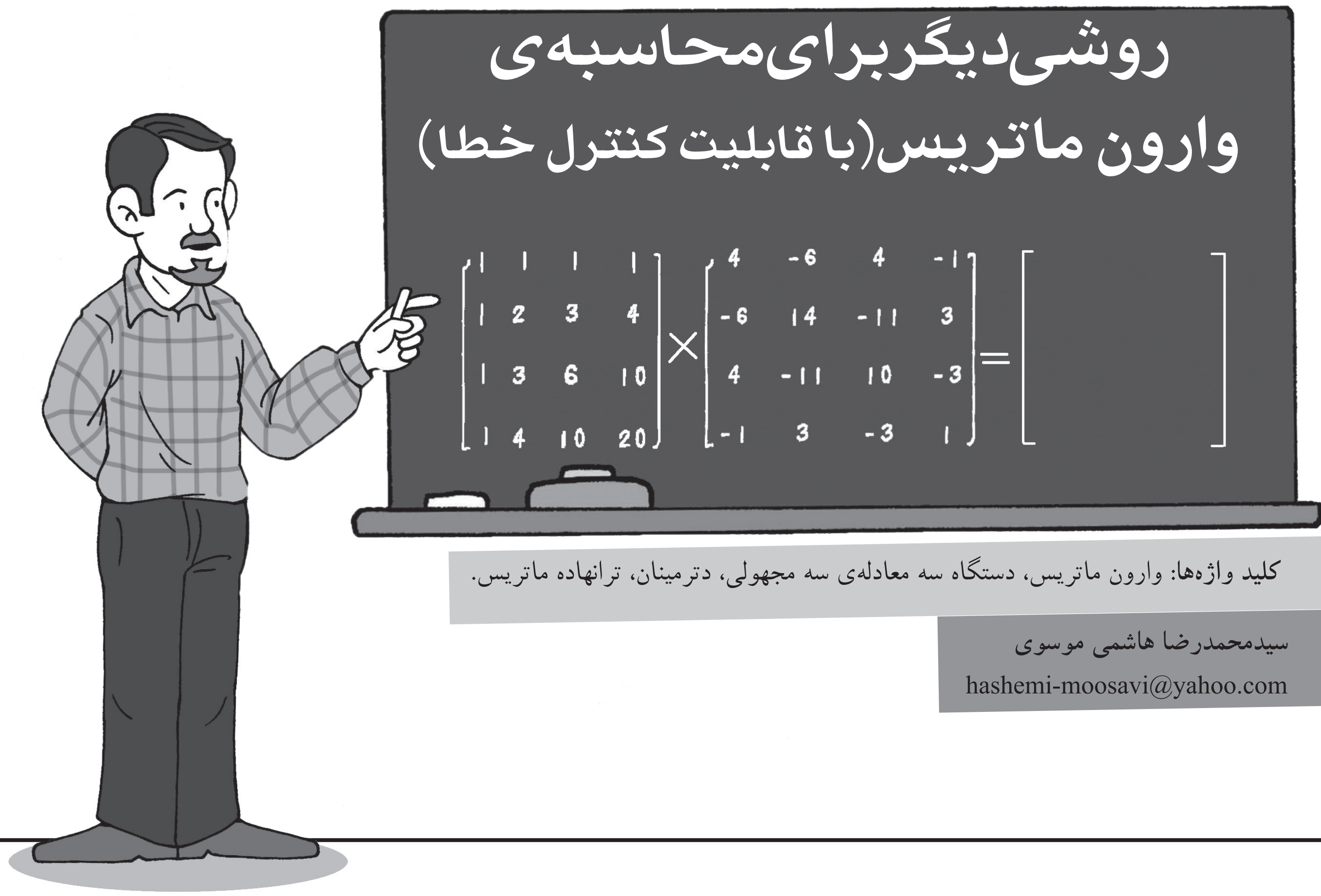


کلید واژه‌ها: وارون ماتریس، دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی، دترمینان، ترانهاده ماتریس.

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

hashemi-moosavi@yahoo.com

مقاله را با ارائه‌ی روش محاسبه و اثبات وارون ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$$

آغاز می‌کنیم. همان‌طور که می‌دانیم، وارون ماتریس A را با نماد A^{-1} نمایش می‌دهیم و شرط لازم و کافی برای این‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد، این است که دترمینان A مخالف صفر باشد ($|A|\neq 0$). هم‌چنین می‌دانیم، حاصل‌ضرب وارون A در خودش، ماتریس مربع واحد مرتبه‌ی سوم می‌شود:

$$A^{-1}\times A=I_3$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

از ضرب وارون A در A^{-1} و متحد قرار دادن ماتریس حاصل و ماتریس مربع واحد مرتبه‌ی سوم، سه دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی برحسب درایه‌های مجهول A^{-1} به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

از تساوی دو ماتریس اخیر سه دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی به شکل زیر حاصل می‌شود، یعنی:

$$\begin{bmatrix}a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1 & b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1 & c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1\\ a_1x_2+a_2y_2+a_3z_2 & b_1x_2+b_2y_2+b_3z_2 & c_1x_2+c_2y_2+c_3z_2\\ a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3 & b_1x_3+b_2y_3+b_3z_3 & c_1x_3+c_2y_3+c_3z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

دستگاه (۱)
$$\begin{cases}a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1=1\\ b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1=0\\ c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1=0\end{cases}$$

دستگاه (۲)
$$\begin{cases}a_1x_2+a_2y_2+a_3z_2=0\\ b_1x_2+b_2y_2+b_3z_2=1\\ c_1x_2+c_2y_2+c_3z_2=0\end{cases}$$

دستگاه (۳)
$$\begin{cases}a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3=0\\ b_1x_3+b_2y_3+b_3z_3=0\\ c_1x_3+c_2y_3+c_3z_3=1\end{cases}$$

بدیهی است، در این‌جا از حل سه دستگاه فوق، درایه‌های ماتریس A^{-1} به‌دست می‌آیند. اکنون سه دستگاه را در یک سیستم حل می‌کنیم

	x_i	y_i	z_i	k_1	k_2	k_3	$\sum c$
(مرحله‌ی ۱)	a_1	a_2	a_3	۱	۰	۰	$a_1+a_2+a_3+1=\delta_1$
	b_1	b_2	b_3	۰	۱	۰	$b_1+b_2+b_3+1=\delta_2$
	c_1	c_2	c_3	۰	۰	۱	$c_1+c_2+c_3+1=\delta_3$
(مرحله‌ی ۲)	$\underbrace{a_1b_2-a_2b_1}_{A_1}$		$\underbrace{a_1b_3-a_3b_1}_{A_2}$	$-b_1$	a_1	۰	$a_1\delta_2-b_1\delta_1=\delta_4$
	$\underbrace{b_1c_2-b_2c_1}_{B_1}$		$\underbrace{b_1c_3-b_3c_1}_{B_1}$	۰	$-c_1$	b_1	$b_1\delta_3-c_1\delta_2=\delta_5$
(مرحله‌ی ۳)	$D=A_1B_2-A_2B_1$ **$D\neq 0$** شرط لازم و کافی برای وجود وارون			$\underbrace{b_1B_1}_{S_1}$	$\underbrace{-(A_1c_1+a_1B_1)}_{S_2}$	$\underbrace{A_1b_1}_{S_3}$	$A_1\delta_5-B_1\delta_4=\delta_6$

تذکر ۱. ستون Σc برای کنترل هر سطر است و مقدار آن همیشه برابر مجموع سطر مربوطه است. اگر δ_4، δ_5 و δ_6 برابر مجموع عناصر سطر مربوطه‌ی خود نشوند، در محاسبه خطا وجود دارد که این اشتباه باید رفع شود. درواقع، ستون Σc در هر لحظه هر سطر عملیات انجام شده‌ی هر مرحله را کنترل می‌کند و به ما امکان می‌دهد که بلافاصله به خطای موجود در هر سطر پی ببریم و آن را اصلاح کنیم.

تبصره: در مرحله‌ی آخر عملیات (در این‌جا برای ماتریس مربع مرتبه‌ی سوم) می‌توان مقدار دترمینان A را نیز محاسبه کرد. در این‌جا مقدار دترمینان A چنین است:

$$|A|=\frac{D}{b_1}\neq 0$$

تذکر ۲. همان‌طور که گفته شد، مقدار دترمینال A از مرحله‌ی نهایی عملیات به‌دست می‌آید و شرط لازم و کافی برای آن‌که A وارون‌پذیر باشد، آن است که داشته باشیم: $D\neq 0$

از مرحله‌ی ۳، مقادیر z_1، z_2 و z_3 به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

از مرحله‌ی ۳ داریم:

$$Dz_i=k_i \quad (D\neq 0)$$

$$z_i=\frac{k_i}{D}\ ;\ i=1:z_1=\frac{k_1}{D}=\frac{b_1B_1}{D}=\frac{S_1}{D},$$

$$i=2:z_2=\frac{S_2}{D},\ i=3:z_3=\frac{A_1b_1}{D}=\frac{S_3}{D}$$

از مرحله‌ی ۲، مقادیر y_1، y_2 و y_3 به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

از مرحله‌ی ۲ داریم:

$$A_1y_i+A_2z_i=k'_i$$

$$y_i=\frac{k'_i}{A_1}-A_2\frac{k_i}{DA_1}\ ;$$

$$i=1:y_1=\frac{k'_1}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{k_1}{D}=\frac{-b_1}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{S_1}{D}$$

$$=\frac{-(b_1D+A_2S_1)}{A_1D}=\frac{t_1}{D}$$

$$i=2:y_2=\frac{k'_2}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{k_2}{D}=\frac{a_1}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{S_2}{D}$$

$$=\frac{a_1D-A_2S_2}{A_1D}=\frac{t_2}{D}$$

$$i=3:y_3=\frac{k'_3}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{k_3}{D}=\frac{-A_2}{A_1}\frac{S_3}{D}=\frac{t_3}{D}$$

از مرحله‌ی ۱، مقادیر x_1، x_2 و x_3 به شکل زیر محاسبه می‌شوند. باید توجه داشت، از هر مرحله ساده‌ترین معادله را انتخاب می‌کنیم.

از مرحله‌ی ۱ داریم:

$$a_1x_i+a_2y_i+a_3z_i=k''_i$$

و به‌طور مشابه داریم:

$$i=1:x_1=\frac{U_1}{D},\ i=2:x_2=\frac{U_2}{D},\ i=3:x_3=\frac{U_3}{D}$$

بنابراین، ماتریس وارون A چنین می‌شود:

روش محاسبه

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} x_۱ & y_۱ & z_۱ \\ x_۲ & y_۲ & z_۲ \\ x_۳ & y_۳ & z_۳ \end{bmatrix}$$

روش محاسبه‌ی ماتریس وارون A چنین است که ابتدا ترانهاده‌ی A را به‌دست می‌آوریم و سپس ماتریس واحد هم‌مرتبه‌ی A را کنار آن می‌نویسیم.

پس از آن، عملیات روی سطر و ستون را انجام می‌دهیم و از هر مرحله، سه درایه‌ی مجهول ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم. در آخر، به همان‌صورتی که درایه‌های مجهول را نوشته‌ایم، مقدار هر درایه‌ی مجهول را جای‌گزین آن می‌کنیم.

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{U_۱}{D} & \frac{t_۱}{D} & \frac{S_۱}{D} \\ \frac{U_۲}{D} & \frac{t_۲}{D} & \frac{S_۲}{D} \\ \frac{U_۳}{D} & \frac{t_۳}{D} & \frac{S_۳}{D} \end{bmatrix}$$

مثال ۱. وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۶ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

حل: وارون ماتریس A را چنین فرض می‌کنیم:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} x_۱ & y_۱ & z_۱ \\ x_۲ & y_۲ & z_۲ \\ x_۳ & y_۳ & z_۳ \end{bmatrix}$$

اکنون ترانهاده‌ی A را به‌دست می‌آوریم و ماتریس واحد مرتبه‌ی سوم را کنار ماتریس حاصل می‌نویسیم. سپس عملیات روی سطرها

	x_i	y_i	z_i	$k_۱$	$k_۲$	$k_۳$	$\sum c$
	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۳
(مرحله‌ی ۱)	۲	۱	۳	۰	۱	۰	۷
	۴	۶	۲	۰	۰	۱	۱۳
(مرحله‌ی ۲)		۱	۱	−۲	۱	۰	۱
		۸	−۸	۰	−۴	۲	−۲
(مرحله‌ی ۳)			−۱۶	۱۶	−۱۲	۲	−۱۰
(دترمینال A) $\lvert A\rvert=\frac{-۱۶}{۲}=-۸$				$z_۱=\frac{۱۶}{-۱۶}$	$z_۲=\frac{-۱۲}{-۱۶}$	$z_۳=\frac{۲}{-۱۶}$	
				$z_۱=-۱$			
				$z_۲=\frac{۳}{۴}$			
				$z_۳=-\frac{۱}{۸}$			

را انجام می‌دهیم:

توجه ۱. در هر سطر، مقدار Σc باید برابر مجموع عناصر آن سطر باشد. در غیر این‌صورت، در سطر فوق، یعنی سطری که مجموع عناصرش برابر مقدار Σc نیست، اشتباهی وجود دارد که باید اصلاح شود.

توجه ۲. از مرحله‌ی ۳ درایه‌های ستون آخر ماتریس وارون A به‌دست می‌آید.

با توجه به $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ و مرحله‌های ۲ و ۱ درایه‌های $A^{-۱}$ را حساب می‌کنیم.

حال از مرحله‌ی ۲ معادله‌ی اول آن را که ساده‌تر است، انتخاب و درایه‌های ستون میانی $A^{-۱}$ را حساب می‌کنیم. یعنی از مرحله‌ی ۲، مقادیر $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به معادله‌ی اول مرحله‌ی ۲ داریم:

$$y_i+z_i=k_i$$

$$i=۱: y_۱+z_۱=k_۱\ ;\ y_۱-۱=-۲\ ;\ \boxed{y_۱=-۱}$$

$$i=۲: y_۲+z_۲=k_۲\ ;\ y_۲+\frac{۳}{۴}=۱\ ;\ y_۲=۱-\frac{۳}{۴}\ ;\ \boxed{y_۲=\frac{۱}{۴}}$$

$$i=۳: y_۳+z_۳=k_۳ \Rightarrow y_۳-\frac{۱}{۸}=۰ \Rightarrow \boxed{y_۳=\frac{۱}{۸}}$$

در این‌جا از مرحله‌ی ۱، ساده‌ترین معادله را انتخاب و $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ را نیز محاسبه می‌کنیم. با توجه به معادله‌ی اول مرحله‌ی ۱ داریم:

$$x_i+z_i=k_i$$

$$i=۱: x_۱+z_۱=k_۱\ ;\ x_۱-۱=۱\ ;\ \boxed{x_۱=۲}$$

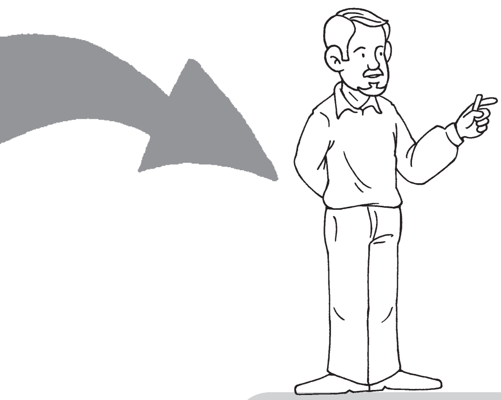
$$i=۲: x_۲+z_۲=k_۲\ ;\ x_۲+\frac{۳}{۴}=۰\ ;\ \boxed{x_۲=-\frac{۳}{۴}}$$

$$i=۳: x_۳+z_۳=k_۳\ ;\ x_۳-\frac{۱}{۸}=۰\ ;\ \boxed{x_۳=\frac{۱}{۸}}$$

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۱ \\ \frac{-۳}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \\ \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۸} & \frac{-۱}{۸} \end{bmatrix}$$

در این‌جا ماتریس وارون A یعنی $A^{-۱}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲. وارون ماتریس زیر را حساب کنید:



$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ -۳ & -۲ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا ترانهاده‌ی A یعنی A' را به‌دست می‌آوریم. کنار آن ماتریس واحد مرتبه‌ی ۴ را می‌نویسیم و عملیات روی سطرها را انجام می‌دهیم:

	x_i	y_i	z_i	t_i	$K_۱$	$K_۲$	$K_۳$	$K_۴$	Σc
(مرحله‌ی ۱)	۱	۰	−۳	−۱	۱	۰	۰	۰	−۲
	−۱	۱	−۲	۱	۰	۱	۰	۰	۰
	۲	−۱	۰	۳	۰	۰	۱	۰	۵
	۳	۱	۱	۲	۰	۰	۰	۱	۸
(مرحله‌ی ۲)		۱	−۵	۰	۱	۱	۰	۰	−۲
		−۱	۴	−۵	۰	−۲	−۱	۰	−۵
		۵	۲	−۵	۰	۰	−۳	۲	۱
(مرحله‌ی ۳)			−۱	−۵	۱	−۱	−۱	۰	−۷
			−۲۲	۳۰	۰	۱۰	۸	−۲	۲۴
(مرحله‌ی ۴)				−۱۴۰	۲۲	−۳۲	−۳۰	۲	−۱۷۸

توجه: بدون این‌که به عمومیت مسئله خللی وارد شود همیشه می‌توان عناصر میانی ستون اول مرحله ۱ و مرحله ۲ را غیر صفر درنظر گرفت؛ زیرا با جابه‌جایی سطرها یا جمع سطرها این فرض مسلم است.

از مرحله‌ی ۴ نتیجه می‌شود:

$$|A'|=|A|=\frac{-۱۴۰}{(-۱)(۲)(-۱)}=-۷۰$$

$$-۱۴۰t_i=k_i\ ;\ t_i=\frac{k_i}{-۱۴۰}$$

$$i=۱:t_۱=\frac{۲۲}{-۱۴۰}=\frac{-۱۱}{۷۰}\ ;$$

$$i=۲:t_۲=\frac{k_۲}{-۱۴۰}=\frac{-۳۲}{-۱۴۰}=\frac{۸}{۳۵}\ ;$$

$$i=۳:t_۳=\frac{k_۳}{-۱۴۰}=\frac{-۳۰}{-۱۴۰}=\frac{۳}{۱۴}\ ;$$

$$i=۴:t_۴=\frac{k_۴}{-۱۴۰}=\frac{۲}{-۱۴۰}=-\frac{۱}{۷۰}$$

از مرحله‌ی ۳ داریم:

$$-z_i-۵t_i=k_i\Rightarrow z_i+۵t_i=-k_i$$

$$i=۱:z_۱+۵t_۱=-k_۱\ ;\ z_۱+۵t_۱=-۱$$

$$z_۱+۵(-\frac{۱۱}{۷۰})=-۱\ ;\ z_۱=-\frac{۳}{۱۴},i=۲:z_۲+۵t_۲=-k_۲$$

$$z_۲+۵(\frac{۸}{۳۵})=-(-۱)\ ;\ z_۲=۱-\frac{۸}{۷}\ ;\ z_۲=-\frac{۱}{۷}$$

$$i=۳:z_۳+۵t_۳=-k_۳\ ;\ z_۳+۵(\frac{۳}{۱۴})=-(-۱)\ ;\ z=-\frac{۱}{۱۴}$$

$$i=۴:z_۴+۵t_۴=-k_۴\ ;\ z_۴+۵(-\frac{۱}{۷۰})=۰\ ;\ z_۴=\frac{۱}{۱۴}$$

از معادله‌ی اول مرحله‌ی ۲ داریم:

$$y_i-۵z_i=k_i$$

$$i=۱:y_۱-۵z_۱=k_۱\ ;\ y_۱-۵(-\frac{۳}{۱۴})=۱\ ;$$

$$y_1 = 1 - \frac{15}{14} \; ; \; y_1 = -\frac{1}{14}$$

$$i = 2 : y_2 - 5z_2 = k_2 \; ; \; y_2 - 5(-\frac{1}{7}) = 1 \; ; \; y_2 = \frac{2}{7}$$

$$i = 3 : y_3 - 5z_3 = k_3 \; ; \; y_3 - 5(-\frac{1}{14}) = 0 \; ; \; y_3 = -\frac{5}{14}$$

$$i = 4 : y_4 - 5(\frac{5}{70}) = 0 \; ; \; y_4 = \frac{5}{14}$$

از معادله‌ی اول مرحله‌ی ۱ داریم:

$$x_i - 3z_i - t_i = k_i$$

$$i = 1 : x_1 - 3z_1 - t_1 = k_1 \; ;$$

$$x_1 - 3(-\frac{3}{14}) - (-\frac{11}{70}) = 1 \; ; \; x_1 = \frac{1}{5}$$

$$i = 2 : x_2 - 3z_2 - t_2 = k_2 \; ;$$

$$x_2 - 3(-\frac{1}{7}) - (\frac{8}{35}) = 0 \; ; \; x_2 = -\frac{1}{5}$$

$$i = 3 : x_3 - 3z_3 - t_3 = k_3 \; ;$$

$$x_3 - 3(-\frac{1}{14}) - \frac{3}{14} = 0 \; ; \; x_3 = 0$$

$$i = 4 : x_4 - 3z_4 - t_4 = k_4 \; ;$$

$$x_4 - 3(\frac{5}{70}) - (-\frac{1}{70}) = 0 \; ; \; x_4 = \frac{1}{5}$$

* **توجه:** این روش برای تعیین وارون هر ماتریس مربع قابل تعمیم است که در این مختصر به همین دو مثال اکتفا می‌کنیم.

بنابراین، در این‌جا تمام درایه‌های A^{-1} به‌دست می‌آید و کافی است مقادیر درایه‌های مجهول را جانشین کنیم؛ یعنی:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{14} & \frac{-3}{14} & \frac{-11}{70} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{8}{35} \\ 0 & \frac{-5}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{5} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & \frac{-1}{70} \end{bmatrix}$$

مثال ۳. نسبت دو ماتریس زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{B}{A} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}} = ?$$

حل: حاصل نسبت را X درنظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\frac{B}{A} = X \; ; \; B = AX$$

برای محاسبه‌ی X کافی است طرفین رابطه‌ی اخیر را دروارون A (از طرف چپ) ضرب کنیم، یعنی:

$$A^{-1}B = A^{-1}AX \; ; \; A^{-1}B = I_3X \; ; \; X = A^{-1}B$$

بنابراین، نسبت فوق برابر با حاصل‌ضرب وارون مخرج در صورت (از طرف چپ) است. همان‌طور که دیده می‌شود، مسئله‌ی نسبت دو ماتریس نیز به محاسبه‌ی وارون ماتریس مخرج منتهی می‌شود. در این‌جا برای حل مسئله کافی است ابتدا وارون ماتریس A را محاسبه و سپس در ماتریس B ضرب کنیم.

* توجه: این روش برای هر ماتریس مربع n×n نیز قابل تعمیم است.

ادب ریاضی

تئوری مقدماتی اعداد باید یکی از بهترین موضوع‌ها برای تعلیم اولیه‌ی ریاضیات باشد. چندان اطلاع قبلی نمی‌خواهد، موضوعش ملموس و مأنوس است، طریقه‌های استدلال که به‌کار می‌گیرد، ساده و تعدادشان کم است و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی در علوم ریاضی‌مانند ندارد.

یک ماه تعلیم فهیمانه تئوری اعداد دو بار آموزنده‌تر و مفیدتر و حداقل ده بار سرگرم‌کننده‌تر از همان مدت تعلیم حسابان برای مهندسین می‌باشد. (هاردی)

منبع:
تئوری مقدماتی اعداد/ دکتر غلام‌حسین مصاحب