آموزشی

اثبات‌هایی کوتاه‌تر بر قضایای تشابه مثلث‌ها

قاسم حسین قنبری
دانشگاه فرهنگیان مرکز سمنان

کلیدواژه‌ها: تشابه، قضیهٔ تالس، مثلث‌های متشابه

مقدمه

قضایای تشابه در کتاب هندسهٔ (۱) بیان و اثبات شده‌اند. اما اثبات این قضایا کمی طولانی است و دانش‌آموزان معمولاً به آن روی خوش نشان نمی‌دهند. در این مختصر سعی شده است اثبات‌های کوتاه‌تری برای این قضایا ارائه شود. آنچه که در این شکل ارائهٔ قضایا بیشتر جلوه می‌کند، تکیهٔ بیشتر بر «قضیهٔ تالس» است.

تشابه دو مثلث در این کتاب به این صورت بیان شده است:

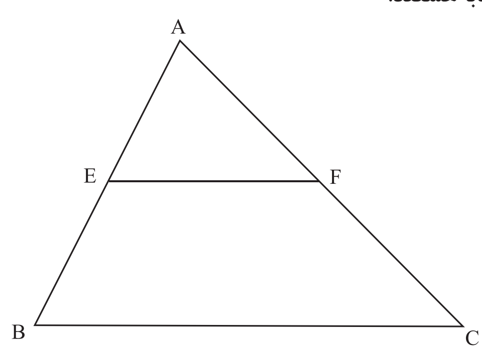
تعریف: دو مثلث را متشابه گویند، اگر زاویه‌های نظیر در آن‌ها برابر و ضلع‌های نظیر متناسب باشند.

اگر مثلث‌های متناظر را با نمادهای $A'B'C'$ و ABC نشان دهیم، دو مثلث در صورتی متشابه هستند که:

$$\begin{cases}\angle A=\angle A'\\ \angle B=\angle B'\\ \angle C=\angle C'\end{cases},\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم که نتیجه‌ای مهم از قضیه تالس است.

لم: در مثلث ABC، اگر F و E دو نقطه روی AC و AB باشند، به‌طوری‌که $EF \parallel BC$، آنگاه دو مثلث AEF و ABC متشابه‌هستند.



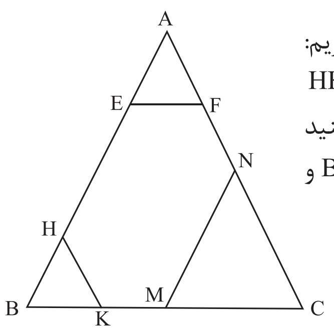
برهان:

$$EF \parallel BC \ \underset{\text{قضیهٔ خطوط}}{\overset{\text{قضیهٔ تالس}}{\Rightarrow}}\ \frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC} \quad (۱)$$

$$EF \parallel BC \ \overset{\text{موازی و مورب}}{\Rightarrow}\ \angle E=\angle B,\ \angle F=\angle C,\ \angle A=\angle A \quad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC$$

مثال: در مثلث ABC داریم: $MN \parallel AB$، $HK \parallel AC$ و $EF \parallel BC$. ثابت کنید مثلث‌های MNC، BHK و AEF با هم متشابه هستند



اثبات:

$EF \parallel BC \overset{\text{لم}}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta AEF$

$MN \parallel AB \overset{\text{لم}}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta CMN$

$HK \parallel AC \overset{\text{لم}}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta BHK$

بنابراین هر سه مثلث با مثلث ABC متشابه‌اند. در نتیجه هر سه با هم متشابه هستند.

قضیهٔ ۱. اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند، دو مثلث متشابه هستند.

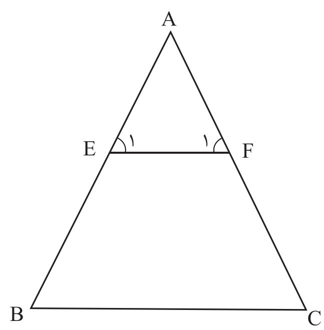
اثبات: چون دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگری برابر هستند، پس زاویهٔ سوم دو مثلث نیز با هم برابرند. یعنی در دو مثلث $A'B'C'$ ، ABC داریم:

$\hat{B} = \hat{B}' \ , \ \hat{C} = \hat{C}'$

$\Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}' + \hat{C}') = \hat{A}'$

روی ضلع AB نقطهٔ E را طوری در نظر می‌گیریم که: $AE = A'B'$. از این نقطه خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ F قطع کند. با توجه به لم داریم:

$$\Delta AEF \sim \Delta ABC$$



اگر ثابت کنیم مثلث‌های $A'B'C'$ و AEF هم‌نهشت‌اند، اثبات کامل می‌شود.

$EF \parallel BC \Rightarrow \hat{E}_۱ = \hat{B},\ \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \hat{E}_۱ = \hat{B}'$

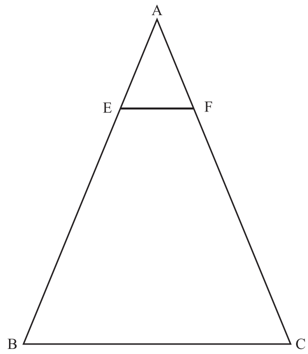
$\hat{A} = \hat{A}' \ , \ AE = A'B' \Rightarrow \Delta AEF \cong \Delta A'B'C'$ (زض‌ز)

$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

قضیهٔ ۲. اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگری برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند.

فرض: $\angle A = \angle A', \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$

اثبات: دو نقطهٔ F و E را روی AC و AB طوری انتخاب می‌کنیم که: $AF = A'C'$ و $AE = A'B'$. بنابراین دو مثلث $A'B'C'$ و AEF در حالت (ض‌زض) با هم هم‌نهشت هستند (۱).



اگر ثابت کنیم EF و BC موازی‌اند، اثبات کامل می‌شود. اما داریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \ , \begin{matrix} A'B' = AE \\ A'C' = AF \end{matrix} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

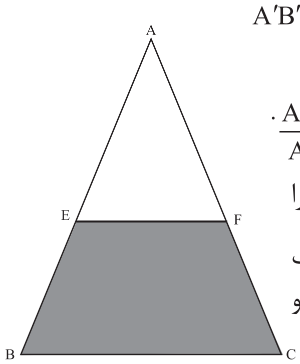
$$\xRightarrow[\text{قضیهٔ تالس}]{\text{عکس}} EF \parallel BC(۲)$$

با توجه به (۱) و (۲)، دو مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابه هستند. ■

قضیهٔ ۳. اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند، آنگاه دو مثلث متشابه هستند.

فرض: در مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC داریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} .$$



اثبات: دو نقطهٔ F و E را روی AC و AB طوری انتخاب می‌کنیم که: $AF = A'C'$ و $AE = A'B'$ بنابراین داریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow EF \parallel BC$$

اکنون اگر نشان دهیم دو مثلث $A'B'C'$ و AEF هم‌نهشت هستند، اثبات کامل می‌شود. به این منظور می‌نویسیم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \ , \ \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC},$$

$$A'B' = AE,\ A'C' = AF \Rightarrow B'C' = EF$$

پس دو مثلث $A'B'C'$ و AEF در حالت سه ضلع هم‌نهشت هستند و اثبات کامل است. ■

هر چند این‌ها، اثبات‌های کاملاً جدیدی نیستند، ولی به هر حال از روشی متفاوت برخوردارند که نسبت به روش کتاب درسی کوتاه‌تر است.

منبع

هندسهٔ ۱، زهرا گویا، سهیلا غلام آزاد و...، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران، ۱۳۷۵.