



مانا در جست‌وجوی حقیقت

بخش دوم

ادعاهایی دربارهٔ بعضی چیزها

کلیدواژه‌ها: درستی، نادرستی، دلیل، مثال، بعضی، وجود

حالا هم مانا سعی دارد هر یک از این حدس‌ها را اثبات کند (یعنی برای درستی آن دلیل بیاورد) و یا رد کند (یعنی نشان دهد که آن حدس نادرست است). حدس‌های ۱ تا ۴ را دوباره بخوانید و به کلماتی که زیر آن‌ها خط کشیده شده است، خوب دقت کنید:

حدس ۱: بعضی از اعداد زوج، اول‌اند.

حدس ۲: دو عدد فرد مختلف **وجود دارند** که مجموع آن‌ها عددی اول است.

حدس ۳: بین اعداد طبیعی دو عدد فرد مختلف **پیدا می‌شوند** که اختلاف آن‌ها عددی اول است.

حدس ۴: مجموع **هر** دو عدد که یکی زوج و دیگری فرد باشد، عددی اول است.

حدس ۴ یک فرق مهم با حدس‌های ۱ تا ۳ دارد. حدس ۴ ادعایی دربارهٔ هر عدد دارد. در شمارهٔ قبل دیدیم که مانا چگونه برای تأیید ادعاهایی دربارهٔ همه چیز، به چند مثال راضی نمی‌شد و به دنبال دلیل قانع‌کننده‌ای برای درستی ادعا بود. او همچنین برای اینکه نادرست بودن ادعایی دربارهٔ همه چیز را نشان دهد، از مثال نقض استفاده می‌کرد؛ یعنی مثالی می‌زد که در مورد آن مثال، ادعای مطرح‌شده درست نباشد. اما حدس‌های ۱ تا ۳ ادعاهایی دربارهٔ همه چیز نیستند. حدس ۱ نمی‌گوید که «همهٔ اعداد زوج، اول‌اند» بلکه می‌گوید «**بعضی** از اعداد زوج، اول‌اند.»

مانا به اعداد و کشف رابطهٔ بین آن‌ها خیلی علاقه دارد. کوچک‌تر که بود، ساعت‌ها می‌نشست و اعداد را جمع و تفریق می‌کرد و سعی داشت قوانین جدیدی کشف کند. مثلاً در هشت سالگی کشف کرده بود که «حاصل جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج است»؛ کشفی که او را بسیار شگفت‌زده کرد و بارها در جمع دوستان و فامیل دربارهٔ آن حرف زد و برای درستی آن دلیل آورد. (آیا شما هم دلیلی برای درستی این ادعای مانا دارید؟)

مانا که تازگی‌ها با اعداد اول و مرکب آشنا شده، مدام سعی دارد حقایق جدیدی دربارهٔ آن‌ها و نیز ارتباط آن‌ها با اعداد زوج و فرد پیدا کند.

حدس ۱ مانا: بعضی از اعداد زوج، اول‌اند.

حدس ۲ مانا: دو عدد فرد مختلف وجود دارند که مجموع آن‌ها عددی اول است.

حدس ۳ مانا: بین اعداد طبیعی دو عدد فرد مختلف پیدا می‌شوند که اختلاف آن‌ها عددی اول است.

حدس ۴ مانا: مجموع هر دو عدد که یکی زوج و دیگری فرد باشد، عددی اول است.

این‌ها فقط چهار تا از حدس‌هایی هستند که مانا به تازگی زده است؛ حدس‌هایی که هنوز به کشف تبدیل نشده‌اند، چون مانا هنوز از درستی آن‌ها مطمئن نیست. در شمارهٔ قبل دیدیم که مانا حاضر نبود بدون **دلایل کافی** هر ادعایی را بپذیرد.

حدس ۲ نمی‌گوید که «هر دو عدد فرد مختلف، مجموعشان عددی اول است»، بلکه می‌گوید «دو عدد فرد مختلف وجود دارند که مجموع آن‌ها عددی اول است».

حدس ۳ نمی‌گوید که «اختلاف هر دو عدد فرد مختلف، عددی اول است» بلکه می‌گوید «بین اعداد طبیعی دو عدد فرد مختلف پیدا می‌شوند که اختلاف آن‌ها عددی اول است».

حدس ۲. «دو عدد فرد مختلف وجود دارند که مجموع آن‌ها عددی اول است.»

مانا باز هم شروع می‌کند به مثال زدن. حدس ۲ ادعایی دربارهٔ اعداد فرد مختلف دارد، پس مانا هم مثال‌هایش را از بین اعداد فرد مختلف انتخاب می‌کند.

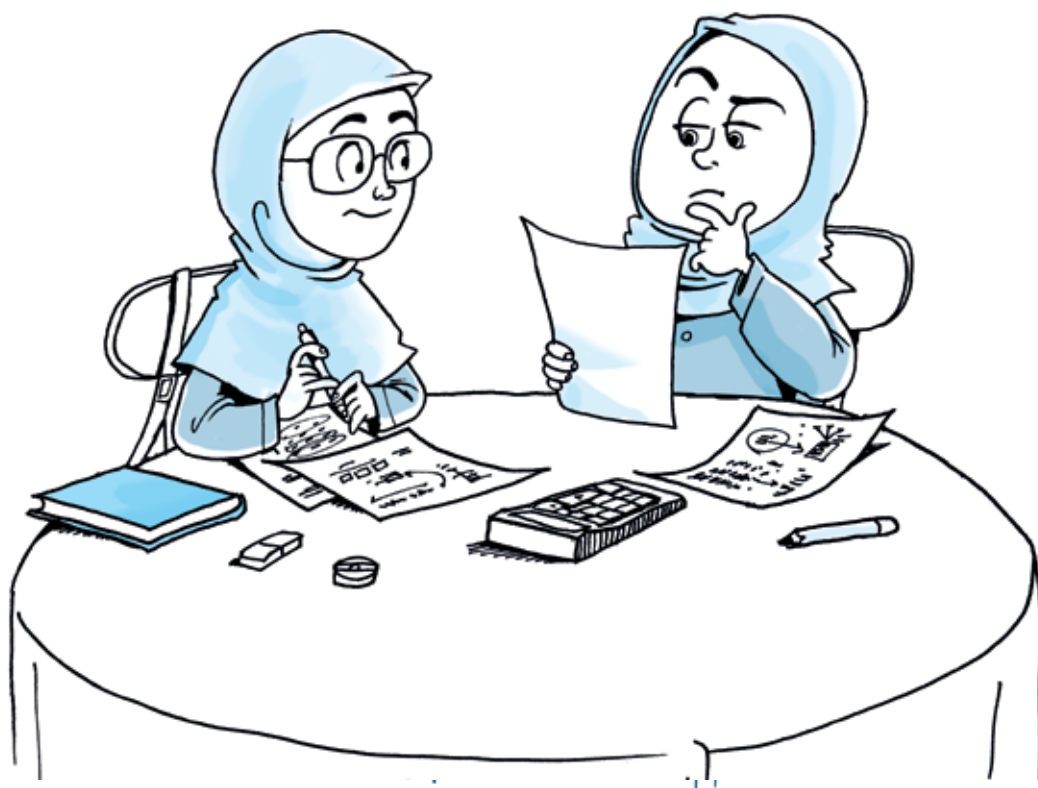
دو عدد فرد مختلف	اختلاف آن‌ها	آیا اختلاف آن‌ها عددی اول است؟
۷ و ۹	$9-7=2$	خیر؛ ۲ اول نیست.
۸۴۱ و ۱۳۵	$135-841=976$	خیر؛ ۹۷۶ اول نیست.
۴۵ و ۱۴۵	$145-45=100$	خیر؛ ۱۰۰ اول نیست.
۲۰۱۳ و ۱	$2013-1=2012$	خیر؛ ۲۰۱۲ اول نیست.

هریک از حدس‌های ۱ تا ۳ ادعا می‌کنند که می‌توان اعدادی را با خواص یادشده پیدا کرد. بنابراین برای نشان دادن درستی هر یک از این جملات کافی است عددهایی را پیدا کنیم که آن خواص را دارند. در ادامه، تلاش‌های مانا برای درستی یا نادرستی هر یک از حدس‌هایش را می‌بینیم.

حدس ۱. «بعضی از اعداد زوج، اول‌اند.»

مانا به خوبی می‌داند که اعداد زوج بسیاری وجود دارند که اول نیستند. مثلاً ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۲، ۲۴، ۲۶، ۲۸، ۳۰، ۳۲، ۳۴، ۳۶، ۳۸، ۴۰، ۴۲، ۴۴، ۴۶، ۴۸، ۵۰، ۵۲، ۵۴، ۵۶، ۵۸، ۶۰، ۶۲، ۶۴، ۶۶، ۶۸، ۷۰، ۷۲، ۷۴، ۷۶، ۷۸، ۸۰، ۸۲، ۸۴، ۸۶، ۸۸، ۹۰، ۹۲، ۹۴، ۹۶، ۹۸، ۱۰۰. چون همهٔ این اعداد بر ۲ بخش پذیرند و بنابراین به جز خودشان و یک، مقسوم‌علیه دیگری دارند. اما عدد زوج ۲ فقط دو مقسوم‌علیه دارد: ۱ و ۲. بنابراین عدد زوج ۲ اول است. مانا

?



مانا مثال‌های دیگری هم می‌زند که در جدول نوشته نشده‌اند. شما هم در جدول بالا مثال بزنید و حدس مانا را امتحان کنید.

مانا مثال‌های زیادی می‌زند، اما موفق نمی‌شود دو عدد فرد مختلف پیدا کند که مجموعشان اول باشد. مانا هنوز نمی‌تواند مطمئن باشد که حدس دوم نادرست است و «هیچ دو عدد فرد مختلفی با مجموع اول وجود ندارد». در واقع، هر چند که مانا مثال‌های بسیاری را امتحان کرده، هنوز ممکن است دو عدد فرد مختلف وجود داشته باشند که مانا آنها را بررسی نکرده و مجموعشان اول باشد. نظر شما چیست؟

مانا به مثال‌های جدول خود بیشتر دقت می‌کند و به نتیجه جالبی می‌رسد. مجموع دو عدد فرد، حتماً عددی زوج است و هر عدد زوج بر ۱ و ۲ و خودش بخش پذیر است. پس به جز عدد ۲ (که دو مقسوم‌علیه دارد) بقیه اعداد زوج بیش از دو مقسوم‌علیه دارند و اول نیستند. بنابراین مجموع دو عدد فرد مختلف نمی‌تواند عددی اول شود، مگر اینکه حاصل جمع

گاهی اوقات جملات درباره بعضی چیزها ادعا می‌کنند، یعنی ادعا می‌کنند که «چیزی وجود دارد که فلان خاصیت را دارد.»

برای اطمینان از درستی این نوع جملات کافی است یک مثال تأییدکننده پیدا کنیم، یعنی مثالی که آن خاصیت را دارد

برابر با ۲ شود. مانا با کمی تأمل به این نتیجه می‌رسد که ممکن نیست حاصل جمع دو عدد فرد مختلف برابر با ۲ شود، زیرا عدد ۲ فقط از $1+1$ به دست می‌آید که ۱ و ۱ اعداد مختلفی نیستند و با هم برابر هستند. به این ترتیب مانا به این نتیجه می‌رسد که حدس دوم درست نیست و «اعداد فرد مختلفی که مجموعشان عددی

آیا اختلاف آن‌ها عددی اول است؟	اختلاف آن‌ها	دو عدد فرد مختلف
بله؛ ۲ اول است.	$21-19=2$	۲۱ و ۱۹
بله؛ ۲ اول است.	$209-207=2$	۲۰۷ و ۲۰۹

تأیید جملاتی که ادعاهایی درباره همه چیز دارند، به دلایل کلی قانع‌کننده نیاز دارد و برای رد آن‌ها یک مثال نقض کافی است

اول باشد، **وجود ندارد** و به عبارت دیگر «مجموع هیچ دو عدد فرد مختلفی نمی‌تواند عددی اول باشد». مثال‌هایی که مانا برای این حدس بررسی کرد، زیاد اما محدود بودند. یعنی مثال‌های بسیار دیگری از اعداد فرد مختلف وجود دارد که نه مانا آن‌ها را بررسی کرده است و نه هیچ‌یک از شما. اما حالا مانا مطمئن است که هرچه‌قدر هم که خودش مثال بزند یا شما، چنین اعدادی پیدا نخواهد شد؛ در واقع چنین اعدادی وجود ندارند!

حدس ۳. «بین اعداد طبیعی دو عدد فرد مختلف پیدا می‌شوند که اختلاف آن‌ها عددی اول است.»

برای بررسی این حدس هم مانند حدس قبل، مانا شروع کرد به مثال زدن.

برای بررسی این حدس هم مانند حدس قبل، مانا شروع کرد به مثال زدن.

دو عدد فرد مختلف	اختلاف آن‌ها	آیا اختلاف آن‌ها عددی اول است؟
۳۷ و ۵۳	$53 - 37 = 16$	خیر؛ ۱۶ اول نیست.
۴۰۱ و ۱۵۹	$401 - 159 = 242$	خیر؛ ۲۴۲ اول نیست.
۱۷ و ۹	$17 - 9 = 8$	خیر؛ ۸ اول نیست.
۲۰۱۳ و ۵	$2013 - 5 = 2008$	خیر؛ ۲۰۰۸ اول نیست.

گاهی اوقات جملات درباره بعضی چیزها ادعا می‌کنند، یعنی ادعا می‌کنند که «چیزی وجود دارد که فلان خاصیت را دارد». در زیر چند نمونه از این نوع جمله‌ها که در ریاضی با آن‌ها برخورد می‌کنید، نوشته شده است:

- بعضی از مثلث‌های متساوی‌الساقین، متساوی‌الاضلاع نیز هستند.
- اعداد زوجی وجود دارند که بر ۷ بخش پذیرند.
- کسری پیدا می‌شود که از معکوس خودش بزرگ‌تر است.
- می‌توان عددی طبیعی یافت که برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های خودش باشد.

برای اطمینان از درستی این نوع جملات کافی است یک مثال تأییدکننده پیدا کنیم، یعنی مثالی که آن خاصیت را دارد. البته گاهی مانند حدس سوم می‌توان بیش از یک مثال یافت، اگرچه پیدا کردن یک مثال هم برای اثبات درستی این جملات کافی است. اما همان‌طور که در حدس دوم دیدیم، برای اینکه نشان دهیم جمله‌ای که ادعا می‌کند «چیزی وجود دارد که فلان خاصیت را دارد» نادرست است، مثال زدن کافی نیست و باید با یک دلیل قانع‌کننده، مطمئن شویم که هیچ‌گاه چنین چیزی پیدا نخواهد شد. بالاخره اگر در ادعاهایی درباره بعضی چیزها نه مثال برای درستی ادعا پیدا شد و نه دلیلی برای رد ادعا، نمی‌توان درباره درستی یا نادرستی ادعا نظر داد و باید بیشتر به جست‌وجوی حقیقت رفت!

مانا پس از امتحان کردن این چهار مثال، به یاد حدس قبل افتاد. در این مورد هم می‌توان گفت که اختلاف دو عدد فرد حتماً عددی زوج است و هر عدد زوج غیر از عدد ۲ مرکب است. یعنی اگر دو عدد فرد بیش از ۲ واحد اختلاف داشته باشند، اختلاف آن‌ها نمی‌تواند عددی اول باشد. اما اگر دو عدد فرد ۲ واحد اختلاف داشته باشند چه؟ به این ترتیب مانا مثال‌های بعدی را تولید می‌کند.

دو عدد فرد مختلف	اختلاف آن‌ها	آیا اختلاف آن‌ها عددی اول است؟
۱۹ و ۲۱	$21 - 19 = 2$	بله؛ ۲ اول است.
۲۰۷ و ۲۰۹	$209 - 207 = 2$	بله؛ ۲ اول است.

همان‌طور که در شماره قبل دیدیم، تأیید جملاتی که ادعاهایی درباره همه چیز دارند، به دلایل کلی قانع‌کننده نیاز دارد و برای رد آن‌ها یک مثال نقض کافی است. حدس چهارم مانا ادعاهایی از این نوع است. مانا بررسی درستی یا نادرستی این حدس را به شما می‌سپارد!

به این ترتیب مانا دو عدد فرد مختلف (مثلاً ۱۹ و ۲۱) پیدا کرد که اختلافشان عددی اول است. بنابراین حدس سوم درست از آب در می‌آید و می‌توان مطمئن بود که «دو عدد فرد مختلف وجود دارند که اختلاف آن‌ها عددی اول است.»