وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی
www.roshdmag.ir
دورهٔ بیست و هشتم/ شمارهٔ ۱۳۸

رشد برهان ریاضی ۱

ماهنامهٔ آموزشی و تربیتی برای
دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه
۴۰ صفحه/ اردیبهشت ۱۴۰۲
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲
ISSN :1735-4943

مجله چندرسانه‌ای • شنیداری • دیداری • خوانشی

۸

بر مدار حساب، جبر و هندسه

۲۸ اردیبهشت
روز بزرگداشت حکیم عمر خیام
روز ملی ریاضیات

کدام کفش‌ها؟

برای مشاهدهٔ پاسخ، رمزینه را پویش کنید.

پیدا کنید کدام دو کفش به‌طور کامل مثل هم هستند. از راهبرد «حذف حالت‌های نامطلوب» استفاده کنید. برای مثال، کفش شمارهٔ ۲ مشابه ندارد، چون روی آن علامت قرار ندارد؛ در حالی‌که تمام کفش‌های دیگر این علامت را دارند. پس این شماره نمی‌تواند جواب مورد نظر باشد و حذف می‌شود. به همین ترتیب نامطلوب‌ها را حذف کنید تا پاسخ را پیدا کنید.

بســـــم الله الرحمن الرحيم
اللّهم صل علی محمد و آل محمد و عجل فرجهم

رشد برهان ۱
ریاضی
۸

ارزش هر کس به مقدار دانایی و تخصص اوست.
امام علی علیه‌السلام «نهج‌البلاغه، حکمت ۸۱»

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی www.roshdmag.ir
دوره بیست و هشتم/ شمارهٔ پی در پی **۱۳۸** / اردیبهشت **۱۴۰۲**
ماهنامه آموزشی و تربیتی برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه
ISSN:1735-4943 / پیامک: **۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲** / **۴۰** صفحه

مدیرمسئول: محمدصالح مذنبی/ **سردبیر:** حسین نامی ساعی/ **مدیر داخلی:** پری حاجی خانی
هیئت تحریریه: محرم ایردموسی، رضا حیدری قزلجه، روح‌الله خلیلی بروجنی، خسرو داودی، محمدرضا سیدصالحی، مرتضی مرتضوی، داود معصومی مهوار، محمود نصیری
ویراستار: بهروز راستانی/ **مدیر هنری:** کوروش پارسانژاد/ **طراح گرافیک :** حسین یوزباشی
تصویرگر: حسین یوزباشی

در این ماه؛ اردیبهشت ۱۴۰۲: **اول:** روز قدس **دوم:** عید سعید فطر **سوم:** روز بزرگداشت شیخ بهایی و روز ملی کارآفرینی **دهم:** روز ملی خلیج فارس **یازدهم:** روز جهانی کارگر **دوازدهم:** شهادت استاد مرتضی مطهری، روز معلم **بیست و پنجم:** روز بزرگداشت فردوسی **بیست و ششم:** شهادت امام جعفر صادق (ع) **بیست و هشتم:** روز بزرگداشت حکیم عمر خیام، روز ملی ریاضیات **سی‌ام:** روز ملی جمعیت

شرح مناسبت های ماه را با پویش رمزینه ببینید.

دوستم از شرکت‌کنندگان «المپیاد هنگ کنگ» در سال ۱۹۹۴ بود؛ به «آنالیز» خیلی علاقه داشت و یادم می‌آید یک درس آنالیز مختلط پیشرفته هم با من برداشته بود. در دوران دانشجویی سال‌ها عضو کمیتهٔ المپیاد بود و ...

صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ را بخوانید.

قیمت ۷۵۰۰۰ ریال

خانوادهٔ مجلات رشد همهٔ تلاش خود را کرده است تا این مجله در **دسترس عموم** دانش‌آموزان قرار گیرد و همهٔ کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی‌مان **امکان تهیهٔ** آن را داشته باشند.

برای مشاهدهٔ شرایط ارسال مطلب و همکاری با ماهنامهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول، رمزینه را پویش کنید.

برمدار حساب، جبر و هندسه

ان‌شاءالله طاعات و عباداتتان در ماه مبارک رمضان مورد قبول حق تعالی قرار گرفته باشد. همچنین عید سعید فطر را به شما و خانوادهٔ محترمتان تبریک می‌گوییم.

در شماره‌های قبل دربارهٔ مفهوم‌های تخمین، تقریب، احتمال، گراف، توپولوژی، پیوستگی و متغیر صحبت کردیم. در این شماره می‌خواهیم دربارهٔ حساب، جبر و هندسه صحبت کنیم. حتماً به خاطر دارید در اولین روزهایی که به مدرسه رفتیم، با عددها آشنا شدیم و بعد عمل روی آن‌ها را آموختیم؛ عمل‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم. مجموع این آشنایی با عددها و عمل‌ها، «علم حساب» است. بعد در دوره‌های تحصیلی بالاتر متغیرهای x، y، z و غیره را شناختیم و آن‌ها را به علم حساب اضافه کردیم و معادله‌ها و عبارت‌های جبری را ساختیم و آن‌ها را حل کردیم و به «علم جبر» رسیدیم. بعد شروع به اندازه‌گیری ضلع و زاویه کردیم و روابط بین آن‌ها را شناختیم و به این صورت با «هندسه» آشنا شدیم و ... بله خلاصهٔ علم حساب، جبر و هندسه همین چند خطی بود که گفتیم! و اگر کمی علمی‌تر به این مفاهیم نگاه کنیم، تعریف‌ها کمی متفاوت می‌شوند؛ به این صورت که:

علم حساب یا علم عدد، شاخه‌ای از ریاضیات است که شامل مطالعهٔ عددها، به‌خصوص خواص عملیات جمع، تفریق (تفاضل)، ضرب و تقسیم روی آن‌هاست. علم حساب دانستن قواعدی است که به وسیلهٔ آن‌ها مجهول‌های عددی را با استفاده از معلوم‌های عددی به‌دست می‌آوریم.

علم جبر تعمیم‌یافته و صورت پیشرفتهٔ علم حساب است. همچنین جبر، یا «جبر و مقابله» یا «حسابِ جبر و مقابله»، شاخه‌ای از ریاضیات است که موضوع آن محاسبه و به‌دست آوردن مجهول‌ها از معلوم‌ها با حل معادله‌ها و با استفاده از روش‌های حسابی و هندسی و نیز روش‌های خاص جبری است.

بد نیست بدانید، واژهٔ جبر یا «الجبر» نخستین بار در کتاب «المختصر فی حساب الجبر و المقابله»، اثر محمد بن موسی خوارزمی به کار رفته است. پس از آشنایی اروپاییان با این کتاب، با مختصر تغییراتی، جبر به صورت algebra در انگلیسی و algèbre در فرانسه درآمد. منظور خوارزمی از جبر افزودن مقدارها یا جمله‌های مساوی به دو طرف یک معادله است و واژهٔ مقابله هم به معنای حذف مقدارهای مساوی از دو طرف معادله است.

البته ابوریحان بیرونی، با بیانی نزدیک به خوارزمی، علم جبر را در کتاب «التفهیم» با تشبیه تساوی و معادلهٔ جبری به ترازو این‌گونه تعریف می‌کند: «افزودن مقدارهای مساوی به دو طرف یک ترازو برای حفظ تعادل آن ترازو.»

جبر و حساب چه تفاوتی با هم دارند؟

از تفاوت‌های اساسی جبر و حساب، یکی این است که ما در حساب از عددها و عمل‌های جمع، تفریق، و ضرب و تقسیم روی آن‌ها استفاده می‌کنیم، در صورتی که در جبر علاوه بر استفاده از عددها و عمل‌ها، متغیرها را هم که به صورت حرف می‌آیند، به کار می‌گیریم. دیگر اینکه در علم حساب، ما از چهار عمل اصلی تفریق، جمع، ضرب و تقسیم استفاده می‌کنیم، اما در جبر علاوه بر چهار عمل اصلی، از توان و ریشه نیز بهره می‌گیریم.

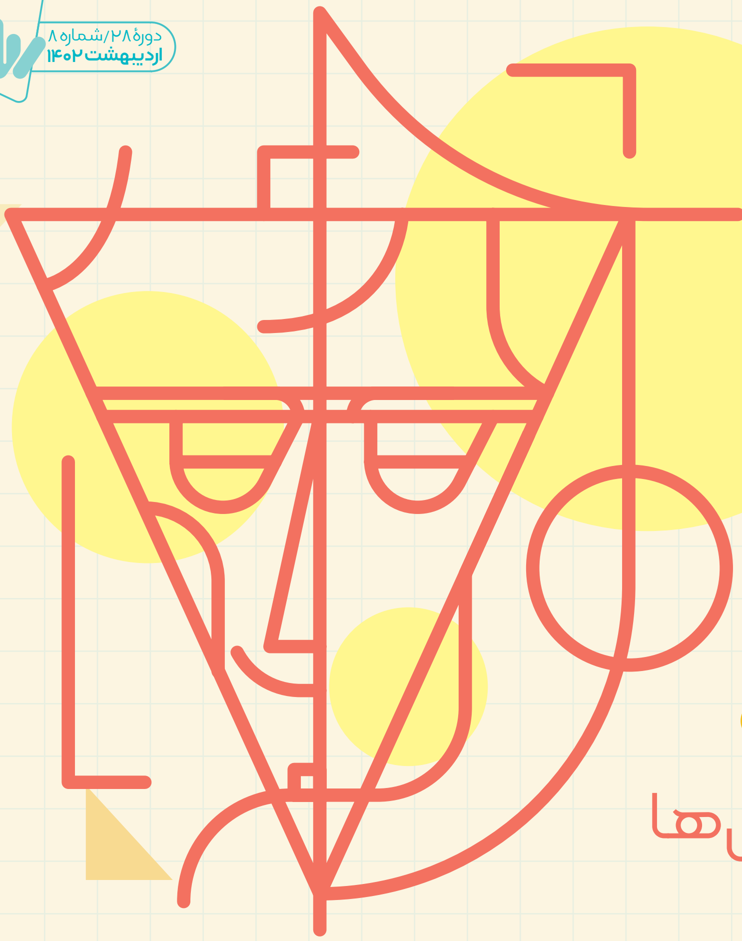
و اما هندسه یا «Geometry» یک واژهٔ یونانی باستانی است. «Geo» به معنای «زمین» و «metry» به مفهوم «اندازه‌گیری» است. علم هندسه علمی است که با شکل‌ها، زاویه‌ها، بُعدها، شیءها، موقعیت نسبی شکل‌ها، مساحت، حجم و ویژگی‌های فضا و اندازه‌گیری و اندازه‌های متفاوتی که در زندگی روزمره می‌بینیم، سروکار دارد. هندسه ریاضیاتی است که به ما کمک می‌کند، آنچه را از این علم آموخته‌ایم در دنیای واقعی تجربه کنیم و به کار بگیریم. همچنین به ما کمک می‌کند از جسم‌ها و فضاهای چند بعدی درک خوبی داشته باشیم.

ما از علم هندسه در بسیاری از کارها، از ساختن خانه‌ها و پل‌ها گرفته تا هنر، معماری، مهندسی، رباتیک، نجوم، مجسمه‌سازی، فضا، طبیعت، ورزش، ساخت ماشین‌ها و غیره استفاده می‌کنیم. یادگیری علم هندسه به دلیل شهودی بودن آن ساده‌تر از جبر است و در هندسه از ریاضیاتِ کمتر و ساده‌تری نسبت به جبر استفاده می‌کنیم.

هندسه به شاخه‌ها و بخش‌های متفاوتی تقسیم می‌شود. از اصلی‌ترین بخش‌های هندسه می‌توان به «هندسهٔ مسطحه» و «هندسهٔ فضایی» اشاره کرد. در هندسهٔ مسطحه شکل‌هایی که مورد مطالعه قرار می‌گیرند دو بعدی هستند؛ مانند مثلث، مربع، مستطیل، دایره و چندضلعی‌ها. در هندسهٔ فضایی هم شکل‌های سه بعدی مورد مطالعه قرار می‌گیرند؛ مانند مکعب‌ها، استوانه‌ها، مخروط‌ها و کره‌ها.

ان‌شاءالله در دورهٔ دوم متوسطهٔ و در دانشگاه دربارهٔ حساب، جبر و هندسه مطالب بیشتری خواهید آموخت.

حسین نامی‌ساعی



محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

تقارن چندضلعی‌ها

اشاره

در بخش قبلی «تقارن» را تعریف کردیم و توانستیم همهٔ تقارن‌های مربع را تعیین کنیم. چون تعیین تقارن‌های مثلث و چندضلعی‌ها نقش اساسی در تعیین تقارن‌های شکل‌های دیگر دارد، در این شماره تقارن‌های چندضلعی‌ها و به‌ویژه مثلث را بررسی می‌کنیم.

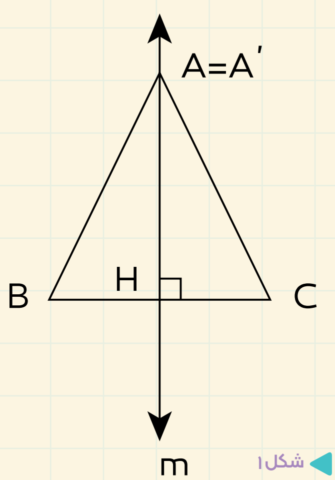
مسئلهٔ ۱. همهٔ تقارن‌های مثلث را تعیین کنید.

ابتدا به دنبال تقارن‌های خطی می‌رویم. مثلث سه رأس دارد. با توجه به این ویژگی مثلث فکر می‌کنید اگر مثلث تقارن خطی داشته باشد، این تقارن باید چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟

سعی کنید شکل‌های متفاوت رسم کنید و تعریف تقارن را در نظر داشته باشید. شاید بتوانید به نتیجه‌گیری خوبی برسید.

اگر قرار باشد نسبت به یک بازتاب، مثلث بر خودش منطبق شود، چون سه رأس داریم، پس باید حتماً بازتاب یک رأس بر خودش منطبق شود. این کلید حل مسئله است.

بنابراین باید خط بازتاب از یک رأس مثلث بگذرد. یعنی اگر مثلثی دارای بازتاب خطی باشد، خط این بازتاب حتماً باید از یک رأس مثلث بگذرد. اکنون باید دو رأس دیگر یکی بر دیگری منطبق شود. در شکل ۱ اگر این دو رأس B و C باشند، باید B بازتاب C و C بازتاب B نسبت به خطی بازتابی باشند که از A گذشته است. از این ویژگی چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



شکل ۱

بله درست فهمیده‌اید، باید: AB=AC؛ یعنی مثلث متساوی‌الساقین باشد. در این صورت m خط بازتاب نیم‌ساز زاویهٔ A یا عمودمنصف ضلع BC است؛ چرا؟

بنابراین تا اینجا می‌توانیم نتیجهٔ زیر را بیان کنیم:

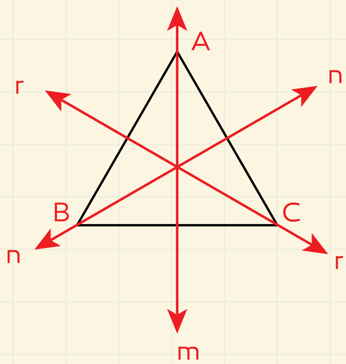
اگر مثلثی دارای یک تقارن خطی باشد، خط تقارن نیم‌ساز زاویهٔ یک رأس از مثلث است و این مثلث باید در آن رأس متساوی‌الساقین باشد.

پس اگر مثلثی در هیچ رأسی متساوی‌الساقین نباشد، آنگاه این مثلث هیچ‌تقارن خطی ندارد. یعنی مثلثی که هیچ دو ضلع یا دو زاویهٔ هم‌اندازه نداشته باشد، تقارن خطی ندارد.

اکنون به یک نتیجهٔ خوب می‌رسیم: «مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه تقارن خطی است»؛ چرا؟

اما در اینجا پرسشی چالشی را هم مطرح می‌کنیم: «آیا مثلثی وجود دارد که فقط دو تقارن خطی داشته باشد؟»
حتماً سعی کنید قبل از توضیح بعدی خودتان پاسخ را پیدا کنید. چگونه آن را ثابت می‌کنید؟

شکل ۲



فرض کنید مثلث ABC دارای دو تقارن خطی باشد. بنابر آنچه قبلاً توضیح دادیم، هر خط در تقارن خطی مثلث باید از یک رأس بگذرد. فرض کنیم در شکل ۲ خط‌های m و n که از رأس‌های A و B گذشته‌اند، دو خط تقارن مثلث ABC باشند.

از اینکه خط m، خط تقارن است، نتیجه می‌گیریم: AB=AC. و از اینکه خط n، خط تقارن است، نتیجه می‌گیریم: AB=BC.

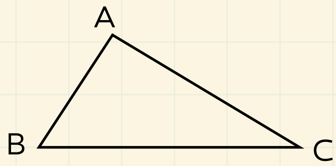
از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم: CA=CB. یعنی مثلث در رأس C هم باید متساوی‌الساقین و مثلث خط تقارن دیگری نیز دارد که از رأس C می‌گذرد. بنابراین ثابت کرده‌ایم که:

اگر مثلثی دارای دو تقارن خطی باشد، آنگاه دارای سه تقارن خطی است. یعنی هیچ مثلثی وجود ندارد که فقط دو تقارن خطی داشته باشد.

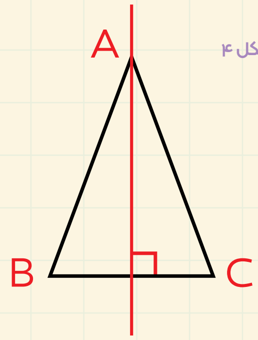
اکنون می‌توانیم در مورد تقارن‌های خطی هر مثلث جمع‌بندی زیر را داشته باشیم:

هر مثلث، یا هیچ تقارن خطی ندارد یا یک یا سه تقارن خطی دارد (شکل‌های ۳ تا ۵).

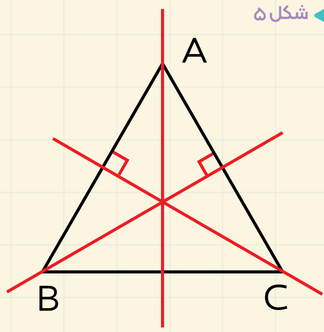
شکل ۳



شکل ۴

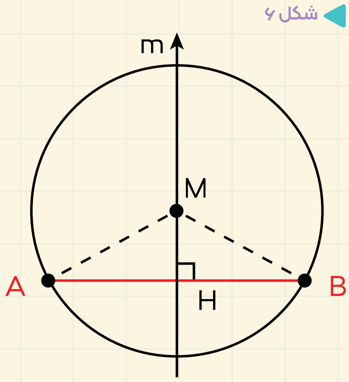


شکل ۵



اکنون تقارن‌های دورانی مثلث را بررسی می‌کنیم: قبلاً با ویژگی عمودمنصف پاره‌خط آشنا شده‌ایم. هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، و برعکس، اگر در صفحهٔ پاره‌خط، نقطه‌ای از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار دارد. با توجه به هم‌نهشتی مثلث‌ها این ویژگی به سادگی ثابت می‌شود.

شکل ۶



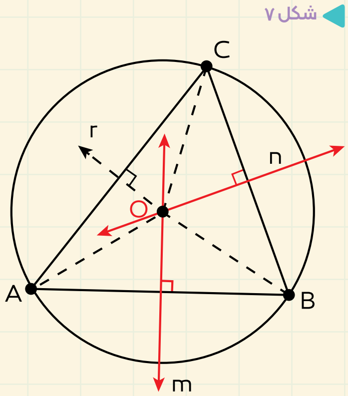
در شکل ۶ اگر m عمودمنصف پاره‌خط $\overline{AB}$ باشد، آن‌گاه برای هر نقطهٔ M روی m، اگر M روی وسط $\overline{AB}$ باشد MA=MB، در غیر این‌صورت، دو مثلث MHB و MHA به حالت «ض-ز-ض» هم‌نهشت‌اند؛ پس: MA=MB. برعکس اگر M نقطه‌ای در صفحهٔ پاره‌خط $\overline{AB}$ باشد و: MA=MB. مثلث MAB متساوی‌الساقین است پس M روی عمودمنصف پاره‌خط $\overline{AB}$ است؛ چرا؟
این ویژگی یک نتیجهٔ بسیار مهم دارد: اگر به مرکز M و شعاع MA=MB دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از نقطه‌های A و B می‌گذرد. این یکی از ویژگی‌های عمودمنصف پاره‌خط است که در حل مسئله‌های ترسیمی هندسه بسیار کاربرد دارد. بنابراین:

نقطه‌های روی عمودمنصف هر پاره‌خط مرکز دایره‌هایی هستند که از دو سر پاره‌خط می‌گذرند.

اکنون مسئله‌ای مهم را می‌توان طرح کرد:

مسئلهٔ ۲. چگونه دایره‌ای رسم کنیم که از سه رأس یک مثلث بگذرد؟
کلید حل مسئله در ویژگی عمودمنصف است. کمی فکر کنید. در شکل ۷ اگر دایره از A و B بگذرد، مرکز آن کجاست؟ اگر دایره از B و C بگذرد مرکز آن کجا باید باشد؟

شکل ۷

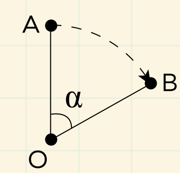


بله درست حدس زده‌اید. باید مرکز این دایره هم روی عمودمنصف $\overline{AB}$ و هم روی عمودمنصف $\overline{BC}$ باشد. پس اگر این دو عمودمنصف یکدیگر را در نقطه‌ای مانند

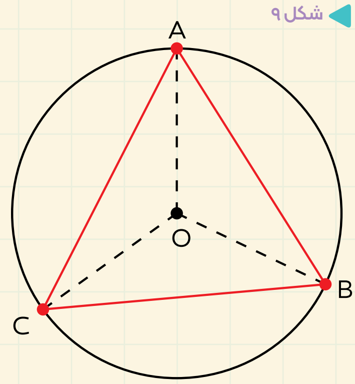
O قطع کنند، آنگاه: OA=OB=OC و در نتیجه دایره به مرکز O و شعاع یکی از این پاره‌خط‌ها از هر سه رأس مثلث می‌گذرند. البتـه عمودمنصف $\overline{AC}$ هـم حتماً از نقطهٔ O می‌گذرد؛ چرا؟
با توجه به مقدمهٔ بالا نتیجهٔ زیر را داریم:

عمودمنصف‌های هر مثلث در نقطه‌ای مانند O یکدیگر را می‌برند که نقطهٔ O از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است. پس این نقطه مرکز دایره‌ای است که از سه رأس مثلث می‌گذرد. این دایره را «دایرهٔ محیطی» مثلث نیز می‌نامند.

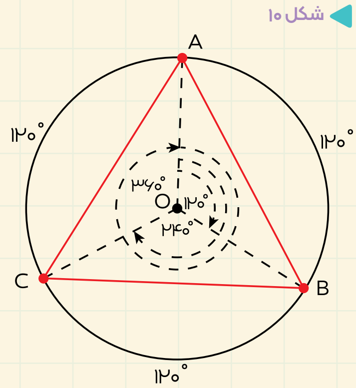
اکنون که با این ویژگی مهم مثلث آشنا شدیم، می‌توانیم تقارن‌های دورانی مثلث و حتی چندضلعی‌ها را بررسی کنیم. زیرا، تقارن دورانی چون وابسته به دوران است، پس دایره در آن نقش اساسی دارد. هر نقطه و نقطهٔ دوران‌یافتهٔ آن روی یک دایره به مرکز دوران واقع‌اند (شکل ۸).

شکل ۸


حال پرسش اصلی را کامل‌تر مطرح می‌کنیم: **«در چه صورت مثلث تقارن دورانی غیر همانی دارد؟»**
بیان کردیم که هر شکل دارای یک تقارن همانی یا دوران ۳۶۰° است. اکنون می‌خواهیم ببینیم در چه صورت مثلث تقارن غیرهمانی دارد؟
در تقارن دورانی چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ باید دورانی پیدا کنیم که تحت آن، مثلاً رأس A روی رأس B و رأس B روی رأس C و بالاخره رأس C روی رأس A واقع شود. پس اگر O مرکز این دوران باشد، اولاً باید داشته‌باشیم: OA=OB و OB=OC. در نتیجه: OC=OA. یعنی O مرکز این دوران از هر سه رأس به یک فاصله باشد که با توجه به ویژگی که بالا بیان کردیم، O باید مرکز دایره‌ای باشد که محل تلاقی سه عمودمنصف مثلث است (شکل ۹). اما آیا این کافی است یا شرط دیگری نیز لازم داریم؟

شکل ۹


بله با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که باید اندازه‌های سه زاویهٔ AOB، BOC و COA نیز برابر باشند. زیرا وقتی A روی B و B روی C واقع می‌شود، باید C نیز روی A واقع شود. این سه زاویه اگر اندازه‌های برابر داشته باشند، اندازهٔ هر یک باید چقدر باشد؟
اگر اندازهٔ هر یک را α فرض کنید، باید 3α یک دور کامل یعنی ۳۶۰° شود. پس: α=۱۲۰°. در نتیجه مثلث ABC (شکل ۱۰) باید یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

شکل ۱۰


نتیجه: هر مثلث در صورتی تقارن دورانی یا چرخشی غیرهمانی دارد که متساوی‌الاضلاع باشد.

بنابراین، هر مثلث متساوی‌الاضلاع دارای یک تقارن دورانی با زاویه‌ای به اندازهٔ ۱۲۰° است. این تقارن را به‌صورت R_{120° نشان می‌دهیم.
دوباره به شکل ۱۰ برمی‌گردیم. آیا تقارن دیگری نیز می‌توانید برای مثلث متساوی‌الاضلاع پیدا کنید؟

با کمی دقت مشاهده خواهید کرد که با یک دوران ۲۴۰°=۲×۱۲۰° می‌توانیم، A را روی C و B را روی A و C را روی B قرار دهیم. یعنی R_{240° نیز یک تقارن دورانی یا چرخشی به مرکز O است. و بالاخره، تقارن R_{360° که از ابتدا نیز مشخص بوده است.

نتیجه: هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه تقارن دورانی یا چرخشی دارد: R_{120°، R_{240° و R_{360°

بنابراین، هر مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه تقارن خطی و سه تقارن دورانی است.
اگر بخواهیم هرچه را که تاکنون بیان کرده‌ایم مرور کنیم، باید توجه داشته باشیم که تقارن‌های خطی به تبدیل بازتاب وابسته هستند و نقش عمودمنصف پاره‌خط‌ها در آن‌ها اساسی است.
تقارن‌های دورانی نیز به تبدیل دوران وابسته هستند و رسم دایره‌ها به تعیین این تقارن‌ها کمک می‌کند.
بین چهارضلعی‌ها مشاهده کردیم که مربع دارای چهار تقارن خطی و چهار تقارن دورانی است. در مورد تقارن‌های هر چهارضلعی نیز مشابه مثلث می‌توان بحث کرد. هر چهارضلعی ۰، ۱، ۲ یا ۴ تقارن خطی می‌تواند داشته باشد. به این معنی که هیچ چهارضلعی وجود ندارد که دارای سه تقارن خطی باشد. همچنین هر چهارضلعی حداکثر چهار تقارن دورانی دارد.

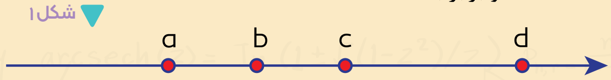
(قسمت سوم) داود معصومی‌مهوار

چکش کاری استدلال

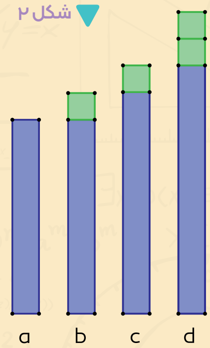
من: جلسهٔ پیش به این پرسش از آزمون پرداختیم:

روی محور عددها جای چهار عدد a، b، c و d نسبت به هم (شکل ۱) مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصلهٔ a تا b برابر با فاصلهٔ b تا c و برابر با نصف فاصلهٔ c تا d است.)

شکل ۱



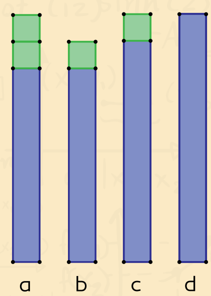
شکل ۲



در دو جلسهٔ پیش راه‌حل‌هایی برای این مسئله گفته شد. امروز می‌خواهم راهی را بیان کنم تا آن را نقد کنید. به کمک راهبرد رسم شکل این چهار عدد را کنار هم نشان می‌دهم.

چنان‌که در شکل ۲ می‌بینید، فرض‌های مسئله را نشان داده‌ام. اختلاف a و b درست به اندازهٔ اختلاف b و c است که با رنگ سبز نشان داده‌ام. اما اختلاف d و c دو برابر اختلاف c و b است که این مقدار دو برابر را با دو تکهٔ سبز رنگ نشان داده‌ام. حالا می‌خواهیم میانگین این چهار عدد را پیدا کنیم.

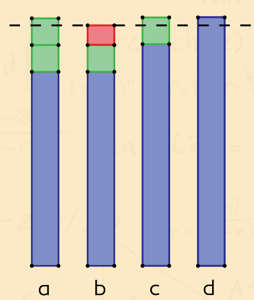
شکل ۳



نفیسه: کاری کردید کارستان! چرا هیچ یک از ما چنین کاری نکردیم. فکر کنم بقیهٔ کار خیلی ساده و سرراست است. باید اضافهٔ دوتایی را از روی d برداریم و روی a بگذاریم (شکل ۳).

الان a، c و d هر کدام به اندازهٔ یک تکهٔ سبز رنگ از b بیشتر هستند. پس اگر از هر کدام از آن‌ها به اندازهٔ یک چهارم تکهٔ سبز رنگ برداریم، هر کدام از b به اندازهٔ سه چهارم تکهٔ سبز رنگ بزرگ‌تر خواهند بود. بعد این سه تا یک چهارم را که با هم به اندازهٔ سه چهارم تکهٔ سبز رنگ هستند، به b اضافه می‌کنیم. به این ترتیب همه با هم برابر می‌شوند و این مقدار برابر میانگین آن‌ها خواهد شد.

شکل ۴



در شکل ۴، یک چهارم‌های اضافه بالای خط‌چین هستند و مقدار قرمز رنگ بالای b هم در واقع مجموع آن سه تا یک چهارم، یعنی سه چهارم است. با این حساب میانگین این چهار عدد از عدد c به اندازهٔ یک چهارم اختلاف c و b کوچک‌تر است. این همان چیزی است که با راه‌حل‌های گذشته پیدا کرده بودیم.

من: خب راه من هم همین بود. ممکن است این راه با تغییرات کوچکی بازسازی شود. مثلاً ممکن است کسی اختلاف هر عدد را با عدد قبلی رنگ نکند، بلکه اختلاف هر عدد با a را رنگ کند. این جزئیات را پیگیری نمی‌کنیم. همین راهی که نفیسه گفت خوب است. حالا نظرتان دربارهٔ این راه چیست؟

زهرا: خیلی واضح‌تر، روشن‌تر و ساده‌تر از راه‌های قبلی به نظر می‌رسد. شاید اگر همان اول این راه را می‌گفتید، بقیهٔ راه‌ها را گوش نمی‌کردیم!

نرگس (و چند نفر دیگر): اعتراف می‌کنم که بعضی از راه‌های قبلی را با چند بار مرور درک کردم، ولی این راه در همان آغاز، داستان را تمام و کمال تعریف کرد.

من: کسی نقدی به این راه حل ندارد؟ فقط به‌به و چه‌چه؟

ندا (پس از یک دقیقه): این راه خیلی شبیه همان راه حلی است که من به کمک شما پیدا کردم. من به کمک شما عدد اول را a، دومی را $b = a + s$، سومی را $c = a + ۲s$ و بالاخره عدد چهارم را $d = a + ۴s$ گرفتم. سپس میانگین را حساب کردم.

$$\text{میانگین} = \frac{(a)+(a+s)+(a+۲s)+(a+۴s)}{۴}$$

$$= \frac{۴a+۷s}{۴} = a + s + \frac{۳s}{۴}$$

به سادگی دیدیم که میانگین به مقدار $\frac{s}{۴}$ از عدد سوم یعنی $a + ۲s$ کوچک‌تر است. در این راه جدید مقدار s با رنگ سبز نشان داده شده است و a با رنگ آبی. البته کمی تفاوت هم هست. در c و d مقدار رنگ آبی کمی بیشتر از a است و می‌توان این جزئیات را یکی کرد تا دو راه بسیار بسیار شبیه‌تر بیان شوند.

من: زنده باد! بچه‌ها این راه، راه جدیدی نیست. در واقع همان راه‌حل ندا در جلسهٔ پیش است که به جای بیان به وسیلهٔ عددها و متغیرها، با شکل بیان شده است. اما نکتهٔ بسیار مهمی وجود دارد که ممکن است از آن خوشتان نیاید: «این راه واقعاً یک راه ریاضی نیست.» راه درست و اساسی همان است که ندا گفت. این شکل‌ها را می‌توان روشی دانست که کمک می‌کند تا آن راه را بهتر درک کنیم.

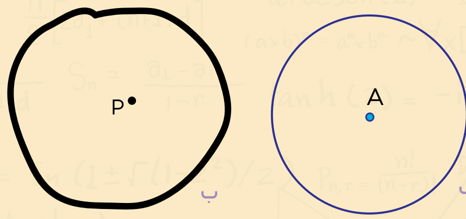
الهام: یعنی واقعاً تنها ارزش راهبرد رسم شکل «کمک به فهم فلان راه‌حل» است؟ بی‌انصافی نیست؟

من: بی‌انصافی نیست. توجه کنید که قضاوت از روی شکل راه و رسم مطمئنی نیست. در عوض بررسی و نتیجه‌گیری از روابط و عبارت‌های جبری روشی است که کاملاً بر دانسته‌های قبلی و قضیه‌ها مبتنی است. استدلال این است نه آن!

سایه: پس چرا خود ریاضی‌دان‌ها هندسه یا هندسهٔ مختصاتی را ابداع کرده‌اند؟

من: اتفاقاً هیچ یک از قضاوت‌ها در هندسهٔ اقلیدسی یا هندسهٔ دکارتی بر اساس آنچه که در شکل دیده می‌شود نیست! آنجا هم شکل وسیله‌ای است برای تفهیم یا انتقال بهتر مفهوم. هیچ بخشی از هیچ شکلی، موضوع هندسه نیست. وقتی شما از یک دایره می‌گویید، دربارهٔ موجودی حرف می‌زنید که در ذهن شما وجود دارد. صد البته می‌توانید آن را به کمک یکی از دو شکل الف و ب در شکل ۵ نیز توصیف کنید.

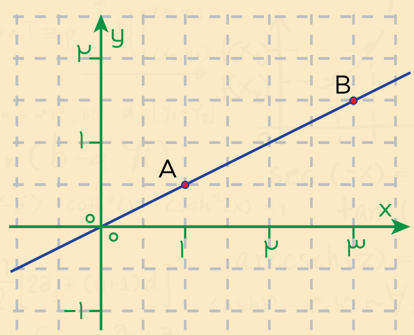
شکل ۵



ولی به یاد داشته باشید که هر دوی این‌ها نمایش دایره هستند نه خود دایره. تا وقتی که قبول داشته باشید هر یک از نقطه‌های این دو شکل فاصله‌شان تا مرکز مقدار ثابتی است، مشکلی در نمایش شما وجود ندارد. اگر هم واقعاً ویژگی‌های این دو شکل را بررسی و تأیید کنید که دایره ضخامت دارد یا ... همین‌جا تمام حرف‌های شما بیرون از هندسه می‌رود و به بررسی یک شکل واقعی مربوط می‌شود. ذهنی‌بودن موجودات هندسی، مانند نقطه، خط و دایره هم ضعفی برای هندسه نیست. ویژگی‌های شکل‌های هندسی در ذهن پیدا می‌شوند. سپس همین ذهن ما تلاش می‌کند تا در واقعیت چیزهای شبیه‌تری به موجودات ذهنی پیدا کند و از ویژگی‌های آن‌ها فایده ببرد. مثلاً چرخ را تا حد امکان گرد و شبیه دایره بسازد تا حرکت ساده‌تر انجام گیرد. یا در ساخت چرخ‌دنده از منحنی چرخزاد کمک بگیرد تا فرسایش دنده‌ها کمتر شود. این‌ها همه در ذهن پیدا و سپس در واقعیت شبیه‌سازی می‌شوند.

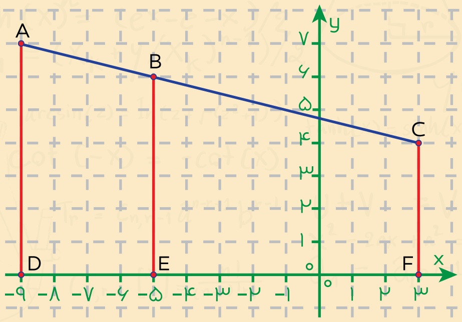
مورد سادهٔ دیگری مثال می‌زنم که تا حدی با آن آشنا هستید. در صفحهٔ مختصات دکارتی، نقطه‌هایی مانند $\begin{bmatrix} x \\ ۰/۵x \end{bmatrix}$ را روی خطی می‌دانند که از مبدأ مختصات می‌گذرد (شکل ۶).

شکل ۶



اینکه نقطه‌های مزبور همگی روی یک خط هستند، به این دلیل نیست که چشم ما چنین قضاوتی دارد. یا اگر حکم می‌کنند که این خط از مبدأ می‌گذرد، به این دلیل است که نقطهٔ صفر و صفر نیز ویژگی نقطه‌های این خط را دارد: $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰/۵\times ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$. یا مثلاً در شکل ۷ به نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} -۹ \\ ۷ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -۵ \\ ۶ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ توجه کنید.

شکل ۷



شاید چشم ما بی‌درنگ حکم کند که این سه نقطه در یک امتداد هستند، ولی در ریاضیات تنها وقتی این موضوع را می‌پذیرند که استدلالی برای آن آورده شود. مثلاً شما می‌توانید با توجه به مختصات نقطه‌ها سراغ مساحت ذوزنقه‌های ABED، BCFE و ACFD بروید و با مقایسهٔ آن‌ها مساحت مثلث ABC را تعیین کنید. این مثلث حتی اگر مساحتی کم و کوچک داشته باشد، در یک امتداد بودن A، B و C نقض می‌شود و اگر محاسبه‌ها مساحت مثلث را برابر با صفر نشان دهند، مطمئن خواهیم بود که این سه نقطه در یک امتداد هستند.

اعظم: خب محاسبه‌ای که گفتید کار ساده‌ای است. مثلاً ارتفاع ذوزنقهٔ ABED به سادگی برابر ۴ واحد و طول قاعده‌های آن ۶ و ۷ واحد است. به همین سادگی محاسبه‌ها را می‌توان ادامه داد:

$$S_{ABC} = \left| S_{ABED} + S_{BCFE} - S_{ACFD} \right| =$$
$$\frac{(۶+۷)\times ۴}{۲} + \frac{(۶+۴)\times ۸}{۲} - \frac{(۷+۴)\times ۱۲}{۲} = ۲۶ + ۴۰ - ۶۶ = ۰$$

یعنی سه نقطهٔ A، B و C در یک امتداد هستند. ولی کنجکاوم بدانم دربارهٔ نقطه‌هایی که مختصات آن‌ها به صورت $\begin{bmatrix} x \\ ۰/۵x \end{bmatrix}$ هستند، چه می‌کنند. صحبت دربارهٔ بی‌شمار نقطه است! با دو سه مثال کار راه نمی‌افتد!

من ساکت بودم و چیزی نمی‌گفتم.

نرگس (پس از دو دقیقه): به گمانم کار ساده‌ای نیست، ولی پیچیده هم نیست. شاید روش ریاضی چنین باشد که باید سه تا نقطهٔ دلخواه مانند $\begin{bmatrix} p \\ ۰/۵p \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} q \\ ۰/۵q \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} r \\ ۰/۵r \end{bmatrix}$ را بگیریم و تکلیفشان را معین کنیم که در یک امتداد هستند یا نه. اگر مثلاً به همان روش محاسبهٔ مساحت ذوزنقه‌ها روشن شود که این سه نقطه در یک امتداد هستند، در واقع ما این کار را برای همهٔ نقطه‌هایی که به‌صورت $\begin{bmatrix} x \\ ۰/۵x \end{bmatrix}$ هستند، انجام داده‌ایم و می‌توانیم حکم کنیم که همهٔ این نقطه‌ها روی یک خط هستند.

من: عالی است. دارید استدلال‌کردن را یاد می‌گیرید.

برای دیدن دو قسمت قبل رمزینه را پویش کنید.

محسن کیخائی، حسین کریمی

یک مسئله و چند راه‌حل
مقایسهٔ میانگین‌های حسابی و هندسی

مسئله: اگر a و b دو عدد حقیقیِ مثبت باشند، نشان دهید:

$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$$

(حالت تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که: a=b)

مثال ۱. اگر a=۸ و b=۲، داریم: $\frac{۸+۲}{۲}>\sqrt{۸\times۲}$

مثال ۲. اگر a=۳ و b=۳، داریم: $\frac{۳+۳}{۲}=\sqrt{۳\times۳}$

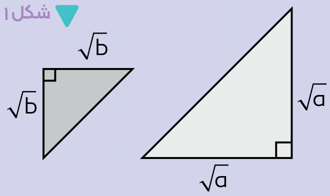
همان‌طور که در مثال ۲ می‌بینید، a=b=۳ و حالت تساوی برقرار است.

گفتنی است که $\frac{a+b}{۲}$، میانگین حسابی و $\sqrt{ab}$ میانگین هندسی دو عدد حقیقی مثبت a و b نامیده می‌شود.

اثبات مسئله به چند روش متفاوت با فرض a≥b

روش اول: دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین شکل ۱ را در نظر می‌گیریم. در هر کدام از این مثلث‌ها اندازهٔ زاویه‌ها ۴۵، ۹۰ و ۴۵ است.

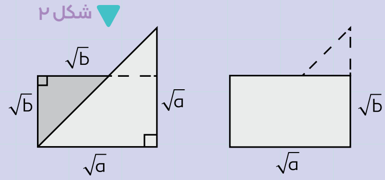
شکل ۱



این دو مثلث را در شکل ۲ الف کنار هم قرار داده‌ایم.

اگر در شکل ۲ الف، مثلثی که بالای خط‌چین قرار دارد را کنار بگذاریم، مستطیل شکل ۲ ب حاصل می‌شود.

شکل ۲



الف ب

مساحت الف و ب در شکل ۲ به‌صورت زیر است

$$S_{\text{الف}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{a}\times\sqrt{a}+\frac{۱}{۲}\sqrt{b}\times\sqrt{b}=\frac{a+b}{۲}$$

$$S_{\text{ب}}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

با توجه به اینکه: $S_{\text{الف}}\geq S_{\text{ب}}$، نتیجه می‌شود:

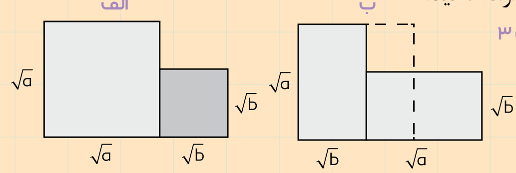
$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$$

دقت داشته باشید که اگر: a=b، در این رابطه حالت تساوی اتفاق می‌افتد (بررسی کنید).

روش دوم: شکل ۳ را در نظر بگیرید. مشابه روش اول، به‌عنوان تمرین، درستی رابطهٔ $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$ را بررسی کنید.

در اینجا حالت تساوی در چه صورتی اتفاق می‌افتد؟ برای آن شکل مناسب ارائه دهید.

شکل ۳

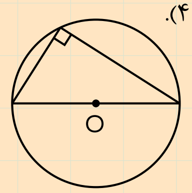


الف ب

قبل از پرداختن به روش سوم دو نکته را یادآوری می‌کنیم:

نکتهٔ ۱: زاویهٔ محاطی یعنی زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و ضلع‌های آن وترهای دایره هستند، هنگامی که مقابل قطر دایره باشد، برابر ۹۰ درجه است (شکل ۴).

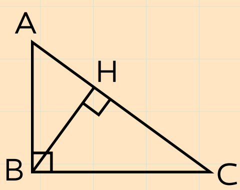
شکل ۴



نکتهٔ ۲. در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل‌ضرب دو قطعه‌ای که روی وتر ایجاد می‌کند.

برای بررسی درستی این نکته، شکل ۵ را در نظر بگیرید.

شکل ۵



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، ارتفاع وارد وتر، یعنی BH را رسم کرده‌ایم. نشان می‌دهیم: $BH^۲=AH\times HC$

(در اینجا منظور از $BH^۲$ یعنی: $BH\times BH$).

رابطهٔ فیثاغورس را برای سه مثلث قائم‌الزاویه که در این شکل وجود دارند، می‌نویسیم:

۱. در مثلث AHB: $AB^۲=AH^۲+BH^۲$

۲. در مثلث BHC: $BC^۲=BH^۲+HC^۲$

۳. در مثلث ABC: $AC^۲=AB^۲+BC^۲$

با استفاده از رابطه‌های ۱ و ۲، رابطهٔ ۳ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

۴. $AC^۲=AH^۲+BH^۲+BH^۲+HC^۲=AH^۲+۲BH^۲+HC^۲$

با توجه به اینکه: $AC=AH+HC$ نتیجه می‌شود:

$$AC^۲=(AH+HC)^۲=AH^۲+۲AH\times HC+HC^۲$$

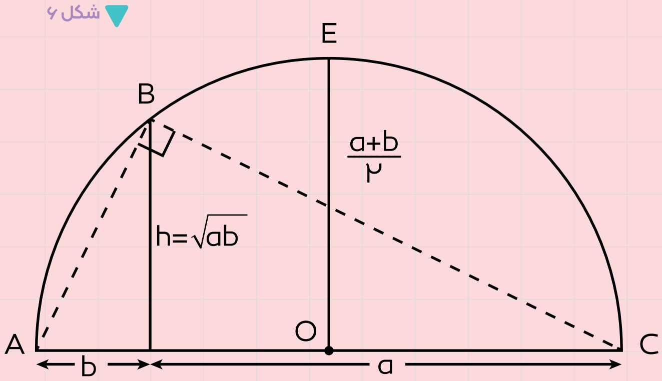
پس رابطهٔ ۴ را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$AH^۲+۲AH\times HC+HC^۲=AH^۲+۲BH^۲+HC^۲\Rightarrow AH\times HC=BH^۲$$

تذکر: از $BH^۲=AH\times HC$ نتیجه می‌شود: $BH=\sqrt{AH\times HC}$

روش سوم: شکل ۶ نصف دایره‌ای به مرکز O است. با توجه به نکتهٔ ۱، مثلث ABC قائم‌الزاویه است. h، ارتفاع وارد بر وتر این مثلث را رســم می‌کنیم و دو قطعه‌ای را که روی وتر به وجود می‌آورد a، b در نظر می‌گیریم. با توجه به نکتهٔ ۲ و تذکر قبل: $h=\sqrt{ab}$، از طرف دیگر، چون قطر نیم‌دایره برابر a+b است، پس برای شعاع OE داریم: $OE=\frac{a+b}{۲}$. به‌وضوح می‌بینیم که: OE≥h و این یعنی: $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$. بدیهی است که اگر مثلث قائم‌الزاویه به‌گونه‌ای رسم شــود که رأس B بر E منطبق شــود، آنگاه حالت تساوی اتفاق می‌افتد (بررسی کنید).

شکل ۶



روش چهارم: با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمهٔ a و b، شکل ۷ را می‌سازیم. این شکل مربعی به ضلع a+b است. مساحت کل در اینجا برابر است با: $S=(a+b)^۲$.

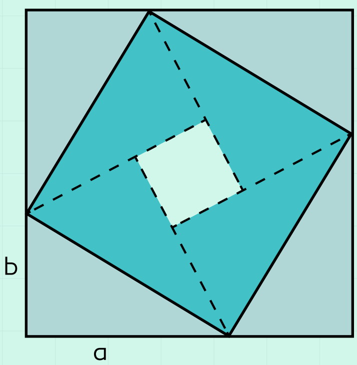
اگر S' را مجموع مساحت هشت مثلث قائم‌الزاویهٔ یکسان با اضلاع قائمهٔ a، b در نظر بگیریم، داریم: $S'=۸\times\frac{۱}{۲}ab=۴ab$.

با توجه به اینکه S≥S' (چرا؟) نتیجه می‌شود:

$$(a+b)^۲\geq ۴ab\Rightarrow a+b\geq ۲\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$$

توجه کنید که در اینجا حالت تســاوی زمانی اتفاق می‌افتد که: a=b؛ یعنی مثلث قائم‌الزاویهٔ اولیه، متساوی‌الساقین باشد (به‌عنوان تمرین بررسی کنید).

شکل ۷



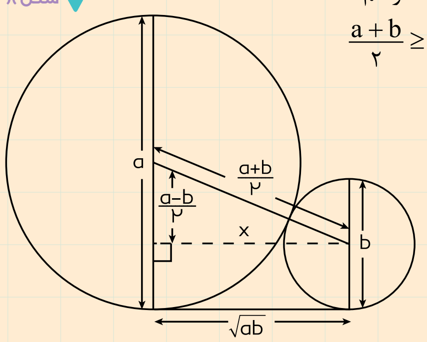
روش پنجم: دو دایره به قطرهای a و b به‌صورت مماس بر هم در شکل ۸ رسم شده‌اند. تنها کاری که در اینجا باید انجام دهیم تا به نتیجهٔ مطلوب، یعنی $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$ برسیم، پیدا کردن مقدار x به کمک رابطهٔ فیثاغورس است. (سایر جزئیات و همچنین بررسی حالت a=b به‌عنوان تمرین).

$$(\frac{a-b}{۲})^۲+x^۲=(\frac{a+b}{۲})^۲\Rightarrow x^۲=(\frac{a+b}{۲})^۲-(\frac{a-b}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow x^۲=\frac{a^۲+۲ab+b^۲}{۴}-\frac{a^۲-۲ab+b^۲}{۴}=\frac{۴ab}{۴}=ab$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{ab}$$

شکل ۸

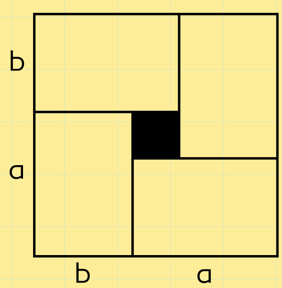


روش ششم: با توجه به شکل ۹ می‌توان نشان داد:

$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$$

(با روشی مشابه روش چهارم، به‌عنوان تمرین بررسی کنید.)

شکل ۹



برای درک بهتر مطالب، پیشـــنهاد می‌شود شکل‌های روش‌هـــای اول، دوم، چهارم و پنجم را، با اندازهٔ دلخواه روی کاغذ رسم کنید و با قیچی برش دهید. همچنین روش‌های سوم و چهارم را با در نظر گرفتن مقدار دلخواه برای a و b رسم کنید و مراحل کار را انجام دهید.

منابع

1. Nelsen. Roger B, Proofs without Words, v. 1, The Mathematical Association of America, 1993.
2. Nelsen. Roger B, Proofs without Words, v. 2, The Mathematical Association of America, 2000.
3. Nelsen. Roger B, Proofs without Words, v. 3, The Mathematical Association of America, 2015.

بیایید کمی فکر کنیم!

خسرو داودی

آب‌ها بخار می‌شوند!

چرا بزرگ‌ترین دریاچهٔ جهان هر سال یک وجب کوتاه‌تر می‌شود؟

کمی فکر کنیم!

امروزه با خطرها و آسیب‌های ناشی از تغییرات اقلیمی مواجه هستیم. همهٔ دنیا نگران این موضوع هستند و گرم‌شدن کرهٔ زمین به علت وجود گازهای گلخانه‌ای، باعث بحران‌های کم‌آبی و خشک‌سالی در منطقه‌های متفاوت کرهٔ خاکی شده است. کشور ما هم در این زمینه با مشکل بزرگ کم‌آبی مواجه است. عده‌ای از کارشناسان معتقدند در آینده بحران آب یکی از عوامل اصلی درگیری و تنش‌های بین مردم دنیا خواهد شد. این در حالی است که در شمال کشور بزرگ‌ترین دریاچهٔ کرهٔ زمین، یعنی دریای خزر را داریم و از جنوب به آب‌های آزاد و خلیج‌فارس متصل هستیم. اما این منابع از نگرانی‌ها کم نمی‌کنند. به این خبر توجه کنید:

«معاون امور دریایی سازمان بنادر و دریانوردی کشور گفته است که آب دریای خزر به‌طور متوسط سالانه ۲۰ سانتی‌متر کاهش می‌یابد. **مجید علی‌نازی** به ایسنا گفت که این موضوع زنگ خطری برای بنادر شمال کشور است. آقای علی‌نازی افزود: سازمان بنادر کشور نگاهی ویژه به لایروبی بنادر شمالی دارد.»

یعنی اگر به همین ترتیب آب دریای خزر کم شود، انواع و اقسام خطرات برای محیط‌زیست و امور صنعتی، کشتی‌رانی و تجارت به‌وجود می‌آید که در خبر بالا فقط به یک مورد آن، یعنی بندرها و اسکله‌ها، اشاره شده است. به‌طور حتم اخبار مربوط به کاهش آب مرداب انزلی را که از مناطق بسیار جذاب ساحل خزر است، شنیده‌اید. اثرات ناشی از این کاهش بر ماهیگیری، از بین رفتن انواع آبزیان، گیاهان و نیلوفر آبی، و آتش‌سوزی‌های گسترده در مرداب بخشی از مشکلات ناشی از کاهش آب هستند. برای اینکه

به عظمت آبی که در حال کاستن است پی ببرید، دوباره باید دست به دامان ریاضی شویم. با چند محاسبهٔ ساده می‌خواهیم متوجه شوید که کاهش ۲۰ سانتی‌متری ارتفاع آب دریای خزر چه معنایی دارد.

محاسبه کنیم!

همان‌طور که گفتیم دریای خزر بزرگ‌ترین دریاچهٔ کرهٔ زمین است. مساحت این دریاچه به‌طور تقریبی بین ۳۷۰۰۰۰ تا ۴۲۰۰۰۰ کیلومترمربع است. علت این اختلاف به عوامل متغیر، از جمله میزان تبخیر و بارندگی، و ورودی‌های دریاچه بستگی دارد. جالب است بدانید که حدود ۱۳۰ رودخانه به این دریا می‌ریزند. برای تبدیل واحد کیلومترمربع به مترمربع به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱۰۰۰متر ×۱۰۰۰متر=۱کیلومتر×۱ کیلومتر= ۱کیلومترمربع
۱۰۰۰۰۰۰مترمربع =

در محاسبه‌های خودمان مساحت دریای خزر را به‌طور متوسط ۴۰۰ هزار کیلومترمربع در نظر می‌گیریم؛ پس:

مترمربع ۴۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰=۴۰۰۰۰۰ کیلومترمربع

یعنی مساحت دریای خزر در حدود ۴۰۰ میلیارد مترمربع است. می‌دانیم ۲۰ سانتی‌متر یعنی ۰/۲ متر. بنابراین کاهش ۲۰ سانتی‌متری در این وسعت یعنی:

مترمکعب ۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰=۰/۲×۴۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

به عبارت دیگر، هر سال ۸۰ میلیارد مترمکعب آب دریاچهٔ خزر کم می‌شود. برای اینکه از این عدد درک بهتری پیدا کنیم، خوب است به مصرف آب شرب و آشامیدنی شهر تهران توجه کنیم. در حال حاضر مصرف آب روزانه در شهر تهران در حدود سه میلیون و ۵۰۰ هزار مترمکعب است. پس در یک سال خواهیم داشت:

۱۲۷۷۵۰۰۰۰۰۰= ۳۶۵×۳۵۰۰۰۰۰

مصرف سالانهٔ آب شهر تهران (مترمکعب)

اگر مقدار را در حدود یک میلیارد مترمکعب در نظر بگیریم، نتیجه خواهیم گرفت که مقدار کاهش آب دریای خزر در یک سال معادل است با ۸۰ سال مصرف آب در شهر تهران. اکنون متوجه اهمیت موضوع شدید؟! این نتیجهٔ تأثیر یک عدد کوچک (۲۰ سانتی‌متر) در یک مساحت بزرگ (۴۰۰ هزار کیلومترمربع) است.

می‌دانیم هر بطری آب ۱/۵ لیتر آب دارد. هر مترمکعب نیز ۱۰۰۰ لیتر است. پس:

۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰=۱۰۰۰×۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

(۸۰۰۰۰ میلیارد لیتر آب هر سال از دریای خزر کم می‌شود)

۵۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ≃ ۱/۵ ÷ ۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۵۳۰۰۰ میلیارد بطری آب

یعنی اگر جمعیت دنیا را در حدود هشت میلیارد نفر در نظر بگیریم، با این مقدار آب به هر نفر در سال ۱۰۰۰ لیتر آب خواهد رسید که برای آشامیدن و خوردن یک سالش کافی است.

بیشتر فکر کنیم!

این محاسبه‌ها دو موضوع را برای ما بیشتر آشکار کردند:

اول آنکه شنیدن یک خبر مثل اینکه ۲۰ سانتی‌متر از ارتفاع دریای خزر کاسته می‌شود، می‌تواند معنای بزرگی داشته باشد و نباید به کوچکی عدد ۲۰ سانتی‌متر توجه کرد. این نگاه ما را نسبت به شنیدن خبرهای مشابه حساس‌تر می‌کند.

نکتهٔ دوم اهمیت کم‌آبی و بحران آبی است که به‌طور حتم در آینده همه را متأثر و درگیر خواهد کرد و مشکلات فراوانی را به بار خواهد آورد. مهم این است که بدانیم نقش ما در این میان چیست و چه کاری از دست ما برمی‌آید. به نظر من، دانش‌آموز مدرسه باید همین چیزها را یاد بگیرد. نسبت به محیط‌زیست و مسائل مربوط به آن حساس باشد و اهمیت موضوع را درک کند. به بزرگ‌ترها توجه بدهد و به آن‌ها یادآوری کند که چطور باید در مصرف آب صرفه‌جویی کنند. آب را هدر ندهیم و برای آیندگان باقی بگذاریم. به طبیعت لطمه نزنیم. درصدد کاستن مصرف انرژی فسیلی باشیم. برای استفاده از انرژی‌های تجدیدپذیر، انرژی باد، خورشید و انرژی‌های پاک قدم برداریم. خلاصه اینکه در این موارد کمی بیشتر فکر کنیم و حساس باشیم!

• محمدحسین دیزجی

موفقیت یعنی تمرین و تکرار

گفت‌وگو با کامران فریدونی؛ عکاس، مدرس خلاقیت و مخاطب دیروز مجلهٔ رشد ریاضی برهان

از آن روزی که با پوشاندن شیشه‌های حمام خانه در نیمه‌های شب به ظهور و چاپ عکس‌های سیاه‌وسفید می‌پرداخت، تا آن روزهایی که شاگردانی را تعلیم می‌داد و تربیت می‌کرد، چهار دهه و کمی بیشتر می‌گذرد. عکاسی را هم هنر می‌بینند و هم صنعت می‌داند. در حرفه‌اش آن‌قدر صبور است که گاهی برای ثبت یک لحظه، شاید تا یک ساعت دوربین را روی دستانش نگه می‌دارد تا آن صحنه جاودانه شود.

کامران فریدونی متولد ۱۳۴۱ در تهران است. دیپلم ریاضی فیزیک و کارشناسی عکاسی دارد. جایزهٔ دوم «پنجمین نمایشگاه سالانهٔ عکس ایران» و برگزاری دو نمایشگاه عکس انفرادی را در کارنامه‌اش دارد. به مدت ۱۷ سال مربی و بنیان‌گذار کارگاه‌های خلاقیت بوده است. معاونت پرورشی «دبیرستان ماندگار **فیروز بهرام**» از دیگر اندوخته‌های اوست. ارتباط بین ریاضی و عکاسی محور این گفت‌وگوست.

• عکاسی چقدر می‌تواند با ریاضی رابطه داشته باشد. آشنایی با دانش ریاضی تا چه اندازه در عکاسی اثرگذار است؟

○ مغز انسان دارای دو نیم‌کرهٔ راست (خلاق ـ هنرمند) و چپ (ریاضی‌دان ـ منطقی) است. هر دو نیمه در انجام هر کاری همکاری دارند، اما غالباً یک نیمه بنا به ماهیت آن کار، سهم بیشتری پیدا می‌کند. تجربهٔ من می‌گوید اگر جزو شخصیت‌هایی باشید که نیمهٔ هنرمند قوی‌تری دارید، برای متمایزشدن و بهتربودن لازم است روی نیم‌کرهٔ ریاضی نیز کار کنید.

در مبانی هنرهای تصویری (تجسمی) با اجزای سازندهٔ هر تصویر که نقطه، خط، سطح، حجم و ... آشنا می‌شویم. یک خط افقی در یک کادر افقی تداعی آرامش، سکون و استراحت را می‌کند. این مفهوم بر مبنای تجربهٔ انسان است که هنگام استراحت یا خواب دراز می‌کشد (افقی می‌شود). ما عدد ۲ در طبیعت نداریم. فقط وقتی مثلاً می‌گوییم دو تا سیب، تازه آن موقع مفهوم انتزاعی ۲ را درک می‌کنیم. عکاسی مینی‌مالیستی هنری کاملاً انتزاعی مانند ریاضی است که با نقطه، خط، سطح، حجم، رنگ و ... مفاهیم را می‌رساند.

• کمی بیشتر توضیح بدهید. لطفاً مثالی بزنید.

○ تناسبات فیبوناچی (نسبت طلایی یا یک‌سوم) از مثلثات سرچشمه می‌گیرد. «سری فیبوناچی» به دنباله‌ای از عددها گفته می‌شود که **لئوناردو فیبوناچی** آن‌ها را به‌صورت زیر تعریف کرد: «برای به‌دست‌آوردن عددهای فیبوناچی، غیر از دو عدد اول، عددهای بعدی از جمع دو عدد قبلی خود به‌دست می‌آیند:

۰,۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,۸۹,۱۴۴,۲۳۳,۳۷۷,۶۱۰,...

شما با استفاده از قانون نسبت طلایی در عکاسی می‌توانید عکس‌هایی خلق کنید که به شکل طبیعی چشم‌نوازتر هستند.

● در کدام‌یک از شاخه‌های عکاسی (کدام مبحث) ریاضی کاربرد بیشتری دارد؟
○ محاسبه‌های ریاضی در عکاسی تبلیغاتی، عکاسی صنعتی و عکاسی معماری کاربرد دارد.

● یک بخش از هنر عکاسی آشنایی با نور، میان‌بند (دیافراگم) و مانند این‌ها یا همان تکنیک یا فن است. بُعد دیگر آن شناخت زاویه‌ها، یا به‌عبارت دیگر، مبانی هنرهای تجسمی است و دید عکاسی و شاید به عبارتی جهان‌بینی عکاس است. آیا می‌توان هر دوی این موارد را به نوعی به ریاضیات ربط داد؟
○ من در این پرسش دو بخش با نام‌های «فن عکاسی» و «مبانی هنرهای تصویری» را تشخیص می‌دهم. عکاسی می‌تواند صنعت، هنر یا ترکیبی از این دو باشد. مثلاً عکاسی به‌عنوان صنعت مانند زمانی است که عکسی برای تبلیغ یک کالا یا نشان‌دادن فرایند تولید می‌گیرید. در این حالت برای نورپردازی در آتلیه یا کارخانه، محاسبه‌های ریاضی نیاز است. در عکاسی معماری و کمینه‌گرایی (مینی‌مالیستی)، هندسه، پرسپکتیو و ترسیم فنی اهمیتشان را نشان می‌دهند.
زمانی که عکاسی به هنر نزدیک‌تر می‌شود، بالابردن توانایی نیمهٔ چپ مغز (نیمهٔ ریاضی یا منطقی) توانایی ما را در استفاده از شکل‌های انتزاعی و خلق یک اثر هنری بالا می‌برد.

● به نظر شما هم ریاضی سخت و پیچیده است؟
○ اجازه بدهید از دو نگاه پاسخ بدهم:
نظر چهرهٔ ماندگار معلمی ریاضی، پرویز شهریاری: در جشنی که به مناسبت هشتادوپنجمین سال تولدش در دبیرستان ماندگار فیروز بهرام گرفته بودیم، در پاسخ به پرسش یکی از دانش‌آموزان که پرسیده بود: آیا فراگیری ریاضی استعداد می‌خواهد؟ پاسخ داد: فقط تمرین.
نظر خودم: اگر معلم از روش تدریس مناسبی استفاده کند و بداند چگونه ارتباطی انسانی برقرار کند، می‌تواند شاگرد را علاقه‌مند کند تا بتواند درس را بفهمد و نتایج بهتری بگیرد. این موضوع شامل ریاضی هم می‌شود. به قول **نظیری نیشابوری**:
درس ادیب اگر بود زمزمهٔ محبتی
جمعه به مکتب آورد طفل گریزپای را.

● در مدرسه چقدر به مطالعهٔ مباحث درسی توجه داشتید و دنبال یادگیری از طریق کتاب غیردرسی و مجله‌ها بودید؟
○ یادگیری از کتاب‌های غیردرسی همیشه برایم جذاب‌تر و لذت‌بخش‌تر بود. چون آزادی انتخاب داشتم. «مجلهٔ دانشمند» هم که محبوب نوجوانان بود.

● در چه رشته و تخصص‌هایی آموزش می‌دهید؟
○ عکاسی، مبانی هنرهای تجسمی و کارگاه‌هایی برای بازیابی خلاقیت، خودشناسی، مهارت‌های زندگی و توسعهٔ فردی، با عنوان کافهٔ خلاقیت.

● به کدام بخش مجلهٔ رشد ریاضی برهان علاقه دارید؟
○ زندگی‌نامه بزرگان.

● یادگیری از طریق مطالب یک مجله، کتاب غیردرسی و ... چه تفاوتی با یادگیری از کتاب درسی دارد؟
○ به‌روزبودن و تنوع مطالب، تنوع نوع نگارش و قالب مطالب، مثلاً اخبار روز، مقاله، گزارش، مصاحبه و ... و تصویرها و عکس‌های دیدنی. البته با استفاده از منابع غیردرسی خودآموزی را هم یاد می‌گیریم.

● دو نفر به عکاسی علاقه دارند. یکی از آن‌ها به ریاضی هم علاقه دارد. تفاوت این دو در فراگیری عکاسی (هنر) چگونه خواهد بود؟
○ آنکه به ریاضی علاقه دارد، نیمهٔ چپ مغزش را بیشتر پرورش می‌دهد و نیرومندتر می‌کند. قاعدتاً هم توانایی بیشتری برای تولید اثر هنری دارد (همان پاسخ دو نیم‌کرهٔ منطقی ـ ریاضی‌دان و نیم‌کرهٔ خلاق ـ هنرمند).

● در دوران تحصیل ریاضی‌تان چطور بود؟
○ فقط هندسه‌ام خوب بود. در سایر درس‌ها دانش‌آموز تحفه‌ای نبودم.

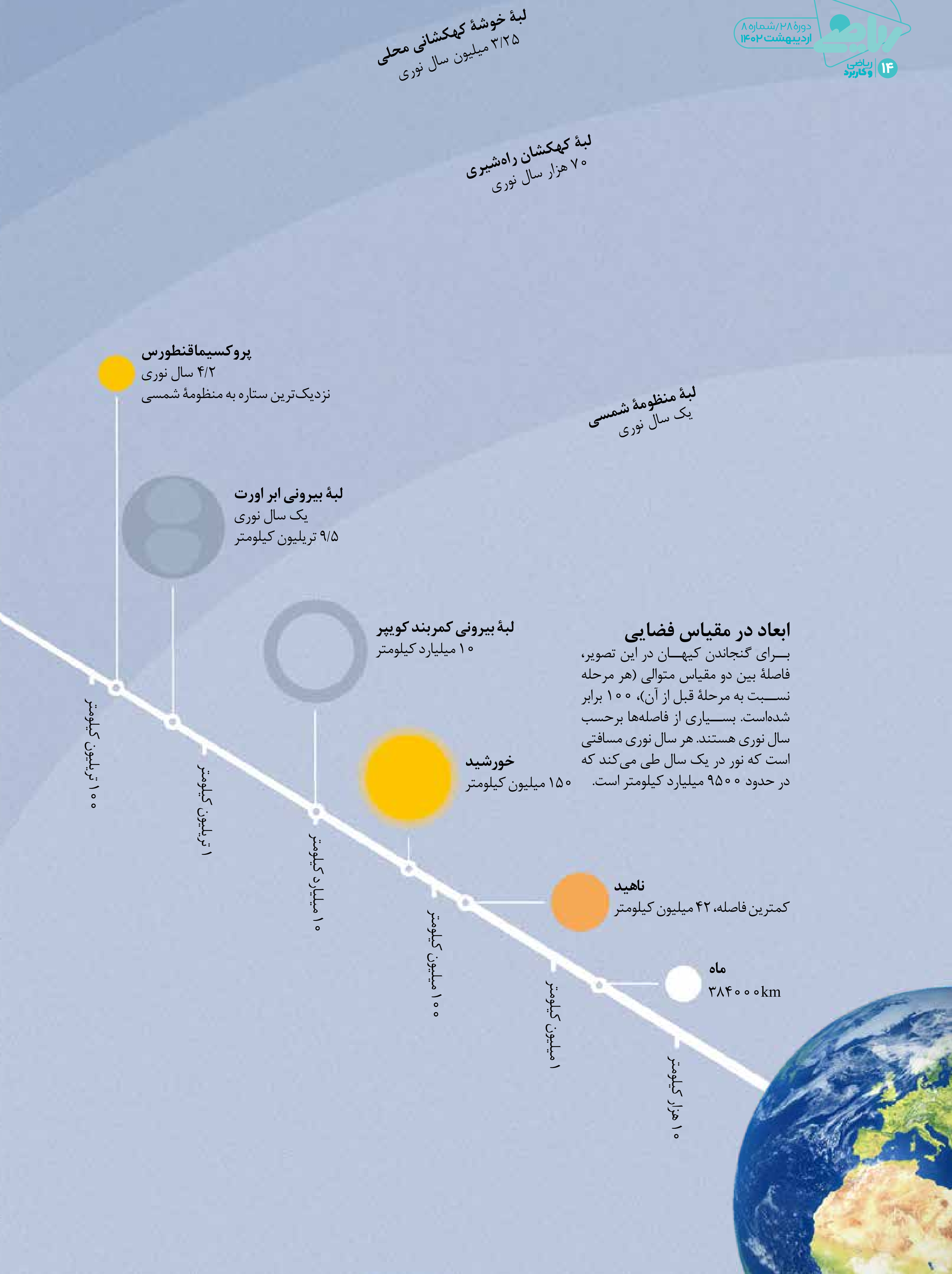
● از معلمان ریاضی و افراد تأثیرگذار در فراگیری هنر یاد کنید.
○ خانم **ابراهیمی** در کلاس اول دبستان باعث شد تا پایان دبستان شاگرد ممتاز باشم. همدلی آقای **بهرام خسروی**، دبیر ریاضی در دبیرستان که به‌جز درس و نمره از حال و روزم می‌پرسید، موجب شد وضعم در درس ریاضی کمی بهتر شود.
سرکار خانم **طاهره محبی‌تابان**، استاد بسیار تأثیرگذار و مهربان مبانی هنرهای تجسمی در دانشگاه، سمت‌وسوی علاقهٔ مرا به‌درستی نشانم داد و مرا وارد دنیایی کرد که در آن احساس ارزشمندی کردم. پرسشی را که در سن ۱۱ سالگی از خود می‌پرسیدم، پاسخ داد: «چگونه می‌توان یک قطعهٔ موسیقی را نقاشی کرد یا برعکس و ...»
حمید شانس، استاد طراحی که فایده‌های طراحی‌کردن در دید یک عکاس را از او یاد گرفتم.

● مطالعه در حوزهٔ کار شما چقدر اهمیت دارد و شما در این زمینه چه مقدار و چگونه میزان آگاهی خود را افزایش می‌دهید تا همواره به‌روز باشید؟
○ مطالعه ما را در جریان جدیدترین یافته‌های بشری قرار می‌دهد؛ به‌ویژه در این زمانه که حجم دانش لحظه‌به‌لحظه زیادتر می‌شود و خودآموزی هم پس از همه‌گیری کرونا اهمیتش را نشان داده است. اگر نتوانیم خودآموزی را وارد زندگی کنیم، کیفیت زندگی را از دست خواهیم داد.

● بهترین‌ها را برایتان آرزومندیم.

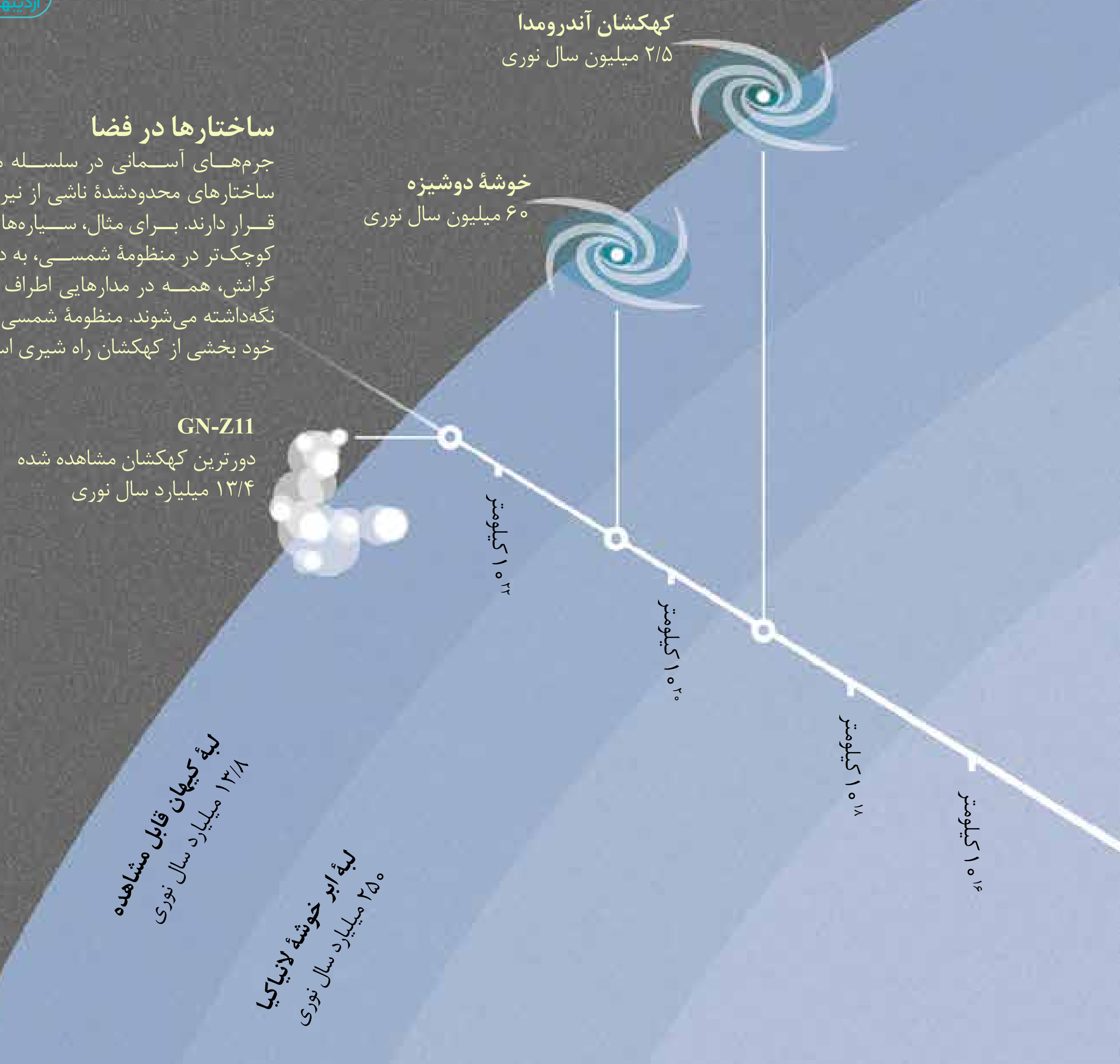
ابعاد در مقیاس فضایی

برای گنجاندن کیهان در این تصویر، فاصلهٔ بین دو مقیاس متوالی (هر مرحله نسبت به مرحلهٔ قبل از آن)، ۱۰۰ برابر شده‌است. بسیاری از فاصله‌ها برحسب سال نوری هستند. هر سال نوری مسافتی است که نور در یک سال طی می‌کند که در حدود ۹۵۰۰ میلیارد کیلومتر است.



ساختارها در فضا

جرم‌های آسمانی در سلسله مراتبی از ساختارهای محدودشدهٔ ناشی از نیروی گرانش قرار دارند. برای مثال، سیاره‌ها و جرم‌های کوچک‌تر در منظومهٔ شمسی، به دلیل نیروی گرانش، همه در مدارهایی اطراف خورشید نگه‌داشته می‌شوند. منظومهٔ شمسی نیز به نوبهٔ خود بخشی از کهکشان راه شیری است.



روح‌الله خلیلی بروجنی

شگفتی‌های کیهان به زبان اعداد

«کیهان» در برگیرندهٔ هر چیزی است که وجود دارد: ماده، انرژی و فضا. ما نمی‌دانیم چقدر بزرگ است، تا حدی به این دلیل که نمی‌توانیم همهٔ آن را ببینیم، اما حتی بخشی را که می‌توانیم ببینیم، بسیار بزرگ، شگفت‌انگیز و رازآمیز است. نوری که از لبهٔ آن با تندی ۳۰۰ هزار کیلومتر در ثانیه حرکت کرده است، ۱۳/۸ میلیارد سال طول کشیده تا به ما برسد. کیهان همچنین شامل مقدار زیادی ماده است. خورشید یکی از ۴۰۰ میلیارد ستاره در کهکشان ماست و امکان دارد ۱۰۰ تا ۲۰۰ میلیارد کهکشان فقط در کیهانِ قابل مشاهده، وجود داشته باشند. دانشمندان حدس می‌زنند نزدیک به ۲۰۰۰ میلیارد کهکشان در کل کیهان وجود دارد.

شراره تقی‌دستجردی، صبا قاسمی

استدلال‌های غلطِ درست‌نما

(قسمت هشتم)

روزهای پایانی سال تحصیلی است و تنها چند صفحه‌ای باقی مانده تا معلم و دانش‌آموزان به پایان کتاب ریاضی برسند. رها به کتابش نگاهی می‌اندازد و با خود فکر می‌کند که چه زود گذشت. درس ریاضی در رها حس و حال متناقضی ایجاد می‌کند؛ در عین سختی و دشواری‌هایی که فهم و حل مسئله‌های ریاضی برای رها به وجود می‌آورند، اما ریاضی به طور شگفت‌انگیزی هم رها را به دنبال خود می‌کشاند و هر بار گوشه‌ای از زیبایی‌هایش را به او نشان می‌دهد. البته این پاداشی است برای رها که هیچ‌گاه ناامید نمی‌شود و از تلاش برای فهمیدن و حل مسئله دست برنمی‌دارد.

معلم وارد کلاس شد و مثل همیشه بعد از خوش و بشی با دانش‌آموزان فهرست نام‌های بچه‌های کلاس را برداشت تا حضور و غیاب کند. نوبت به اسم ماهور که رسید، رها گفت: «اجازه، ماهور غایبه.»

معلم: خبر داری ازش؟ حالش خوبه؟

ماهور و رها روی یک نیمکت می‌نشینند و رها می‌داند که چرا ماهور نیامده است. او به معلم توضیح می‌دهد که قرار است امروز ماهور صاحب یک خواهر یا شاید هم یک برادر شود. به همین دلیل همراه مادر و پدرش به بیمارستان رفته است.

معلم: بسیار عالی! ان‌شاءالله که چهارتایی به سلامت برگردند خانه.

معلم کتابش را نگاه می‌کند. سپس دستش را به سمت کتاب دراز می‌کند تا آن را بردارد و درسش را شروع کند. از نگاهش اما می‌شد فهمید که تصمیم دیگری دارد. در آخر دستش را عقب می‌کشد و از بچه‌ها می‌پرسد: «بچه‌ها چقدر احتمال دارد که فرزند جدید خانوادهٔ ماهور پسر باشد؟»

این سؤال برای بچه‌ها خیلی ساده است. اکثر بچه‌ها خیلی سریع جواب می‌دهند یک دوم.

معلم: بچه‌ها توجه کنید که شما خودآگاه یا ناخودآگاه پیش‌فرض‌هایی را برای پاسخ به سؤال در نظر گرفتید. مثلاً اینکه در این خانواده احتمال به‌دنیاآمدن پسر و دختر با هم برابر است و جنسیت بچهٔ دوم مستقل از جنسیت بچهٔ اول است. حتی این فرض که تنها یک بچه به دنیا می‌آید و نه بیشتر! اما در واقعیت، با توجه به شرایط ژن‌شناختی (ژنتیکی)، ارثی و جنسیت فرزند اول، احتمال دخترشدن فرزند دوم ممکن است کمی بیشتر یا کمتر از یک دوم هم بشود. به هر حال چون برای ما مقدور نیست که همهٔ این حالت‌ها را بررسی کنیم، یا دانش آن را نداریم، هنگام حل مسئله این پیش‌فرض‌ها را در نظر می‌گیریم.

سپس معلم به سمت تخته سیاه رفت و با گچ دو مسئله روی تخته نوشت:

مسئلهٔ ۱. خانواده‌ای دارای دو فرزند است و فرزند بزرگ‌تر پسر است. احتمال اینکه فرزند کوچک‌تر دختر باشد چقدر است؟

مسئلهٔ ۲. خانواده‌ای دارای دو فرزند است و حداقل یکی از آن‌ها پسر است. احتمال اینکه این خانواده دارای فرزند دختر باشد چقدر است؟

معلم: همان‌طور که می‌بینید، موقعیت مسئلهٔ اول شبیه به موقعیت خانوادهٔ ماهور است. اما مسئلهٔ دوم چطور؟ پاسخ شما به مسئلهٔ دوم چیست؟ آیا این دو مسئله با هم تفاوتی دارند؟

معلم این را گفت و پیش از اینکه بچه‌ها بتوانند اظهار نظر کنند ادامه داد: «لطفاً پاسخ‌هایتان را برایم بنوسید تا درمورد آن صحبت کنیم.»

بچه‌ها شروع کردند به نوشتن مسئلهٔ دوم و بعد هم جواب دادن به آن.

رها از روی برگه‌اش مسئلهٔ دوم را در دل خواند. کمی درمورد معنای جمله فکر کرد. سپس نوشت: «حالت‌های زیر ممکن است برای این خانواده پیش آمده باشند:

۱. پسر دارای یک برادر بزرگ‌تر است.
۲. پسر دارای یک خواهر بزرگ‌تر است.
۳. پسر دارای یک خواهر کوچک‌تر است.
۴. پسر دارای یک برادر کوچک‌تر است.

با توجه به مسئله، فقط حالت‌های ۲ و ۳ مورد نظر این مسئله هستند و بنابراین احتمال برابر با $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ است.»

رها این‌ها را نوشت و برگه‌اش را تحویل داد و برگشت سر جایش نشست. بقیهٔ هم‌کلاسی‌هایش هنوز داشتند فکر می‌کردند. رها هم داشت فکر می‌کرد و این بار به تفاوت بین این دو مسئله.

شـما با نحوهٔ محاســبهٔ احتمال پیشـامدهایی که تعداد کل حالت‌هــای آن‌ها متناهی اســت، آشــنایی داریــد. در چنین موقعیت‌هایی احتمال رخدادن یک پیشــامد کســری است که صورت آن تعداد حالت‌های مطلوب (خواســتهٔ مسئله) و مخرج آن تعداد همهٔ حالت‌های ممکن است.

$$\text{احتمال رخدادن یک پیشامد}=\frac{\text{تعداد حالت‌های خواسته‌شده}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

گمــان می‌کنم همه با جواب دانش‌آموزان به ســؤال اول موافق باشــید. اما بیایید به مسئلهٔ دوم و راه‌حل رها فکر کنیم. برای آن چهار حالت ممکنی که رها نوشته است، می‌توانیم چنین جدولی بکشیم. برای آنکه بهتر متوجه راه‌حل رها شوید، آن فرزند پسری را که از وجودش مطمئن هستیم با رنگ آبی نشان داده‌ایم:

	فرزند بزرگ‌تر	فرزند کوچک‌تر
حالت اول	پسر	پسر
حالت دوم	دختر	پسر
حالت سوم	پسر	دختر
حالت چهارم	پسر	پسر

شــاید شــما فکر کنید که این چهار حالــت از یکدیگر متمایز هستند، اما ...

فرض کنید این چهار حالت (پسر و پسر)، (دختر و پسر)، (پسر و دختر) و (پسر و پسر) را تنها با یک رنگ روی برگه‌های جدا از هم بنویسیم، با این قرارداد که کلمهٔ اول داخل پرانتز از سمت راست، جنســیت فرزند اول و کلمهٔ دوم از سمت راست، جنسیت فرزند دوم را نشان می‌دهد. پس، وقتی به شما برگهٔ (دختر و پسر) نشان داده شود، بلافاصله می‌گویید حالت شمارهٔ دو رخ داده است. اما اگر (پسر و پسر) به شما نشان داده شود، چه می‌گویید؟

این بار اما نمی‌توانید تشخیص دهید که (پسر و پسر) حالت اول اســت یا چهارم؛ چرا که در واقع این دو حالت با یکدیگر معادل هســتند. بنابراین یکی از آن‌ها باید حذف شود و تعداد حالت‌ها ممکن برابر سه می‌شود. در واقع در یک خانواده با دو پسر، فرقی نمی‌کند بگوییم فرزند اول پسر است یا فرزند دوم. حال از بین ســه حالت باقی‌مانده تنها دو حالت آن یعنی (دختر و پسر) و (پســر و دختر) حالت‌های مطلوب ما و خواستهٔ مسئله هستند. پس احتمال پیشامد خواسته شده برابر است با: $\frac{2}{3}$.

فرزند بزرگ‌تر	فرزند کوچک‌تر
~~دختر~~	~~پسر~~
پسر	دختر
پسر	پسر

بنابراین، هنگام حل مســئله‌های احتمال باید به صورت سؤال دقت کنید؛ زیرا گاهی ترتیب رخدادن پیشــامدها اهمیت دارد.

مثلاً وقتی دربارهٔ جنسیت دو فرزند در خانواده صحبت می‌کنیم، این حالت که فرزند اول پســر و فرزند دوم دختر باشــد، با این حالت که فرزند اول دختر و فرزند دوم پسر باشد، متمایز است. اما اگر یک خانواده دو فرزند دختر داشته باشد، تنها یک حالت (دختر و دختر) داریم، چرا که تنها جنســیت فرزندان است که اهمیت دارد، نه اینکه چه شخصی اول و چه شخصی دوم به دنیا آمده است. این موضوع برای یک خانواده با دو فرزند پسر نیز به همین صورت است.

شــاید در این موقعیت، لزوم درنظرگرفتــن «ترتیب» رخدادن پیشــامدها برایتان قابل درک است، اما این را نمی‌توان به همهٔ مســئله‌ها تعمیم داد. زیرا در برخی از مسئله‌ها ترتیبی در کار نیست، با این حال باید باز هم به تمایزها دقت کرد. برای دیدن نمونه‌ای از چنین مواردی به مسئلهٔ زیر توجه کنید:

➢ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مجموع عددهایی که تاس‌ها نشان می‌دهند، زوج باشد؟

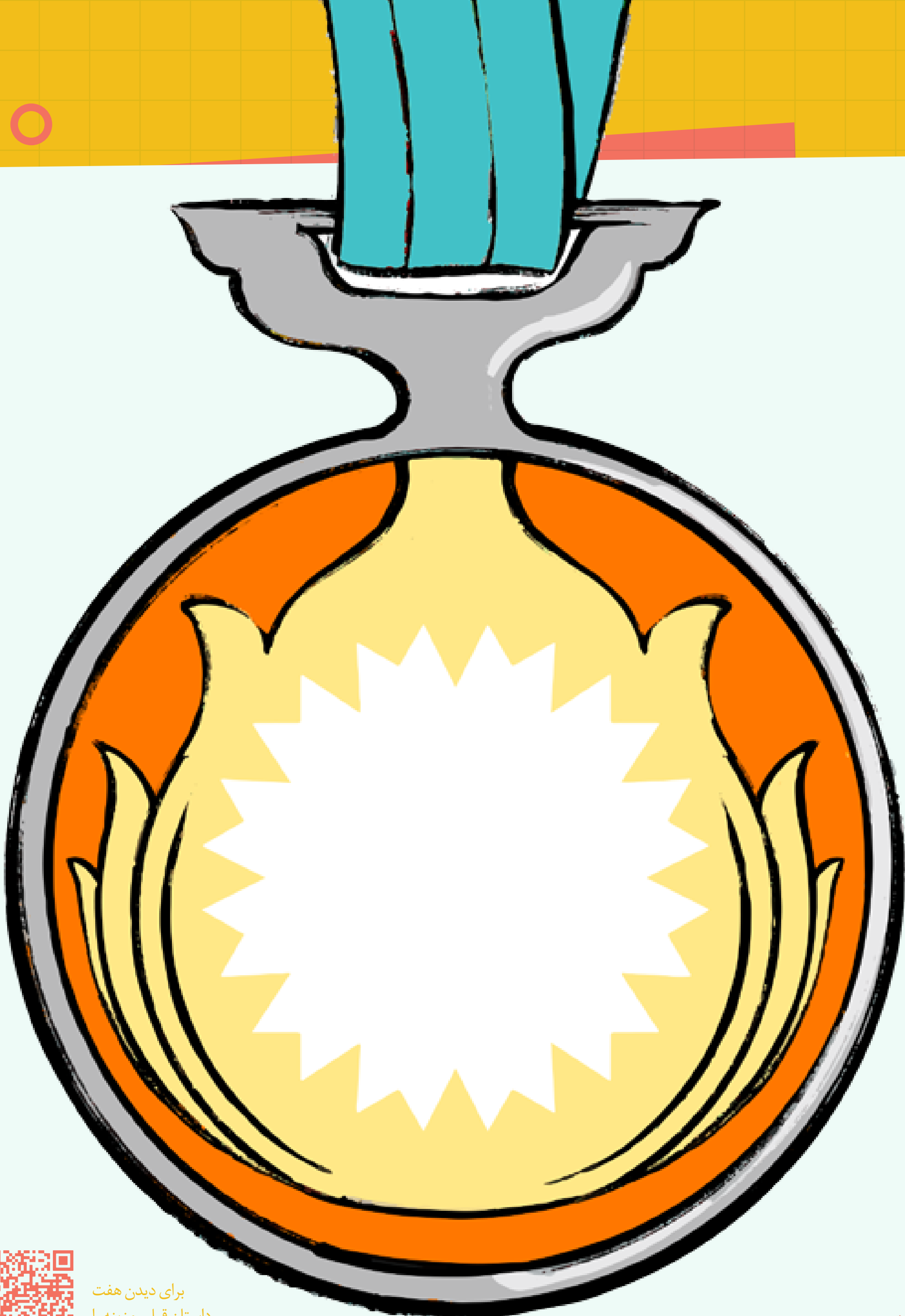
یک جواب به این مسئله چنین است: برای آنکه مجموع عددهای روشــده زوج باشــد، یا باید هر دو عددی که تاس‌ها مشخص می‌کنند، فرد باشــند و یا هر دو زوج. اما اگر یکی فرد باشــد و یکی زوج، آنگاه مجموع فرد است. یعنی از سه حالتِ دو تاس با عددهــای زوج، دو تاس با عددهای فرد و یک تاس با عدد زوج و یک تاس با عدد فرد، دو حالت اول مطلوب ما هســتند. پس احتمال آنکه مجموع عددهای روشده زوج باشد برابر است با: $\frac{2}{3}$.

به نظرتان اســتدلال بالا درست است؟ دقت کنید که در اینجا اگرچه تاس‌ها را به طور هم‌زمان پرتاب می‌کنیم، اما به هر حال این دو تاس موجودیت متفاوتی دارند. مثلاً برای یک لحظه فکر کنید رنگشــان فرق می‌کند، یکی آبی و دیگری قرمز است. یا خودتان با ماژیک روی یکی از آن‌ها علامت آبی و روی دیگری علامت قرمز گذاشته‌اید.

	عدد تاس آبی	عدد تاس قرمز
حالت اول	فرد	فرد
حالت دوم	فرد	زوج
حالت سوم	زوج	فرد
حالت چهارم	زوج	زوج

در نتیجــه احتمال آنکه مجموع دو عددی که از پرتاب دو تاس مشخص شده‌اند، عددی زوج باشد برابر است با: $\frac{2}{4}$.

معمولاً تشخیص اینکه در چه موقعیتی باید حالت‌ها را متمایز گرفت و چه موقع یکســان، برای اغلب افــراد چالش‌برانگیز و نیازمند دقت زیاد اســت. با این حال هر چه تجربهٔ شما در حل مسئله‌های احتمالاتی بیشتر شود، تشخیص این موضوع برایتان راحت‌تر خواهد بود.



برای دیدن هفت داستان قبل رمزینه را پویش کنید.

محرم ایردموسی

داستان‌های مریم

داستان هشتم: دیدار با خورشید!

وارد خانه که شـــدم، انرژی‌ام در حـــد صفر مطلق بود. خودم را کشان‌کشان رساندم به اتاقم. نمی‌دانم کِی خوابم برد. توی همان حالت خواب و بیداری، تصویر مادرم را دیدم که با مهربانی، کوله را از دستم گرفت و پتو را کشید رویم. دیگر هیچی نفهمیدم ...

***

دخترم زنگ زد. صدایش پـــر از انرژی بود برای من. یاد جوانی خودم افتادم. گفت برای مراســـم اهدای «مدال فیلدز» دعوت شـــده‌ام و احتمالاً برندهٔ ایـــن دوره یک زن اســـت. گفت این پنجمین زنی خواهد بود که موفق به کسب مدال می‌شود. این را هم گفت که از من به عنوان اولین زن برندهٔ مدال فیلدز دعوت کرده‌اند تا در مراسم ســـخنرانی کنم و مدال را به برنده تقدیم کنم. جمله‌های او مرا به ۳۶ سال قبل برد.

درست ۳۶ ســـال از آن خاطره می‌گذرد. من در زندگی عاشق خیلی چیزها بوده‌ام؛ عاشق ریاضیات، عاشق ادبیات و فرهنگ، عاشق آدم‌ها. البته عاشق صبوری هم بوده‌ام. ریاضیات برای من حکم یک رمان را داشت که هم‌زمان مشغول نوشتن و خواندش بودم. از گذشـــته به زمان حال برگشتم. چشمم افتاد به گوشهٔ صفحهٔ تلفن که سال ۲۰۵۰ روی آن نقش بسته بود. از آناهیتا پرسیدم: «نام برنده اعلام شد؟ از کدام کشور است؟»

چند ســـالی بود که آثار برخی از ریاضی‌دانان زن دنیا را مطالعه می‌کردم و در ذهن خود نامزدهای احتمالی مدال فیلدز، به‌ویژه زنان ریاضی‌دان را مرور می‌کردم. گفت: «هنوز اعلام نشـــده، اما با توجه به دعوت شما به مراسم می‌شود حدس زد که برندهٔ این دوره، یک زن باشه.»

گفتم: «چنان با اطمینان گفتی که فکر کردم نام برنده اعلام شده! حالا مراسم کی هست؟ می‌توانی با من بیایی؟»
آناهیتا گفت: «با کمال میل! مدال رو در افتتاحیهٔ سی‌وشش‌اُمین کنگرهٔ جهانی ریاضی‌دانان که در کشور ژاپن برگزار می‌شه، اهدا می‌کنن؛ یعنی دو روز دیگر. اما نگران نباش بلیت سفر برای شما و همراهتون، یعنی من، رزرو شده!»
آناهیتا تنها دختر من است. البته دقیق‌تر اگر بگویم، من دختران و پسران زیادی دارم. منظورم فرزندان دانشگاهی (آکادمیک) من هستند و همیشه دربارهٔ آن‌ها ذوق‌زده و خوش‌حال هستم. از اینکه تلاش‌های من در ریاضیات، الهام‌بخش بوده‌اند، همیشه احساس غرور و رضایت داشته و دارم. با آناهیتا خداحافظی کردم. باید روی متن سخنرانی‌ام کار می‌کرد.

***

مراسم شروع شد. حالا دیگر همه نام برندهٔ این دورهٔ مدال فیلدز را که معروف‌ترین جایزه بین ریاضی‌دانان است، شنیده بودند و این اتفاق می‌توانست اتفاق مهمی باشد. مجری مراسم از من دعوت کرد به‌عنوان اولین برندهٔ زن مدال فیلدز در جایگاه سخنران قرار بگیرم و سخنرانی‌ام را شروع کنم.
سخنرانی‌ام کوتاه بود. عادت به سخنرانی‌کردن نداشتم. همیشه دوست داشتم در دنیای ریاضیات پرکار باشم و در خارج از این دنیا آدمی باشم مثل همهٔ آدم‌های دنیا. در سخنانم به کارهای شاخص برندهٔ این دوره، خانم **تابان کابلی**، ریاضی‌دان افغانستانی اشاره کردم. علاوه بر اهمیت علمی کارهای این ریاضی‌دان، به سختی‌هایی که او با آن‌ها روبه‌رو بود، اشاره کردم و همت بالایش را در رسیدن به آرزویش ستودم. تابان دوران دانش‌آموزی را در کابل و دورهٔ کارشناسی ریاضیات را در ایران گذرانده بود. سپس برای ادامهٔ تحصیل به اروپا مهاجرت کرده و با ریاضی‌دانان معروفی کار کرده بود. من و او ۲۰ سال پیش مقالهٔ مشترکی با هم نوشته بودیم.
در پایان خاطره‌ای از یک دختر افغان تعریف کردم که در دوران تحصیل در ایران هم‌کلاسم بود و بعدها به عنوان معلم در افغانستان در حال جنگ، مشغول به کار شد و اشاره کردم که نتیجهٔ تلاش‌های او را در سراسر دنیا و امروز در اینجا می‌بینیم.
بعد از سخنرانی من، مجری از من خواست که روی صحنه (سن) بمانم تا مدال را اهدا کنم. با اعلام نام تابان کابلی، دختری از ردیف اول بلند شد. خودش بود. لباس سنتی افغانستانی بر تن کرده بود و با گام‌های آرام به سمت من آمد.
چقدر شبیه دخترم آناهیتا بود. لبخندی بر لب داشت و اشک‌ها گونه‌اش را خیس کرده بودند. پس از دریافت مدال و تشویق حضار در جایگاه قرار گرفت تا سخنرانی کند. تابان به ۲۸ سال قبل اشاره کرد که تحصیل زنان در کشورش محدود شد و او دانش‌آموزی ۱۰ ساله بود. به خانواده‌اش اشاره کرد که حامی‌اش بودند و با تلاش بسیار هزینهٔ تحصیلش در ایران را فراهم کردند. به استادانش در ایران اشاره کرد که چگونه مشوقش بودند و در همین دوره بود که با نام اولین زن برندهٔ مدال فیلدز آشنا شد و انگیزه‌اش را برای رسیدن به آرزویش دوچندان کرد. در پایان آرزو کرد که همهٔ انسان‌ها، چه زن و چه مرد، بتوانند آرزوی خود را دنبال کنند.
بعد از پایان مراسم، هنگام صرف شام، غرق صحبت با ریاضی‌دانی از آفریقا بودم که تابان به همراه خانم مسنی به ما نزدیک شدند و اجازه خواستند که سرمیز ما بنشینند. با افتخار پذیرفتم. چهرهٔ خانم مسن همراه تابان به نظرم آشنا می‌آمد. سکوت او هم مرا بیشتر به فکر فرو برده بود. در خاطرات دور به دنبال یک چهرهٔ آشنا می‌گشتم که شبیه او باشد. به یک‌باره همه چیز روشن شد. همراه تابان همان «خورشید» بود، هم‌کلاسی دوران دبیرستان من! پرسیدم: «خورشید تویی؟!»
با خوش‌حالی گفت: «سکوت کردم تا ببینم مرا خواهی شناخت. خوش‌حالم که هنوز مرا به خاطر داری.»
دیدن خورشید مرا به سال‌های دوری برد. در کلاس ریاضی، خورشید با آنکه مسئله‌ها را حل می‌کرد، اما خجالتی بود و تنها من که کنار دستش می‌نشستم می‌دیدم که راه‌حلش درست است. یادم هست یکی از مسئله‌هایی که خورشید حل کرد این مسئله بود:

بین هر شش نفر، یا سه نفر پیدا می‌شوند که دوبه دو آشنا هستند یا سه نفر پیدا می‌شوند که هیچ دوتایی همدیگر را نمی‌شناسند. چطور ممکن است؟

برای دیدن پاسخ خورشید رمزینه را پویش کنید.

دیدن تابان در کنار خوشید بسیار خوشایند بود. در واقع این خورشید بود که اولین جوانه‌های آرزو را در دل تابان کاشته بود و همیشه برای من این اولین‌ها که گاهی از چشم‌ها پنهان می‌مانند، خیلی اهمیت داشتند. خورشید را پس از ۵۰ سال در آغوش گرفتم. مجدداً به تابان تبریک گفتم و از او خواستم که مانند امروز که لباس سنتی بر تن کرده بود، زنان سرزمینش را فراموش نکند و الهام‌بخش آن‌ها باشد.

***

خورشید از گوشهٔ پنجره بر صورتم تابید. از جا پریدم، خواب عجیبی بود! باید جایی یادداشت می‌کردم تا یادم نرود. اما دیر شده بود. ده دقیقه وقت داشتم تا خودم را به مدرسه برسانم و جریمه نشوم. مادرجان لقمهٔ آمادهٔ نون و پنیر و گردو را به دستم داد و گفت: «مریم جان، یک کمی از انرژیت را ذخیره کن برای توی خونه کنار ما. دیروز از راه که رسیدی خواب بودی تا الان. شام هم نخوردی.» صورت مادرم را بوسیدم و راه افتادم. از مسیر کوتاه وسط پارک دوان دوان خودم را به مدرسه رساندم.
هنوز به خواب عجیب دیشب فکر می‌کردم. نون و پنیر اون روز خیلی به نظرم خوش‌مزه بود. شاید به این خاطر بود که شام نخورده بودم. زنگ خورد. رفتیم سر کلاس. ساعت اول ادبیات داشتیم. معلم ادبیات خانم **حافظی** هنوز نیومده بود. مدیر مدرسه وارد کلاس شد. همراهش دختری بود که لباسی شبیه بلوچ‌ها بر تن داشت و سرش پایین بود. خانم مدیر رو به بچه‌ها کرد و گفت: «دخترهای گلم، امروز یک هم‌کلاسی جدید خواهید داشت. خورشید اهل افغانستان است و از امروز مهمان شما و هم‌کلاسی شما ...»
دیگر صدای خانم مدیر را نمی‌شنیدم. خودش بود! همون خورشید خواب‌هایم! این چه خوابی بود که من دیده بودم. صندلی کنار من خالی بود. خانم مدیر به هم‌کلاسی جدیدمان اشاره کرد که کنار من بنشیند. خورشید کنارم نشست. خیلی آروم بود. گفتم: «سلام، اسم من مریمه.»
خورشید هم گفت: «سلام، اسم من هم خورشیده.»
دیگر نیازی نبود خواب دیشبم را بنویسم. هر روز با دیدن چهرهٔ تابان خورشید یاد خواب عجیبم می‌افتادم.

همگام با ستارگان

آیا او را می‌شناسید؟

آرش رستگار • تصویرگر: حسین یوزباشی

دوستم از شرکت‌کنندگان «المپیاد هنگ کنگ» در سال ۱۹۹۴ بود؛ به «آنالیز» خیلی علاقه داشت و یادم می‌آید یک درس آنالیز مختلط پیشرفته هم با من برداشته بود. در دوران دانشجویی سال‌ها عضو کمیتهٔ المپیاد بود و در تربیت دانش‌آموزان و برگزاری دوره‌ها و آزمون‌ها بار سنگینی را به دوش می‌کشید. در مدتی که مسئولیت گروه (کمیتهٔ) المپیاد ریاضی را داشتم، دست راستم بود و به من بسیار کمک کرد.

اولین دانشجویی است که در دانشکدهٔ ریاضی نقش مؤثری در ایجاد جو ریاضی در دانشکده ایفا می‌کرد. کارگاه‌های دانشجویی و سخنرانی‌هایی که برای دانش‌آموزان مدرسه‌ای ترتیب داده می‌شدند، بسیاری زیر سایهٔ زحمات او شکل می‌گرفتند. بعد از من دکتر **محمدرضا رزوان** و بعد از او این دوستم مسئولیت کمیتهٔ المپیاد ریاضی را در «باشگاه دانش‌پژوهان جوان» به عهده داشتند. امروز مسئولیت کل باشگاه به عهدهٔ ایشان است.

یکی از ابعاد درخشان شخصیت او ارتباط صمیمانه‌ای بود که با کوچک‌ترها برقرار می‌کرد. دوستی بین او و دکتر **کسری علیشاهی** به دورانی که کسری دانش‌آموز المپیادی بود برمی‌گردد و در سراسر دوران رشد و کمال کسری، دوستم همچون برادری بزرگ‌تر حمایت و همراهی علمی او را به عهده داشت. دفتر کار این دو دوست در دانشکدهٔ ریاضی محل رجوع و جمع‌شدن همهٔ دانشجویان علاقه‌مند به ریاضی بود. من نام آن دفتر را گذاشته بودم پارک ملّت! خیلی هم خودم به آن‌ها سر می‌زدم. یک خاطرهٔ جالب اینکه روزی یک دانشجو به پارک ملت آمده بود و کسری از او پرسید که با کی کار دارد. او هم پاسخ داده بود که: «شما راحت باشید. با کس دیگری قرار گذاشته‌ام!» بندهٔ خدا با دوستش در دفتر کار کسری و دوستم قرار گذاشته بودند.

در سال‌هایی که دوستم پس از فارغ‌التحصیلی در بنیاد ملی نخبگان مسئولیتی داشت، «طرح دوست علمی» را به اجرا گذاشت. در واقع، او سعی داشت مدل دوستی خودش با کسری را به دانش‌آموزان سراسر کشور توسعه دهد. من زیر سایهٔ او قرار گرفتم و مدیریت اجرای علمی طرح را به عهده داشتم. اصلاً اینکه زیر سایهٔ شاگرد پیشینم کار کنم، اذیتم نمی‌کرد. چرا که کمالات او بالای سرم قرارش می‌داد. پدرش استاد ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان بود و از کودکی با ساختار نظام آموزش عالی برخورد داشت. در حالی که پدر من معلم ریاضی بود و این موضوع مرا با نظام آموزش‌وپرورش پیوند می‌داد. برای همین در عمل در خدمت‌رسانی به جامعهٔ ریاضی ایران از من تواناتر بود.

طرح دوست علمی به این صورت اجرا می‌شد که دانش‌آموزان برجستهٔ یک استان محروم در مرکز استان جمع می‌شدند و به کمک

دانشجویان برجستهٔ شریف برایشان یک دوره کلاس‌های آموزشی سه‌روزه برگزار می‌کردیم. سپس آن‌ها را با یک پروژهٔ ریاضی تنها می‌گذاشتیم و یک ماه بعد با یک دورهٔ سه روزهٔ دیگر نزد آن‌ها بازمی‌گشتیم. بین دانش‌آموزان و دانشجویان مدرس ارتباط علمی و دوستی برقرار می‌شد و ما هم برای دانش‌آموزان کتاب‌های علمی و نامه‌های انگیزشی می‌فرستادیم.

در این طرح که در اوایل دههٔ ۱۳۹۰ برگزار شد، به بیش از یک هزار و پانصد دانش‌آموز استان‌های محروم رسیدگی کردیم. بیش از ۵۰ سفر استانی داشتیم، بیش از ۱۵ هزار جلد کتاب برایشان فرستادیم و بیش از ۳۰ هزار نامه برایشان پست کردیم. مادرم که برای فرستادن کتاب‌ها و نامه‌ها در آن سال‌ها کمکم می‌کرد، هنوز کتفش درد می‌کند و استخوان پشت کتفش بیرون زده است. چون کتاب‌ها برایش بسیار سنگین بودند. من هم فرزندان دوقلو داشتم و از عهدهٔ فرستادن کتاب‌ها برنمی‌آمدم. با این حال هر دو یا سه هفته یک‌بار سه‌چهار روز به مسافرت می‌رفتم و خانمم به کمک مادرش و خواهر خانمم بچه‌ها را نگه می‌داشتند و این بار سنگینی بود.

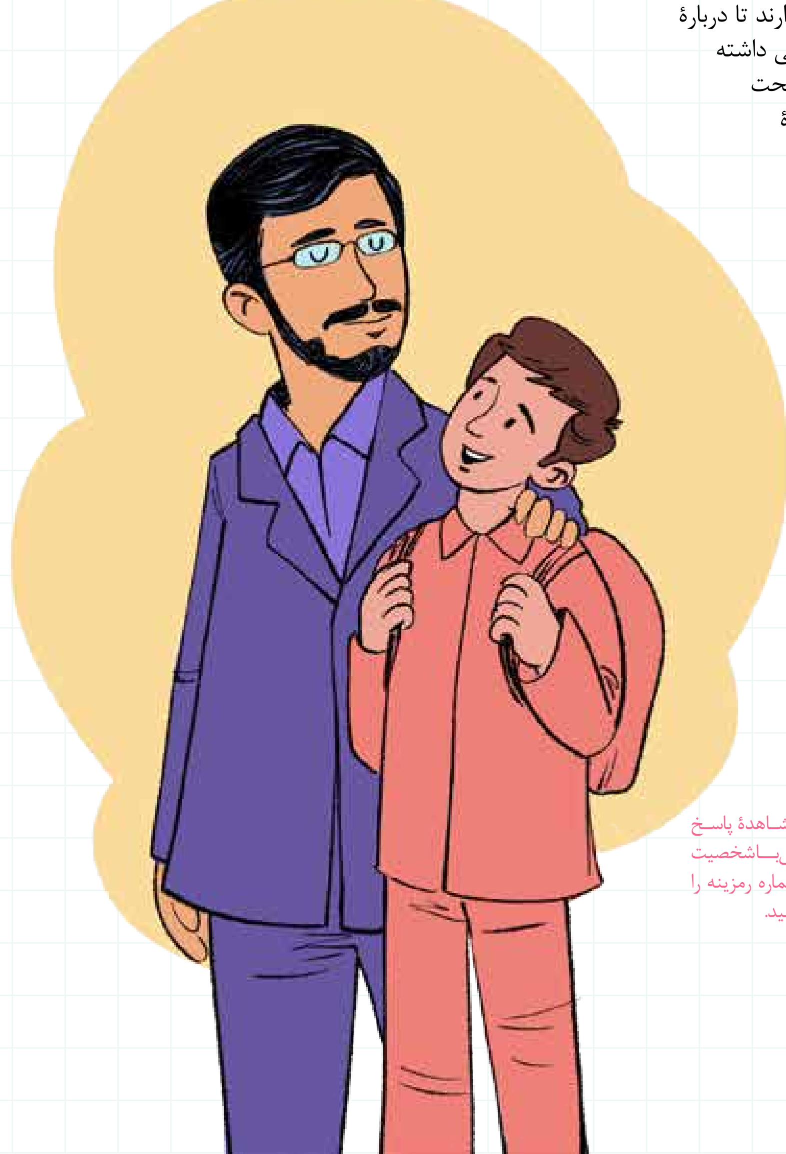
امروز دوستم خودش صاحب سه دختر است. ارتباط خانوادگی داریم و در حل مشکلات زندگی یاور و همراه و مشاور همیشگی من بوده است. تا به حال در ۱۰ سفر ۱۰ روزهٔ بین‌المللی هم‌سفر بوده‌ایم. در ریاضیات بسیار خلاق است. مسائل پیشنهادی او برای المپیاد جهانی معروف‌اند. یکی از آن‌ها مربوط به واردکردن ایدهٔ «برخال‌ها» (فراکتال‌ها) به نظریهٔ عددها بود که بهترین کارهای ریاضی‌ام در تعمیم همین ایده شکل گرفتند. یاد ندارم که هیچ‌یک از دیگر شاگردانم بر ریاضیاتم تأثیر گذاشته باشند.

از دوران دانشجویی بسیار حساس بود و همین باعث می‌شد که همیشه مواظب باشد دانشجویان و دانش‌آموزانی که با او سروکار دارند، از چیزی ناراحت نشوند. با هم که صحبت می‌کنیم هم این روحیه بسیار غالب است. در حدی که به ارتباط نزدیک بین ما صدمه می‌زند. همیشه مواظب است من از حرف‌هایش برداشتی نکنم که باعث ناراحتی‌ام شود. همین موضوع باعث می‌شود من هم دست و پایم را جمع کنم و بیشتر مواظب حرف‌هایم باشم.

سنت تأثیرگذاری بر جو دانشکدهٔ ریاضی توسط دانشجویان بعد از او و کسری زنده ماند و دانشجویانی این سنت حسنه را ادامه دادند. از نمونه‌هایی که به خاطر دارم دکتر **روح‌الله مهکام** و دکتر **حسام‌الدین رجب‌زاده** هستند که کمترین کارشان فیلم‌برداری از درس‌های ریاضی شریف بود. هزاران ساعت فیلم آموزشی از این برنامهٔ دانشجویی باقی مانده است. در سایت شریف خیلی از این درس‌ها در دسترس هستند و سایت بزرگ «مکتب‌خانه» تحت‌تأثیر همین تلاش‌ها شکل گرفت.

دوستم همراه دکتر **ایمان افتخاری** و دکتر **الهام یاوری** و بعضی از دوستان و همکاران علاقه‌مندشان، جلسه‌های هم‌فکری هفتگی دارند تا دربارهٔ خدماتشان به آموزش‌وپرورش کشور برنامه‌ریزی بلندمدتی داشته باشند. تا فراموش نکردم بگویم دکتر کسری علیشاهی هم تحت تأثیر او به آنالیز علاقه‌مند شد و امروز به عنوان استاد دانشکدهٔ ریاضی بسیاری از فعالیت‌های علمی دانشجویی را مدیریت می‌کند.

در سال‌هایی که او ریاست گروه (کمیتهٔ) ریاضی را به عهده داشت، به عنوان سرپرست علمی تیم المپیاد ریاضی همراه او به سفرهای خارجی می‌رفتم. یک بار به او گفتم که چرا خودش سرپرستی تیم را به عهده نمی‌گیرد. او پاسخ داد: «همراهی با دانش‌آموزان تیم و تأثیرگذاری بر آنان برایم جذابیت بیشتری دارد.»



مسئله: در عمل جذر زیر، هر کدام از حرف‌های a، b، c، d و e برابر با یک رقم متمایز هستند. حاصل a+b+c+d+e کدام است؟

$$\sqrt{\overline{abac9}}=\overline{ded}$$

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸ ۵) ۲۹

برای آشنایی با شخصیت شمارهٔ قبل رمزینه را پویش کنید.

برای مشاهدهٔ پاسخ و آشنایی با شخصیت این شماره رمزینه را پویش کنید.

مریم جعفرآبادی

مدیریت ریسک (خطرپذیری)

هنر تحلیل و تصمیم‌گیری درست در برخورد با خطرها

● داروی جدید خطر حملهٔ قلبی را تا ۴۰ درصد کاهش می‌دهد.
● حمله‌های کوسه‌ها دو برابر شده‌اند.
● نوشیدن یک لیتر نوشابه در روز احتمال ابتلا به سرطان را دو برابر می‌کند.

عنوان‌هایی که خواندید، نمونه‌هایی از «**ریسک نسبی**» هستند؛ روشی رایج که در ارائهٔ خبرها استفاده می‌شود.

ارزیابی ریسکِ یک اتفاق، ترکیب پیچیده‌ای از تفکر آماری و کمی ترجیحات شخصی است. همین می‌شود که گاهی برای ریسک یک اتفاق مشخص، با دو عدد مواجه می‌شویم: **ریسک نسبی** و **ریسک مطلق**.

ریسک احتمال وقوع یک رویداد است که می‌توان آن را به‌صورت درصد بیان کرد. برای مثال، در ۱۱ درصد از مردان بین ۶۰ تا ۷۹ سال حملهٔ قلبی اتفاق می‌افتد. یا از هر ۲ میلیون غواص، ۱ نفر در هر سال در امتداد سواحل غربی استرالیا مورد حملهٔ کوسهٔ کشنده قرار می‌گیرد. این عددها ریسک مطلق حملهٔ قلبی و حملهٔ کوسه‌ها هستند.

تغییرات ریسک را می‌توان به‌صورت نسبی یا مطلق بیان کرد. مثلاً طبق تحقیقی که در سال ۲۰۰۹ انجام شد، آزمون‌های به‌موقع پزشکی، مثل ماموگرافی، تعداد مرگ‌ومیر ناشی از سرطان سینه را از ۵ زن در هر هزار نفر به ۴ نفر کاهش می‌دهد. کاهش خطر مطلق در این پژوهش حدود ۰/۱ درصد بود و کاهش خطر نسبی از پنج مورد مرگ‌ومیر در اثر سرطان به ۴ مورد می‌شود ۲۰ درصد. اگر در گزارش‌های مربوط به تأثیر ماموگرافی در پیشگیری از سرطان سینه، عدد ریسک نسبی یعنی ۲۰ درصد بیان شود، مردم تأثیر غربالگری را بیش از حد واقعی برآورد می‌کنند.

بیایید مثال دیگری را بررسی کنیم و ببینیم چرا تفاوت بیان این دو روش ریسک مهم است. دارویی را در نظر بگیرید که خطر حملهٔ قلبی را تا ۴۰ درصد کاهش می‌دهد. یک گروه ۱۰۰۰ نفری از کسانی را تصور کنید که داروی جدید را مصرف نکرده‌اند. فرض کنید از این گروه ۱۰ نفر دچار حملهٔ قلبی شوند. ریسک مطلق، ۱۰ از ۱۰۰۰ یا ۱ درصد است.

حالا یک گروه مشابه ۱۰۰۰ نفری را در نظر بگیرید که این دارو را مصرف کرده‌اند. تعداد حمله‌های قلبی در این گروه ۶ نفر بوده است. انگار که این دارو از هر ۱۰ حملهٔ قلبی، جلوی ۴ حملهٔ قلبی را گرفته باشد که به معنی کاهش نسبی ریسک ۴۰ درصدی است. در حالی با مصرف این دارو، خطر مطلق تنها از ۱ درصد به ۶ درصد کاهش می‌یابد.

واضح است که اگر عدد مربوط به ریسک مطلق و ریسک نسبی تأثیر دارو را بشنویم، کاهش خطر نسبی ۴۰ درصدی خیلی تأثیرگذارتر است. آیا این میزان تأثیر دارو در جلوگیری از حملهٔ قلبی آن‌قدر ارزش دارد که به افراد توصیه و اصرار کنیم که حتماً از این دارو استفاده کنند؟ متأسفانه باید بگوییم نه!

مشکل این است که بعضی انتخاب‌ها مثل مصرف همین دارو، درست است که برخی از ریسک‌ها را کاهش می‌دهند، اما از طرف دیگر می‌توانند شما را در مسیر ریسک دیگری قرار دهند. مثلاً فرض کنید همین داروی پیشگیری از سکتهٔ قلبی، در نیمی از ۱ درصد افراد مصرف‌کننده، باعث ایجاد سرطان شود. یعنی در گروه ۱۰۰۰ نفره، با مصرف دارو از ۴ حملهٔ قلبی جلوگیری می‌شود، اما ۵ مورد جدید سرطان ایجاد خواهد شد. کاهش نسبی خطر حملهٔ قلبی قابل‌توجه به نظر می‌رسد و خطر مطلق سرطان کم جلوه می‌کند! اما آن‌ها تقریباً به یک اندازه مهم و تأثیرگذارند.

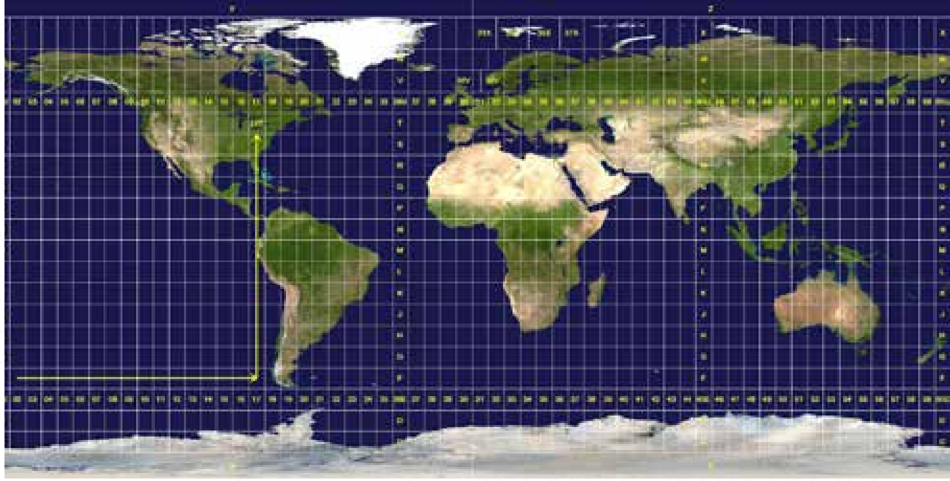
در زندگی واقعی، ارزیابی هر فرد از ریسک متفاوت خواهد بود و به شرایط شخصی آن‌ها بستگی دارد. اگر می‌دانید سابقهٔ خانوادگی بیماری قلبی دارید، ممکن است انگیزهٔ بیشتری برای مصرف داروی پیشگیری‌کننده از سکتهٔ قلبی داشته باشید؛ حتی اگر بدانید مصرف این دارو، در خطر مطلق ابتلا به بیماری اثر چندان زیادی هم ندارد!

گاهی ما باید بین قرارگرفتن در معرض خطرهای متفاوت تصمیم بگیریم! در واقع باید ارزیابی کنیم که یک ریسک ارزش پذیرفتن دارد یا نه. مثلاً اگر مصرف داروی قلبی، به‌جای سرطان، عوارضی چون میگرن و سردردهای مزمن داشته باشد، آیا می‌پذیرید استفاده کنید؟ گاهی نیز لزوماً انتخاب صحیحی وجود ندارد. برخی ممکن است بگویند حتی یک خطر ناچیز حملهٔ کوسه ارزش دورشدن از آن را دارد، زیرا تنها چیزی که از دست می‌دهید شنا در اقیانوس است. البته ممکن است افراد دیگر این‌طور فکر نکنند.

به همهٔ این دلایل که گفتیم، ارزیابی ریسک لزوماً کار آسانی نیست. گزارش‌های مربوط به ریسک یک اتفاق هم می‌توانند گمراه‌کننده باشند؛ به‌خصوص زمانی که یک گزارش را برخی از عددها به‌صورت مطلق و برخی دیگر به‌صورت نسبی بیان می‌کنند. درک این تفاوت‌ها به ما کمک می‌کند برخی از سردرگمی‌ها را برطرف و ریسک را بهتر ارزیابی کنیم.

ژما جواهری‌پور

ریاضی در سفر



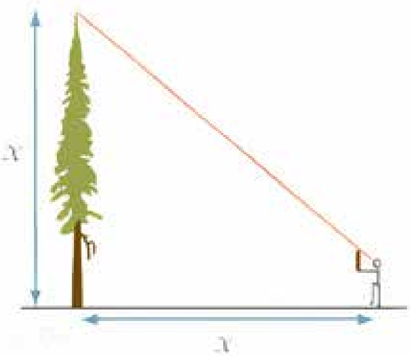
فصل سفر از راه رسیده است. اگر در حال برنامه‌ریزی برای سفر یا طبیعت‌گردی هستید، کوله‌بار دانش ریاضی را هم با خود ببرید. می‌پرسید چرا؟ شاید برای شما جالب باشد که بدانید طبیعت بهترین کلاس تمرین برای آموزش‌های ریاضی است. از ابتدا شروع کنیم: نقشه را باز کنید و مقصد و مسیر را انتخاب کنید. به نقشه با دقت نگاه کنید. اساس آن دستگاه مختصات است. می‌توانید به کمک آنچه در ریاضی آموخته‌اید، براساس طول و عرض جغرافیایی، مختصات مقصد سفر را بیابید.

اگر با خودروی شخصی به سفر می‌روید، باید از پربودن مخزن بنزین اطمینان حاصل کنید و همین‌طور برای تأمین بنزین مورد نیاز خود برنامه‌ریزی داشته باشید. با یک محاسبهٔ ریاضی می‌توانید این کار را انجام دهید. از والدین خود بپرسید: میزان گنجایش باک خودرو چند لیتر است؟ همین‌طور میزان مصرف سوخت برحسب کیلومتر خودرو چقدر است؟ فاصله تا مقصد را مشخص سازید و سپس محاسبه کنید که برای این مسیر به چه مقدار بنزین نیاز دارید. البته به خاطر داشته باشید که در سفر، با توجه به وزن بار، مثل چمدان و سایر وسایل، میزان مصرف خودرو بالا می‌رود.

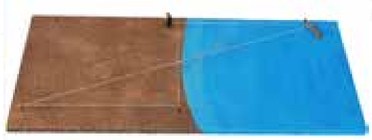
باید فشار لاستیک خودرو را هم وارسی کنید. با فشارسنج این کار را انجام دهید. لاستیک نباید کم باد و یا پر باد باشد.

تا به‌حال به عددهای روی لاستیک خودرو دقت کرده‌اید؟ آیا می‌دانید هر عدد چه معنایی دارد؟ اینجا هم عددها اطلاعات بسیار مهمی را بیان می‌کنند. حال در جاده در حال حرکت هستید. کمی باران می‌بارد و سپس وارد مه می‌شوید. راستی چرا در هوای بارانی می‌توانیم جاده را ببینیم و در فضای مه‌آلود دید کم می‌شود؟ در حالی که هر دو قطرهای آب هستند. در کنار جاده تیرهای چراغ برق را می‌بینید. برای سرگرمی محاسبه کنید که فاصلهٔ آن‌ها از هم چقدر است. به سرعت‌سنج خودرو نگاه کنید و زمان را با ساعت خود یا گوشی تلفن همراه، وقتی از کنار دو تیر کنار هم می‌گذرید، ثبت کنید. با این دو عدد و با فرض ثابت‌بودن سرعت می‌توانید از حاصل ضرب سرعت و زمان، فاصلهٔ دو تیر چراغ برق کنار جاده را مشخص کنید.

به همین روش فاصله‌های درختان کنار جاده را هم می‌توانید محاسبه کنید. فرض کنید به یک منطقهٔ پر درخت رسیده‌اید. درختی توجه شما را به خود جلب کرده است و می‌خواهید بدانید که ارتفاع آن چند متر است. کافی است چوبی را که به اندازهٔ بازوی شماست، به صورت ۹۰ درجه و عمود نگه‌دارید و تا جایی عقب بروید که از بالای چوب نوک درخت را ببینید. محل پای خود را علامت بزنید. فاصلهٔ شما تا درخت به اندازهٔ ارتفاع درخت است. با این کار می‌توانید هم‌سفران خود را سرگرم کنید.

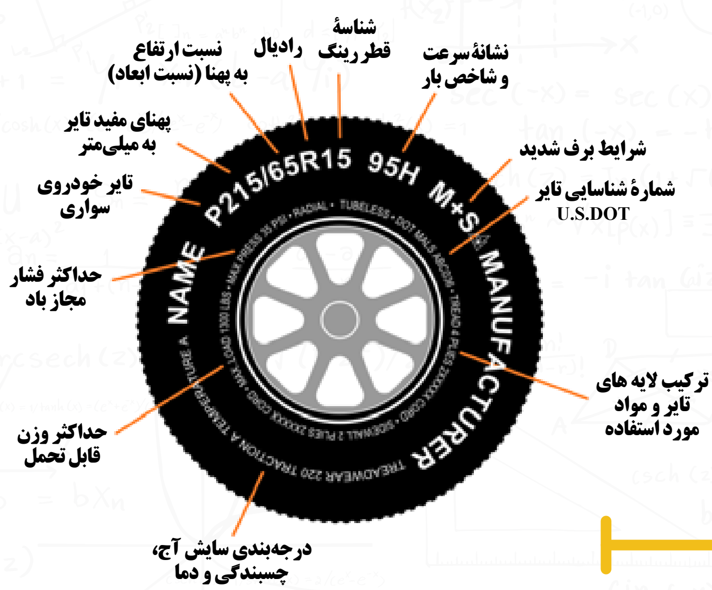


اگر در کنار ساحل قدم می‌زنید و یک قایق در دریا در حال ماهیگیری است، می‌توانید فاصلهٔ آن قایق را تا ساحل محاسبه کنید.



برای این کار، در مقابل قایق در ساحل قرار بگیرید و یک نقطه را مشخص کنید. در امتداد ساحل به صورت عمود حرکت کنید و در جایی، مثلاً ۳۰ قدمی، یک چوب در ساحل قرار دهید. سپس به اندازهٔ ۳۰ قدم دیگر حرکت کنید و بعد عمود بر این خط تا جایی بروید که در راستای چوب، وسط قایق را ببینید. به دلیل تشابه دو مثلث، فاصلهٔ قایق تا ساحل مشخص می‌شود.

دنیای اطراف ما بر اساس روابط ریاضی شکل گرفته است. بنابراین در چمدان سفر جایی برای دانش ریاضی خود هم بگذارید و از سفر لذت ببرید. خوش بگذرد.



درمانگاه ریاضی

افشین خاصّه‌خان

سلام و خسته نباشـــید خدمت علاقه‌مندان به درمانگاه ریاضی. امیدوارم در خرداد ماه مطالعات پُرباری داشته باشید تا امتحانات آخر ســال تحصیلی را با موفقیت پشت سر بگذارید. همچنین توصیه می‌کنم در سه ماه تابســتان، برنامه‌ای سبک برای مرور درس‌های عقب‌مانده داشــته باشــید. مراجعه‌کنندهٔ این هفته دانش‌آموز هشــتمی به نام **عرفان یوسفی گمچی** است. پدر عرفان از معلم‌های باتجربهٔ آموزش‌وپــرورش در حوزهٔ ادبیات و مادرش خانه‌دار است. عرفان با پدرش، دکتر یوسفی، به درمانگاه آمده اســت. بعد از سلام و احوال‌پرسی با آن‌ها، عرفان را به اتاق درمانی دعوت کردم. طبق معمول «گفت‌وگوی ســقراطی» را با عرفان آغاز کردم، در حین گفت‌وگو، سؤالی از شمارش که عرفان با خود به درمانگاه آورده بود، توجهم را جلب کرد:

تشخیص

چند تیم سه نفره در مســابقه‌های شطرنج شرکت کردند. هر بازیکــن هر تیم دقیقاً یک بار مقابل هر کدام از بازیکن‌های هر تیم دیگر بازی می‌کند. برگزارکنندگان اجازهٔ برگزاری بیش از ۲۵۰ بازی را نمی‌دهند. حداکثر چند تیم می‌توانند در این مسابقه‌ها شرکت کنند؟ (ریاضیات کانگورو، ۲۰۱۹)

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸ ۵) ۷

انصافاً این سؤال برای یک دانش‌آموز هشتمی، حتی سمپادی، سخت بود. از عرفان نظرش را برای حل ســؤال خواستم. او در جواب گفت: «خیلی فکر کردم، چند راهبرد را هم آزمایش کردم، اما به جواب نرسیدم.»
پرسیدم: «ممکن است یکی از ایده‌هایت را توضیح بدهی؟»
او گفت: «چون تعداد بازی‌ها زیاد است، شمردن مستقیم کار بیهوده‌ای به نظر می‌رسد. من فرض کردم که n تیم وجود داشته باشد. بنابراین تعداد بازی‌ها باید برای هر نفر برابر $3n-1$ باشــد. آن را در تعداد کل نفرات ضرب کردم و حاصل را کوچک‌تر یا مســاوی ۲۵۰ قرار دادم و جواب ۹ شد؛ اما درست نبود.»
راهبرد عرفان قابل دفاع بود، اما نقص‌های جزئی داشت. در مدلی که او اجرا می‌کرد:

۱. هر تیم با اعضای خودش هم بازی می‌کرد؛
۲. تعداد کل بازیکنان را اشتباه محاسبه می‌کرد؛
۳. او هر بازی را دوبار می‌شمرد.

درمان

برای درمان نارسایی درک این مفهوم‌ها، از عرفان پرسیدم: «در راهبرد شما $۳n-۱$ چه تفسیری دارد؟»
او گفت: «هرکس که نمی‌تواند با خودش مسابقه دهد، به همین خاطر من ۱ را از کل تعداد بازی‌های هر نفر کم کرده‌ام.»
سؤالم را ادامه دادم و گفتم: «هر تیم چند نفره است؟» بی‌درنگ پاسخ داد ۳ نفره و من ادامه دادم: «مگر هر بازیکن با هم‌تیمی خودش هم قرار است مسابقه بدهد؟»
او مکثی کرد و دوباره با دقت سؤال را خواند و گفت: «من اشتباه برداشت کردم. اعضای هر تیم با خودشان بازی نمی‌کنند.»
گفتم: «پس در این صورت رابطهٔ شما چه تغییری خواهد داشت؟»
عرفان مکث کوتاهی کرد و نوشت: $۳n-۳$ و بی‌درنگ ادامهٔ محاسبه‌ها را نوشت:

$$n(۳n-۳)\leq ۲۵۰$$

منتظر بودم تا ببینم او چگونه نامعادلهٔ درجهٔ ۲ را حل می‌کند (چون آن را در سال دهم خواهند خواند) که گفت: «من گزینه‌ها را در نامعادله قرار می‌دهم. این نامعادله به ازای $n=۱۰$ برقرار نیست:

$$۱۰(۳\times ۱۰-۳)\leq ۲۵۰$$

اما برای $n=۹$ برقرار است:

$$۹(۳\times ۹-۳)\leq ۲۵۰$$

دوباره اشتباه شد! چون جواب گزینه ۳ نیست. این بار چه اشتباهی کردم؟!»
گفتم عرفان جان کلاً چند تیم داریم؟ جواب داد n تیم. و پرسیدم در کل چند بازیکن؟ گفت $۳n$ بازیکن. ادامه دادم: «اما شما تعداد بازی‌های هر نفر را چگونه محاسبه کرده‌ای؟»
با دستپاچگی گفت: «عجب اشتباهی کرده‌ام! به همین خاطر جواب درست را پیدا نمی‌کردم. حالا گزینهٔ درست را پیدا می‌کنم ...» و نوشت:

$$۳n(۳n-۳)\leq ۲۵۰$$

اما این بار هم بعد از جاگذاری گزینه‌ها و کلی محاسبه گفت: «این بار هم هیچ‌کدام از گزینه‌ها برقرار نیست. یعنی سؤال اشتباه است؟»
گفتم بعید می‌دانم. برای آنکه عرفان خودش متوجه اشتباهش شود گفتم: «فرض کنیم اعضای تیم الف علی، آرش و بابک و اعضای تیم ب شاهین، عرفان و سینا باشند. تعداد بازی‌های بابک برابر است با؟ ...»
او نوشت: $۳n-۳$. گفتم که یکی از آن‌ها بازی بابک و شاهین است. تأیید کرد. سپس پرسیدم تعداد بازی‌های شاهین؟ عرفان با سرعت و تعجب جواب داد: «خُب آن هم $۳n-۳$.»
ادامه دادم: «دراین شمارش، بازی شاهین و بابک باز هم شمرده شده است؟»
عرفان به فکر فرو رفت و بعد از مدت کوتاهی گفت: «حق با شماست. هر بازی دو بار شمرده می‌شود.»
پرسیدم پس تکلیف چیست؟ عرفان با تردید جواب داد باید به ۲ تقسیم کنیم و دوباره شروع به نوشتن کرد:

$$\frac{۳n(۳n-۳)}{۲}\leq ۲۵۰\rightarrow ۳n(۳n-۳)\leq ۵۰۰$$

با قراردادن گزینه‌ها گفت: «فقط برای $n=۷$ برقرار است. یعنی گزینهٔ ۵ که جواب مسئله هم همان است!»
او را تحسین کردم و گفتم از این گفت‌وگویِ سقراطی دو نفره بسیار لذت بردم.

تجویز

بعد از تشخیص مشکل موجود در تفکر ریاضیِ عرفان، حال نوبت تجویز دستورالعمل‌های درمانی لازم بود. به اوِ توصیه کردم:
۱. متن فصل ۱ کتاب درسی ریاضی هفتم را به دقت بخواند و فعالیت‌ها و کار در کلاس‌هایش را انجام دهد و تمرین‌هایش را حل کند.
۲. بعضی از مفهوم‌های مهم و تکمیلی در ارتباط با موضوع شمارش را از کتاب‌های دیگر یاد بگیرد و تا می‌تواند در پی علت آن‌ها باشد. بدون دلیل آن‌ها را نپذیرد و در تفسیرشان دقت زیادی به خرج دهد.
۳. تمرین‌های مشابهی برایش تعیین کردم و از او خواستم برای حلشان آزمون و خطا انجام دهد و تا حد امکان تلاش کند خودش آن‌ها را حل کند.
۴. برای سؤال‌هایی که نتوانسته جواب دهد، در طول هفته چالش‌هایی انجام دهد. حل یک سؤال بعد از چندین بار تلاش بسیار لذت‌بخش خواهد بود. اگر تعداد سؤال‌های حل‌نشده زیاد باشد، دوباره به درمانگاه مراجعه کند.
۵. اگر امکان داشته باشد، سؤال‌های مربوط به شمارش را با روش‌های متفاوت حل کند و از این کار لذت ببرد.
۶. اگر علاقه‌مند باشد، چند سؤال در همین زمینه طراحی کند و با دوستانش به حل و بحث بگذارد تا نقاط قوت و ضعف سؤالش آشکار شود.

گستردهٔ مکعب دو رنگ

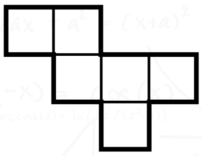
ریاضی فکر کن! برای همه!

زهره پندی

در این شـــماره یکی از ابزارهای وبگاه «ریاضی فکر کن» را که «گستردهٔ مکعب دو رنگ» نام دارد، معرفی می‌کنیم. برای دیدن این صفحه می‌توانید به نشانی زیر مراجعه کنید:

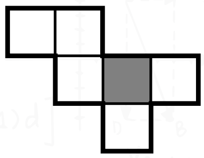
https://mathink.ir/گسترده-معکب-دو-رنگ

مطلبی که در ادامه می‌آید، به مطلب این صفحه مرتبط است، اما بدون مراجعه به آن صفحه هم می‌توانید ادامهٔ مطلب را بخوانید و پیش بروید. شکل روبه‌رو یک نوع گستردهٔ مکعب را نشان می‌دهد:

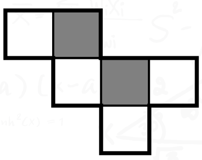


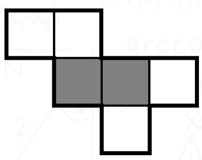
یعنی اگر این شکل را روی یک کاغذ بکشیم، آن را ببریم و از روی خط‌ها به یک طرف تا کنیم، می‌توانیم با آن یک مکعب بسازیم.

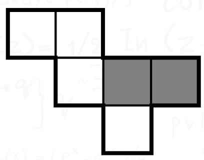
قرار است دو تا از وجه‌های این مکعب را طوری رنگ کنیم که هنگام بستن این گسترده و ساختن مکعب، در یک یال مشترک باشند (یعنی دو وجه رنگی به هم چسبیده باشند). اگر به ترتیب زیر یک وجه را رنگ کنیم:

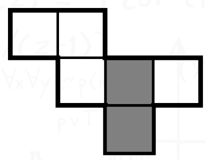


فقط به چهار حالت می‌توانیم وجه دیگری را رنگ کنیم که هنگام بستن مکعب، به آن بچسبد؛ چون در هر مکعب چهار وجه از چهار ضلع مربع هر وجه به آن می‌چسبند:

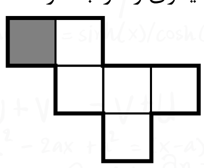

۱


۲

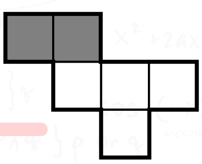

۳

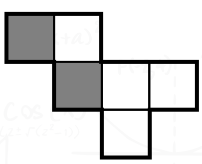

۴

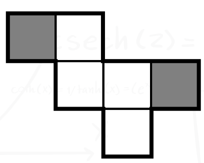
تصور اینکه این وجه‌ها هنگام ساختن مکعب کنار هم قرار می‌گیرند، در برخی شکل‌ها ساده‌تر و در برخی سخت‌تر است. تشخیص این موضوع در کدام شکل‌ها برای شما ساده‌تر است؟ در کدام‌ها سخت‌تر؟ تا الان چهار حالت رنگ‌کردن دو تا از وجه‌های این گستردهٔ مکعب را با این شـــرط که هنگام ساخته‌شدن مکعب کنار هم قرار بگیرند، دیدیم. آیا طور دیگری هم می‌توان وجه‌ها را رنگ کرد و مکعبی با دو وجه رنگی کنار هم ساخت؟ اگر وجه دیگری را در ابتدا رنگ کنیم، مثلاً این وجه:

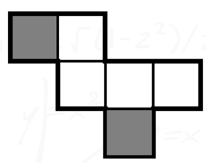


برای وجه رنگی چسبیده به آن، چند پاسخ وجود دارد؟ باز هم فقط چهار تا جواب وجود دارد:

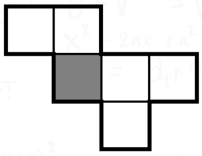

۵


۶

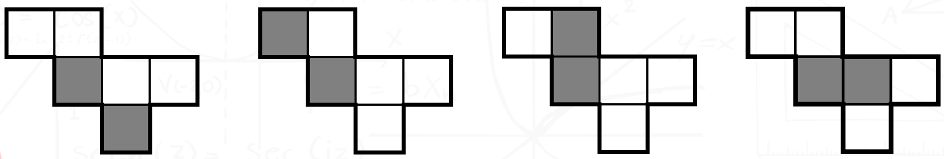

۷


۸

تصور کنارهم‌بودن این وجه‌ها در مکعب ساخته‌شده، خیلی ساده نیست! می‌توانید مکعب‌ها را بسازید و آزمایش کنید. ساختن و دیدن، می‌تواند به تصورهای بعدی شما هم کمک کند. تا الان هشت حالت متفاوت را دیده‌ایم! آیا طور دیگری هم می‌توان وجه‌ها را رنگ کرد و مکعبی با دو وجه رنگی کنار هم ساخت؟ هر بار می‌توانیم با رنگ کردن یک وجه آغاز کنیم و به چهار حالت، یک وجه کنار آن را هم رنگی کنیم.
مکعب شش وجه دارد. پس اولین وجه رنگی می‌تواند یکی از این شش وجه باشد و وجه دوم یکی از چهار تا وجهی که کنار هم قرار می‌گیرند. با این حساب با ۲۴=۴×۶ حالت می‌توان دو وجه کنار هم را رنگی کرد! اما به نظر می‌رسد یک نکته را در نظر نگرفته‌ایم: اینکه ممکن است به حالت‌های تکراری برخورد کنیم. مثلاً اگر ابتدا این وجه را رنگ کنیم:

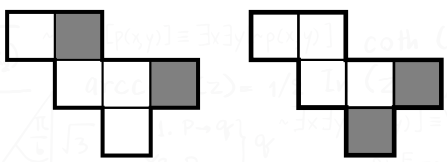


با این چهار حالت می‌توانیم وجه دوم را انتخاب کنیم:



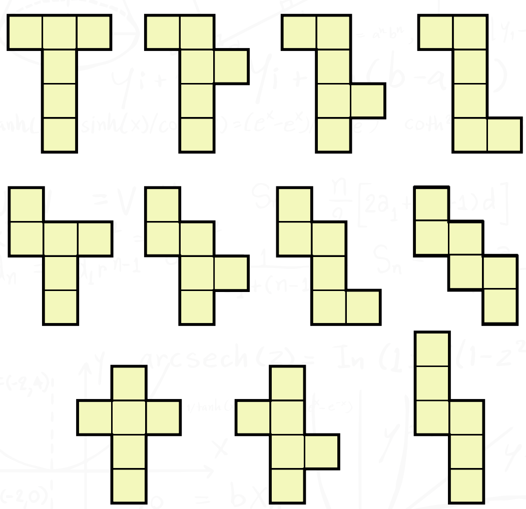
۲ ۱۰ ۶ ۹

در حالی که دو تا از آن‌ها (شمارهٔ ۲ و شمارهٔ ۶) تکراری هستند!
در هر کدام از این دو حالت، دومین وجه رنگ شده، همان وجهی است که در حالت‌های قبل به عنوان اولین وجه رنگ شده بود. این حالت‌ها را باید فقط یک بار بشماریم.
به همین ترتیب ۲۴ حالتی که محاسبه کردیم، دو تا دو تا تکراری هم هستند. یعنی هر حالت دو بار محاسبه شده است.
پس تعداد حالت‌های متفاوت رنگ‌کردن دو وجه، در این گستردهٔ مکعب، برابر ۱۲=۲÷۲۴ است.
تا الان ۱۰ تا از حالت‌ها را دیده‌ایم. سعی کنید با تغییر اولین وجه رنگی و تصور وجه رنگی دوم، دو حالت دیگر را هم پیدا کنید. اگر خوب عمل کنید، این حالت‌ها را پیدا می‌کنید:



۱۲ ۱۱

مکعب، ۱۱ گستردهٔ متفاوت دارد که در زیر آن‌ها را می‌بینید. با هر کدام از این گسترده‌ها می‌توان این مسئله را دوباره حل کرد:



مهدیه مسیبی

تدریس برای یادگیری بهتر

گفت‌وگو با سارا زجاجی، مخاطب امروز رشد ریاضی برهان

دنیای ذهنی او بسیار وسیع، جذاب و خوش‌رنگ است. از فرمول‌های دنیای ریاضی گرفته تا رنگ‌های روی بوم نقاشی، همه و همه باعث نشاط و خرسندی این دانش‌آموز خوش‌ذوق می‌شوند. ریاضی را دوست دارد و از هر طریق دنبال یادگیری است. از کتاب درسی تا مجله‌ها و وبگاه‌ها را ورق می‌زند و جست‌وجو می‌کند.

سارا زجاجی دانش‌آموز پایهٔ نهم «دبیرستان مریم» در شهر مشهد است. یکی از باورهای جالب او برای یادگیری، یاددادن و آموزش به دیگران است. گفت‌وگو با این دانش‌آموز مشتاق ریاضی، پیش روی شماست. با هم می‌خوانیم.

***

● از دوران ابتدایی تا امروز که دانش‌آموز پایهٔ نهم هستید، درس ریاضی را چطور دیدید؟ سخت بود یا جذاب؟ شیرین و لذت‌بخش بود یا ...؟ نظرتان در مورد درس ریاضی به‌طورکلی چیست؟

○ به نظر من تا پایان دورهٔ ابتدایی ریاضی خیلی آسان و شیرین بود. اما کاملاً واضح است که هرقدر دورهٔ تحصیلی بالاتر می‌رود، درس‌ها هم سنگین‌تر می‌شوند. با وجود این، به نظر من ریاضی همچنان درسی شیرین و جذاب است. زمانی که به جواب یک مسئله دست پیدا می‌کنی، یکی از بهترین لحظه‌هاست.

● به نظر شما ریاضی تا همین اندازه که آن را یاد گرفته‌اید، در زندگی کاربردی داشته است؟

○ ریاضی در همه جای زندگی ما کاربرد دارد. از حساب‌وکتاب در خریدهای ما گرفته تا هر کار دیگری که فکرش را بکنیم به ریاضی ربط پیدا می‌کند. زیبایی زندگی در ریاضیات است و هر چه جلوتر می‌رویم این زیبایی بیشتر می‌شود.

● برای اینکه ریاضی و مباحث مربوط به آن را بهتر یاد بگیرید چه‌کار می‌کنید؟ مثلاً تمرین‌های بیشتر و مشابه حل می‌کنید؟ مجله یا کتاب‌های ریاضی می‌خوانید؟ یا کار دیگری می‌کنید؟

○ من مجله‌های ریاضـی را خیلی می‌خوانم و خیلی مفید هستند. ولی بـا درس‌دادن و آموزش به دیگران، آدم بهتر یاد می‌گیرد. مثلاً من در مبحثی که یاد گرفته‌ام، نمونهٔ سـؤال حل می‌کنم و تقریباً نسبت به آن مسلط می‌شوم. اما وقتی همین موضوع را برای دانش‌آموزانی که در همان زمینه مشکل دارند و درس را درست متوجه نشده‌اند توضیح می‌دهم، خودم بهتر آن را درک می‌کنم. بنابراین تدریس یک موضوع، به فهم بهتر آن کمک می‌کند.

● گاهی هنگام یادگیری یک موضوع یا نکته در درس ریاضی با مشکل روبه‌رو می‌شویم و درست آن مطلب را نمی‌فهمیم. در این هنگام چه می‌کنید؟ از چه کسی کمک و راهنمایی می‌گیرید؟

○ ویدیوهای آموزشی خیلی واضح و کامل مباحث را توضیح می‌دهند. بنابراین در وهلهٔ اول سراغ فیلم‌های آموزشی می‌روم. البته گاهی هم از خواهرم که از من بزرگ‌تر است و در دانشگاه درس می‌خواند، کمک و راهنمایی می‌گیرم.

● یادگرفتن یک مطلب به‌صورت گروهی و مشورت با دیگر دوستان و هم‌کلاسی‌ها چقدر در یادگیری و فهم بهتر آن موضوع اثر دارد. در این زمینه برای ما مثالی بزنید.

○ می‌گویند دو جفت چشم بهتر از یک جفت چشم است. این جمله به نظرم در رابطه با مغز هم صدق می‌کند، چون ممکن است راه‌حلی که به ذهن دوست شما می‌رسد، به ذهن شما نرسد و برعکس.

● آیا نکته‌ها و مباحث درس ریاضی را تا به حال به دیگر دوستان و هم‌کلاسی‌ها هم آموزش داده‌اید؟ انجام این کار چقدر به خودتان در فهم بهتر ریاضی کمک می‌کند؟

○ همان‌طور که گفتم، آموزش‌دادن مطالب به دیگران، خیلی برای یادگرفتن خودمان مفید است. مثلاً دربارهٔ قدرمطلق‌ها یکی از دوستانم سؤالی داشت و موضوع را کامل متوجه نشده بود. نکتهٔ جالب اینجاست که وقتی برای تفهیم بهتر مطلب به دوستم، ناچار شدم مسیرها و روش‌های متفاوتی را تجربه کنم، خودم هم بهتر آن مطلب را یاد گرفتم و بهتر در ذهنم ماندگار شد.

● برای یادگیری بهتر یک موضوع در ریاضی یا هر درس دیگری، گاهی باید مطالعهٔ بیشتری داشته باشیم. مثلاً کتاب‌های بیشتر یا مجله‌هایی مثل «رشد ریاضی برهان» را بخوانیم. آیا شما چنین مطالعاتی هم دارید؟ لطفاً کمی برایمان توضیح بدهید.

○ من به مجله‌های برهان خیلی علاقه دارم. خیلی متنوع و کامل هستند. البته برای حل نمونهٔ سؤال به کتاب‌های آزمون یا تشریحی معمولی یا تیزهوشان مراجعه می‌کنم. هر زمان که شما بتوانید نمونه سؤال‌های متفاوت و متنوع، به‌ویژه سؤال‌های تیزهوشان را حل کنید، باید بدانید که واقعاً از پس هر سؤالی برمی‌آیید.

● چه نکته‌ها و قسمت‌هایی از مجلهٔ رشد ریاضی برهان را بیشتر دوست دارید و مطالعه می‌کنید؟

○ ریاضی و کاربردهای آن را بیشتر مطالعه می‌کنم.

● یادگیری مباحث ریاضی از طریق مجله چه فرقی با یادگیری از کتاب درسی دارد؟

○ مجله‌ها سرگرم‌کننده‌تر هستند و باعث جذب مخاطب می‌شوند. این در حالی است که با خواندن پنج خط از کتاب درسی، حوصلهٔ آدم سرمی‌رود. باید برای جذابیت کتاب‌های درسی هم فکری کرد.

● چقدر برای فهم بهتر ریاضی از وبگاه‌ها (سایت‌های) ریاضی در اینترنت استفاده می‌کنید و دنبال پاسخ سؤال‌های خودتان در اینترنت هستید؟

○ من تا جواب سؤال را پیدا نکنم، اصلاً نمی‌توانم به سراغ سؤال بعدی بروم. برای همین باید برای پیداکردن جواب سؤال، از هر راهی از جمله وبگاه‌ها و مجله‌ها استفاده کنم. بنابراین، وبگاه‌های علمی و آموزشی هم یکی از منابع خوب و مهم یادگیری هستند.

● به نظر شما، چرا برخی دانش‌آموزان تصور می‌کنند ریاضیات درسی سخت و دشوار است؟ اگر ریاضی تا این حد سخت نیست، پس این تصور از کجا در ذهن آن‌ها ایجاد شده است و باید چه‌کار کنیم تا ریاضی این‌قدر سخت جلوه نکند؟

○ آدم از چیزی که نمی‌شناسد، وحشت دارد. اگر یک نفر کم‌کم و به‌تدریج با موضوعی آشنایی پیدا کند و خودش هم برای شناخت بیشتر آن موضوع بکوشد، حتماً در یادگیری آن موفق خواهد شد و ترس و ابهامی ندارد. به نظرم ریاضیات و بقیهٔ درس‌ها هم همین وضعیت را دارند. وقتی ما ریاضی را درست و کامل نمی‌شناسیم، درک درستی هم از آن نداریم.

● اهل حل معماهای ریاضی هم هستید؟

○ بله، معماها باعث گسترش فعالیت‌های ذهنی و افزایش اطلاعات ما می‌شوند.

● شنیدم به نقاشی و داستان‌نویسی هم علاقه دارید!

○ من چند سالی است نقاشی می‌کنم. دنیای هنر دنیایی پر از رنگ و لذت است. به باور من، دنیای داستان و داستان‌نویسی هم دست کمی از جهان رنگارنگ هنر ندارد.

● دلیل علاقهٔ شما به ریاضی چیست؟

○ چون حفظ کردنی نیست و برای فراگرفتن آن به حفظ‌کردن کل کتاب درسی و غیردرسی نیازی نیست. درس‌های مفهومی دل‌نشین‌تر هستند.

● دانش ریاضی بخش‌ها و مباحث متعددی دارد. کدام مبحث را بیشتر دوست دارید و چرا؟

○ من به جبر و معادله خیلی علاقه دارم؛ خیلی شیرین است. این بخش از ریاضی به نظرم از یک قانون مشخص تبعیت می‌کند و زمانی که حل معادله به پایان می‌رسد، حس پیروزی در یک نبرد به انسان دست می‌دهد.

● دوست دارید در آینده چه رشته‌ای را در دانشگاه دنبال کنید و به چه شغل و حرفه‌ای علاقه دارید؟

○ من به رشتهٔ ریاضی و تجربی خیلی علاقه دارم. اگر رشتهٔ ریاضی را دنبال کنم، برنامه‌نویسی نرم‌افزار را دوست دارم. اگر هم تجربی را دنبال کنم، دلم می‌خواهد در کالبدشکافی به جایی برسم.

● بهترین‌ها را برایتان آرزومندم.

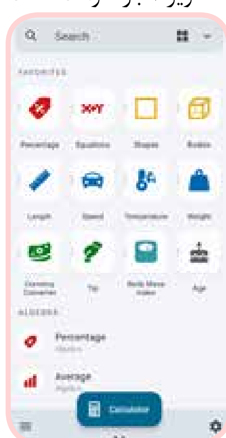
فاطمه درویشی

ماشین‌حساب همه‌کاره (آل‌این‌وان)

ماشین‌حساب‌ها جزو پراستفاده‌ترین ابزار موجود در بازارهای دیجیتال هستند که روزبه‌روز گسترش می‌یابند و از امکانات متنوع‌تری پشتیبانی می‌کنند. «ماشین‌حساب آل این وان»[1] ماشین‌حسابی ساده و آسان برای استفاده، با مجموعهٔ کاملی از ابزارها برای زندگی روزمره، مانند مبدل واحد، مبدل ارز، ماشین‌حساب درصد و غیره است. از محاسبه‌های ساده گرفته تا پیچیده و تبدیل واحدها و ارزها، درصدها، نسبت‌ها، مساحت‌ها، حجم‌ها و غیره ... همهٔ این کارها را انجام می‌دهد. می‌توان گفت که بیش از ۵۰ ماشین‌حساب گوناگون در این نرم‌افزار وجود دارد که باعث شده است به آن لقب «آل این وان»[2] (همه در یکی) بدهند. تنها کافی است اراده کنید و با یک جست‌وجوی ساده در فهرست امکانات، نوع ماشین‌حساب و یا سامانهٔ تبدیل واحد مورد نظر خود را برگزینید تا بتوانید تنها در چند ثانیه جواب‌هایی دقیق و منطقی دریافت کنید. ماشین‌حساب اصلی این برنامهٔ هوشمند در دو صورت «علمی» و «ساده» در دسترس است که بنا بر نیازهای خود قادر به استفاده از هر دو نوع خواهید بود. بهتر است این برنامهٔ کاربردی (اپلیکیشن) پر امکانات را از دست ندهید و برای دریافت نسخهٔ حرفه‌ای و کامل آن با ما در ادامهٔ مطلب همراه باشید. برای دریافت این نرم‌افزار از «پیوند» (لینک) زیر استفاده کنید:

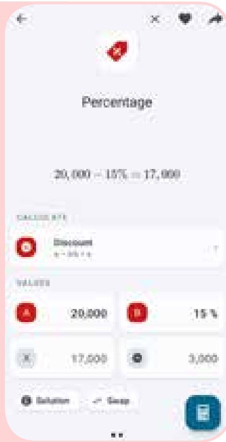
http://cafebazaar.ir/app/?id=all.in.one.calculator&ref=share

پس از نصب برنامه، شمایل [شمایل برنامه] روی صفحهٔ تلفن همراه شما ظاهر می‌شود که دروازهٔ ورود به این برنامهٔ شگفت‌انگیز است. پس از اجرای برنامه، پنجرهٔ تصویر ۱ باز خواهد شد.



تصویر۱

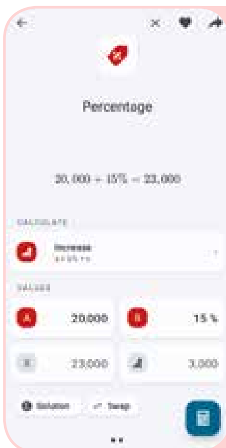
همان‌طور که گفتیم، این برنامه یک ماشین‌حساب کامل است و از این رو، انواع موضوع‌های ریاضی، اعم از حساب و هندسه، در تصویر دیده می‌شود. سعی می‌کنیم بخشی از آن‌ها را همراه با شما بررسی کنیم.



تصویر۲

این بخش برای محاسبه‌های درصدی به کار می‌رود.

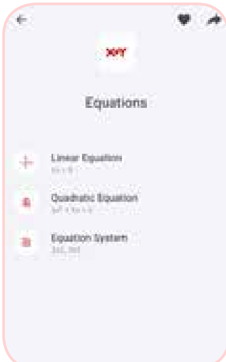
پس از بازکردن آن، پنجره‌ای مانند تصویر ۲ خواهید داشت. در این پنجره با بازکردن بخش Discount می‌توانید مشخص کنید محاسبه‌های درصدی شما بر اساس کدام رابطه انجام شوند.



تصویر۳

در بخش Increase می‌توانید تعیین کنید که چند درصد یک مقدار را به مقدار اولیه اضافه کند. مثلاً اگر یک کالا ۲۰۰۰۰ تومان باشد، با افزایش ۱۵ درصدی چقدر خواهد شد. (با کلیک (تلیک) روی عددهای هر بخش می‌توانید یک ماشین‌حساب ساده را باز و عدد مورد نظر را توسط آن وارد کنید.)

تصویر ۳ نتیجهٔ انجام مسئلهٔ مطرح‌شده در پاراگراف قبل است که نشان می‌دهد ۱۵ درصد ۲۰۰۰۰ عدد ۳۰۰۰ می‌شود و در مجموع نتیجهٔ محاسبه ۲۳۰۰۰ خواهد شد. با تلیک (کلیک) روی دکمهٔ Solution می‌توانید راه‌حل کامل و محاسبهٔ انجام‌شده را ملاحظه کنید. با تلیک روی دکمهٔ Swap می‌توانید مقادیر متغیرها را جابه‌جا و نتیجهٔ محاسبات را ملاحظه کنید.



تصویر۴

از این بخش برای حل معادله‌های ریاضی استفاده می‌شود.

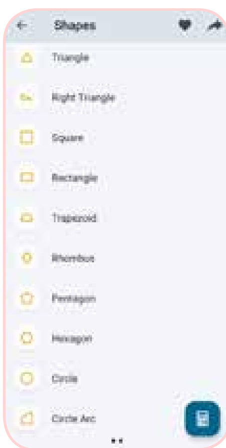
پس از بازکردن این بخش پنجرهٔ تصویر ۴ باز می‌شود که می‌توانید نوع معادله را انتخاب کنید. سپس با ورود متغیرهای مشخص‌شده معادله را حل کنید.

Linear Equation: معادلهٔ خطی (درجهٔ یک)

Quadratic Equation: سهمی (درجهٔ دو)

Equation System: دو معادله دو مجهول

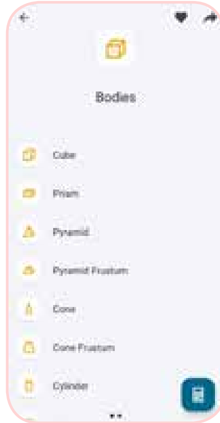
این بخش به کار با شکل‌های هندسی اختصاص دارد.



تصویر۵

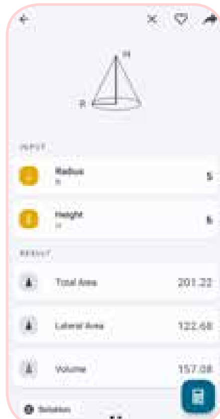
پس از اجرای این گزینه پنجرهٔ تصویر ۵ باز می‌شود که تمام شکل‌های هندسی را نمایش می‌دهد. شما می‌توانید شکل مورد نظرتان را انتخاب کنید و سپس مواردی را که لازم دارید، به‌دست آورید. مثلاً با انتخاب مستطیل می‌توانید طول و عرض آن را وارد کنید و سپس محیط و مساحت آن را به‌دست آورد.

این بخش به شکل‌های سه‌بعدی اختصاص دارد.
پس از اجرای این گزینه پنجرهٔ تصویر ۶ باز می‌شود که از طریق آن می‌توانید شکل سه‌بعدی مورد نظرتان را که به محاسبه‌های مربوط به آن (مساحت جانبی، مساحت کل، حجم) نیاز دارید، انتخاب و متغیرهای مربوط را وارد کنید.



تصویر ۶

تصویر ۷

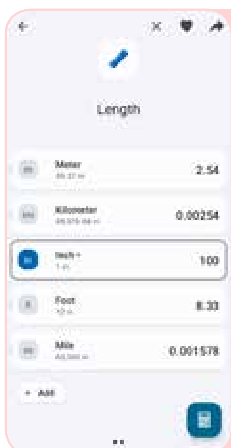


برای مثال، مخروط را انتخاب و شعاع قاعدهٔ ۵ و ارتفاع ۶ را به‌عنوان ورودی وارد کردیم. همان‌طور که در تصویر ۷ می‌بینید، مساحت جانبی، مساحت کل و حجم در شکل محاسبه شده‌اند. با انتخاب گزینهٔ Solution می‌توانید فرمول و نحوهٔ محاسبهٔ مقدارها را ملاحظه کنید.

از این گزینه برای تبدیل واحدهای طول استفاده می‌شود.

با وارد شدن به این بخش شما با پنجرهٔ تصویر ۸ روبه‌رو خواهید شد که نشان می‌دهد، واحدهای طول با هم چه ارتباطی دارند. در صورتی که مقداری را داشته باشید و بخواهید معادل آن را در واحدهای دیگر به‌دست آورید، می‌توانید مقدار مورد نظر را در ردیف مرتبط با آن واحد وارد کنید. مانند تصویر ۸ که مقدار تبدیل‌شدهٔ اینچ را به واحدهای دیگر نمایش می‌دهد.

تصویر ۸



از این بخش همان‌طور که مشخص است، برای تبدیل واحدهای سرعت استفاده می‌شود.

از گزینهٔ برای تبدیل واحدهای مربوط به دما به یکدیگر استفاده می‌شود.

گزینهٔ واحدهای جرم را به هم تبدیل می‌کند؛ مثلاً تبدیل واحد اونس به کیلوگرم، گرم و ...

گزینهٔ مخصوص تبدیل مقدارهای پولی کشورهای متفاوت به یکدیگر است.

گزینهٔ که تقریباً مشابه درصد عمل می‌کند، می‌تواند سود حاصل از یک درصد مشخص سرمایه را بین تعداد مشخصی از افراد تقسیم کند.

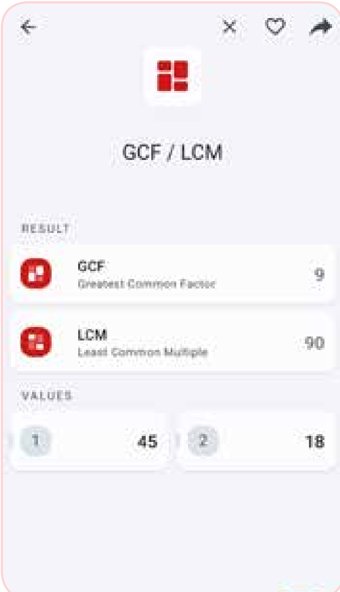
گزینهٔ با دریافت قد و وزن افراد، شاخص تودهٔ بدنی آن‌ها را محاسبه می‌کند و به این ترتیب میزان اضافه و یا کسری وزن افراد سنجیده می‌شود.

گزینهٔ برای محاسبهٔ میزان سن افراد استفاده می‌شود. شما می‌توانید با واردکردن ماه و سال تولد خود به میلادی، سن خود را محاسبه کنید.

حال که توضیحات بخش بالایی به پایان رسید، چند مورد از موارد پایین پنجرهٔ اولیه را که در سطح ریاضیات متوسطهٔ دورهٔ اول است، شرح می‌دهیم.

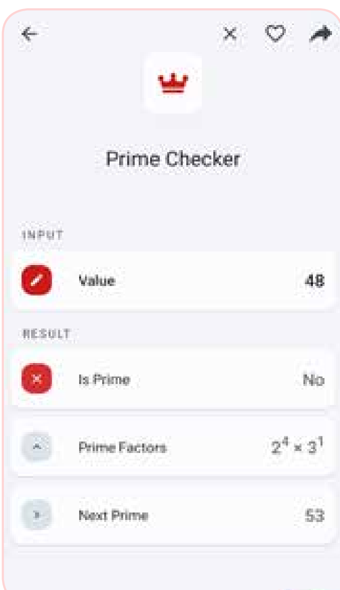
در بخش GCF / LCM Algebra شما می‌توانید کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد را محاسبه کنید. پس از اجرای این بخش صفحهٔ تصویر ۹ را خواهید داشت که در آن GCF به معنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و LCM به معنی کوچک‌ترین مضرب مشترک است. شما می‌باید عددهای مورد نظر را در بخش Value وارد کنید. ما در پنجرهٔ تصویر ۹ دو عدد ۴۵ و ۱۸ را وارد کرده‌ایم. ملاحظه می‌کنید که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها عدد ۹ شده است (یعنی بزرگ‌ترین عددی که ۴۵ و ۱۸ هر دو به آن بخش‌پذیر هستند، عدد ۹ است). کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها هم ۹۰ شده است (یعنی کوچک‌ترین عددی که به هر دو عدد ۱۸ و ۴۵ بخش‌پذیر است).

در بخش Prime Checker Algebra شما می‌توانید بررسی کنید که یک عدد اول است یا قابل‌تجزیه. همین‌طور تجزیهٔ آن عدد به عددهای اول را به‌دست آورید. برای مثال، ما در پنجرهٔ تصویر ۱۰ عدد ۴۸ را وارد کرده‌ایم. ملاحظه می‌کنید که کلمهٔ NO به معنی این است که این عدد اول نیست. همین‌طور تجزیهٔ ۴۸ به عددهای اول و معرفی عدد اول بعدی به‌عنوان نتایج به‌دست آمده، مشخص شده است.



تصویر ۹

تصویر ۱۰



پی‌نوشت‌ها

1. All in one calculator
2. All-in-One

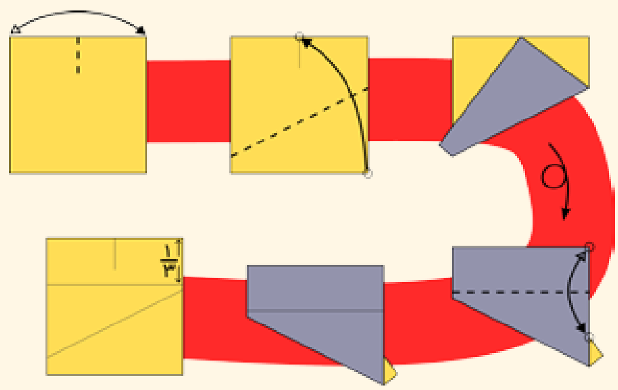
کاردستی‌های کاغذی

کاغذ، تا، تقسیم

علیرضا محمدصالحی

تقسیم کاغذ به بخش‌های مساوی، کاری است که در ساختن بسیاری از سازه‌ها انجام می‌شود. نمونه‌هایی از تقسیم به ۳ را در شماره‌های پیشین تجربه کردیم. این بار می‌خواهیم تقسیم‌های بزرگ‌تری را ببینیم. تقسیم به ۲، ۴، ۸ و ... تقسیم‌های ساده‌ای بودند که با نصف‌کردن، نصف کردنِ نصف، نصفِ نصفِ نصف و ... ساخته می‌شدند. البته فقط فهمیدن روشِ انجام این تقسیم‌ها ساده است، وگرنه تا زدن هر کدام زحمت و دقت خود را لازم دارد. اما درمورد ۳ بخش‌کردن یا ۵ بخش‌کردن، یا ۷ و ۹ و ... کار حتی برای کشف روش انجام آن هم واقعاً تا اندازه‌ای دشوار بود. روش زیر (شکل ۱) را برای تقسیم به ۳ دیدیم:

شکل ۱

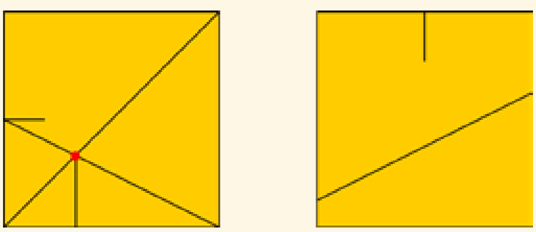


این روش را نخستین بار یک زیست‌شناس ژاپنی به نام **کازوئو هاگا**[1] کشف کرد. یک سال بعد از کشف این روش و مطرح‌کردن آن با استادان ریاضی و فیزیک، این روش تاکردن و ساختن کسرها، به‌عنوان قضیهٔ هاگا در یک مجلهٔ ریاضی ژاپنی چاپ شد.

شیوه‌های بسیاری برای تقسیم صفحه به چند قسمت وجود دارد، ولی سریع‌ترین روش، به‌خصوص برای ساخت کسرهایی با مخرج بزرگ، روش هاگا است. برای موضوع‌های عملی و کاربردی، وقتی می‌خواهیم از روشی برای انجام کاری استفاده کنیم، یکی از مسائل مهم سرعت آن روش است. یعنی بتوانیم کارِ خاصی را در زمان کوتاه‌تر یا تعداد مرحله‌های کمتری انجام دهیم. مثلاً در تا زدن کاغذ، مرحله‌هایی که ما را به شکل یا پایه یا نسبت دلخواهمان می‌رساند، باید در حداقل زمان طی شوند.

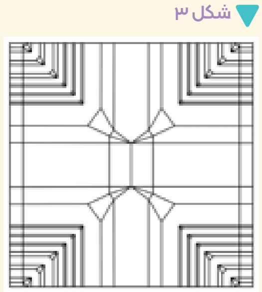
همچنین درمورد روش‌ها می‌توان از پیچیدگی سخن گفت. این که کدام روش مرحله‌های ساده‌تری دارد، گاهی برای انجام کارهای عملی بسیار مهم می‌شود. مثلاً در روش‌هایی که برای ساختن کسرها معرفی کردیم، تعداد خطهایی که روی کاغذ می‌افتند، برای ادامهٔ کار مهم است؛ چون گاهی خطهای زیادی دست و پای آدم را می‌گیرند یا ممکن است ما را در مرحله‌های بعدی گیج کنند. در شماره‌های پیشین دو روش برای تقسیم ضلع مربع به سه بخش مساوی دیدیم. از بین این دو، روش اول (برخورد قطرها) پیچیده‌تر بود (شکل ۲) یا روش دوم (هاگا)؟ کدام سریع‌تر است؟ کدامشان خطهای بیشتری روی صفحه می‌اندازد؟

شکل ۲

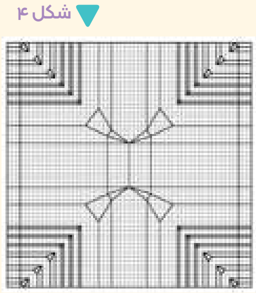


در هنر تا زدن کاغذ، تقسیم‌بندی صفحه در طرح‌هایی که کمی پیچیده می‌شوند بسیار مهم است. گاهی برای ساخت یک طرح باید ابتدا یک تقسیم‌بندی مفصل انجام دهیم. مثلاً به الگوی تای شکل ۳ نگاه کنید. این خطها نقشه‌ای برای ساخت یک سازهٔ کاغذی هستند. همان‌طور که می‌بینید، در این نقشه نسبت‌ها و فاصله‌ها معلوم نیستند، اما در شکل ۴ که خطهای کمکی اضافه شده‌اند، هر ضلع مربع به ۵۶ بخش برابر تقسیم شده است. یعنی یک جدول ۵۶ در ۵۶ برای یافتن خطهای اصلی لازم است. تازدن این خطها ما را به سازه‌ای زیبا می‌رساند که احتمالاً همه می‌شناسیم.

شکل ۳



شکل ۴

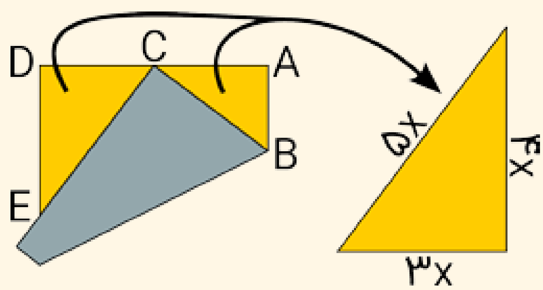


طراح تصویر بالا **غلامرضا سـروی**، یکی از طراحان برجستهٔ کاغذتایی، (اوریگامی) ایرانی اسـت. آموزش کامل این طرح، و چندین طرح دیگر در کتاب «سرزمین کهن، از سنگ تا کاغذ» در دسترس است.

همـان طور که دیدیم طرح بالا به یـک جدول ۵۶ در ۵۶ نیاز دارد. یعنی باید هر ضلع را به ۵۶ بخش مسـاوی تقسیم کنیم. بهترین روش برای انجام این کار چیسـت؟ باید کمی از جدول ضرب اسـتفاده کنیم! همه می‌دانیم که ۵۶=۸×۷ این معنی را می‌رساند که اگر هفت پاره‌خط برابر داشته باشیم که هر کدام به ۸ بخش برابر تقسیم شوند، آن‌گاه ۵۶ پاره‌خط برابر داریم. پس اگر تقسیم به ۷ را بلد باشیم، برای کامل‌کردن این تقسیم‌بندی کار سختی نخواهیم داشت. (چرا؟)

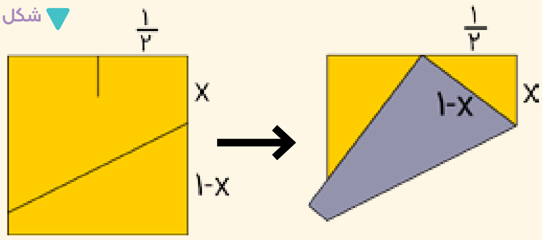
پیش از این دیدیم که هر کسر دلخواهی با روش برخورد قطرها قابل ساختن است. این بار با روش جدیدمان (هاگا) می‌خواهیم ایـن کار را انجام دهیم. روش هـاگا از تعداد خط‌های کمتری استفاده می‌کند و تاکردن آن ساده‌تر از روش قبلی است. بیایید اول بررسـی کنیم که چطور کسر یک سوم ساخته شد، پس از آن به سراغ ۷ و کسرهای با مخرج بزرگ‌تر می‌رویم.

شکل ۵



شکل ۵ روش هاگا را در حالت تا خورده نشان می‌دهد. قبلاً ادعا کردیم که دو مثلث ایجاد شـده از نوع سه، چهار و پنج هستند. یعنی نسبت اضلاع آن‌ها به یکدیگر ۳، ۴ و ۵ است. اما چرا؟

شکل ۶



طبق روال گذشـته فرض کنیم ضلع مربع برابر یک است. پس طبق نام‌گذاری شکل ۶ (و بنا به قضیهٔ فیثاغورس) این نسبت‌ها برقرار است:

$$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=(1-x)^2$$

$$x^2+\frac{1}{4}=1-2x+x^2$$

$$2x=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$x=\frac{3}{8}$$

پس نسبت ضلع‌های این مثلث برابر است با: $\frac{3}{8}$، $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{8}$.
همچنین مثلث ABC با مثلث DCE متشابه است.(شما بگویید چرا!)
بنا به تشابه مثلث‌ها داریم:

$$ABC\sim CDE\rightarrow\begin{cases}AB\sim CD\\ AC\sim DE\\ BC\sim CE\end{cases}\rightarrow\frac{AB}{CD}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}=\frac{AC}{DE}=\frac{\frac{1}{2}}{DE}$$

$$\rightarrow\frac{3}{4}=\frac{1}{2DE}\rightarrow 2DE=\frac{4}{3}\rightarrow DE=\frac{2}{3}$$

بنابراین ضلع مثلث سـمت چپ برابر $\frac{2}{3}$ است، و با زدن تای سوم (لطفاً مرور کنید) کسر $\frac{1}{3}$ ساخته می‌شود.

لطفاً در صورتی که سروکله‌زدن با نسبت‌های بالا شما را اذیت می‌کند، یک بار راه‌حل را خودتان بنویسید. تنها چیزی که باقی مانده این است که روش هاگا را برای ایجاد کسـرهای دلخواه گسترش دهیم. برای مثال، همان کسر $\frac{1}{7}$ را به روش هاگا می‌سازیم.

$$y^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=(1-y)^2\rightarrow y^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=1-2y+y^2$$

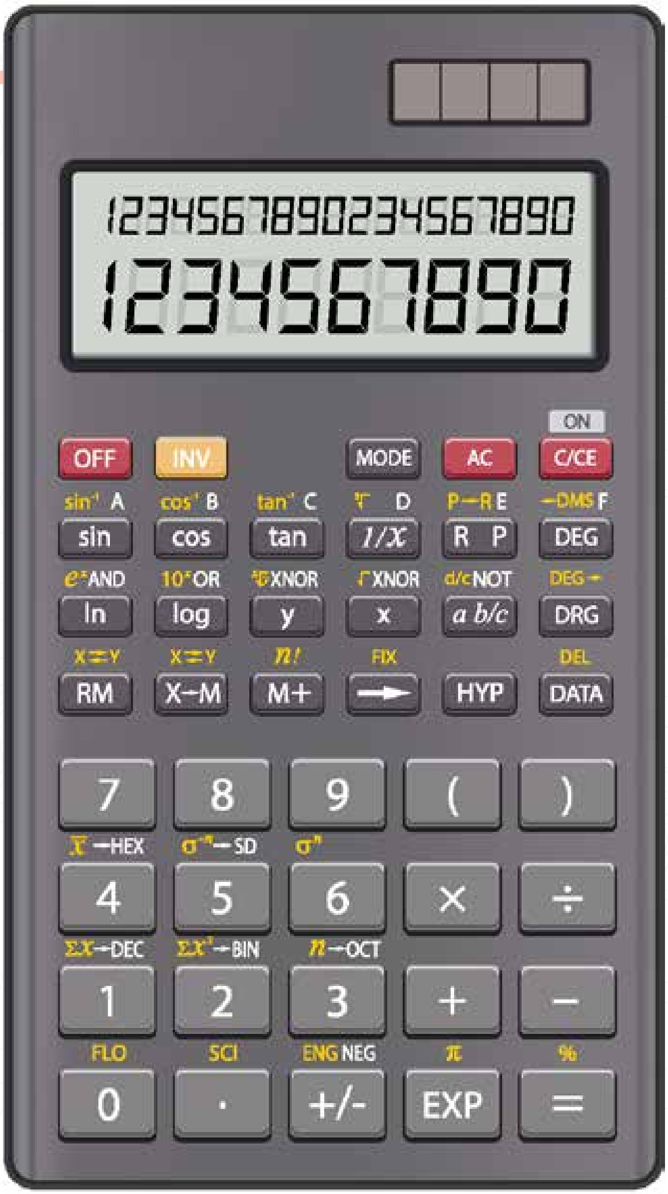
$$\frac{1}{36}=1-2y\rightarrow y=\frac{35}{72}$$

در ادامه با تشابه مثلث‌های چپ و راست داریم:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{35}{72}}=\frac{z}{\frac{1}{6}}\rightarrow z=\frac{2}{7}$$

پس با نصف‌کردن ضلع مثلث سمت چپ (Z) کسر $\frac{1}{7}$ به دست می‌آید.
نظر شما درمورد ساخت بقیهٔ کسرها چیست؟

پی‌نوشت
1. Kazuo Haga



ماشین‌حساب‌های نیمه‌جان

محرم ایردموسی

حتماً یک نرم‌افزار مناسب ماشین‌حساب، روی گوشی تلفن‌همراه یا رایانک یا رایانهٔ خود دارید و هنگامی که با محاسبهٔ سنگین روبه‌رو می‌شوید، به سراغ آن می‌روید.

حتماً به این نکته هم توجه دارید که نباید هر محاسبه‌ای را با ماشین‌حساب انجام دهید. به عبارت بهتر، نباید به ماشین‌حساب وابسته و متکی باشید. چون در این حالت توانایی ذهنی خود را ضعیف کرده‌اید. بنابراین سعی کنید، بخش‌های ساده‌تر محاسبه‌های ریاضی را به کمک ذهن انجام دهید و تنها برای اطمینان از محاسبه به سراغ ماشین‌حساب بروید.

اما در این مطلب می‌خواهیم شما را در چند وضعیت بغرنج قرار دهیم تا ذهنتـــان را به کار بیندازید و توانایی‌هایتان را افزایش دهید. اگر آماده‌اید شروع کنیم.

۱. ماشین‌حسابی داریم که نمی‌تواند جذر بگیرد. اما مجذور (توان دوم) هر عدد را محاسبه می‌کند. چگونه می‌توانیم با آن، جذر یک عدد را تا دو رقم اعشار محاسبه کنیم؟ برای مثال، می‌خواهیم جذر ۲، یعنی $\sqrt{۲}$ را به دست آوریم. این کار را با روش سعی و خطا انجام می‌دهیم. فرض کنید دکمهٔ مجذور به شکل $\boxed{\uparrow^2}$ باشد. ابتدا با ماشین‌حساب دو محاسبهٔ زیر را انجام می‌دهیم:

$$۱ \longrightarrow \boxed{\uparrow^2} \longrightarrow ۱$$

$$۲ \longrightarrow \boxed{\uparrow^2} \longrightarrow ۴$$

نتیجهٔ این دو محاسبه چیست؟

چون $۱^۲ = ۱ < (\sqrt{۲})^۲ = ۲ < ۲^۲ = ۴$ در نتیجه $۱ < \sqrt{۲} < ۲$

حال با شروع از ۱/۱، مجذورهای زیر را تا جایی که حاصل از ۲ بیشتر شود ادامه می‌دهیم:

$$۱/۱ \longrightarrow \boxed{\uparrow^2} \longrightarrow ۱/۲۱$$

$$۱/۲ \longrightarrow \boxed{\uparrow^2} \longrightarrow ۱/۴۴$$

$$۱/۳ \longrightarrow \boxed{\uparrow^2} \longrightarrow ۱/۶۹$$

$$\left.\begin{array}{l} ۱/۴ \longrightarrow \boxed{\uparrow^2} \longrightarrow ۱/۹۶ \\ ۱/۵ \longrightarrow \boxed{\uparrow^2} \longrightarrow ۲/۲۵ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱/۴ < \sqrt{۲} < ۱/۵$$

تا اینجای محاسبه، مطمئن هستیم که جذر ۲ از ۱/۴ بزرگ‌تر خواهد بود. مجدداً با شروع از ۱/۴۱، ۱/۴۲، ... محاسبهٔ مجذور را تا جایی ادامه می‌دهیم که حاصل از ۲ بیشتر شود:

$$\left.\begin{array}{l} ۱/۴۱ \longrightarrow \boxed{\uparrow^2} \longrightarrow ۱/۹۸۸۱ \\ ۱/۴۲ \longrightarrow \boxed{\uparrow^2} \longrightarrow ۲/۰۱۶۴ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۱/۴۱ < \sqrt{۲} < ۱/۴۲$$

در نتیجه جذر ۲ عددی به شکل ...۱/۴۱ خواهد بود. اگر بخواهیم بفهمیم جذر ۲ به ۱/۴۱ نزدیک‌تر است یا ۱/۴۲ چه‌کار باید بکنیم؟

درست حدس زدید. بهتر است مجذور ۱/۴۱۵ را محاسبه کنیم:

$$۱/۴۱۵ \longrightarrow \boxed{\uparrow^2} \longrightarrow ۲/۰۰۲۲۲۵$$

چه نتیجه‌ای از این محاسبه عایدمان می‌شود؟

بله درست حدس زدید. $\sqrt{۲}$ از ۱/۴۱۵ کمتر است و اگر می‌خواهیم $\sqrt{۲}$ را گرد کنیم بهتر است جذر ۲ را ۱/۴۱ در نظر بگیریم.

- سعی کنید جذر ۲ را تا سه رقم اعشار با این ماشین‌حساب که جذر نمی‌گیرد، اما مربع هر عددی را حساب می‌کند، به‌دست آورید.
- جذر ۱۰ را تا دو رقم بعد از اعشار با این ماشین‌حساب، پیدا کنید.

(برای انجام محاسبات از هر ماشین‌حسابی می‌توانید استفاده کنید. تنها شرط این است که از دکمهٔ جذر ماشین‌حساب استفاده نکنید!)

۲. یک ماشین‌حساب داریم که تفاضل هر دو عددی را حساب می‌کند، اما نمی‌تواند جمع دو عدد را حساب کند. دکمهٔ تفاضل به شکل $\boxed{-}$ است. به عنوان مثال، برای محاسبهٔ ۵-۱۲ باید ابتدا عدد ۱۲ را وارد کنید. بعد دکمهٔ تفاضل را بزنید و بعد عدد ۵ را وارد کنید و در آخر دکمهٔ $\boxed{=}$ را فشار دهید:

$$۱۲\ \boxed{-}\ ۵\ \boxed{=}$$

حاصل تفاضل را روی صفحهٔ ماشین‌حساب خواهید دید.

این ماشین‌حساب دو دکمهٔ «پرانتز باز» $\boxed{(}$ و «پرانتز بسته» $\boxed{)}$ را هم دارد. سؤال اصلی این است که با چنین ماشین‌حسابی چگونه مجموع دو عدد را حساب کنیم. آیا ایده‌ای برای حل این مشکل دارید؟ کمی فکر کنید. بعد ادامهٔ مطلب را بخوانید.

اما راه‌حل: با توجه به برابری $a-(۰-b) =$ راه‌حل مشخص است. می‌توانید به ترتیب از چپ به راست مقادیر زیر را وارد کنید تا به حاصل $a+b$ برسید:

$$a\ \boxed{-}\ \boxed{(}\ ۰\ \boxed{-}\ b\ \boxed{)}\ \boxed{=}$$

۳. چالش سوم شبیه مسئلهٔ قبلی است. حل آن را به خود شما می‌سپاریم و تنها به بیان مسئله می‌پردازیم: ماشین‌حسابی داریم که دکمهٔ ضرب آن کار نمی‌کند. می‌خواهیم به کمک دکمهٔ تقسیم $\boxed{\div}$ و دکمه‌های پرانتز باز و پرانتز بسته حاصل‌ضرب دو عدد a و b را محاسبه کنیم، آیا ایده‌ای برای حل مسئله دارید؟ چه شباهتی این مسئله (محاسبهٔ ضرب به کمک تقسیم) با مسئلهٔ دوم (محاسبهٔ جمع به کمک تفاضل) دارد؟

۴. ماشین‌حســابی داریم که کمی آب وارد مدار آن شده است و دکمۀ مجــذور آن به جای آنکه مربع عــدد a را در خروجی نمایش بدهد، حاصل $a(a+۲)$ را نشــان می‌دهد. برای مثال اگر عملیات زیر را انجام دهیم، خروجی ۴۸ خواهد بود:

$۶ \rightarrow [x^2] \rightarrow ۴۸$

چه راهی برای محاسبۀ مربع یک عدد توسط این ماشین‌حساب پیشنهاد می‌کنید؟

البته این ماشین‌حســاب دکمۀ پرانتز هم نــدارد و برای برخی محاسبه‌ها باید از ذهنتان هم کمک بگیرید. دو راه وجود دارد:

راه‌حل اول: کافی است دو برابر عدد را ذهنی حساب کنیم و از خروجی دکمۀ معیوب مربع، کم کنیم:

$a \rightarrow [x^2] \rightarrow a(a+۲)$

$=a^۲+۲a$ [−] $۲a$ [=]

راه‌حل دوم: از a، یک واحــد ذهنی کم کنید و a-۱ را با این دکمۀ معیوب مربع کنید. حاصل هر چه بود به آن ۱ واحد ذهنی اضافه کنید. خروجی مربع a، یعنی ۲a خواهد بود. برای مثال:

۶ → ذهنی یک واحد کم می‌کنیم → ۵

$۵ \rightarrow [x^2] \rightarrow ۵\times۷=۳۵$

۳۵ → ذهنی یک واحد اضافه می‌کنیم → ۳۶

اثبات درستی راه‌حل فوق را به شما می‌سپاریم.

۵. ماشــین حساب معیوبی داریم که دکمۀ ضرب آن، با گرفتن دو عــدد a و b حاصل تفاضل مربعات آن‌ها را در خروجی ظاهر می‌کنــد؛ یعنی اگر a و b را بــه ترتیب زیر وارد کنیم خروجی $a^۲-b^۲$ است:

a [×] b [=] $a^۲-b^۲$

به کمک این دکمه و دکمه‌های دیگر (جمع، تفاضل، تقســیم، پرانتز) چگونه حاصل‌ضرب دو عدد را حساب کنیم؟

راهنمایی: از دو اتحاد زیر استفاده کنید:

$$(a+b)^۲=a^۲+b^۲+۲ab$$

$$(a-b)^۲=a^۲+b^۲-۲ab$$

قبل از خواندن ادامۀ مقاله، سعی کنید ایده‌ای برای حل مسئله پیدا کنید. اگر دو اتحاد را از هم کم کنید، چه رابطه‌ای خواهید داشت؟

راه‌حل اول: از دو اتحاد فوق به برابری زیر می‌رسیم

$$(a+b)^۲-(a-b)^۲=۴ab$$

حدس می‌زنم با دیدن تســاوی فوق، ایده‌ای برای حل مســئله پیدا کرده‌اید:

[(] a [+] b [)]

[×] [(] a [−]

b [)] [=] ۴ab

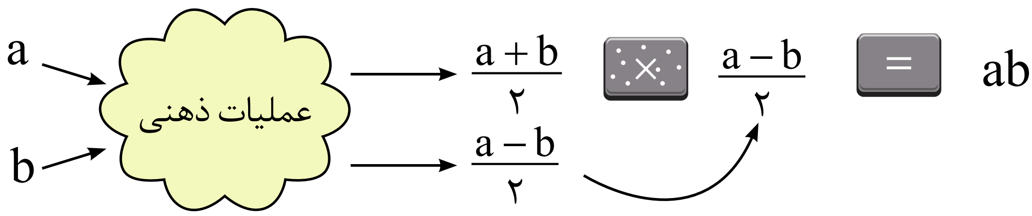
عدد حاصل را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

۴ab [÷] ۴ [=] ab

راه‌حل دوم: راه‌حل دوم شبیه راه‌حل قبلی است؛ اما می‌خواهیم کمی هم از ذهنمان در محاسبه کمک بگیریم. با توجه به برابری مذکور داریم:

$$(\frac{a+b}{۲})^۲-(\frac{a-b}{۲})^۲=ab$$

پس می‌توان به شکل زیر عمل کرد:



۶. دکمهٔ حاصل‌ضرب ماشین‌حساب بعدی که کمی چای روی آن ریختــه! با دادن دو عدد a و b به عنوان ورودی، در خروجی مقدار $a+b+ab$ را نمایش می‌دهد؛ برای مثال:

۵ [×] ۹ [=] ۵۹

در واقع در خروجی حاصل ۹×۵+۹+۵ نمایش داده می‌شود. سعی کنید به کمک این دکمه و دکمه‌های سالم جمع و تفاضل، حاصل‌ضرب دو عدد را به‌دست آورید. حداقل دو راه‌حل متفاوت پیدا کنید.

راهنمایی:

$$(a-۱)+(b-۱)+(a-۱)(b-۱)=ab-۱$$

۷. فرض کنید یک دکمه روی ماشین‌حساب دارید با نام [S] که با دادن عدد طبیعی n، در خروجی مجموع عددهای طبیعی از ۱ تا n را محاسبه می‌کند و نمایش می‌دهد؛ مثلاً:

۱۰ ⟶ [S] ⟶ ۵۵

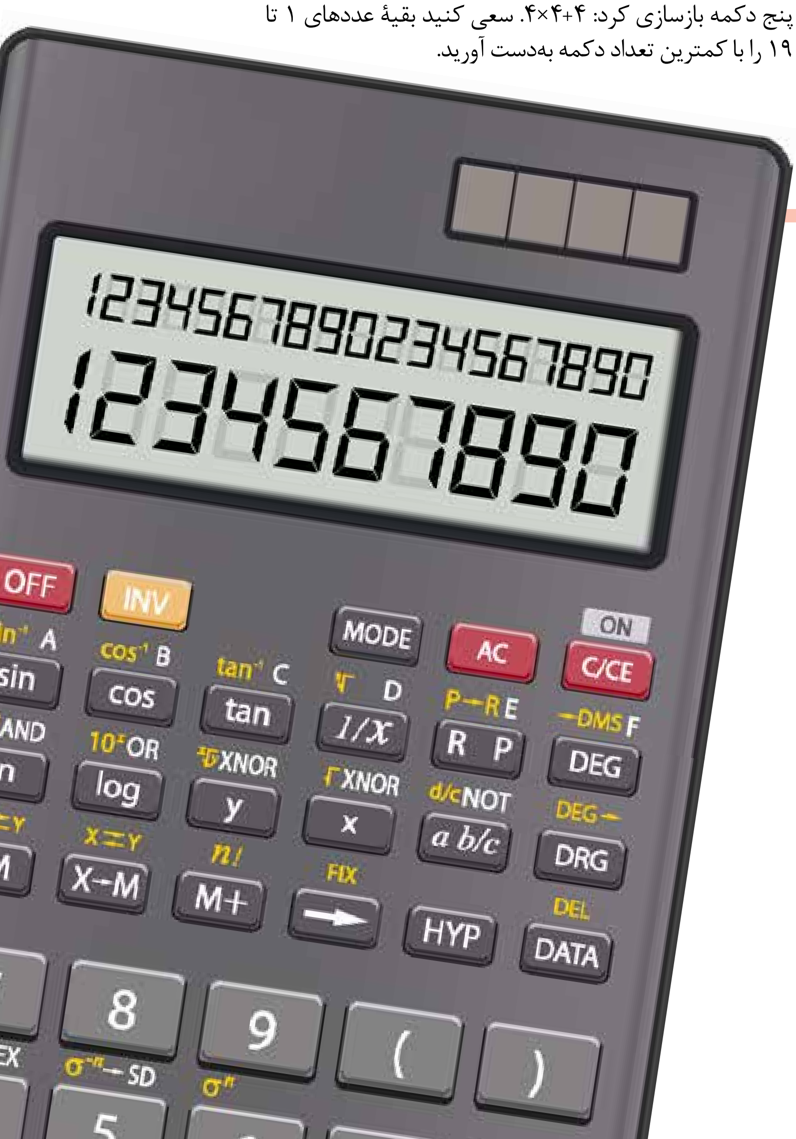
در واقع ۵۵=۱۰+...+۳+۲+۱.

۷-۱. حالا می‌خواهیم به کمــک این دکمه و دکمه‌های دیگر، روشــی برای محاسبهٔ مجموع تمام عددهای طبیعی از m تا n، یعنی حاصل $m+(m+۱)+...+n$ را پیدا کنیم. چه روشــی پیشنهاد می‌کنید؟

۷-۲. علی می‌خواهد مجموع تمام عددهای طبیعی زوج از ۲ تا ۱۰۰ را به کمک این ماشین‌حســاب محاسبه کند. راهی وجود دارد؟

۷-۳. اگر علی می‌خواست مجموع تمام عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ را حساب کند، چه راهی وجود داشت؟

سخن آخر اینکه خیلی وقت‌ها محدودیت‌ها به خلق ایده‌های جدید منجر می‌شوند. شما هم می‌توانید در ذهن خود ماشین‌حساب‌هایی معیوب تجسم کنید و مسئله‌های جدید طراحی کنید. راستی اگر از دکمه‌های رقم‌های ۰ تا ۹ در ماشین‌حساب، تنها دکمه‌های ۱، ۲ و ۴ درست کار کنند، برای رسیدن به عددهای طبیعی ۱ تا ۲۰ (و حتی بزرگ‌تر) حداقل چند بار باید از این سه دکمه و دکمه‌های چهار عمل اصلی استفاده کنید؟ برای مثال، عدد ۲۰ را می‌شود با پنج دکمه بازسازی کرد: ۴+۴×۴. سعی کنید بقیهٔ عددهای ۱ تا ۱۹ را با کمترین تعداد دکمه به‌دست آورید.



سرگرمی‌های عددی

ذهن‌خوانی

عباس قلعه‌پوراقدم

مورد اول

از دوست خود بخواهید کف دست‌های راست و چپ خود دو عدد بنویسد؛ به‌طوری که مجموع دو عدد برابر ۱۳ باشد. حال به او بگویید که عدد دست راست را سه برابر و عدد دست چپ را دو برابر و سپس حاصل‌ضرب‌ها را با هم جمع کند و نتیجه را به شما بگوید. آیا می‌خواهید بدانید که چگونه می‌توانید عددهای نوشته‌شده روی دو دست او را پیدا کنید؟ کافی است عدد ۱۳ را دو برابر کنید تا ۲۶ به دست آید. حال اگر ۲۶ را از نتیجهٔ نهایی که دوست شما به دست آورده است، کم کنید، عدد نوشته‌شده روی دست راست به دست می‌آید که اگر آن را از ۱۳ کم کنید، عدد دست چپ ظاهر خواهد شد.

مثال:

فرض کنیم دوست شما کف دست راست خود عدد ۸ و کف دست چپ خود عدد ۵ را نوشته باشد که مجموعشان ۱۳ می‌شود. حال از او می‌خواهیم که عدد دست راست، یعنی ۸ را سه برابر کند که می‌شود ۲۴. عدد دست چپ خود را هم دو برابر کند که می‌شود ۱۰. سپس آن‌ها را با جمع کند که می‌شود ۳۴. او عدد ۳۴ یعنی نتیجهٔ نهایی را به شما می‌گوید و تنها کاری که شما باید انجام دهید این است که دو برابر ۱۳، یعنی ۲۶ را از ۳۴ کم کنید که می‌شود ۸. حالا به او می‌گویید عدد دست چپش ۸ و دست راستش ۵ است.

راز این ذهن‌خوانی

عدد دست راست را با x و عدد دست چپ را با y نشان می‌دهیم. معلوم است که $x+y=۱۳$. از طرف دیگر، چون از او خواسته‌اید دست راست را سه برابر و چپ را دو برابر و بعد نتایج را جمع کند و جواب را به شما بگوید، اگر فرض کنیم جواب c باشد، معادلهٔ دیگری به‌صورت $۳x+۲y=c$ در دست خواهید داشت. حالا این دو معادله با هم یک دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی تشکیل می‌دهند که با حل آن جواب این معما به دست می‌آید.

$$\begin{cases} x+y=۱۳ \\ ۳x+۲y=c \end{cases}$$

معادلهٔ اول را در عدد ۲- ضرب می‌کنیم. نتیجه چنین می‌شود:

$$\begin{cases} -۲x-۲y=-۲۶ \\ ۳x+۲y=c \end{cases}$$

حال کافی است دو معادله را با هم جمع کنیم تا $x=c-۲۶$ به دست آید. یعنی برای به دست آوردن عدد دست راست باید از نتیجهٔ نهایی عدد ۲۶ را کم کنید.

مورد دوم

فرض کنیم پدر، مادر، برادر یا خواهر یا یکی از دوستانتان برای شما یا خودش چیزی مانند پیراهن، کتاب یا هر چیز دیگری خریده است و شما کنجکاو هستید که قیمت آن را بدانید. یعنی می‌خواهید بدانید که او چند تومان بابت خرید آن چیز پول پرداخت کرده است. از طرف دیگر هم نمی‌خواهید به‌طور مستقیم از او بپرسید. اگر می‌خواهید روشی را یاد بگیرید که در این‌گونه وقت‌ها به دردتان بخورد و تازه معلومات ریاضی خودتان را هم به رخ دیگران کشیده باشید و آن‌ها هم این روش را یاد بگیرند، ادامهٔ مطلب را از دست ندهید. یک برگه کاغذ و یک خودکار به‌طرف مقابل بدهید (اگر طرف مقابل شما برادر یا خواهر کوچک‌ترتان باشد که در دورهٔ ابتدایی درس می‌خواند، این یک تمرین خوب برای چهار عمل اصلی برای او خواهد بود. البته باید از او بخواهید که محاسبه‌ها را با دقت و بدون عجله انجام دهد.) حال از او بخواهید که:

۱. قیمت را دو برابر کند.
۲. به جواب مرحلهٔ یک، دو تا اضافه کند.
۳. حاصل را سه برابر کند.
۴. از حاصل‌ضرب مرحلهٔ سه، ۹ تا کم کند.
۵. حاصل را بر ۶ تقسیم کند.

اکنون از او بخواهید که مقسوم‌علیه این تقسیم آخر را به شما بگوید. در ضمن به او بگویید که اگر مقسوم‌علیه یک عدد اعشاری باشد، یعنی اگر باقی‌مانده داشته باشد، آن را به عدد بالاتر گرد کند و به شما بگوید. در این لحظه شما به او خواهید گفت که این قیمت چیزی است که خریده است.

به مثال زیر توجه کنید:
فرض کنیم قیمت شیء خریده‌شده ۳۵۰۰ تومان باشد. آن را دو برابر می‌کنیم که می‌شود ۷۰۰۰. دو واحد به آن اضافه می‌کنیم که می‌شود ۷۰۰۲. حال آن را سه برابر می‌کنیم که می‌شود ۲۱۰۰۶. در مرحلهٔ چهارم از آن ۹ تا کم می‌کنیم که می‌شود ۲۰۹۹۷. حال ۲۰۹۹۷ را اگر بر ۶ تقسیم کنیم، مقسوم‌علیه ۳۴۹۹ و باقی‌مانده ۳ خواهد شد. پس ۳۴۹۹ را به عدد بالاتر از خودش، یعنی ۳۵۰۰ گرد می‌کنیم و این همان قیمت شیء خریداری‌شده است.

در مثالی دیگر، قیمت شیء خریده‌شده را مثلاً ۱۲۰ در نظر می‌گیریم. دو برابر آن می‌شود ۲۴۰. دو تا به آن می‌افزاییم و می‌شود ۲۴۲. اگر آن را سه برابر کنیم می‌شود ۷۲۶. حالا اگر ۹ تا از آن کم کنیم جواب ۷۱۷ می‌شود. مقسوم‌علیه تقسیم ۷۱۷ بر ۶ برابر ۱۱۹ و باقی‌ماندهٔ آن ۳ می‌شود. پس یک واحد بیشتر از ۱۱۹ همان جواب است.

امیدوارم این دو مورد ذهن‌خوانی را یاد بگیرید و با دوستانتان به اشتراک بگذارید که با این کار لذت و هیجان حاصل دوچندان خواهد شد.

مرتضی مرتضوی

اشتباه‌های ریشه‌ای

همان‌طور که می‌دانید، از شمارهٔ دوم تا شمارهٔ حاضر سعی کرده‌ایم، برخی اشتباه‌ها و بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان را در ریاضیات دورهٔ اول متوسطه شرح دهیم. به این منظور نمونه‌هایی واقعی از پاسخ‌های اشتباه و متنوع دانش‌آموزان را به همراه تحلیل آن‌ها معرفی کرده‌ایم تا اگر احیاناً شما هم دچار چنین خطاهایی هستید، با تأمل و بررسی این اشتباه‌ها، زمینهٔ اصلاح آن‌ها فراهم شود.

در این شماره هم به رادیکال ($\sqrt{\ }$) می‌پردازیم که یکی از مفهوم‌های پرکاربرد و مهم ریاضیات است و حتماً باید درک صحیحی از آن داشته باشید. تقریباً بسیاری از دانش‌آموزان مشکل خاصی با این مفهوم ندارند، اما برخی حتی پس از دورهٔ اول متوسطه هم اشتباه‌ها و بدفهمی‌ها را به همراه خود دارند. برای شناسایی و معرفی اشتباه‌ها در مبحث رادیکال، آزمونی در این زمینه طراحی و در اختیار دانش‌آموزان یک کلاس نهم قرار دادیم. با بررسی پاسخ‌های اشتباه تعدادی از دانش‌آموزان، به مواردی که بین آن‌ها شایع‌تر بود اشاره می‌کنیم.

تعدادی از دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال ۱، مانند نمونهٔ ۱ عمل کردند. در قسمت الف، به نظر می‌رسد دانش‌آموز بدون توجه به مفهوم رادیکال و اینکه حاصل هیچ رادیکالی با فرجهٔ زوج منفی نمی‌شود، از این قاعده استفاده کرده است که: «هرگاه توان و فرجه مساوی باشند، فرجه‌ها را خط می‌زنیم و رادیکال را حذف می‌کنیم»! در حالی که می‌دانیم $\sqrt{a^2} = |a|$ و خروجی قدرمطلق هم همواره نامنفی است. بر این اساس پاسخ درست چنین خواهد بود: $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

در مورد قسمت ب هم چند بدفهمی مشاهده می‌شود. اول اینکه اولویت توان بر ضرب نادیده گرفته شده است. یعنی اگر حل‌کننده می‌دانست که اول باید عدد ۷ را به توان ۲ برساند و بعد منفی را در آن ضرب کند، آن وقت با به دست آمدن ۴۹- در زیر رادیکال به بی‌معنی‌بودن آن و نداشتن جواب پی می‌برد. بدفهمی دوم این است که توان ۲ را که فقط مختص عدد ۷ است، برای ـ هم در نظر گرفته است، در حالی که می‌دانیم، زمانی ـ هم به توان می رسد که داخل پرانتز باشد.

نمونهٔ ۱


۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.
الف) $\sqrt{(-3)^2} = -3$
ب) $\sqrt{-7^2} = \sqrt{-7\times(-7)} = \sqrt{49} = 7$

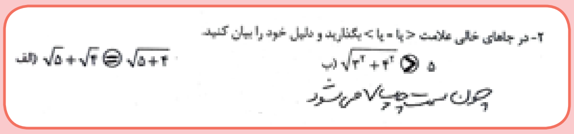
در سؤال دوم نیز برخی از دانش‌آموزان پاسخ نادرستی را نوشته‌اند که در نمونهٔ ۲ آمده است. اشتباه یا بدفهمی حل‌کننده در قسمت الف این بوده که خاصیت ضرب رادیکال‌های دارای فرجه‌های مساوی، یعنی $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$ را، به عمل جمع رادیکال‌ها تعمیم داده است. اما می‌دانیم این خاصیت برای عمل جمع رادیکال‌ها برقرار نیست. این نکته را به وضوح در مثالی بررسی می‌کنیم:

$$\underbrace{\sqrt{9}}_{3} + \underbrace{\sqrt{16}}_{4} \neq \underbrace{\sqrt{9+16} = \sqrt{25}}_{5}$$

$$3 + 4 \neq 5$$

در قسمت ب این سؤال نیز همین بدفهمی به شکل دیگری رخ داده است. در این سؤال نیز به نظر می‌رسد دانش‌آموز مشابه ضرب عبارت‌های زیر رادیکال که می‌توان رادیکال را برای هر کدام تفکیک کرد، یعنی $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$ عمل کرده است. از این طریق حاصل سمت چپ عبارت را این‌طور به دست آورده: $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{3^2}+\sqrt{4^2} = 3+4 = 7$ که پاسخ غلط است.

نمونهٔ ۲


۲- در جاهای خالی علامت < یا = یا > بگذارید و دلیل خود را بیان کنید.
الف) $\sqrt{5}+\sqrt{4} = \sqrt{5+4}$
ب) $5 > \sqrt{3^2+4^2}$
چون سمت چپ √ می‌شود

در سؤال سوم هم نوع دیگری از بدفهمی بین کسانی که مانند نمونهٔ ۳ پاسخ داده‌اند، وجود دارد. می‌دانیم که چون زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، یا به عبارت دیگر منفی نباشد، این تساوی همیشه برقرار نیست و باید شرط $x \geq 0$ را برای آن در نظر گرفت تا تساوی برقرار باشد.

نمونهٔ ۳


۳. آیا تساوی $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2}$ همیشه درست است؟ توضیح دهید. بله، هر دو برابر x می‌شوند.

امیدواریم با توجه به این نکته‌های ریز، دقیق و بسیار مهم شاهد بروز چنین اشتباه‌هایی در عملکرد هیچ کدام از دانش‌آموزان نباشیم.

کاغذتا

ستارۀ نینجای دورو

برای مشاهدۀ مراحل ساخت، رمزینه را پویش کنید.

فکرهای ثانیه‌ای

تصویرگر: معین صدقی