نقدی بر نقد

محمد شیرچیان
دبیر ریاضی، ناحیه ۲ اصفهان

اشاره

در شماره ۱۱۵ مجله (بهار ۹۳) نقدی بر کتاب ریاضی ۲ به قلم آقای مهدی میرزافام منتشر شد. در ادامه، مطلب ارسالی یکی از خوانندگان مجله آمده است. نگارنده با بازتاب بر آن، راه‌حل کامل حالت سوم مسئله را نوشته و با تأکید بر درست بودن همه حالت‌ها، مسئله فصل ۷ را بدون ابهام دانسته است. لازم به یادآوری است که در نقد منتشر شده «برداشت‌های متفاوت ناشی از مشخص نشدن نوبت نشستن دانش‌آموزان» و روش‌های معلمان برای حل این مسئله موردنظر است و به اعتقاد نویسندهٔ نقد، «حل این مسئله، سخت و حداقل خارج از توان دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان است». آقای میرزافام ادعایی مبنی بر متفاوت بودن جواب در حالت‌های مختلف ندارد بلکه دشواری محاسبهٔ چنین مسئله‌ای را برای دانش‌آموزان مورد تأکید قرار داده که راه‌حل آقای شیرچیان تأییدی بر این دشواری است.

مجله رشد آموزش ریاضی ضمن تشکر از دقت‌نظر آقای شیرچیان و نقد ایشان بر نقد آقای میرزافام، از کلیهٔ خوانندگان محترم دعوت می‌نماید نقطه‌نظرات خود را پیرامون هریک از مقالات، نقدها، دیدگاه‌ها و ... برای مجله ارسال کنند.

مقدمه

همکار محترمی در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی (دورهٔ ۳۱ ـ بهار ۹۳) در صفحهٔ ۵۶، نقدی بر یک مسئله، از فصل ۷ کتاب ریاضی ۲ نوشته بودند. در نقدِ ایشان اشتباه محاسبه‌ای باعث شده بود که حالات مختلف مسئله را به چالش بکشد ... در حالی که با توضیحات زیر ثابت می‌کنیم که تمام حالات مختلف به یک جواب واحد منجر می‌شوند و آن مسئله هیچ‌گونه ابهامی ندارد.

.... قبل از ورود به مسئله توجه همکاران محترم را به این نکته جلب می‌کنم که اصولاً مسائل آنالیز ترکیبی بر سه دسته‌اند: جابه‌جایی‌ها، انتخابات، جابه‌جایی و انتخاب درهم. نکتهٔ بسیار مهم این است که جابه‌جایی و انتخابِ درهم همان مسئلهٔ ترتیب است، یعنی:

$$\binom{N}{R}\times R! = \frac{N!}{(N-R)!} = P_{(N,R)}$$

نکتهٔ قابل توجه دیگر این است که فرمول ترتیب، یعنی $P_{(N,R)}$ مربوط به یک حالت خاص بوده و اگر انتخاب مرکب باشد جواب‌گوی مسئله نخواهد بود. برای روشن شدن مطلب به دو مثال زیر توجه فرمائید:

مثال ۱: به چند طریق می‌توان یک کلمهٔ ۵ حرفی، بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنی با استفاده از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی تشکیل داد؟

حل: ابتدا ۵ حرف انتخاب و سپس جای آن‌ها را با هم عوض می‌کنیم یعنی:

$$\binom{۲۶}{۵}\times ۵! = P_{(۲۶,۵)}$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان، با استفاده از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی، یک کلمهٔ ۵ حرفی بدون تکرار حروف تشکیل داد، به‌طوری‌که کلیهٔ کلمات شامل دو حرف صدادار و سه حرف بی‌صدا باشند؟

حل: ابتدا دو حرف صدادار از بین ۵ حرف صدادار را انتخاب می‌کنیم؛ سپس سه حرف بی‌صدا از بین ۲۱ حرف بی‌صدا را انتخاب می‌کنیم و آنگاه جای این ۵ حرف را با هم عوض می‌کنیم؛ یعنی:

$$\binom{۵}{۲}\binom{۲۱}{۳}\times ۵!$$

به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود در مثال دوم انتخاب مرکب است (یعنی فقط یک گروه انتخاب نداریم و مسئله شامل دو گروه انتخاب می‌باشد و فرمول ترتیب به هیچ‌وجه جوابگو نیست)

بنابراین توصیه می‌شود برای دوری از اشتباه، انتخاب را جدا و جابه‌جائی را نیز جدا انجام داده و نتایج را طبق اصل ضرب (اصل شمارش) در هم ضرب کنیم.

باز برای دوری از اشتباه به افراز زیر توجه کنید:
۳ مهرۀ قرمز شماره‌دار و ۲ مهرۀ سفید شماره‌دار در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد و در کنار هم قرار داد؟ (مهره‌ها مختلف و شماره دارند)
(راه اوّل): ســه مهره انتخــاب و جای آن‌ها را با هم عوض می‌کنیم: یعنی:

$$\binom{۵}{۳}\times ۳! = P_{(۵,۳)} = ۶۰$$

(راه دوّم): مســئله را بــه حالت‌هــای مختلف افراز می‌کنیم:
(یکی قرمز و دو تا سفید) یا (دو تا قرمز و یک سفید) یا (هر سه مهره قرمز)

$$\left[\binom{۳}{۳}\times ۳!\right]+\left[\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۱}\times ۳!\right]+\left[\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۲}\times ۳!\right] = ۶۰$$

به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود جواب‌ها یکسان است ولی فرمول ترتیب جوابگوی راه دوم نیست.

اکنون به نقد مسئلۀ درج شده در مجله می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که کلیۀ حالات مطروحه به یک جواب واحد منتهی خواهند شد و هر حالت یک افراز از حالت اول است.

صورت مسئله: اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و هر ردیف شـامل ۱۰ صندلی باشد، مشخص کنید به چنــد طریق ۶ دانش‌آموز اولــی و ۳ دانش‌آموز دومی و ۴ دانش‌آمــوز ســومی می‌توانند روی آن‌ها بنشــینند به‌طوری‌کــه اولی‌ها در ردیــف اول و دومی‌ها در ردیف دوم باشند؟

راه اوّل: از ردیف اول ۶ صندلی انتخاب می‌کنیم و دانش‌آموزان اول را روی آن‌ها جابه‌جا می‌نماییم، سپس از ردیف دوم ۳ صندلی انتخاب می‌کنیم و دانش‌آموزان دوم را روی آن‌هــا جابه‌جا نموده، در آخر از ۱۱ صندلی باقی‌مانده ۴ صندلی انتخاب می‌کنیــم و دانش‌آموزان سوم را روی آن‌ها جابه‌جا می‌نماییم یعنی:

$$\left[\binom{۱۰}{۶}\times ۶!\right]\times\left[\binom{۱۰}{۳}\times ۳!\right]\times\left[\binom{۱۱}{۴}\times ۴!\right]$$
$$= P(۱۰,۶).P(۱۰,۳), P(۱۱,۴) = ۸۶۲/۲۰۲/۸۸۰/۰۰۰$$

(راه دوّم): ابتدا ۴ صندلی برای سومی‌ها سپس ۳ صندلــی برای دومی‌ها و در آخر ۶ صندلی برای اولی‌ها انتخاب می‌کنیم:
در اینجــا هم اولی‌ها حتماً در ردیف اول و دومی‌ها حتمــاً در ردیف دوم واقع می‌شــوند ولی ســومی‌ها به حالات مختلفی می‌توانند انتخاب داشته باشند (یعنی یک افراز برای سومی‌ها به قرار زیر)

حالت اول: هر ۴ نفر سومی در ردیف اول: $\binom{۱۰}{۴}\times ۴!$

حالا دوم: سه نفر ردیف اول و یکی در ردیف دوم: $\binom{۱۰}{۳}\times\binom{۱۰}{۱}\times ۴!$

حالت سوم: دو نفر ردیف اول و دو نفر ردیف دوم: $\binom{۱۰}{۲}\times\binom{۱۰}{۲}\times ۴!$

حالت چهارم: یک نفر ردیف اول و سه نفر ردیف دوم: $\binom{۱۰}{۱}\times\binom{۱۰}{۳}\times ۴!$

حالت پنجم: هر ۴ نفر سومی در ردیف دوم: $\binom{۱۰}{۴}\times ۴!$

$$+\left\{\begin{array}{l}\binom{۱۰}{۴}\times ۴!\\ \binom{۱۰}{۳}\times\binom{۱۰}{۱}\times ۴!\\ \binom{۱۰}{۲}\times\binom{۱۰}{۲}\times ۴!\\ \binom{۱۰}{۱}\times\binom{۱۰}{۳}\times ۴!\\ \binom{۱۰}{۴}\times ۴!\end{array}\right.$$

۱۱۶۲۸۰

جمع این پنج حالت مختلف مسئله برابر است با:

$$P(۲۰,۴) = ۱۱۶۲۸۰$$

بنابراین حالات مختلف مســئله به قــرار زیر افراز می‌شود:

$$+\left.\begin{array}{ll}\text{در حالت اوّل} & \left[\binom{۱}{۴}\times ۴!\right]\times P(۱۰,۳)\times P(۶,۶) = ۲۶۱۲۷۳۶۰۰۰\\ \text{در حالت دوّم} & \left[\binom{۱۰}{۳}\binom{۱۰}{۱}\times ۴!\right]\times P(۹,۳)\times P(۷,۶) = ۷۳۱۵۶۶۰۸۰۰۰\\ \text{در حالت سوّم} & \left[\binom{۱۰}{۲}\binom{۱۰}{۲}\times ۴!\right]\times P(۸,۳)\times P(۸,۶) = ۳۲۹۲۰۴۷۳۶۰۰۰\\ \text{در حالت چهارم} & \left[\binom{۱۰}{۱}\binom{۱۰}{۳}\times ۴!\right]\times P(۷,۳)\times P(۹,۶) = ۳۶۵۷۸۳۰۴۰۰۰۰\\ \text{در حالت پنجم} & \left[\binom{۱۰}{۴}\times ۴!\right]\times P(۶,۳)\times P(۱۰,۶) = ۹۱۴۴۵۷۶۰۰۰۰\end{array}\right\}$$

جمع حالات اول تا پنجم $= ۸۶۲۲۰۲۸۸۰۰۰۰$

به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود جواب‌ها یکسان است و به تقدم و تأخر دانش‌آموزان اول و دوم و سوم بستگی ندارد. بقیه حالاتی که در مجله به رشته تحریر درآمده اســت نیز به همین جواب منجر خواهد شــد (به‌دلیل مشابه) و هیچ ایرادی بر مسئله وارد نیست.