ریاضی لذت‌بخش
در کلاس خانم جمشیدی

بخش ۳ دنباله‌های فاری ـ کسرها به ترتیب مقدار

آناهیتا کمیجانی
دبیر ریاضی رودهن

اشاره

کلاس‌هایش را دوست دارم. خانم جمشیدی را می‌گویم، دبیر ریاضی‌مان.
تفاوت کلاس‌های ریاضی خانم جمشـــیدی با بقیهٔ کلاس‌هایمان این است که مطالب ریاضی را با روشی جذاب و سرگرم‌کننده درس می‌دهد. به علاوه، به ما اجازه می‌دهد روی مسائل خوب فکر کنیم و نظراتمان را بیان کنیم.
اوایل از روش تدریس او تعجب می‌کردیم و متوجه نمی‌شدیم که در حال درس دادن است. روش او بسیار جدید و متفاوت بود. حتی گاهی فکر می‌کردیم در حال صحبت کردن معمولی هستیم. از ریاضی خشک و دست‌نیافتنی خبری نبود و مســائل حل نشدنی جای خود را با مسائل واقعی حل شدنی عوض کرده بودند. بعد از مدتی متوجه شدیم، بیشتر از هر کلاس ریاضی دیگری در کلاس خانم جمشیدی «ریاضی» یاد می‌گیریم: «ریاضی لذت‌بخش»! به همین خاطر تصمیم گرفتم کلاس‌های ریاضی‌مان و تمام صحبت‌های ردوبدل شـــده بین بچه‌های کلاس با دبیر خلاقمان، خانم جمشیدی را مکتوب کنم و با دیگران سهیم شوم. مطمئن هستم شما هم از این مطالب لذت می‌برید.

روزی پاییزی بود و منتظر کلاس خانم **جمشـــیدی** بودیم. می‌خواستیم زودتر بدانیم دربارهٔ چه مطلبی برایمان طرح سؤال می‌کند. انتظار به پایان رسید و خانم جمشیدی مانند همیشه با لبخندی مهربان به کلاس وارد شد. همگی از ســر جایمان بلند شـــدیم؛ به احترام خانم جمشیدی، به احترام دانایی.

باران با همان اشـــتیاق پرسید: «امروز راجع به چی صحبت می‌کنیم؟»

خانم جمشیدی گفت: «می‌خواهیم کسرهای بین ۰ و ۱ را به ترتیب مقدارشان مرتب کنیم.»

من پرســـیدم: «امکانش هســـت؟ یعنی کوچک‌ترین کسر بزرگ‌تر از صفر وجود دارد؟»

خانم جمشیدی پاســـخ داد: «نه عزیزم، کوچک‌ترین کسر وجود ندارد. مهم نیست مقدار دو کسر چقدر باشد. مثـــلاً بین $\frac{1}{1000001}$ و $\frac{1}{1000000}$ بی‌نهایت کســـر وجود دارد. شما می‌توانید بازه را به اجزای کوچک تقسیم کنید. مهم نیست چقدر کوچک باشد.»

مهتاب پرســـید: «پس چطور می‌توانیم کسرها را به ترتیب مقدار مرتب کنیم؟»

خانم جمشـــیدی پاســـخ داد: «ما برای خودمان باید محدودیت‌هایـــی قرار دهیم. مخرج کســـرها را کوچک‌تر یا مســـاوی یک عـــدد در نظـــر می‌گیریم. مثـــلاً دربارهٔ کســـرهایی صحبت می‌کنیم که مخرج آن‌ها کوچک‌تر یا مســـاوی ۴ باشد. می‌توانید این کسرها را به ترتیب مرتب کنید؟»

باران گفت: «این خیلی ساده است: $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}$.»

مهتاب متفکرانه گفت: «کسر $\frac{2}{4}$ هم جزء این‌هاست؟»

خانم جمشـــیدی پاســـخ داد: «نه عزیـــزم، $\frac{2}{4}$ با $\frac{1}{2}$ مســـاوی است که در بین کســـرها وجود دارد. کسرهایی که باران گفـــت دنبالهٔ فـــاری (Farey) از مرتبهٔ ۴ یا به اختصار F_4 نامیده می‌شود که از نام زمین‌شناس معروف، **جان فاری** (John Farey)، گرفته شده است. او در سال ۱۸۱۶ در مجلهٔ «phil so phical» در مورد این کســـرها نوشـــت. البته قبل از او ریاضی‌دانی به نام **چارلز هارلس** (Chareles Haros) مقاله‌ای دربارهٔ این مطلب در ســـال ۱۸۰۲ نوشته بود. حال در مورد دنبالهٔ بعدی چه می‌توان گفت؟ از مرتبهٔ ۵؟»

من گفتم: «به این صورت می‌شه:

$\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}$»

خانم جمشیدی گفت: «درسته و دنبالهٔ بعدی هم به راحتی به دست می‌آید. فکر می‌کنید چرا؟»

مهتاب جواب داد: «چون کسرهای جدید از $\frac{۱}{۶}$ شروع می‌شوند و $\frac{۵}{۶}$ هم کسر آخر است. اما چطور می‌شود جایگاه آن‌ها را متوجه شد؟»

باران گفت: «برای مقایسهٔ دو کسر از مخرج مشترک استفاده می‌کنیم، درست است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، مانند وقتی که شما می‌خواهید کسرها را با هم جمع کنید یا از هم کم کنید. من می‌خواهم شما به تفاضل کسرهای مجاور هم دقت کنید. مثلاً در $F_۵$، $\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۳}$ چقدر می‌شود؟»

مهتاب گفت: «می‌شود: $\frac{۱}{۱۵}=\frac{۶}{۱۵}-\frac{۵}{۱۵}$.»

خانم جمشیدی گفت: «درست است. با استفاده از این مطلب ترتیب صحیح را در $F_۷$ پیدا کنید. این راه سریع‌تری است که به شما کمک می‌کند، کسرهای جدید را در جای درست آن‌ها قرار دهید. تمام تفاضل‌های بین کسرهای مجاور را پیدا کنید. دنبالهٔ فاری $F_۷$ به صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۷},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۴},\frac{۲}{۷},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۷},\frac{۱}{۲},\frac{۴}{۷},\frac{۳}{۵},\frac{۲}{۳},\frac{۵}{۷},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\frac{۵}{۶},\frac{۶}{۷}$$

تفاضل‌ها هم به‌صورت زیرند:

$$\frac{۱}{۴۲},\frac{۱}{۳۰},\frac{۱}{۲۰},\frac{۱}{۲۸},\frac{۱}{۲۱},\frac{۱}{۱۵},\frac{۱}{۳۵},\frac{۱}{۱۴}$$

بقیه مشابه همین‌هاست؛ به ترتیب عکس این کسرها.»

من گفتم: «تفاضل‌ها همگی صورتشان ۱ و مخرج‌هایشان هم حاصل‌ضرب مخرج‌های دو کسر مجاور است.»

مهتاب گفت: «من چیز جالبی متوجه شدم: به نظر می‌آید، کسرهای جدید از دو کسر مجاورشان به دست می‌آیند؛ مثلاً: $\frac{۲}{۷}=\frac{۱+۱}{۴+۳}$ و $\frac{۴}{۷}=\frac{۱+۳}{۲+۵}$. فقط کافی است صورت و مخرج کسرها را جمع کنید تا کسر جدیدی به‌دست آورید. البته برای کسر اول و آخر انگار این‌طور نیست، چون کسر مجاور برای آن‌ها نداریم.»

خانم جمشیدی گفت: «حق با شماست، ولی می‌شود کسر $\frac{۰}{۱}$ را به عنوان اولین کسر و کسر $\frac{۱}{۱}$ را به عنوان کسرهای مجاور در نظر گرفت.»

باران گفت: «وقتی می‌خواهید کسرهای جدیدی در $F_۷$ بسازید، مخرج‌ها باید تا ۷ نوشته شوند. اما آیا برای $F_۸$ هم همین‌طور است؟ تمام صورت‌های تفاضل‌های کسرهای مجاور برابر ۱ هستند؟»

خانم جمشیدی گفت: «سؤال خوبی است. برای نوشتن آن‌ها اول چک می‌کنیم که آیا جمع کردن صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم کسری به ما می‌دهد که بین دو کسر قبلی باشد که با آن‌ها شروع کردیم؟ بیایید فرض کنیم دو کسر مثبت داریم که به‌صورت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ هستند؛ به‌طوری‌که $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ و می‌نویسیم:

$$\frac{p}{q}=\frac{a+c}{b+d}$$

حال مقدار $\frac{p}{q}-\frac{a}{b}$ را به‌دست می‌آوریم.»

باران گفت: «می‌شود: $\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}$ که جوابش به این صورت است:

$$\frac{b(a+c)-a(b+d)}{b(b+d)}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}$$

حالا چطور بفهمیم که این کسر مثبت است یا منفی؟»

من گفتم: «اگر بدانیم: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$، آن‌وقت $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$ مثبت و برابر $\frac{bc-ad}{bd}$ است. بنابراین bc-ad مثبت است که کسر $\frac{bc-ad}{b(b+d)}$ را هم مثبت می‌کند.»

خانم جمشـــیدی گفت: «کاملاً درســـت اســـت. شما می‌توانید چک کنید که $\frac{c}{d}-\frac{p}{q}$ هم مثبت اســـت یا نه که آن را به عنوان تمرین به خودتان واگذار می‌کنم.»

مهتاب ســـؤال کرد: «پس ثابت شـــد که هر کســـر جدیـــد از جمع کردن صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم از کسرهای مجاور به‌دست می‌آید؟»

خانم جمشیدی جواب داد: «خیر عزیزم، ما هنوز این موضـــوع را ثابت نکرده‌ایم. همچنیـــن ثابت نکرده‌ایم که تفاضل کســـرهای مجاور همیشه صورتشان برابر ۱ است. ما این مطالب را برای دنبالهٔ $F_۷$ ثابت کردیم و برای $F_۸$ هم می‌توانیم ثابت کنیم. اما این‌ها دنبالهٔ خاصی از دنباله‌های فاری هستند. پس باید برای همهٔ دنباله‌ها برقرار باشند تا به عنوان یک اصل کلی قبولشان کنیم. مثلاً فرض کنیم در دنبالهٔ فاری $F_{n-۱}$ برقرار هستند و برای دنبالهٔ فاری F_n ثابت کنیم.»

فـــرض می‌کنیم $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کســـر مجاور در دنبالهٔ فاری $F_{n-۱}$ هســـتند و کســـر $\frac{m}{n}$ بین آن‌هاست که کسر جدیـــدی اســـت. می‌خواهیم تفاضل بین کســـر جدید و کسرهای مجاور آن را بررسی کنیم.»

باران گفت: «پس شما می‌خواهید مقدار $\frac{m}{n}-\frac{a}{b}$ را به‌دست بیاورید؟ حاصلش به صورت $\frac{bm-an}{bn}$ می‌شود. و همین‌طور: $\frac{c}{d}-\frac{m}{n}=\frac{cn-dm}{dn}$»

خانم جمشـــیدی گفت: «بله و این تفاضل‌ها را $\frac{r}{bn}$ و $\frac{s}{dn}$ می‌نامیم.»

من پرســـیدم: «پس داریم $bm-an=r$ و $cn-dm=s$. درست است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «درست است و می‌خواهیم m و n را برحسب بقیه به دست آوریم.»

مهتاب متفکرانه گفت: «برای این کار می‌توانیم اولین معادله را در c و دومی را در a ضرب کنیم که معادله‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$anc-adm=as\ ,\ bcm-acn=cr$

بعد آن‌ها را جمع می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$bcm-adm=cr+as$.

باران گفت: «یعنی داریم: $(bc-ad)m=as+cr$

بنابراین: $m=\frac{as+cr}{bc-ad}$.»

من گفتم: «مقدار n هم از تساوی زیر به‌دست می‌آید: $n=\frac{bs+dr}{bc-ad}$.»

خانم جمشـــیدی گفت: «بله دقیقـــاً. از این موضوع می‌فهمیم که دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر مجاور در دنبالهٔ فاری $F_{n-۱}$ هســـتند و صورت تفاضل آن‌ها برابر ۱ است و مخرجش حاصل‌ضرب مخرج آن‌هاست.»

مهتاب گفت: «یعنی: $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}=\frac{۱}{bd}$.

بنابراین: $bc-ad=۱$.»

من هم ســـریع نتیجه‌گیـــری کردم: «پـــس داریم: $m=as+cr$ و $n=bs+dr$.»

خانم جمشیدی نگاه مهربانی به من کرد و پاسخ داد: «بله و کســـر جدید $\frac{m}{n}$ را می‌توانیم به صورت $\frac{as+cr}{bs+dr}$ بنویسیم.»

باران پرسید: «آیا احتمال دارد این کسر ساده شود؟ آیا r و s می‌توانند عامل مشترک غیر از ۱ داشته باشند؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «ســـؤال خوبی است، اما خیر. مثل $\frac{۲}{۴}$ که نمی‌توانســـت در $F_۴$ ظاهر شـــود، چون ساده می‌شـــود، $\frac{m}{n}$ هم نمی‌تواند ساده شود و این یعنی r و s عامل‌های مشترک بزرگ‌تر از ۱ ندارند. اگر این‌طور بود، آن‌ها عامل مشـــترک داشتند. در مورد مقدارهای r و s چه می‌توان گفت؟»

باران گفت: «r و s هر دو می‌توانند برابر ۱ باشـــند که در این صورت، $\frac{m}{n}$ برابر $\frac{a+c}{b+d}$ می‌شود و می‌دانیم بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قرار دارد.»

من گفتم: «بله و در واقع تنها احتمال ممکن اســـت. چـــون اگر r و s هر دو بیشـــتر از ۱ باشـــند، با تســـاوی $bs+dr=n$، مقـــدار b+d بایـــد کمتر از n باشـــد. در این صورت، $\frac{a+c}{b+d}$ همین الان هم بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قرار دارد و کسر جدیدی نیست.»

خانم جمشـــیدی گفت: «آفرین! و البته r و s همان صورت‌های تفاضل‌ها بین کســـرهای جدید و کســـرهای مجاورند. ایـــن ویژگی در تمام دنباله‌هـــای فاری صادق خواهد بود. حال آیا ما می‌توانیم کسرهای مجاور $\frac{۳}{۸}$ را در

$F_{۱۰}$ و $F_{۵۰}$ پیدا کنیم؟»

مهتاب گفت: «برای دنبالهٔ فاری $F_{۱۰}$ کاری ندارد، ولی برای $F_{۵۰}$ راه زیادی در پیش داریم.»

خانم جمشیدی با لبخندی گفت: «من هم انتظار ندارم شما دنبالهٔ $F_{۵۰}$ را به‌طور کامل بنویسید. این کار را با تفاضل کسرهای مجاور انجام می‌دهیم. فرض کنید دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قبل و بعد $\frac{۳}{۸}$ باشند. دربارهٔ $\frac{۳}{۸}-\frac{a}{b}$ چه می‌توان گفت؟»

باران گفت: «باید برابر $\frac{۱}{۸b}$ باشد. پس داریم: $\frac{۳b-۸a}{۸b}=\frac{۱}{۸b}$. بنابراین: $۳b-۸a=۱$. اما این یک معادله و دو مجهول است.»

خانم جمشیدی گفت: «در واقع همین‌طور است. برای دنباله‌های فاری مختلف راه‌حل‌های متفاوتی وجود دارند، آیا شما می‌تونید راهی کلی برای همهٔ عددها پیدا کنید؟»

من گفتم: «مثلاً فرض کنیم: $a=۱۱$ و $b=۳$.»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، حال اگر ما قرار دهیم: $a=۱+x$ و $b=۳+y$، دربارهٔ x و y چه می‌توان گفت؟»

باران گفت: «به دست می‌آوریم: $۳(۳+y)-۸(۱+x)=۱$ بنابراین: $۳y=۸x$.»

خانم جمشیدی گفت: «بنابراین x باید مضرب ۳ باشد و y هم مضرب ۸. فرض کنیم: $x=۳k$ و $y=۸k$ که $۸x$ و $۳y$ هر دو برابر $۲۴k$ می‌شوند. آن‌گاه داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{۱+۳k}{۳+۸k}$$

اگر به ازای k قرار دهیم: ...,۰,۱,۲,۳ خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b}=\frac{۱}{۳},\frac{۴}{۱۱},\frac{۷}{۱۹},\frac{۱۰}{۲۷},...$$

کدام‌یک می‌توانند کسر مجاور در $F_{۱۰}$ باشند؟»

من جواب دادم: «باید $\frac{۱}{۳}$ باشد. کسرهای بعدی تا $F_{۱۱}$ ظاهر نمی‌شوند.»

مهتاب گفت: «دنبالهٔ فاری $F_{۵۰}$، مقدار $۳+۸k$ بیشتر از ۵۰ نمی‌تواند باشد؛ یعنی:

$$۳+۸k\le ۵۰ \Rightarrow ۸k\le ۴۷$$

که از این نامساوی بیشترین مقدار k برابر ۵ می‌شود.»

من گفتم: «کسر مجاور می‌شود: $\frac{۱۶}{۴۳}=\frac{۱+۱۵}{۳+۴۰}$.»

خانم جمشیدی گفت: «آفرین و شما می‌توانید چک کنید که مقدار $\frac{۱۶}{۴۳}-\frac{۳}{۸}$ مساوی است با: $\frac{۱}{۳۴۴}=\frac{۱}{۸\times ۴۳}$.

من فکر می‌کنم به راحتی می‌توانید برای تمرین کسرهای مجاور $\frac{۳}{۸}$ و $\frac{۲}{۵}$ را در دنبالهٔ فاری $F_{۱۰}$ و کسرهای مجاور $\frac{۱۷}{۴۵}$ را در $F_{۵۰}$ پیدا کنید.»