

بای تخته

آموزشی



تهیه و تنظیم:

محرم نژاد ایردموسی*

اشاره:

«بای تخته» عنوان بخش ثابتی در «فصل نامه» برهان است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از فصل نامه، ۲۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها پردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در فصل نامه، برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس فصل نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکته آخر اینکه در چند شماره اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به تدریج پر بارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۱. مجموعه $X = \{1, 2, \dots, n\}$ مفروض است.

الف) X چند زیرمجموعه با تعداد اعضای زوج و مجموع اعضای زوج دارد؟

ب) X چند زیرمجموعه با تعداد اعضای زوج و مجموع اعضای فرد دارد؟ (این مسئله دو قسمت دیگر نیز دارد. آن‌ها را طرح و حل کنید.)

۲. در ساعت ۹ صبح، عقربه‌های ساعت زاویه ۹۰ درجه با هم می‌سازند. بعد از ساعت ۹، اولین زمانی را مشخص کنید که مجدداً دو عقربه زاویه ۹۰ درجه با هم می‌سازند.

۳. برای هر عدد حقیقی مانند $\frac{3}{14}$ ، ۳ را جزء صحیح عدد و $\frac{0}{14}$ را جزء اعشاری عدد می‌نامیم. عدد حقیقی x را بیابید به طوری که جزء اعشاری، جزء صحیح و خود عدد: الف. سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند؛ ب. سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی باشند.

۴. اعداد طبیعی را به‌طور مارپیچ مطابق شکل روی صفحه نوشته‌ایم. موقعیت عدد ۱۳۹۲ را نسبت به عدد ۱ مشخص کنید

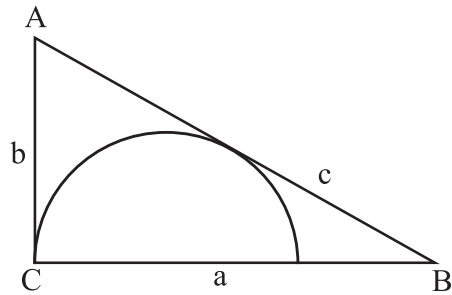
۷	۸	۹	۱۰
۶	۱	۲	۱۱
۵	۴	۳	۱۲
-	-	۱۴	۱۳

۵. زوج (x, y) از اعداد طبیعی را مربع می‌نامیم، هرگاه $x+y$ و $x \cdot y$ هر دو مربع کامل باشند؛ مانند زوج $(5, 20)$. ثابت کنید هیچ زوج مربعی موجود نیست که یکی از مؤلفه‌هایش ۳ باشد.

۶. دستگاه معادلات زیر را در مجموعه اعداد حقیقی حل کنید:

$$\begin{cases} 2(x+y-2) = y(x-y+2) \\ x^2(y-1) + y^2(x-1) = xy-1 \end{cases}$$

۷. مطابق شکل، نیم‌دایره C' در داخل مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع a ، b و c محاط شده است. شعاع نیم‌دایره را بر حسب a ، b و c به دست آورید.



۸. ثابت کنید یک مربع 5×5 را می‌توان با سه مربع 4×4 پوشاند.

۹. با فرض $S = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{1024}+1) + 1$ حاصل $\frac{1}{S^{1024}}$ را بیابید.

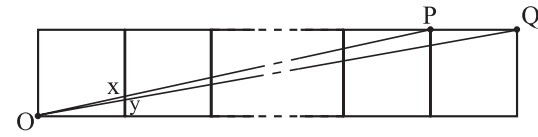
۱۰. دو مثلث ABC و CDE در یک طرف خط راست BCD واقع هستند. اگر AC ، BE را در K و DA ، CE را در L قطع کند، ثابت کنید BD و KL موازی‌اند.

۱۱. a ، b و c سه عدد صحیح هستند، به طوری که $ab + 9b + 81$ و $bc + 9c + 81$ هر دو بر 2005 بخش پذیر هستند. ثابت کنید $ac + 9a + 81$ نیز بر 2005 بخش پذیر است.

۱۲. در نهضلعی منتظم $ABCDEFGHI$ ، ثابت کنید: $AE - AC = AB$.

۱۳. همه جواب‌های حقیقی معادله زیر را پیدا کنید.
 $3\sqrt{x+y} + 2\sqrt{8-x} + \sqrt{6-y} = 14$

۱۴. 2013 مربع به ضلع 1 ، در یک ردیف از چپ به راست کنار هم چیده شده‌اند. اگر نقطه O رأس پایین و سمت چپ مربع اول و P و Q رئوس بالایی و سمت راست مربع‌های 2012 -ام و 2013 -ام باشند و P و Q را



۱۵. عددی طبیعی را انتخاب کنید. سپس همان عدد را با ترتیب ارقام معکوس در ادامه عدد بنویسید. مثلاً از عدد 13 به عدد 1331 می‌رسیم. ثابت کنید عدد حاصل همیشه مضرب یازده است.

۱۶. همه اعداد طبیعی m و n را بیابید به طوری که: $2^m - 2 = n!$

۱۷. همه جواب‌های حقیقی معادله زیر را بیابید.
 $(x-2010)^3 + (2x-2010)^3 + (4020-3x)^3 = 0$



۲۸. a و b دو عدد حقیقی هستند. ثابت کنید:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 6a - 2b + 10} + \sqrt{a^2 + b^2 - 6a + 2b + 10} \geq 2\sqrt{10}$$

۲۹. حداکثر چند مهره شاه را می توان در صفحه شطرنج $n \times n$ قرار داد، به طوری که هیچ دوتایی همدیگر را تهدید نکنند؟

۳۰. مساحت چهارضلعی ABCD با رئوس $A(9, 2)$ ، $B(4, 6)$ ، $C(7, 5)$ و $D(d, 0)$ برابر است با ۲۴. مقدار d را که عددی مثبت است بیابید.

۳۱. مربع ABCD با ضلعی به طول $2\sqrt{2}$ مفروض است.

دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۱ می کشیم. دایره دوم را به مرکز C رسم می کنیم، به طوری که در نقطه P روی AC بر دایره اول مماس شود. مساحت ناحیه‌ای داخل مربع را پیدا کنید که خارج دو دایره باشد.

۳۲. برای هر عدد حقیقی x ثابت کنید:

$$(\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x)^2 \geq 2 - \sqrt{2}$$

۳۳. اگر P_n ، n امین عدد اول باشد، برای هر $n \geq 12$ ، ثابت کنید: $P_n > 3^n$.

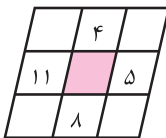
۳۴. مستطیلی مطابق شکل به چهار مستطیل کوچک تر

با نام‌های w ، x ، y و z افزاز شده است. اگر محیط مستطیل‌های w ، x و y به ترتیب برابر ۲، ۳ و ۵ باشند، محیط مستطیل z را بیابید.

W	X
Y	Z

۳۵. مطابق شکل متوازی‌الاضلاع $wxyz$ به ۹ متوازی‌الاضلاع کوچک تر تقسیم شده است. محیط چهار تا از آن‌ها در شکل مشخص شده است. محیط متوازی‌الاضلاع $wxyz$ برابر است با ۲۱.

محیط متوازی‌الاضلاع میانی را به دست آورید.



۳۶. در دوزنقه ABCD، که AB و CD موازی هستند، داریم: $AB = 15$ ، $BC = 12$ ، $CD = 30$ و $AD = 9$. مساحت دوزنقه را به دست آورید.

۱۸. هرمی با قاعده مربع داریم که طول ضلع قاعده آن ۱۰ و طول هر یک از چهار یال مجاور به رأس آن ۲۰ سانتی‌متر است. حجم هرم را به دست آورید.

۱۹. اگر $[x]$ و $\{x\}$ به ترتیب معرف جزء صحیح x و جزء اعشاری x باشند (برای مثال $[2/1] = 2$ و $\{2/1\} = 0$)، نشان دهید معادله $\{x\} = [x]$ در مجموعه اعداد گویا تنها یک جواب و در مجموعه اعداد گنگ بی نهایت جواب دارد.

۲۰. از نقطه $(0, 0)$ به همه نقاط (x, y) در صفحه با مختصات صحیح به طوری که $1 \leq x, y \leq 10$ ، پاره خط‌هایی وصل کرده ایم. چند خط از $(0, 0)$ رسم شده است؟

۲۱. n عددی طبیعی است. ثابت کنید هیچ دو عدد طبیعی مانند a و b وجود ندارند، به طوری که $\frac{[a, b]}{a+b} = n$ همان کوچک ترین مضرب مشترک a و b است.

۲۲. ثابت کنید:

$$\sum_{k=0}^{2009} (k+1)! (6^k (6k+11) - k - 1) = 2011! (6^{2010} - 1)$$

۲۳. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}} - \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots}}}}{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$$

۲۴. همه ریشه‌های حقیقی معادله $16^x + 1 = 2^x + 8^x$ را بیابید.

۲۵. f و g دو تابع حقیقی هستند، g تابعی فرد است، به ازای هر عدد حقیقی x داریم: $f(x) \leq g(x)$ و به ازای هر دو عدد حقیقی x و y می دانیم: $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. ثابت کنید f نیز تابعی فرد است.

۲۶. یک چندوجهی $m+n$ وجه دارد که m تای آن‌ها به شکل چهارضلعی و n تای دیگر به شکل مثلث هستند. همچنین در هر رأس چندوجهی چهار وجه مشترک هستند. ثابت کنید: $n=8$.

۲۷. با فرض $E(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ مطلوب است حاصل $E(\frac{1}{1392}) + E(\frac{2}{1392}) + \dots + E(\frac{1391}{1392})$.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

سرگرمی
سر علمی

ایستگاه اول

جدول واژه‌های ریاضی و ریاضی‌دان معاصر

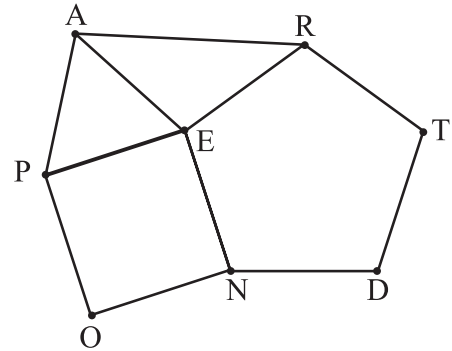
در جدولی که پیش‌رو دارید، همچون شماره‌های پیشین، تعدادی واژه ریاضی به‌صورت افقی، عمودی و مورب (از دو طرف) به‌صورت پراکنده آمده است. این واژه‌ها را در جدول پیدا کنید و دور آن‌ها خط بکشید (ممکن است واژه‌ها در یک یا چند حرف مشترک باشند). پس از مشخص کردن تمام واژه‌ها، تعدادی حرف در جدول باقی می‌ماند. از ترکیب این حروف با یکدیگر نام یکی از ریاضی‌دانان معاصر ایران به‌دست می‌آید. با ارسال نام و بیوگرافی مختصری از وی برای ما، جایزه مناسبی دریافت کنید!

ی	س	ق	م	ت	پ	و	س	ت	گ	ی
ز	ا	و	ی	ه	م	ق	ع	ر	د	س
ا	ک	ا	ت	ب	ع	ی	ک	ن	و	ا
و	ع	ب	ر	ن	ی	س	س	ر	ر	س
م	ن	و	ه	ب	ی	و	ی	ت	ت	گ
ر	ا	ا	ا	ا	ر	س	خ	ن	م	ر
ه	ا	ا	ا	ت	ر	ی	ت	ا	ا	ه
ر	ن	ر	ف	و	ا	د	ن	ا	ت	ک
ر	ه	ا	ا	ا	ب	ج	ن	ح	م	ت
ا	ا	پ	م	ب	ی	م	ا	ا	ن	ی
م	د	ن	ل	گ	ا	ر	ی	ت	م	ت
ا	ه	ل	ا	س	ن	ا	ت	ی	ا	ک

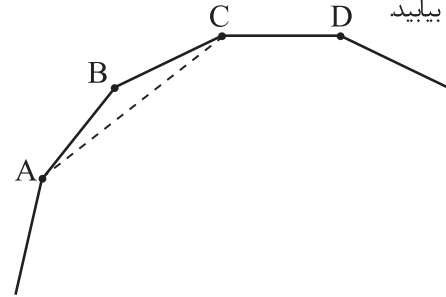
فهرست واژه‌ها:

انعکاس - میانه - هم‌گرایی - پیوستگی - منحنی
سینوسی - استنتاج - ماتریس - تابع یک‌نوا - گراف - موازی
- پارامتر - هرم - ترکیبیات - زاویه مقعر - متناوب - توان
- کمیت - آمار - متناهی - متمم - ترانهاده - کمان
درخور - نما - لگاریتم - کایت

۳۷. در شکل زیر TREND یک پنج‌ضلعی منتظم، PEA یک مثلث متساوی‌الاضلاع و OPEN یک مربع است. اندازه زاویه EAR را به‌دست آورید.



۳۸. در شکل قسمتی از یک n ضلعی منتظم نشان داده شده است. اگر زاویه ACD برابر 120° باشد، n را بیابید



۳۹. آیا می‌توان مربع شکل زیر را که بعضی از خانه‌های آن پر شده است، به یک مربع جادویی تبدیل کرد؟ در یک مربع جادویی 4×4 ، اعداد ۱ تا ۱۶ طوری نوشته می‌شوند که مجموع اعداد هر سطر، مجموع اعداد هر ستون و مجموع اعداد هر قطر (قطر اصلی و قطر فرعی) مقداری ثابت باشد.

			۱۲
	۱۶	۱	۱۰
	۲	۱۵	۸

۴۰. عدد سه رقمی \overline{abc} را پیدا کنید به طوری که:
 $abc = ab + bc + ca$. (در عدد xyz، رقم یکان، y رقم دهگان و x رقم صدگان است.)

* iradmusa@yahoo.com