کلیدواژه‌ها: محور اعـــداد، حل معادلات خطی، توسعه فهم جبری

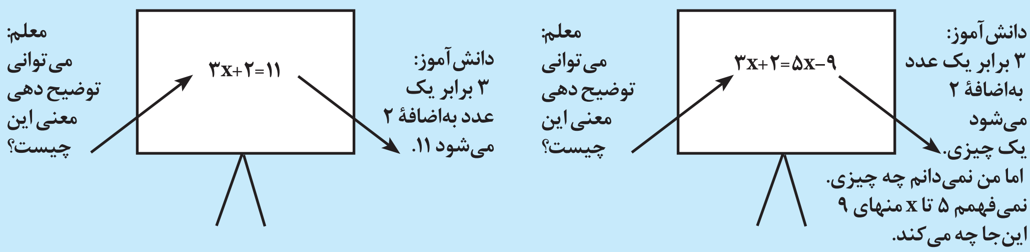
برنامهٔ درسی (DfEE,2001) دانش‌آموزان یازده‌ساله بریتانیا، که در حال حاضر در اغلب مدارس اجرا می‌شود، شامل حل معادلات خطی است با یک مجهول، تنها در یک طرف، که در سال‌های بعد، به معادلاتی که مجهول آن در دو طرف تساوی است، می‌رسد. دو پیشنهاد در *چارچوب تدریس ریاضی*[1] داده شده است:

اولی؛ با استفاده از عملیات معکوس (ص ۱۲۲)

دومی: آغاز به فهمیدن اینکه یک معادله می‌تواند ترازویی تصور شـــود که در آن، به شرط آنکه عملیاتی در هر دو طرف انجام شود، معادلهٔ حاصل درست باقی می‌ماند. (ص ۱۲۵)

در این توصیه‌ها، به‌طور ضمنی این باور وجود دارد که وقتی از یک نوع از معادلات به نوع دیگر حرکت می‌کنیم، یک تغییر ســـطح معنادار در پیچیدگی، و بنابراین نیاز به مجموعه‌ای متفـــاوت از راهبردهای حل، وجود دارد. بحث کلاسی زیر (شـــکل ۱ را ببینید) که اخیراً توسط نویسندگان مشاهده شده است، این نکته را تأیید می‌کند.

این تغییر ســـطح در پیچیدگی به‌خوبی ثبت شده اســـت و گاهی اوقـــات به‌عنوان «برش آموزشـــی[2]» به آن اشـــاره می‌شـــود (فیلوی و روحانو، ۱۹۸۵، ۱۹۸۹؛ هرکوویکـــس و لینچوســـکی، ۱۹۹۱، ۱۹۹۶). به‌نظـــر می‌رســـد مبنای این «برش»، تعبیر علامت مســـاوی به‌عنوان «سیگنال انجام کاری» (بهر و دیگران، ۱۹۷۶؛ کی‌ران، ۱۹۸۱) باشد به‌جای در نظر گرفتن آن به‌عنوان «یکی بودن کمّـــی» (بولتون- لویس و دیگران، ۱۹۹۷؛ سانز- لودلو و والدگراو، ۱۹۹۸) دو طرف. یعنی، عبارت سمت چپ معادله یک فرایند دیده می‌شود، و در نتیجه سمت راســـت باید نتیجهٔ (حسابی) این فرایند را نشان دهد. به ایـــن ترتیب، ۳x+۲=۱۱ بـــا معکوس کردن یا «خنثی کردن[3]» عملیات داده شده حل می‌شود و هیچ نیازی نیست که مستقیماً روی مجهول کار کنیم. اما برای حل ۳x+۲=۵x-۹، «خنثی کردن» کافی نیســـت، حال لازم است که مستقیماً روی مقدار مجهول عمل کنیم. اسفارد (۱۹۹۱) این تمایز را بین درک عملیاتی (به‌عنوان فرایندها) یا ساختاری (به‌عنوان اشیاء) نمادهای جبری توصیف می‌کند و «یک شکاف عمیق هستی‌شناسانه[4]» (ص ۴، تأکید از مرجع است) بین این دو می‌بیند.



شکل ۱: بحث کلاسی در مورد معادلات خطی

استفاده از محـ

۰ ۱ ۲ ۳ ٤

در حالی که بسیاری از معلم‌ها مشغول پل زدن روی این شکاف و معنا دادن به این معادلات و راهبردهای حل آن‌ها هستند، مثلاً، با استفاده از استعارهٔ ترازو (ولاسیس، ۲۰۰۲ را برای ارزیابی جدیدی از این راهبرد ببینید)، شواهد نشان می‌دهد که برای بسیاری از دانش‌آموزان حل معادلات، مسئلهٔ یادگیری قواعد و انجام دست‌ورزی‌ها، کورکورانه باقی می‌ماند. در بهترین حالت، آن‌ها «قصه‌ای[۵]» (پیم، ۱۹۹۵، ص ۸۹) می‌سازند تا این معادلات را حل کنند، مانند «آن را ببر به طرف دیگر و علامتش را عوض کن».

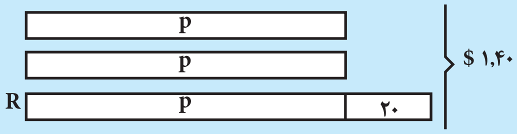
کتاب‌های درسی مدرسه‌ای نیز برای برقراری تعادلی بین توسعهٔ فهم جبری و تمرین مهارت‌های جبری تقلا می‌کنند (ویجرز، ۲۰۰۱).

در این مقاله، تلاشی را شرح می‌دهیم که به منظور تشویق دانش‌آموزان به بهره‌گیری از یک تصویر آشنا، یعنی محور اعداد، برای حل مشکلاتی است که در بالا توضیح دادیم. اما چیزی که باید روی آن تأکید شود این است که ما، مطالبی را که در ادامه می‌آید به هیچ‌وجه روش جدیدی برای حل معادلات یا صورت جدیدی برای نمایش آن در نظر نمی‌گیریم. این تنها بهره‌گیری از تصویری است که دانش‌آموزان با آن راحت‌اند، تا از توسعهٔ فهم آن‌ها از معادلات خطی از طریق دست‌یابی به راهبرهای حل موجود، پشتیبانی شود. این یک تمایز جدّی است و در طول مقاله، چند بار به آن اشاره می‌شود.

آغاز

ما چند سال پیش در همایشی در مورد رویکرد «مدل» شرکت کردیم که در مدارس سنگاپور، برای کمک به حل مسائل جبری «مرتبه بالا» توسط دانش‌آموزان دبستانی استفاده می‌شد (فونگ و چونگ، ۱۹۹۵). شکل ۲ مثالی از این رویکرد را نشان می‌دهد.

یک خط‌کش و دو مداد ۱٫۴۰ دلار قیمت دارند.
قیمت یک خط‌کش ۲۰ سنت بیشتر از یک مداد است.
قیمت یک خط‌کش را بیابید.



شکل ۲:
استفاده از رویکرد مدل سنگاپوری برای حل یک مسئله. (فونگ و چونگ، ۱۹۹۵، ص ۳۴)

مقاله

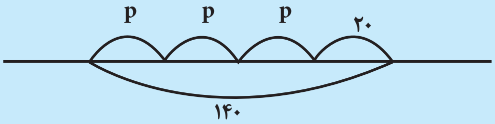
محور اعداد

۰ ‎-۱ ‎-۲ ‎-۳ ‎-۴ ‎-۵ ‎-۶

برای کنکاش در حل معادلات خطی

نویسندگان: پل دیکینسون و فرانک اید
مترجم: شیوا زمانی ـ دانشیار دانشگاه صنعتی شریف

وقتـــی ما تلاش کردیم مســـائل پیچیده‌تری حل کنیم، با این مشکل مواجه شدیم که اگر می‌خواستیم ایـــن رویکرد جدید را به‌طور کامل کشــف کنیم، باید دانستنی‌های جبری موجود خود را کنار می‌گذاشتیم. در این مرحلــه، برخی از افراد گـــروه همایش کم‌کم احســـاس کردند راحت‌ترند که به‌جای استفاده از یک سری از بلوک‌ها، از یک محور اعداد خالی استفاده کنند (شکل ۳ را برای این نمایش جدید ببینید).

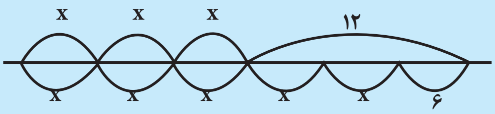


شکل ۳: استفاده از یک محور اعداد برای حل مسئله.

از این‌جا، دیگر به‌نظر می‌رسید که گام کوچکی تا نمایش معادلاتی مانند

۳x+۱۲=۵x+۶

روی یک محور اعداد دوبل مانده باشـــد (شکل ۴ را ببینید).



شکل ۴: استفاده از محور اعداد برای حل معادلاتی با مجهول در دو طرف.

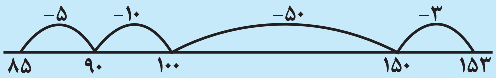
کتاب‌های درسی مدرسه‌ای نیز برای برقراری تعادلی بین توسعهٔ فهم جبری و تمرین مهارت‌های جبری تقلا می‌کنند

به این‌جا که رســـیدیم، از مشاهدهٔ بلافاصلهٔ (برای مـــا) ۲x+۶=۱۲ یکّه خوردیـــم، و تصمیم گرفتیم این نمایش را، به‌عنوان موضوعی برای تحقیق، برای گروهی از معلم‌ها ارائه دهیم. اعضای گروه تحقیق شامل حدود ده معلـــم ریاضی بودند از تعدادی از مدارس نزدیک به دانشگاه، که ما به‌عنوان کارآموزان معلمی در آن‌ها کار می‌کردیم. آن‌ها تا آن موقع هم به‌طور منظم جلساتی داشتند تا در مورد تجارب کلاس‌های خود بحث کنند. این جلسات، از بازتاب نوشته‌های علمی مرتبط، تا بحث روی روش‌های کار در کلاس را شامل می‌شد. این مقاله، کار اولیهٔ گروه را در ارتباط با این موضوع شرح می‌دهد.

از معلم‌ها خواسته شـــد تا این ایده‌ها را به روشی یکسان معرفی کنند، از درس‌ها یادداشت‌برداری کنند و کپی کارهای دانش‌آموزان را نگـــه دارند. از بعضی از درس‌ها برای جمع‌آوری بهتر داده‌ها نوار ویدیویی تهیه شد. نتایجی که در این‌جا گزارش می‌شود، نتایج ادغام شدهٔ تجربه‌های تمام کلاس‌هاست.

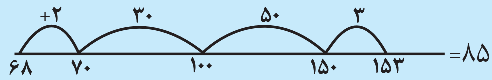
درس‌های اول

به‌نظر می‌رســـید که آشـــنایی با محور حقیقی برای دانش‌آموزان مهم باشد. به این ترتیب، وقتی این ایده برای اولین‌بار به کلاس‌های درس برده شد، از معلم‌ها درخواست شـــد که چند تمرین آماده‌ســـازی (اغلب یک‌ســـری از دست‌گرمی‌های ذهنی[۶]) روی محور اعداد برای حل مسائل جمع و تفریق انجام دهند. برای مثال، مســـئلهٔ ۶۸-۱۵۳ می‌تواند مانند شکل ۵ یا ۶ نمایش داده شود.

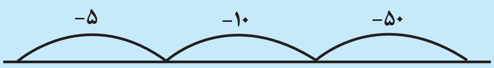


▲ شکل ۵: پرش‌های منها برای حل ۶۸-۱۵۳.

▼ شکل ۶: پرش‌های جمع برای حل ۶۸-۱۵۳.



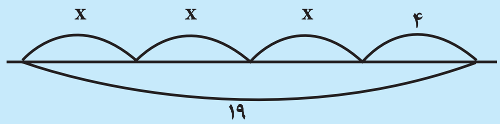
اگر چـــه در ابتدا واضح نیســـت، امـــا بعدها برای دانش‌آمـــوزان مفید خواهد بود که ذهن خود را از پرش روی محور، به‌عنوان نمایشـــی از اندازه‌های واقعی، رها کنند. اوایل دیده می‌شد که پرش‌های مثلاً بیست، به‌طور منظم با اندازه‌ای دو برابر پرش‌هایی به اندازهٔ ده رســـم می‌شدند. اما، سرانجام به‌نظر می‌آمد که دانش‌آموزان از رسم نمودارهایی مانند شکل ۷ راضی بودند.



شکل ۷: عبور از دیدن پرش‌ها به‌عنوان «مدلی از» به‌سمت «مدلی برای» چیزی.

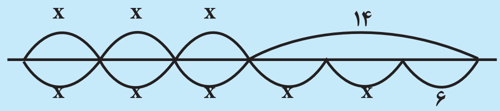
این می‌توانســـت نشـــانه‌ای ابتدایی باشد از اینکه دانش‌آموزان شروع کرده بودند به عبور از دیدن پرش‌های محور اعداد به‌عنوان «مدلی از» چیزی، به سمت «مدلی برای» آن چیز؛ حرکتی که اولین‌بار توسط استریفلند (۱۹۹۱) شناسایی شـــد. اگرچه همان‌طور که بعداً در این مقاله بحث می‌شود، این تغییر سطح ممکن است لزوماً دائمی نباشـــد. اما مهم این است که دانش‌آموزان بتوانند به‌طور موفقیت‌آمیز از روش‌های غیررسمی به دانش ریاضی رسمی‌تر عبور کنند (گراونمیجر ۱۹۹۰).

به‌دنبال این دست‌گرمی‌ها، معلم‌ها به‌سادگی با نوشتن ۳x+۴=۱۹ روی تخته و سپس (آرام آرام) کشیدن نمایش شکل ۸ معادلات را معرفی کردند.



شکل ۸: نمایش ۳x+۴=۱۹.

در ابتدا از دانش‌آموزان خواسته شد به معلم بگویند چه چیزی می‌بینند. یک نتیجهٔ فوری این کار، تعداد مشکلات شناخته شده‌ای بود که این سؤال کمک کرد تا برجسته شوند. به‌ویژه که تعدادی از دانش‌آموزان گفتند که «تمام xها یکی هستند»، و عده‌ای پرسیدند که «آیا چنین چیزی درست است؟». پاسخ‌های دیگر شامل این‌ها بود: «۳ برابر یک عدد به اضافهٔ چهار، برابر نوزده است»، « ۳ تا x باید پانزده باشد»، و «x پنج است». این آخری پاسخی بسیار متداول بود که اگرچه به وضوح مفید بود، همان‌طور که در زیر روشن‌تر می‌شود، بارها علیه ما عمل کرد.



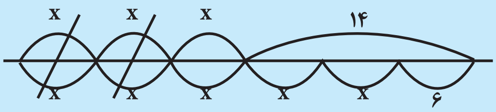
شکل ۹: نمایش ۵x+۶=۳x+۱۴.

در دسترس بودن واضح این مدل، به کلاس‌ها اجازه داد که تقریباً به‌سرعت به‌سمت مسائلی که دارای مجهول در دو طرف بودند حرکت کنند و در همان جلسهٔ دوم، معلم‌ها مسئلهٔ شکل ۹ را به دانش‌آموزان معرفی کردند و باز آن‌ها را برای گفتن اینکه چه می‌بینند به چالش کشیدند.

قابل‌توجه بود که در یکی از کلاس‌ها، بعضی از دانش‌آموزان نوشتند =۳x+۱۴ و =۵x+۶، پاسخی که از خیلی جهات شبیه نظر دانش‌آموزان ابتدای مقاله بود:

۳ برابر یک عدد به‌اضافهٔ ۲ می‌شود یک چیزی. اما من نمی‌دانم چه چیزی. نمی‌فهمم ۵ تا x منهای ۹ این‌جا چه می‌کند.

پاسخی مانند این می‌توانست نشان دهد که دانش‌آموز احتمالاً به یافتن دو مقدار مختلف برای x فکر می‌کند که در معادله صدق کنند (اسفارد و لیچوسکی، ۱۹۹۴ را ببینید). اما، خیلی از دانش‌آموزان دیگر، به روشنی تساوی مستتر در شکل را که گاهی اوقات «طول برابر» می‌نامیدند، تشخیص دادند. چیز دیگری که قابل‌توجه بود، تعداد دانش‌آموزانی بود که ۲x+۶=۱۴ را به‌عنوان چیزی که می‌توانستند ببینند شناسایی کردند، و خیلی‌های دیگر که مستقیماً به «x برابر ۴ است» رسیدند. گزارهٔ اخیر با چک کردن پرش‌های روی محور به‌دست آمده بود، که باز برای اکثریت دانش‌آموزان به‌نظر دست‌یافتنی می‌آمد. قابل‌توجه بود که حتی در این مرحله، تعدادی از دانش‌آموزان، وقتی از آن‌ها درخواست شد ایده‌هایشان را ساده بیان کنند، شروع کردند به پوشاندن یا خط زدن xها تا مسئله را ساده کنند. نمایش‌هایی مانند شکل ۱۰ را می‌شد تقریباً به‌طور متداول در کتاب‌های تمرین دانش‌آموزان دید.



شکل ۱۰: خط کشیدن روی xها برای ساده کردن مسئله

گزاره‌هایی مانند ۲x+۶=۱۴، و در صورتی که معلم‌ها دانش‌آموزان را به آن سوق می‌دادند ۳x+۶=x+۱۴، به‌ویژه جالب بود، زیرا مانند علامت‌های امیدبخشی بودند از طرف دانش‌آموزانی که دیدن عبارات جبری را به عنوان اشیاء و نه فقط فرایندها، آغاز کرده بودند (برای بحثی پیرامون اهمیت این تمایز، برای مثال کرولی و دیگران را ببینید (۱۹۹۴)). به این نکته بعداً در این مقاله با جزئیات بیشتری برمی‌گردیم.

اما، این «دسترسی» واضح، برای بسیاری از دانش‌آموزان خطراتی را ایجاد کرد، و اولین باری که به آن‌ها با تصاویر تدریس شد، خیلی از معلم‌ها این احساس را گزارش کردند که دانش‌آموزان در حقیقت با سرعتی بیش از حد به‌سمت مسائل پیچیده‌تر حرکت می‌کنند. وقتی موضوع برای بار دوم تدریس شد، معلم‌ها تلاش کردند کاری کنند که بحث بیش‌تر روی برابری دو طرف محور متمرکز شود، و توجه دانش‌آموزان به‌جای حل معادلات، به این برابری معطوف شود. اما این کار در برخی از کلاس‌ها به فشار تبدیل شد، زیرا دانش‌آموزان همین که «جواب» معادله را می‌فهمیدند دیگر تمایلی برای درگیر شدن در این موضوعات از خود نشان نمی‌دادند. این، البته چیز جدیدی نیست و حتی در مواردی که تلاش می‌شود به برخی دانش‌آموزان راهبردهای حل پیچیده‌تری (مثل معادل کردن) برای معادلاتی معرفی شود، که بسیاری از آن‌ها می‌توانند

آن‌ها را ذهنی حل کنند، متداول‌تر است (بیشتر «معادلات حسابی» در این رده هستند).

توسعهٔ ریاضی

دیدن اینکه دانش‌آموزان یازده‌سالهٔ با توانایی در حد متوسط، معادلاتی مانند:

۳x+۱۷=۸x+۷

را «حل می‌کنند» و قادرند کاری را که انجام می‌دهند توضیح دهند، ما را، برای تأیید در دسترس بودن این مدل، تقریباً تا آخر راه می‌برد. باز تأکید می‌کنیم که در نظر گرفتن این مدل به‌عنوان ابزاری که دسترسی به راهبردهای حل را تضمین می‌کند، و نه به‌عنوان راهبردی به‌خودی‌خود، اهمیت دارد. در این مرحله از توسعهٔ کار، خیلی راحت (و متأسفانه متداول) است که یا با مثال‌های مشابه بسیار، تنها در مرحلهٔ امتحان «روش» باقی بمانیم، یا مدل را کنار بگذاریم و به سراغ «معادلات سخت‌تر» برویم. اما هدف، هیچ یک از این دو نیست. هدف، استفاده از ایده‌هایی است که دانش‌آموزان توسعه داده‌اند، و تشویق آن‌ها برای رسمیت بخشیدن به این ایده‌هاست.

این «باور» که دانش‌آموزان می‌توانند این کار را انجام دهند، همراه با این اعتقاد که ما این‌جا نیامده‌ایم تا روش جدیدی را یاد بدهیم، بلکه فقط می‌خواهیم به دانش‌آموزان اجازه دهیم تا راهبردهای ممکن را کشف کنند، یک باور کلیدی است. این نکته تأثیرات معناداری روی روشی دارد که معلم‌ها از این به بعد، کار را با آن پیش می‌برند

این «باور» که دانش‌آموزان می‌توانند این کار را انجام دهند، همراه با این اعتقاد که ما این‌جا نیامده‌ایم تا روش جدیدی را یاد بدهیم، بلکه فقط می‌خواهیم به دانش‌آموزان اجازه دهیم تا راهبردهای ممکن را کشف کنند، یک باور کلیدی است. این نکته تأثیرات معناداری روی روشی دارد که معلم‌ها از این به بعد، کار را با آن پیش می‌برند. ما معتقدیم که در این‌جا، تمایز ترفر (۱۹۸۷) بین ریاضی‌سازی افقی و عمودی مهم است؛ در این مورد، «افقی» را توانایی نمایش یک معادله روی محور اعداد و حل آن، و «عمودی» را توسعه و رسمیت بخشیدن به راهبردهای حل تعبیر می‌کنیم که نهایتاً، قابل‌تعمیم هستند. در این مرحله، سؤالاتی که از دانش‌آموزان شد اهمیت فوق‌العاده‌ای داشت و معلم‌هایی که در درس‌های قبلی توانسته بودند توجه دانش‌آموزان را از جواب‌های واقعی پرت کنند، حال موفقیت بیشتری داشتند. برای مثال، در مورد

۳x+۱۴=۵x+۶

یک رویکرد مشترک این بود که از دانش‌آموزان بخواهیم تعدادی گزاره را که می‌دانستند باید درست باشند ارایه دهند و آن‌ها را توجیه کنند. برخی از دانش‌آموزان به ۵ =x+۱ که می‌رسیدند، می‌گفتند «چون می‌دانیم x، ۴ است»، و وقتی چنین چیزی بارها اتفاق افتاد، بعضی از معلم‌ها لازم دیدند برای اینکه بتوانند ادامه دهند، باید از معادلاتی شروع کنند که جواب آن‌ها غیرصحیح باشد.

مرحلهٔ بعد این بود که به دانش‌آموزان تعدادی گزاره بدهیم و از آن‌ها بخواهیم دلیل بیاورند که آیا می‌توان آن را از معادلهٔ اصلی استنتاج کرد یا خیر. این گزاره‌ها به‌صورت زیر بودند (با استفاده از ۵+۵x = ۱۴+۳x به‌عنوان معادلهٔ اصلی):

۱۴+۳x=۵x+۶

۳x+۲۰=۵x+۱۲

x+۱۴+۳x+۶

۵x+۱۴=۷x+۶

و معادلهٔ چالشی‌تر ۶x+۲۸=۱۰x+۱۲

و معادلهٔ مهم ۱۴=۸x+۶

۶x+۱۴=۱۰x+۵

و از این قبیل.

کلاس‌ها با دانش‌آموزانی که برای یافتن عبارات «متفاوت» و مواجه کردن هربارهٔ آن‌ها به چالش کشیده می‌شدند، خیلی زود پر از عبارات معادل شد. چنین «تولیدات آزاد»ی در مورد نوع راهبردهایی که در حال حاضر دانش‌آموزان به‌کار می‌گیرند، اطلاعات زیادی می‌داد (استریفلند، ۱۹۹۰ و ۱۹۹۱ را برای بحث بیشتری در مورد ارزش درخواست از دانش‌آموزان برای تولید چنین کاری، ببینید). در حالی که دانش‌آموزان ممکن بود در این مرحله، بیشتر با آزمون عملیات رویه‌ای مربوط به حل معادلات درگیر شوند، توجیهات آن‌ها به شکلی یکسان به وجوهی اشاره داشت که بیشتر ساختاری بودند. چنین چیزی در تجربهٔ ما، تقریباً نادر بود و بعداً در جمع‌بندی این مقاله، روی آن بیشتر بحث می‌شود.

به‌عنوان مثال، اضافه کردن ۲x به دو طرف، تقریباً با اعتماد کاملی روبه‌رو می‌شد، با دانش‌آموزانی که به‌طور منظم نظراتی از این قبیل می‌دادند که

«تا وقتی که شـما یک تعـداد x را به دو طرف اضافه می‌کنید، طول‌های (روی محور) هم‌چنان یکی است». همچنین، خاصیت‌های تقارنیِ تساوی به‌نظر بسیاری از دانش‌آمـوزان بدیهی می‌آمد. در واقع در این مرحله، به‌ندرت دانش‌آموزانی را می‌تـوان پیدا کرد که جدل کنند یا با مفهوم تساوی مشکلی داشته باشند.

در این تجربه‌ها، بحث در مورد اینکه چه راهبردهایی «مجاز» هستند، متداول بود. همچنین، روشن شد که دانش‌آمـوزان تولید چنین راهبردهایی را با اشـاره به معادله و نه محور اعداد شـروع کـرده بودند (صورت جبری هر معادله همیشه همراه با مدل در تمام جلسات درس ارائه شده بود). شروع به عمل کردن دانش‌آموزان بر روی نمادها، به‌عنوان اشـیاء، به‌وضوح یک گام بلند بـود، اگرچه هنوز مهم بود کـه معلم‌ها به‌طور منظم، مطمئن شـوند که دانش‌آموزان برای اینکه به توجیه راهبردهایشـان ادامه دهند، می‌توانند از تصویر اصلی استفاده کنند. در حقیقت، در تمام طول کنکاش، اینکه این نمایش در دسترس باشد و دانش‌آموزان بتوانند در هر زمانی به آن برگردند، محور اصلی بود.

یکی دیگر از راهبردهایی کـه در این زمان به‌کار گرفته شد، پرسیدن سؤالاتی به‌صورت زیر بود:

۴۸x+۲۴=۲۷x+۸۷

این صورت از معادله، اطلاعات ارزشمندی از میزان پیشـرفت دانش‌آموزان فراهم کرد. پاسخ‌ها از آن‌هایی که می‌خواستند ۴۸ پرش تکی برای x بکشند، بعضی‌ها که ۴۸ را به‌صورت چهارتا ده و یک ۸ نمایش دادند، تا آن‌هایی که (به طور تأثیربرانگیزی) نمایش شکل ۱۱ را کشیدند، تغییر می‌کرد.

اما این هم قابل‌توجه بود که بسیاری از دانش‌آموزان سؤال کردند که آیا باید یک محور اعداد بکشند، با ادعای اینکه «می‌توانند ببینند» که ۲۱x+۲۴=۸۷. وقتی باز هم به چالش کشیده می‌شدند، برخی عنوان می‌کردند که در «ذهن خود»، محور اعداد را «تصور کردند»، در حالی‌که دیگران فقط روی معادله عمل می‌کردند.

ما معتقدیم که قسـمت اعظم کارهای بالا، مشابه ایدهٔ «انجام یک کار در هر دو طرف» است، و بعضی از دانش‌آموزان شروع کردند به شفاف‌سازی راهبردهایشان با همین نوع عبارات، یعنی گاهی با اشاره به «دو طرف محور»، و گاهی «دو طرف معادله». مهم این است که به‌جای آنکه معلمان به دانش‌آموزان بگویند از رویه‌های مکانیکی استفاده کنند، خودشان در حال توسعهٔ رویه‌ها

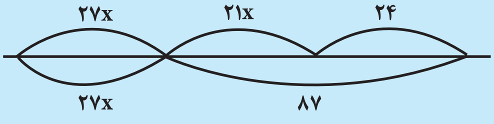
مهم این اسـت که به‌جای آنکه معلمان به دانش‌آموزان بگویند از رویه‌های مکانیکی استفاده کنند، خودشان در حال توسعهٔ رویه‌ها و توضیحات خود برای آن‌ها هستند. آن‌ها یک تصویر پایه‌ای دارند که اگر نیاز به اطمینان دوباره یا ارزشیابی مجدد یک راهبرد خاص داشـتند، به آن بازگردند. نتیجهٔ نهایی ممکن است یکی باشد، اما سطح درک بسیار متفاوت است

و توضیحات خود برای آن‌ها هستند. آن‌ها یک تصویر پایه‌ای دارند که اگر نیاز به اطمینان دوباره یا ارزشیابی مجدد یک راهبرد خاص داشتند، به آن بازگردند. نتیجهٔ نهایی ممکن است یکی باشـد، اما سطح درک بسیار متفاوت است. این ایده، در یادگیری ریاضیات از طریق گذار از ساخت و سـازهای ریاضی غیررسمی خود به ریاضیات رسمی‌تر، در رویکرد آموزش ریاضی واقع‌گرا (RME)[۷] نیز که در هلند توسـعه‌یافته، به‌طور بسیار موفقی استفاده شده است (ترفر ۱۹۹۱ را ببینید).

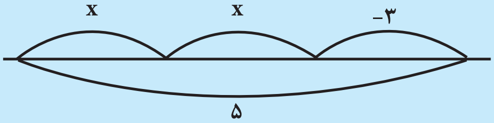
استفاده از اعداد منفی

اینکه کـی و چگونه اعداد منفی معرفی شـوند، موضوعی است که در تحقیق آتی به آن نگاه شده است. اما نمایش واقعی معادلاتی که شـامل آن‌ها هسـتند، جالب اسـت. زمانی که این مدل در کلاس‌ها استفاده شد، نمایش‌های ممکن متعددی ظاهر شد. چهار نمایش زیر برای معادلهٔ ۵=۳-۲x مورد بحث قرار گرفته است.

۱. بسیاری از دانش‌آموزان در ابتدا می‌خواستند که از نمادگذاری شکل ۱۲ استفاده کنند. این نمایش چون قرارداد مورد پذیرش روی محور اعداد را رعایت نمی‌کرد، اگرچه اجازهٔ حل بعضی از معـادلات را می‌داد، حذف شد. در این‌جا، انجام کارهای قبلی برای سؤال‌های جمع و تفریق روی محور اعداد به دانش‌آموزان کمک کرد.

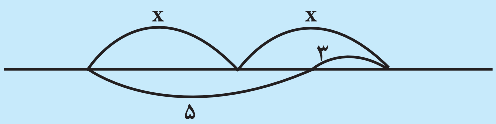


شکل ۱۱: نمایش دانش‌آموز از ۴۸x+۲۴=۲۷x+۸۷.

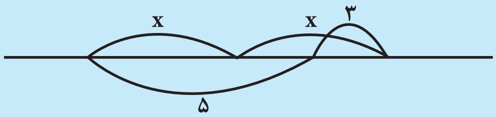


شکل ۱۲: اولین نمایش برای ۵=۳-۲x.

۲. و ۳. شکل‌های ۱۳ و ۱۴ توسط بسیاری از دانش‌آموزان استفاده شد، و به‌نظر می‌رسد بازتاب روشی است که در اکثر مدارس، تفریق را روی یک محور اعداد نمایش می‌دهند.



▲ شکل ۱۳: نمایش دوم برای ۲x-۳=۵.
▼ شکل ۱۴: نمایش سوم برای ۲x-۳=۵.

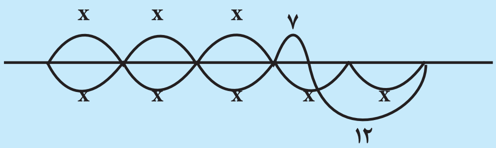


این نمایش‌ها باز هم به دانش‌آموزان اجازه می‌دادند که به راهبردهای حل دست یابند. برای مثال،

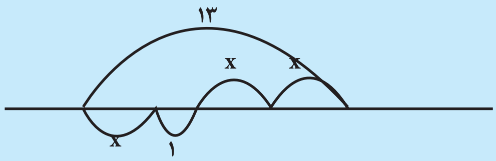
۳x+۷=۵x-۱۲

اکنون مانند شکل ۱۵ دیده می‌شود که از آن، سؤالاتی مشابه قبل می‌تواند مطرح شود، یا یک «جواب» از روی ۲x-۱۲=۷، یا مستقیماً با دیدن ۲x=۱۹ می‌تواند به‌دست آید.

به‌طور مشابه، x+۱=۲x-۱۳ می‌تواند مانند شکل ۱۶ نمایش داده شود.

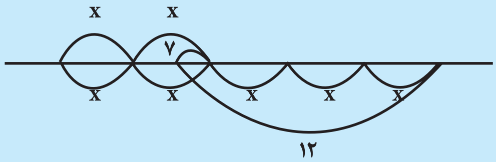


شکل ۱۵: نمایش معادله‌ای با یک مجهول در هر دو طرف و یک عدد منفی.



شکل ۱۶: نمایش x+۱=۲x-۱۳.

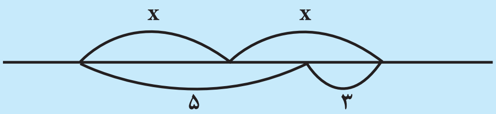
و ۲x-۷=۵x-۱۲ مانند شکل ۱۷.



شکل ۱۷: نمایش ۲x-۷=۵x-۱۲.

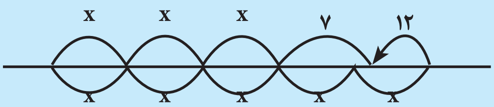
یک مانع ممکن برای این نمایش، ظهور مجدد موضوع اندازهٔ پرش‌ها روی محور بود. برای مثال، در معادلهٔ بالا، دانش‌آموزان نگران این بودند که برای ۷- «چقدر باید به عقب برگردند»، و آیا پرشی به اندازهٔ ۷ بزرگ‌تر از پرشی به اندازهٔ x است یا نه. جالب بود که حتی برای دانش‌آموزانی که موفقیت‌های بالایی هم داشتند، این دغدغه وجود داشت. آن‌ها در پرسش‌های قبلی، به وضوح به اینکه مدل را تنها به‌عنوان نمایشی «برای» معادله ببینند، رسیده بودند. این گام عقب‌گرد را می‌توان به‌عنوان مثال خاصی از پدیده‌ای دید که در موقعیتی مشابه، توسط فیلوی و روحانو (۱۹۸۹) شناسایی شده و آن را «از دست دادن موقت توانایی‌های قبلی، همراه با رفتارهایی که روی مدل تثبیت شده‌اند» (ص ۲۱) توصیف کرده است. اما واضح است که این مانع، غیرقابل عبور نیست و بحثی را موجب می‌شود که به‌خودی‌خود مفید است.

۴. اولین‌باری که شکل ۱۸ دیده شد، وقتی بود که یک دانش‌آموز آن را به‌عنوان بخشی از یک تکلیف کشید. معلم در ابتدا مطمئن نبود که آن را بپذیرد یا نه، اما تقریباً قانع شد. زیرا بلافاصله بسیاری دیگر از دانش‌آموزان خواستند که آن را به‌کار گیرند.



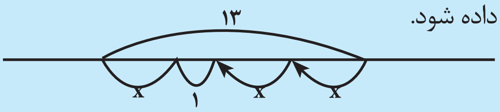
شکل ۱۸: نمایش چهارم برای ۲x-۳=۵.

به‌این ترتیب، برای مثال، این نمایش ۳x+۷=۵x-۱۲ را مانند شکل ۱۹ نشان می‌دهد.



شکل ۱۹: نمایش ۳x+۷=۵x-۱۲.

و x+۱=۲x-۱۳ می‌تواند مانند شکل ۲۰ نمایش داده شود.



شکل ۲۰: نمایش x+۱=۲x-۱۳.

جالب بود که در مدرســه‌ای که این نمایش ظاهر شد، دانش‌آموزان شروع به توصیف انتقال‌های دیگری روی معادلات کردند که قبل از آن، در نظر گرفته نشده بود. برای مثال، $۱۳-۲x=x+۱$ به وضوح معادل است با $۱۳=x+۱+۲x$ و ناگهان تصویر «عبور جملات از علامت تساوی» شروع به ظاهر شدن کرد.

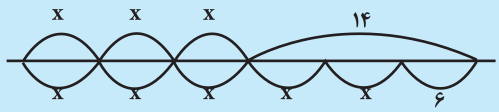
وقتی این اتفاق افتاد، به‌نظر رسید که مهم است به پرسش‌های قبلی بازگردیم. نمایش $۳x+۱۴=۵x+۶$ که در شکل ۲۱ نشان داده شده است، به عباراتی مانند:

$۳x+۱۴-۶=۵x$

$۳x+۱۴-۶-۲x=۳x$

$۵x+۶-۱۴-۳x=۰$

منتهی شد. این اکتشــاف‌ها، به بحث‌های زیادی در این‌باره منجر شد که چیزی که دارد اتفاق می‌افتد، چگونه با مفهوم «دو طرف» که در جلسات درسِ قبل در ذهن‌ها بود، مقایسه می‌شود.



شکل ۲۱: بازگشت به یکی از نمایش‌های قبلی، $۳x+۱۴=۵x+۶$.

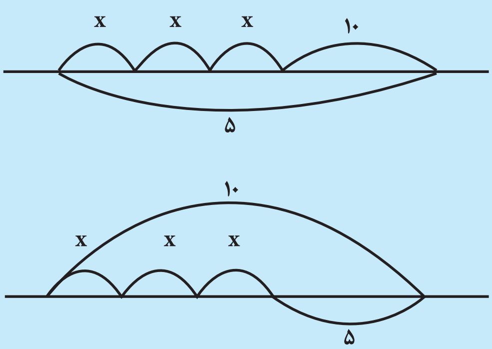
نتایج و محدودیت‌های مدل

برخی از دانش‌آموزان ما، حالا آزمون‌های مدرسه‌ای و نیز ملّی را که در سنین چهارده و شانزده گرفته می‌شود داده‌اند. نتایج اولیه امیدبخش است. مطمئناً تصویر محور در ذهن تعداد نسبتاً زیادی از دانش‌آموزان نقش بسته است، و ما به‌طور منظم دیدیم که بیش از ۵۰ درصد از یک کلاس، نموداری می‌کشیدند تا به آن‌ها در حل یک معادله کمک کند. این احساس متفاوت با تجربهٔ ما، در کار با تصاویر دیگری مانند تــرازو بود که دانش‌آموزان پس از آن که یک‌بار مدل را «کنار گذاشتند»، به‌ندرت آن را به‌کار می‌گرفتند (بولتون- لویس و دیگران، ۱۹۹۷ را برای شواهد دیگری از آن ببینید).

این هم درســت بود که معلم‌ها، بیش از آنچه قرار بود، با محور اعداد ماندند، در حالی‌که تلاش می‌کردند مثال‌هایی خلق کنند که دانش‌آموزان را تشــویق کند از محور دور شــوند و در همان حــال، به دیگرانی که می‌خواســتند با آن باقی بمانند، ایــن اجازه را بدهند. خیلی از معلم‌ها، وقتی در این مورد از آن‌ها سؤال شد، به در دسترس بودن و ماندگاری مدل، به‌عنوان دلیلی برای این تغییر رویکرد، اشاره کردند.

به‌نظر می‌رســد کــه مدل، اجازهٔ حرکات نســبتاً طبیعی را هنگام سروکار داشتن با صورت‌های مختلف یک معادله می‌دهد. برای مثــال، $۱+۲x=۵$ همان‌قدر دســت‌یافتنی به‌نظر می‌آمد که $۵=۱+۲x$ و $۵=۲x+۱$. اما $۳x+۲=۵x$ از نوع معادلاتی مثل $۳x+۲=۵x+۱$ دیده می‌شد، و وقتی به‌صورت $۲+۳x=۵x+۱$ نوشته می‌شد، دانش‌آموزان با «باز مرتب کردن» معادله، برای رسم آن راحت بودند. این با برخی مدل‌های دیگر که یک ترتیب مجدد، یا حرکت به‌سمت ضرایب منفی، موانعی جدی برای فراگیران به‌وجود می‌آورد یا حتی به شکست کامل مدل منجر می‌شــود در تضاد است (فیلوی و روحانو، ۱۹۸۹). از ایــن نظــر، محور اعداد ممکن اســت دید بهتری از خواص تساوی (مثل تقارن و تراگذری) بدهد، و بنابراین، فرصت‌های ارزشــمندی برای درگیر کردن دانش‌آموزان به بحث در مورد چنین خواصی پدید آورد. ما در جمع‌بندی به این نکته برمی‌گردیم.

ما قــدرت این مدل را در این واقعیت می‌دانیم که می‌تواند راهبردهای حل ممکن را در دسترس قرار دهد و به دانش‌آموزان ابــزاری برای تصمیم‌گیری در مورد اینکه کدام یک عملی است، می‌دهد. این مدل ممکن است حتی آغازی باشد برای معنا بخشیدن به چیزی که برای بسیاری از دانش‌آموزان، قبلاً عملیاتی بی‌معنی بود. این روش تمام معادلات را با موفقیت مدل‌ســازی نکرد، که قرار هم نبود چنین کند. برای مثال، وقتی x در معادله‌ای مانند $۳x+۱۰=۵$ یک جواب منفی دارد، ما امکانات نمایشی مانند شکل ۲۲ داریم.



شکل ۲۲: نمایش‌هایی برای وقتی که x در معادله‌ای جواب منفی دارد،

در این مورد، $۳x+۱۰=۵$.

اولی از نظر ریاضی رضایت‌بخش به‌نظر نمی‌رسد؛ دومی ممکن است برای بسیاری از دانش‌آموزان تعمیم دشواری از ایده باشد. بعضی معلم‌ها هنوز روی این کار می‌کنند، اما این کار، اگر چه ممکن است به لحاظ علمی جالب باشد، موضوع واقعاً مهمی نیست. بحث اصلی این مقاله این است که از طریق به‌کارگیری مدل محور اعداد، دانش‌آموزان می‌توانند در زمانی که نیاز به حل معادلاتی پیدا می‌کنند که جواب منفی دارند، راهبردهای مناسبی برای کار روی تمام معادلات ساده پیدا یا تبیین کنند. اگر دانش‌آموزان، کاملاً وابسته به محور هستند، می‌توان چنین نتیجه گرفت که برای حرکت به‌سمت چنین معادلاتی، هنوز آماده نیستند.

ما قدرت این مدل را در این واقعیت می‌دانیم که می‌تواند راهبردهای حل ممکن را در دسترس قرار دهد و به دانش‌آموزان ابزاری برای تصمیم‌گیری در مورد اینکه کدام یک عملی است، می‌دهد. این مدل ممکن است حتی آغازی باشد برای معنا بخشیدن به چیزی که برای بسیاری از دانش‌آموزان، قبلاً عملیاتی بی‌معنی بود

بحث

چیزی که در این‌جا توصیف کردیم، آزمون‌های اولیه‌ای در تعداد کمی از مدارس بود. ما خود را تنها به توصیف مختصری از نوع راهبردهایی که معلم‌ها استفاده می‌کردند، و پاسخ‌های اولیهٔ دانش‌آموزان به این راهبردها، محدود کردیم. در آینده، روی مطالعات موردی با جزئیات بیشتری از یادگیری دانش‌آموزان کار می‌کنیم.

اما در همین آزمون‌های اولیه، دانش‌آموزان از کار با معادلات به این روش لذت بردند و مطمئناً پیشرفت کردند. بعضی از دانش‌آموزان تواناتر، توانستند خیلی سریع راهبردهای کارایی را برای حل یک گروه کامل از معادلات توسعه دهند، و به وضوح شروع کردند به فرمول‌سازی برای رویه‌های مجردتر مورد نیاز برای حل مسائل سطح بالاتر. شاید، تکان‌دهنده‌تر از همه، دسترسی دانش‌آموزان متوسط یا ضعیف به مسائلی بود، که تجربه نشان می‌داد معمولاً با آن‌ها کشمکش دارند.

یکی از ویژگی‌های کار ما این بود که معلم‌ها به دلیل شباهت تجارب و نتایجشان در کلاس‌ها و مدارس متفاوت، می‌توانستند با آنچه دیگران می‌گفتند، ارتباط برقرار کنند. این موضوع باعث شد که وقتی معلم‌ها یکدیگر را می‌دیدند، بحث‌های مولد بسیاری با هم داشته باشند، و بدون شک به آن‌ها کمک کرد راهبردهای تدریس خود را بهبود بخشند. این رویکرد جمعی به تحقیق کلاسی، وجه با ارزشی از کار ما بود، و به بحث اصلی ما که این رویکرد به تدریس معادلات، می‌تواند در طیف وسیعی از کلاس‌ها مفید باشد، وزن بیشتری داد.

اما، ویژگی اصلی این مدل که در تمام کلاس‌های ما مشهود بود، در دسترس بودن ابتدایی آن برای دانش‌آموزان بود، و از این نظر این مدل، می‌تواند اثر «برش آموزشی» را که قبلاً به آن اشاره شد، محدود کند. اسفارد (۱۹۹۱) تأکید کرده است که قبل از اینکه مفاهیم رویه‌ای بتوانند به مفاهیم ساختاری تبدیل شوند، به دوره‌ای طولانی از تجربه نیاز است. ما به‌طور آزمایشی ادعا می‌کنیم که هنگام استفاده از محور اعداد، دانش‌آموزان می‌توانند به‌طور منظم، از یکی به دیگری تغییر وضعیت دهند. برای مثال، وقتی دانش‌آموزی یک نمایش محور اعداد از مثلاً $6+5x=14+3x$ می‌کشد، احتمال دارد که این یک نگاه عملیاتی («رویه‌ای») را نمایش دهد. اما وقتی آن‌ها توضیح می‌دهند که $14=2x+6$ را می‌بینند، یا از آن‌ها خواسته می‌شود که توجیه کنند که چرا $7x+14=9x+6$، در این صورت ما معتقدیم که این نمایش، در قلمرو ساختاری کار می‌کند. ما راحت بودن با صورت‌های «مختلف» یک معادلهٔ واحد را نیز شاهد دیگری از این می‌بینیم که دانش‌آموزان، شروع به دیدن گزاره‌های جبری به‌عنوان اشیا و همچنین فرایند می‌کنند. به‌عنوان مثال، حرکت از $5=1+2x$ به $5=2x+1$ پیچیدگی بیشتر و گاهی‌اوقات یک مشکل جدی برای دانش‌آموزان است. این انعطاف‌پذیری که قادر باشیم $2x+1$ را هم به‌عنوان یک فرایند (که باید ارزشیابی شود) و هم به‌عنوان یک شئ (که باید دستورزی شود) تعبیر کنیم، برای پیشرفت جبری بسیار مهم است و به‌نظر می‌رسد این مهارت، در دانش‌آموزان ما توسعه پیدا کرده است.

علاوه‌براین، در این‌جا نقش معلم و سؤالاتی که مطرح می‌کند بسیار مهم است، و این از بسیاری جهات، اصل موضوع است. ما محور اعداد را، هم به‌خاطر در دسترس بودن آن، هم به‌خاطر ماندگاری آن، و هم برای این حقیقت که برای بسیاری از دانش‌آموزان ما تصویری موجود و آشناست، دوست داریم. از این نظر، این مدل می‌تواند اهدافی مشابه با محتوا و مدل‌هایی را که در رویکرد «آموزش ریاضی واقع‌گرا» از آن‌ها استفاده شده است، برآورده کند. چنین تحقق اهدافی، نه‌تنها دسترسی اولیه به ریاضیات را فراهم می‌کند، بلکه توسعه از طریق ریاضیات را نیز پشتیبانی می‌کند (گراونمیجر، ۱۹۹۰). اما فکر کردن در مورد موافق یا مخالف بودن با این رویکرد، یا شروع به مقایسهٔ مزایای نسبی آن با دیگر مدل‌ها، دور شدن از اصل مطلب است. در واقع، تعداد بیش از حدی

متغیر برای مبادرت به چنین مقایسه‌ای وجود دارد و هیچ شکلی وجود ندارد که در دست‌های غیرماهر، مدل محور اعداد در پوشهٔ «ایده‌های جدید جذاب» سر به مُهر می‌ماند. چیزی که ما واقعاً به آن علاقه‌مندیم، راهبردهایی است که می‌تواند به‌کار گرفته شود تا به دانش‌آموزان کمک کند به متفکران جبری کاراتری تبدیل شوند، و محور اعداد می‌تواند در این مورد نقش جدی بازی کند. اگر محور اعداد نقشی دارد، احتمالاً به‌خاطر این است که دسترسی به این مدل اجازه می‌دهد معادلاتی با مجهول در هر دو طرف، خیلی زودتر از آنچه در ساختار برنامهٔ درسی فعلی ماست معرفی شوند. به این ترتیب، وقت بیشتری برای توسعهٔ مفاهیم و مهارت‌های مهم، بدون فشار چارچوب‌ها و آزمون‌هایی که بیشتر اوقات یک نقطهٔ پایان تثبیت شده (اغلب یک الگوریتم یا رویهٔ بی‌معنی) را به معلم‌ها تحمیل می‌کند، می‌ماند. شروع کار از دانش‌آموزان یازده‌ساله (و به‌نظر می‌رسد امکان استفاده از مدل حتی قبل از این هم باشد) به دانش‌آموزان متوسط، حداقل سه‌سال برای کار به‌سوی روش‌های صوری‌تر و مجردتر، و معنا دادن به راهبردهای حل استاندارد، وقت می‌دهد.

پی‌نوشت‌ها

1. Framework for Teaching Mathematics
2. Didactic cut
3. undoing
4. Ontological
5. Cover stories
6. Mental starters
7. Realistic Mathematics Education

عنوان اصلی مقاله

Using the number line to investigate the solving of linear equation.

منابع

1. Behr, M., Erlwanger, S. and Nichols, E. (1976) *How children view equality sentences (PDMC Technnical Report* No.3)Tallahassee, FL, Florida State University.

2. Boulton - Lewis, G., Cooper, T., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, H.and Mutch, S. (1997) 'The transition from arithmetic to algebra: a cognitive Perspective', in Pehkonen, E. (ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lahti, Finland, University of Helsinki, Lahti Research and Training Centre, 2, pp. 185- 192.

3. Crowley, L., Thomas, M. and Tall, D. (1994) 'Algebra, symbols, and translation of meaning', in da Ponte, J. and matos, J, (eds), *Proceeding of Mathematics Education*, Lisbon, Portugal, University of Lisbon, 2, pp. 240- 247.

4. Filloy, E. and Rojano, T. (1985) 'Operating the unknown and models of teaching', in Damarin, S. and Shelton, M. (eds), *Proceedings of the 7th Annual Meeting of PME-NA*, Columbus, OH, Ohio State University, pp. 75- 79.

5. Filloy, E. and Rojano, T. (1989) 'Solving equations: the transtiion from arithmetic to algebra', *For the Learning of Mathematics* 9(2), 19- 25.

6. Fong, H. and Chong, T. (1995) 'Solving algebraic word problems', *mathematics Teaching* 151, 34- 35.

7. Department for Education and Employment (2001) *Framework for teaching mathematics: Key Stage 3 National Strategy*, London, UK. DfEE.

8. Gravemeijer, K. (1990) 'Context problems and Realistic Mathematics Instruction', in Gravemeijer, K., van den Heuvel, M. and Streefland, L. (eds), *Contexts free productions tests and geometry in Realistic Mathematics Education*, OW & OC, The Netherlands, pp. 10- 32.

9. Herscovics, N. and Linchevski, L. (1991) 'Pre-algebraic thinking: range of equations and informal solutions used by seventh graders prior to any instruction', in Furinghetti, F. (ed), *Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, Assisi, Italy, pp. 173- 180.

10. Herscovics, N. and Linchevski, L. (1996) 'Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra', *Educational Studies in Mathematics* 30 (2), 39- 65.

11. Kieran, C. (1981) 'Concepts associated with the equality symbol', *Educational Studies in Mathematics* 12, 317- 326.

12. Pimm, D. (1995) *Symbols and meaning in school mathematics*, London, UK, Routledge.

13. Saenz- Ludlow, A. and Waldgrave, C. (1998) 'Third graders interpretations of equality and the equal symbol, *Educational Studies in Mathematics* 35 (2), 153- 187.

14. Sfard, A. (1991) 'On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as differnt sides of the *same coin;, Educational Studies in Mathematics* 22, 1- 36.

15. Sfard, A. and Linchevski, L. (1994) 'The gains and pitfalls of reification the case of algebra', *Educational Studies in Mathematics* 26, 191- 228.

16. Streefland, L. (1990) 'Free productions in teaching and learning mathematics', in Gravemeijer, K., van den Heuvel, M. and Streefland, L. (eds) Contexts free productions tests, and geometry in *Realistic Mathematics Education*, OW & OC, The Netherlands, pp. 32- 52.

17. Streefland, L. (1991) *Fractions in Realistic Mathematics Education: a paradigm of developmental research*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

18. Treffers, A. (1987) *Three dimensions: a model of goal and theory description in matematics instruction- The Wiskobas Project*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

19. Treffers, A. (1991) 'Realistic Mathematics Education in The Netherlands 1980- 1990', in Streefland, L. (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary Schools, Utrecht*, The Netherlands, Freudenthal Institute, Utrecht University, pp. 21- 57.

20. Vlassis, J. (2002) 'The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown', *Educational Studies in Mathematics* 49 (3), 341- 359.

21. Wijers, M. (2001) 'How to deal with algebraic skills in realistic mathematics education?', in Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. and Vincent J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the Internationl Commission on Mathematical Instruction (ICM): The future of the teaching and learning of algebra* 2, Melbourn, Australia, Department of Science and Mathematics Education, University of Melbourn, pp. 649- 654.