حمیدرضا امیری

بخش دوم

# پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونهٔ گسسته و پیوسته

## پیشامدهای مستقل و وابسته

**تعریف:** دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را مستقل از هم می‌نامیم هرگاه وقوع یا عدم وقوع هر یک روی وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. (A رخ بدهد یا رخ ندهد، B بتواند رخ بدهد.)

**تذکر مهم:** اگر A و B در دو فضای نمونه‌ای متفاوت مانند $S_۱$ و $S_۲$ تعریف شده باشند، همواره مستقل هستند و واضح است که رخداد یا عدم رخداد هر یک هیچ تأثیری بر رخداد دیگری ندارد. مثلاً انداختن یک تاس و یک سکه با فضاهای نمونه‌ای $S_۱ = \{۱, ۲, ..., ۶\}$ و $S_۲ = \{H, T\}$ دو پیشامد مستقل از هم هستند.

**قضیه:** شرط لازم و کافی برای آنکه دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S مستقل باشند آن است که:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

(این قضیه با استفاده از فرمول احتمال شرطی به اثبات می‌رسد.)

**مثال:** در هر یک از حالت‌های زیر مستقل یا وابسته بودن پیشامدهای داده شده را بررسی کنید:

I) ریختن ۲ تاس با هم یا یک تاس ۲ بار = S

پیشامد آنکه تاس اول ۵ بیاید = A

پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۹ باشد = B

**حل:** عدم رخداد A در بعضی از حالت‌ها مانع رخداد B می‌شود. مثلاً اگر تاس اول ۱ یا ۲ بیاید، امکان اینکه مجموع دو تاس ۹ باشد، وجود ندارد. پس دو پیشامد وابسته هستند. حال از طریق قضیه این نتیجه را تأیید می‌کنیم:

$(A \cap B) = \{(۵, ۴)\}$ و $n(A) = ۶$ و $n(B) = ۴$

$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$

$P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

و $P(B) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۳۶} \neq \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۹}$

$P(\quad A\ ) = \quad P(A\ )$

II) ریختن دو تاس با هم یا یک تاس، دو بار = S

پیشامد آنکه تاس اول ۵ بیاید = A

پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۷ باشد = B

**حل:** A رخ بدهد یا رخ ندهد، همواره B می‌تواند رخ بدهد. پس دو پیشامد مستقل هستند و از طریق قضیه داریم:

$n(S) = ۳۶$ و $n(A) = ۶$ و $n(B) = ۶$ و $n(A \cap B) = ۱$

$P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

و $P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۳۶} = P(A) \times P(B)$

**تعریف:** ۳ پیشامدهای A، B و C از فضای نمونه‌ای S را مستقل از یکدیگر می‌نامیم هرگاه: اولاً دوبه‌دو مستقل باشند، ثانیاً داشته باشیم:

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

**تذکر:** ممکن است سه پیشامد A، B و C از فضای نمونه‌ای S طوری تعریف شوند که شرط دوم را داشته باشند، ولی دوبه‌دو مستقل نباشند (در واقع شرط دوم شرط اول را نتیجه نمی‌دهد).

**مثال:** فرض کنیم: $S = \{۱, ۲, ..., ۷, ۸\}$، $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $B = \{۴, ۵, ۶, ۷\}$ و $C = \{۴, ۸, ۷, ۶\}$. در این صورت داریم:

$P(A) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$ و $P(B) = \frac{۱}{۲}$ و $P(C) = \frac{۱}{۲}$

شرط دوم برقرار است:

$P(A \cap B \cap C) = P(\{۴\}) = \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$

$(A \cap B) = \{۴\} \to P(A \cap B) = \frac{۱}{۸} \neq P(A) \times P(B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

$(A \cap C) = \{۴\} \to P(A \cap C) = \frac{۱}{۸} \neq P(A) \times P(B) = \frac{۱}{۴}$

$(B \cap C) = \{۴, ۶, ۷\}$

$\to P(B \cap C) = \frac{۳}{۸} \neq P(B) \times P(C) = \frac{۱}{۴}$

**تذکر:** تعریف فوق برای n پیشامد $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_n$ از فضای نمونه‌ای S قابل تعمیم است. یعنی اگر پیشامدهای $A_۱$ تا $A_n$ دوبه‌دو مستقل باشند و داشته باشیم: $P(\bigcap_{i=۱}^{n} A_i) = \prod_{i=۱}^{n} P(A_i)$، در این صورت این پیشامدها مستقل از یکدیگرند.

**تذکر:** دو پیشامد A و B از فضای S می‌توانند:

I) سازگار و مستقل باشند.

II) سازگار و وابسته باشند.

III) ناسازگار $((A \cap B) = \varnothing)$ و مستقل باشند که در این‌صورت: $P(A) = ۰$ یا $P(B) = ۰$.

IV) ناسازگار و وابسته باشند.

**تذکر:** اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، در این‌صورت $A'$ و $B'$ مستقل‌اند، $A'$ و B مستقل‌اند و A و $B'$ نیز مستقل‌اند.

**نکتهٔ مهم:** اگر $S = \{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد، همواره داریم:

$۱)\ \forall ۱ \leq i \leq n ; ۰ \leq P(\{a_i\}) \leq ۱$

$۲)\ \sum_{i=۱}^{n} P(\{a_i\}) = ۱$

یا $P(\{a_۱\}) + P(\{a_۲\}) + ... + P(\{a_n\}) = ۱$

(برای راحتی در نگارش از این به بعد به جای $P(\{a_i\})$ می‌نویسیم: $P(a_i)$).

**تعریف:** اگر $S = \{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$ و در این فضای نمونه‌ای داشته باشیم: $P(a_۱) = P(a_۲) = ... = P(a_n) = \frac{۱}{n}$، در این صورت فضای S را فضای نمونه‌ای **هم‌شانس** و در غیر این‌صورت آن را فضای **غیرهم‌شانس** می‌نامیم. (اگر در یک فضای نمونه‌ای حداقل ۲ برامد ساده، احتمال نابرابر داشته باشند، آن فضا **غیرهم‌شانس** است.)

**مثال:** یک تاس طوری ساخته شده که احتمال وقوع هر وجه آن متناسب است با دو برابرعدد حک شده روی همان وجه. اگر این تاس را بیندازیم چه‌قدر احتمال دارد عدد حاصل فرد باشد؟

**حل:** طبق فرض داریم:

$$P(۱)=۲x \text{ و } P(۲)=۴x \text{ و } P(۳)=۶x$$
$$\text{و } P(۴)=۸x \text{ و } P(۵)=۱۰x \text{ و } P(۶)=۱۲x$$
$$\sum_{i=۱}^{۶} P(i)=۱ \rightarrow ۲x+۴x+\ldots+۱۲x=۱ \rightarrow x=\frac{۱}{۴۲}$$
$$P(\{۱,۳,۵\})=P(۱)+P(۳)+P(۵)$$
$$=\frac{۲}{۴۲}+\frac{۶}{۴۲}+\frac{۱۰}{۴۲}=\frac{۱۸}{۴۲}=\frac{۳}{۷}$$

## پیشامدهای مربوط به تولد

به دنیا آمدن و تولد اشخاص پیشامدهایی مستقل از یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند. برای مثال، احتمال آنکه دو نفر در روز شنبه به دنیا آمده باشند برابر است با:
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۷}=\frac{۱}{۴۹}$$

**مثال:** در یک تیم ۵ نفری، چه‌قدر احتمال دارد:

الف) هر پنج نفر روز شنبه به‌دنیا آمده باشند؟

ب) هر پنج نفر در یک روز از هفته به‌دنیا آمده باشند؟

ج) روز تولد هر پنج نفر متمایز باشد (تولد در یکی از روزهای هفته).

د) حداقل ۲ نفر در یک روز از ایام هفته متولد شده باشند؟

**حل:**

الف) $P(A)=\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۷}=\frac{۱}{۷^{۵}}$

ب) $P(B)=۷\times\frac{۱}{۷^{۵}}=\frac{۱}{۷^{۴}}$

ج) $P(C)=\frac{۷}{۷}\times\frac{۶}{۷}\times\frac{۵}{۷}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۳۶۰}{۷^{۴}}$

د) $P(D)=۱-\frac{۳۶۰}{۷^{۴}}$

**تذکر:** احتمال آنکه n نفر $(n\le ۳۶۵)$ همگی در یک روز از سال متولد شده باشند برابر است با: $\frac{۳۶۵}{۳۶۵^{n}}$ یا: $\frac{۱}{۳۶۵^{n-۱}}$

و احتمال آنکه روز تولد هیچ دو نفری در سال یکی نباشد، از این رابطه به‌دست می‌آید:
$$P(A)=\frac{P(۳۶۵,n)}{۳۶۵^{n}}$$
یا:
$$P(A)=\frac{۳۶۵\times ۳۶۴\times\ldots\times(۳۶۵-(n-۱))}{۳۶۵^{n}}$$

**مثال:** در جمعی k نفره حداقل مقدار برای k کدام است تا احتمال اینکه حداقل ۲ نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند، بیشتر از $\frac{۱}{۳}$ باشد؟

**حل:** اگر A را پیشامد مورد نظر فرض کنیم، متمم A یا $A'$ آن است که روز تولد هر k نفر متمایز باشد.
$$P(A)>\frac{۱}{۳}\rightarrow ۱-P(A')>\frac{۱}{۳}$$
$$\rightarrow P(A')<۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\rightarrow\frac{۷}{۷}\times\frac{۶}{۷}\times\ldots\times\frac{۸-k}{۷}<\frac{۲}{۳}$$
$$\rightarrow k_{min}=۳$$

**مثال:** در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ سبز وجود دارد. سه مهره به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه:

I) هر سه مهره آبی باشند.

(تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان سه مهره را از بین ۱۰ مهره انتخاب کرد: $n(S)=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$)
$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۳}}{۱۲۰}=\frac{۴}{۱۲۰}=\frac{۱}{۳۰}$$

II) هر سه مهره هم‌رنگ باشند (یا هر سه قرمز یا هر سه آبی یا هر سه سبز).
$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۳}+\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۳}}{۱۲۰}=\frac{۱+۴+۱}{۱۲۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

III) هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشند (۱ مهره قرمز، ۱ مهره آبی و ۱ مهره سبز).
$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۱}}{۱۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

IV) حداقل ۱ مهره سبز باشد.

پیشامد آنکه هیچ مهره‌ای سبز نباشد $=A'$
$$\rightarrow n(A')=\binom{۷}{۳}=۳۵$$
$$P(A')=\frac{۳۵}{۱۲۰}\rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۳۵}{۱۲۰}=\frac{۸۵}{۱۲۰}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

V) حداکثر ۲ مهره آبی باشد.

پیشامد آنکه هر سه مهره آبی باشند $=A'$
$$\rightarrow P(A')=\frac{\binom{۴}{۳}}{۱۲۰}=\frac{۴}{۱۲۰}\rightarrow P(A)=۱-\frac{۴}{۱۲۰}=\frac{۲۹}{۳۰}$$

VI) فقط ۲ مهره قرمز باشد (دو مهره قرمز و ۱ مهره

غیرقرمز).

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۷}{۱}}{۱۲۰}=\frac{۲۱}{۱۲۰}=\frac{۷}{۴۰}$$

VII) هیچ مهره‌ای سبز نباشد.

$$P(A)=\frac{\binom{۷}{۳}}{۱۲۰}=\frac{۳۵}{۱۲۰}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

**مثال:** دو تاس را با هم می‌ریزیم. مطلوب است احتمال آنکه:

I) هر دو تاس زوج باشند.

$n(S)=۶^۲$

و $A=\{۲,۴,۶\}\times\{۲,۴,۶\}\rightarrow n(A)=۳\times۳=۹$

$\rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$

II) هر دو تاس بزرگ‌تر از ۲ باشند.

$n(S)=۶^۲$ و $A=\{۳,۴,۵,۶\}\times\{۳,۴,۵,۶\}$

$\rightarrow n(A)=۴\times۴=۱۶\rightarrow P(A)=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$

III) تاس اول ۲ بیاید.

$A=\{(۲,۱),(۲,۲),...(۲,۶)\}\rightarrow n(A)=۶$

و $P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

IV) هر دو با هم اول نباشند.

$A'=\{۲,۳,۵\}\times\{۲,۳,۵\}$ هر دو اول باشند

$\rightarrow n(A')=۳\times۳=۹$ و $P(A')=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$

و $P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$

V) هیچ‌کدام از دو تاس مضرب ۳ نباشند.

$A=\{۱,۲,۴,۵\}\times\{۱,۲,۴,۵\}\rightarrow n(A)=۴\times۴=۱۶$

$\rightarrow P(A)=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$

VI) مجموع دو تاس بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

$A=\{(۳,۶),(۶,۳),(۴,۵),(۵,۴)\}\rightarrow n(A)=۴$

و $P(A)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$

VII) حاصل‌ضرب دو تاس بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد.

حاصل ضرب دو تاس ۱۰ یا ۲۰ یا ۳۰ باشد $=A$

$\rightarrow A=\{(۲,۵),(۵,۲),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۵),(۵,۶)\}$

$n(A)=۶\rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

**مثال:** ۳ تاس را با هم می‌ریزیم. مطلوب است احتمال آنکه:

I) هر سه بر ۳ بخش‌پذیر باشند.

$n(S)=۶\times۶\times۶=۲۱۶$

$A=\{۳,۶\}\times\{۳,۶\}\times\{۳,۶\}\rightarrow n(A)=۲^۳=۸$

$\rightarrow P(A)=\frac{۸}{۶^۳}=\frac{۸}{۲۱۶}=\frac{۱}{۲۷}$

II) مجموع سه تاس بزرگ‌تر از ۵ باشد.

پیشامد آنکه مجموع ۳ تاس کوچک‌تر یا مساوی ۵ باشد $=A'$

$A'=\{(۱,۱,۱),(۲,۱,۱),(۱,۲,۱),(۱,۱,۲),(۲,۲,۱),(۲,۱,۲),$
$(۱,۲,۲),(۳,۱,۱),(۱,۳,۱),(۱,۱,۳)\}$

$\rightarrow n(A')=۱۰$

و $P(A')=\frac{۱۰}{۲۱۶}=\frac{۵}{۱۰۸}\rightarrow P(A)=۱-\frac{۵}{۱۰۸}=\frac{۱۰۳}{۱۰۸}$

III) سه عدد رو شده یک دنبالهٔ هندسی صعودی با قدرنسبت صحیح تشکیل بدهند.

$A=\{\underbrace{(۱,۱,۱),(۲,۲,۲),...,(۶,۶,۶),}_{\text{قدرنسبت ۱}}\quad\underbrace{(۱,۲,۴)}_{\text{قدرنسبت ۲}}\}$

$\rightarrow n(A)=۷$ و $P(A)=\frac{۷}{۲۱۶}$

V) سه عدد رو شده بتوانند یک دنبالهٔ عددی با قدرنسبت صحیح تشکیل بدهند.

توجه داریم که اگر قدرنسبت، $d=۰$ باشد، هر سه عدد با هم برابر هستند که ۶ حالت امکان دارد. همچنین اگر $d=۱$، اعداد ۱، ۲ و ۳ یا ۲، ۳ و ۴ یا ۳، ۴ و ۵ یا ۴، ۵ و ۶ می‌توانند تشکیل دنبالهٔ عددی یا حسابی بدهند که در هر حالت دارای ۶=!۳ جایگشت هستند. اگر $d=۲$ باشد، اعداد ۱، ۳ و ۵ تشکیل دنبالهٔ عددی می‌دهند که ۶=!۳ جایگشت دارند و نیز اعداد ۲، ۴ و ۶ که آن‌ها نیز ۶=!۳ جایگشت دارند. اگر هم $d\geq۳$ فرض شود، اعداد نمی‌توانند دنبالهٔ عددی تشکیل بدهند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$n(A)=۴\times۶+۶+۶=۳۶\rightarrow P(A)=\frac{۳۶}{۲۱۶}=\frac{۱}{۶}$$

**مثال:** در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سبز وجود دارد. ۱ مهره به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم و بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار می‌گذاریم. سپس مهرهٔ دیگری از جعبه خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد مهرهٔ دوم آبی باشد؟

**نکتهٔ مهم و عجیب:** اگر در جعبه‌ای n مهره از رنگ‌های متفاوت وجود داشــته باشــد و ۱ مهره یا ۲ مهره ... یا $(n-1)$ مهره بــه تصادف از جعبه خارج کرده و بــدون نگاه کردن به رنگشان آن‌ها را کنار بگذاریم و سپس مهرهٔ دیگری به تصادف خارج کنیم، در این صورت احتمال آنکه مهرهٔ برداشته شده در مرحلهٔ دوم از رنگ خاصی از رنگ‌های موجود در جعبه باشد، با احتمال آنکه ابتدا مهره‌ای از جعبه خارج کنیم که از همان رنگ باشد، برابر است.

در مثــال فوق، احتمال آنکه مهره‌ای از جعبه خارج کنیم و رنگ آن آبی باشــد برابر است با تقسیم تعداد مهره‌های آبی بر تعــداد کل مهره‌های جعبه؛ یعنی: $P(\text{آبی}) = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$. اگر بخواهیم از این نکته استفاده نکنیم، برای مهرهٔ خارج شده باید دو حالت در نظر بگیریم: یکی اینکه مهرهٔ اولی آبی نباشــد و دومی آبی باشــد، و حالت دیگر اینکه مهرهٔ اولی آبی باشــد و دومی نیز آبی باشد. جمع این دو احتمال باید همان $\frac{۲}{۵}$ شود:

$$P(\text{مهرهٔ دوم آبی}) = \underbrace{\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۴}{۹}}_{\text{اولی غیرآبی و دومی آبی}} + \underbrace{\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}}_{\text{اولی آبی و دومی آبی}} = \frac{۲۴}{۹۰}+\frac{۱۲}{۹۰}=\frac{۳۶}{۹۰}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

**مثـال:** در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ مهــرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ ســفید وجود دارد. ۳ مهره از این جعبه به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد:

I) اولی سفید، دومی آبی و سومی قرمز باشد؟

$$P(A) = \frac{۳}{۱۰}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸} = \frac{۱}{۲۰}$$

II) مهرهٔ اول آبی و مهرهٔ دوم قرمز باشد؟

$$P(A) = \frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۸}{۸} = \frac{۲}{۱۵}$$

(توجه دارید که مهرهٔ سوم تأثیری بر مهره‌های اول و دوم ندارد و هر مهره‌ای باشد، مطلوب است.)

III) مهرهٔ اول آبی و مهرهٔ سوم سفید باشد؟

**روش اول:** برای مهرهٔ دوم که روی سومی تأثیرگذار است، دو حالت در نظر می‌گیریم: دومی یا سفید بوده یا سفید نبوده است:

$$P(A) = \left(\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}\right)+\left(\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}\right) = \frac{۲}{۱۵}$$

**روش دوم:** چون روی مهرهٔ دوم قیدی گذاشــته نشــده است، می‌توانیم پس از برداشت مهرهٔ اول یک مهره به تصادف برداریم و بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار بگذاریم که در این صورت طبق نکتهٔ قبل برای مهرهٔ سوم فضای نمونه تغییری نکرده اســت. در واقع مهرهٔ سوم را می‌توان در حکم مهرهٔ دوم فرض کرد و در این‌صورت خواهیم داشت:

$$P(A) = \left(\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}\right) = \frac{۱۲}{۹۰} = \frac{۲}{۱۵}$$

IV) مهرهٔ دوم قرمز و مهرهٔ سوم سفید باشد.

چون روی مهرهٔ اول قید گذاشــته نشــده است، پس یک مهــره برمی‌داریم و بــدون نگاه کردن به رنگــش، آن را کنار می‌گذاریم که در این صورت مهره‌های دوم و سوم در حکم اول و دوم به‌حساب می‌آیند و داریم:

$$P(A) = P(\text{اولی قرمز و دومی سفید}) = \frac{۳}{۱۰}\times\frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۱۰}$$

اگر بخواهیم مسئله را به روش معمول حل کنیم، باید برای مهرهٔ اول سه حالت در نظر بگیریم:

$$P(A) = \underbrace{\left(\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۲}{۹}\times\frac{۳}{۸}\right)}_{\text{اولی قرمز}}+\underbrace{\left(\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۳}{۸}\right)}_{\text{اولی آبی}}+\underbrace{\left(\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}\right)}_{\text{اولی سفید}} = \frac{۱}{۱۰}$$

## تمرین

۱. ســکهٔ ســالمی را ده‌بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین احتمال آنکه:

الف) دقیقاً پنج بار رو بیاید.

ب) دقیقاً شش بار رو بیاید.

ج) حداقل شش بار رو بیاید.

۲. چهــار دانش‌آموز کلاس دوم و هفت دانش‌آموز کلاس ســوم داوطلب بازی در تیم والیبال مدرسه شده‌اند، در صورتی که بازی در تیم برای ۶ نفر از آن‌ها امکان دارد. مطلوب است تعیین احتمال آنکه حداقل ۳ نفر از کلاس سوم باشند.

۳. در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سفید وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. مطلوب است تعیین احتمال آنکه:

الف) هر سه مهره همرنگ باشند.

ب) فقط دو مهره همرنگ باشند.

ج) لااقل دو مهره همرنگ باشند.