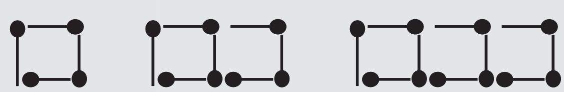
چه آزاد است!

امیرحسین اصغری
دانشگاه شهید بهشتی

ـ بَه بَه! بالاخره دنباله‌های معروف به چوب کبریتی جای خود را در کتاب‌های ریاضی دبیرستان هم باز کردند:

تمرین در کلاس

با استفاده از چوب کبریت سه شکل زیر ساخته شده است. تعداد چوب‌کبریت‌های به کار رفته در شکل nام چند تا است؟

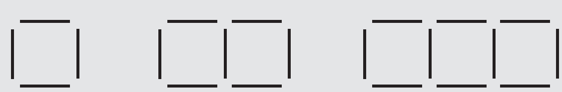


اما افسوس، **چه دیر و چه اشتباه!**

سال‌هاست که دنباله‌های چوب کبریتی نقشی مهم در برنامه‌های ورود به جبر ایفا می‌کنند. البته، نگاهی اجمالی به کتاب‌های درسی ما کافی است تا خواننده هم در ایفای نقش و هم در اهمیت نقش چنین دنباله‌هایی شک کند! در واقع، قبل از سال دوم نظری، تنها یک بار و آن هم، همان دنباله‌ی بالا، در شروع در سه عبارت‌های جبری در سال سوم راهنمایی ظاهر و سپس برای همیشه ناپدید می‌شود:

فعالیت

به شکل‌های زیر توجه کنید.



اگر شکل‌ها به همین ترتیب ادامه پیدا کنند، در شکل شماره‌ی n چند مربع خواهیم داشت؟

تعداد چوب کبریت‌ها را در شکل nام با یک عبارت جبری نشان دهید.

(ریاضی سال سوم دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)

توجه کنید که زبان فارسی این فعالیت از تمرین در کلاسی که سال‌ها پس از آن نوشته شده بهتر است! اما صرف‌نظر از این تفاوت، به نظر می‌رسد که هر دو کتاب بر نکات مشترکی تأکید می‌کنند: «ساده نویسی جبری» و «الگویابی عددی». به این ترتیب در کتاب

معلم (راهنمای تدریس) ریاضی سال سوم دوره‌ی راهنمایی تحصیلی می‌خوانیم: [دانش‌آموزان] می‌بایست در سال گذشته آموخته باشند که بیان روابط و دستورالعمل‌ها به کمک عبارت جبری بسیار ساده‌تر از بیان واژگانی آن است؛ بنابراین بدون توضیحات زیاد از دانش‌آموزان بخواهید به کمک الگویابی و تنظیم جدول، فعالیت آغازینِ درس را انجام دهند.

و در پیش‌نویس راهنمای تدریس فصل اول ریاضی ۲ می‌خوانیم:

هدف این بخش آشنا کردن دانش‌آموز با مفهوم دنباله به عنوان یک توالی از اعداد و یافتن الگوی حاکم بر این اعداد است.

با چنین نگرشی، پاسخ پیشنهادی راهنمای تدریس ریاضی سال سوم راهنمایی چنین است:

n مربع، ۳n+۱

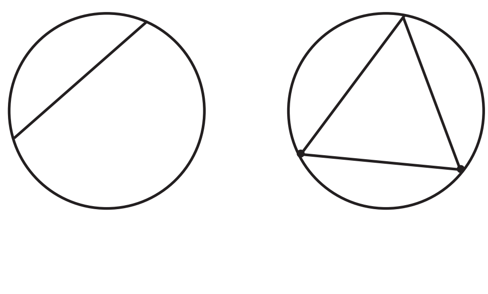
و پاسخ پیشنهادی راهنمای تدریس ریاضی ۲ چنین است:

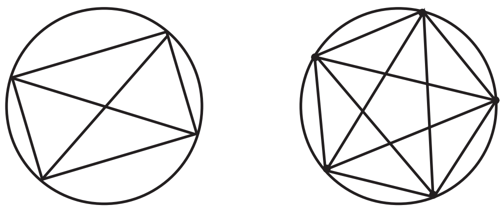
مرحله	۱	۲	۳	۴
جمله‌ی دنباله	۴	۷	۱۰	۱۳

$\Rightarrow a_n = ۳n + ۱$

خدای من! این علامت، $\Rightarrow$، در این‌جا به چه معنی است؟ به نظر می‌رسد که ریاضی ۲، نه به آن‌چه دانش‌آموز آموخته توجه دارد، نه به آن‌چه خواهد آموخت. اگر به آن‌چه دانش‌آموز آموخته توجه داشت، همان الگوی سال سوم راهنمایی را با همان نوع نگاه ارائه نمی‌کرد. اگر به آن‌چه دانش‌آموز خواهد آموخت توجه داشت، حتماً مثال کلاسیک زیر را در کتاب جبر و احتمال دیده بود:

اگر دو نقطه‌ی اختیاری بر روی پیرامون دایره را به وسیله‌ی یک پاره‌خط به هم وصل کنیم، دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. با اتصال سه نقطه‌ی اختیاری بر روی دایره، دایره به ۴ ناحیه تقسیم می‌شود. شکل زیر این موضوع را برای ۲، ۳، ۴ و ۵ نقطه‌ی اختیاری بر روی دایره نشان می‌دهد:





با سبک و سیاق راهنمای تدریس ریاضی ۲، راهنمای تدریس این مسئله چیزی شبیه این خواهد بود:

مرحله	۱	۲	۳	۴
جمله‌ی دنباله	۲	۴	۸	۱۶

$\Rightarrow a_n = ۲^n$

خُب، «ما» می‌دانیم که در پنجمین مرحله، تعداد ناحیه‌ها حداکثر ۳۱ است نه ۳۲. این را از کجا می‌دانیم؟ از نگاه کردن به جدول و بیان جبری آن، یا با کشیدن شکل و شمردن تعداد ناحیه‌ها؟ چگونه می‌توان الگویابی عددی بریده از زمینه را در دانش‌آموز نهادینه کرد، بر جبر تنها به عنوان یک زبان تأکید کرد (به اصغری، ۱۳۸۸ نگاه کنید.) و همزمان به دانش‌آموز گفت: «یکی از اهداف این کتاب آن است که شما بتوانید ریاضی را به شکل معنادار درک کنید و توانایی به‌کارگیری آن را در حل مسائل روزمره پیدا کنید» (سخنی با دانش‌آموزان، ریاضیات ۱)؟ چگونه می‌توان «استفاده از مسایل باز پاسخ» را به عنوان یکی از ویژگی‌های کتابی برشمرد (مقدمه‌ی کتاب ریاضیات ۲) و هم‌زمان به تفاوت‌های اساسی در بیان ساختار یک دنباله‌ی چوب کبریتی بی‌توجه بود (به قسمت دوم این مقاله نگاه کنید) به راستی که «موانع زیادی برای تحقق کامل اهداف نوین آموزشی وجود دارد» (مقدمه‌ی کتاب ریاضیات ۲)!

اگرچه آن‌چه که در بالا آمد با در ذهن داشتن آن‌چه در پی خواهد آمد نوشته شده است، باید اعتراف کنم که پتانسیل کتاب‌های موجود (۱) و البته پیچیدگی و چند وجهی بودن جبر مرا از هدف اصلی این گفتار کمی دور کرد.

دلیل دیگر این‌که دنباله‌های چوب کبریتی همه‌ی آن‌چه شما برای نشان دادن «قدرت کاربرد علامات» (دانتزیگ، ص ۱۱۷) نیاز دارید در خود دارند. اما، «قدرت کاربرد علامات در کجا نهفته است؟»

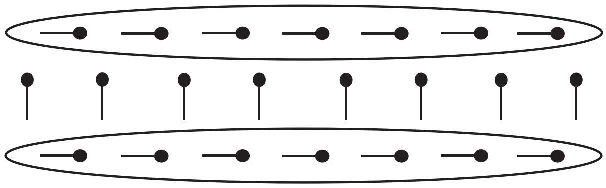
حرف، جبر را از بندگی کلام آزاد کرد

«حرف، جبر را از بندگی کلام آزاد کرد». منظور دانتزیگ فقط این نیست که «بدون علامت‌گذاری حرفی هر بیان معمولی و کلی تبدیل به لفاظی و درازگویی می‌شد» (دانتزیگ، همان‌جا). این امر به جای خود مهم و برای ریاضیات مدرسه‌ای ما تنها امر مهم است (به اصغری، ۱۳۸۸، و هم‌چنین به قسمت اول این مقاله نگاه کنید). اما اهمیت علامت‌گذاری حرفی بسیار بیش‌تر از این است. حروف به راحتی خود را از زمینه‌ای که به آن‌ها معنی می‌بخشند و سپس به دنبال آن، از محدودیت‌های آن زمینه آزاد می‌کنند. در «a چه ساکت است» (اصغری، ۱۳۸۸) به تفضیل در مورد اولین جنبه از این دو جنبه‌ی به هم مرتبط بحث شده است؛ در این‌جا به جنبه دوم می‌پردازم.

به شکل چوب کبریتی زیر توجه کنید.

برای ساختن این شکل چند چوب کبریت به کار رفته است؟

خُب! شما می‌توانید تعداد چوب کبریت‌ها را بشمارید. در این صورت، شما هم‌چنان در قلمرو حساب قرار دارید. اما اگر از شمردن تعداد چوب کبریت‌های این شکل فراتر رفته و از خود بپرسید که «تعداد چوب کبریت‌های لازم برای ساختن چنین شکلی چندتاست؟»، اولین قدم را به سمت تعمیم و در نتیجه به سمت جبر برداشته‌اید، چرا که «تعمیم عبارت از گذشتن از ملاحظه‌ی یک چیز به ملاحظه‌ی دسته‌ای از چیزها است که آن چیز یکی از آن‌ها به شمار می‌رود» (پولیا؛ ۱۳۶۶، ص ۱۲۷) و جبر، این نیاز به تعمیم و راهی برای بیان و توجیه آن است (میسون، ۲۰۰۵). به این ترتیب، شما به ناچار به ساختار شکل توجه می‌کنید و تلاش می‌کنید تا با توجه به ساختار راهی برای شمردن تعداد چوب کبریت‌ها بیابید. این یعنی، نحوه‌ی شمردن شما به نوع نگاه شما به ساختار وابسته است. برای مثال، می‌توانید چوب کبریت‌های افقی بالایی، عمودی و افقی پایینی را جدا شمرده و با هم جمع کنید:

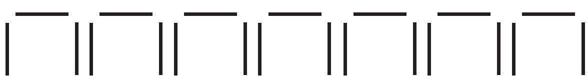


در این صورت:

تعداد چوب‌کبریت‌های افقی پایینی + تعداد چوب‌کبریت‌های عمودی + تعداد چوب‌کبریت‌های افقی بالایی = تعداد کل چوب‌کبریت‌ها

یا این‌که می‌توانید با اضافه کردن تعدادی چوب کبریت، ابتدا مربع‌ها را از هم جدا کنید، سپس تعداد چوب کبریت‌های شکل حاصل را بشمارید و در نهایت، چوب کبریت‌های اضافه شده را کم کنید.

در این صورت:



تعداد چوب‌کبریت‌های اضافه شده عمودی − تعداد چوب کبریت‌های مربع‌های جدا از هم پس از اضافه شدن چوب کبریت‌های عمودی = تعداد کل چوب‌کبریت‌ها

یا این‌که اگر علاقه‌ای خاص به فرمول ارائه شده در کتاب درسی دارید، آن را به شکل مجموعی از مربع‌های ناقص تو در تو و یک چوب‌کبریت تنها ببینید.

در این صورت:

یک + تعداد مربع‌های ناقص تو در تو = تعداد کل چوب‌کبریت‌ها

یا این‌که می‌توانید...

اکنون می‌توانید با استفاده از حروف، خود را از بندگی کلام آزاد کنید و همه‌ی این فرمول‌ها را «خلاصه‌نویسی» کنید. به این ترتیب، برای اولی داریم:

تعداد کل چوب کبریت‌های n مربع =n+n+۱+n

برای دومی داریم:

تعداد کل چوب کبریت‌های n مربع =۴×n− (n−۱)

برای سومی داریم:

تعداد کل چوب کبریت‌های n مربع =۳×n+۱

و برای بعدی داریم...

اما این خلاصه‌نویسی، تنها بخش بسیار بسیار کوچکی از آن چیزی است که شما به دست آورده‌اید. دوباره به دو عبارت زیر توجه کنید:

تعداد چوب‌کبریت‌های افقی پایین + تعداد چوب‌کبریت‌های عمودی + تعداد چوب‌کبریت‌های افقی بالایی

تعداد چوب‌کبریت‌های اضافه شده عمودی − تعداد چوب کبریت‌های مربع‌های جدا از هم پس از اضافه شدن چوب‌کبریت‌های عمودی

شما می‌دانید که این دو عبارت، دو بیان متفاوت برای تعداد کل چوب کبریت‌ها است. پس به تعبیری این دو عبارت با هم «برابرند»؛ اگر بشود از واژه‌ی برابر برای این دو عبارت کلامی استفاده کرد. به هر حال، این تعبیر، توجیهی برای برابری دو عبارت زیر خواهد بود:

n+n+۱+n

و

۴n−(n−۱)

اما این عبارات، به محض نوشته شدن، خود را از ساختاری که بر اساس آن نوشته شده‌اند آزاد می‌کنند. و از آن‌جایی‌که «قابلیت حرف برای انجام اعمال ریاضی امکان می‌دهد که عبارات حرفی تغییر صورت یابند.» هریک از این عبارات، قابل توضیح به چندین شکل هم‌ارز خود می‌گردد» برای مثال، هردوی این عبارت‌ها را می‌توان به شکل مورد علاقه‌ی کتاب درسی نوشت:

۳n+۱

«این قدرت تغییر صورت است که **جبر را از سطح یک خلاصه‌نویسی ساده بالاتر می‌برد**» (دانتزیگ، همان‌جا).

ولی این هنوز تنها بخشی از آزادی ممکن است. توجه کنید که حروف با آزاد کردن خود از زمینه‌ای که به آن‌ها معنی می‌بخشند، از محدودیت‌های آن زمینه نیز خود را آزاد می‌کنند؛ و این خود تعمیمی از نوع دیگر است. تعمیمی که هدف آن «گذشتن از ملاحظه یک دسته‌ی محدود به ملاحظه‌ی دسته‌ی فراگیرتری است که آن دسته‌ی محدود را نیز شامل می‌شود» (پولیا، ص ۱۲۷). به برابری‌های زیر توجه کنید:

$$n + n + ۱ + n = ۴n - (n - ۱) = ۳n + ۱$$

هریک از عبارات به کار رفته در اینجا، نتیجه‌ی توجه ما به یک ساختار چوب کبریتی است. بنابراین، به طور «طبیعی»، n محدود است به مجموعه‌ی اعداد طبیعی! اما بر پیشانی این حرف، چیزی که حکایت از طبیعی یا غیر طبیعی بودن آن باشد نوشته نشده است. در واقع، برابری‌های یاد شده برای هر مجموعه از اعدادی که ما می‌شناسیم برقرار است؛ اگرچه درک این تعمیم وابسته است به توسعه دانش عددی ما، دانشی که باید در طول سالیان دراز آموزش شکل بگیرد و با جبر پیوند بخورد. اما ما چه کرده‌ایم با این همه پیوند و در عین حال این همه آزادی؟

هرج و مرج

یک ساختار چوب کبریتی ساده ـ همچون ساختاری که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفت ـ می‌تواند وسیله‌ای برای ورود به مفاهیمی هم‌چون، رابطه‌ی خطی، معادله، اتحاد، دنباله، دنباله‌ی حسابی و بسیاری از مفاهیم دیگر باشد. مهم‌تر این‌که، چنین

ساختارهایی می‌توانند وسیله‌ای مناسب برای ورود به جبر باشد. اما کتاب‌های درسی ما با تقلیل این ساختارها به یک دنباله‌ی عددی علاوه بر ایجاد بدفهمی (به دنباله‌ی حاصل از تقسیم دایره در ابتدای مقاله نگاه کنید)، خود و دانش‌آموز را از همه‌ی آن‌چه که می‌توانسته به‌دست آورد محروم کرده است.

کتاب خود را از ارائه یک تصویر متحد از ریاضی محروم کرده است. در نتیجه هرجا که یکی از مفاهیم اشاره شده را آغاز می‌کند ناچار به متوسل شدن به «فعالیتی» مستقل است که در بهترین حالت تنها یک مفهوم را در خود دارد. اما ریاضی «ساختمانی از روابط است» (دنیز، ۱۹۶۰). در نتیجه اگر «فعالیتی» شما را از دیدن این روابط محروم کند به سختی می‌توان آن را یک فعالیت ریاضی نامید. برای مثال، به تساوی زیر توجه کنید:

$$۴n-(n-۱)=۳n+۱$$

این تساوی حاصل از بررسی ساختار یک دنباله‌ی چوب کبریتی است و هم‌چنان که در معرفی نوع دوم تعمیم به آن اشاره شد برای هر مجموعه از اعداد که ما می‌شناسیم یا دانش‌آموز ما هنگام معرفی اتحادها می‌شناسد درست است. به این ترتیب، این تساوی مثالی از تعریف ارائه شده در کتاب است:

> اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان مقدار یکسانی داشته باشند، عبارت حاصل از تساوی بین آن‌ها را اتحاد می‌نامند
> ریاضیات ۱، سال اول دبیرستان

البته کتاب نه تنها استفاده از دنباله‌ی چوب کبریتی را فراموش می‌کند بلکه هر نوع ارتباط دیگری را نیز فراموش می‌کند. نتیجه‌ی این فراموشی، ارائه فعالیت مستقلی است که به هیچ جای دیگر ربطی ندارد (به مبحث اتحادها و تجزیه درکتاب ریاضیات ۱ اول دبیرستان نگاه کنید). خُب، مسئله‌ای نیست، بالاخره یک سال از اولین و آخرین استفاده از دنباله‌های چوب کبریتی گذشته است!

به دنباله‌ی عددی حاصل از دنباله‌ی چوب‌کبریتی مورد بحث در این مقاله توجه کنید:

... و ۱۳ و ۱۰ و ۷ و ۴

اکنون شما می‌دانید که هر جمله‌ی این دنباله از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. هم‌چنین می‌توانید با

توجه به ساختار چوب کبریتی مربوط، **چراییِ** این رفتار عددی را درک کنید. به این ترتیب، این دنباله عددی مثالی معنی‌دار از تعریف ارائه شده در کتاب است:

> دنباله‌هایی که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید دنباله‌ی حسابی می‌نامیم و به این مقدار ثابت قدر نسبت دنباله گفته می‌شود.
> ریاضیات ۲، سال دوم آموزش متوسطه

البته کتاب دوباره اشاره به دنباله‌های چوب کبریتی را فراموش می‌کند، خب، شاید دلیلش این فراموشی این است که یکی دو صفحه از آخرین استفاده از دنباله‌های چوب کبریتی گذشته است! با خوش‌بینی بیشتر می‌توان گفت تلاش کتاب در «ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه‌های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب» (مقدمه ریاضیات ۲) چندان مشهود نیست. اگرچه به سختی می‌توان این خوش‌بینی را در مورد جبر که حلقه‌ی اتصال همه‌ی این مفاهیم است حفظ کرد.

کتاب‌های درسی با تکیه و تأکید بر زبان نمادین جبر، نه تنها جبر را از بندگی کلام آزاد کرده‌اند بلکه آن را از قید معنی نیز آزاد کرده‌اند! این چنین است که نمادها هم‌چنان برای دانش‌آموز آزادند،

اما این آزادی نه یک آزادی ساختار یافته و مرتبط با تعمیم بلکه آزادی در استفاده از قوانین عموماً من ـ درـ آوردی است.

منابع

1. Dienes. Z. P. (1960) Building up mathematics. Hutchinson Educational Ltd.
2. Mason, J: (2005), Frameworks for Learning,Teaching and Research: Theory and Practice, in Lioyd, G.M,Wilson, M,Wilkins ,J.L.M.& Behm, S. L.(Eds). Proceedings of the 27Th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education

۳. اصغری، امیر حسین (۱۳۸۸): a چه ساکت است! مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره ۹۸، صص ۱۱–۴، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۴. پولیا، جورج (۱۳۶۶): چگونه مسئله را حل کنیم. ترجمه احمد آرام، مؤسسه کیهان.

۵. دانتزیگ، توبیاس (۱۳۶۱): عدد، زبان علم. ترجمه مهندس عباس گرمان، شرکت سهامی کتاب‌های جیبی.

۶. ریاضی سال سوم راهنمایی (۱۳۸۵) دکتر مسعود فرزان، صفر باهمت شیروانه‌ده، محمدتقی دیبایی، پرویز فرهودی مقدم. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۷. ریاضیات (۱) سال اول دبیرستان (۱۳۸۷) شهرناز بخشعلی زاده، دکتر ناصر بروجردیان، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، دکتر فرزاد دیده‌ور، محمد تقی طاهری تنجانی، دکتر وحید عالمیان، دکتر حمید مسگرانی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

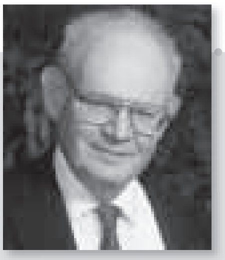
۸. ریاضیات ۲، سال دوم آموزش متوسطه (۱۳۸۸): دکتر علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، دکتر ابراهیم ریحانی، دکتر احمد شاهورانی، دکتر وحید عالمیان، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۹. جبر و احتمال، سال سوم آموزش متوسطه (۱۳۸۶): دکتر بیژن ظهوری زنگنه، دکتر زهرا گویا، دکتر یحیی تابش، و یدالله ایلخانی‌پور، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۰. کتاب معلم (راهنمای تدریس) ریاضی‌ـ سال سوم دوره‌ی راهنمایی تحصیلی (۱۳۸۵)، خسرو داودی، زهره پندی، کبری دلشاد، سید حامد وزیری هامانه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۱. راهنمای تدریس فصل اول کتاب ریاضیات ۲.

http://math.dept.talif.sch.ir



مربوط به روی جلد

به مناسبت درگذشت مندلبرات

MANDELBROT

طه عزتی گلمائی
دانشجوی کارشناسی ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

مندلبرات ریاضیدان مستقلی است که هندسه‌ی فرکتالی را گسترش داده و آن را در رشته‌های فیزیک، زیست، مالی و بسیاری از رشته‌های دیگر به‌کار رفته است. او روز پنجشنبه ۱۴ اکتبر ۲۰۱۰ در سن ۸۵ سالگی در کمبریج جان سپرد.

او در کمبریج زندگی می‌کرد و به گفته‌ی همسرش، آلیت، علت فوت وی سرطان لوزالمعده بود.

دکتر مندلبرات مبحث فرکتال را برای ربط دادن رده‌ی جدیدی از اشکال ریاضی که خم‌های ناهموارشان از بی‌قاعدگی‌های موجود در طبیعت الهام می‌گیرند، ابداع کرد.

به گفته‌ی دیوید مامفورد استاد ریاضیات دانشگاه براون: «ریاضیات کاربردی حدود یک قرن روی پدیده‌های هموار تمرکز داشت اما موارد زیادی وجود دارد که چنین نیستند. با مشاهده‌ی دقیق‌تر پدیده‌ها به‌وسیله‌ی میکروسکوپ می‌توان پیچیدگی‌های بیشتری را یافت. مندلبرات جز اولین کسانی بود که تشخیص داد که اینها ابزاری قانونمند برای آموزش هستند.»

مندلبرات در یک مقاله به نام «هندسه فرکتالی طبیعت» که در سال ۱۹۸۲ چاپ شد از پدیده‌های ریاضی‌ای دفاع کرد که به گفته‌ی وی دیگران آن‌ها را به علت وحشتناک و بی‌استفاده بودنشان در نظر نمی‌گرفتند. با استفاده از هندسه‌ی فرکتالی، که او استدلال کرد، نواحی اطراف افرها و لبه‌ی ساحل که غیر قابل اندازه‌گیری در نظر گرفته می‌شدند را اکنون می‌توان با روشی کمی به‌طور دقیق و صحیح اندازه‌گیری کرد.

برای بیشتر همپیشه‌های او، دکتر مندلبرات شهرتی مانند یک خارجی برای مجموعه‌ی ریاضیات داشت. در جایگاه بلندش در مقام محقق برای IBM در نیویورک، جایی که کار می‌کرد، قبل از این‌که کار در دانشگاه Yale را قبول کند متوجه الگوهایی شد که دیگر محققان در اطلاعاتشان به آن پی نبرده بودند، که جمع‌آوری این الگوها باعث همکاری زیادی بین آن‌ها شد.

پروفسور مامفورد گفته است: «او با افراد زیادی آشنا بود و علائق وسیعی هم داشت. هر بار که سخنی می‌گفت چیز جدیدی ارائه می‌داد.»

دکتر مندلبرات در حال پیگیری کارش روی فرکتال‌ها در ابتدا به‌عنوان

بقیه در صفحه‌ی ۶۳