۳۰ درجه است. و به این ترتیب اثبات‌مان به اتمام می‌رسد.

واتسون (مبهوت): ولی ... ولی ... چه‌طور؟ چه‌طور به‌یک چنین راه حل ماهرانه‌ای رسیدی؟

هلمز: واتسون عزیز، فکر می‌کنم بتوانم داستان مهیجی در مورد چگونگی پیدا کردن راه حل مورد بحث، به کمک یک دوجین اصل با مهارت انتخاب شده، برایت تعریف کنم... چرا می‌خندی، واتسون؟! البته، بعضی اصل‌ها سهل‌الوصول‌اند. فی‌المثل، «اصل هدف» قابل توجه است: همواره به خاطر داشته باشید که برای رسیدن به هدفتان چه کارهایی برای انجام دادن باقی مانده است. و محققاً، معدودی مطالب کوچک در گوشه و کنار ... به هر تقدیر، دوست من، برای حل یک مسئله، به مطالبی بیش از تنها یک مجموعه قواعد استاندارد تفکر نیاز داریم. به چیزهایی چون تجربه و شهود احتیاج است. تصور می‌کنی کارها این‌قدر ساده‌اند که برای انجام دادنشان، تنها چیزی که لازم داریم به‌خاطر سپردن تعدادی اصل و آموختن طرز به‌کار بردن آن‌ها به‌ترتیبی خاص است؟

خوش‌بختانه، برهان بشری به گونه‌ی اندازه‌ناپذیری وسیع‌تر از این‌هاست ... البته این اصول نیز که در اساس چیزی بیش از کلیشه‌های فکری نیستند، می‌توانند کاربردهایی داشته باشند. واتسون، آدمی نباید از چیزی که عقلایی است تغافل کند!

واتسون (با خستگی روی صندلیش می‌نشیند، و روزنامه‌اش را برمی‌دارد): هی! به این گوش کن هلمز: «شب گذشته، تبهکاران ناشناسی، پس از داخل شدن به دفتر روزنامه‌ی دیلی جوک، صندوق سردبیر روزنامه را شکستند و جایزه‌ی مسابقه‌ی سالانه‌ی هندسه را دزدیدند. این جایزه نوار موبیوس طلایی[4] به اندازه‌ی واقعی و به قیمت ...» مطلب جالب دیگری ندارد ... اوه، گوش کن! «کارآگاه رابینسون اعلام کرد که پلیس سرنخی در این مورد به دست نیاورده است. سردبیر دیلی جوک به خبرنگاران گفت، روزنامه برای افزایش تعداد مشترکین و اصلاح وضع مادی‌اش، در یکی از شماره‌های آینده مسابقه‌ی حل مسئله‌ی مخصوصی را مطرح خواهد کرد...»

دوست عزیز، پس از تمام چیزهایی که امروز شنیده‌ام، باید این تبهکاران را دستگیر کنی، چه بالاخره، این مورد نیز از موارد پیروی از اصول است!

هنگامی که این آخرین کلمات گفته می‌شود، صحنه تاریک می‌شود و آخرین ضربه‌های آهنگ همراه صحنه، در تاریکی شنیده می‌شود.

***

موارد زیر مسائلی از مسابقه‌ی مخصوص اعلام شده در روزنامه است. به‌خاطر داشته باشید که هریک از آن‌ها شگردی مخصوص خود دارد که آن را می‌توان با استفاده از اصول مطرح شده توسط کارآگاه بزرگ، آسان‌تر یافت.

۱. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است و طول قطعه خط AD برابر مجموع طول‌های قطعات AB و CD است. ثابت کنید که نیم‌سازهای زوایای B و C بر ضلع AD تقاطع می‌کنند.

۲. دزد بی‌دستی می‌خواهد سکه‌ای را از میز پول خردکنی با هول دادن سکه با استفاده از بینی‌اش بر میز، بدون برخورد دادن آن با هیچ یک از سکه‌های میز بدزدد. آیا موفق می‌شود؟ سکه‌ها گردند، به اندازه‌های متفاوت‌اند، و با یکدیگر تماس ندارند.

۳. مربعی به چند مستطیل تقسیم شده است. نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر هریک از این مستطیل‌ها را می‌توان محاسبه کرد. ثابت کنید که مجموع این نسبت‌ها کمتر از ۱ نیست.

پی‌نوشت

۱. خیابانی که منزل شرلوک هلمز در آن بوده است.
۲. کارآگاه معروف داستان‌های شرلوک هلمز
۳. دکتر واتسون، دوست شرلوک هلمز
۴. نواری که از پیچ دادن یک نوار معمولی و وصل کردن دو سر آن به هم حاصل می‌شود و یک رویه دارد.

ادب ریاضی

نظر ما تغییر یافته است و باز هم تغییر می‌یابد و تکامل پیدا می‌کند. به کلام **دکارت**: «فضا و حرکت را به من بدهید و من دنیایی به شما خواهم داد.» **اینشتاین** امروز چنین جواب می‌دهد: «آن‌چه خواسته شده است، به واقع زیاد است و حقیقت آن است که اصولاً تقاضای دکارت فاقد مفهوم است: بدون وجود «دنیا» (یعنی بدون وجود ماده)، نه فضایی وجود دارد و نه حرکتی موجود است.»

ریاضی‌دانان نامی
اریک تمپل بل، حسن صفاری

مسائل f(x) ها

احمد قندهاری

کلید واژه‌ها: تابع، تابع مرکب، مسائل f(x) ها.

هر عبارتی برحسب x را می‌توان به‌صورت f(x) نشان داد؛ مانند:

$f(x)=\sin x+\cos^{4} x$ ، $f(x)=x^{2}-4x+1$

و $f(x)=x+\sqrt{x^{2}-1}$

هر عبارتی برحسب x و y را می‌توان به‌صورت f(x,y) نشان داد، مانند:

$f(x,y)=\sin x+\cos y$ و $f(x,y)=x^{2}+xy+\frac{4x}{y}$

هر عبارتی برحسب x و y و z را می‌توان به‌صورت $f(x,y,z)$ نشان داد، مانند:

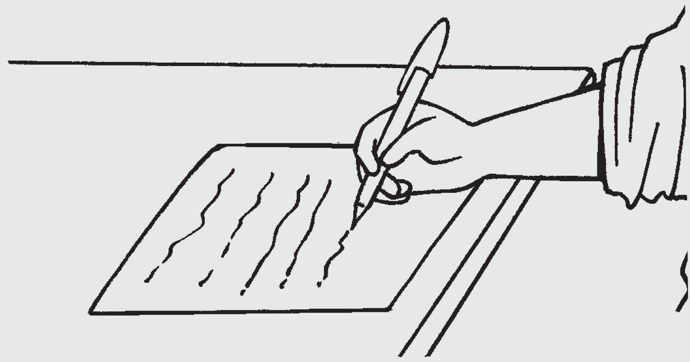
$$f(x,y,z)=x^{2}+y^{2}+z^{2}-5xyz$$

و

$$f(x,y,z)=\sin(x+y)+\cos(y+z)$$

۱. مسئله‌ی اصلی f(x)

یعنی f(x) معلوم است و می‌خواهیم $f(h(x))$ را محاسبه کنیم. h(x) می‌تواند هر عبارتی برحسب x باشد. برای محاسبه‌ی $f(h(x))$، باید در عبارت f(x) به‌جای x، عبارت h(x) را قرار دهیم. باید توجه داشته باشیم که این عمل، یک عمل جای‌گذاری است و به معنی برابری h(x) با x نیست.



مثال ۱. اگر $f(x)=۳x-۴x^۳$، مطلوب است محاسبه‌ی عبارت‌های زیر:

$$f(۲x-۵)\ ,\ f(\frac{۲x+۱}{۲x-۱}), f(x+\sqrt{x^۲+۱}), f(\sin\alpha), f\big(f(x)\big)$$

حل:

$$f(x)=۳x-۴x^۳$$

۱) $f(۲x-۵)=۳(۲x-۵)-۴(۲x-۵)^۳$

۲) $f(\frac{۲x+۱}{۲x-۱})=۳(\frac{۲x+۱}{۲x-۱})-۴(\frac{۲x+۱}{۲x-۱})^۳$

۳) $f(x+\sqrt{x^۲+۱})=۳(x+\sqrt{x^۲+۱})-۴(x+\sqrt{x^۲+۱})^۳$

۴) $f(\sin\alpha)=۳\sin\alpha-۴\sin^۳\alpha=\sin۳\alpha$

۵) $f\big(f(x)\big)=f(۳x-۴x^۳)=۳(۳x-۴x^۳)-۴(۳x-۴x^۳)^۳$

مثال ۲. اگر داشته باشیم: $f(x,y)=x^۲+۵xy$، مطلوب است محاسبه‌ی عبارت‌های زیر:

$f(۲-\sqrt{۲},\frac{۷}{۱۱})$ و $f(x+y,x-y)$

حل:

$$f(x,y)=x^۲+۵xy$$

۱) $f(۲-\sqrt{۲},\frac{۷}{۱۱})=(۲-\sqrt{۲})^۲+۵(۲-\sqrt{۲})(\frac{۷}{۱۱})$

۲) $f(x+y,x-y)=(x+y)^۲+۵(x+y)(x-y)$

مثال ۳. اگر $f(x,y,z)=x^۲-۳xyz$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی:

$$f(a-b,b-c,c-a)$$

حل:

$$f(x,y,z)=x^۲-۳xyz$$

$$f(a-b,b-c,c-a)=(a-b)^۲-۳(a-b)(b-c)(c-a)$$

۲. مسئله‌ی معکوس $f(x)$

یعنی $f\big(h(x)\big)$ معلوم است و می‌خواهیم $f(x)$ را محاسبه کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱. اگر $f(x+۵)=۴x+۲۳$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

الف) $۴x+۱$　　ب) $۴x+۲$

ج) $۴x+۳$　　د) $۴x+۴$

حل: روش اول:

$x+۵=a$ فرض می‌کنیم $\Rightarrow x=a-۵$

$$f(x+۵)=۴x+۲۳$$

$$f(a)=۴(a-۵)+۲۳\Rightarrow f(a)=۴a+۳\Rightarrow f(x)=۴x+۳$$

روش دوم: در این روش که به «روش تبدیل» معروف است، در سمت راست عبارت $(x+۵)$ را می‌سازیم. سپس در سراسر مسئله $(x+۵)$ را به x تبدیل می‌کنیم.

$$f(x+۵)=۴x+۲۳$$

$$f(x+۵)=۴(x+۵)+۳$$

$$(x+۵)\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\ ;\ f(x)+۴x+۳$$

روش سوم: به x عددی نسبت می‌دهیم؛ مثلاً $x=۱$. آن‌گاه عبارت $f(x+۵)$ بدین‌صورت خواهد شد:

$$f(۶)=۴+۲۳\Rightarrow f(۶)=۲۷$$

می‌گوییم گزینه‌ای درست است که اگر به‌جای x، عدد ۶ را قرار دهیم، حاصل برابر ۲۷ شود. پس گزینه‌ی ج صحیح است. (این روش برای مسائل چند گزینه‌ای به‌کار می‌رود)

مثال ۲. اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$، آن‌گاه $f(\frac{۱}{x})$ را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$$

$$f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳x(\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x})$$

$$f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳(x+\frac{۱}{x})$$

$$(x+\frac{۱}{x})\xrightarrow{\text{تبدیل}}\frac{۱}{x}\ ;\ f(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x^۳}-۳(\frac{۱}{x})=\frac{۱-۳x^۲}{x^۳}$$

مثال ۳. اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^۴+\frac{۱}{x^۴}$، آن‌گاه $f(\frac{۱}{۴x})$ را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{۱}{x})=x^۴+\frac{۱}{x^۴}$$

$$f(x+\frac{۱}{x})=(x^۲+\frac{۱}{x^۲})^۲-۲x^۲(\frac{۱}{x^۲})=(x^۲+\frac{۱}{x^۲})^۲-۲$$

$$f(x+\frac{۱}{x})=\left((x+\frac{۱}{x})^۲-۲\right)^۲-۲$$

$$(x+\frac{۱}{x})\xrightarrow{\text{تبدیل}}\frac{۱}{۴x}$$

$$f(\frac{۱}{۴x})=\left((\frac{۱}{۴x})^۲-۲\right)^۲-۲$$

مثال ۴. اگر $f(x+y,x-y)=۲xy$، آن‌گاه $f(x,y)$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{8}(x^2-y^2)$ ب) $\frac{1}{4}(x^2-y^2)$

ج) $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ د) $\frac{1}{2}(x^2-y^2)$

حل: روش اول: در عبارت f قرار می‌دهیم:

$$f(x+y,x-y)=2xy$$

$$\begin{cases}x+y=a\\x-y=b\end{cases}\Rightarrow x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a-b}{2}$$

$$f(a,b)=2\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)\Rightarrow$$

$$f(a,b)=\frac{1}{2}(a^2-b^2)\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$$

روش دوم:

$$f(x+y,x-y)=2xy$$

$$f(x+y,x-y)=\frac{1}{2}\left((x+y)^2-(x-y)^2\right)$$

$$\begin{cases}x+y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\\x-y\xrightarrow{\text{تبدیل}}y\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$$

روش سوم: به x و y دو عدد نسبت می‌دهیم:

$$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\Rightarrow f(3,1)=2(2)(1)\Rightarrow f(3,1)=4$$

می‌گوییم گزینه‌ای صحیح است که $f(3,1)$ آن برابر ۴ شود. بنابراین گزینه‌ی (ج) قابل‌قبول است.

مثال ۵. اگر $f(x+y,x-y)=2\sin x\cos y$، آن‌گاه $f(x,y)$ را بیابید.

حل: عبارت سمت راست را به حاصل‌جمع تبدیل می‌کنیم:

$$f(x+y,x-y)=2\sin x.\cos y$$

$$f(x+y,x-y)=\sin(x+y)+\sin(x-y)$$

$$\begin{cases}x+y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\\x-y\xrightarrow{\text{تبدیل}}y\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=\sin x+\sin y$$

مثال ۶. اگر $f(x+y,x-y)=\cos x+\cos y$، آن‌گاه $f(x,y)$ را بیابید.

حل: عبارت سمت راست را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$f(x+y,x-y)=\cos x+\cos y$$

$$f(x+y,x-y)=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\begin{cases}x+y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\\x-y\xrightarrow{\text{تبدیل}}y\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=2\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{y}{2}$$

مثال ۷. اگر $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}$ و $x<0$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

حل: در سمت راست x را به داخل رادیکال می‌بریم و چون $x<0$ است، باید در خارج رادیکال منفی بگذاریم:

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}=-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}=-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{y}{x}\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\Rightarrow f(x)=-\sqrt{1+x^2}$$

مثال ۸. اگر $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2-\frac{1}{x^2}$ و $x>0$ و $x>\frac{1}{x}$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

حل:

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

فرض می‌کنیم $x+\frac{1}{x}=a$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=a^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=a^2-4$$

داریم: $x>\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=a^2-4\Rightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)=\sqrt{a^2-4}$$

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$f(a)=a\sqrt{a^2-4}\Rightarrow f(x)=x\sqrt{x^2-4}$$

۳. مسئله‌ی گسترده‌ی f(x)

در این‌گونه مسائل که به‌صورت

$$af\left(h(x)\right)+bf\left(t(x)\right)=k(x)$$

هستند، می‌خواهیم f(x) را بیابیم. ابتدا باید تبدیلی صورت گیرد تا h(x) و t(x) به یکدیگر تبدیل شوند. سپس دستگاه حاصل را حل می‌کنیم و آن‌گاه f(x) محاسبه می‌شود.

مثال ۱. اگر $3f(x)+2f(-x)=15x$، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل: $x\xrightarrow{\text{تبدیل}}-x\Rightarrow 3f(-x)+2f(x)=-15x$

$$\begin{array}{r}3\\-2\end{array}\begin{cases}3f(x)+2f(-x)=15x\\3f(-x)+2f(x)=-15x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9f(x)+6f(-x)=45x\\-6f(-x)-4f(x)=30x\end{cases}$$

$$5f(x)=75x\Rightarrow f(x)=15x$$

مثال ۲. اگر $۲f(۲x-۳)+f(۳-۲x)=۴x$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

$$۲x-۳=a \Rightarrow \begin{cases} ۳-۲x=-a \\ ۲x=a+۳ \end{cases}$$

$$-۲\begin{cases} ۲f(a)+f(-a)=۲(a+۳) \\ ۲f(-a)+f(a)=۲(-a+۳) \end{cases} \qquad a\xrightarrow{\text{تبدیل}}-a$$

$$\begin{cases} -۴f(a)-۲f(-a)=-۴(a+۳) \\ ۲f(-a)+f(a)=۲(-a+۳) \end{cases}$$

$$-۳f(a)=-۴a-۱۲-۲a+۶ \Rightarrow -۳f(a)=-۶a-۶$$

$$\Rightarrow f(a)=۲a+۲ \Rightarrow f(x)=۲x+۲$$

مثال ۳. اگر $f(\sin x)+۲f(\cos x)=۲\sin^۲ x$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

حل:

$$f(\sin x)+۲f(\cos x)=۲\sin^۲ x \qquad x\xrightarrow{\text{تبدیل}}(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$f\left(\sin(\frac{\pi}{۲}-x)\right)+۲f\left(\cos(\frac{\pi}{۲}-x)\right)=۲\sin^۲(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$-۲\begin{cases} f(\sin x)+۲f(\cos x)=۲\sin^۲ x \\ f(\cos x)+۲f(\sin x)=۲\cos^۲ x \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\sin x)+۲f(\cos x)=۲\sin^۲ x \\ -۲f(\cos x)-۴f(\sin x)=-۴\cos^۲ x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۳f(\sin x)=-۴\cos^۲ x+۲\sin^۲ x$$

$$-۳f(\sin x)=-۴(۱-\sin^۲ x)+۲\sin^۲ x$$

$$\Rightarrow -۳f(\sin x)=۶\sin^۲ x-۴$$

$$\Rightarrow f(\sin x)=-۲\sin^۲ x+\frac{۴}{۳} \qquad \sin x\xrightarrow{\text{تبدیل}}x$$

$$f(x)=-۲x^۲+\frac{۴}{۳}$$

۴. مسئله‌ی ترکیبی (نوع اول)

در این حالت $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم است و می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم. با توجه به ساختن $f\big(g(x)\big)$، $g(x)$ به‌راحتی محاسبه می‌شود.

مثال. اگر $f(x)=۲x-۵$ و $f\big(g(x)\big)=۴x^۶+۲x^۲-۱$، آن‌گاه $g(x)$ را بیابید.

حل: $f\big(g(x)\big)=۲g(x)-۵=۴x^۶+۲x^۲-۱\Rightarrow$

$$۲g(x)=۴x^۶+۲x^۲+۴\Rightarrow g(x)=۲x^۶+x^۲+۲$$

۵. مسئله‌ی ترکیبی (نوع دوم)

در این مسئله $f(x)$ و $g\big(f(x)\big)$ معلوم است و می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم.

مثال: اگر $f(x)=۲x+۳$ و $g\big(f(x)\big)=۸x+۱۱$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

حل: $g\big(f(x)\big)=g(۲x+۳)=۸x+۱۱$

$$g(۲x+۳)=۴(۲x)+۱۱=۴(۲x+۳)-۱۲+۱۱$$

$$g(۲x+۳)=۴(۲x+۳)-۱ \qquad (۲x+۳)\xrightarrow{\text{تبدیل}}x$$

$$g(x)=۴x-۱$$

مثال. اگر $f(\frac{x-۱}{x+۱})=۲^x$، آن‌گاه $f(\frac{x-۱}{x+۱}).f(\frac{x+۱}{x-۱})$ را بیابید.

حل: $f(\frac{x-۱}{x+۱})=۲^x$

صورت و مخرج کسر را در (۱-) ضرب می‌کنیم:

$$x\xrightarrow{\text{تبدیل}}-x \Rightarrow f(\frac{-x-۱}{-x+۱})=۲^{-x}$$

$$\Rightarrow f(\frac{x+۱}{x-۱})=۲^{-x}$$

$$f(\frac{x-۱}{x+۱})=۲^x \ ,\ f(\frac{x+۱}{x-۱})=۲^{-x}$$

$$\Rightarrow f(\frac{x-۱}{x+۱}).f(\frac{x+۱}{x-۱})=۲^x\times ۲^{-x}=۲^۰=۱ \quad (x\neq \pm ۱)$$

مثال: اگر $f(x)=x^۲-۵x+۴$ و $g(x)=x^۲+۵x$، آن‌گاه معادله‌ی $f\big(g(x)\big)=۰$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

حل:

$$f(x)=x^۲-۵x+۴ \ ,\ f\big(g(x)\big)=f(x^۲+۵x)$$

$$f(x)=(x-۱)(x-۴) \quad x\xrightarrow{\text{تبدیل}}(x^۲+۵x)$$

$$f(x^۲+۵x)=(x^۲+۵x-۱)(x^۲+۵x-۴)$$

$$f(x^۲+۵x)=۰\Rightarrow (x^۲+۵x-۱)(x^۲+۵x-۴)=۰$$

$$x^۲+۵x-۱=۰, \Delta>۰$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

$$x^۲+۵x-۴=۰, \Delta>۰$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

پس معادله‌ی $f\big(g(x)\big)=۰$ چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

سؤال: آیا ممکن نیست دو معادله‌ی $x^۲+۵x-۱=۰$ و $x^۲+۵x-۴=۰$، یک ریشه‌ی مشترک داشته باشند؟ چرا؟