المپیاد ریاضی در بلژیک

هوشنگ شرقی

کلیدواژه‌ها: المپیاد ریاضی، بلژیک، اصل لانهٔ کبوتر، هفت ضلعی

مسابقه‌های ریاضی در بلژیک از دههٔ ۱۹۶۰ میلادی آغاز شده است. ابتدا همان پرسش‌های مسابقه‌های ریاضی دبیرستان‌های آمریکا در آنها مطرح می‌شد، اما از سال ۱۹۷۶، کشور بلژیک المپیاد ریاضی خاص خودش را سازمان‌دهی کرد و از سال ۱۹۸۲، این مسابقات در سه مرحله (دبیرستان، نیمه نهایی و نهایی) برگزار شده‌اند. مرحلهٔ نخست آزمون با پرسش‌های چندگزینه‌ای برگزار می‌شود که به نسبت سؤال‌های المپیادی رایج، آسان هستند، ولی گاهی هم پرسش‌های قابل تأمل و نسبتاً خوبی مانند این نمونه در آنها مطرح می‌شود:

- در ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین، هر یک از دو ساق و قاعدهٔ کوچک به طول ثابت L هستند. مساحت این ذوزنقه آن‌گاه ماکزیمم است که اندازهٔ زاویهٔ بین قاعدهٔ بزرگ و یک ساق آن برحسب رادیان برابر باشد با:

الف) $\frac{\pi}{۳}$ ب) $\frac{\pi}{۴}$ ج) $\frac{\pi}{۵}$ د) $\frac{\pi}{۶}$

اما پرسش‌های مرحلهٔ نهایی، مسائل قابل اعتنایی هستند و ما در اینجا تعدادی از آنها را همراه با راه‌حل‌هایشان می‌آوریم. لازم به ذکر است که همهٔ این مسائل از کتاب «المپیادهای ریاضی بلژیک»، ترجمهٔ استاد گران‌قدر، آقای **عبدالحسین مصحفی** ـ انتشارات فاطمی ـ برگرفته شده‌اند، اما راه‌حل مسائل در کتاب نیامده و همهٔ راه‌حل‌ها از نگارنده است.

صورت مسائل

۱. ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی x داریم:
$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ (۱۹۷۶).

۲. ساکنان دهکدهٔ کوچک «دوران پون» را دو خانواده تشکیل می‌دهند: دوران‌ها و دوپون‌ها. دوران‌ها همواره راست می‌گویند و دوپون‌ها همواره دروغ. مسافری در خیابان اصلی این دهکده چهار نفر از ساکنان را ملاقات می‌کند و از آنها می‌پرسد که آیا دوران هستند یا دوپون.

اولین نفر پاسخ می‌دهد: «همهٔ ما دوپون هستیم.»

دومین نفر می‌گوید: «نه این‌طور نیست، فقط یکی از ما دوپون است.»

آنگاه سومین نفر اظهار می‌دارد: «گفته‌های آنها را باور نکنید. بین ما دقیقاً دو دوپون وجود دارد.»

اما نفر چهارم فقط می‌گوید: «من دوران هستم.»

آیا این نفر چهارم واقعاً یک دوران است؟ (۱۹۷۷)

۳. a، b و c سه عدد طبیعی هستند. اگر به ازای هر عدد طبیعی n، مثلثی وجود داشته باشد که a^n، b^n و c^n اندازه‌های ضلع‌های آن باشند، ثابت کنید که همهٔ این مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند (۱۹۷۷).

۴. کدام عددهای طبیعی هستند که در تقسیم آنها بر ۲، ۳ و ۵، باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۱، ۲ و ۴ می‌شوند؟ (۱۹۷۸)

۵. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، چند جمله‌ای $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ بر x^2+x+1 بخش‌پذیر است (۱۹۸۱).

۶. فرض کنید هر نقطهٔ صفحه به یکی از دو رنگ آبی یا قرمز باشد. آیا الزاماً مثلثی متساوی‌الاضلاع در صفحه وجود خواهد داشت که سه رأس آن از یک رنگ باشند؟ (۱۹۸۴)

۷. نقطه‌های A، B، C و D چهار رأس متوالی یک چندضلعی منتظم هستند. هرگاه $\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$ باشد، تعداد ضلع‌های این چندضلعی را مشخص کنید (۱۹۸۷).

حل مسائل

۱. مسئله را به روش استدلال بازگشتی حل می‌کنیم. با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ می‌نویسیم:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)>\sin(\cos x)$$

حال اگر انتهای کمان x در ناحیه‌های دوم و سوم باشد، $\cos x<0$ و در نتیجه: $\sin(\cos x)<0$. ولی چون $\sin x\le 1$، پس: $\frac{\pi}{2}-\sin x>0$ و در نتیجه: $\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)>0$ و لذا:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)>\sin(\cos x)$$

اما اگر انتهای کمان x در نواحی اول و چهارم باشد، در این نواحی $\cos x>0$ و تابع سینوس یک تابع صعودی است. پس از نابرابری فوق نتیجه می‌شود: $\frac{\pi}{2}-\sin x>\cos x$ و در نتیجه

$$\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}$$

اما می‌دانیم:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2}\le \sin x+\cos x\le\sqrt{2}$$

و بنابراین: $\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه حکم قابل اثبات است. استدلال اصلی را خودتان انجام دهید.

۲. بله او واقعاً دوران است، زیرا:

- اولین نفر به یقین دروغ می‌گوید، چون اگر راست‌گو باشد، طبق گفتهٔ خودش باید هر چهار نفر دوپون باشند و دروغ بگویند و این تناقض به‌وجود می‌آورد.
- نفر سوم یا راست می‌گوید یا دروغ. اگر او راست بگوید، آن‌گاه دقیقاً دو نفر دوپون هستند. در نتیجه نفر دوم دروغ‌گو (و دوپون) است و لذا نفرات سوم و چهارم هر دو راست‌گو هستند. اما اگر او دروغ بگوید، آن‌گاه جملهٔ او دروغ است. در نتیجه در آن جمع بیشتر از دو نفر دروغ‌گویند و لذا نفر دوم هم دروغ‌گوست. پس نفرات اول، دوم و سوم هر سه دوپون هستند. و چون نفر اول دروغ‌گوست، پس همهٔ آنها دوپون نیستند و در نتیجه نفر چهارم دوران است. پس در هر صورت نفر چهارم دوران است.

۳. بدون آنکه به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم: $a\ge b\ge c$. اگر یکی از این مثلث‌ها متساوی‌الساقین نباشد، به ازای این یک مثلث خواهیم داشت: $a>b>c$ و در نتیجه به ازای هر عدد طبیعی n هم خواهیم داشت: $a^n>b^n>c^n$. اما اگر $a\ge 2b$ باشد، چون $b+c>a$ است، پس: $b+c\ge 2b$ و یا: $c\ge b$ که تناقض است (زیرا $b>c$). پس باید $a<2b$ و از آنجا که به ازای هر عدد طبیعی n، a^n، b^n و c^n اضلاع مثلثی هستند، پس با همین استدلال خواهیم داشت:

$$b^n<a^n<2b^n$$

و در نتیجه:

$$b<a<\sqrt[n]{2}.b$$

اما چون a و b عددهای طبیعی هستند و $\sqrt[n]{2}$ با زیادشدن n مرتباً کوچک‌تر می‌شود، پس ممکن نیست که نابرابری فوق به ازای هر عدد طبیعی n برقرار باشد (زیرا بین b و $\sqrt[n]{2}.b$ هیچ عدد طبیعی وجود نخواهد داشت). پس لازم است که لااقل دو تا از این عددها با هم مساوی باشند و در نتیجه همهٔ این مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند.

۴. اگر این عدد را a بنامیم، طبق فرض مسئله داریم:

$$a=2m+1=3n+2=5p+4$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$m=\frac{3n+1}{2}=n+\frac{n+1}{2}\Rightarrow n+1=2k\Rightarrow n=2k-1$$

$$\Rightarrow 5p+4=3(2k-1)+2=6k-3+2=6k-1$$

$$\Rightarrow 5p=6k-5\Rightarrow p=\frac{6k}{5}-1\Rightarrow k=5k'$$

$$\Rightarrow p=6k'-1\Rightarrow a=5(6k'-1)+4\Rightarrow a=30k'-1$$

یعنی این عددها به فرم $30k'-1$ هستند (عددهایی که در تقسیم بر ۳۰، باقی‌ماندهٔ ۲۹ دارند)؛ مانند ۲۹، ۵۹ و...

۵. از قضیهٔ استقرای ریاضی کمک می‌گیریم:

$$n=1:(x+1)^3+x^3=2x^3+3x^2+3x+1$$

$$=2x^3+2x^2+2x+x^2+x+1=2x(x^2+x+1)$$

$$+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(2x+1)$$

فرض:

$$n=k:(x+1)^{2k+1}+x^{k+2}=P(x).(x^2+x+1)$$

حکم:

$$n=k+1:(x+1)^{2k+3}+x^{k+3}=Q(x).(x^2+x+1)$$

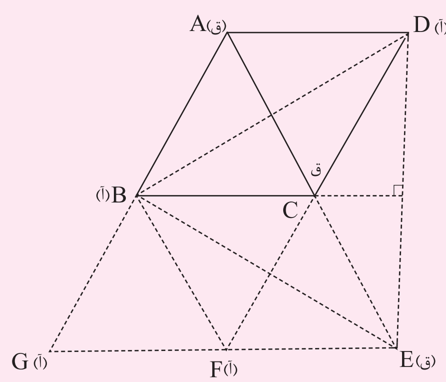
با توجه به فرض استقرا داریم:

$$(x+1)^{2k+1}=P(x)(x^2+x+1)-x^{k+2}$$

و با جای‌گذاری در حکم خواهیم داشت:

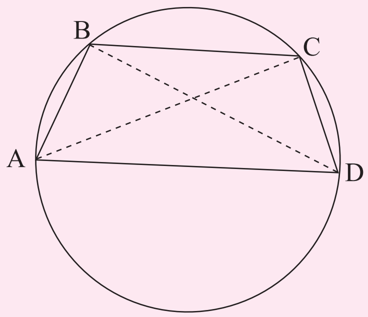
$$(x+1)^{2k+3}+x^{k+3}=[P(x)(x^2+x+1)-x^{k+2}](x+1)^2$$
$$+x^{k+3}=P(x)(x^2+x+1)(x+1)^2-x^{k+2}((x+1)^2-x)$$
$$=P(x)(x^2+x+1)(x+1)^2-x^{k+2}(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)[(x+1)^2P(x)-x^{k+2}]=Q(x)(x^2+x+1)$$

۶. این مسئلهٔ جالبی است. بدیهی است که طبق اصل لانهٔ کبوتر، لااقل دو رأس از رئوس هر مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌رنگ خواهند بود. فرض می‌کنیم دو رأس از رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرمز رنگ باشند؛ مثلاً رئوس A و C از مثلث ABC در شکل که با حرف ق مشخص شده‌اند. اگر رأس B هم قرمز باشد، مثلثی وجود دارد که سه رأس آن هم‌رنگ هستند. پس فرض می‌کنیم این رأس آبی رنگ باشد. حال مثلث متساوی‌الاضلاع ACD را بنا می‌کنیم و با همان استدلال رأس D هم باید آبی باشد.



از D بر امتداد BC عمودی رسم می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا امتداد AC را در E قطع کند. مثلث CDE متساوی‌الساقین است (چرا؟) و داریم: $CF=CE=CD$. چون زوایای مثلث DBE 60° هستند، پس این مثلث هم متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه E نمی‌تواند آبی باشد و قرمز است. بنابراین در مثلث متساوی‌الاضلاع CEF، F هم نمی‌تواند قرمز باشد و آبی است. با توجه به مثلث متساوی‌الاضلاع AEG، G هم باید آبی باشد و از آنجا در مثلث متساوی‌الاضلاع BFG هر سه رأس آبی هستند. پس در هر حال مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود دارد که سه رأس آن هم‌رنگ هستند.

۷. اگر AB ضلع یک n ضلعی باشد، به کمک دستور محاسبهٔ ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R داریم:



$AB=2R\sin\frac{180}{n}$. همچنین، طول قطر AC را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{B}=180-(B\hat{A}C+B\hat{C}A)=180-2B\hat{A}C$$
$$=180-\widehat{BC}=180-\frac{360}{n}$$
$$\Rightarrow AC=2R\sin B=2R\sin\frac{360}{n}$$

و به همین ترتیب داریم: $AD=2R\sin\frac{540}{n}$ و با فرض $\frac{180}{n}=\alpha$ و فرض مسئله داریم:

$$\frac{1}{2R\sin\alpha}=\frac{1}{2R\sin2\alpha}+\frac{1}{2R\sin3\alpha}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin2\alpha}+\frac{1}{\sin3\alpha}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sin3\alpha+\sin2\alpha}{\sin2\alpha\sin3\alpha}$$
$$\Rightarrow\sin3\alpha+\sin2\alpha=\frac{\cos5\alpha-\cos\alpha}{-2\sin\alpha}$$
$$\Rightarrow\cos5\alpha-\cos\alpha=-2\sin\alpha\sin3\alpha-2\sin\alpha\sin2\alpha$$
$$\Rightarrow\cos5\alpha-\cos\alpha=\cos4\alpha-\cos2\alpha+\cos3\alpha-\cos$$
$$\Rightarrow\cos5\alpha-\cos4\alpha=\cos3\alpha-\cos2\alpha$$
$$\Rightarrow-2\sin\frac{9\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=-2\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$\Rightarrow\sin\frac{9\alpha}{2}=\sin\frac{5\alpha}{2}\Rightarrow\frac{9\alpha}{2}=\frac{5\alpha}{2}$$ و (غ ق ق)
$$\frac{9\alpha}{2}=\pi-\frac{5\alpha}{2}\Rightarrow7\alpha=\pi,\alpha=\frac{\pi}{7}$$
$$\Rightarrow\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{7}\Rightarrow n=7$$

یعنی چندضلعی فوق باید هفت ضلعی منتظم باشد.