH بر AB عمود است. در نتیجه PH عمودمنصف پاره خط AB و حکم مسئله درست است.

ب) راه حل جبری - مختصاتی

صورت مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

قضیه: ثابت کنید عمود منصف هر پاره خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

اثبات: اندازه‌ی پاره خط AB را ۲a فرض می‌کنیم. مهم‌ترین کار در روش حل جبری - مختصاتی انتخاب دستگاه مختصات مناسبی است که راه حل مسئله را به ساده‌ترین صورت، ممکن سازد.

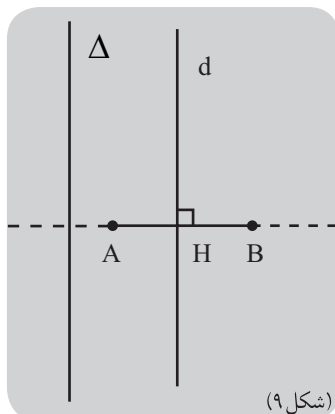


(شکل ۴)

در این مسئله، محور xها را روی خط AB و محور yها را روی عمودمنصف پاره خط AB اختیار می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد این دو محور نقطه‌ی O (که همان نقطه‌ی H در راه حل هندسی است)، مبدأ مختصات است. نقطه‌ی دل‌خواه P را روی عمودمنصف پاره خط AB که در این جا همان محور yهاست، اختیار می‌کنیم و مختصات این نقطه را $P=(0, y)$ در نظر می‌گیریم. از P به A و B وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم، برای هر نقطه‌ی P از عمودمنصف پاره خط AB داریم: $PA=PB$. با توجه به این که در این دستگاه مختصات قائم $A=(-a, 0)$ و $B=(a, 0)$ است، داریم:

$$\begin{aligned} PA=PB &\Rightarrow \sqrt{(-a-0)^2 + (0-y)^2} \\ &= \sqrt{(a-0)^2 + (0-y)^2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + y^2} \\ &= \sqrt{a^2 + y^2} \Rightarrow a^2 + y^2 = a^2 + y^2 \end{aligned}$$

این تساوی همواره برقرار است. بنابراین همواره $PA=PB$ است. پس هر نقطه واقع بر عمودمنصف پاره خط AB از دوسر این پاره خط، یعنی از دو نقطه‌ی A و B، به یک فاصله است.

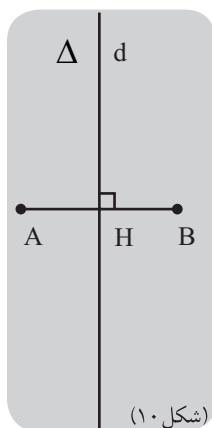


(شکل ۹)

Δ عمود باشد (شکل ۹).

نکته: در این حالت راستای AB راستای Δ را قطع می‌کند، اما دو راستا بر هم عمودند.

۳. اگر خط d عمودمنصف پاره خط AB منطبق بر خط Δ باشد، d مسئله بی‌شمار جواب دارد. زیرا هر نقطه از خط Δ که همان خط d است، جواب مسئله محسوب می‌شود (شکل ۱۰). البته این در صورتی است که خود خط Δ عمودمنصف پاره خط AB باشد.

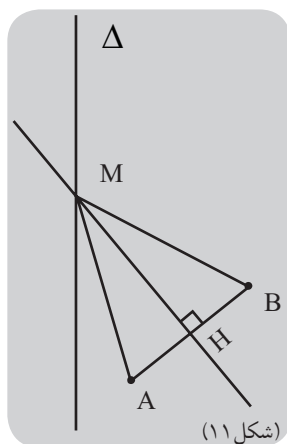


(شکل ۱۰)

روشی دیگر برای حل هندسی مثال ۲

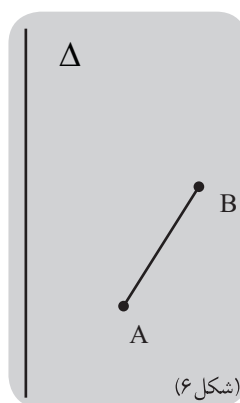
مسئله را حل شده فرض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی M، نقطه‌ی جواب مسئله باشد؛ یعنی نقطه‌ای باشد که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است ($MA=MB$). چون مکان هندسی تقاطی از صفحه که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله هستند، خط عمودمنصف پاره خط AB است، پس نقطه‌ی M یکی از نقطه‌های عمودمنصف پاره خط AB است.

یعنی عمودمنصف پاره خط AB از این نقطه می‌گذرد. به عبارت دیگر، نقطه‌ی M محل برخورد عمودمنصف پاره خط AB و خط Δ است.



(شکل ۱۱)

از این جا روش حل مسئله مشخص می‌شود. بدین ترتیب که برای تعیین نقطه‌ی M، عمودمنصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم و آن را



(شکل ۶)

حل: الف) رویکرد هندسی

می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله است، عمودمنصف آن پاره خط است. بنابراین نقطه‌ی جواب مسئله، هم باید روی عمودمنصف پاره خط AB باشد و هم باید روی خط Δ باشد. پس این نقطه محل برخورد این دو خط است، در نتیجه، برای حل مسئله عمودمنصف

پاره خط AB را رسم می‌کنیم

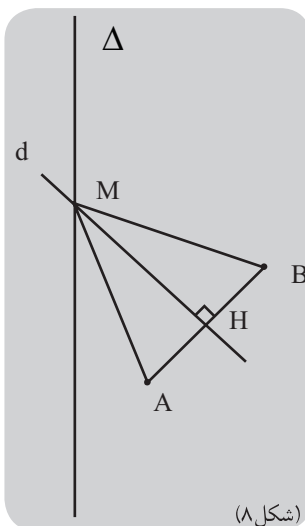
و آن را d می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد خط d با خط Δ که آن را M می‌نامیم، جواب مسئله است. یعنی اگر از M به A و B وصل کنیم، داریم: $MA=MB$.

بحث در تعداد جواب مسئله

۱. اگر خط d عمودمنصف

پاره خط AB، با خط Δ متقاطع

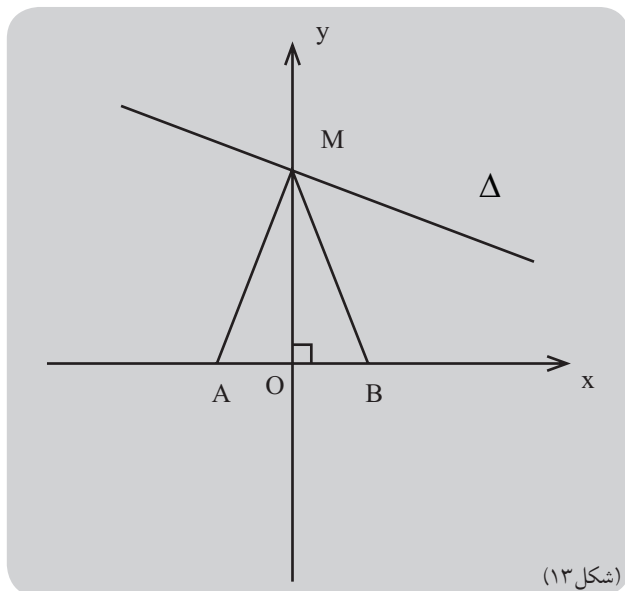
باشد، مسئله تنها یک جواب دارد که همان نقطه‌ی M است. این در صورتی است که راستای خط AB عمود بر راستای Δ نباشد (شکل ۸). به بیان دیگر، اگر خط AB خط Δ را قطع کند و بر آن عمود هم نباشد.



(شکل ۸)

۲. اگر خط d عمودمنصف پاره خط AB، موازی خط Δ باشد، مسئله جواب ندارد. این در صورتی است که راستای خط AB بر خط

خواهد بود. در این صورت، مختصات نقطه‌ی M که محل برخورد عمودمنصف پاره خط AB و خط Δ است، از دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی زیر به دست می‌آید.



(شکل ۱۳)

$$\begin{cases} x = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \Rightarrow by + c = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{c}{b} \Rightarrow M = (0, -\frac{c}{b})$$

این نقطه که نقطه‌ای از خط Δ است، از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است؛ زیرا داریم: $M = (0, -\frac{c}{b})$, $A = (x_1, 0)$, $B = (-x_1, 0)$

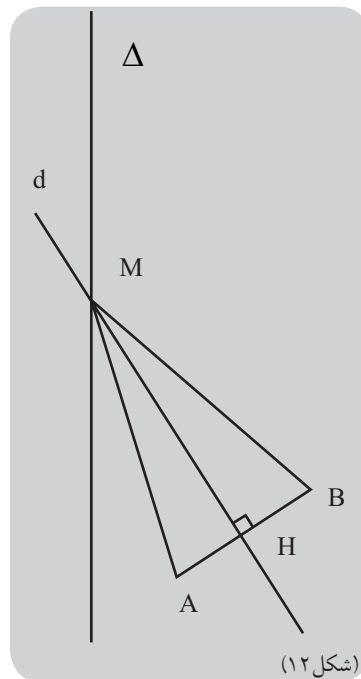
$$\Rightarrow MA = \sqrt{x_1^2 + \frac{c^2}{b^2}}, MB = \sqrt{x_1^2 + \frac{c^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow MA = MB$$

نکته: اگر دستگاه مختصات قائم xOy در صفحه‌ی گذرنده بر A و B را به صورت دلخواه در نظر بگیریم، حل مسئله با رویکرد جبری - مختصاتی مشکل‌تر خواهد شد. زیرا در این صورت



d می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد این خط و خط Δ را نقطه‌ی M می‌نامیم که این نقطه جواب مسئله است. زیرا اگر از این نقطه به A و B وصل کنیم، داریم: $MA = MB$. بحث مربوط به تعداد جواب برای مسئله همانند بحث روش قبلی است.



(شکل ۱۲)

نکته: روش مسئله را حل شده فرض کردن: یکی از راهبردهای مهم در حل مسئله‌ها، به‌ویژه حل مسئله‌های هندسه و به‌ویژه در مواردی است که حل کردن مسئله با داده‌های موجود آسان نباشد و به داده‌های بیشتری نیاز داشته باشیم. تا به کمک آن‌ها بتوانیم مسئله را حل کنیم؛ برای مثال:

«مثلی رسم کنید که اندازه‌ی سه میانه‌ی آن داده شده است.»
حل این مسئله و مسئله‌های مشابه دیگری که با این روش حل می‌شوند، در جلد‌های ۱۱، ۱۲ و ۱۳ دایرةالمعارف به رسم شکل‌های هندسی با روش هندسی اختصاص دارند، وجود دارد.

ب) حل با رویکرد جبری - مختصاتی
مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

دو نقطه‌ی A و B و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند، نقطه‌ای روی خط Δ بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.
برای اثبات، دستگاه مختصات قائم xOy را در صفحه‌ای که A و B و خط Δ قرار دارد، به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که محور x ها روی خط AB و مبدأ مختصات وسط پاره خط AB باشد، در این دستگاه مختصات، اگر $A = (x_1, 0)$ و $B = (-x_1, 0)$ اختیار شود، معادله‌ی عمودمنصف پاره خط AB - که در واقع محور y هاست - عبارت است از: $x = 0$ معادله‌ی خط Δ در این دستگاه مختصات به صورت کلی $ax + by + c = 0$

به دست می آوریم. داریم:

$$A = (3, -1), B = (1, 5), m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{5 + 1}{1 - 3} = -3 \Rightarrow m_d = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{1}{3},$$

وسط پاره خط AB

$$H = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = (2, 2) \Rightarrow y - y_1$$

$$= m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

معادله‌ی عمودمنصف پاره خط AB

$$\Delta: \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 2x + \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} + 1 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x = -\frac{7}{3} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M = (-1, 1)$$

جواب مسئله

درستی جواب مسئله را می توان با محاسبه‌ی اندازه‌ی پاره خط های

MA و MB و مساوی بودن آنها مشخص کرد.

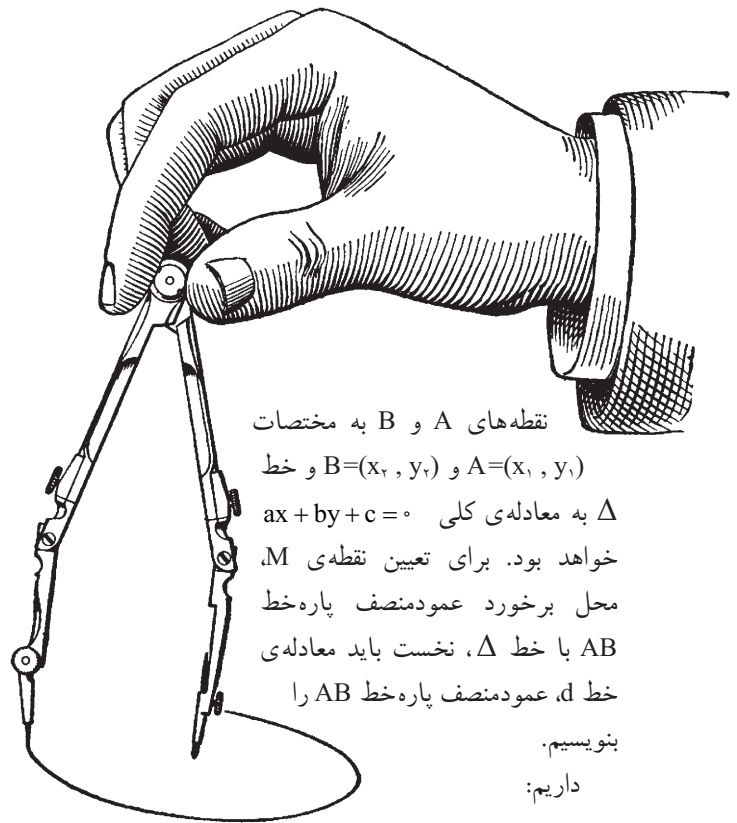
$$A = (3, -1), B = (1, 5), M = (-1, 1)$$

$$\Rightarrow MA = \sqrt{(3+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$MB = \sqrt{(1+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow MA = MB = 2\sqrt{5}$$

پس نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است.



نقطه‌های A و B به مختصات

$A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ خط

$\Delta: ax + by + c = 0$ به معادله‌ی کلی

خواهد بود. برای تعیین نقطه‌ی M،

محل برخورد عمودمنصف پاره خط

AB با خط Δ ، نخست باید معادله‌ی

خط d، عمودمنصف پاره خط AB را

بنویسیم.

داریم:

$$m/AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m/d = -\frac{1}{m_{AB}}$$

$$= -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$AB \text{ خط } H = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right), y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow d: y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

معادله‌ی عمودمنصف پاره خط AB

اکنون باید پاسخ دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی زیر را که همان

نقطه‌ی M جواب مسئله است، به دست آوریم.

$$\Delta: \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = (x, y)$$

این مطلب را با یک مثال نشان می دهیم:

مثال: نقطه‌ای روی خط $\Delta: 2x + y + 1 = 0$ به دست آورید که از دو

نقطه‌ی $A = (3, -1)$ و $B = (1, 5)$ به یک فاصله باشند.

حل: عمودمنصف پاره خط AB را d می نامیم و معادله‌ی آن را

می نویسیم. آن گاه مختصات نقطه‌ی برخورد خط d و خط Δ را

نقطه.....

۱. آنچه در هیچ جهتی قابل تقسیم نیست، اما دارای

موقعیتی است.

(ارسطو، قرن چهارم قبل از میلاد)

۲. نقطه چیزی است که دارای هیچ جزئی نیست. حد خط

نقطه است.

(اقلیدوس، قرن سوم قبل از میلاد)

۳. وجود یک اتم برای تحقق یافتن یک نقطه‌ی ریاضی

کفایت می کند.

(کوشی ۱۸۳۲)

۴. نقطه: مفهوم است و تعریف نشدنی است.



درباره‌ی یکی از نظرهای هوشمندانه‌ی ابوالوفای بوزجانی در هندسه

دکتر احمد شرف‌الدین

کلید واژه‌ها: محمد بن محمد بن یحیی، مرکز یک کمان از دایره.

اشاره

استاد احمد شرف‌الدین، چه در سال‌هایی که در دبیرستان تدریس می‌کرد و چه هنگامی که استاد دانشگاه بود، همواره در کنار دبیران ریاضی حضور داشت؛ چرا که همواره برای آن‌ها مقاله‌های آموزنده و جذاب می‌نوشت. در این شماره‌ی «مجله‌ی برهان»، مقاله‌ی تازه‌ای از ایشان به چاپ رسانده‌ایم. در مقاله‌ی حاضر، آقای شرف‌الدین با استدلال دقیق هندسی، نظر ابوالوفای بوزجانی را در ترسیم یک ساختمان هندسی تأیید می‌کند. به علاوه، در انتهای این مقاله عناوین اختراعات ثبت شده آقای دکتر شرف‌الدین را خواهیم آورد.

آثار ارزنده‌ی او، هم‌چون حاشیه‌ای بر هندسه‌ی اقلیدس و حساب دیوفانتوس، و نیز زیج او به نام «زیج واضح» مفقود شده‌اند و تنها رساله‌هایی در هندسه، حساب و نجوم از او باقی مانده است.

درباره‌ی کتاب «اعمال هندسی» بوزجانی

از جمله آثار علمی با ارزش بوزجانی، کتابی است در هندسه. نام این کتاب چنین است:

«کتاب فی ما یحتاج الیه الصّانع من اعمال الهندسه»؛ یعنی «کتاب درباره‌ی آن‌چه از اعمال هندسی مورد احتیاج صنعتگران است». کتاب «اعمال هندسی» بوزجانی، توسط استادان، زنده یاد دکتر ابوالقاسم قربانی و آقای محمدعلی شیخان به فارسی با عنوان «بوزجانی‌نامه» تحریر شده است. این تحریر با کوشش و دقت انجام گرفته است و خدمت ارزنده‌ای محسوب می‌شود.

در این نوشتار، ابتدا مختصری از مقام علمی بوزجانی می‌نویسیم و سپس درباره‌ی نظری که این دانشمند در مورد تعیین دقیق جای مرکز یک کمان دایره عرضه کرده است، شرح می‌دهیم.

ابوالوفا محمد بن محمد بن یحیی، از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و منجمان ایرانی است. او در سال ۳۲۸ هجری قمری در «بوزجان» از نواحی تربت‌جام به دنیا آمد. بوزجان از شهرهای عالم‌پرور خراسان بوده است. بوزجانی تا ۲۰ سالگی در زادگاه خود، علم عدد و هندسه را نزد عمو و دایی‌اش آموخت. سپس برای ادامه‌ی تحصیلات به بغداد رفت. در آن روزگار، بغداد از مراکز بسیار مهم علم بود. بوزجانی تا پایان عمر خود، یعنی سال ۳۸۸ ه.ق، در بغداد به مطالعه و تحقیق در ریاضیات و نجوم پرداخت.

بوزجانی سهم ارزشمندی در بسط مثلثات دارد. وی قضیه‌های مهمی در مثلثات کروی کشف کرده است. البته با کمال تأسف، بعضی

مقدار خطای مطلق در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر AM و CM را e می‌نامیم. خطای نسبی در اندازه‌گیری دو وتر یاد شده به ترتیب عبارت‌اند از:

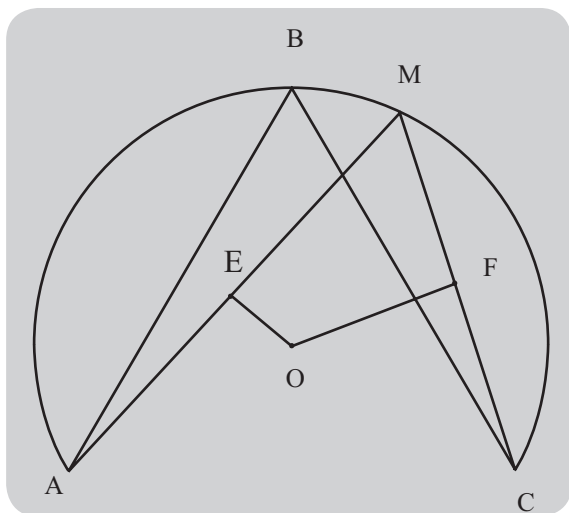
$$\frac{e}{AM}, \frac{e}{CM}$$

بنابراین، خطای نسبی در اندازه‌گیری طول خط شکسته‌ی ACB چنین است:

$$\frac{e}{2R \sin a} + \frac{e}{2R \sin b}$$

اگر نقطه‌ی B، وسط کمان AC باشد، خطای نسبی اندازه‌گیری طول خط شکسته‌ی ACB چنین است:

$$\frac{2e}{2R \sin \frac{a+b}{2}}$$



شکل ۲

جای مرکز کمان AB هنگامی با دقت تعیین می‌شود که خطای نسبی در اندازه‌گیری خط شکسته AMC کمترین مقدار باشد. برای تأمین این منظور باید نامساوی زیر مسلم باشد:

$$\frac{e}{2R \sin a} + \frac{e}{2R \sin b} > \frac{2e}{2R \sin \frac{a+b}{2}}$$

یعنی باید نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin b} > \frac{2}{\sin \frac{a+b}{2}}$$

چنین داریم:

$$\overline{AM} = 2R \sin a$$

$$\overline{CM} = 2R \sin b$$

مقدار خطای مطلق در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر AM و CM را e می‌نامیم. خطای نسبی در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر یاد شده

تعیین جای دقیق مرکز یک کمان از دایره

در باب اول کتاب «بوزجانی‌نامه» مسئله‌ی زیر عرضه شده است:

● تعیین مرکز یک قوس از دایره

● راه‌حل: قوس AC از

دایره‌ای را در نظر می‌گیریم وسط

آن را نقطه‌ی B می‌نامیم. سپس

از نقطه‌ی A عمودی به AB و از

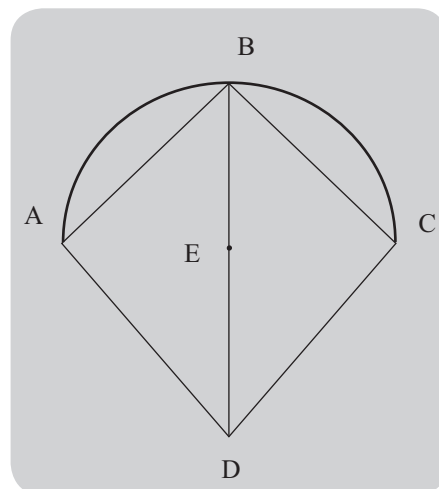
نقطه‌ی C عمودی بر CB اخراج می‌کنیم. این

دو عمود در نقطه‌ای مانند D یکدیگر را قطع می‌کنند. وسط پاره خط

DB مرکز دایره‌ی مطلوب است.

تبصره: مؤلف چنین نوشته، ولی بهتر است نقطه‌ی B را به‌طور دل‌خواه اختیار کرد.

در ادامه با توضیحاتی ثابت می‌کنیم که نظر بوزجانی درست است. یعنی ثابت می‌کنیم، وسط کمان AC مناسب‌ترین نقطه است که سبب می‌شود، جای مرکز کمان AC با دقت بیشتری مشخص شود. مقدار خطای مطلق در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر AM و CM

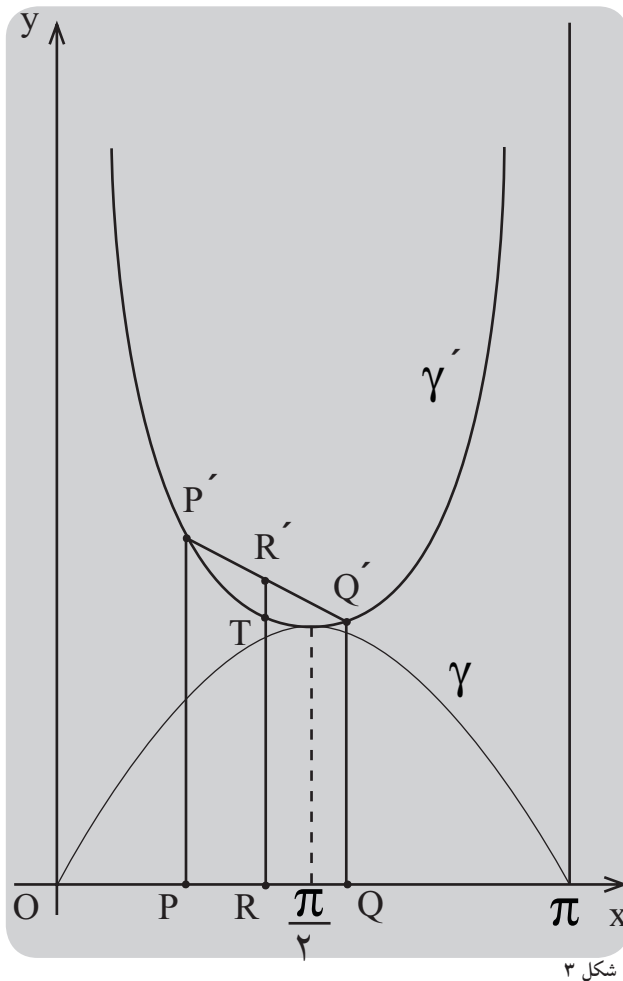


شکل ۱

در شکل ۲، مرکز کمان AC و طول آن را به ترتیب O و R می‌نامیم. نقطه‌ی دل‌خواه M از کمان AC را در نظر می‌گیریم. اندازه‌های دو زاویه‌ی AOM و COM را به ترتیب با $2a$ و $2b$ نشان می‌دهیم. وسط‌های دو وتر AM و CM را به ترتیب E و F می‌نامیم. طول‌های دو وتر AM و CM را بر حسب R، a و b حساب می‌کنیم.

$$\overline{AM} = 2R \sin a$$

$$\overline{CM} = 2R \sin b$$



شکل ۳

و T می‌نامیم. چون گودی (تقعر) منحنی γ' به سوی بالاست، نتیجه می‌شود:

$$\overline{RR'} > \overline{RT}$$

از سوی دیگر در دوزنقه‌ی $PQQ'P'$ چنین داریم:

$$\overline{PP'} + \overline{QQ'} = \overline{2RR'}$$

از دو رابطه‌ی اخیر نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\sin(OP)} + \frac{1}{\sin(OQ)} > \frac{2}{\sin(OR)}$$

این رابطه همان رابطه‌ی مطلوب زیر است:

$$\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin b} > \frac{2}{\sin \frac{a+b}{2}}$$

عناوین اختراعات دکتر احمد شرف‌الدین

۱. طراحی و ساخت خط کش حساب برای حل تقریبی و سریع معادلات

درجه سوم.

۲. ماشین الکترونیک که می‌تواند هر آگاهی را در جهت مستقیم یا

معکوس، هر دو را با شروع آنی عرضه کند.

۳. طراحی و ساخت ماشین حساب آنالوژیک برای حل و بحث

معادلات جبری که ضریب‌های آن‌ها به پارامترهایی بستگی داشته باشند.

به ترتیب عبارت‌اند از: $\frac{e}{AM}$ و $\frac{e}{CM}$. بنابراین، خطای نسبی در اندازه‌گیری طول خط شکسته ACM چنین است:

$$\frac{e}{2R \sin a} + \frac{e}{2R \sin b}$$

اگر نقطه‌ی B وسط کمان AC باشد، خطای نسبی در اندازه‌گیری خط شکسته ACB چنین است:

$$\frac{e}{2R \sin \frac{a+b}{2}}$$

جای مرکز کمان AB هنگامی با دقت تعیین می‌شود که خطای نسبی در اندازه‌گیری خط شکسته AMC کمترین مقدار باشد. برای تأمین این منظور باید نامساوی زیر مسلم باشد:

$$\frac{e}{2R \sin a} + \frac{e}{2R \sin b} > \frac{2e}{2R \sin \frac{a+b}{2}}$$

یعنی باید نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin b} > \frac{2}{\sin \frac{a+b}{2}}$$

اکنون درستی نامساوی زیر را، وقتی a و b در فاصله‌ی $(0, \pi)$ باشند، ثابت می‌کنیم:

در شکل ۳، منحنی γ نمایشگر تابع $y = \sin x$ است و منحنی γ' نمایشگر تابع $y = \frac{1}{\sin x}$ (نمودار تابع $y = \sin x$ در فاصله‌ی $[0, \pi]$ رسم شده است و نمودار تابع $y = \frac{1}{\sin x}$ در فاصله‌ی $(0, \pi)$).

در شکل ۳ داریم: $\overline{OP} = a$ ، $\overline{OQ} = b$ و $\overline{OR} = \frac{a+b}{2}$. سه خط

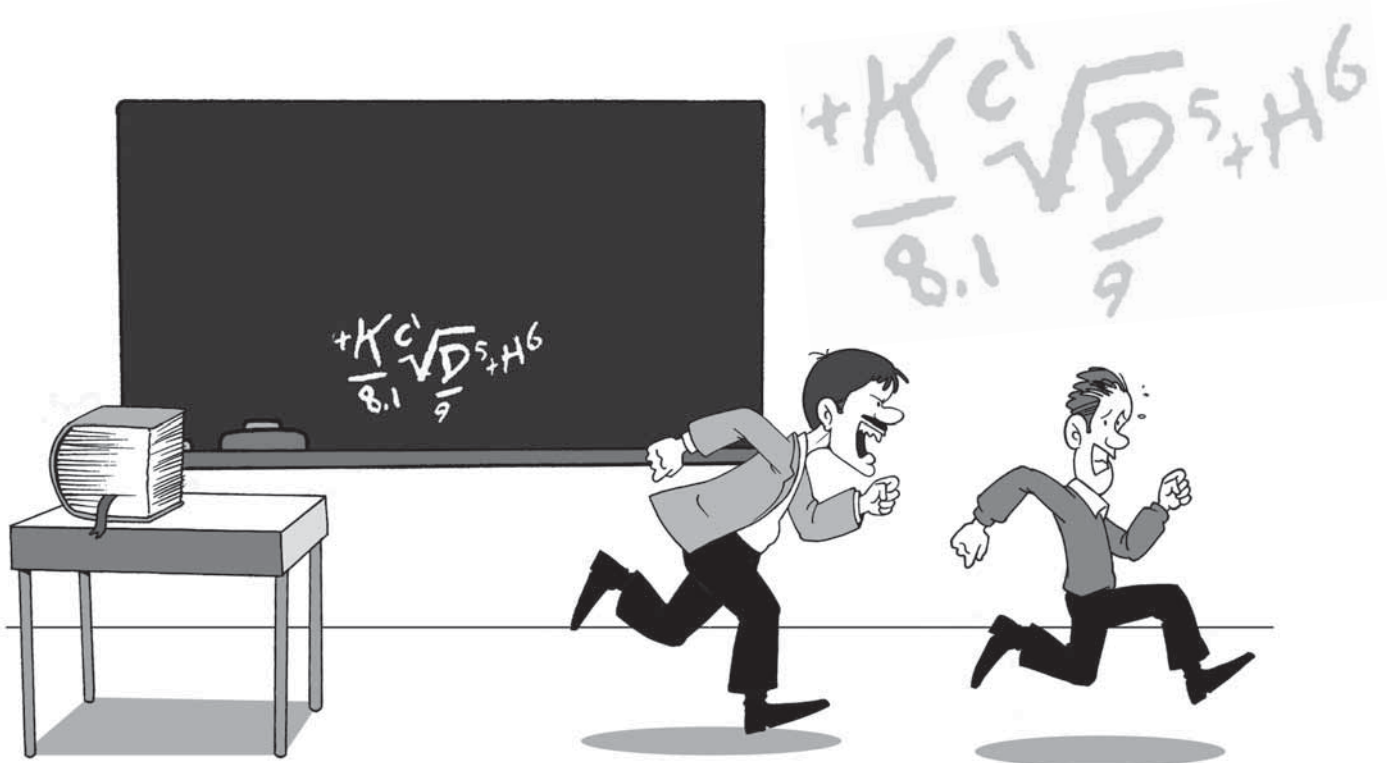
PP' ، RR' و QQ' عمود بر خط Ox هستند؛ پس: $\overline{PP'} = \frac{1}{\sin a}$ ،

$$\overline{RT} = \sin \frac{1}{\frac{a+b}{2}} \text{ و } \overline{RR'} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{1}{a} + \sin \frac{1}{b} \right), \overline{QQ'} = \frac{1}{\sin b}$$

چون گودی منحنی γ' به سوی بالاست، پس: $\overline{RP'} > \overline{RT}$ از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin b} \right) > \sin \frac{1}{\frac{a+b}{2}}$$

دو نقطه‌ی P و Q را به دل‌خواه در فاصله‌ی $(0, \pi)$ اختیار می‌کنیم. از دو نقطه‌ی یاد شده، عمودهایی بر خط Ox اخراج می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن‌ها را با منحنی γ' ، به ترتیب P' و Q' می‌نامیم. از نقطه‌ی R وسط پاره خط PQ، عمودی بر خط Ox اخراج می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن را با منحنی γ' و خط $P'Q'$ ، به ترتیب R'



اثبات بازگشتی یا اثبات از آخر به اول

عنایت الله راستی زاده

کلید واژه‌ها: اثبات بازگشتی، نابرابری‌ها، میانگین حسابی و هندسی، روابط برگشت پذیر.

اشاره

در مقاله‌ی حاضر، پس از توضیح روش اثبات بازگشتی، نمونه مسائل متنوعی طرح و حل شده‌اند. مثال‌ها از مباحث هندسه، جبر و مثلثات انتخاب شده‌اند تا بتوان فراگیر بودن استفاده از این روش را در اغلب شاخه‌های ریاضی دبیرستانی نشان داد.

در این روش اثبات که بیشتر برای بررسی درستی نابرابری‌ها به کار می‌رود، درستی حکم را می‌پذیریم و با انجام محاسبات لازم، نابرابری یا گزاره‌ی حکم را تا آن جا ساده می‌کنیم که به گزاره‌ای برسیم که بدیهی است یا درستی آن را از قبل می‌دانیم. در صورتی که مراحل انجام شده برگشت پذیر باشند، درستی روش اثبات تأیید شده است.

مثال ۱. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی دلخواه و مثبت a ، نابرابری زیر همیشه برقرار است:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

اثبات: اگر حکم مسئله برقرار باشد، آن گاه با ضرب طرفین نابرابری در a ($a > 0$)، داریم:

$$a^2 + 1 \geq 2a$$

در این صورت: $a^2 - 2a + 1 \geq 0$. پس: $(a-1)^2 \geq 0$. رابطه‌ی اخیر

به وضوح برقرار است و تمام روابط فوق برگشت پذیر هستند. پس حکم برقرار است. در واقع:

$$(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a \xrightarrow{+a} a + \frac{1}{a} \geq 2$$

مثال ۲. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و دلخواه x و y ،

نابرابری زیر همواره برقرار است:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq x + y + xy$$

اثبات: درستی حکم را می‌پذیریم و به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2x + 2y + 2xy$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 1 + 1 - 2x - 2y - 2xy \geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است (زیرا جمع سه مقدار نامنفی همواره

نامنفی است) و تمام مراحل انجام شده بازگشت ناپذیر هستند. لذا

طبق روش اثبات بازگشتی حکم مسئله برقرار است. (لزومی به

بازنویسی پاسخ یعنی نوشتن اثبات از آخر به اول نیست).

تذکر: گاهی در برگه‌ی امتحانی دانش‌آموزان دیده می‌شود که پاسخ از آخر به اول مجدداً نوشته شده است. این کار خطاست (به شرطی که ذکر شود، مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند) یا این که تنها اثبات مستقیم (و نه بازگشتی) را بنویسیم؛ مانند نمونه‌ی زیر:

مثال ۳. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ، نابرابری زیر همیشه برقرار است:

$$\frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy}$$

اثبات: چون $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، لذا: $x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$ در این صورت:

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$ و با تقسیم طرفین نامساوی بر ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy}$$

تذکر: نامساوی اخیر را به نام نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی می‌شناسیم.

مثال ۴. ثابت کنید:

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}; (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$$

اثبات: درستی تساوی را می‌پذیریم و طرفین وسطین می‌کنیم:

$$(1 + \sin x)(1 - \sin x) = (\cos x)(\cos x)$$

پس طبق اتحاد مزدوج: $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ که این هم یعنی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و تساوی اخیر نیز به وضوح برقرار است. مراحل برگشت پذیرند و لذا حکم برقرار است.

مثال ۵. ثابت کنید هرگاه x و y دو عدد حقیقی مثبت و معکوس هم باشند، آن‌گاه:

$$(1+x)(1+y) \geq 4$$

اثبات: با پذیرفتن درستی حکم داریم:

$$1 + x + y + xy \geq 4, xy = 1 \Rightarrow x + y + 2 \geq 4 \Rightarrow x + y \geq 2$$

اما: $xy = 1$ ، پس: $y = \frac{1}{x}$ بنابراین $x + \frac{1}{x} \geq 2$ و درستی این رابطه را نیز از قبل می‌دانیم. با توجه به برگشت پذیر بودن تمام مراحل انجام شده، حکم برقرار است.

مثال ۶. ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 \geq x^2 y + xy^2 \quad (x > 0, y > 0)$$

اثبات: به روش بازگشتی داریم:

$$(x+y)^2 - 3xy(x+y) \geq x^2 y + xy^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - 3xy(x+y) - x^2 y - xy^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - 3xy(x+y) - (x+y)xy \geq 0$$

$$\Rightarrow (x+y)((x+y)^2 - 4xy) \geq 0 \Rightarrow (x+y)^2 - 4xy \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 4xy \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است و تمام روابط (مراحل) برگشت پذیرند،

لذا حکم اولیه برقرار است.

مثال ۷. ثابت کنید نصف محیط مثلث، از طول هر ضلع آن بزرگ‌تر است.

اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\frac{a+b+c}{2} > a, \frac{a+b+c}{2} > b, \frac{a+b+c}{2} > c$$

(اثبات یکی از این سه کفایت می‌کند.)

ثابت می‌کنیم: $\frac{a+b+c}{2} > a$. با ضرب طرفین در ۲ (درستی حکم را پذیرفتیم!) داریم:

$$a+b+c > 2a$$

$$b+c > 2a-a$$

$$b+c > a$$

پس:

و این آخری را در هندسه ثابت کرده‌اید! (قضیه‌ی حمار؛

مجموع هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است). مراحل اثبات بازگشت پذیرند، بنابراین حکم ثابت می‌شود.

در مثال بعدی، به اثبات یک تساوی رادیکالی به روش بازگشتی خواهیم پرداخت.

$$\frac{1}{4}(\sqrt{30} - \sqrt{2}) = \sqrt{8 - \sqrt{15}} \quad \text{مثال ۸. ثابت کنید:}$$

به روش بازگشتی (پذیرش حکم) داریم:

$$\frac{1}{4}(\sqrt{30} - \sqrt{2})^2 = 8 - \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(30 + 2 - 2\sqrt{60}) = 8 - \sqrt{15}$$

$$32 - 2\sqrt{60} = 32 - 4\sqrt{15} \Rightarrow 2\sqrt{60} = 4\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{4 \times 15} = 4\sqrt{15}$$

$$4\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$$

پس:

مراحل بازگشت پذیرند، لذا تساوی اولیه برقرار است.

در دو مثال بعدی، به اثبات دو نامساوی مثلثاتی به روش بازگشتی می‌پردازیم.

مثال ۹. ثابت کنید:

$$2 \tan^2 \theta + 1 \geq 2 \tan \theta (\sin \theta + \cos \theta), \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$$

اثبات: اگر حکم برقرار باشد، آن‌گاه:



اثبات: فرض می‌کنیم حکم درست است. در این صورت:

$$\frac{n^n}{2^{n-1}} \leq \frac{(n+1)^n}{2^n} \Rightarrow 2 \times n^n \leq (n+1)^n \Rightarrow 2 \leq \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq 2 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

که می‌توان آخرین نامساوی را به صورت $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{n}\right)$ نوشت و این رابطه با توجه به راهنمایی صورت مسئله و انتخاب $a = \frac{1}{n}$ همواره درست است.

چون همه‌ی نتایج به دست آمده برگشت پذیر هستند، پس حکم اولیه برای هر عدد طبیعی درست است.

مسئله‌ی ۲. اگر a, b, c طول اضلاع یک مثلث باشند، نشان دهید:

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca)$$

اثبات: نابرابری $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$ به سادگی قابل اثبات و برای هر a, b, c (حتی اگر طول اضلاع مثلث نباشند) برقرار است و از آن می‌گذریم. حال نشان می‌دهیم:

$$(a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca) \quad (1)$$

فرض کنیم، حکم درست است:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq 4ab + 4bc + 4ac$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + ab + ac + ac + bc + bc$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) \quad (2)$$

برای اثبات درستی رابطه‌ی (۲) دقت کنیم که a, b, c سه ضلع یک مثلث هستند. در هر مثلث مجموع اندازه هر دو ضلع از اندازه‌ی ضلع سوم بزرگ‌تر است، لذا:

$$\left. \begin{aligned} a < b + c &\Rightarrow a^2 < a(b + c) \\ b < a + c &\Rightarrow b^2 < b(a + c) \\ c < a + b &\Rightarrow c^2 < c(a + b) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < a(b + c) + b(a + c) + c(a + b)$$

پس رابطه‌ی (۲) درست است.

می‌توان نشان داد تمام روابط از (۲) به (۱) برگشت پذیر هستند. بنابراین رابطه (۱) برقرار است، یعنی:

$$(a + b + c)^2 \leq 4(ab + ac + bc)$$

مسئله‌ی ۳. ثابت کنید:

$$\frac{5^n}{1 + 5^{2n}} \geq \frac{5^{n+1}}{1 + 5^{2n+2}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\tan^2 \theta + \tan^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \geq 2 \tan \theta \sin \theta + 2 \tan \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow (\tan^2 \theta - 2 \tan \theta \sin \theta + \sin^2 \theta)$$

$$+ (\tan^2 \theta - 2 \tan \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \geq 0$$

$$\Rightarrow (\tan \theta - \sin \theta)^2 + (\tan \theta - \cos \theta)^2 \geq 0$$

درستی آخرین نابرابری بدیهی است و تمام مراحل بازگشت پذیرند، پس نامساوی حکم برقرار است. مثال ۱۰. ثابت کنید:

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta \geq \frac{1}{2} \quad (0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2})$$

اثبات: با پذیرش حکم و توجه به اتحاد زیر داریم:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$$

بنابراین:

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \geq \frac{1}{2}$$

چون: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ، پس:

$$1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \geq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 2 - 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \geq 1$$

$$-4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \geq -1 \Rightarrow \sin^2 \theta \cos^2 \theta \leq \frac{1}{4}$$

$$(0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}) \rightarrow \sin \theta \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta \leq 1, 1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sin \theta - \cos \theta)^2 \geq 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است و مراحل از آخر به اول برقرارند (برگشت پذیرند). لذا طبق روش اثبات بازگشتی، نامساوی مسئله برقرار است. امیدواریم این ده مثال آن قدر متنوع بوده باشند که فراگیر بودن این روش را در اثبات‌ها نشان دهد. با وجود این، اگر علاقمند به حل چند مسئله‌ی خاص هستید پیشنهاد می‌شود مسئله‌های زیر را هم ببینید.

سه مسئله‌ی ویژه

مسئله‌ی ۱. می‌دانیم اگر $1 + a \geq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ آن‌گاه:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

با استفاده از مطلب فوق و روش اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$n \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

احسان یارمحمدی



Mathpro Press

نشانه‌ی اینترنتی سایت: <http://www.mathpropress.com>

سایت Mathpro Press به مسائل و فهرست‌های پیکارگو و ارزنده‌ی ریاضی اختصاص دارد. در این سایت اطلاعات آنلاین در مورد مسائل ریاضی، کتاب‌های ریاضی و مجلات ریاضی عرضه می‌شود. صفحه‌ی اصلی سایت دربردارنده‌ی پنج عنوان عمده‌ی زیر است که هریک از آن‌ها شامل زیر عنوان‌های گوناگون و حاوی مطالب متنوع است:

♦ کتاب‌ها (Books)

□ کتاب‌فروشی Mathpro Press (کتاب منتشر شده یا توزیع شده به وسیله‌ی Mathpro Press)

Mathpro Press (Books Published or distributed by Mathpro Press)

□ چگونه کتاب را از ما سفارش بگیرد.

(How to order books from us.)

□ خلاصه‌ای از کتاب‌های مسائل ریاضی.

(Compendium of mathematics problems books)

□ کتاب‌های مسائل جدید.

(Recent problem books)

□ کتاب‌هایی درباره‌ی المپیادهای بین‌المللی ریاضی

(Books about the international mathematical Olympiads)

♦ مسائل (Problems)

□ Mathpro آنلاین (یک مجموعه قابل جست‌وجو آنلاین

دربرگیرنده بیش از ۲۰,۰۰۰ مسئله‌ی ریاضی)

Mathpro Online (An online searchable collection of over 20,000 math problems)

□ وب‌سایت‌هایی درباره‌ی رقابت‌های ریاضی

(Web sites about Mathematics competitions)

□ مسائل گردآوری شده از استنلی روبینوویتز، ۱۹۶۳ تا

۲۰۰۵

(Collected problems of Stanley Robinowitz 1963-2005)

□ رقابت‌های ریاضی در ایالات متحده

(Mathematics competitions in the United States)

بقیه در صفحه‌ی ۴۹

اثبات: فرض کنیم حکم درست است. پس:

$$5^n(1+5^{2n+2}) \geq 5^{n+1}(1+5^{2n}) \Rightarrow 1+5^{2n+2} \geq 5(1+5^{2n})$$

$$1+5^{2n+2} \geq 5+5^{2n+1} \Rightarrow 5^{2n+2}-5^{2n+1} \geq 4$$

$$\Rightarrow 5^{2n+1}(5-1) \geq 4 \Rightarrow 5^{2n+1} \geq 1$$

رابطه‌ی اخیر برای هر n طبیعی درست است و تمامی روابط برگشت‌پذیر هستند. پس طبق روش اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

حالا این نمونه‌ها را خودتان حل کنید:

۱. ثابت کنید: $\sqrt{5} + \sqrt{6} > \sqrt{3} + \sqrt{8}$

۲. ثابت کنید هرگاه: $x > 0$ و $y < 0$. آن‌گاه: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -2$

۳. ثابت کنید: $(\tan \theta + \cot \theta)^2 \geq 4$ و $(\theta \neq \frac{k\pi}{2})$

۴. شخصی ادعا کرد که «هر عدد با ثلث خودش برابر است» و استدلال کرد که:

$$a = \frac{1}{3}a \rightarrow 3a = a$$

و چون تساوی خاصیت جابه‌جایی دارد، پس: $a = 3a$ در نتیجه:

$$\begin{cases} 3a = a \\ a = 3a \end{cases} \Rightarrow 3a + a = a + 3a \Rightarrow 4a = 4a \Rightarrow a = a$$

و این آخری همواره برقرار است. بگویید کجای اثبات اشکال دارد؟!

۵. ثابت کنید: $|x| + |y| \geq \sqrt{x^2 + y^2}$

۶. مثلث ABC در رأس A قائمه است. اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

۷. اگر $n \geq 3$ و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید:

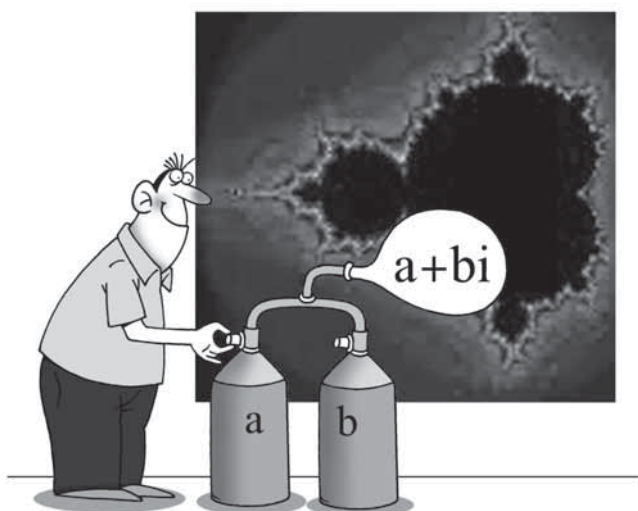
$$\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} < \frac{n^2}{2^n}$$

۸. اگر a, b, c سه عدد حقیقی مثبت باشند و $a < b + c$ ثابت کنید:

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$



$+K\sqrt{D}+H6$



اعداد موهومی

غلامرضا یاسی پور

کلید واژه‌ها: اعداد موهومی، اعداد مختلط، اعداد حقیقی، نمودار آرگان، مزدوج عدد مختلط، گسترش اعداد مختلط.

می‌توانیم هر طرف این رابطه را بر -1 تقسیم کنیم، و به نتیجه‌ی $-1 = 1$ برسیم که یاوه است. بنابراین، باید نتیجه بگیریم: $1 \times (-1) = -1$ که جوابی مثبت است.

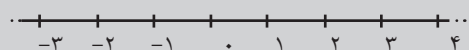
همین استدلال را می‌توان در مورد هر عدد منفی دیگری غیر از -1 نیز به کار برد. بنابراین، هر عدد حقیقی، چون مربع شود، نتیجه هیچ‌گاه نمی‌تواند منفی باشد.

مهندسی $\sqrt{-1}$

حتی مهندسان - دار و دسته‌ای پس عملی - کاربردهایی برای اعداد مختلط یافته‌اند. زمانی که مایکل فارادی "Michael Faraday" در دهه‌ی ۱۸۳۰، جریان متناوب را کشف کرد، اعداد موهومی واقعیتی فیزیکی به‌دست آوردند. در این حال، به جای i حرف j برای نمایش $\sqrt{-1}$ به کار می‌رود، زیرا i به جای جریان الکتریکی به کار می‌رود.

این موضوع، موجب بروز تردیدهایی در سال‌های اولیه‌ی اعداد مختلط در قرن شانزدهم شد. اما زمانی که بر آن فائق آمدند، پاسخ به دست آمده، ریاضیات را از قید و بند اعداد معمولی آزاد کرد. بدین ترتیب افق‌های وسیعی از پژوهش در مقابل محققان باز شد که پیش از این حتی خوابش را هم نمی‌دیدند. گسترش اعداد مختلط، «تکمیل اعداد حقیقی» به دستگاهی به‌طور طبیعی کامل‌تر است.

ریشه‌ی دوم -1



پیش از این، در صورتی که محدود به محور اعداد حقیقی باشیم، ملاحظه کردیم، از آن‌جا که مربع هیچ عددی نمی‌تواند منفی باشد، ریشه‌ی دوم -1 موجود نیست. بنابراین اگر اعداد را هم‌چنان بر

محققاً می‌توان اعداد را تصور کرد. گاهی اوقات فکر می‌کنم در حساب پس‌اندازم یک میلیون پوند دارم، و بحثی در میان نیست که این عدد «عددی موهومی» است. اما کاربرد ریاضی موهومی کاری با این رؤیاهای روزانه ندارد.

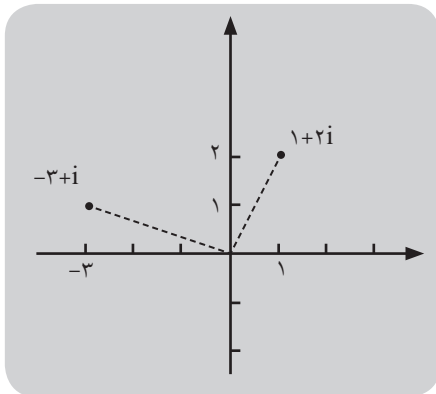
تصور می‌رود که برجسب «موهومی» ابتدا توسط رنه دکارت^۱ فیلسوف و ریاضی‌دان، در شناخت جواب‌های غریب معادلاتی به کار رفت که به طور قطع اعدادی معمولی نبودند. اما آیا اعداد موهومی موجودند یا خیر؟ این پرسشی بود که بر ذهن فیلسوفان، زمانی که بر کلمه‌ی موهومی متمرکز می‌شدند، سنگینی می‌کرد.

برای ریاضی‌دانان، موجود بودن اعداد موهومی، از اهمیت برخوردار نیست. این اعداد به اندازه‌ی 5 یا π جزئی از زندگی روزمره‌ی ما هستند. گرچه ممکن است این اعداد به خرید رفتن‌هایمان کمک نکنند، اما چون از طراح هواپیما یا مهندس برق در موردشان سؤال کنیم، در خواهیم یافت که اهمیتی حیاتی دارند. با جمع یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی با یکدیگر، چیزی را به دست می‌آوریم که «عدد مختلط»^۲ نامیده می‌شود، و به نظر می‌رسد از لحاظ فلسفی کمتر مشکل ساز باشد. نظریه‌ی اعداد مختلط، با ریشه‌ی دوم -1 ارتباط دارد. بنابراین، کدام عدد است که چون مربع شود، -1 را به دست می‌دهد؟

هنگامی که عدد ناصفری را در نظر بگیریم و آن را در خودش ضرب کنیم (یعنی مربع کنیم)، همواره عددی مثبت را به دست می‌آوریم. این موضوع وقتی اعداد مثبت را مربع می‌کنیم باورپذیر است، اما آیا در صورتی که اعداد منفی را مربع کنیم نیز صادق است؟ برای امتحان، می‌توان -1 یا $+1$ را به کار برد. در این صورت، حتی اگر قاعده‌ی دبیرستانی «ضرب دو منفی، مثبت تشکیل می‌دهد» را از یاد برده باشیم، ممکن است به خاطر داشته باشیم که پاسخ $(-1) \times (-1) = 1$ برابر با 1 است. اما در صورتی که ببیندیشیم $(-1) \times (-1) = 1$ برابر -1 است،

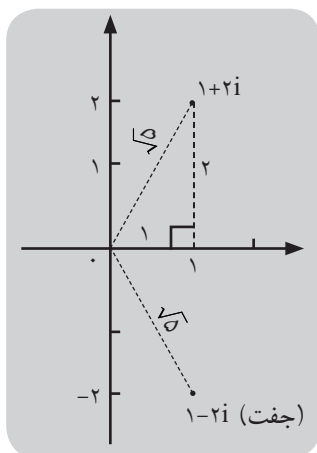
نمودار آرگان

دو بُعدی بودن اعداد مختلط را می‌توان به گونه‌ای واضح، با نمایش آن‌ها بر یک نمودار ملاحظه کرد. اعداد مختلط $1+2i$ و $-3+i$ را می‌توانیم روی نموداری به نام «آرگان» رسم کنیم. روش تصویری کردن اعداد مختلط توسط ژان روبر آرگان^۲، ریاضی‌دان سوئیسی، ارائه شد؛ گرچه در حوالی همان سال‌ها دیگران نیز مفهومی مشابه را ارائه دادند.



هر عدد مختلط، زوج یا جفت^۴، موسوم به «مزدوج»^۵ آن دارد. به این ترتیب، زوج $1+2i$ عدد $1-2i$ است که از تغییر دادن علامت واقع در جلوی مؤلفه‌ی دوم به دست می‌آید. جفت $1-2i$ نیز به همین ترتیب، $1+2i$ است. بنابراین زوجیت مورد بحث، رابطه‌ای صادقانه است.

جمع و ضرب با هم و در هم جفت‌ها، همواره عددی حقیقی به دست می‌دهد. با جمع $1+2i$ و $1-2i$ عدد ۲ را حاصل می‌کنیم، و با ضرب آن‌ها ۵ را به دست می‌آوریم. این ضرب، جالب‌تر نیز هست. زیرا پاسخ ۵، مربع «طول» عدد مختلط $1+2i$ است که با طول جفتش نیز برابر است. به طریق دیگر، می‌توانیم طول عدد مختلط را به صورت زیر تعریف کنیم:



$$W \text{ طول} = \sqrt{(w \times w \text{ جفت})}$$

محور اعداد حقیقی در نظر بگیریم، ممکن است کار را تمام شده بدانیم، و به موهومی نامیدن این اعداد شامل $\sqrt{-1}$ ادامه دهیم و کار دیگری با آن‌ها نداشته باشیم. یا این گام جسارت آمیز را برداریم که $\sqrt{-1}$ را به عنوان موجود جدیدی که آن را با i نمایش می‌دهیم، بپذیریم.

اعداد موهومی، با همین عمل ذهنی ساده، پا به حیات می‌گذارند. این را که آن‌ها چیست‌اند، نمی‌دانیم، اما به وجودشان اعتقاد داریم. دست کم می‌دانیم $i^2 = -1$. بنابراین، در دستگاه اعداد جدیدمان، جمیع یاران قدیمی، از قبیل اعداد حقیقی

$$1, 2, 3, 4, \pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}$$

را، همراه با دوستان تازه‌ای که شامل i هستند، از قبیل

$$1+2i, -3+i, 2+3i, 1+i\sqrt{2}, \sqrt{3}+2i, e+\pi i$$

و غیره، خواهیم داشت.

گام حساس ضروری مورد بحث، در آغاز قرن نوزدهم و زمانی برداشته شد که از محور اعداد یک بُعدی، به سوی صفحه‌ی اعداد دو بُعدی ناآشنایی حرکت کردیم.

جمع و ضرب

اکنون که در ذهنمان اعداد مختلط، یعنی اعدادی به صورت $a+bi$ را داریم، با آن‌ها چه می‌توان کرد؟ این اعداد نیز درست مانند اعداد حقیقی، می‌توانند با هم جمع، و در هم ضرب شوند. جمع‌شان را با جمع اجزای مربوطه و متناسب آن‌ها انجام می‌دهیم. بنابراین، $2+3i$ چون با $8+4i$ جمع شود $(2+8)+(3+4)i$ را با نتیجه‌ی $10+7i$ به دست می‌دهد.

ضرب نیز تقریباً به همین سادگی است. اگر بخواهیم $2+3i$ را در $8+4i$ ضرب کنیم، ابتدا هر جفت نماد را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(2+3i) \times (8+4i) = (2 \times 8) + (2 \times 4i) + (3i \times 8) + (3i \times 4i)$$

و عبارات حاصل را یعنی ۱۶، $8i$ ، $24i$ و $12i^2$ (در عبارت اخیر به جای i^2 عدد -1 را قرار می‌دهیم) با هم جمع می‌کنیم. بنابراین، نتیجه‌ی ضرب می‌شود:

$$(16-12)+(8i+24i)$$

که برابر با مختلط $4+32i$ است.

در مورد اعداد مختلط، جمیع قواعد معمولی حساب برقرار و تفریق و تقسیم همواره امکان‌پذیر است؛ غیر از تقسیم بر عدد مختلط $0+i$ که این کار در مورد صفر در اعداد حقیقی نیز مجاز نیست. در واقع اعداد مختلط، از جمیع ویژگی‌های اعداد حقیقی، جز یکی، برخوردارند؛ این که آن‌ها را نمی‌توانیم مانند اعداد حقیقی، به مثبت و منفی تقسیم‌بندی کنیم.

گسترش اعداد مختلط

هنگامی که ریاضی دانان اعداد مختلط را به دست آوردند، به طور غریزی تعمیمات آن را جست و جو کردند. اعداد مختلط دو بُعدی هستند، اما خاص بودن ۲ از کجا آمده است؟ همیلتون، سال ها در جست و جوی اعداد سه بُعدی بود و به جمع و ضرب آن ها می پرداخت، اما تنها زمانی که به اعداد چهار بُعدی روی آورد، توفیق یافت. اندکی پس از این، اعداد چهار بُعدی مزبور، خود به هشت بُعدی (موسوم به اعداد کیلی^۸) تعمیم یافتند. بسیاری به اندیشه ی تداوم امکان این ماجرا به جست و جوی اعداد شانزده بُعدی رفتند، اما ۵۰ سال بعد از شاهکار با اهمیت همیلتون، ناممکن بودنشان به اثبات رسید.

چند تاریخچه

- ۱۵۷۲ میلادی: رافائل بومبلی به محاسبه با اعداد موهومی پرداخت.
- ۱۷۷۷ میلادی: برای اولین بار، اوپلر از نماد i برای نمایش ریشه ی دوم عدد -۱ استفاده کرد.
- ۱۸۰۶ میلادی: نمایش نموداری آرگان، منجر به نام «نمودار آرگان» شد.
- ۱۸۱۱ میلادی: کارل فردریش گاوس به کار با توابع متغیرهای عدد مختلط پرداخت.
- ۱۸۳۷ میلادی: همیلتون، اعداد مختلط را به عنوان جفت های مرتب اعداد حقیقی در نظر گرفت.



مَخْلَص کلام
اعداد ناحقیقی با کاربردهای حقیقی

پی نوشت

۱. Renè Descartes
۲. Complex number
۳. Jean Robert Argand
۴. Mate
۵. Conjugate
۶. Sir William Rowan Hamilton
۷. Unity
۸. Cayley

با بررسی این مطلب در مورد $-۳+i$ ، درمی یابیم که طول $(-۳+i)$ برابر است با $\sqrt{(-۳+i) \times (-۳-i)} = \sqrt{(۹+۱)} = \sqrt{۱۰}$ بنابراین طول $(-۳+i)$ برابر است با $\sqrt{۱۰}$.

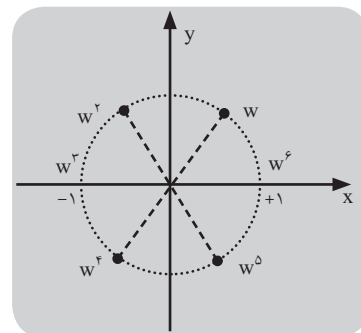
تفکیک اعداد مختلط از راز و رمز، به مقدار زیادی مرهون سر ویلیام روآن همیلتون^۶، مهم ترین ریاضی دان ایرلند در قرن نوزدهم است. وی دریافت که در این نظریه، عملاً به i نیازی نیست. زیرا این موجود، تنها به عنوان جا نگه دار عمل می کند و می توان آن را به گوشه ای افکند. همیلتون عدد مختلط را به صورت «جفت مرتب» (a,b) از اعداد حقیقی در نظر گرفت که کیفیت دو بُعدی خود را نشان می دهند. و به $\sqrt{-۱}$ مرموز متوسل نمی شوند. در این صورت، عاری از i ، جمع به صورت

$$(۲,۳) + (۸,۴) = (۱۰,۷)$$

درمی آید و به گونه ای با وضوح کمتر، ضرب می شود:

$$(۲,۳) \times (۸,۴) = (۴,۳۲)$$

کامل بودن دستگاه اعداد مختلط زمانی آشکارتر می شود که به « n » امین ریشه ی واحد «بندیشیم (از نظر ریاضی دانان «واحد» یا «یکه»^۷ به معنی «یک» است). این ریشه ها جواب های معادله ی $z^n = ۱$ هستند. در این مورد، $z^۶ = ۱$ را برای نمونه اختیار می کنیم. دو ریشه ی $z = ۱$ و $z = -۱$ بر محور حقیقی موجودند (زیرا $۱^۶ = ۱$ و $(-۱)^۶ = ۱$)، اما در حالی که مطمئناً باید شش ریشه داشته باشیم. بقیه کجا هستند؟ همه ی این شش ریشه نیز، مانند دو ریشه ی حقیقی، دارای طولی واحدند و بر دایره ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد یافت می شوند. علاوه بر این موارد، اگر به $W = \frac{1}{۲} + \frac{\sqrt{3}}{۲}i$ که ریشه ی واقع در



ربع اول است، نگاهی بیفکنیم، ریشه های متوالی (در حرکت در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت) چنین به دست می آیند:

$$W^۲, W^۳, W^۴, W^۵, W^۶ = ۱$$

که بر رأس های یک شش ضلعی منتظم قرار دارند. در حالت کلی، هر یک از n ریشه ی واحد بر این دایره واقع اند و بر گوشه ها یا «رأس ها» ی یک n ضلعی منتظم قرار دارند.

تعیین دامنه‌ی توابع با استفاده از رسم نمودار

کلید واژه‌ها: دامنه‌ی توابع، رسم نمودار تابع، نامعادله.

خواهد آمد. بنابراین برای حل هر یک از معادلات یا نامعادلات یاد شده به روش زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به صورت دقیق و مرتب در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

گام دوم: با بهره‌گیری از درک شهودی، نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ را باهم مقایسه می‌کنیم تا ببینیم با توجه به نمودارها چه مقدار یا مقادیری برای x مناسب و صحیح است که در هر یک از معادلات و یا نامعادلات $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ و $f(x) \geq g(x)$ صدق کند.

مثال ۱- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x-|x|}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(الف) $\{ \}$ (ب) $[-2, 2]$

(ج) $\mathbb{R}$ (د) $\{-2, 2\}$

جواب: گزینه‌ی (الف) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{4-x^2} \geq 0 \Rightarrow 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\sqrt{x-|x|} > 0 \Rightarrow x-|x| > 0 \Rightarrow x > |x| \Rightarrow$$

$$f(x) = x \text{ \& } g(x) = |x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x) = x$ و $g(x) = |x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

برای تعیین دامنه‌ی توابع^۲ با توجه به نوع توابع و نیز ساختار و ساختمان آن‌ها، راهکارها و روش‌هایی برای حل هر یک متناسب با نوع توابع وجود دارد. اما در پاره‌ای از موارد ممکن است طی انجام محاسبات برای تعیین دامنه‌ی توابع، به معادلات^۳ و نامعادلات^۴ دشواری برخورد کنیم که شامل عبارات جبری نامتجانس با یکدیگر یا تلفیقی از عبارات جبری^۵ و متعالی^۶ باشند و در ادامه قادر نباشیم آن‌ها را با روش‌های متعارف و متداول حل کنیم. اگر هم مایل باشیم آن‌ها را با قواعد و روش‌های جاری به سرانجام برسانیم، راهی بس دشوار را پیش روی خویش قرار داده‌ایم. به همین علت در این مقاله روشی مبتنی بر رسم نمودار را که به درک شهودی شایسته نیاز دارد، ارائه خواهیم داد. در این روش، هر یک از ریاضی‌پژوهان و خوانندگان باید شناخت و اطلاعات ارزنده و بسنده‌ای از توابع پایه‌ای و نمودارهای متناظر با آن‌ها، اصول و اسلوب انتقال نمودارها و رسم نمودار توابع در حالت کلی داشته باشند تا بتوانند به واسطه‌ی آن، نگرشی پویاتر را در قبال این مقاله داشته باشند.

فرض بر این است که هنگام تعیین دامنه‌ی توابع، با عباراتی برخورد می‌کنیم که بتوانیم اجزای سازنده‌ی آن‌ها را به دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با ظاهری که قادر باشیم نمودار آن‌ها را تداعی کنیم^۷، تبدیل سازیم و در نهایت یکی از حالت‌های $f(x) \neq g(x)$, $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ و $f(x) \geq g(x)$ به وجود

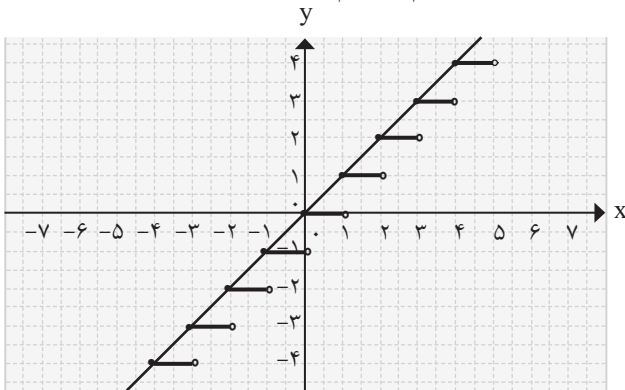
می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.



$$\sqrt{x - \lfloor x \rfloor} > 0 \Rightarrow x - \lfloor x \rfloor > 0 \Rightarrow x > \lfloor x \rfloor \Rightarrow f(x) = x \text{ \& } g(x) = \lfloor x \rfloor$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x) = x$ و $g(x) = \lfloor x \rfloor$ را در یک

دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = x$ و $g(x) = \lfloor x \rfloor$ نیز در می‌یابیم، مقداری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله $x > \lfloor x \rfloor$

صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.



اکنون دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - |x|}}{\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}$ را که از اشتراک دامنه‌ی صورت کسر با مخرج آن حاصل می‌شود، می‌توان روی محور اعداد زیر مشخص کرد.

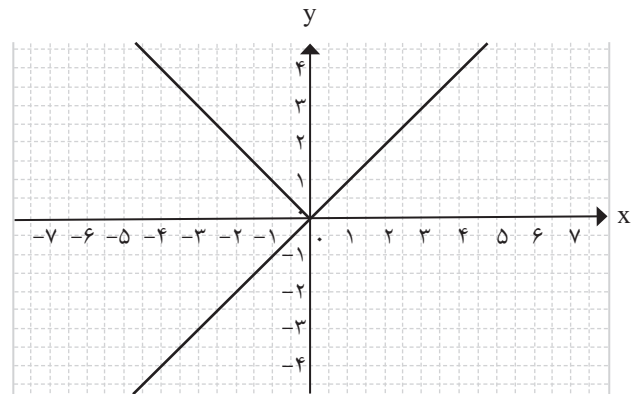


مثال ۳- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 + |x| + 1}{\sqrt{\lfloor x \rfloor - \ln(x)}}$ کدام

یک از گزینه‌های زیر است؟

- (الف) $\{ \}$ (ب) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
(ج) $(0, +\infty)$ (د) $\mathbb{R}$

جواب: گزینه‌ی (ج) صحیح است، زیرا:



با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = x$ و $g(x) = |x|$ در می‌یابیم،

هیچ مقداری برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله $x > |x|$ صدق کند.

مثال ۲- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - |x|}}{\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}$ کدام یک

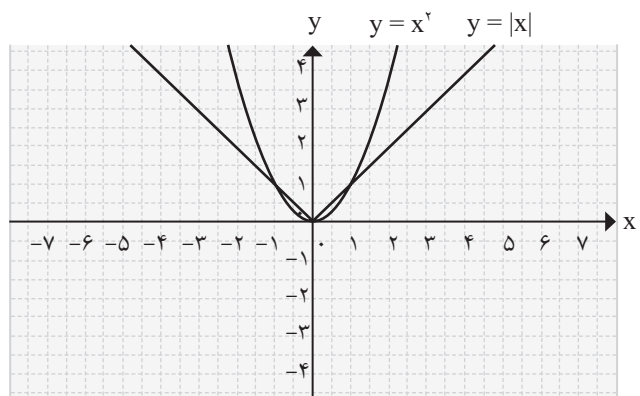
از گزینه‌های زیر است؟

- (الف) $(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) - \{x \mid x \in (-2, 2)\}$
(ب) $\{ \}$
(ج) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
(د) $(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) - \{x \mid x \in (-1, 1)\}$

جواب: گزینه‌ی (د) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{x^2 - |x|} \geq 0 \Rightarrow x^2 - |x| \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq |x| \Rightarrow f(x) = x^2 \text{ \& } g(x) = |x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = |x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = |x|$ در می‌یابیم، مقداری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله $x^2 \geq |x|$ صدق

با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = |x|$ در می‌یابیم که تمام مقادیر $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}^+)$ در نامساوی $\lfloor x \rfloor \neq |x|$ صدق می‌کنند.

مثال ۵- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor - x^2}}$ کدام یک

از گزینه‌های زیر است؟

الف) $\mathbb{R}$ (ب) $\mathbb{R} - \{0\}$

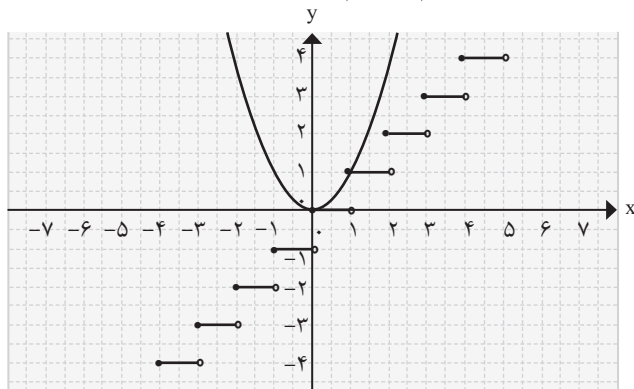
ج) $\{ \}$ (د) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

جواب: گزینه‌ی (ج) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\lfloor x \rfloor - x^2} > 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor - x^2 > 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor > x^2 \Rightarrow$$

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \text{ \& } g(x) = x^2$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = x^2$ در می‌یابیم، هیچ مقدار برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله‌ی $\lfloor x \rfloor > x^2$ صدق کند.

مثال ۶- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - |x|}}{\sqrt{\sqrt{x} - x}}$ کدام یک

از گزینه‌های زیر است؟

الف) $\{ \}$ (ب) $[1, +\infty)$

ج) $\mathbb{R}$ (د) $(-1, 1)$

جواب: گزینه‌ی (الف) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{x^3 - |x|} \geq 0 \Rightarrow x^3 - |x| \geq 0 \Rightarrow$$

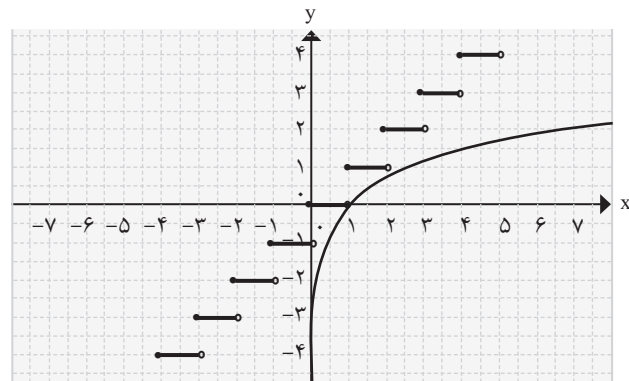
$$x^3 \geq |x| \Rightarrow f(x) = x^3 \text{ \& } g(x) = |x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = |x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

$$\sqrt{\lfloor x \rfloor - \ln(x)} > 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor - \ln(x) > 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor > \ln(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \lfloor x \rfloor \text{ \& } g(x) = \ln(x)$$

در ضمن می‌دانیم که دامنه‌ی تابع $g(x) = \ln(x)$ برابر با بازه‌ی باز $(0, +\infty)$ است. اکنون نمودارهای توابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = \ln(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = \ln(x)$ در می‌یابیم که تمام مقادیر حقیقی $x \in (0, +\infty)$ در نامعادله‌ی $\lfloor x \rfloor > \ln(x)$ صدق می‌کند.

مثال ۴- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{|x| + \lfloor x^2 \rfloor}{\lfloor x \rfloor - |x|}$ کدام یک

از گزینه‌های زیر است؟

الف) $\mathbb{R}$ (ب) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^+$

ج) $\{ \}$ (د) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$

جواب: گزینه‌ی (ب) صحیح است، زیرا:

$$\lfloor x \rfloor - |x| \neq 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \neq |x|$$

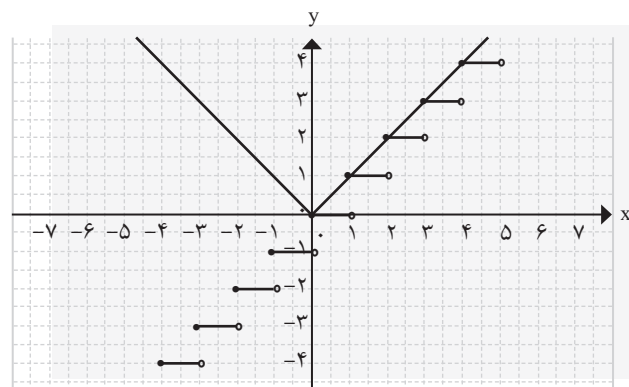
بنابراین باید مقادیری برای x تعیین کنیم و آن‌ها را از مجموعه‌ی اعداد حقیقی خارج سازیم.

پس:

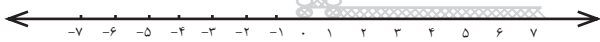
$$\lfloor x \rfloor - |x| = 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = |x| \Rightarrow$$

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \text{ \& } g(x) = |x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = |x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



روی محور اعداد زیر مشخص کرد.



مثال ۷- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^3 - |x| + \sqrt{x}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor} - e^x}$ کدام

یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $\{0, 1\}$ (ب) $\mathbb{R}$

ج) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (د) $\{\}$

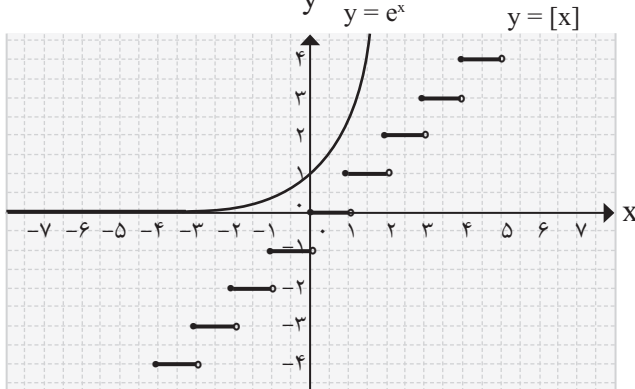
جواب: گزینه‌ی (د) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\lfloor x \rfloor} - e^x > 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor - e^x > 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor > e^x$$

$$\Rightarrow f(x) = \lfloor x \rfloor \& g(x) = e^x$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = e^x$ را در یک

دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = e^x$ در می‌یابیم، هیچ مقدار برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله‌ی

$$\lfloor x \rfloor > e^x$$

مثال ۸- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor - |x|}{\sqrt{\lfloor -x \rfloor} - |x|}$ کدام

یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $(0, +\infty)$ (ب) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^+$

ج) $\{\}$ (د) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$

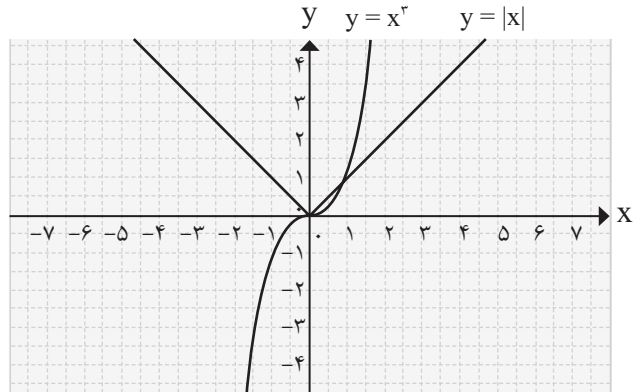
جواب: گزینه‌ی (ج) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\lfloor -x \rfloor} - |x| > 0 \Rightarrow \lfloor -x \rfloor - |x| > 0 \Rightarrow \lfloor -x \rfloor > |x|$$

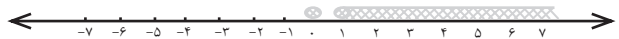
$$\Rightarrow f(x) = \lfloor -x \rfloor \& g(x) = |x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x) = \lfloor -x \rfloor$ و $g(x) = |x|$ را در یک

دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = |x|$ در می‌یابیم، مقادیری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله‌ی $x^3 \geq |x|$ صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.

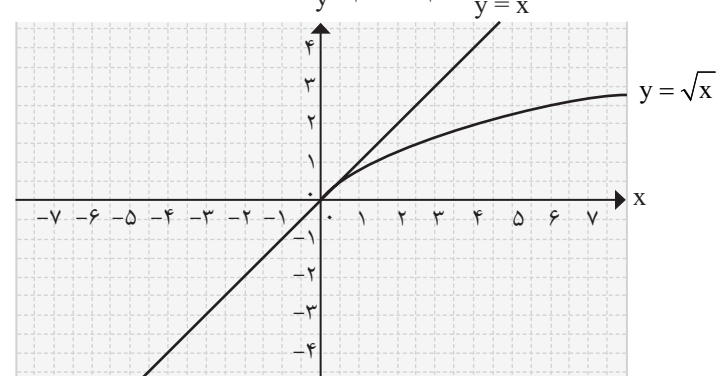


$$\sqrt{\sqrt{x} - x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} - x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > x$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \& g(x) = x$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x$ را در یک

دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



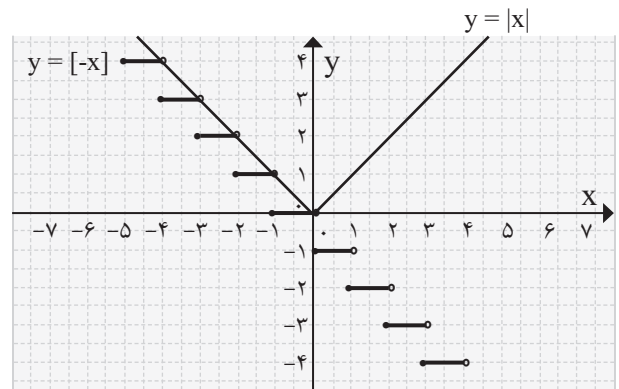
با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x$ در می‌یابیم، مقادیری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله‌ی $\sqrt{x} > x$ صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.



اکنون دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - |x|}}{\sqrt{\sqrt{x} - x}}$ را که از

اشتراک دامنه‌ی صورت کسر با مخرج آن حاصل می‌شود، می‌توان

1. Domain 2. Functions 3. Equations 4. Algebraic 5. Transcendental
۶. البته ممکن است با مواردی روبه‌رو شویم که قادر نباشیم به صورت آنی نمودار آن‌ها را تداعی کنیم. در این حالت با توجه به روش‌هایی که برای رسم نمودار فرا گرفته‌ایم، نمودار مربوطه را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x) = [-x]$ و $g(x) = |x|$ درمی‌یابیم، هیچ مقدار برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله $|x| > [-x]$ صدق کند.

تمرین: دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x| - x}}{\sqrt{[-x] - x}} \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - |x|}}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (۲)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{\ln(x) - [-x]}} \quad (۳)$$

$$f(x) = \frac{[x^3 + x^2 - |x| + 1]}{\sqrt{x - \sqrt{x}}} \quad (۴)$$

$$f(x) = \frac{|x+1| - |x+2|}{|x| - [-x]} \quad (۵)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x - |x|}}{\sqrt{e^x - [-x]}} \quad (۶)$$

$$f(x) = \frac{2^x + \lfloor \sqrt{x} \rfloor}{|x| - x^3} \quad (۷)$$

$$f(x) = \frac{x^4 + \lfloor x - 2 \rfloor}{\sqrt{\sqrt{x} - x^3}} \quad (۸)$$

منابع

۱- حسابان (رشته‌های ریاضی و فیزیک). مؤلفان: محمدحسن بیژن‌زاده، غلامعلی فرشادی و یدالله ایلخانی‌پور. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۸.

۲- ریاضیات (۱). مؤلفان: اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی، رضا شهریاری و علیرضا مدقالچی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۸.

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۴۱

♦ مجلات (Journals)

□ فهرست مجلات ریاضی

مقدماتی

(List of elementary mathematics journals)

□ لیست مجلات با ستون‌های

مسائل ریاضی

(List of journals with mathematical problem columns)

□ مجلات ریاضی که کتاب‌های ریاضی را مرور می‌کنند.

(Mathematics journals that review mathematics books.)

□ مجلات با ستون‌های مسائل آنلاین

(Journals with online problem columns)

♦ اطلاعات (Info)

□ لغت‌نامه‌ی ریاضی آنلاین

(Online mathematics dictionary)

□ واژه‌نامه‌ی آنلاین نمادگذاری تخصصی

(Online glossary of technical notation)

□ راهنمای ریاضی ایالتی

(state mathematics guidelines)

□ برنامه‌های تابستانی ریاضی/اردوگاه‌های تابستانی برای

دانش‌آموزان دبیرستان

(Mathematics summer programs/Summer camps for high school students)

♦ درباره‌ی ما (About Us)

□ درباره‌ی

(About Mathpro Press) Mathpro press

□ درباره‌ی لوگوی ما

□ چگونه با ما تماس بگیریم

□ فراخوان مؤلفان



سرگرمی برای اندیشه پروری و ذهن ورزی

نویسنده: مارتین گاردنر / مترجم: حسن نصیرنیا

کلیدواژه‌ها: پی. ای. ام دیراک، قیچی دیراک، حرکت‌های چرخشی، فرمیون.

قیچی دیراک

پی. ای. ام دیراک^۱ یکی از نوابغ بزرگ خلاق در نظریه‌ی کوانتوم جدید بود. در این مقاله می‌خواهیم معمای توپولوژیک دل‌پذیری را که با استفاده از یک قیچی و مقداری نخ ارائه می‌شود، معرفی کنیم. دیراک، هنگامی که در دهی سال‌های ۲۰ عمر خود بود، این معما را ابداع کرد تا به کمک آن، به شرح یکی از عجیب‌ترین خواص الکترون بپردازد.

اگر یک صندلی را ۳۶۰ درجه بچرخانیم، نسبت به همه‌ی اشیای درون اتاق به وضع نخست برمی‌گردد. اما اگر یک الکترون ۳۶۰ درجه چرخانده شود، به همان وضع پیشین برنمی‌گردد. برای این که الکترون نسبت به همه‌ی اشیای پیرامونش به وضع نخست بازگردد، لازم است یک دور کامل دیگر - یعنی روی هم ۷۲۰ درجه - چرخانده شود.

درک این مطلب بدون وارد شدن به مبحث ریاضیات پیشرفته‌ی مکانیک کوانتوم امکان‌پذیر نیست. دیراک که دریافته بود، دانشجویان مبتدی او در فهم این چنین ویژگی خارق‌العاده‌ی برخی ذرات خاص دچار زحمت هستند، شیوه‌ای ملموس برای نمایش دادن آن اندیشید. من نخستین بار در سال ۱۹۵۹ از قیچی دیراک، که نام معمای او بود، آگاهی یافتم و در آن هنگام مطالب ستون «بازی‌های ریاضی» مجله‌ی Scientific American را تنظیم می‌کردم. در آن سال نامه‌ای برای دیراک نوشتم و پاسخ مختصر و مفید او به نامه‌ام که از دانشگاه کمبریج ارسال شده بود را دریافت کردم. اکنون یکی از دارایی‌های گران‌قدر من است:

آقای گاردنر عزیز

متأسفم از این که به سبب مشغله‌ی فراوان نتوانستم پاسخ‌نامه‌ی شما را زودتر بدهم. نخستین بار در سال ۱۹۲۹ به تفکر در مسئله‌ی نخ‌ها پرداختم و از آن برای نشان دادن یک ویژگی حرکت‌های چرخشی استفاده کردم؛ و آن این‌که دوبار چرخش یک جسم حول یک محور، می‌تواند با حرکت پیوسته از طریق یک مجموعه حرکاتی صورت گیرد که هریک به وضعیت اصلی - وضعیتی که در آن اصلاً حرکتی وجود نداشته است - منجر شود.

این یک نتیجه از این ویژگی چرخش‌هاست که گشتاور زاویه‌ای یک جسم چرخان می‌تواند نصف یک کوانتوم باشد، ولی نمی‌تواند هیچ کسر دیگری از یک کوانتوم باشد.

ارادتمند پی. ای. ام. دیراک

آخرین جمله‌ی دیراک به این حقیقت اشاره دارد که چرخش سریع همه‌ی ذرات، موسوم به «فرمیون»^۲، بسته به جهت چرخش آن‌ها، برابر به علاوه یا منهای ۱/۲ است. متأسفانه در این مقاله جای آن نیست که درباره‌ی رمز و راز چرخش سریع ذره یا آن‌گونه که جیمز بلیش^۳ در رمان‌های علمی - تخیلی‌اش، ضمن کار با اسباب ضدگرانشی «چرخش سرسام‌آور» نام می‌گذارد، بحث کنیم. به‌طور کلی، چرخش سریع - مانند چرخش یک فرفره - پدیده‌ی مبهمی است و نمی‌توان آن را با اصطلاحات فیزیک کلاسیک مجسم کرد یا شرح داد.

برای نشان دادن معمای دیراک، یک قیچی و دو قطعه نخ هریک به طول تقریبی ۳ متر نیاز دارید. هر قطعه نخ را از یکی از دو سوراخ

حلقه‌ی تاب را از بالای قیچی بگذرانید تا روی بازوی راست شما بیفتد. قیچی را در دست چپ بگیرید. آن‌گاه با رها کردن حلقه‌ی نخ، قیچی را با دست راست از گیر آزاد کنید. حال اگر قیچی را بلند کنید، وضعیت قیچی و نخ‌ها به حالت اول بازمی‌گردد و تابیدگی از میان می‌رود!

برای اثبات معما لازم نیست حتماً از قیچی استفاده کنید؛ چه، هر شیء دیگری که برگزینید می‌تواند وافی به مقصود باشد. و هم چنین هر تعداد رشته نخ را (مشروط بر آن‌که دست کم از دو رشته کم‌تر نباشد) بخواهید، می‌توانید به شیء انتخابی ببندید و سرهای آزاد نخ‌ها را هم به هر نقطه‌ای از سقف ببندید. برای مثال، فرض کنید شیء انتخابی یک قهوه‌جوش باشد که دسته‌ی آن را با دوازده رشته نخ کشسان به هر جایی از دیوار، سقف یا کف اتاق بسته‌اید. اگر قهوه‌جوش را حول محوری به اندازه‌ی ۳۶۰ درجه بچرخانید، با هیچ‌گونه دستکاری نمی‌توان رشته نخ‌های کشسان را از تاب درآورد. اما اگر آن را به جای ۳۶۰ درجه، ۷۲۰ درجه بچرخانید، امکان بازگرداندن آن به وضعیت اول همواره میسر است.

در پاراگراف بعد گونه‌ی دیگری از تجربه‌ی فوق را بررسی می‌کنیم که برای برخی، روشن می‌سازد که چگونه می‌توان شیئی را که توسط یک کابل یا یک لوله‌ی لاستیکی به دیوار متصل شده است، پشت سرهم آن‌قدر چرخاند - بی‌آن‌که کابل تاب بخورد - تا اتصال باز شود. همین‌طور تجربه‌ی زیر می‌تواند مبین این مشاهده‌ی بسیار جالب باشد که چگونه شخص در حال تاب یا واتاب دادن رشته‌ی سیم برق یا لوله‌ی لاستیکی، با مشکل پیچ و تاب خوردن آن‌ها (رشته‌ی سیم و کابل) دست به گریبان است.

یک دستمال توال لوله‌ای بردارید. انتهای آزاد دستمال را زیر یک کتاب سنگین واقع بر روی میز قرار دهید. در حالی که دستمال لوله‌ای کاغذ در دست را باز می‌کنید، از میز دور شوید و به فاصله‌ی مشخصی از آن قرار بگیرید. حال رو



دسته‌ی قیچی بگذرانید و دو انتهای آن را گره بزنید تا دو حلقه تشکیل شود. هم‌چنان که در شکل می‌بینید، پاهای خود را درون دو حلقه‌ی درست شده بگذارید و قیچی را تا مقابل صورت خود بالا بیاورید. به این ترتیب، چهار رشته نخ کشیده و بدون تاب خواهید داشت که رابط میان قیچی و کف اتاق خواهند بود.

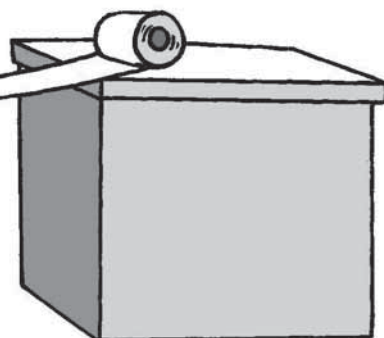
حال قیچی را به حالت قائم طوری بگیرید که نوک آن به طرف سقف باشد. سپس در همین حالت قیچی را حول محور قائم، درست به زاویه‌ی ۳۶۰ درجه (خواه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، خواه در جهت عکس آن) بچرخانید تا رشته‌های نخ به هم تابیده شوند.

آیا می‌توانید ترتیبی اتخاذ کنید که بدون چرخاندن قیچی در هریک از دو جهت مذکور، تاب نخ‌ها از هم باز شود؟ شما می‌توانید برای انجام این کار هر نقل و انتقالی که می‌خواهید در هوا به قیچی بدهید، مشروط بر این که قیچی همواره در فضا در همان جهت اولیه باقی بماند و نخ‌ها از زیرپاهایتان درنیایند. پاسخ پرسش بالا این است که باز کردن تاب نخ‌ها امکان‌پذیر نیست. ممکن است بتوانید نحوه‌ی تاب‌خوردگی نخ‌ها را عوض کنید، ولی هرچه با نخ‌ها و قیچی کلنجار روید، نمی‌توانید آن‌ها را به وضعیت نخست بازگردانید.

پس از این که متقاعد شدید که این کار عملی نیست، مجموعه‌ی نخ‌ها و قیچی را به شکل نخست درآورید. حال قیچی را در هر جهتی که می‌خواهید دو دور کامل (۷۲۰ درجه) بچرخانید. خواه باور کنید، خواه باور نکنید، بدون ایجاد چرخش بیشتر، قیچی و نخ‌ها به همان وضعیت نخست بازمی‌گردند! از دیدگاه یک توپولوژیست، این به معنای آن است که پس از دو دور کامل چرخاندن قیچی، ساخت توپولوژیک قیچی و نخ‌ها، نسبت به شما و همه‌چیز موجود در اتاق، تغییر نیافته است. برای آگاهی از راه حل شگفت‌انگیز این معما به «پاسخ» مراجعه کنید.

پاسخ معمای قیچی دیراک

فرض کنیم نخ و قیچی را به همان ترتیبی که در صورت معما گفته شده است، آماده کرده باشیم و قیچی را به اندازه‌ی ۷۲۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، به گونه‌ای که از سقف دیده می‌شود، چرخانده باشیم. حال قیچی را در دست راست نگه‌دارید، با دست چپ نخ‌ها را از نقطه‌ای که به هم تابیده شده‌اند، بگیرید و آن را به قدری بالا ببرید که محل تابیدگی در بالای قیچی قرار گیرد. سپس



آن دور انگشت نگه دارید. آن گاه لوله را شل کنید (اندکی به طرف میز بروید) و با دست چپ، کاغذ را به اندازه‌ی یک دور کامل از لوله باز کنید، بی آن که کاغذ پاره شود یا لوله بچرخد. به این ترتیب در نوار کاغذی حدفاصل لوله و کتاب یک پیچیدگی ایجاد می شود.

حال همین عمل را بار دیگر تکرار کنید. با این تفاوت که نقش انجام شده توسط دست چپ را به دست راست و نقش انجام شده توسط دست راست را به دست چپ واگذار کنید. پس از باز کردن یک دور کامل کاغذ با دست راست، یک پیچ دیگر (معکوس با پیچ قبلی) در طول نوار ایجاد می شود و سرانجام طول نوار افزایش می یابد و پیچ قبلی از میان می رود. تاکنون هیچ چرخشی به حلقه نداده ایم. حال اگر بخواهیم به وضعیت نخست برگردیم، کافی است لوله را دو دور کامل حول محورش به عقب بپیچانیم. با تکرار این روند، می توانیم در طول نوار به هر تعداد بار که بخواهیم پیچیدگی ایجاد کنیم، بی آن که کاغذ را پاره کرده باشیم.

حال می خواهیم به شرح این موضوع بپردازیم که چگونه این تجربه ها به «خصوصیت چرخش ها مربوط می شوند؛ به این معنی که دوبار چرخش (کامل) یک جسم حول یک محور می تواند به تدریج در آن تغییر شکل ایجاد کند و این کار از طریق یک مجموعه چرخش هایی که هریک به وضعیت اولیه - وضعیتی که در آن ابداً هیچ چرخشی مشهود نیست - منجر می شود، صورت می گیرد» (نگاه کنید به نامه‌ی دیراک، در قسمت صورت معما).

در آزمایش ما، به قطعه هایی از کاغذ توالی که همواره روی لوله قرار می گیرند، دو چرخش کامل داده می شود. در سایر قطعه های کاغذ که نزدیک لوله قرار دارند، حرکت های دیگری ایجاد می شود؛ اما در پایان تجربه، هریک به وضعیت اصلی درمی آید. هم چنین، اگر قطعه های متفاوت نوار کاغذی را کوچک فرض کنیم، حرکت ایجاد شده در هریک از آنها، در مقایسه با قطعه های مجاور بسیار مشابه خواهد بود. باز اگر هم چنان در طول نوار به سوی کتاب پیش برویم، درمی یابیم که رشته های حرکت های مورد نظر دیراک به هیچ حرکتی منجر نخواهد شد.

از آن جا که چرخش در حول یک محور عمود بر راستای نوار کاغذ صورت می گیرد، تجربه اصلاً تعجب آور به نظر نمی رسد. ولی البته راستای نخست نوار حائز اهمیت نیست؛ چه نوار کاغذ را می توان فراتر از میز امتداد داد و به نقطه ای روی دیوار - که عمود بر محور چرخش لوله است - چسباند.

الگوی نخ های دیراک با آن چه که توپولوژیست ها «کلاف های تاری» می نامند، هم خوانی دارد. برای دستیابی به اطلاعات بیشتر در این زمینه که چگونه معمای قیچی دیراک با کلاف های تاری و مکانیک کوانتوم ارتباط می یابد، رجوع کنید به مقاله‌ی «کلاف تاری و نظریه‌ی کوانتوم»^۲ نوشته‌ی هربرت برنشتین و آنتونی فیلیپ در شماره‌ی ژوئیه‌ی ۱۹۸۱ از

مجله‌ی Scientific American و هم چنین به نامه های ارسالی خوانندگان درباره‌ی این مطلب که در شماره های اکتبر و نوامبر همان سال مجله درج شده است. در شماره‌ی دسامبر ۱۹۷۵ همان مجله، در ستون «دانشمند آماتور»، شرحی در مورد کاربرد عملی قیچی دیراک در ساختن اسباب مکانیکی ابتکاری درج شده است که در آن یک کابل، پیوسته در گردش است بی آن که پیچ و تاب بردارد.

در مورد دیراک روایت های شنیدنی بسیاری نقل کرده اند که یکی از بهترین آنها به خواهر یوجین ویگنر^۳، برنده‌ی جایزه‌ی فیزیک نوبل مربوط می شود. معروف است که اندکی پس از ازدواج دیراک با خواهر ویگنر، دیراک میزبان دوستی قدیمی بود که از جریان ازدواج او اطلاعی نداشت. خوب است ادامه‌ی داستان از قول جورج گاموف^۴ در کتابش موسوم به «سی سالی که فیزیک را تکان داد» بشنویم. گاموف می نویسد: «مهمان متوجه حضور زنی در منزل دیراک شد که جای آورد و بعد روی کاناپه نشست ... سپس دیراک با هیجان گفت: اوه، من فراموش کردم او را به تو معرفی کنم! او خواهر ویگنر است.»

گاموف در جای دیگر گزارشی از دیدار دیراک با پیتروکاپیتسا^۵، فیزیک دان نامدار روسی می دهد. دیراک که محو تماشای طرح لباس دست بافت خانم کاپیتسا شده بود، چند ساعت پس از ترک دوستش، با عجله برگشت و خود را به منزل میزبان رساند تا به خانم کاپیتسا بگوید که در این مدت درباره‌ی جنبه های توپولوژیک لباس او فکر کرده و راه دیگری برای بافتن طرح آن لباس یافته است. پس از این که دیراک آن شیوه‌ی بافتن را به او نشان می دهد، خانم کاپیتسا به مهمان می گوید که الحق با این شیوه، او گلابتون دوزی را دوباره اختراع کرده است.

داستان آخر ما باز از گاموف است که به وقت پرسش و پاسخ بعد از یکی از سخنرانی های دیراک مربوط می شود. یکی از حاضران در جلسه‌ی سخنرانی برمی خیزد و می گوید: «من نمی فهمم که شما چه طور آن فرمول سمت چپ تخته‌ی سیاه را استنتاج کردید.» دیراک پاسخ می دهد: «این پرسش شما یک قضیه است، نه سؤال. سؤال بعدی، لطفاً.»

پی نوشت

۱. Paul Adrien Maurice Dirac

۲. Fermion

۳. James Blish

۴. Fiber bundles and quantum theory

۵. Eugene Wigner

۶. George Gamow

۷. Peter Kapitza



یکی از اساسی‌ترین علل پیشرفت بشر را می‌توان «برقراری ارتباطات با هم‌نوعان» دانست. یک جنبه‌ی اصلی این قابلیت، توانایی ارتباط از طریق «نوشتن» است. در بعضی موقعیت‌ها، کسانی می‌خواستند اطلاعات خود را فقط به عده‌ی محدودی برسانند. آنان اسراری داشتند که می‌خواستند فاش نشود. به همین دلیل، دنبال طرح‌هایی بودند که از طریق آن‌ها بتوانند مکاتبه‌های خود را از دید عمومی نامفهوم سازند. روش‌های کلی به انجام رساندن چنین مقصودی، یعنی پنهان داشتن مفهوم پیام‌ها، مبحثی را تشکیل می‌دهد که آن را با عنوان «رمزنگاری» می‌شناسیم.

پیش از پیدایش پست و تلگراف، ارسال پیام از طریق قاصد خصوصی انجام می‌گرفت. در این شیوه هم باز لازم بود که از روش‌های پنهان‌سازی و رمزنگاری پیام استفاده شود؛ زیرا امکان دستگیر شدن قاصد یا خیانت وی وجود داشت.

در روزگار کنونی نیز که ارسال پیام از

طریق الکتریکی یا بی‌سیم انجام می‌شود، برای

هرکسی این امکان وجود دارد که با انتخاب فرکانس مناسب، پیام ارسالی را دریافت و رونوشتی از آن تهیه کند. در چنین موردی هم، اگر فرستنده قصد پنهان کردن محتوای پیام را داشته باشد، باید از نوعی شیوه‌ی پنهان‌سازی یا رمزنگاری استفاده کند.

اما همان‌طور که فرستنده‌ی پیام می‌کوشد اطلاعات خود را از هر کس به جز گیرنده‌ی موردنظر پنهان دارد، کسانی هم هستند که به کشف محتوای پیام بسیار علاقه‌مندند و چه بسا این افراد از همان کسانی باشند که فرستنده تلاش دارد، اطلاعات خود را از ایشان پنهان دارد. البته تلاش چنین کسانی برای آشکار کردن رازی که پیام حاوی آن است، بدون داشتن اطلاعاتی درباره‌ی جزئیات عمل رمزنگاری ممکن است تلاشی بیهوده باشد. در هر صورت تلاشی که از این راه و باهدف خواندن پیام‌های سرّی انجام می‌پذیرد، زیر عنوان مبحثی به نام «رمزگشایی» قرار می‌گیرد.

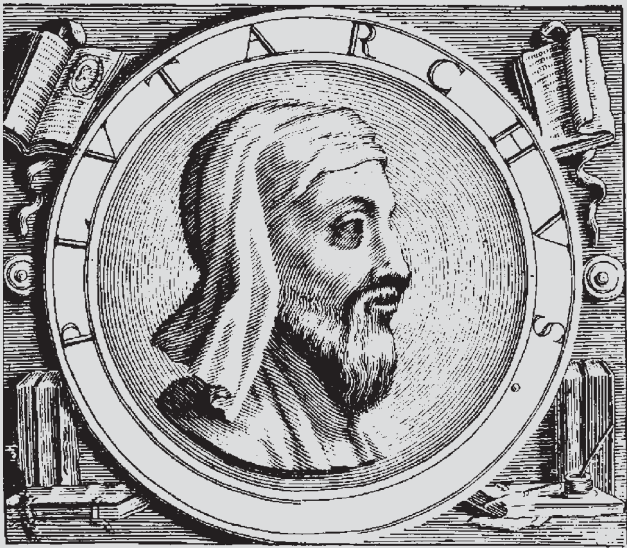
رمزنگاری و رمزگشایی

• سید محمدرضا هاشمی موسوی

hasem_moosavi@yahoo.com

کلید واژه‌ها: رمزنگاری، رمزگشایی، پلوتارک، رمز ابجدی.

در تاریخ، به مواردی برمی‌خوریم که رمزگشایی سبب موفقیت‌های بسیاری در امور سیاسی، نظامی، تاریخی و ... هم چنین فعالیت‌های ضدجاسوسی بوده است. هدف از تدوین مقاله‌ی حاضر، آشنا کردن خواننده با بعضی از شیوه‌های بنیادی رمزگشایی است. کار از شرح یک فرایند رمزنگاری شروع می‌شود و به شیوه‌هایی که بتوان با آن‌ها بدون داشتن اطلاعی درباره‌ی آن فرایند، به بازسازی و گشودن



می شد، آن مطلب قابل خواندن بود.

اولین رمز جدولی در آثار یونانی‌ها دیده شده است. جاسوسان یونانی در ایران، پیام‌های خود را روی سر تراشیده‌ی غلامان و بردگان می‌نوشتند و پس از بلند شدن مو، آن‌ها را به یونان روانه می‌کردند.

با پیدایش اسلام، حکما و ریاضی‌دانان مسلمان به طور جدی به امر رموز اهتمام ورزیدند، زیرا رمز و کاربرد آن حتی در قرآن هم مشاهده می‌شود. حروف مقطعه‌ی قرآن که ابتدای بعضی از سوره‌ها آمده، مانند یک کلید رمز مقابل چشم مسلمین قرار داشته است. هم‌چنین، نمونه‌های دیگر شبه رمز هم در قرآن به چشم می‌خورند؛ مثل «کل فی فلک» که مقلوب همین عبارت است. مسلمانان فن آزمایشی‌های زیادی برای حل آن به خرج داده‌اند. برای مثال، شیعیان از اتصال این حروف مقطعه جمله‌ی «صراط علی حق نسلک» را ساخته‌اند. سایر حکما از همان قدیم به این واقعیت پی‌برده بودند که بعضی از سوره‌ها که دارای حروف رمز هستند، درصد تکرار آن حروف در کل سوره از سایر حروف بیشتر است. از این واقعیت امروزه به عنوان یکی از شگردهای شکستن رمز استفاده می‌کنند.

سیستم رمز دیگری که به نام «رمز ابجدی» (ابجد صغیر و ابجد کبیر) مرسوم بوده، به ظاهر پیش از اسلام میان اعراب رواج داشته است و از آن برای به‌خاطر سپردن اعداد و ارقام استفاده می‌کردند. یکی از حکمای اسلامی به نام شهاب‌الدین عبدالله قلقشندی که به موضوع رمزها پرداخته، در کتاب معروف خود «صبح الاعشی» که در واقع یک دایرةالمعارف عظیم چند جلدی است، در مورد تاریخ رمز فصلی را آورده است. وی از شش نوع سیستم رمزی نام می‌برد که از این قرارند:

۱. قراردادن حروف به جای یکدیگر؛

۲. پشت و رو نوشتن کلمات؛

رمز پرداخت، ختم می‌شود. البته باید به این نکته توجه داشت که با درک نحوه‌ی تحلیل در رمزگشایی می‌توان روش‌هایی برای بهبود رمزنگاری یافت؛ یعنی روش‌هایی برای رفع آن نواقص رمزنگاری که در رمزگشایی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. چنین بهبودی مسئله‌ی جدیدی را برای رمزگشا به‌دنبال می‌آورد. این بهبود که به صورت پی‌درپی انجام گرفته است، در حقیقت تاریخ پیشرفت «رمزشناسی» بوده است. رمزشناسی عنوانی است که برای نشان دادن هر دو مفهوم رمزنگاری و رمزگشایی به کار می‌رود.

فرایندهای تحلیلی که در رمزگشایی به کار می‌روند، با استفاده از روش‌هایی صورت می‌گیرند که بعضی از آن‌ها ریاضی‌اند، بعضی مربوط به زبان‌اند، بعضی ماهیت مهندسی دارند و بعضی هم به راحتی قابل توصیف نیستند؛ مانند شانس، حس ششم و غیره.

این توضیح لازم است که سیستم‌های رمزنگاری که در این جا بررسی می‌شوند، هم مقدماتی‌اند و هم به‌طور کامل شناخته شده‌اند. از آن‌جا که سیستم‌های رمزنگاری قراردادی هستند، ممکن است خواننده با درک این سیستم‌ها و ابتکار عمل لازم، بتواند سیستم‌های رمزنگاری پیچیده‌تری را طراحی کند. البته مهم‌ترین نوع پیشرفت‌های جدید با متداول شدن ماشین‌های الکترومکانیکی و الکترونیکی حاصل شده‌اند و به سیستم‌های رمزنگاری ماهیت پیچیده‌تری بخشیده‌اند. بنابراین، شیوه‌های گشودن رمز چنین سیستم‌هایی نیز باید به همان نسبت پیچیده‌تر و پیشرفته‌تر باشد.

توصیه‌ی اساسی که می‌تواند برای خواننده مفید باشد، این است که به دقت روش‌های رمزنگاری و رمزگشایی را مطالعه کند و با تمرین‌های مناسب، هر یک از روش‌ها را به طور کامل فرا گیرد. زیرا اگر کار و تمرینی انجام نشود، مطالب فرا گرفته شده به سرعت فراموش می‌شوند. هم‌چنین، همیشه سعی کنید که با فراگرفتن یک روش به دنبال تعمیم و یا روش‌های ساده‌تر و یا حتی پیچیده‌تر غیر از آن روش باشید، تا همه‌ی روش‌ها را در برابر فراموشی و دیگر خطرات حفظ آن، ایمن سازید.

تاریخچه‌ی مختصر رمز نویسی

از ۴۰۰۰ سال پیش، در هیروگلیف‌های مصری، آثاری از رمز به معنی اخص آن پیدا شد. از هندی‌ها، ایرانی‌ها، اسپارتی‌ها، آشوری‌ها و بابلی‌ها هم نمونه‌هایی تاریخی از رمزنگاری موجود است.

آن‌طور که از نوشته‌های پلوتارک، مورخ یونانی برمی‌آید، اولین ماشین رمز را می‌توان به اسپارت‌ها منتسب کرد که عبارت بود از نوار چرمی و یک چوب استوانه‌ای شکل. کاربرد آن به این صورت بود که مطلبی را روی نوار چرمی می‌نوشتند و فقط وقتی این نوار (با عرض مشخصی) روی استوانه‌ی چوبی (با قطر مشخصی) پیچیده



دانش‌پژوهش و پژوهش
مآخذ پژوهش و پژوهش

دفتر انتشارات کمک آموزشی

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه‌ی اول دوره‌ی دبستان)

رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی دبستان)

رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی دبستان)

رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)

رشد جوان (برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

رشد آموزش ابتدایی ♦ رشد آموزش راهنمایی تحصیلی ♦ رشد تکنولوژی آموزشی ♦ رشد مدرسه فردا ♦ رشد مدیریت مدرسه ♦ رشد معلم

مجله‌های دانش‌آموزی و بزرگسال اختصاصی

(به صورت فصلنامه و ۴ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

رشد برهان راهنمایی (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی) ♦ رشد برهان متوسطه (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه) ♦ رشد آموزش قرآن ♦ رشد آموزش معارف اسلامی ♦ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ♦ رشد آموزش هنر ♦ رشد مشاور مدرسه ♦ رشد آموزش تربیت بدنی ♦ رشد آموزش علوم اجتماعی ♦ رشد آموزش تاریخ ♦ رشد آموزش جغرافیا ♦ رشد آموزش زبان ♦ رشد آموزش ریاضی ♦ رشد آموزش فیزیک ♦ رشد آموزش شیمی ♦ رشد آموزش زیست‌شناسی ♦ رشد آموزش زمین‌شناسی ♦ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای ♦ رشد آموزش پیش‌دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و اختصاصی برای آموزگاران، معلمان، مدیران و کارکنان اجرایی مدارس، دانشجویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

♦ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره‌ی ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

♦ تلفن و نمابر: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۷۸

۳. تحریف و قلب (به عکس کردن) حروف و کلمات؛

۴. تبدیل حروف به ارقام از طریق رمز ابجدی؛

۵. معادل کردن هر حرف با تعدادی حروف که به حساب ابجدی

با یکدیگر برابر باشند؛

۶. معادل کردن هر حرف یا نام مرد یا پرنده یا شیء دیگر و

...

در آثار ثعالبی و هم‌چنین ابن خلدون نیز مطالبی درباره‌ی رمز به چشم می‌خورد. از نویسندگان که بگذریم، تاریخ اسلام رمزشکافی نیز در دامان خود پرورانده است؛ از جمله منهجی که از او به عنوان یکی از حلالین رموز نام برده می‌شود. فراهیدی (۱۷۵-۱۰۰ هـ.ق) نیز در کتاب خود به نام «کتاب المَعَمّا» شرح می‌دهد که چگونه توانسته است یک نامه‌ی رمزی متعلق به امپراتور «بیزانس» را، با حدس این که نامه احتمالاً با «بسم‌الله» یا شبیه به آن آغاز می‌شود، بشکند (این طریق، امروزه نیز با عنوان رمزشکافی سخت رواج دارد و استفاده از قرائن و اشارات، یکی از روش‌های متداول برای شکستن رمزهاست).

در تاریخ تشیع، از قول ائمه‌ی معصومین (علیهم‌السلام) هم مواردی از کاربرد رمز دیده می‌شود. برای مثال، گفته شده است که امام جعفر صادق (علیه‌السلام) هر بار که می‌خواست است از «بنی العباس» با کنایه نام ببرد، از آن به صورت «اولاد سابع» یاد می‌کرده که کلمه‌ی سابع مقلوب عباس است.

بعد که علوم غریبه در میان متصوفه و اطباء، ریاضی‌دانان و کیمیاگران رواج گرفت، برای آن‌که فوت و فن کار محفوظ بماند، به‌طور وسیعی از رمزنویسی استفاده شد. دامنه‌ی این کار به ادبیات و شعر نیز کشیده شد و امروزه ما با ذخیره‌ی پرباری از انواع کنایه، مجاز، معما، رمز و ... در ادبیات سروکار داریم که در آن نام معشوقه، ماده‌ی تاریخ و ... به رمز کشیده شده است و بیشتر جنبه‌ی تفریحی و تذوق دارد؛ مانند این شعر:

گر ز نام یار من خواهی نشان

رو تو قلب قلب را بر قلب قلب زن

یا مانند این بیت:

عاشق بی پا و سر در تپه‌ی بی‌پایان عشق

چون حدیث وصل آمد از سر و جان درگذشت

بر اثر مراده‌ی مسلمین با مسیحیان به‌خصوص در جنگ‌های صلیبی، از میان فتونی که به اروپا راه یافت، یکی هم فن رمزنویسی بود. در قرون وسطای اروپا اول بار به نام شارلمانی در فن رمزنویسی برمی‌خوریم که به فرماندهان خود دستور می‌داد، مجموعه‌ی کامل الفبای رمز را حفظ کنند و در مکاتبات خود از آن بهره بگیرند.

در قرن شانزدهم، یکی از نظریه‌پردازان «حساب احتمال» در



همت مضاعف، کار مضاعف

برگ اشتراک مجله‌های رشد

شرایط:

۱. پرداخت مبلغ ۷۰/۰۰۰ ریال به ازای یک دوره یک ساله مجله‌ی درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه‌ی سه راه آرمایش (سرخه‌حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده‌ی اشتراک بایست‌سفارشی. (کپی فیش را نزد خود نگه دارید.)

نام مجله‌های درخواستی:

.....

.....

.....

نام و نام خانوادگی:

.....

تاریخ تولد:

.....

میزان تحصیلات:

.....

تلفن:

.....

نشانی کامل پستی:

.....

استان:

.....

خیابان:

.....

پلاک:

.....

در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شماره‌ی اشتراک خود را بنویسید:

.....

امضا:

- صندوق پستی مرکز بررسی آثار: ۱۵۸۷۵/۶۵۶۷
- صندوق پستی امور مشترکین: ۱۶۵۹۵/۱۱۱
- نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir
- پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir
- امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰
- پیام گیر مجله‌های رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲

یادآوری:

- هزینه‌ی برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی و عدم حضور گیرنده، بر عهده‌ی مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان دریافت برگ اشتراک خواهد بود.

اروپا، به نام کاردانو، اولین رمزهای «خود کلید» را ابداع کرد. در سال ۱۸۸۰، اولین دستگاه رمز شکن مکانیکی توسط مارکیز ساخته شد و بعدها سازمان‌های زیرزمینی اروپایی سیستم‌های رمزی متفاوتی را وضع کردند؛ مانند نهضت کاربو ناریست‌ها که از انقلابیون فرانسه بودند، یا فراماسون‌ها، و جنبش نهیلیستی و آنارشیزستی روسیه (به سرکردگی با کونین و کریپتوکین).

اولین ماشین‌های به رمز نوشتن الکترونیکی در سال ۱۹۱۷ توسط دپارتمان توسعه و تحقیق شرکت «آمریکن تلفن اند تلگراف» طراحی شد. امروزه انواع به رمز نویسی مخابراتی و ارتباطی، گستردگی فوق‌العاده‌ای یافته‌اند. به خصوص پس از دو جنگ جهانی اول و دوم، دیگر رمز نویسی از امری ذوقی، سرگرم‌کننده و معمایی به ضرورتی برای بسیاری از رشته‌های ارتباطی حکومتی مانند ارتش و دیپلماسی، و حتی بازرگانی، تندیوایی و ... تبدیل شده است و انواع کدبک‌ها، در زمینه‌های گوناگون کاربرد دارند.

به لحاظ علمی، تجزیه و تحلیل رمز جزو شاخه‌ای از ریاضیات عالی (محاسبات عددی) است و فارغ‌التحصیلان ریاضیات پیشرفته،

پی‌نوشت

(۱) ابجد کبیر:

ا	ب	ج	د	...	هـ	و	ز	ح
۱	۲	۳	۴				۹۰۰	۱۰۰۰

تفریع اندیشه

گله‌ی گاوی، شامل گاوهای نر و ماده، از چهار دسته‌ی: سیاه، سفید، خالخال و قهوه‌ای تشکیل شده است.

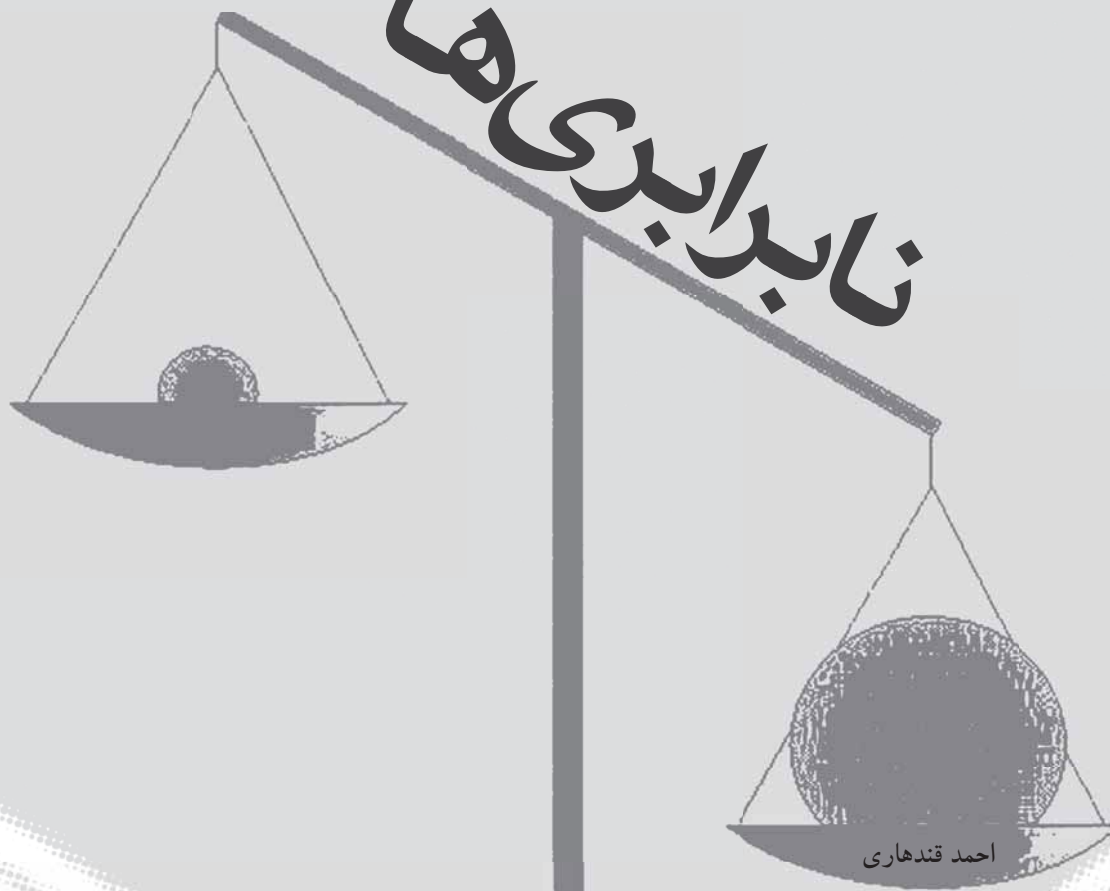
بین گاوهای نر؛ تعداد گاوهای سفید نصف به‌علاوه‌ی ثلث تعداد گاوهای سیاه و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است، تعداد گاوهای سیاه ربع به‌علاوه‌ی خمس تعداد گاوهای خالخال و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است؛ تعداد گاوهای خالخال سدس به‌علاوه‌ی سبع تعداد گاوهای سفید و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است.

بین گاوهای ماده؛ تعداد گاوهای سفید ثلث به‌علاوه‌ی ربع تعداد تمام گاوهای سیاه گله است؛ تعداد گاوهای سیاه ربع به‌علاوه‌ی خمس تعداد گاوهای خالخال تمام گله است؛ تعداد گاوهای خالخال خمس به‌علاوه‌ی سدس تعداد تمام گاوهای قهوه‌ای گله است؛ تعداد گاوهای قهوه‌ای سدس به‌علاوه‌ی سبع تعداد تمام گاوهای سفید گله است.

تعداد هر دسته از گاوهای سفید، سیاه، قهوه‌ای و خالخال نر و ماده‌ی گله را تعیین کنید.

پاسخ در صفحه‌ی ۶۴

نابرابری‌ها



همه‌ی اعداد به‌کار رفته در این مقاله حقیقی‌اند.

کلید واژه‌ها: خواص نابرابری‌ها، نامعادله‌ها، مسائل نابرابری‌ها.

خواص نابرابری‌ها

۱. به طرفین نابرابری می‌توان عددی اضافه یا کم کرد:

$$a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$$

۲. طرفین هر نابرابری را می‌توان در عدد مثبتی ضرب یا بر عدد

مثبتی تقسیم کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} am > bm \\ \frac{a}{m} > \frac{b}{m} \end{cases}$$

۳. اگر طرفین هر نابرابری را در عدد منفی ضرب یا بر عددی

منفی تقسیم کنیم، جهت نابرابری عوض می‌شود.

$$\begin{cases} a > b \\ k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ak < bk \\ \frac{a}{k} < \frac{b}{k} \end{cases}$$

۴. طرفین هر نابرابری را می‌توان به توان عدد فرد رساند یا از

طرفین آن ریشه‌ی فرد گرفت.

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} a^{2n+1} > b^{2n+1} \\ \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b} \end{cases}$$

۵. اگر دو طرف نابرابری مثبت باشند، می‌توان طرفین را به توان

عددی فرد یا زوج رساند یا از طرفین ریشه‌ی فرد یا زوج گرفت.

$$a > b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2n} > b^{2n} \\ \sqrt[2n]{a} > \sqrt[2n]{b} \end{cases}$$

$$a^{2n} > b^{2n} \Rightarrow |a| > |b|$$

۶.

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ b < a < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

۷.

۸.

$$a > 0 > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

۹. دو نابرابری هم جهت را می توان نظیر به نظیر با هم جمع کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

۱۰. هرگاه طرفین دو نابرابری هم جهت مثبت باشند، می توان آن ها را نظیر به نظیر در هم ضرب کرد.

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a > a^2 > a^3 \dots \\ a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \dots \end{cases}$$

$$12) a > 0; a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$13) a < 0; a + \frac{1}{a} \leq -2$$

$$14) a, b \neq 0; (a^2 + b^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq 4$$

$$15) a, b, c \neq 0; (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9$$

$$16) a, b, c, d, \dots > 0 \text{ و } a_1, a_2, a_3, \dots, a_n > 0$$

آن گاه داریم:

$$\text{الف) } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\text{ب) } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

$$\text{ج) } \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

در حالت کلی داریم:

$$\text{د) } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}$$

چند نابرابری در نامعادله ها

$$1) \begin{cases} x^2 \leq a^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$(2x-1)^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq 2x-1 \leq 5$$

$$\Rightarrow -4 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

مثال ۱.

مثال ۲.

$$2) \begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

$$(2x-5)^2 \geq 49 \Rightarrow \begin{cases} 2x-5 \geq 7 \\ 2x-5 \leq -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \geq 12 \\ 2x \leq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} a^2 \leq x^2 \leq b^2 \\ 0 < a < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < x < b \\ -b < x < -a \end{cases}$$

مثال ۳.

$$9 \leq (2x-3)^2 \leq 25 \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq 2x-3 \leq 5 \\ -5 \leq 2x-3 \leq -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 \leq 2x \leq 8 \\ -2 \leq 2x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

مسئله ۱. ثابت کنید برای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$ داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

می دانیم که:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \\ c^2 + a^2 - 2ac \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ac \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

مسئله ۲. اگر $a, b, c > 0$ ، ثابت کنید:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

حل:

$$\begin{cases} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \\ b + c - 2\sqrt{bc} \geq 0 \\ c + a - 2\sqrt{ac} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(a+b)(a^2+b^2-ab) \geq (a+b)^3$$

$$\Rightarrow 4(a^2+b^2-ab) \geq (a+b)^2$$

$$\Rightarrow 4a^2+4b^2-4ab \geq a^2+b^2+2ab$$

$$\Rightarrow 3a^2+3b^2-6ab \geq 0$$

$$3(a^2+b^2-2ab) \geq 0 \Rightarrow 3(a-b)^2 \geq 0$$

این نامساوی همواره درست است. و چون مراحل بالا همگی برگشت پذیر هستند فرض ما درست است.

مسئله ۶. با شرط $a, b, c > 0$ ، ثابت کنید:

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

حل: به راحتی می توان ثابت کرد:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

راهنمایی: اگر دو پرازنر سمت راست را در هم ضرب کنید، پس از جمع جبری، عبارت سمت چپ به دست می آید.
از طرف دیگر، در مسئله ۱ ثابت کردیم:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$

پس:

$$a^3+b^3+c^3-ab-ac-bc \geq 0$$

و عبارت $(a+b+c)$ هم مثبت است. پس:

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

مسئله ۷. با شرط $a, b > 0$ ، ثابت کنید:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

حل: فرض می کنیم نامساوی مسئله همواره درست باشد؛ پس:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

داریم:

دو طرف نامساوی را در مقدار مثبت $ab(a+b)$ ضرب می کنیم.

خواهیم داشت:

$$b(a+b)+a(a+b) \geq 4ab$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+b) \geq 4ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab \geq 4ab \Rightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

این نامساوی همواره درست است. و چون مراحل بالا همگی برگشت پذیر هستند پس فرض ما درست است.

مسئله ۸. با شرط $x \neq 0$ ، بیشترین و کمترین مقدار $P = \frac{4x}{x^2+1}$ را بیابید.

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ c+a \geq 2\sqrt{ac} \end{cases}$$

این سه نامساوی را در هم ضرب می کنیم (بنا به شماره ۱۰):

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

مسئله ۳. در مثلث قائم الزاویه ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ ، وتر b و c اضلاع زاویه قائمه اند. ثابت کنید: $a^3 > b^3 + c^3$.

حل: داریم:

$$a > b \Rightarrow ab^2 > b^3 \text{ (در } b^2 > 0 \text{ ضرب می کنیم)}$$

$$a > c \Rightarrow ac^2 > c^3 \text{ (در } c^2 > 0 \text{ ضرب می کنیم)}$$

دو رابطه را جمع می کنیم:

$$ab^2+ac^2 > b^3+c^3 \Rightarrow a(b^2+c^2) > b^3+c^3 \text{ و}$$

$$a^2 = b^2+c^2$$

داریم:

$$\Rightarrow a(a^2) > b^3+c^3 \Rightarrow a^3 > b^3+c^3$$

مسئله ۴. با شرط $a, b, c > 0$ ، ثابت کنید:

$$P = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

$$P = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$$

حل:

$$P = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + 3$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) &\geq 2 \\ \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) &\geq 2 \\ \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) &\geq 2 \end{aligned} \right. \text{ (بنا به شماره ۱۲)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + 3 \geq 9 \Rightarrow P \geq 9$$

مسئله ۵. با شرط $a, b > 0$ ، ثابت کنید:

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

حل: فرض می کنیم نامساوی مسئله همواره درست باشد. پس:

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

داریم:

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3}{2} \geq \frac{(a+b)^3}{8} \Rightarrow 4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$$

$B = \sqrt{abcd}$ آن گاه همواره داریم:

$$A \geq 4B^2 \quad (2) \quad A \geq 4B \quad (1)$$

$$A \geq 4B^4 \quad (4) \quad A \geq 4B^4 \quad (3)$$

حل: گزینه ۲

(بنا به قسمت ج، شماره ۱۶) با شرط $x, y, z, t > 0$ ، داریم:

$$\frac{x+y+x+t}{4} \geq \sqrt[4]{xyzy}, x=a^4, y=b^4, z=c^4, t=d^4$$

$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^4b^4c^4d^4} \Rightarrow \frac{A}{4} \geq abcd$$

$$\Rightarrow A \geq 4abcd \Rightarrow A \geq 4B^2$$

الف) فرض می‌کنیم $x > 0$. صورت و مخرج کسر را بر x تقسیم می‌کنیم:

$$P = \frac{4}{x + \frac{1}{x}}, \quad (\text{شماره ۱۳})$$

$$x > 0; x + \frac{1}{x} \geq 2$$

پس مینیمم مخرج کسر ۲ است.

$$\text{Max} P = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{در نتیجه:}$$

ب) فرض می‌کنیم $x < 0$ ، صورت و مخرج کسر را بر x تقسیم کنیم:

$$P = \frac{4}{x + \frac{1}{x}}, \quad (\text{شماره ۱۴})$$

$$x < 0; x + \frac{1}{x} \leq -2$$

پس ماکزیمم مخرج کسر -۲ است.

$$\text{Min} P = \frac{4}{-2} = -2 \quad \text{در نتیجه:}$$

آزمون ۱. اگر $a > b$ و $b \neq 0$ ، آن گاه کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره درست است؟

$$a^3 > a^2b \quad (2) \quad a^2 > ab \quad (1)$$

$$a^4 > b^4 \quad (4) \quad ab^2 > b^3 \quad (3)$$

حل: گزینه ۳. چون $b \neq 0$ پس $b^2 > 0$. طرفین نامساوی $a > b$ را در $b^2 > 0$ ضرب می‌کنیم. در نتیجه: $ab^2 > b^3$. پس گزینه ۳ درست است.

آزمون ۲. اگر $a > b$ و $c > d$ ، آن گاه کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره درست است؟

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d} \quad (2) \quad ac > bd \quad (1)$$

$$a-d > b-c \quad (4) \quad a+b > b+c \quad (3)$$

حل: گزینه ۴. (بنا به شماره ۹) داریم:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}; a+c > b+d; a-d > b-c$$

آزمون ۳. اگر $a+b+c=0$ و $A = ab+ac+bc$ ، آن گاه:

$$A < 0 \quad (2) \quad A > 0 \quad (1)$$

$$A \leq 0 \quad (4) \quad A \geq 0 \quad (3)$$

حل: گزینه ۴.

$$(a+b+c)^2 = \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\text{یا } +} + 2(ab+ac+bc) = A$$

برای این که تساوی برقرار باشد، باید $A \leq 0$

آزمون ۴. اگر $a, b, c, d > 0$ و $A = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$

ادامه‌ی مطلب صفحه ۲۱

برای اثبات درستی این ادعا، فرض کنیم عدد شش‌رقمی $\overline{abcdef}$ متناظر با تاریخ تولد دوستان به صورت $\overline{abcdef}$ باشد. بنابراین داریم:

$$\overline{abcdef} = a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10 + f$$

در این جا مراحل الگوریتم را انجام می‌دهیم.

مرحله ۱)

$$2\overline{abcdef} = 2a \times 10^5 + 2b \times 10^4 + 2c \times 10^3 + 2d \times 10^2 + 2e \times 10 + 2f$$

مرحله ۲)

$$2\overline{abcdef} + 3 = 2a \times 10^5 + 2b \times 10^4 + 2c \times 10^3 + 2d \times 10^2 + 2e \times 10 + 2f + 3$$

مرحله ۳)

$$5(2\overline{abcdef} + 3) = a \times 10^6 + b \times 10^5 + c \times 10^4 + d \times 10^3 + e \times 10^2 + f \times 10 + 15$$

مرحله ۴)

$$5(2\overline{abcdef} + 3) - 6 = a \times 10^6 + b \times 10^5 + c \times 10^4 + d \times 10^3 + e \times 10^2 + f \times 10 + 9$$

مرحله ۵) در این مرحله عدد هفت‌رقمی حاصل به صورت

$\overline{abcdef9}$ توسط دوستان اعلام می‌شود.

اکنون با حرف رقم یکان (که همیشه ۹ است) شما می‌توانید

تاریخ تولد دوست خود را به صورت $\overline{abcdef}$ کشف کنید.

درضمن حتماً به دوست خود توصیه کنید که یک ماشین حساب

به همراه داشته باشد.

با راهیان المپیادهای ریاضی ۱۸



کلید واژه‌ها: فرمول مجموع یابی آبل، کاربرد نابرابری مثلثی، مسائل فرمول مجموع یابی آبل، حل مسائل فرمول یابی آبل.

مجموع یابی جمیع جملات است، در حالی که دیفرانسیل گیری متناظر با تفریق جمله‌های متوالی است.

خط چند ضلعی $P_1, P_2, \dots, P_n$ را چنان در نظر می‌گیریم که:
 $\angle P_1 P_2 P_3 = \angle P_2 P_3 P_4 = \dots = \angle P_{n-2} P_{n-1} P_n$
 در حالی که همه را در جهت ساعتگرد اندازه‌گیری کرده‌ایم. اگر:
 $P_1 P_2 > P_2 P_3 > \dots > P_{n-1} P_n$

نشان دهید P_1 و P_n نمی‌توانند منطبق باشند.
 برای حل مسأله، مختصات مختلطی را با مبدأ در P_1 و محور x های $P_1 P_2$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم α زاویه‌ی بین هر دو قطعه‌ی متوالی باشد، و:

$a_1 > a_2 > \dots > a_n$
 طول‌های این قطعات باشند. اگر قرار دهیم $z = e^{i(\pi-\alpha)}$ ، آن‌گاه مختص P_n عبارت است از:
 $a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}$
 باید ثابت کنیم این عدد برابر صفر نیست. با استفاده از فرمول مجموع یابی آبل، به‌دست می‌آوریم:
 $a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1} = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3)(1+z) + \dots + a_n(1+z+\dots+z^{n-1})$

فرمول مجموع یابی آبل

بسیاری از دستاوردهای ریاضیات پیوسته، از قبیل نابرابری‌های کلاسیک مربوط به انتگرال‌ها، معمولاً از مشابه‌های گسسته‌شان، با استفاده از فرایندی حدی استنتاج می‌شوند. اما گاهی اتفاق می‌افتد که مفاهیم مربوط به ریاضیات پیوسته آشناتر از نظایر گسسته‌شان باشند.

هدف این مقاله بررسی مشابه گسسته‌ی فرمول انتگرال گیری جزء به جزء، یعنی فرمول مجموع یابی آبل است، که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

فرض می‌کنیم $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ دو دنباله‌ی متناهی/اعداد باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= (a_1 - a_2) b_1 \\ &+ (a_2 - a_3)(b_1 + b_2) + \dots + (a_{n-1} - a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) \\ &+ a_n(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \end{aligned}$$

شباهت این موضوع با انتگرال گیری جزء به جزء در صورتی آشکار می‌شود که به خاطر بیاوریم انتگرال گیری متناظر با



اگر α صفر باشد، این مقدار عددی اکیداً حقیقی و مثبت است، و اثبات کامل است. اما اگر چنین نباشد، آن را در $1-z$ ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$(a_1 - a_r)(1-z) + (a_r - a_{r+1})(1-z^r) + \dots + a_n(1-z^n)$
این عبارت نمی‌تواند صفر باشد، در واقع، از آنجا که $|z|=1$ ، بنا به نابرابری مثلثی داریم:

$$\begin{aligned} & |(a_1 - a_r)z + (a_r - a_{r+1})z^r + \dots + a_n z^n| \\ & < |(a_1 - a_r)z| + |(a_r - a_{r+1})z^r| + \dots + |a_n z^n| \\ & = (a_1 - a_r) + (a_r - a_{r+1}) + \dots + a_n \end{aligned}$$

و نتیجه حاصل می‌شود.

مسئله‌های زیر را نیز می‌توان با استفاده از فرمول مجموع‌یابی فوق

حل کرد.

۱. با استفاده از فرمول مجموع‌یابی آبل، مجموع‌های زیر را

محاسبه کنید.

(الف) $1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}$

(ب) $1 + 4q + 9q^2 + \dots + n^2 q^{n-1}$

۲. اعداد:

$$a_1 \geq a_r \geq \dots \geq a_n > 0$$

و:

$$b_1 \geq b_r \geq \dots \geq b_n > 0$$

در

$$a_1 \geq b_1, a_1 + a_r \geq b_1 + b_r, \dots,$$

$$a_1 + a_r + \dots + a_n \geq b_1 + b_r + \dots + b_n$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت k

داریم:

$$a_1^k + a_r^k + \dots + a_n^k \geq b_1^k + b_r^k + \dots + b_n^k$$

۳. فرض می‌کنیم a, b, c, d اعدادی نامنفی و چنان باشند که:

$$a \leq 1, a + b \leq 5,$$

$$a + b + c \leq 14, a + b + c + d \leq 30.$$

ثابت کنید:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 10.$$

۴. فرض می‌کنیم $a_1, a_r, \dots, a_n$ اعدادی نامنفی و چنان باشند

که، به ازای هر k ,

$$a_1 a_r \dots a_k \leq \frac{1}{(2k)!}$$

ثابت کنید:

$$a_1 + a_r + \dots + a_n \geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

۵. فرض می‌کنیم $x_1, x_r, \dots, x_n$ و $y_1 \geq y_r \geq \dots \geq y_n$ دو

دنباله از اعداد مثبت و چنان باشند که:

$x_1 \geq y_1, x_1 x_r \geq y_1 y_r, \dots, x_1 x_r \dots x_n \geq y_1 y_r \dots y_n$
ثابت کنید:

$$x_1 + x_r + \dots + x_n \geq y_1 + y_r + \dots + y_n$$

حل مسئله‌ها

۱. الف) با به‌کار بردن فرمول مجموع‌یابی آبل به‌دست

می‌آوریم:

$$1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} = (1-2) + (2-3)(1+q)$$

$$+ (3-4)(1+q+q^2) + \dots + ((n-1)-n)$$

$$+ (1+2+\dots+q^{n-2}) + n(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})$$

$$= -\left(\frac{q-1}{q-1} + \frac{q^2-1}{q-1} + \frac{q^3-1}{q-1} + \dots + \frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$

$$+ n \frac{q^n-1}{q-1} = -\frac{1}{q-1} (1+q+q^2+\dots+q^{n-1} - n)$$

$$+ n \frac{q^n-1}{q-1} = -\frac{1}{q-1} \left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right) + n \frac{q^n-1}{q-1} \frac{nq^n}{q-1}$$

$$= \frac{q^n-1}{(q-1)^2}$$

(ب) با به‌کار بردن دوباره‌ی فرمول مجموع‌یابی آبل خواهیم

داشت:

$$1 + 4q + 9q^2 + \dots + n^2 q^{n-1}$$

$$= (1-4) + (4-9)(1+q) + (9-16)(1+q+q^2)$$

$$+ (1+q+q^2) + \dots + ((n-1)^2 - n^2)(1+q+\dots+q^{n-2})$$

$$+ n^2(1+q+\dots+q^{n-1})$$

با جمع سری‌های هندسی به‌دست آمده، داریم:

$$= -\left(3\frac{q-1}{q-1} + 5\frac{q^2-1}{q-1} + 7\frac{q^3-1}{q-1} + \dots\right)$$

$$+ (2n-1)\frac{q^{n-1}-1}{q-1} + n^2 \frac{q^n-1}{q-1} = \left(\frac{q-1}{q-1} + \frac{q^2-1}{q-1}\right)$$

$$+ \frac{q^3-1}{q-1} + \dots + \frac{q^{n-1}-1}{q-1} - 2\left(2\frac{q-1}{q-1} + 3\frac{q^2-1}{q-1}\right)$$

$$+ 4\frac{q^3-1}{q-1} + \dots + n\frac{q^{n-1}-1}{q-1} + n^2 \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$= \frac{1}{q-1} (1+q+\dots+q^{n-1} - n)$$

اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ مثبت باشند،

$$0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

و به ازای جمیع مقادیر $k \leq n$ داشته باشیم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq b_1 + b_2 + \dots + b_k$$

در این صورت:

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \dots + \sqrt{b_n}$$

حالت خاص مسئله‌ی اصلی، به ازای $n=4$ ، با قرار دادن:

$$b_k = k^2, k=1, 2, 3, 4$$

به دست می‌آید.

اکنون به اثبات دستاورد فوق می‌پردازیم. داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{\sqrt{b_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \\ &= a_1 \left(\frac{1}{\sqrt{b_1}} - \frac{1}{\sqrt{b_2}} \right) + (a_1 + a_2) \left(\frac{1}{\sqrt{b_2}} - \frac{1}{\sqrt{b_3}} \right) \\ &+ (a_1 + a_2 + a_3) \left(\frac{1}{\sqrt{b_3}} - \frac{1}{\sqrt{b_4}} \right) + \dots \\ &+ (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \frac{1}{\sqrt{b_n}} \end{aligned}$$

تفاضل‌های واقع در پرانتزها همه مثبت‌اند. با به‌کاربردن فرض

درمی‌یابیم که این عبارت کمتر از یا برابر با مورد زیر است:

$$\begin{aligned} & b_1 \left(\frac{1}{\sqrt{b_1}} - \frac{1}{\sqrt{b_2}} \right) + (b_1 + b_2) \left(\frac{1}{\sqrt{b_2}} - \frac{1}{\sqrt{b_3}} \right) \\ &+ \dots + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \frac{1}{\sqrt{b_n}} \\ &= \sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \dots + \sqrt{b_n} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \leq \sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \dots + \sqrt{b_n}$$

با استفاده از این نتیجه و نابرابری «کوشی - شوارتز»، به دست

می‌آوریم:

$$(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n})^2$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt{b_1} \cdot \sqrt{\frac{a_1}{b_1}} + \sqrt{b_2} \cdot \sqrt{\frac{a_2}{b_2}} + \dots + \sqrt{b_n} \cdot \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \right)^2 \\ &\leq (\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \dots + \sqrt{b_n}) \left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \right) \\ &\leq (\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \dots + \sqrt{b_n})^2 \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$-\frac{2}{q-1} (1+2q+\dots+nq^{n-1} - \frac{n(n+1)}{2}) + n^2 \frac{q^n-1}{q-1}$$

با استفاده از قسمت الف مسئله، درمی‌یابیم که این عبارت برابر

است با:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q-1} \left(\frac{q^n-1}{q-1} - n \right) - \frac{2}{q-1} \left(\frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n-1}{(q-1)^2} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &+ n^2 \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{n^2 q^n}{q-1} - \frac{(2n-1)q^n+1}{(q-1)^2} + \frac{2q^n-2}{(q-1)^2} \end{aligned}$$

منبع

Yaglom, A.M., Yaglom, I.M. Ncelementarnye zadaci v elementarnom izlozhenii (Non-elementary problems in an elementary exposition), Gosudarstv. Izdat. Tehn. Teor. Lit., Moscow, 1954.

۲. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a_i^k - b_i^k &= (a_i - b_i)(a_i^{k-1} + a_i^{k-2} b_i + \dots + \\ &+ a_i b_i^{k-2} + b_i^{k-1}) \end{aligned}$$

برای ساده‌کردن محاسبات قرار می‌دهیم:

و:

$$c_i = a_i - b_i$$

$$d_i = a_i^{k-1} + a_i^{k-2} b_i + \dots + a_i b_i^{k-2} + b_i^{k-1}$$

فرض مسئله مستلزم این است که:

$$c_1 + c_2 + \dots + c_j \geq 0$$

به ازای هر i :

$$d_i \geq d_{i+1} > 0$$

و مورد اخیر، از آن‌جا که a_i و b_i دنباله‌هایی مثبت و نزولی‌اند،

نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} & a_1^k - b_1^k + a_2^k - b_2^k + \dots + a_n^k - b_n^k = c_1 d_1 \\ &+ c_2 d_2 + \dots + c_n d_n = (d_1 - d_2) c_1 + (d_2 - d_3) c_2 \\ &+ \dots + d_n (c_1 + c_2 + \dots + c_n) \geq 0 \end{aligned}$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

منبع

Busneag, D., Mafei, I.V., Teme pentru cercurile Si concursurile de matematica ale elevilor (Lectures for students mathematics circles and competitions), Scrisul romanesc, Craiova, 1983.

۳. گزاره‌ی عمومی‌تری را اثبات می‌کنیم.

تعداد گاوهای نر سفید، سیاه، خالخال و قهوه‌ای را به X, Y, Z و T و تعداد گاوهای ماده از رنگ‌های مزبور را به ترتیب به x, y, z و t نمایش می‌دهیم. معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} X - T &= \frac{5}{6}Y \quad \text{و} \quad Y - T = \frac{9}{20}Z \quad \text{و} \quad Z - T = \frac{13}{42}X \\ x &= \frac{7}{12}(Y + y) \quad \text{و} \quad y = \frac{9}{20}(Z + z) \quad \text{و} \quad z = \frac{11}{30}(T + t) \\ t &= \frac{13}{42}(X + x) \quad \text{و} \end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات سیال بالا نتیجه خواهد شد:

$$\begin{aligned} X &= ۱۰۳۶۶۴۸۲k \quad \text{و} \quad Y = ۷۴۶۰۵۱۴k \quad \text{و} \quad Z = ۷۳۵۸۰۶k \\ T &= ۴۱۴۹۳۸۷k \quad \text{و} \\ x &= ۷۲۰۶۳۶۰k \quad \text{و} \quad y = ۴۸۹۳۲۴۶k \quad \text{و} \quad z = ۳۵۱۵۸۲۰k \\ t &= ۵۴۳۹۲۱۳k \quad \text{و} \end{aligned}$$

که k عدد صحیح مثبت است، تعداد جواب‌های مسئله بیشمار است. کوچک‌ترین آن‌ها به‌ازای $k=1$ حاصل می‌شود.

با بازگشت به نابرابری اصلی، داریم:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \frac{x_1}{y_1} y_1 + \frac{x_2}{y_2} y_2 + \dots + \frac{x_n}{y_n} y_n \\ &= \frac{x_1}{y_1} (y_1 - y_2) + \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} \right) (y_2 - y_3) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n} \right) y_n \end{aligned}$$

با استفاده از نابرابری‌های تبدیل شده در ابتدای این راه حل، برای عامل اول در هر جمله، این نکته را درمی‌یابیم که این عبارت بزرگ‌تر از یا برابر است با:

$$\begin{aligned} 1(y_1 - y_2) + 2(y_2 - y_3) + \dots + ny_n \\ = y_1 + y_2 + \dots + y_n \end{aligned}$$

و اثبات به انجام می‌رسد.

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \dots + \sqrt{b_n}$$

(آزمون انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۷، طرح از V.Cârtoaje)

۴. داریم:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 \cdot 2a_1) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)(3 \cdot 4a_2) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)((2n-1) \cdot 2na_n) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(1 \cdot 2a_1) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \\ &\quad (1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)(1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2 \\ &\quad + \dots + (2n-1) \cdot 2na_n) \end{aligned}$$

با استفاده از نابرابری AM.GM و فرض مسئله درمی‌یابیم که:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2a_1 &\geq 1 \\ 1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2 &\geq 2, \dots, 1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2 + \dots \\ &\quad + (2n-1) \cdot 2na_n \geq n \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &\geq \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \dots + n\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

و کار به سامان می‌رسد.

۵. می‌خواهیم نابرابری‌های شامل حاصل‌ضرب‌ها را به نابرابری‌های شامل مجموع‌ها تبدیل کنیم. به این منظور از نابرابری AM-GM استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_k}{y_k} \geq k \sqrt[k]{\frac{x_1}{y_1} \frac{x_2}{y_2} \dots \frac{x_k}{y_k}} \geq k$$

که آخرین نابرابری آن از فرض به دست می‌آید.