مانا در جست‌وجوی حقیقت
ادعاهایی دربارهٔ همه‌چیز

لیلا خسروشاهی

کلیدواژه‌ها: استدلال ریاضی، همه، هر، مثال نقض

مانا از آن آدم‌هایی نیست که هر کسی هر ادعایی کرد، آن را بپذیرد؛ آن هم ادعاهایی بزرگ دربارهٔ همه چیز! مثلاً همین چند روز پیش یکی از دوستان مانا با خوش‌حالی اعلام کرد که دو تا کشف جدید کرده است. کشف اول او که خیلی هم دور از ذهن به نظر نمی‌رسید این بود: «**مربعِ هر عدد به جز صفر و یک، از خودِ عدد بزرگ‌تر است.**» اما کشف دوم دوست مانا جملهٔ عجیب و غریبی بود که کمی طول کشید تا مانا معنی آن را بفهمد: «**حاصل جمع هر سه تا عدد طبیعیِ پشت سر هم، بر عدد وسط بخش‌پذیر است.**» این دو تا جمله طوری نوشته شده بودند که مانا را به یاد کتاب‌های ریاضی می‌انداخت. اما مانا به قول خودش باید تهِ همه چیز را در می‌آورد و به این راحتی‌ها هر جمله‌ای را قبول نمی‌کرد؛ حتی جمله‌های ریاضی را! بنابراین از دوستش خواست توضیح دهد که چگونه به این دو کشف بزرگ رسیده است.

دوست مانا برای این‌که مانا را در مورد درستیِ این جمله‌ها قانع کند، شروع کرد به مثال زدن:

جملهٔ اول: «**مربعِ هر عدد به جز صفر و یک، از خودِ عدد بزرگ‌تر است.**»

مثال ۱. عدد ۷ را در نظر بگیر. مربعِ ۷ یعنی $۷^۲$، برابر با ۴۹ است. ۴۹ هم که از ۷ بیشتر است.

مثال ۲. عدد ۱۲ را در نظر بگیر. $۱۴۴=۱۲^۲$ و ۱۲<۱۴۴ .

مثال ۳. برای عدد ۲۰۰ هم داریم: $۴۰۰۰۰=۲۰۰^۲$ و ۲۰۰<۴۰۰۰۰

دوست مانا گفت: «البته $۱=۱^۲$ و $۰=۰^۲$ به خاطر همین، این دو تا عدد را از بقیهٔ عددها مستثنا کردم.»

او سپس چند مثال هم برای کشف دوم خود ارائه کرد:

جملهٔ دوم: «**حاصل جمع هر سه عدد طبیعیِ پشت سر هم، بر عدد وسط بخش‌پذیر است.**»

مثال ۱. سه عدد طبیعی پشت سر هم ۷، ۸ و ۹ را با هم جمع کن: ۲۴=۹+۸+۷. حاصل‌جمع (یعنی ۲۴) بر عدد وسط (یعنی ۸) بخش‌پذیر است؛ چون: ۲۴=۳×۸.

مثال ۲. ۶۳=۲۲+۲۱+۲۰ و ۶۳ بر ۲۱ بخش‌پذیر است (چون: ۶۳=۲۱×۳).

مثال ۳. ۴۳۵=۱۴۶+۱۴۵+۱۴۴ و ۴۳۵ بر ۱۴۵ بخش‌پذیر است. (چون: ۴۳۵=۱۴۵×۳).

دوست مانا با این مثال‌ها می‌خواست او را قانع کند که کشف‌هایش درست‌اند. هرچند که مانا از کشف‌های دوستش خوشش آمده بود و حالا بیشتر به خاطر داشتن چنین دوست خلاقی به خودش افتخار می‌کرد، هنوز از درستی کشف‌های او در مورد همهٔ اعداد مطمئن نشده بود. بنابراین گفت: «نتایج جالبی هستند. ولی چه‌طور می‌شود با سه مثال مطمئن شد که این جمله‌ها همیشه درست‌اند؟»

مانا حق داشت که هنوز به درستیِ جمله‌ها شک داشته باشد. جملهٔ اول می‌گفت: «**مربعِ هر عدد به جز صفر و یک ...**»؛ یعنی این جمله داشت دربارهٔ تمام اعداد (به جز صفر و یک) ادعا می‌کرد، نه فقط سه تا عددِ ۷ و ۱۲ و ۲۰۰ ! جملهٔ دوم هم همین‌طور بود: «**حاصل‌جمع هر سه تا عدد طبیعی متوالی ...**» دربارهٔ همهٔ عددهای طبیعی حرف می‌زد نه فقط مثال‌هایی که دوست مانا زده بود. البته مانا ته دلش نسبت به جملهٔ اول کمی مطمئن‌تر بود، ولی

مثال‌هایی که دوســت مانا برای جملهٔ دوم زد، برای او بیشــتر به یک شــعبده‌بازی شبیه بودند. به خاطر همین مانا برای اطمینان بیشتر از درستیِ جملات، شروع کرد به آزمودن مثال‌های بیشتر. برای این کار او جدولی تنظیم کرد تا مثال‌های خود را در آن بنویسد.

در مورد جملهٔ اول مانا با خودش فکر کرد که این جمله دربارهٔ هر عدد یعنی دربارهٔ تمام اعداد اســت. بنابراین ســعی کرد مثال‌های متنوع‌تری بزند و فقط از اعداد طبیعی استفاده نکند.

ادعای اول: «مربع هر عدد به جز صفر و یک، از خودِ عدد بزرگ‌تر است.»			
عدد انتخابی	مربع عدد انتخابی	مقایسهٔ عدد با مربع آن	آیا مربع عدد از خودش بزرگ‌تر است؟
$2/5$	$2/5^2 = 6/25$	$6/25 \rangle 2/5$	بله
-7	$(-7)^2=49$	$49 \rangle -7$	بله
$\frac{5}{3}$	$(\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9}$	$\frac{25}{9} \rangle \frac{5}{3}$	بله
$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \rangle \frac{1}{2}$	خیر

با مثال آخر، مانا که خیلی تعجب کرده بود، دست از کار کشید. چون عددی (به جز صفر و یک) پیدا کرده بود که مربع آن از خودش بزرگ‌تر نبود. بنابراین شــاید خیلی از عددها باشــند که مربعشان بزرگ‌تر از خودش است، اما بعضی اعداد مثل $\frac{1}{2}$ هم هستند که مربعشان کوچک‌تر از خودشــان اســت. مانا حالا با اطمینان می‌گفت که جملهٔ اول درســت نیست. چون این جمله دربارهٔ «تمام اعداد به جز صفر و

از کجا مطمئنی که همیشه (یعنی برای همهٔ اعداد طبیعی!) همین‌طور است؟» آن‌ها پاسخ قانع‌کننده‌ای نداشتند. بنابراین باید تلاش می‌کردند به چرایی درستی این اعا فکر کنند و در پی یافتن دلیلی قانع‌کننده برای درستیِ این ادعا باشند

یک»، ادعا می‌کند که «مربعشـــان بزرگ‌تر از خودشـــان اســـت»، اما حقیقت این است که مثال‌هایی، مثل $\frac{۱}{۲}$ ، هستند که این ادعا در مورد آن‌ها صحت ندارد. **به چنین مثال‌هایی که درستیِ یک جمله را نقض می‌کنند، «مثال نقض» گفته می‌شود.** مانا با یافتن یک مثال نقـض بـرای ادعای اول، آن ادعا را رد کرد. یعنی نشـــان داد که نمی‌توان با اطمینان گفت کـــه مربعِ **هر عدد به جز صفر و یک**، از خودِ عدد بزرگ‌تر است.

دوســت مانا حالا که فهمیده بود کشــف اولش درست از آن در نیامده است، به قول خودش حالش گرفته شد! اما **او حالا می‌دانست که وقتی جمله‌ای دربارهٔ همه چیز (مثلاً دربارهٔ اعدادی که تمام شدنی نیستند) ادعا می‌کند، نمی‌توان با آزمودن چند مثال از درســتیِ آن جمله مطمئن شــد؛ چون ممکن است مثال‌هایی باشند که از چشـــم ما پنهان مانده باشند و آن جمله را نقض کنند!** با این حساب حالا دوست مانا نگران کشف دوم خود بود که نکند آن هم، به وسیلهٔ مثالی که او نمی‌داند چیست، نقض شود!

مانا و دوستش دست به کار شدند تا مثال‌های بیشتری را برای جملهٔ دوم بیازمایند و برای راحتی در محاسبات خود از ماشین حساب استفاده کردند.

ادعای دوم: **«حاصل‌جمع هر سه تا عدد طبیعِ پشت سر هم، بر عدد وسط بخش‌پذیر است.»**			
سه عدد طبیعی پشت سر هم	حاصل جمع آن‌ها	عدد وسط	آیا حاصل جمع سه عدد بر عدد وسط بخش‌پذیر است؟
۵۶، ۵۷، ۵۸	۵۶+۵۷+۵۸=۱۷۱	۵۷	بله (چون ۳×۵۷=۱۷۱)
۱۰۰۰، ۱۰۰۱، ۱۰۰۲	۱۰۰۰+۱۰۰۱+۱۰۰۲=۳۰۰۳	۱۰۰۱	بله (چون ۳×۱۰۰۳=۳۰۰۳)

آن‌ها هم مثال‌های بیشــتری زدند که در این‌جا نوشــته نشــده‌اند. شما هم می‌توانید دست به کار شــوید و جدول بالا را با مثال‌های خودتان کامل کنید. مثال بزنید و سعی کنید مثال نقضی برای درستیِ این ادعا بیابید. یعنی سه عدد طبیعی پشت سر هم پیدا کنید که مجموعشان بر عدد وسط بخش‌پذیر نباشد.

مانا و دوستش هرچه مثال می‌زدند، آن مثال‌ها کشف دوم را تأیید می‌کردند؛ یعنی پاسخ آن‌ها در ستون چهارم جدول بالا برای تمام مثال‌ها «بله» بود. رفته رفته اطمینان آن‌ها نسـبت به درســتیِ این کشف بیشــتر می‌شد، اما چون این کشف دربارهٔ **تمام اعداد طبیعی** ادعا می‌کرد و آن‌ها نمی‌توانستند تمام اعداد طبیعی را بررسی کنند، با این کار هیچ‌وقت نمی‌توانستند مطمئن شوند که این جمله درست است. در واقع برای جمله‌ای که دربارهٔ **همه چیز** (مثلاً دربارهٔ همهٔ اعداد طبیعی یا اعدادی که تعداد آن‌ها تمام شدنی نیست) ادعا می‌کرد، مثال‌هایی تأییدکنندهٔ ادعا هرچه‌قدر هم که تعدادشان زیاد باشد، نمی‌توانند دلیلی بر درستی جمله باشند. به قول مانا «شاید هنوز مثالی هست که ما امتحانش نکرده‌ایم و این ادعا در مورد آن مثال درست نیست.»

مانا و دوســـتش و تمام دوســـتان آن‌ها و شما هم اگر بنشینید و مدام مثال بزنید، هیچ‌وقت نخواهید توانست **همهٔ مثال‌های ممکن** را امتحان کنید.

همان‌طور که گفتیم، مانا و دوســـتش رفته رفته نســبت به درستی این کشــف اطمینان بیشتری پیدا می‌کردند؛ اما اگر کسی از آن‌ها می‌پرسید:«از کجا مطمئنی که همیشه (یعنی برای همهٔ اعداد طبیعی!) همین‌طور است؟» آن‌ها پاسخ قانع‌کننده‌ای نداشتند. بنابراین باید تلاش می‌کردند به چرایی درستی این اعا فکر کنند و در پی یافتن دلیلی قانع‌کننده برای درستیِ این ادعا باشند.

مانا پیشنهاد کرد به جای این‌که به مثال‌هایی فکر کنند که هیچ‌گاه تمامی ندارند، به این فکر کنند که وقتی سه عدد متوالی را با هم جمع می‌کنند، چه اتفاقی می‌افتد که حاصل جمع آن‌ها حتماً بر عدد وســـط بخش‌پذیر می‌شـــود. آن‌ها با بررسی مثال‌های متفاوت حدس می‌زدند که همیشـــه مجموع این اعداد ســـه برابر عدد وسط است. مانا و دوستش می‌دانستند که عدد اول همیشه یکی کمتر از عدد وسط اســت و عدد ســـوم یکی بیشتر از عدد وســـط است. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که وقتی عدد اول و ســـوم با هم جمع می‌شوند، مثل این می‌ماند که عدد وسط را با خودش جمع کرده باشند. مثلاً اگر عدد وسط ۱۲ باشد، عدد اول ۱۱ یعنی ۱-۱۲ و عدد سوم ۱۳ یعنی ۱+۱۲ است و مجموع سه عدد را می‌توان به این شکل نوشت:

$$۱۱+۱۲+۱۳=(۱۲-۱)+۱۲+(۱۲+۱)=۱۲+۱۲+۱۲=۳\times۱۲$$

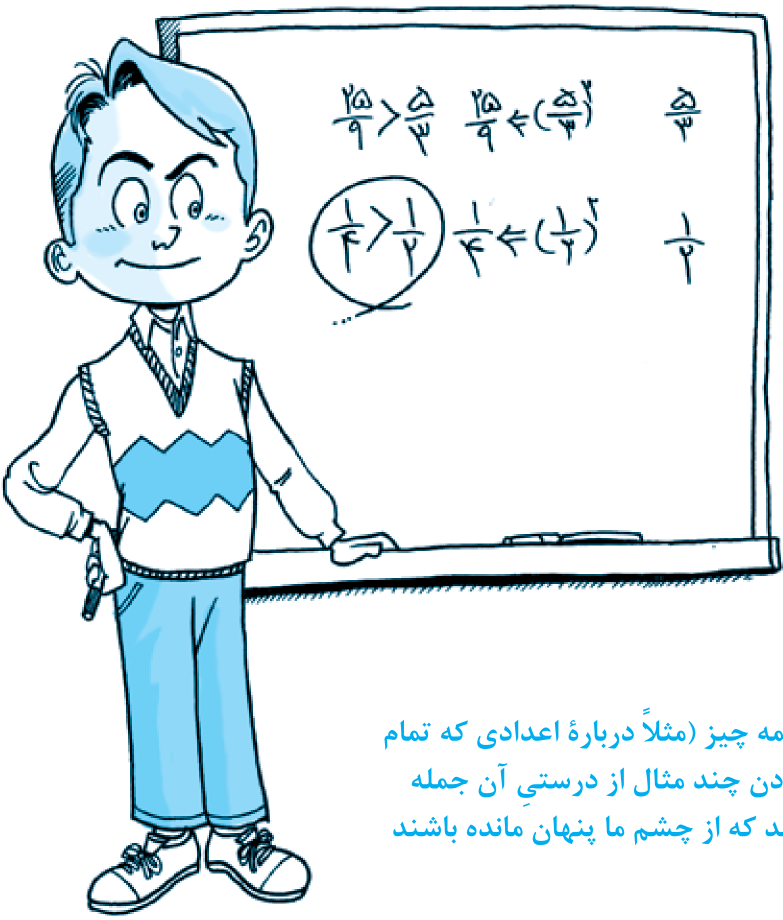
بنابراین مجموع این اعداد بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

مانا و دوستش اتفاقی را که در جمع سه عدد متوالی می‌افتد، در یک مثالی خاص با اعداد ۱۱، ۱۲ و ۱۳ نشان دادند؛ اما آن‌ها آگاه بودند که برای اعداد دیگر هم می‌توانند همین کار را انجام دهند. اگر عدد وسط را با a نمایش دهیم، عدد اول a−۱ و عدد سوم a+۱ است و مجموع آن‌ها را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(a-۱)+(a)+(a+۱)=a+a+a=۳\times a$$

بنابراین مجموع این سه عدد بر a بخش‌پذیر است و به این ترتیب حدس جدیدشان هم درست است. یعنی این حاصل‌جمع، با سه برابر عدد وسط برابر است. مانا و دوستش حالا دیگر مطمئن بودند که کشف دوم دوست مانا برای **هر سه عدد طبیعی متوالی** درست است.

تلاش مانا و دوستش، تلاشی بود برای بررسی درستیِ جملاتی که دربارهٔ **همه چیز** ادعا می‌کنند. البته منظور از همه چیز، **چیزهایی است که تمام شدنی نیستند.** مثل «همهٔ اعداد طبیعی»، «همهٔ اعداد به جز صفر و یک»، «همهٔ مربع‌ها»، «هر متوازی‌الاضلاع»، «تمام مثلث‌های متساوی‌الساقین» و یا «اعداد زوج». مثال زدن برای بررسیِ درستی یا نادرستیِ ادعاهایی دربارهٔ همه چیز، شروع خوبی است. اگر طی این مثال‌ها، مثالی پیدا شد که آن ادعا در موردش درست نبود، یعنی یک مثال نقض، می‌توان با قاطعیت گفت که این اعا درست نیست. اما اگر مثال نقضی پیدا نشد، نباید مطمئن بود که مثال نقضی وجود ندارد و این ادعا درست است. برای اطمینان از درستیِ یک ادعا باید حتماً برای آن دلیل قانع‌کننده‌ای آورد؛ دلیلی که برای همه‌چیز دلیل باشد، مانند دلیلی که مانا و دوستش برای کشف دوم آوردند. اما اگر در **ادعاهایی دربارهٔ همه چیز،** نه مثالی برای نقض ادعا پیدا شد و نه دلیلی برای درستیِ ادعا، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستیِ ادعا نظر داد و همچنان باید در **جست‌وجوی حقیقت** تلاش کرد!



مثال زدن برای بررسیِ درستی یا نادرستیِ ادعاهایی دربارهٔ همه چیز، شروع خوبی است. اگر طی این مثال‌ها، مثالی پیدا شد که آن ادعا در موردش درست نبود، یعنی یک مثال نقض، می‌توان با قاطعیت گفت که این اعا درست نیست. اما اگر مثال نقضی پیدا نشد، نباید مطمئن بود که مثال نقضی وجود ندارد و این ادعا درست است. برای اطمینان از درستیِ یک ادعا باید حتماً برای آن دلیل قانع‌کننده‌ای آورد؛ دلیلی که برای همه‌چیز دلیل باشد

او حالا می‌دانست که وقتی جمله‌ای دربارهٔ همه چیز (مثلاً دربارهٔ اعدادی که تمام شدنی نیستند) ادعا می‌کند، نمی‌توان با آزمودن چند مثال از درستیِ آن جمله مطمئن شد؛ چون ممکن است مثال‌هایی باشند که از چشم ما پنهان مانده باشند و آن جمله را نقض کنند!