رویکرد هندسی-رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۲)

محمد هاشم رستمی

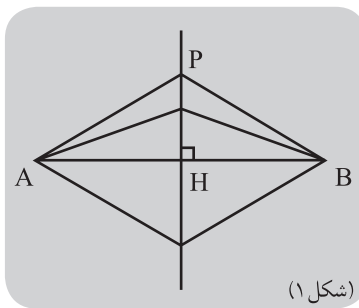
کلید واژه‌ها: عمود منصف پاره‌خط، نیم‌ساز، مکان هندسی.

به منظور استفاده‌ی عده‌ی بیشتری از دانش‌آموزان از این رویکرد در حل مسئله‌های هندسه، به ارتباط این دو رویکرد در حل مسئله‌های هندسه در صفحه می‌پردازیم. به‌این ترتیب با دستگاه مختصات دکارتی در صفحه سروکار خواهیم داشت.

ویژگی‌های عمود منصف یک پاره‌خط در یک صفحه

قضیه: ثابت کنید عمود منصف هر پاره‌خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله قرار دارد.

یعنی:



(شکل ۱)

۱. هر نقطه‌ای که روی عمود منصف این پاره‌خط باشد، از دو سر این پاره‌خط به یک فاصله است.

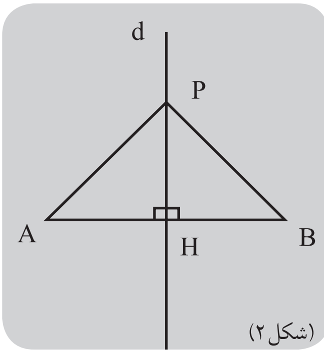
۲. هر نقطه‌ای که از دو سر این پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف این پاره‌خط قرار دارد.

این قضیه را با دو روش هندسی و جبری ـ مختصاتی ثابت می‌کنیم.

الف) اثبات به روش هندسی

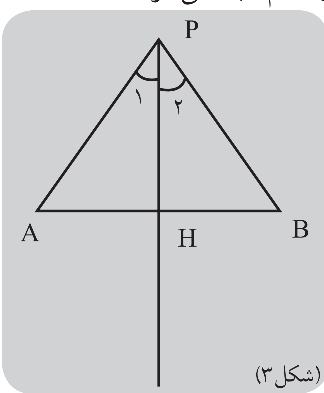
۱. عمود منصف پاره‌خط AB را d و نقطه‌ی برخورد آن با پاره‌خط AB را که در واقع همان وسط پاره‌خط AB است، H می‌نامیم. از نقطه‌ی دل‌خواه P واقع بر خط d (عمود منصف پاره‌خط AB)، به دو نقطه‌ی A و B وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که: PA= PB. دو مثلث PAH و PBH همنهشت‌اند، زیرا داریم:

$$\begin{cases} AH = BH \\ PH = PH \\ P\hat{H}A = P\hat{H}B = 90^\circ \end{cases}$$



(شکل ۲)

بنابراین ضلع‌های سوم این دو مثلث با هم برابرند؛ یعنی: PA=PB و حکم ثابت می‌شود.



(شکل ۳)

۲. نقطه‌ی P و پاره‌خط AB در یک صفحه چنان واقع‌اند که داریم: PA=PB. می‌خواهیم ثابت کنیم که نقطه‌ی P روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. برای اثبات نیم‌ساز زاویه‌ی درونی از مثلث PAB را رسم می‌کنیم و پای این نیم‌ساز را H می‌نامیم. دو مثلث PHA و PHB به حالت (ض‌زض) همنهشت هستند، زیرا داریم:

$$\begin{cases} PA = PB \\ A\hat{P}H = B\hat{P}H \qquad \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \\ PH = PH \end{cases}$$

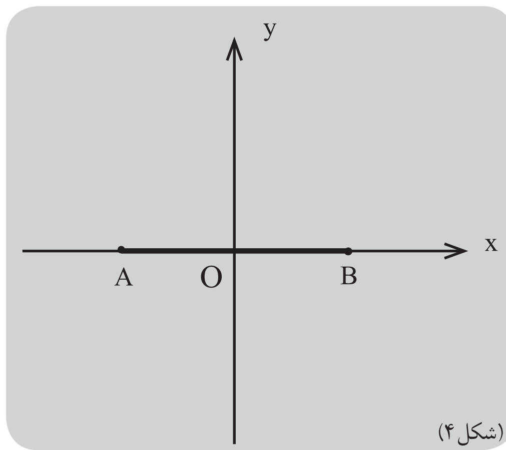
در نتیجه AH=BH . یعنی H وسط پاره‌خط AB است. از طرف دیگر: $A\hat{H}P = B\hat{H}P$ که چون $A\hat{H}P + B\hat{H}P = 180^\circ$ است، پس: $A\hat{H}P = B\hat{H}P = 90^\circ$. یعنی PH بر AB عمود است. در نتیجه PH عمودمنصف پاره‌خط AB و حکم مسئله درست است.

ب) راه حل جبری ـ مختصاتی

صورت مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

قضیه: ثابت کنید عمود منصف هر پاره‌خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

اثبات: اندازه‌ی پاره‌خط AB را 2a فرض می‌کنیم. مهم‌ترین کار در روش حل جبری ـ مختصاتی انتخاب دستگاه مختصات مناسبی است که راه حل مسئله را به ساده‌ترین صورت، ممکن سازد.



(شکل ۴)

در این مسئله، محور xها را روی خط AB و محور yها را روی عمودمنصف پاره‌خط AB اختیار می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد این دو محور نقطه‌ی o (که همان نقطه‌ی H در راه حل هندسی است)، مبدأ مختصات است. نقطه‌ی دل‌خواه P را روی عمودمنصف پاره‌خط AB که در این‌جا همان محور yهاست، اختیار می‌کنیم و مختصات این نقطه را $P = (0, y)$ در نظر می‌گیریم. از P به A و B وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم، برای هر نقطه‌ی P از عمودمنصف پاره‌خط AB داریم: PA=PB. با توجه به این‌که در این دستگاه مختصات قائم $A = (-a, 0)$ و $B = (a, 0)$ است، داریم:

$$PA = PB \Rightarrow \sqrt{(-a-0)^2 + (0-y)^2}$$
$$= \sqrt{(a-0)^2 + (0-y)^2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + y^2} \Rightarrow a^2 + y^2 = a^2 + y^2$$

این تساوی همواره برقرار است. بنابراین همواره PA=PB است. پس هر نقطه واقع بر عمودمنصف پاره‌خط AB از دوسر این پاره‌خط، یعنی از دو نقطه‌ی A و B، به یک فاصله است.

اکنون ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف این پاره‌خط واقع است. بدین ترتیب که اگر P=(x , y) نقطه‌ای واقع درصفحه‌ی مختصات قائم ذکر شده در بالا باشد و از دو سر پاره‌خط AB($A = (-a, 0)$ و $B = (a, 0)$) به یک فاصله باشد، خواهیم داشت:

$$P = (x, y),\ A = (-a, 0),\ B = (a, 0),\ PA = PB$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$
$$\Rightarrow (x+a)^2 + \cancel{y^2} = (x-a)^2 + \cancel{y^2}$$
$$\Rightarrow (x+a)^2 - (x-a)^2 = 0$$
$$\Rightarrow 4ax = 0,\ a \neq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow p = (0, y)$$

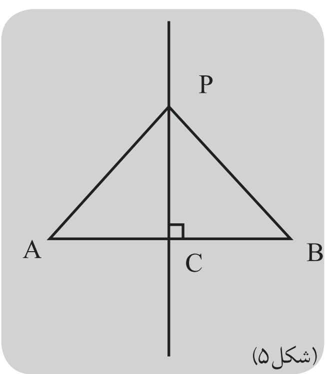
یعنی نقطه‌ی P روی محور yها واقع است که همان عمودمنصف پاره‌خط AB محسوب می‌شود. بنابراین، به روش تحلیلی نیز ثابت کردیم که عمودمنصف هر پاره‌خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است؛ زیرا:

الف) هر نقطه مانند P که روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است؛ یعنی PA=PB.

ب) هر نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد (یعنی PA=PB)، روی عمودمنصف پاره‌خط AB است.

نکته: به طوری‌که دیده می‌شود، اثبات این قضیه به‌روش جبری ـ مختصاتی، ساده‌تر از اثبات آن به روش هندسی است. اینک به چند مثال توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید هر نقطه مانند P روی عمودمنصف پاره‌خط AB، از نقاط A و B به یک فاصه است (مسئله‌ی ۱۹ صفحه‌ی ۲۷ کتاب هندسه‌ی ۱).



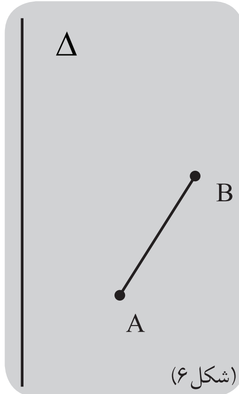
(شکل ۵)

حل: این مثال قسمت اول مسئله‌ی ابتدای مقاله است که با دو روش هندسی و جبری ـ مختصاتی حل شده است.

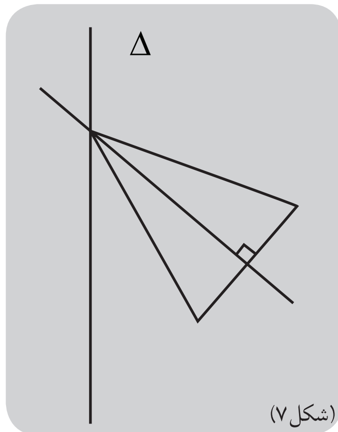
مثال ۲. دو نقطه‌ی A و B و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند، نقطه‌ای روی خط Δ بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.

حل: الف) رویکرد هندسی

می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است، عمودمنصف آن پاره‌خط است. بنابراین نقطه‌ی جواب مسئله، هم باید روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد و هم باید روی خط Δ باشد. پس این نقطه محل برخورد این دو خط است، در نتیجه، برای حل مسئله عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و آن را d می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد خط d با خط Δ که آن را Mمی‌نامیم، جواب مسئله است. یعنی اگر از M به A و B وصل کنیم، داریم: MA=MB.



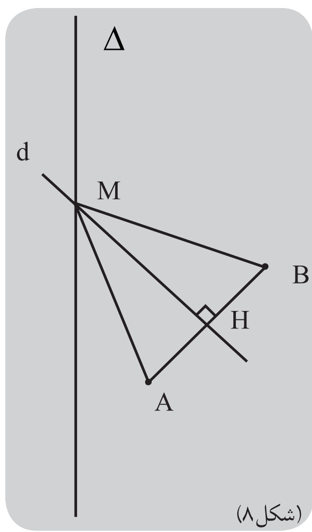
(شکل ۶)



(شکل ۷)

بحث در تعداد جواب مسئله

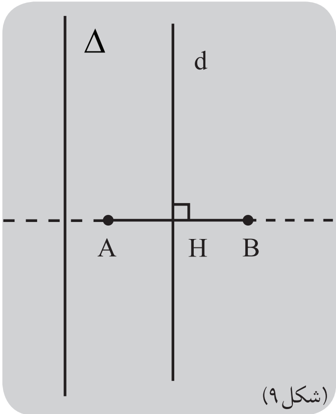
۱. اگر خط dعمودمنصف پاره‌خط AB، با خط Δ متقاطع باشد، مسئله تنها یک جواب دارد که همان نقطه‌ی M است. این در صورتی است که راستای خط AB عمود بر راستای Δ نباشد (شکل ۸). به بیان دیگر، اگر خط AB خط Δ را قطع کند و بر آن عمود هم نباشد.



(شکل ۸)

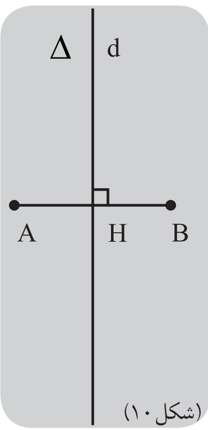
۲. اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB، موازی خط Δ باشد، مسئله جواب ندارد. این در صورتی است که راستای خط AB بر خط Δ عمود باشد (شکل ۹).

نکته: در این‌حالت راستای AB راستای Δ را قطع می‌کند، اما دو راستا بر هم عمودند.



(شکل ۹)

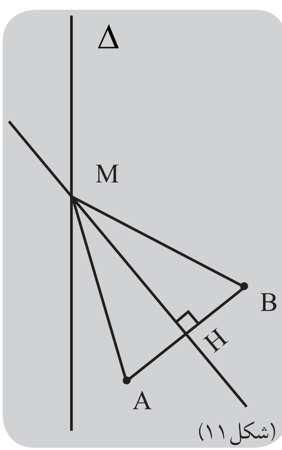
۳. اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB منطبق بر خط Δ باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد. زیرا هر نقطه از خط Δ که همان خط d است، جواب مسئله محسوب می‌شود (شکل ۱۰). البته این در صورتی است که خود خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB باشد.



(شکل ۱۰)

روشی‌دیگر برای حل هندسی مثال ۲

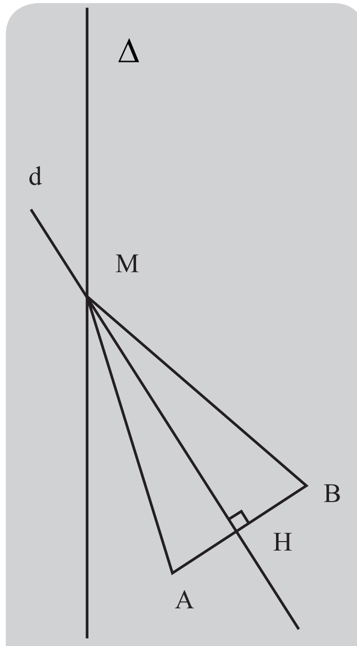
مسئله را حل شده فرض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی M، نقطه‌ی جواب مسئله باشد؛ یعنی نقطه‌ای باشد که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است (MA=MB). چون مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه‌ی A و B به‌یک فاصله هستند، خط عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس نقطه‌ی M یکی از نقطه‌های عمودمنصف پاره‌خط AB است. یعنی عمودمنصف پاره‌خط AB از این نقطه می‌گذرد. به‌عبارت دیگر، نقطه‌ی M محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط Δ است.



(شکل ۱۱)

از این‌جا روش حل مسئله مشخص می‌شود. بدین‌ترتیب که برای تعیین نقطه‌ی M، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و آن را

d می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد این خط و خط Δ را نقطه‌ی M می‌نامیم که این نقطه جواب مسئله است. زیرا اگر از این نقطه به A و B وصل کنیم، داریم: MA=MB. بحث مربوط به تعداد جواب برای مسئله همانند بحث روش قبلی است.



(شکل۱۲)

نکته: روش مسأله را حل شده فرض‌کردن: یکی از راهبردهای مهم در حل مسئله‌ها، به‌ویژه حل مسئله‌های هندسه و به‌ویژه در مواردی است که حل کردن مسئله با داده‌های موجود آسان نباشد و به داده‌های بیشتری نیاز داشته باشیم. تا به کمک آن‌ها بتوانیم مسئله را حل کنیم؛ برای مثال:

«مثلثی رسم کنید که اندازه‌ی سه میانه‌ی آن داده شده است.»

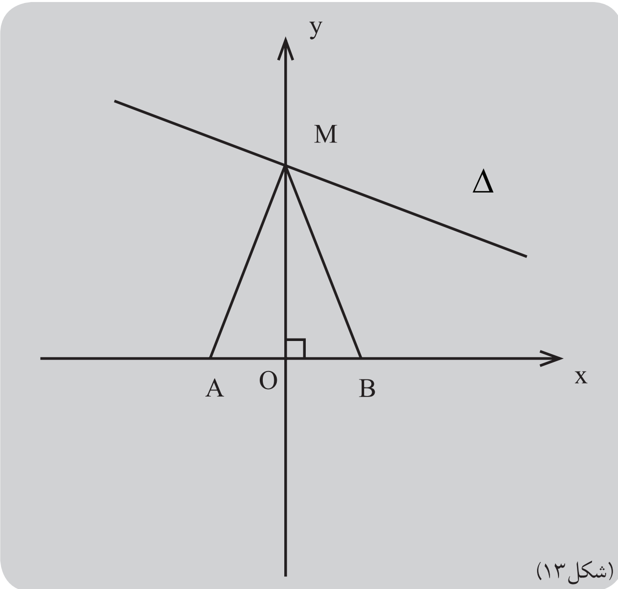
حل این مسئله و مسئله‌های مشابه دیگری که با این روش حل می‌شوند، در جلدهای ۱۱، ۱۲ و ۱۳ دایرة‌المعارف که به رسم شکل‌های هندسی با روش هندسی اختصاص دارند، وجود دارد.

ب) حل با رویکرد جبری ـ مختصاتی

مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

دو نقطه‌ی A و B و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند، نقطه‌ای روی خط Δ بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.

برای اثبات، دستگاه مختصات قائم xoy را در صفحه‌ای که A و B و خط Δ قرار دارد، به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که محور xها روی خط AB و مبدأ مختصات وسط پاره‌خط AB باشد، در این دستگاه مختصات، اگر $A=(x_1, 0)$ و $B=(-x_1, 0)$ اختیار شود، معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB ـ که در واقع محور yهاست ـ عبارت است از: $x=0$ معادله‌ی خط Δ در این دستگاه مختصات به‌صورت کلی $ax+by+c=0$ خواهد بود. در این صورت، مختصات نقطه‌ی M که محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط Δ است، از دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی زیر به‌دست می‌آید.



(شکل۱۳)

$$\begin{cases} x=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases} \Rightarrow by+c=0$$

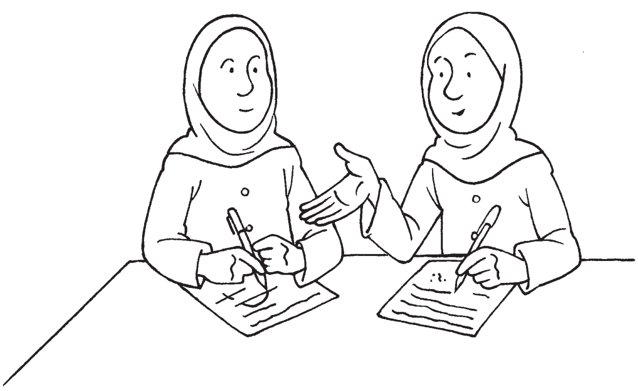
$$\Rightarrow y=-\frac{c}{b} \Rightarrow M=(0, -\frac{c}{b})$$

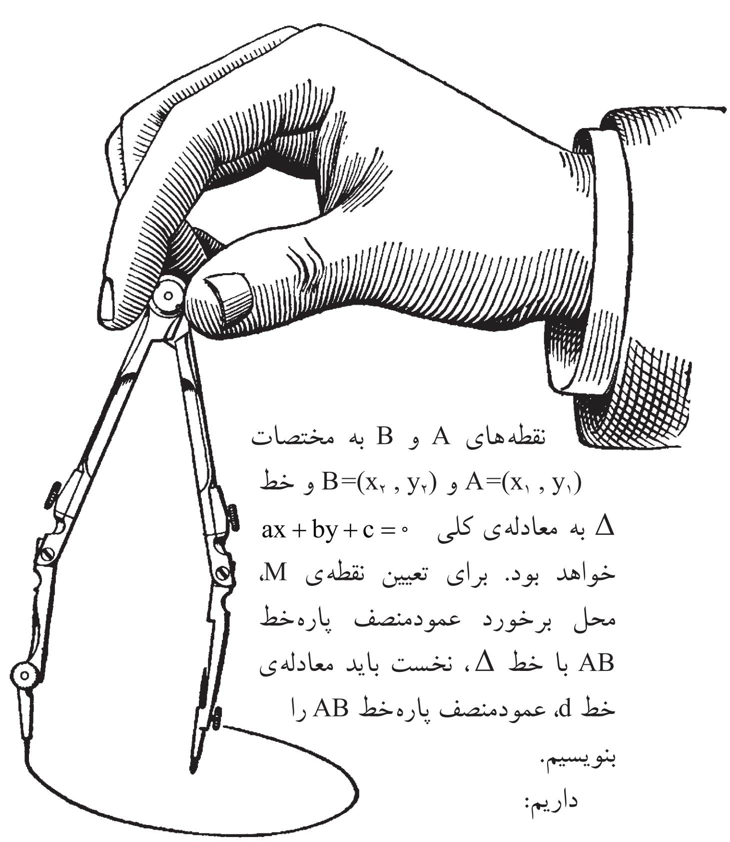
این نقطه که نقطه‌ای از خط Δ است،از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است؛ زیرا داریم: $M=(0, -\frac{c}{b}), A=(x_1, 0), B=(-x_1, 0)$

$$\Rightarrow MA=\sqrt{x_1^2+\frac{c^2}{b^2}}, MB=\sqrt{x_1^2+\frac{c^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow MA=MB$$

نکته: اگر دستگاه مختصات قائم xoy درصفحه‌ی گذرنده بر A و B و Δ را به‌صورت دل‌خواه در نظر بگیریم، حل مسئله با رویکرد جبری ـ مختصاتی مشکل‌تر خواهد شد. زیرا در این صورت





نقطه‌های A و B به مختصات $A=(x_1 , y_1)$ و $B=(x_2 , y_2)$ و خط Δ به معادله‌ی کلی $ax+by+c=0$ خواهد بود. برای تعیین نقطه‌ی M، محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB با خط Δ، نخست باید معادله‌ی خط d، عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسیم.

داریم:

$$m/AB=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m/d=-\frac{1}{m_{AB}}=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$

وسط پاره‌خط AB $H=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}),\ y-y_1=m(x-x_1)$

$$\Rightarrow d: y-\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(x-\frac{x_1+x_2}{2})$$

معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB

اکنون باید پاسخ دستگاه دومعادله‌ی دو مجهولی زیر را که همان نقطه‌ی M جواب مسئله است، به‌دست آوریم.

$$\begin{cases}\Delta: ax+by+c=0\\ d: y-\frac{y_1-y_2}{2}=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(x-\frac{x_1+x_2}{2})\end{cases}$$
$$\Rightarrow M=(\cdots,\cdots)$$

این مطلب را با یک مثال نشان می‌دهیم:

مثال: نقطه‌ای روی خط $\Delta: 2x+y+1=0$ به‌دست آورید که از دو نقطه‌ی $A=(3,-1)$ و $B=(1 , 5)$ به یک فاصله باشند.

حل: عمودمنصف پاره‌خط AB را d می‌نامیم و معادله‌ی آن را می‌نویسیم. آن‌گاه مختصات نقطه‌ی برخورد خط d و خط Δ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$A=(3,-1), B=(1,5), m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5+1}{1-3}=-3\Rightarrow m_d=\frac{-1}{m_{AB}}=\frac{1}{3}\quad ,$$

وسط پاره‌خط AB

$$H=(\frac{3+1}{2},\frac{-1+5}{2})=(2,2)\Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-2=\frac{1}{3}(x-2)\Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB

$$\begin{cases}d: y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\\ \Delta: 2x+y+1=0\end{cases}\Rightarrow 2x+\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}+1=0$$
$$\Rightarrow\frac{7}{3}x=-\frac{7}{3}\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=1\Rightarrow M=(-1,1)$$

جواب مسئله

درستی جواب مسئله را می‌توان با محاسبه‌ی اندازه‌ی پاره‌خط‌های MA و MB و مساوی بودن آن‌ها مشخص کرد.

$$A=(3,-1)\quad ,\quad B=(1,5)\quad ,\quad M=(-1,1)$$
$$\Rightarrow MA=\sqrt{(3+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$MB=\sqrt{(1+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow MA=MB=2\sqrt{5}$$

پس نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است.

ادب ریاضی

نقطه..

۱. آن‌چه در هیچ جهتی قابل تقسیم نیست، اما دارای موقعیتی است.

(ارسطو، قرن چهارم قبل از میلاد)

۲. نقطه چیزی است که دارای هیچ جزئی نیست. حد خط نقطه است.

(اقلیدوس، قرن سوم قبل از میلاد)

۳. وجود یک اتم برای تحقق یافتن یک نقطه‌ی ریاضی کفایت می‌کند.

(کوشی ۱۸۳۲)

۴. نقطه: مفهوم است و تعریف‌نشدنی است.