

منحنی کوتاه‌ترین زمان

حسن اتحاد مهرآباد،

سرگروه فیزیک منطقهٔ عجب‌شیر

مرضیه روانبخش،

دبیر ریاضی منطقهٔ عجب‌شیر

چکیده

منحنی کوتاه‌ترین زمان، یک مسئلهٔ تاریخی و قدیمی است که در آن دیده می‌شود: همیشه کوتاه‌ترین و بهترین راه، برای رسیدن از مبدأ به مقصد، خط مستقیم نیست. اگر بخواهیم مهره‌ای را روی مسیری رها کنیم تا تحت تأثیر نیروی گرانشی خود در کمترین زمان ممکن از مبدأ به مقصد برسد، مسیر مستقیم مسیر مربوط به کوتاه‌ترین زمان نیست. در صورتی که زمان سقوط مهره را محاسبه کنیم با پیدا کردن کمترین مقدار آن به یک منحنی به نام چرخ زاد (Cycloid) می‌رسیم.

چرخ‌زاد منحنی‌ای است که یک نقطه روی یک چرخ دایره‌ای به شعاع r هنگام حرکت رسم می‌کند. بنابراین، اگر مهره‌ای تحت تأثیر نیروی گرانشی خود روی یک مسیر بدون اصطکاک بلغزد تا به پایین برسد، مسیری که کوتاه‌ترین زمان را ایجاد می‌کند چرخ‌زاد است.

یک ویژگی جالب چرخ‌زاد این است که اگر مهره‌ای را از هر نقطه دلخواه دیگر روی منحنی رها کنیم، زمان رسیدن آن به نقطهٔ مقصد در انتهای مسیر تغییری نمی‌کند! پس منحنی کوتاه‌ترین زمان یک منحنی هم‌زمان نیز هست.

کلیدواژه‌ها: منحنی کوتاه‌ترین زمان، منحنی هم‌زمان،

چرخ‌زاد، برنولی، آونگ هویگنس

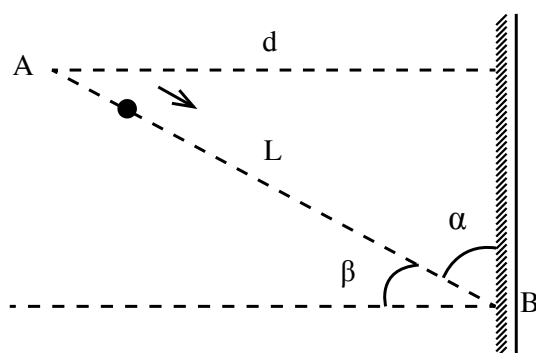
۱. مقدمه

در قرن هفدهم میلادی، برنولی مسئله‌ای را مطرح کرد و دانشمندان هم عصر خود را با این مسئله به چالش کشاند. مسئلهٔ برنولی این بود:

«دو نقطه A و B در صفحهٔ قائم وجود دارند. این دو نقطه را به وسیله چه منحنی‌ای به هم وصل کنیم، تا اگر جسمی صرفاً بر اثر نیروی وزن خود روی این منحنی حرکت کند، در کمترین زمان از A به B برسد.» (شیرزاد، ۱۳۸۸)

برنولی منحنی‌ای با این ویژگی را **منحنی کوتاه‌ترین زمان** نامید. البته حدود ۵۰ سال پیش از برنولی، گالیله در کتاب «گفتارهایی دربارهٔ دو علم جدید» آن را مطرح کرده بود.

مسئلهٔ گالیله به این شکل طرح شده بود که «اگر گلوله‌ای روی یک خط راست در صفحهٔ قائم از نقطهٔ A به نقطهٔ B حرکت کند، زاویهٔ بین خطی که گلوله روی آن حرکت می‌کند با راستای قائم چقدر باشد تا انتقال گلوله بین این دو نقطه در کمترین زمان صورت پذیرد؟»



▲ شکل ۱: مسئلهٔ گالیله - زاویهٔ مرتبط با حداقل زمان برای حرکت گلوله از A تا B (منبع ۱)

فرض می‌کنیم زاویهٔ بین AB با راستای قائم و راستای افق به ترتیب α و β است. در این صورت:

$$l = \frac{d}{\sin \alpha}$$

و شتاب حرکت و جابه‌جایی روی سطح شیب‌دار به ترتیب برابر است با:

$$a = g \sin \alpha = g \cos \alpha$$

$$l = \frac{1}{2} at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2d / \sin \alpha}{g \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{4d}{g \sin 2\alpha}}$$

پس از دوران چرخ به اندازه θ مختصات نقطه E به صورت زیر است:

$$x = AF = AB - FB = r\theta - r \sin \theta = r(\theta - \sin \theta)$$

$$y = EF = BC - CD = r\theta - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

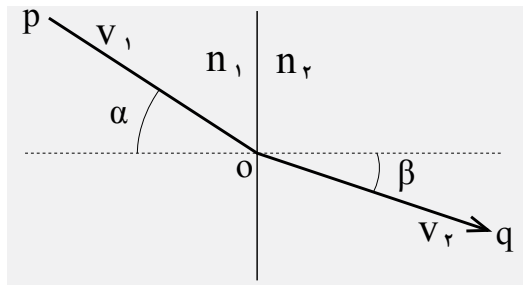
پس معادله مسیر چرخ زاد به صورت زیر است: (همان)

$$x = r(\theta - \sin \theta)$$

$$y = r(1 - \cos \theta)$$

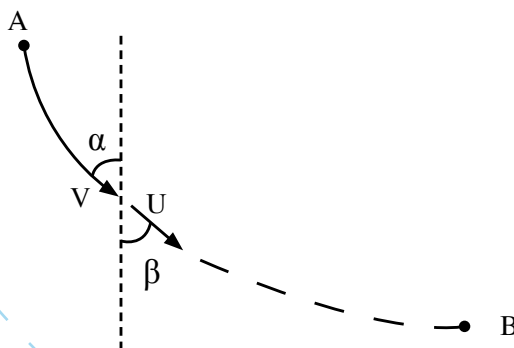
۳. منحنی کوتاه ترین زمان

اصل فرما بیان می کند مسیری که پرتو نور بین دو نقطه طی می کند، مسیری است که نور آن را در کوتاه ترین زمان می پیماید. اصل فرما به قانون اسنل - دکارت می انجامد: هنگامی که سینوس زاویه ها در دو محیط با سرعت انتشار نور متناسب باشد، زمان رسیدن از P به Q کمینه می شود. (شکل ۵)



▲ شکل ۵: مسیر نور در دو محیط متفاوت (منبع ۳)

برنولی با بهره گیری از اصل فرما که نور فاصله بین دو نقطه را در کمترین زمان طی می کند، فاصله بین نقاط A و B را با پاره خط های کوچکی به همدیگر وصل و زاویه بین هر پاره خط را با راستای قائم حساب کرد.



▲ شکل ۶: منحنی کوتاه ترین زمان (منبع ۳)

در صورتی که بخواهیم زمان انتقال حداقل مقدار باشد، باید:

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \sin 2\alpha = 1$$

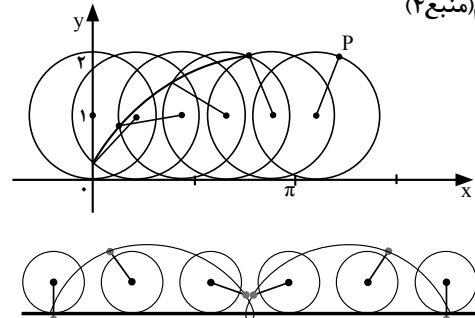
بنابراین کمترین زمان مربوط به خطی است که با راستای قائم زاویه ۴۵ درجه درست می کند. (Mallik, ۲۰۰۸: ۵۶۱-۵۸۲)

۲. چرخ زاد

چرخ یک دو چرخه را در نظر بگیرید که روی آن نقطه مشخصی علامت گذاری شده است. اگر این چرخ روی یک سطح افقی، بدون لغزش بغلند، نقطه مشخص شده مسیر منحنی شکلی را طی می کند که به این منحنی چرخ زاد گویند.



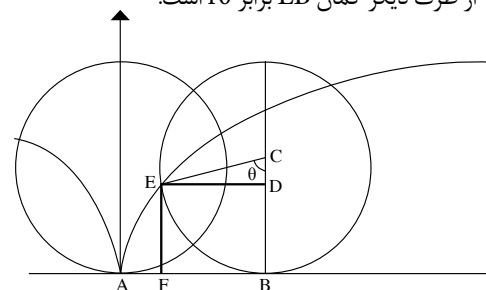
▲ شکل ۲: نحوه ایجاد یک منحنی چرخ زاد با چرخ دوار در صفحه قائم (منبع ۴)



▲ شکل ۳: منحنی چرخ زاد حاصل از مکان هندسی نقاطی که یک نقطه از چرخ در حال غلتش طی می کند. (منبع ۳)

در صورتی که چرخ لغزش نداشته باشد، مطابق (شکل ۴) با غلتیدن آن، نقطه A به نقطه E می رسد و کمان EB با پاره خط AB برابر می شود.

از طرف دیگر کمان EB برابر $r\theta$ است.

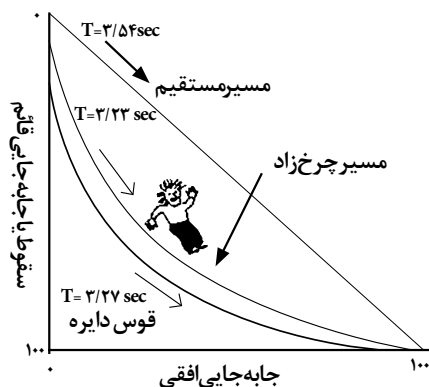


▲ شکل ۴: غلتش چرخ و جابه جایی نقاط روی چرخ

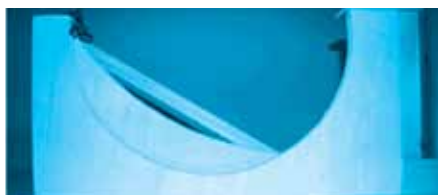
$$= h \left[1 - \cos t + \frac{\sin^2 t}{1 - \cos t} \right] = h \left[\frac{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}{1 + \cos t} \right]$$

$$= h \left[\frac{2 - 2 \cos t}{1 + \cos t} \right] = 2h$$

مشاهده می‌گردد معادلهٔ چرخ‌زاد در معادلهٔ دیفرانسیل کوتاه‌ترین زمان صدق می‌کند، بنابراین:
منحنی کوتاه‌ترین زمان یک چرخ‌زاد است.



▲ شکل ۸: مقایسهٔ عددی زمان سقوط در سه مسیر قوس دایره، چرخ‌زاد و مستقیم (منبع ۷)



▲ شکل ۹: اگر هر سه گلوله را هم‌زمان از یک نقطه بالای سطح‌ها کنیم، گلوله‌ای که در مسیر چرخ‌زاد در حال حرکت است، جلوتر از دو گلولهٔ دیگر خواهد رفت. (منبع ۷)



▲ شکل ۱۰: نمایش و مقایسهٔ مسیر مستقیم، مسیر چرخ‌زاد و کمان

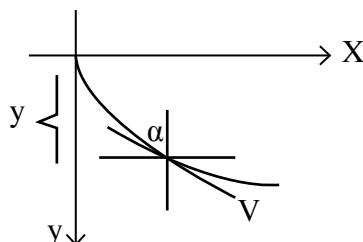
۴. منحنی هم‌زمان

هرگاه دو گلولهٔ A و B از دو نقطهٔ متفاوت روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی هم‌زمان رها شوند (شکل ۱۱)، انتظار می‌رود گلوله‌ای که به پایین سطح نزدیک‌تر است، زودتر به انتهای مسیر برسد.

اگر سرعت گلوله در بخشی از مسیر برابر v و در بخش دیگر برابر u باشد، با تشبیه سرعت گلوله به سرعت نور طبق قوانین شکست نور:

$$\frac{V}{\sin \alpha} = \frac{u}{\sin \beta}$$

اگر پاره‌خط‌های بین دو نقطه خیلی کوچک باشند، با اتصال مجموعهٔ آن‌ها به همدیگر یک منحنی حاصل می‌شود.



▲ شکل ۷: مسیر حرکت و سرعت با راستای قائم زاویه a' درست می‌کند (منبع ۳)

اگر سرعت گلوله (که همواره بر مسیر حرکت عمود است)، با خط قائم زاویهٔ α بسازد، در این صورت نسبت $\frac{V}{\sin \alpha}$ مقداری ثابت است.

$$\frac{V}{\sin \alpha} = k$$

سرعت گلوله پس از سقوط از ارتفاع عمومی y برابر

$$V = \sqrt{2gy}$$

است، بنابراین:

$$\frac{\sqrt{y}}{\sin \alpha} = k \rightarrow y = k^2 \sin^2 \alpha$$

از طرفی شیب نمودار در هر نقطه به صورت زیر است:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \cot \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + y'^2}$$

با ترکیب این رابطه با رابطهٔ $y = k^2 \sin^2 \alpha$ داریم:

$$y = \frac{k^2}{1 + y'^2}$$

فرض می‌کنیم $2h = k^2$ در این صورت:

$$2h = (y'^2 + 1)y$$

این معادله، معادلهٔ دیفرانسیل منحنی کوتاه‌ترین زمان است که یک چرخ‌زاد با دایرهٔ مولد به شعاع h در این معادله صدق می‌کند.

معادلهٔ یک چرخ‌زاد با شعاع مولد h به صورت زیر است: [۵]

$$x = h(t - \sin t)$$

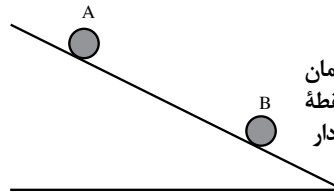
$$(1 - \cos t)y = h$$

برای کسب اطمینان از صحت معادله، می‌توان آن را در معادلهٔ دیفرانسیل $2h = (y'^2 + 1)y$ آزمود:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{-\sin t}{1 - \cos t}$$

$$y(1 + y'^2) = h(1 - \cos t) \left[1 + \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} \right]$$

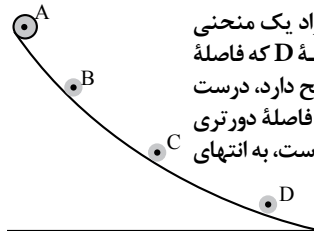
شکل ۱۱: مقایسه زمان انتقال دو گلوله از دو نقطه متفاوت روی سطح شیب دار



اما در مسیرهای چرخزادی چنین نیست. گلوله را از هر نقطه روی منحنی چرخزاد رها کنیم تا صرفاً بر اثر نیروی وزن خود سقوط کند، زمان رسیدن به انتهای مسیر در هیچ یک از حالت‌ها تغییری نمی‌کند.

مثلاً در شکل ۱۲ گلوله را از هر کدام از نقاط A و B و C و D رها کنیم تا در صفحه قائم روی مسیر چرخزادی بدون اصطکاک به پایین سطح برسد، همه آن‌ها مستقل از نقطه شروع حرکت، زمان یکسانی را برای رسیدن به انتهای مسیر طی می‌کنند. به همین علت به منحنی چرخزاد، منحنی هم‌زمان هم گفته می‌شود.

شکل ۱۲: منحنی چرخزاد یک منحنی هم‌زمان است؛ یعنی گلوله D که فاصله خیلی کمی از انتهای سطح دارد، درست هم‌زمان با گلوله A که در فاصله دورتری نسبت به پایین سطح واقع است، به انتهای مسیر می‌رسد. (منبع ۲)



در سال ۱۶۵۹ م. هویگنس ثابت کرد زمان سقوط گلوله از هر یک از این نقطه‌ها و رسیدن آن به پایین سطح به موقعیت نقاط و دوری یا نزدیکی آن‌ها به پایین سطح بستگی ندارد و این مدت زمان از رابطه $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ به دست می‌آید که در آن r شعاع دایره مولد چرخزاد است.



شکل ۱۳: اگر هر دو گلوله را هم‌زمان از مسیر چرخزادی رها کنیم، هر دو هم‌زمان به انتهای مسیر می‌رسند. (منبع ۷)

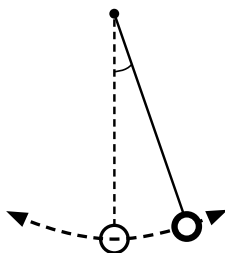
۵. آونگ هویگنس

اگر زاویه انحراف آونگ از حالت تعادل از ۶ درجه بیشتر باشد، دوره تناوب آونگ به دامنه نوسان آن وابسته است. اگر بر اثر عوامل از دامنه نوسان آونگ کاسته شود، با توجه به رابطه $\omega = \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}$ زمان تناوب آونگ (که در آن $\gamma = \frac{b}{2m}$ ضریب

میرایی نوسان است) اندکی افزایش می‌یابد. (کیث ر، ۱۳۷۳) اما اگر آونگی درست کرده باشیم که در آن، زمان تناوب نوسان مستقل از طول مسیر نوسان باشد، در این صورت با کاهش دامنه تغییری در زمان تناوب نخواهد داشت.

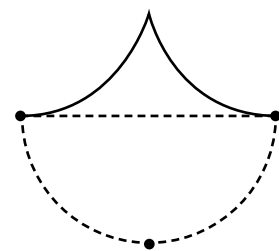
در ساعت‌های قدیمی که براساس نوسان آونگ‌ها کار می‌کردند، چون آونگ‌ها حین نوسان روی یک قوس دایره حرکت رفت و برگشت داشتند، با تغییر دامنه (به علت میرایی نوسان) دوره تناوب آن‌ها تغییر می‌کرد و زمان صحیح را نشان نمی‌دادند.

شکل ۱۴: آونگ هنگام نوسان روی یک قوس دایره‌ای حرکت رفت و برگشت انجام می‌دهد



هویگنس پیشنهاد کرد اگر گلوله آونگ به جای نوسان روی قوس دایره در یک مسیر منطبق بر منحنی هم‌زمان نوسان کند، زمان تناوب آن ثابت می‌ماند و ساعت زمان را عقب یا جلوتر از حالت واقعی نشان نمی‌دهد.

شکل ۱۵: آونگ هویگنس با طول متغیر که در مسیر چرخزادی نوسان می‌کند. (منبع ۶)



اگر آونگ طوری طراحی شود که بازویی با طول متغیر به گلوله آن متصل گردد تا در حین نوسان طول آن تغییر کند و مسیر حرکت گلوله را از قوس دایره به منحنی چرخزادی تغییر دهد، مشکل تغییر زمان تناوب حل خواهد شد.

۴. نتیجه‌گیری

چرخزاد/ چرخ‌نما منحنی‌ای است که یک نقطه روی یک چرخ‌دایره‌ای به شعاع r هنگام حرکت رسم می‌کند. چرخزادها ویژگی‌های بسیار مهمی دارند که از آن‌ها در صنعت و معماری استفاده‌های زیادی می‌شود. دو ویژگی مهم آن‌ها کوتاه‌ترین زمان و هم‌زمان بودن آن‌ها برای سقوط یک مهره است؛ بدین ترتیب که اگر مهره‌ای تحت تأثیر نیروی گرانشی روی یک مسیر بدون اصطکاک بلغزد تا به پایین برسد، مسیری که کوتاه‌ترین زمان را ایجاد می‌کند چرخزادی است. و همین‌طور اگر مهره را از هر نقطه دلخواه روی منحنی رها کنیم، زمان رسیدن آن به نقطه مقصد و انتهای مسیر تغییری نمی‌کند! به عبارت دیگر، مسیر چرخزادی هم منحنی کوتاه‌ترین زمان است هم منحنی هم‌زمان.

منابع

۱. شیرزاد، مهدی؛ تاریخ یک منحنی، رشد جوان، تهران، ۱۳۸۸.
۲. کیث ر؛ سایمون، مکانیک، مترجم: اعظم نیرومند راد، غلامحسین همدانی، چاپ سوم، تهران مؤسسه علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۳.
3. Mallik; AK., *Optimization Problem in Elementary Geometrys*, Resonance, June, (2008), 561-582.
4. www.scitechantiques.com/
5. www.cycloidhtml.en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve
6. www.history.mcs.st-and.ac.uk/Hist_Topics
7. www.scitechantiques.com