آموزشی

هندسهٔ کاربردی در گسترهٔ تاریخ

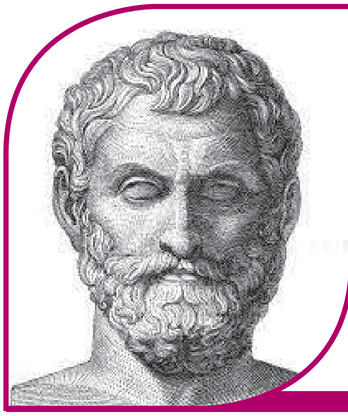
هوشنگ شرقی*

مقدمه:

استفاده از ریاضیات در رفع مشکلات و حل مسائل مربوط به زندگی روزمرهٔ بشر، بدون تردید زمینه‌ساز پیشرفت ریاضیات طی قرن‌های متمادی بوده است. هندسه در این میان نقش جدی‌تری دارد، زیرا کاربردهای بسیاری در تعیین فاصله‌ها، محاسبهٔ مساحت‌ها و تعیین ارتفاع بناها و دیگر مسائلی دارد که در زندگی روزمره بشر پیش می‌آید.

در این مقاله به تعدادی از این مسئله‌ها که همگی زمینهٔ تاریخی داشته و «مسئله‌های واقعی» بوده‌اند. اشاره کرده‌ایم. در هر مورد اشارهٔ مختصری هم به تاریخچهٔ مسئله داشته‌ایم. این توضیح را نیز لازم می‌دانیم که مسئله‌های تاریخی ریاضیات، بسیار متنوع و متعددند و در کتاب‌های مرتبط با تاریخ ریاضیات، از جمله منبع اصلی این مقاله (یعنی کتاب آشنایی با تاریخ ریاضیات، نوشتهٔ هاورد. و. ایوز، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی) مطرح شده‌اند، اما در این مقاله تأکید ما بیشتر بر مسائلی است که مستقیماً بر کاربردهای عملی قضایای هندسه در زندگی بشر تأکید داشته‌اند.

کلیدواژه: تالس ملطی، دستور هرون، قضیهٔ فیثاغورس

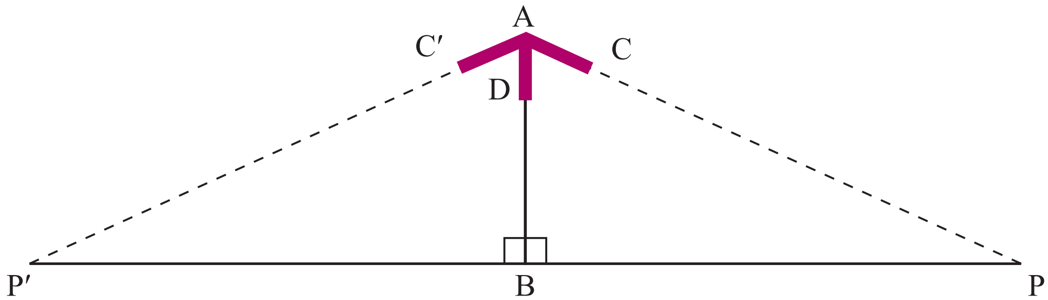


۱. تالس ملطی چگونه فاصلهٔ کشتی از ساحل را به‌دست آورد؟

تالس ملطی (میلتوسی) یکی از هفت حکیم یونان باستان بود که در حدود شش قرن قبل از میلاد **مسیح**(ع) در میلتوس[1] واقع در ساحل مدیترانهٔ شرقی می‌زیست. اثبات بعضی از معروف‌ترین قضیه‌های هندسه، مانند قضیهٔ برابری زوایای متقابل به رأس و برابری زوایای مجاور به دو ساق در مثلث متساوی‌الساقین را به او نسبت می‌دهند. قضیهٔ مشهوری هم در هندسه موسوم به «قضیهٔ تالس» منسوب به اوست؛ قضیه‌ای که اثبات می‌کند: در هر مثلث، هر خط راست که موازی با یکی از اضلاع مثلث رسم شود، روی دو ضلع دیگر پاره‌خط‌های متناسب جدا می‌کند.

گفته می‌شود که تالس به روش زیر موفق شد فاصلهٔ یک کشتی را از ساحل با استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت به‌دست آورد.

مطابق شکل ۱ فرض می‌کنیم که یک کشتی در نقطهٔ P در دریا قرار دارد و نقطهٔ B مرز بین دریا و ساحل است. می‌خواهیم فاصلهٔ کشتی را از ساحل، یعنی طول پاره‌خط BP را به‌دست آوریم. به این منظور تالس ابزاری ساخت که شامل دو میلهٔ فلزی AD و AC بود و با لولایی در نقطهٔ A به‌هم متصل شده بودند. تالس میلهٔ AD را در راستای عمود بر ساحل تنظیم و سپس میلهٔ AC را جابه‌جا می‌کرد تا زاویهٔ DAC چنان تنظیم شود که امتداد AC بر نقطهٔ P منطبق باشد (یعنی کشتی در راستای AC دیده شود). حال بدون تغییر زاویهٔ دو میله، این دستگاه را 180° حول AD دوران داد تا امتداد AC در وضعیت جدید، نقطهٔ P' را در ساحل نشانه بگیرد.



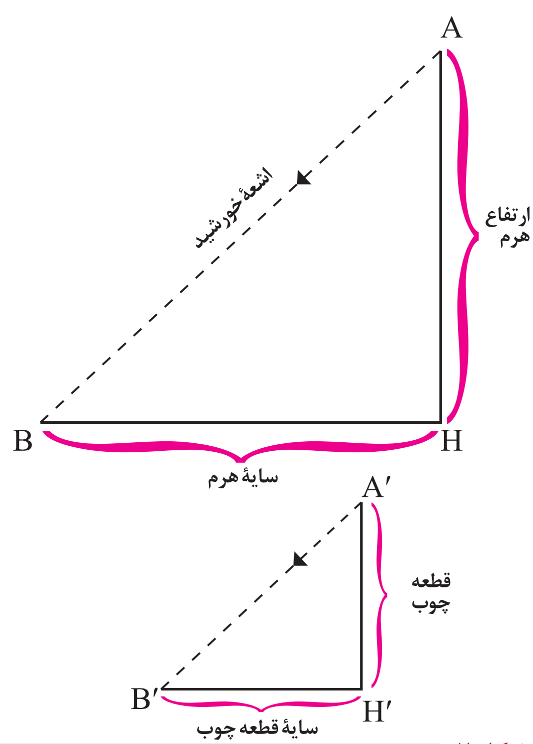
شکل ۱

حالا دیگر مسئلهٔ تعیین فاصلهٔ کشتی از ساحل (BP) به مسئلهٔ آسان‌تر تعیین فاصلهٔ BP' تبدیل شده است. توضیح دهید که چرا مثلث‌های ABP و ABP' هم‌نهشت‌اند و چرا: $BP = BP'$. نتیجه را هم توضیح دهید.

۲. تالس چگونه ارتفاع هرم مصر را محاسبه کرد؟

یکی از کارهایی که تالس ملطی توانست انجام دهد، محاسبهٔ ارتفاع یکی از هرم‌های مصر بود (تالس مدتی از عمر خود را در مصر گذراند).

روایت رایج آن است که برای این کار تالس قطعه چوبی را بر زمین نصب کرد و با اندازه‌گیری طول سایهٔ قطعهٔ چوب و طول سایهٔ هرم در زمان مشخصی از روز، ارتفاع هرم را مطابق شکل ۲ به‌دست آورد:



شکل ۲

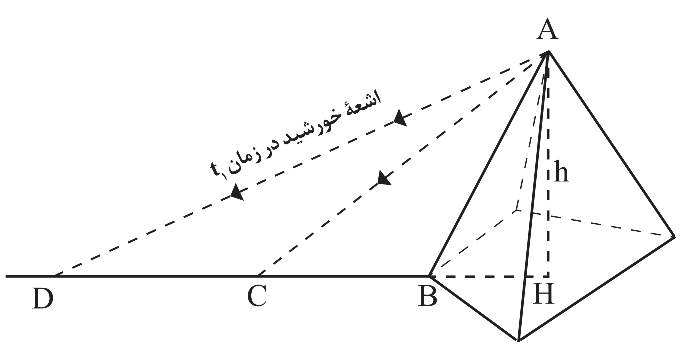
بدیهی است که مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند. (چرا؟) با نوشتن نسبت تشابه دو مثلث خواهیم داشت:

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{B'H'}{BH} = k \Rightarrow AH = \frac{A'H'}{k}$$

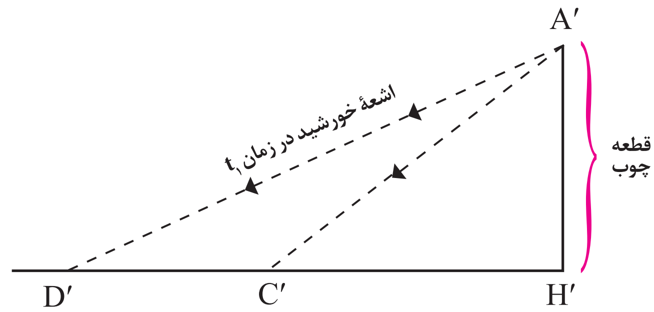
مقدار k (نسبت تشابه) را از تقسیم دو مقدار معلوم $B'H'$ (سایهٔ قطعه چوب) بر BH (سایهٔ هرم) به سادگی می‌توان به‌دست آورد و طول قطعه چوب هم که معلوم است. اما مسئله به همین آسانی هم نیست! چرا که BH در واقع طول سایهٔ هرم نیست! بلکه فاصلهٔ نوک سایه از مرکز قاعدهٔ هرم (یعنی پای ارتفاع هرم: نقطهٔ H) است که به سادگی قابل اندازه‌گیری نیست؛ به عبارت دیگر، بخشی از این مسافت زیر هرم است. پس تالس چه باید می‌کرد؟

او راه این کار را هم پیدا کرد. به این منظور، وی در دو زمان متفاوت، یعنی دو بار، طول سایهٔ چوب و فاصلهٔ نوک سایهٔ هرم تا آخرین دیوارهٔ خارجی آن را که در دسترس بود، محاسبه کرد.

اکنون با توجه به شکل‌های ۳ و ۴ و موازی بودن شعاع‌های نوری با یکدیگر، بدیهی است که: $\Delta ACH \sim \Delta A'C'H'$ و $\Delta ADH \sim \Delta A'D'H'$ و نسبت‌های تشابه (k و k') با توجه به در دسترس بودن قطعه چوب و سایه‌های آن قابل محاسبه‌اند. بنابراین می‌توان نوشت:



شکل ۳



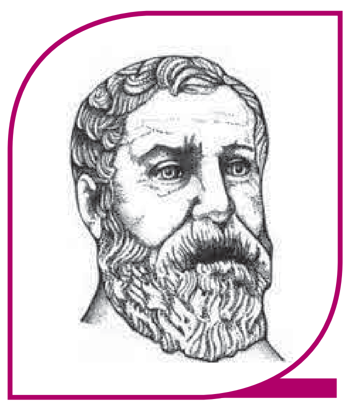
شکل ۴

$$\Delta ACH \sim \Delta A'C'H' \Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=\frac{CH}{C'H'}$$
$$\Rightarrow \frac{CH}{AH}=\frac{C'H'}{A'H'}=k$$
$$\Delta ADH \sim \Delta A'D'H' \Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=\frac{DH}{D'H'}$$
$$\Rightarrow \frac{DH}{AH}=\frac{D'H'}{A'H'}=k'$$

حال با معلوم بودن نسبت‌های $\frac{DH}{AH}$ و $\frac{CH}{AH}$ و طول‌های CD و CB می‌توان طول AH را به‌دست آورد:

$$\frac{DH}{AH}-\frac{CH}{AH}=\frac{DH-CH}{AH}=\frac{CD}{AH}=k'-k$$
$$\Rightarrow AH=\frac{CD}{k'-k}$$

۳. هرون چگونه کوتاه‌ترین مسیر را پیدا کرد؟

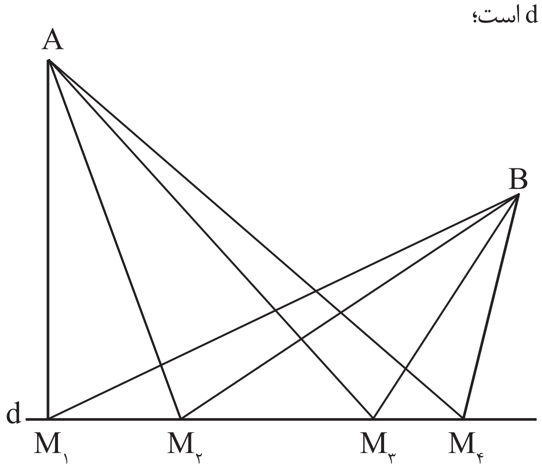


هرون اســـکندرانی در فاصلهٔ زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد در بندر اسکندریه مصر می‌زیست. وی از جمله پیشگامان ریاضیات کاربردی اســـت و آثار بسیاری در زمینهٔ موضوعات ریاضی و فیزیکی داشته است. او کارهای زیادی در زمینهٔ اندازه‌گیری مساحت و مهندسی بناها انجام داد و دستور معروفی برای محاسبهٔ مساحت مثلث از او به‌جا مانده است؛ به این شرح است که مساحت مثلثی با اضلاع a و b و c و محیط $2p=a+b+c$ از دســـتور $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ به‌دست می‌آید. این دستور به «دستور هرون» معروف است.

مهم‌ترین اثر هرون در هندسه، کتاب **متریکا**[۲]، شامل سه مقاله است که در سال ۱۸۹۶ در قسطنطنیه (استانبول) کشف شد. در این کتاب دستورهای متفاوتی برای محاسبهٔ مساحت مربع‌ها، مستطیل‌ها، مثلث‌ها، ذوزنقه‌ها، چندضلعی‌های منتظم و دایره‌ها و قطعه‌ها، و ســـطح رویهٔ شکل‌های هندسی فضایی بیان و اثبات شده‌اند. در این کتاب همچنین به محاسبهٔ حجم شـــکل‌های فضایی نیز پرداخته شده اســـت. کتاب دیگر او، **پنومتیکا**[۳] به مهندسی و ساخت ابزارهای مکانیکی گوناگون اختصـــاص دارد. کتاب دیگـــرش **کاتوپتریکا** به فیزیک نور و ویژگی‌های آینه‌ها می‌پردازد.

هـــرون از نوابغ دوران کهن بـــود و او را دایرةالمعارف علوم ریاضی و فیزیک لقب داده بودند. یکی از مسائلی که برای حل آن بـــه هرون مراجعه کردند، این بود: «مردی می‌خواهد برای پرکردن یک سطل آب، از خانهٔ خود به ساحل رودخانه‌ای که لبهٔ مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به طویله‌اش که با خانه در یک طرف رودخانه قرار دارد برســـاند. او از کدام نقطه از ســـاحل، آب بردارد تا مسافتی که در مجموع طی می‌کند، حداقل باشد؟»

مطابق شـــکل ۵، اگر خط d، لبهٔ رودخانه و نقطهٔ A خانهٔ مرد و نقطهٔ B طویله‌اش باشد، مسئلهٔ ما یافتن نقطهٔ M روی d است؛

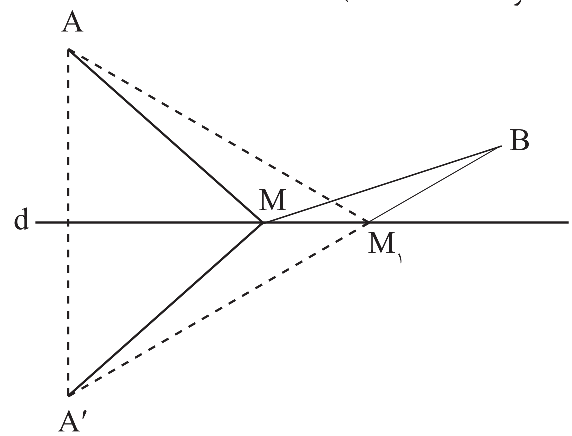


شکل ۵

به‌طـــوری کـــه AM+MB حداقل مقدار ممکن باشـــد. کدام‌یک از این Mها (M_1 و M_2 و M_3 و...) مناسب‌ترین نقطه برای آب برداشـــتن اســـت طوری که به ازای آن، AM+MB کوتاه‌ترین مسیر باشد؟

برای پاسخ به پرسش مذکور، هرون این روش را به کار برد:

برای هر نقطهٔ دلخواه M روی d، قرینهٔ AM نسبت به d، یعنی $A'M$ را مطابق شکل می‌کشیم و A' را به B وصل می‌کنیم (d عمودمنصف AA' است).



شکل ۶

چـون هر نقطـه روی عمودمنصفِ یـک پاره‌خط از دو سـر پاره‌خط به یک فاصله اسـت، پس $AM=A'M$ و روشن اسـت که: $A'M+MB \geq A'B$. بنابرایـن: $AM+MB \geq A'B$ و $A'B=A'M_1+M_1B$. از آنجا کـه $A'M_1=AM_1$ (چرا؟)، پس: $A'B=AM_1+M_1B$. بنابرایـن: $AM+MB \geq AM_1+M_1B$. نتیجـه می‌گیریم کـه بهتریـن نقطه، محـل تلاقی $A'B$ (A' قرینهٔ A نسبت به d است) با d است.

نتیجه: برای یافتن نقطه‌ای که مرد باید از آنجا آب بردارد، باید قرینهٔ خانه را نسـبت بـه رودخانه بیابیم و از آنجا خطی مستقیم به طویله وصل کنیم. نقطهٔ برخورد این خط و رودخانه همان نقطهٔ مطلوب است.

مسئله: هـرون در کتاب کاتوپتریکا با فرض اینکه نور در کوتاه‌ترین مسیر حرکت می‌کند (در واقع نور مسیری را طی می‌کند که در کوتاه‌ترین زمان باشد)، ثابت کرد که در بازتابش نور از آینه، زاویه‌های تابش و بازتابش با هم برابرند. آیا می‌توانید به کمک ایدهٔ مسئلهٔ قبل درستی این موضوع را به روش هرون ثابت کنید؟

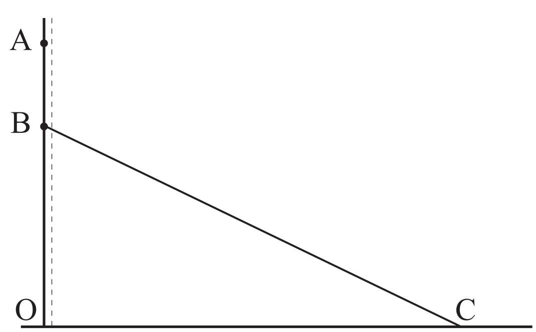
۴: مسئلهٔ بابلی‌ها

شواهدی وجود دارد که نشان می‌دهد، بابلی‌ها با «قضیهٔ **فیثاغورس**» آشـنا بوده‌اند، امـا در اینکه اثبـات آن را هم می‌دانسـته‌اند، جای تردید است. یکی از مسائل کاربردی که بابلی‌ها مطرح کرده‌اند و نشان‌دهندهٔ این موضوع است مسئلهٔ زیر است: نردبانی به طول معلوم را به‌صورت عمودی (با فرض اینکه نردبان در این حالت سـقوط نمی‌کند) به دیوار قائمی تکیه داده‌ایم. پایهٔ نردبان را که در دسـت ماسـت، چه‌قدر از دیوار فاصله بدهیم و دور کنیم، تا لبهٔ بالایی آن به اندازهٔ معین پایین بیاید؟

به‌عنوان مثال، نردبانی به طـول ۳۰ متر به دیوار قائمی به‌طور عمودی تکیه دارد. لبهٔ پایینی نردبان را چند متر از دیوار دور کنیم تا لبهٔ بالایی آن ۶ متر پایین بیاید؟

حل: مطابق شـکل ۷، نردبان ابتدا در وضع OA اسـت و در نتیجـه داریم: $OA=30m$. می‌خواهیـم نردبان به اندازهٔ $AB=6m$ از جای قبلی خود به پایین منتقل شـود و نردبان بـه وضع BC دربیاید. با توجه به اینکـه داریم: $BC=30m$ و $OB=24m$، محاسبهٔ OC به کمک قضیهٔ فیثاغورس به سادگی مقدور است:

$$OB^2+OC^2=BC^2 \Rightarrow 576+OC^2=900$$
$$\Rightarrow OC^2=324,\ OC=18m$$



شکل ۷

بنابراین باید لبهٔ پایینی را ۱۸ متر از دیوار دور کنیم.

* hooshang_sharghi_45@yahoo.com
hooshang.sharghi.45@gmail.com

پی‌نوشت‌ها

1. Miletus
2. Metrica
3. pneumatica