برهان ریاضی

ISSN: 1735-4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

۳

دورهٔ بیست و هفتم
شمارهٔ ۱۰۵
آذر ۱۳۹۶
۴۸ صفحه
۱۱۰۰۰ ریال

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

بوعلی سینا

احسان یارمحمدی

«آلبوم ریاضیات» ستونی در مجلهٔ ریاضی رشد برهان دورهٔ دوم متوسطه است که به معرفی و ارائهٔ تمبرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، بناهای یادبود و... که به افتخار ریاضی‌دانان ایران و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد و هدف آن آشنا ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان با جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دان‌ها به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانهٔ انسان‌هاست. به این منظور در هر شماره، ابتدا سطرهایی دربارهٔ ریاضی‌دان موردنظر ارائه می‌کنیم و سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم.

ابوعلی حسین بن عبدالله بن حسن بن علی بن سینا، مشهور به «ابوعلی‌سینا»، «ابن‌سینا»، و «پورسینا» زادهٔ ۳۵۹ هـ.ش در بخارا و در گذشتهٔ ۲ تیر ۴۱۶ در همدان، یکی از نام‌دارترین دانشمندان ایران‌زمین و جهان است که در ریاضیات، ستاره‌شناسی، فلسفه و پزشکی شهرهٔ آفاق بود و با دو کتاب گران‌سنگ خود به نام‌های «القانون فی الطب» و «شفا»، خدمت بی‌شماری را به جامعهٔ بشری عرضه داشته است. موضوع این شمارهٔ آلبوم ریاضیات ابوعلی‌سینا است. امیدواریم ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان با بررسی محتوای این مقاله به جایگاه برجستهٔ بوعلی‌سینا در فرهنگ ملل دیگر پی ببرند.

۱

۲

۳

۴


۵

۶

۷

۱. تمبر منتشر شده در الجزایر در سال ۱۹۸۰
۲. تمبر منتشر شده در جمهوری دموکراتیک آلمان (آلمان‌شرقی) در سال ۱۹۵۲
۳. تمبر منتشر شده در فرانسه در سال ۲۰۰۵
۴. تمبر منتشر شده در جمهوری مالی در سال ۱۹۸۰
۵. تمبر منتشر شده در جمهوری تونس در سال ۱۹۸۰
۶. تمبر منتشر شده در کویت در سال ۱۹۶۹
۷. تمبر منتشر شده در لیبی در سال ۱۹۸۰

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وهفتم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۱۰۵
■ آذر ۱۳۹۶
■ شمارهٔ ۳
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۱۰۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی‌پور
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
شمارگان:
۹۰۰۰ نسخه

حرف اول

آموزشی

ریاضیات در سینمای جهان

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

پرسش‌های پیکارجو!

با مخاطبان

پاسخ‌ها

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

در کلاس درس ریاضی

در ساختمان‌سازی و معماری اولین و شاید مهم‌ترین پارامتری که مدّنظر مهندسان قرار می‌گیرد، مقاومت زمین و به تبع آن استفاده از بهترین مصالح و ستون‌ها برای ایجاد پایه‌ای قوی و مقاوم برای ساختمان است. اگر پایه و اساس درست و محکم باشد، می‌توان به بقیه موضوع‌ها و ضروریات دیگر با خیال راحت و آسوده پرداخت. در امر یادگیری و علم‌آموزی نیز چنین است، یعنی اگر بخواهیم با خیال راحت به امر یاددهی - یادگیری بپردازیم، باید از پایه و اساسِ قوی و مطمئن برخوردار باشیم و در این حالت است که می‌توان روی پایه‌ها و ستون‌های محکم بقیه علم را بنا کرد.

مثلاً در آموزش علم ریاضی، اگر شما در مفهوم اتحادها مشکل داشته باشید و از پایه‌ای قوی در اتحادها برخوردار نباشید، چگونه می‌توانید کاربردهای آن‌ها را در تجزیه و در حل معادلات، یاد بگیرید؟!

همهٔ معلمان و دبیران ریاضی برای شروع تدریس یک موضوع یا مبحث ریاضی به‌طور حتم به مبانی و پیش‌نیازهای آن موضوع می‌پردازند و اینجا همان جایی است که شما باید دقت و تمرکز مضاعف به‌کار ببرید تا این پایه‌ها و مبانی را خوب یاد بگیرید و بتوانید بقیهٔ موارد مربوط به آن مبحث را با خیال راحت و اطمینان فرا بگیرید.

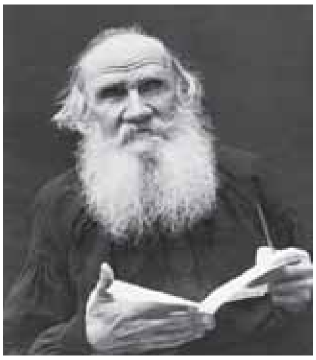
یکی از توصیه‌های من به شما در کلاس درس ریاضی این است که تمرکز داشته باشید و با هوشیاری کامل، به محض اینکه پیش‌نیازها و مبانی یک موضوع درسی از طرف دبیر ریاضی‌تان مطرح می‌شود، به دقت آن مبانی را یاد بگیرید و روی آن‌ها تمرین کنید.

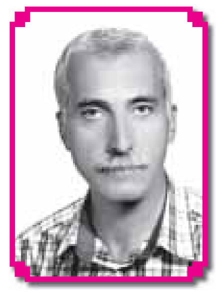
حمیدرضا امیری
سردبیر

چقدر زمین می‌خواهی؟!

اشاره

اگر اهل مطالعه و علاقه‌مند به داستان و رمان باشید، احتمالاً با نام *لئون تولستوی*، نویسندهٔ بزرگ روسی (۱۹۱۰-۱۸۲۸)، آشنا هستید و رمان‌های معروف او، «جنگ و صلح» و «آنا کارنینا» را می‌شناسید و شاید هم خوانده باشید. اما تولستوی علاوه بر ادبیات، در تمام عمر به ریاضیات عملی و ســـرگرمی‌های ریاضی علاقهٔ خاصی داشت و گاه مسائلی هم طرح می‌کرد. به‌خصوص در دوره‌ای که برای کمک به مردم روستاهای کشورش دست به کار تأسیس مدارس روستایی زد و کتاب الفبا را برای آموزش آن‌ها نوشت و در آن مسئله‌هایی به عنوان تفریح و اندیشیدن مطرح کرد. یکی از مسائل این کتاب چنین است: «از بین سه شکل مربع، شش ضلعی و دایره با محیط ثابت، کدام یک دارای مساحت بیشتری است؟»





حسین کریمی

پیـــش از پرداختن به مســـئلهٔ فوق، بد نیســـت به یکی از داستان‌های کوتاه تولســـتوی به نام «یک آدم چقدر زمین می‌خواهد؟» اشـــاره کنیم. این داستان کوتـــاه و بســـیار زیبا بـــا ترجمهٔ **وحید نیکخواه آزاد**، نخســـتین‌بار در ســـال ۱۳۵۹، توســـط مجلهٔ «کیهان بچه‌ها» منتشر شـــد و مطالعهٔ آن را (که نسخه الکترونیکـــی آن را در اینترنت می‌توانید بیابید) به شـــما توصیه می‌کنیم. در این داستان دهقانی فقیر به نام **پاهوم** با تلاش زیاد صاحب زمین می‌شـــود و هر چند وقت یک‌بار زمینش را گســـترش می‌دهد. رفته‌رفته طمع داشتن زمین بزرگ‌تر او را به مهاجرت به شـــهرهای دورتر می‌کشاند تا در نهایت به جایی می‌رود که در آنجا زمین رایگان است و او می‌تواند با حرکت کردن از یک نقطه و بازگشـــت به همان‌جا، محیطـــی را طی کند و تمام زمین‌هـــای محصور در آن محیط به خودش تعلق گیرد! فقط مدت زمان حرکت محدود اســـت به زمان طلوع تا غروب خورشید. شهود ریاضی در نگاه تولســـتوی روشن است و احتمالاً آن مسئله را هم با نگاه به همین داستان طرح کرده است.

چون زمان حرکت محدود اســـت، پس محیط زمینی که پاهوم می‌تواند محصور کند هم محدود و ثابت است. اکنون سؤال این است: «پاهوم روی چه مســـیری حرکت کند تا زمینش حداکثر مساحت را داشته باشد؟! مربع، شش‌ضلعی، یا دایره؟» به زبان ریاضی: از بین سه شکل مربع، شش‌ضلعی و دایره با محیط‌های برابر، کدام‌یک مساحت بیشتری دارد؟ پاسخ به این سؤال چندان دشوار نیست. اگر محیط هر ســـه شکل مساوی مقدار معین L باشد، در این صورت با فرض اینکه طول ضلع مربع a باشد، $4a=L$ و در نتیجه $a=\frac{L}{4}$ و مساحت مربع نیز برابر است با:

$$S=a^2=\frac{L^2}{16}$$

در مورد شش‌ضلعی داریم:

$$6a=L\Rightarrow a=\frac{L}{6},S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}L^2}{24}$$

و در مورد دایره:

$$2\pi r=L\Rightarrow r=\frac{L}{2\pi},S=\pi r^2=\frac{L^2}{4\pi}$$

از مقایسه این سه مقدار به سادگی متوجه می‌شویم که مساحت دایره از شـــش‌ضلعی بیشتر و مساحت شش‌ضلعی هم از مربع بیشتر اســـت. به‌طور شهودی احساس می‌شود، اگر شـــکل بسته به‌صورت چندضلعی منتظم با تعداد ضلع‌های بیشـــتری باشـــد، مساحت آن بیشـــتر می‌شود. لذا هرچه به دایره نزدیک‌تر شود، مساحت بیشتری خواهد داشت.

اگرچه در داســـتان تولســـتوی طمع پاهوم او را گرفتار کرد و در نهایـــت چند دقیقـــه قبل از غروب آفتـــاب، در پایان راه‌پیمایی

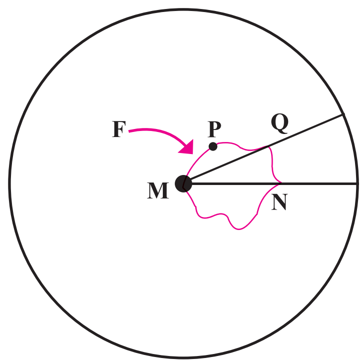
از بین همهٔ شکل‌های بستهٔ هندسی با محیط ثابت، دایره دارای بیشترین مساحت است

طولانی‌اش (که برای زیاد کردن زمینش مرتباً آن را بیشتر می‌کرد!) جان به جان آفرین تسلیم کرد، اما واقعیت این است که او برای آنکه مساحت زمینش را حداکثر کند، باید مسیری دایره شکل را می‌پیمود! و این یک قضیهٔ معروف ریاضی موسوم به «قضیهٔ هم پیرامونی» است که می‌گوید:

از بین همهٔ شکل‌های بستهٔ هندسی با محیط ثابت، دایره دارای بیشترین مساحت است.

در اینجا می‌کوشیم با زبانی ساده اثباتی مقدماتی از این قضیه ارائه دهیم. ابتدا باید به پاسخ این سؤال بپردازیم که: چرا منحنی‌های بسته با محیط معلوم L، دارای مساحت محدود هستند؟

نقطهٔ M را روی منحنی بستهٔ F که طول محیط آن L است در نظر می‌گیریم و دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{L}{۲}$ رسم می‌کنیم (شکل ۱).



شکل ۱.

نقطهٔ N را روی منحنی بسته چنان اختیار می‌کنیم که طول کمان MN برابر با نصف محیط F، یعنی برابر $\frac{L}{۲}$ باشد. وتر MN از شکل F کوچک‌تر از کمان MN است؛ یعنی: $MN < \frac{L}{۲}$. بنابراین N درون دایره قرار می‌گیرد.

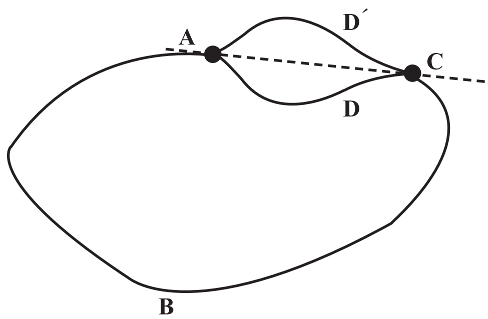
نقطهٔ دلخواه Q را روی شکل F در نظر می‌گیریم. چون وتر MQ کوچک‌تر از کمان MPQ است و کمان MPQ نیز کوچک‌تر از نصف محیط است، بنابراین: $MQ < \frac{L}{۲}$. یعنی Q نیز درون دایره $(M, \frac{L}{۲})$ واقع است. پس کل شکل F با محیط L در درون دایره‌ای به شعاع $\frac{L}{۲}$ واقع می‌باشد و مساحت آن همواره از $\pi(\frac{L}{۲})^۲$ کوچک‌تر است.

اکنون قبل از اثبات درستی نظریهٔ حدس زده شده، به یک تعریف و اثبات چند لم می‌پردازیم.

تعریف: یک شکل را هنگامی «شکل ماکزی‌مم» گوییم که بین شکل‌های هم محیط با خود دارای بیشترین سطح باشد.

لم ۱. هر شکل ماکزی‌مم که محیط آن داده شده، محدب است. نشان می‌دهیم که اگر شکل ماکزی‌مم مقعر باشد، به تناقض برمی‌خوریم.

منحنی بسته و مقعر ABCDA را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم این شکل ماکزی‌مم است (شکل ۲).



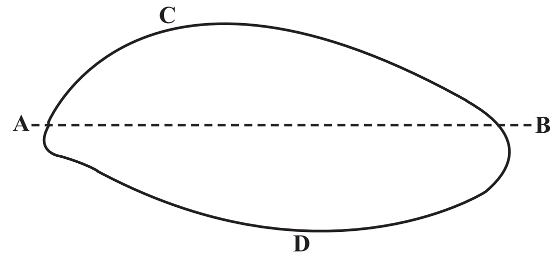
شکل ۲.

قرینهٔ کمان ADC را نسبت به خط AC، کمان CD´A می‌نامیم. محیط هر دو منحنی بسته برابرند، اما مساحت منحنی ABCD´A بیشتر از مساحت منحنی ABCDA است که این مغایر با ماکزی‌مم بودن منحنی بسته و مقعر ABCDA است. بنابراین فرض مقعر بودن «شکل ماکزی‌مم» باطل است.

لم ۲. اگر منحنی F، یک شکل ماکزی‌مم باشد، هر وتری که محیط F را نصف کند، مساحت داخل این منحنی را نیز نصف می‌کند.

منحنی بسته F را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که این منحنی ماکزی‌مم است (یعنی F شکلی است که مساحتش از مساحت تمام منحنی‌های بسته‌ای که محیطشان برابر محیط منحنی F است، بیشتر است). روی منحنی F نقطهٔ دلخواه A را در نظر می‌گیریم. روی این منحنی نقطهٔ یکتای B وجود دارد، به‌طوری‌که وتر AB محیط منحنی را نصف می‌کند (شکل ۳). یعنی

طول کمان ACB برابر طول کمان ADB است. حکم این است که مساحت قطعهٔ ADB برابر مساحت قطعه ACB است. برای اثبات این حکم، ثابت می‌کنیم که اگر خلاف آن را بپذیریم به تناقض می‌رسیم.



شکل ۳.

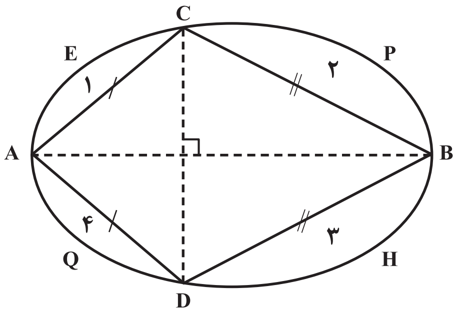
به این منظور فرض می‌کنیم که مساحت قطعهٔ ADB بزرگ‌تر از مساحت قطعهٔ ACB است. قرینهٔ قطعهٔ ADB را نسبت به خط AB می‌سازیم و آن را AD´B می‌نامیم. محیط منحنی ADBD´A حاصل از اجتماع دو کمان ADB و AD´B با محیط منحنی F مساوی است، اما مساحت آن‌که دو برابر مساحت قطعهٔ ADB است، بیش از مساحت F است که نشان می‌دهد، منحنی F ماکزی‌مم نیست. اگر بپذیریم که مساحت قطعهٔ ADB کوچک‌تر از مساحت قطعهٔ ACB است، با به‌کارگیری همان شیوه استدلال قید شده در بالا به تناقض می‌رسیم.

از لم ۲ علاوه بر نتیجهٔ «هر وتری که محیط یک شکل ماکزی‌مم را نصف کند، مساحت آن را نیز نصف می‌کند» می‌توان نتیجهٔ دیگری نیز گرفت؛ اینکه: «شکل ماکزی‌مم دارای محور تقارن است.» چرا که اگر قرینهٔ نصف شکل ماکزی‌مم F را نسبت به آن وتر رسم کنیم، به شکل F´ می‌رسیم که دارای محور تقارن و هم‌محیط و هم‌مساحت با F است. پس می‌توان نتیجه گرفت که اگر F یک منحنی بستهٔ ماکزی‌مم باشد، قطعاً محور تقارن خواهد داشت.

لم ۳. مساحت مثلث ABC با فرض ثابت بودن اندازه‌های AC و BC در صورتی به حداکثر می‌رسد که مثلث در رأس C، قائمه باشد.

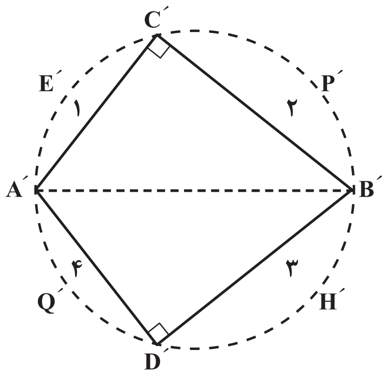
اثبات: با توجه به فرمول محاسبهٔ مساحت مثلث، یعنی $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\times BC\times \sin\hat{C}$، اگر AC و BC ثابت باشند، حداکثر S در صورتی رخ می‌دهد که $\sin\hat{C}$ به حداکثر برسد؛ یعنی $\hat{C}=90^\circ$.

قضیه: بین تمام شکل‌های سطح که دارای محیط برابرند، دایره بزرگ‌ترین مساحت را دارد. فرض می‌کنیم منحنی بستهٔ شکل ۴ همان شکل ماکزی‌مم F با محور تقارن AB است. نقطهٔ دلخواه C را اختیار می‌کنیم و قرینهٔ آن را نسبت به AB، D می‌نامیم. ادعا می‌کنیم چهارضلعی ACBD در رأس‌های C و D قائمه‌اند.



شکل ۴.

برای اثبات این حکم ثابت می‌کنیم که اگر خلاف آن را بپذیریم، به تناقض می‌رسیم. اگر هر دو زاویهٔ ACB و ADB قائمه نباشند، آن‌گاه چهارضلعی A´C´B´D´ را طوری می‌سازیم که زاویه‌های C´ و D´ قائمه و اضلاع A´C´، C´B´، B´D´ و D´A´ به ترتیب با AC، CB، BD و DA برابر باشند. حال روی اضلاع، چهارضلعی A´C´B´D´ چهار کمان A´E´C´، C´P´B´، B´H´D´ و D´Q´A´ را به ترتیب مساوی (قابل انطباق) با کمان‌های AEC، CPB، BHD و DQA رسم می‌کنیم و منحنی جدید را F´ می‌نامیم.



شکل ۵.

منحنی F´ شامل ۵ قطعه است:

۱. قطعهٔ A´E´C´ که قابل انطباق با قطعهٔ AEC از F است.

۲. قطعهٔ C´P´B´ که قابل انطباق با قطعهٔ CPB از F است.

۳. قطعهٔ C´E´D´ که قابل انطباق با قطعهٔ CED از F است.

۴. قطعهٔ D´Q´A´ که قابل انطباق با قطعهٔ DQA از F است.

۵. چهارضلعی A´C´B´D´ که دارای مساحتی بزرگ‌تر از مساحت چهارضلعی ACBD از F است ($S_{B'A'D'}>S_{BDA}, S_{A'C'B'}>S_{ACB}$).

پس مساحت F´ بزرگ‌تر از مساحت F است که خلاف ماکزی‌مم بودن شکل F است. در نتیجه فرض غیرقائمه بودن زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ باطل است. بنابراین هر وتری که محیط منحنی ماکزی‌مم F را به دو کمان هم طول بخش کند، از تمامی نقاط منحنی F به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. پس منحنی F که شکلی ماکزی‌مم است، در واقع دایره است.

مدلِ مثلث خیام در بازی پین‌بال

مریم شاه‌محمدی
مدرس ریاضی شهر تهران

اشاره

امروزه، مدل‌های ریاضی و فرایند مدل‌سازی ریاضی، به‌عنوان یک نوآوری و روش خلاق در امر یاددهی و یادگیری مطرح است. از دیدگاه آموزشی، ارائه‌های فعال و مدل‌های پویا، چالشی بزرگ محسوب می‌شوند. بنابراین موضوع مطالعات متعددی هستند که تأثیر مثبت در یادگیری مفاهیم ریاضی را تأیید و به‌طور خاص، ارتباط مفاهیم ریاضی با زندگی واقعی را تثبیت می‌کنند. در عصر حاضر که شاهد رشد لحظه به لحظهٔ فناوری‌های الکترونیکی هستیم و بازی‌های رایانه‌ای به مصداق یکی از جذاب‌ترین محصولات این عصر، مدت زمان طولانی از اوقات فراغت افراد را به خود مشغول ساخته است، رسالت آموزش‌های غیررسمی در جهت واکاوی اصول ریاضی حاکم بر این‌گونه بازی‌ها و ضمنی‌سازی یادگیری در قالب تفریح و سرگرمی بیش از پیش آشکار شده است. هدف از نگارش مقالهٔ حاضر بیان یک نمونهٔ ساده از مدل‌سازی قوانین ریاضی در آموزش‌های مدرسه‌ای است. لذا روند یک بازی رایانه‌ای (بازی پین‌بال) با یک مدل پایه، بیان شده، و چگونگی ارتباط آن با قانونمندی‌های ریاضی، نظیر الگوها و مثلث خیام، مطرح و مورد بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: مدل، الگوهای ریاضی، مثلث خیام، بازی رایانه‌ای، پین‌بال

مقدمه

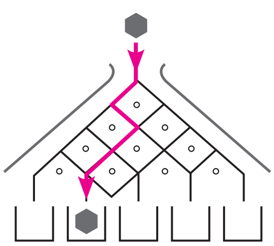
بی‌شک طرف‌داران بازی‌های اندرویدی یا حتی رایانه‌ای به این موضوع واقف‌اند که بازی پین‌بال -- یکی از پرطرف‌دارترین بازی‌های روز دنیا به‌شمار می‌رود. پین‌بال بازی سرگرم‌کننده و جذابی برای رایانه و تبلت است و با مراحل مهیج خود می‌تواند ساعت‌ها اوقات فراغت کاربران را پر کند. در این بازی، کاربر باید مراقب توپ خود باشد و آن را به قسمت‌های متفاوت به گونه‌ای پرتاب کند که از سطح بازی خارج نشود. همچنین باید تلاش خود را به‌کار گیرد تا توپ از دور خارج نشود و بتواند امتیاز بیشتری کسب کند (شکل ۱).

شکل ۱. نمایش بازی رایانه‌ای پین‌بال

یک مدل پایه

مدلی که در شکل ۲ نشان داده شده، نمونهٔ ساده‌ای از ماشین پین‌بال است که به سادگی و با داشتن یک تختهٔ چوبی، یک مهره یا تیلهٔ شیشه‌ای، ۱۰ عدد گل‌میخ و ۵ عدد جام، می‌توان آن را تشکیل داد. گل میخ‌ها به ترتیب یک الگوی مثلثی در تخته قرار داده شده‌اند. یک گل‌میخ در بالاترین سطر، دو گل میخ در سطر دوم و سه تا در سطر سوم و به‌همین ترتیب ... و فضای کافی برای اینکه تیله بتواند بین آن‌ها حرکت کند.

برای شروع، تخته را به اندازهٔ زاویه کوچکی به حالت شیب‌دار نگه می‌داریم و تیله را رها می‌کنیم، به طوری که به بالای اولین گل میخ اصابت کند و وسط بایستد.



شکل ۲. مدل‌سازی پایه برای پین‌بال

تیله برای انحراف به چپ یا راست گل میخ اول، شانس‌های برابر خواهد داشت و بازی با انحراف تیله به سمت راست یا چپ در سطر دوم و سطرهای بعدی ادامه می‌یابد، تا اینکه نهایتاً به یکی از جام‌های انتهایی هدایت شود. برای اینکه شانس حرکت مهره به سمت چپ و راست در مراحل بازی یکسان باشد، گاهی لازم خواهد شد که تخته را کمی منحرف کنیم. بدین ترتیب با حرکت کردن تیله بین یک پین در هر یک از چهار ردیف پین‌ها، یک مسیر تصادفی طی خواهد شد. تمامی مسیرهای متفاوت و ممکن با خط‌های خاکستری و یک مسیر جزئی و خاص به وسیلهٔ خط قرمز نشان داده شده است (شکل ۲).

در مدل حاضر، مسیر مشخص شده را با علامت «LRLL» توصیف می‌کنیم. به این معنی که تیله از سمت چپ اولین پین منحرف شده و در جهت راست، حول پین سطر دوم حرکت کرده و سمت چپ پین‌های سطر سوم و چهارم مسیر خود را ادامه داده است.

مسئلهٔ ۱. چه تعداد مسیر متفاوت به‌وسیلهٔ این ماشین پین‌بال قابل نمایش و طی کردن است؟

پاسخ: اگر تمام حالت‌های ممکن با روش فوق علامت‌گذاری شود، پاسخ سؤال که ۱۶ مسیر مختلف است، مشخص خواهد شد:
«LLLL» و «LLLR» و «LLRL» و «LRLL» و «RLLL» و «LLRR» و «LRRL» و «RRLL» و «RLLR» و «RLRL» و «LRLR» و «LRRR» و «RRRL» و «RRLR» و «RLRR» و «RRRR».

مسئلهٔ ۲. تعداد مسیرهایی که در انتها به یک جام منتهی می‌شوند، کدام است؟

پاسخ: برای پاسخ‌گویی به این سؤال کافی است فهرست مرتب شدهٔ زیر، براساس اینکه هر مسیر شامل چه تعداد تغییر جهت به سمت راست است، در نظر گرفته شود:

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۰

(تیله به چپ‌ترین جام هدایت خواهد شد و تنها یک مسیر وجود خواهد داشت.)

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۱

(تیله به دومین جام هدایت خواهد شد و چهار مسیر وجود خواهد داشت.)

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۲

(تیله به سومین جام هدایت خواهد شد شش مسیر وجود خواهد داشت.)

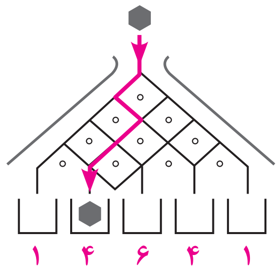
تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۳

(تیله به چهارمین جام هدایت خواهد شد و چهار مسیر وجود خواهد داشت.)

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۴

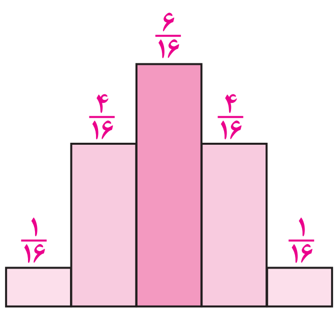
(تیله به راست‌ترین جام هدایت خواهد شد و یک مسیر وجود خواهد داشت.)

این نتایج در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳. تعداد مسیرهای منتهی به هر جام

بدین ترتیب می‌توان در هر حالت، احتمال هدایت‌شدن تیله به هر یک از جام‌ها را نیز محاسبه کرد که در مدل مذکور، نمودار توزیع احتمال نرمال است (شکل ۴).

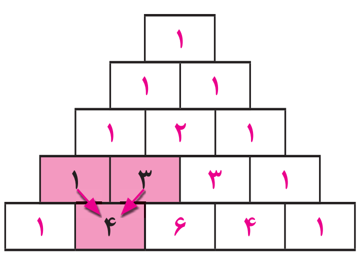


شکل ۴. نمایش توزیع احتمال در مدل

مثلث خیام

مثلث خیام مثلثی عددی است که مانند بسیاری از جدول‌های عددی دیگر پیشینهٔ کهنی دارد (شکل ۵). قبل از هر چیز باید در نظر داشت که مثلث خیام به‌طور پیوسته ادامه می‌یابد و در مدل پایه‌ای مذکور، فقط پنج سطر اول آن نشان داده شده است.

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱



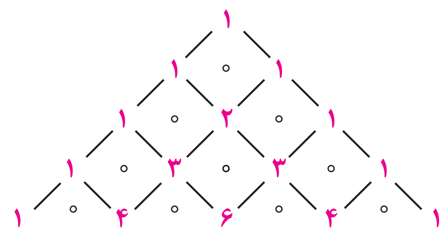
شکل ۵. نمایش مثلث خیام

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در مثلث خیام، در هر سطر، عدد ابتدا و انتها برابر یک اســـت و اعداد میانی از مجموع دو عدد راست و چپ آن در سطر قبل به‌دست می‌آیند.

ارتباط مدل پین‌بال و مثلث خیام

اگر مثلث خیام و ماشین پین‌بال (مدل) با یکدیگر مورد بررسی قرار گیرند، ارتباط بین آن‌ها به سادگی مشخص می‌شود. در واقع هر عدد در مثلث خیام نشان‌دهندهٔ تعداد مسیرهای متمایزی است که می‌توان تیله را به همان نقطه در ماشین پین‌بال هدایت کرد (شکل۶).

باید توجه داشـــت که مسیر تیله در بازی، همواره رو به پایین در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۶. ارتباط اعداد مثلث خیام پاسکال و مدل پین‌بال

از طرف دیگر، عددهای مثلث خیام (شکل ۷) را با استفاده از تابع ترکیب و آنالیز ترکیبی نیز می‌توان به‌دست آورد که فرمول این تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شـــود و تعداد انتخاب‌های m شیء از n شیء متمایز است:

$$ {}_{n}C_{m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (۱) $$

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

$$\Downarrow$$

$${}_{۰}C_{۰}$$

$${}_{۱}C_{۰} \quad {}_{۱}C_{۱}$$

$${}_{۲}C_{۰} \quad {}_{۲}C_{۱} \quad {}_{۲}C_{۲}$$

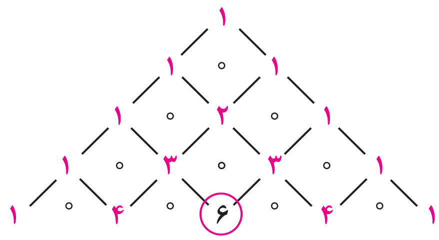
$${}_{۳}C_{۰} \quad {}_{۳}C_{۱} \quad {}_{۳}C_{۲} \quad {}_{۳}C_{۳}$$

$${}_{۴}C_{۰} \quad {}_{۴}C_{۱} \quad {}_{۴}C_{۲} \quad {}_{۴}C_{۳} \quad {}_{۴}C_{۴}$$

شکل ۷. نمایش اعداد مثلث خیام پاسکال با استفاده از ترکیب

در مدل مطرح شده از بازی پین‌بال، هر یک از مقادیر ممکن تابع ترکیب نیز قابل نمایش است. به عنوان نمونه، تعداد مسیرهای ممکن برای هدایت تیله در بازی پین‌بال به‌طوری که از چهار سطر بگذرد و دو تغییر جهت به سمت راست داشته باشد، برابر ۶ است.

$$ {}_{۴}C_{۲} = \binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!(۴-۲)!} = ۶ \qquad (۲) $$



$$\Downarrow$$

$${}_{۰}C_{۰}$$

$${}_{۱}C_{۰} \quad {}_{۱}C_{۱}$$

$${}_{۲}C_{۰} \quad {}_{۲}C_{۱} \quad {}_{۲}C_{۲}$$

$${}_{۳}C_{۰} \quad {}_{۳}C_{۱} \quad {}_{۳}C_{۲} \quad {}_{۳}C_{۳}$$

$${}_{۴}C_{۰} \quad {}_{۴}C_{۱} \quad {}_{۴}C_{۲} \quad {}_{۴}C_{۳} \quad {}_{۴}C_{۴}$$

شکل ۸. ارتباط عددهای مثلث خیام تابع ترکیب و مدل پین‌بال

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مـــدل ارائه شـــده یـــک مـــدل ســـاده از نمایش اعـــداد مثلث خیـــام اســـت که بـــه راحتی قابـــل تعمیـــم دادن از یـــک مرحله بـــه مرحلهٔ بعدی اســـت. الگـــوی مثلثـــی چیدمان پیـــن (گره)ها و ساختار شبکه‌ای مدل به گونه‌ای است که هم در آموزش مدرسه‌ای می‌توان از آن استفاده کرد و هم در برنامه‌نویسی‌های پیشرفتهٔ رایانه‌ای قابل تنظیم و طراحی است. بی‌شک، نمایش و آنالیز مدل‌های ریاضی از این دست، در تفهیم مفاهیم اولیه و پایه نقش بسزایی خواهد داشت و آموزش ریاضی را از حالت انتزاعی به سمت پویایی سوق خواهد داد.

*منابع

1. Hopkins, J., Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea, New Ed edition, 2002.
2. Colledge, T., Pascal's Triangle: A Teacher's Guide with Blackline Masters, Tarquin Publications UK, 1997., pp. 40.
3. D. Seymour, visual patterns in pascal's triangle, Dale Seymour publications, Palo Alto, CA, 1986.
4. www.math centre.ac.uk, Pascal's triangle and the binomial theorem, mc-ty-pascal-2009.

هوشنگ شرقی

جدول زیر جدول عددی کوچک (۴×۴) است که هیچ خانهٔ سیاه ندارد. تمام عناصر جدول عددهای چهاررقمی هستند که از چپ به راست (افقی) یا از بالا به پایین مطابق شرح باید نوشته شوند. پس از حل کامل جدول، عددهای روی دو قطر جدول (از بالا به پایین) دو عدد چهار رقمی را می‌دهند که به ترتیب سال‌های تولد و وفات یک ریاضی‌دان بنام ایرانی براساس تقویم میلادی است. نام این ریاضی‌دان و شرح مختصری از زندگی او را برای ما ارسال کنید تا به قید قرعه جایزه‌ای نفیس تقدیمتان شود!

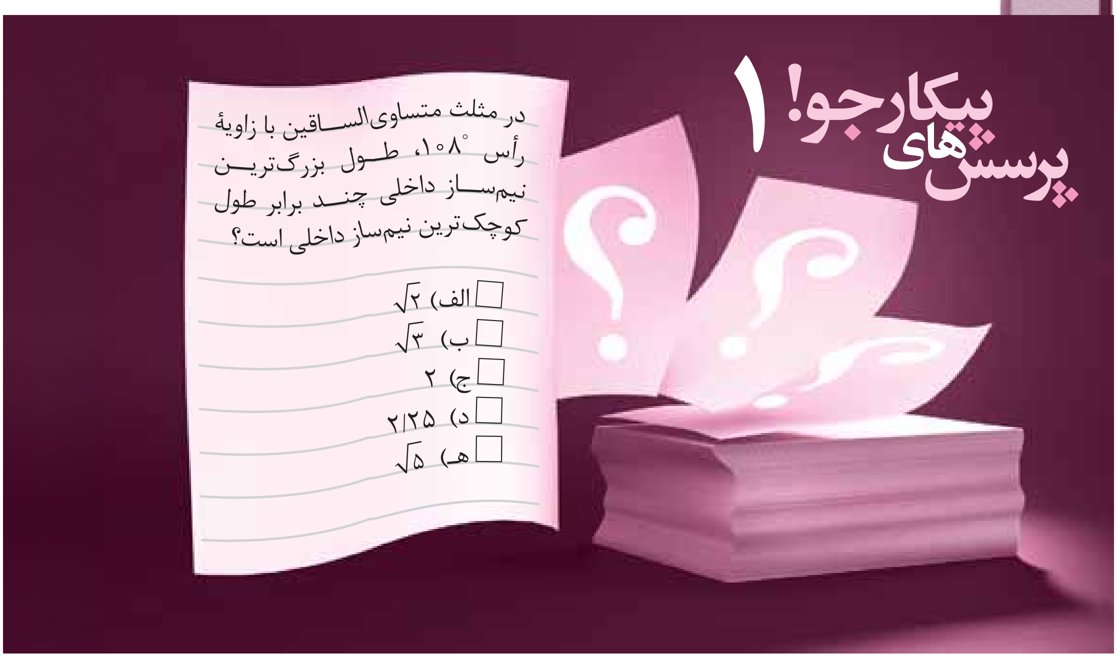
افقی:

۱. مربع یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از سی و کوچک‌تر از چهل.
۲. عدد طبیعی که تنها دو عامل اول دارد که یکی از آن‌ها بین چهل و پنجاه است.
۳. حاصل‌ضرب دو عدد اول، که یکی از آن‌ها یک رقمی و دیگری اندکی بیش از مساحت مربعی است که محیط آن ۸۴ واحد است.
۴. صد برابر یک عدد اول.

عمودی:

۱. در این سال **بلز پاسکال**، ریاضی‌دان بنام و فیزیک‌دان فرانسوی، دیده به جهان گشود.
۲. چهارمین عدد اول بزرگ‌تر از ۵۰۰۰.
۳. عدد مساحت مستطیلی که محیط آن ۲۵۴ واحد و طول آن ۸۷ واحد بیشتر از عرض آن است.
۴. در این سال **رنه دکارت**، ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی، درگذشت.

	۱	۲	۳	۴
۱				
۲				
۳				
۴				



سرزمین ستاره‌ها: ابوعلی سینا

۲۷۹ اثر به‌یادگار

● **کارگردان:** علی‌محمد قاسمی و اعظم نجفیان ● **تهیه‌کننده:** هومن مرادی کرمانی ● **تصویربردار:** علی‌محمد قاسمی ● **تدوین اولیه:** طاهره حسینی
● **تدوین نهایی:** علی‌محمد قاسمی ● **پژوهشگر:** محبوبه کلانتری ● **طراحی و ترکیب صدا و موسیقی:** بهروز شهامت ● **انتخاب تصاویر آرشیوی:** اعظم نجفیان
● **تصویربرداران بخش مصاحبه:** مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان ● **گوینده و راوی:** محمود نظرعلیان
■ تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

احسان یارمحمدی

اشاره

***ابوعلی حسین بن عبدالله بن حسن بن علی بن سینا*، مشهور به ابوعلی‌سینا، ابن‌سینا و پورسینا، زاده در بخارا و در گذشته در همدان، یکی از برجسته‌ترین دانشمندان، پزشکان، فیلسوفان و ریاضی‌دانان ایران‌زمین است. در این مقاله با معرفی مستند *ابوعلی‌سینا* از مجموعهٔ مستند «سرزمین ستاره‌ها»، قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران‌زمین آشنا سازیم. به‌همین دلیل نخست به ارائهٔ سطرهایی از کتاب «*ریاضی‌دانان ایرانی: از خوارزمی تا ابن‌سینا*»، به قلم زنده‌یاد ابوالقاسم قربانی (۱۲۹۰–۱۳۸۰) که چاپ نخست آن در سال ۱۳۵۰ در «انتشارات مدرسهٔ عالی دختران ایران» به زیور طبع آراسته شده است، می‌پردازیم و سپس مطالبی از مستند مزبور را ارائه خواهیم کرد.**

ابوعلی حسین بن عبدالله بن سینا، ملقب به «**شرف‌الملک**»، «**حجه‌الحق**» و «**شیخ‌الرئیس**» که غالباً وی را ابوعلی‌سینا یا ابوعلی بن سینا و یا ابن‌سینا می‌نامند و نزد اروپاییان به **اویسن** معروف است، در سال ۳۷۰ هـ.ق/ ۹۸۰ م در قریهٔ «**افشنه**» نزدیک بخارا چشم به جهان گشود و در سال ۴۲۸ هـ.ق/ ۱۰۳۷ م در همدان وفات یافت. ابن‌سینا دانشمند فیلسوف، طبیب، ریاضی‌دان و منجم ایرانی و معروف‌ترین دانشمندان اسلام و یکی از بزرگ‌ترین دانشمندانی است که تاکنون پا به عرصهٔ وجود گذاشته‌اند. سرگذشت نخستین ۳۰ سال عمرش را خود به رشتهٔ تحریر درآورده و بقیهٔ شرح احوال او را شاگرد و مریدش، **عبدالواحد ابوعبید جوزجانی** که در سال ۴۰۳هـ.ق /۱۰۱۲ م به ابن‌سینا ملحق شد و تا پایان عمر استاد را با وی گذراند، نوشته است.

اینک خلاصهٔ سرگذشت ۳۰ سال اول عمر ابن‌سینا را که نوشتهٔ خود اوست، از کتاب «**تاریخ الحکماء**» استخراج و زینت‌بخش صفحات این مقاله می‌کنیم و سپس به ذکر بقیهٔ شرح احوال او می‌پردازیم: «آورده‌اند که جماعتی از تلامذهٔ شیخ وی را از مبادی حال او سؤال کردند. پس شیخ برای ایشان احوال خود را بر این صورت املا کرد که: پدرم مردی بود از اهل بلخ و از آنجا به بخارا منتقل شد، ایام **نوح بن منصور**. و متولی بعض اعمال دیوانی می‌بود در قریه‌ای که آن را **خرمیثن** خواندندی. از اعمال بخارا و نزدیک آن قریه، قریه‌ای دیگر بود، نام آن «افشنه». پدرم، دختری از اهل این قریه بخواست و آنجا را وطن اختیار نمود. من و برادرم آنجا متولد

شـــدیم. پس از آنجا به بخارا انتقال کردیم و پدرم مـــرا به معلم قرآن و معلم ادب سپرد. چون ده‌ساله شـــدم، قرآن مجید و بسیاری از علـــم ادب فـــرا گرفته بودم، چنان‌که مردم را از من عجب می‌آمد.

پدرم از جملهٔ مردمی بود که داعی مصریین را اجابت نموده، از جملهٔ اســـماعیلیه شمرده می‌شد. و شنیده بود از ایشان ذکر نفـــس و عقل، بر وجهی که ایشـــان می‌گویند و نزد ایشان معروف است. برادرم نیز بر آن طریقه بود و بسیار واقع می‌شد که پدر و برادرم ذکر آن سخنان می‌کردند. و من می‌شـــنیدم و می‌فهمیدم. لاجرم، شروع کردند و مرا نیز بـــه آن دعوت می‌کردند. ذکر فلسفه و هندسه و حساب هند بر زبان می‌راندند. و فرستاد پدرم مرا نزد مردی که سبزی‌ها فروختی و مع ذلک، حساب هندی می‌دانست، تا از وی تعلم نمایم.

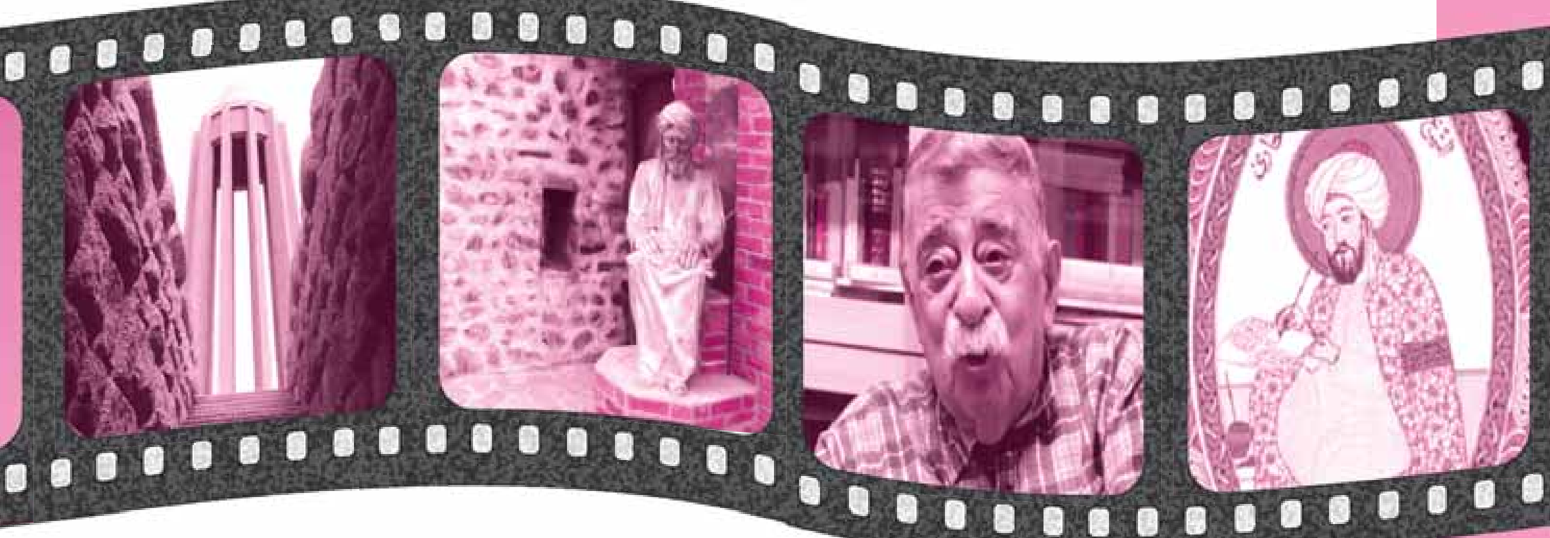
پـــس از این، **ابوعبـــدالله الناتلی** وارد بخـــارا گردید و دعوی دانش فلســـفه می‌کرد. پـــدرم او را در خانهٔ ما فـــرود آورد. بر امید آنکه مـــن از وی فلسفه بیاموزم... پس شروع کردم نزد ناتلی به قرائت **ایساغوجی** ... و چنان بودم که هر مســـئله که بر من القا کردی، بهتر از وی تصور آن می‌نمـــودم، تا آنکه ظواهر منطق را خوانـــدم. اما دقایق آن، خود نزد معلم نیز چیزی از آن نبود... بعد از این شروع کردم و کتاب‌ها را خود مطالعه می‌کردم. و شـــروح آن‌ها را نیز مطالعه می‌نمودم، تا علم منطق را نیک محکم ســـاختم. و همچنین کتاب **اقلیدس** را پنج یا شـــش شـــکل از اولش بخواندم و **بواقی** را به مطالعه حل کردم. و از آنجا انتقال نمودم به **مجسطی** و چون از مقدماتش فارغ گشتم، و به اشکال هندسه رسیدم، **ناتلی** گفت: خود متوجه حل آن‌ها شو! بعد از آن بر من عرض می‌کن! تا صواب و خطای آن را بیان کنم! و حال آن بود که مرد از عهدهٔ آن کتاب برنمی‌آمد.

پس شروع کردم در حل مجسطی و بسا از مشکلات آن کتاب که او ندانسته بود، مگر بعد از آنکه من بر وی عرض کردم... در این حال ناتلی از ما مفارقت کرد... و من همت بر تحصیل کتب گماشـــتم... و علم طب، خود از علوم صعبه نبود. لاجرم در اندک فرصتی در آن فن فایق و مبرز گشتم، تا حدی که فضلای اطبا شروع کردند و علم طب نزد من می‌خواندند. این وقت در مقام تعهد بیماران شـــدم و منفتح (= گشاده) می‌شد بر من ابواب معالجات، چندان‌که وصف آن نتوانم. و بـــا وجود این‌ها، برای تحصیل فقـــه تردد می‌کردم و در آن مناظره می‌نمودم و در این وقت ۱۶ ساله بودم... .

اتفاقاً ســـلطان بخارا که در آن وقت که نوح بن منصور بود، مرضی عارض گشـــت که اطبـــا در آن واماندند. خـــود در آن اوقات نام من شـــهرتی یافته بود. و در خدمت ســـلطان مرا مذکور ســـاختند و به احضار من فرمان رســـید. چون حاضر گشتم، با سایر اطبا مشارکت کردم، تـــا عاقبـــت عافیت یافتم و به این وســـیله، به خدمت او موسوم گشتم. روزی التمـــاس کـــردم که مرا رخصت دخول دارالکتـــب و نظـــارهٔ آن فرماید. رخصت فرمـــود. پس چون داخل گشـــتم، چندیـــن خانه دیـــدم، در هـــر خانه چندین صنـــدوق بالای یکدیگر چیده. یک خانه، کتب عربیت و شـــعر، دیگری فقه، دیگری کتب حدیث. و همچنین هـــر علمی را خانه‌ای جداگانه بود. پس فهرست کتب قدما را به نظر درآوردم. و آنچه از آن‌ها می‌خواستم، برداشتم و بسیار کتاب یافتم که اکثر مردم نام آن‌ها هم نشنیده بودند و من قبل از آن ندیده بودم و بعد از آن هم نزد کسی ندیدم.

پـــس مجموع آن کتب را خواندم و بـــر فواید آن‌ها ظفر یافتم و مرتبهٔ هر مرد و هر علم مرا معلوم گردید. و چون به ســـن ۱۸ سالگی رسیدم، از همهٔ این علوم فارغ گردیده بودم و آن روز حفظ من علوم را بیشـــتر بود و امروز پخته‌تر است. و اگر نه، علم یکی است و چیزی تـــازه بر علم نیفزوده... پس از این، پدرم فوت شـــد و احوال دگرگون گشت و متقلد (= عهده‌دار) چیزی از اعمال سلطانی گشتم و ضرورت، اقتضای آن کرد که از بخارا به **گرگانج** رفتم و **ابوالحســـن سهلی** وزیر آنجا، رغبت بســـیار بر این علوم می‌داشت. و امیر آنجا، **علی بن مأمون** بود و من در زیّ فقها می‌بودم و برای من مشاهرهٔ (= شهریه) کافیه مقرر داشتند.»

اکنون بقیهٔ زندگی‌نامهٔ ابن‌سینا را از «**دایرةالمعارف فارسی**» نقل می‌کنیم: «ابوعلی‌سینا در ۴۰۴ به ری و بعد از ۴۰۵ به قزوین و سپس به همدان نزد **شمس‌الدولهٔ دیلمی** رفت و وزارت یافت. پس از مرگ او (۴۱۲ هـ.ق)، جانشـــینش **سماءالدوله**، چهار ماه شیخ را زندانی کرد. کمی پس از آزادی، به اصفهان نزد **علاءالدولهٔ کاکویه** رفت، و در آنجا حرمت بســـیار داشت، و به تدریس و تألیف پرداخت. سرانجام در سفری که با علاءالدوله به همدان رفت، وفات یافت.»



توجه ابن‌سینا به ریاضیات بیشتر از جنبهٔ فلسفی بود و نه از جنبهٔ فنی. وی «طرح نه‌نه اعداد» و مورد اســتعمال آن را در صحت اعمال اســتخراج جذر و کعب بیان داشــت، **«اصول اقلیدس»** را به عربی ترجمــه کرد و در اواخر عمر (ظاهــراً در همدان) به رصد پرداخت و آلتی شبیه ورنیهٔ کنونی را برای به‌دست آوردن نتایج دقیق‌تر از آلات رصد اختراع کرد. مفاهیــم عمدهٔ فیزیکی (حرکات، اصطکاک، نیرو، خلأ، نور، حرارت و غیره) را به دقت بررســی و اظهارنظر کرد که اگر درک نور ناشــی از پراکندن نوعی از ذرات توسط منبع نورانی باشد، باید سرعت نور را محدود دانست. ابن‌سینا اعتقادی به «احکام نجوم» نداشــت و در این‌باره رســاله‌ای تألیف کرده موسوم به «**فی ابطال احکام النجوم**» که از آن چند نسخهٔ خطی موجود است.

ابوعبید جوزجانی، شاگرد ابوعلی‌سینا، در شرح حال وی نوشته اســت: «و تتمهٔ کتاب شــفا را در اصفهان تصنیف نمود و از منطق و **مجسطی** فارغ گردید، و قبل از این اختصار نموده بود کتاب اقلیدس و **ارثماطیقی** و موسیقی را و ایراد نموده بود در هر کتاب از ریاضیات زیادت‌ها که محتاج الیه می‌دانســت. اما در مجســطی ده شکل در اختلاف منظر ایراد کرد و همچنین در آخر مجسطی، در علم هیئت، چیزها آورد که ســابق بروی کســی اتی‌ان به آن‌ها ننموده بود. و در اقلیدس شبهه‌ای چند ایراد کرد، و در ارثماطیقی خواص حسنه استنباط نمود و در موسیقی مسئله‌ها افزود که قدما از آن غافل مانده بودند.»

سپس نوشته است: «پس شبی در مجلس **علاءالدوله** ذکر خللی که در تقاویم معموله به حسب ارصاد قدیمه واقع است، در میان آمد. علاءالدوله از شــیخ درخواست که رصدی نو کند کواکب را و رخصت صرف اموال، چندان که محتاج الیه باشد داد و شروع کرد شیخ در آن امر و مرا متولی اتخاذ آلات آن و استخدام صناع نمود، تا صحت بسیار از مسائل ظاهر شد، لیکن به سبب اسفار که بسیار در اثناء کار عارض شدی، امر رصد معوق ماندی. و شیخ در اوقات اشتغال به رصد، آلتی چند وضع نمود که ســابق بر وی کسی نکرده بود، و در بیان کیفیت عمل به آن‌ها رساله‌ای نیز تصنیف نمود.»

مهم‌تریــن آثار ریاضی و نجومی ابن‌ســینا همان اســت که در **«کتاب‌الشفا»** (جزء سوم شامل: الارثما طیقی، علم‌الموسیقی، علم الهیئه) آورده اســت. قسمت‌هایی از این کتاب به زبان آلمانی ترجمه شده است. علاوه بر این، رسالات زیر از تألیفات ریاضی و نجومی وی در دست است:

۱. رساله فی تحقیق الزاویه
۲. رساله فی تحقیق مبادی الهندسه
۳. رساله فی الرؤیه الکواکب باللیل لابالنهار
۴. قانون لفضل الشمس و القمر و اوقات اللیل و النهار
۵. مقاله فی الطریق الذی اثره علی ســائر الطرق فی الاتخاذ الالات الرصدیه
۶. فی بیان عله قیام‌الارض وسط السماء
۷. مختصر فی علم الهیئه
۸. مختصر المجسطی

***

پزشکی علمی اســت که دربارهٔ وضعیت بدن انسان در حالات تندرســتی و بیماری به ما آگاهی می‌دهد تا بتوانیم سلامت را به هنگامی که هست به خوبی حفظ کنیم و آن‌گاه که نیست آن را بیابیم.

ابوعلی‌سینا

ابن‌ســینا از برجســته‌ترین چهره‌های تاریخ پزشــکی در همهٔ دوره‌هاســت. او را به بزرگی **جالینوس**، پزشک یونانی می‌دانند و به نام جالینوس جهان اســلام می‌شناسند. به عقیدهٔ برخی از پزشکان اروپایی، علم پزشــکی وجود نداشت تا زمانی که **بقراط** آن را تحقق بخشید، مرده بود تا زمانی که جالینوس آن را احیا کرد، پراکنده بود تا زمانــی که **رازی** آن را جمع‌آوری کــرد، و ناقص بود تا زمانی که ابن‌سینا آن را کامل کرد.

ابن‌سینا نوآوری‌های بسیار در پزشکی و درمان بیماری‌ها داشت.

بسـیاری از بیماری‌ها از جمله سرطان را بسیار دقیق‌تر از پیشینیان شـرح داد. به عقیدهٔ او، سـرطان نوعی غده است که در ابتدا ملتهب و دردناک نمی‌شـود. بعضی از انواع آن وقتی که پیشرفت می‌کنند، دردناک و غالباً غیرقابل درمان می‌شـوند. او می‌گوید اکسید مس و سـرب، اگرچه نمی‌توانند این بیماری را درمان کنند، اما از انتشـار آن در بدن جلوگیری می‌کنند. ابن‌سـینا از واگیر بودن بیماری سل سـخن گفت، موی اسـب را برای بخیه زدن بـه کار برد، موش‌ها را عامل گسـترش بیماری طاعون دانست، به درمان بیماری‌های روانی پرداخت، ورزش مناسـب برای هر گروه سـنی، هر وضعیت بدنی و هـر یک از اندام‌های بدن را معرفی کرد و رسـاله‌های ویژه‌ای دربارهٔ داروهای قلب نوشت. عمدهٔ آثار بوعلی‌سینا در زمینهٔ فلسفه و پزشکی است. بنابراین برخی از تاریخ‌دانان اخیر او را بیشتر فیلسوف می‌دانند تا پزشـک. در حالی‌که به عقیدهٔ برخی دیگر او شـاهزادهٔ پزشکی در قرون وسطاست.

ابن‌سـینا ۴۳ اثر در زمینهٔ پزشـکی، ۲۳ اثر در زمینهٔ فلسـفه، ۲۶ اثر در زمینهٔ فیزیـک، ۳۱ اثر در زمینهٔ الهیات، ۲۳ اثر در زمینهٔ روان‌شناسـی، ۱۵ اثر در زمینهٔ ریاضیـات، ۲۲ اثر در زمینهٔ منطق و ۵ اثر در زمینهٔ تفسـیر قرآن نوشته است. او نوشته‌هایی دربارهٔ زهد، دوستی و موسیقی دارد و چند داستان نیز نوشته است. مهم‌ترین اثر او در پزشکی کتاب **«قانون»** است که بخش اول آن را در ۳۵ سالگی تألیف کرده اسـت. این کتاب طی چند سده در اروپا و سرزمین‌های اسـلامی، همهٔ کتاب‌های پزشکی دیگر را در سایهٔ خود قرار داده بود. برخی از محققان کتاب قانون ابن‌سـینا را کتابی می‌دانند که وسعت پزشکی آن زمان را نشـان می‌داد. انسجام مطالب، جامعیت و روش توضیح بیماری‌ها در کتاب قانون، شبیه مواردی مشابه در کتاب‌های درسی امروزی است. این کتاب پرکاربردترین کتاب پزشکی در جهان اسـلام و نیز در کشورهای اروپایی بوده اسـت و به مدت شش قرن برتری خود را در جهان حفظ کـرد. در این کتاب بیش از ۷۶۰ دارو معرفی شده است.

دانته، دانشمند و نویســندهٔ بزرگ ایتالیایی، در کتاب خود به نام **«کمدی الهی»**، ابن‌سـینا را در کنار بقراط و جالینوس همراه با ارواح پرهیزگاری که مسـیحی نبوده‌اند، می‌گـذارد. مورخان به نقش مهم ابن‌سـینا در حوزهٔ زمین‌شناسـی اذعان دارند و می‌گویند: او در قرن پنجم هجری فرضیه‌ای دربارهٔ منشـأ سلسله کوه‌ها مطرح کرده است که در جهان مسـیحیت در حدود ۸۰ سال بعد آن را نظریه‌ای اساسی می‌دانستند. نوشته‌های ابن‌سینا در زمینه‌های متفاوت علوم به محض انتشار در اسـپانیا بر دانش غرب تأثیر گذاشـت. یکی از این رساله‌ها مقدمه‌ای بر دانش معدن‌شناسی و زمین‌شناسی است. ابن‌سینا می‌گوید پیدایش کوه‌ها ممکن است از دو طریق انجام گیرد: تغییر شکل ناگهانی زمین بر اثر زمین‌لرزه و نظایر آن، یا تغییر تدریجی و زیر تأثیر آب و باد که زمینه را برای تشکیل تخته سنگ‌ها از راه رسوب املاح متفاوت در طول زمان‌های بسیار دراز فراهم می‌آورد.

بوعلی‌سینا در **«دانش‌نامهٔ علائی»** دربارهٔ جزر و مد دریاها و اثر ماه بر آن، حاصل نظارت خود را بیان می‌کند. پدیدهٔ جزر و مد اساساً زاییدهٔ نیروی جاذبهٔ کرهٔ ماه اسـت. اثر جاذبهٔ خورشید در مد نسبت به ماه در ردهٔ دوم اهمیت قرار دارد. انرژی اقیانوسی، انرژی حاصل از به‌کارگیری موج جزر و مد و جریان‌های آب است.

بنابر تفکر آن روز علما، موسیقی در ردیف علوم ریاضی و تعلیمی قرار گرفته است. در کتاب **شفا**، بخشی که ابن‌سینا به موسیقی می‌پردازد، از جهت روش‌شناسی بسیار مهم و راهنمایی است برای پژوهش علمی موسیقی. ابن‌سینا محاسـبات دقیقی در اثر ارزشمند خود به‌کار برد و جنبهٔ نظری و علمی موسیقی را به عنوان دانش دقیق مورد توجه قرار داد. آنچه دربارهٔ ابعاد و نسبت‌های موسیقی آورده، یا دقتی که در توضیح تعاریف بنیادی موسیقی به‌کار برده، در نوع خود بی‌نظیر است. می‌توان گفت بحث او دربارهٔ پیوند موسیقی و شعر، و مقایسهٔ این دو هنر با هم شاید از نخستین پژوهش‌های مربوط به موسیقی باشد. موسیقی‌دانان و موسیقی‌شناسان بعد از ابن‌سینا مستقیم یا غیرمستقیم از آثار او استفاده کرده‌اند.

ابن‌سینا در بخارا، زادگاه مادرش، چشم به جهان گشود و از تعلیم و تربیتـی عالی، مخصوصاً پس از آنکـه خانواده‌اش به بخارا نقل مکان کردند، بهره‌مند شـد. ابن‌سینا ۲۷۹ اثر از خود به یادگار گذاشته است. بیشـتر نوشته‌های او به زبان عربی هستند، اما وی چند اثر نیز به زبان مادری خود، یعنی زبان فارسـی دارد. متأسفانه بسیاری از نوشته‌های این دانشمند برجسته از بین رفته‌اند و فقط ۶۸ کتاب یا رساله از او در کتابخانه‌های شرق و غرب جهان به‌جا مانده است. پرآوازه‌ترین کتاب او به نام قانون پزشـکی در پنج جلد نوشته شده است. این کتاب در سدهٔ دوازدهـم میلادی پس از ترجمه به زبان لاتین در کشـورهای اروپایی شـناخته شد و تا سـدهٔ هفدهم میلادی در مدارس پزشکی، و برپایهٔ گزارش **«یونسکو»**، تا سال ۱۲۸۷ شمسی، یعنی آغاز دوران پزشکی نوین، در دانشگاه بروکسل تدریس می‌شد. شیخ‌الرئیس ابوعلی‌سینا در شهر همدان به مرض قلنج در سال ۳۸۶ شمسی درگذشت.

۲ آموزشی

هوشنگ شرقی

ریاضی کاربردی در فیزیک

هنر نابغه!

مقدمه

در قســـمت قبل قول دادیم که در این شماره به مسائل فیزیکی دربارهٔ «سرعت شـــتاب‌دار» بپردازیم. اما قبل از آن یک مسئلهٔ زیبای دیگر در حرکت با سرعت ثابت داریم که حیف است آن را مطرح نکنیم! این مسئله یک پیشینهٔ تاریخی هم دارد که بعداً به آن اشاره می‌کنیم.

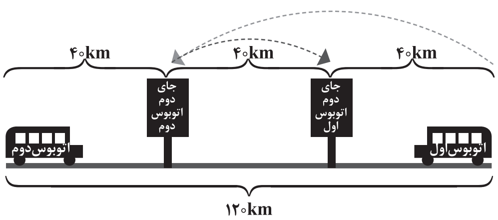
مسئله: دو اتوبـــوس از دو سر یک جاده به طول ۱۲۰ کیلومتر با سرعت ثابت ۴۰ کیلومتر در ساعت به طرف هم حرکت می‌کنند. هم‌زمان با شـــروع حرکت اتوبوس اول، پرنـــده‌ای از روی یکی از اتوبوس‌ها با ســـرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت پرواز می‌کند تا به اتوبوس دوم برسد. وقتی به اتوبوس دوم رســـید، از آن‌جا به سمت اتوبوس اول پرواز می‌کند تا به آن برســـد و به‌همین ترتیب بین دو اتوبوس در پرواز اســـت تا اتوبوس‌ها به‌هم برسند. در این مدت پرنده چند کیلومتر پرواز کرده است؟

حل: مسئله یک راه‌حل طولانی و یک راه‌حل کوتاه دارد. هر دو روش آموزنده‌اند و لذا هر دو را بیان می‌کنیم.

روش اول: بیاییم مستقیماً تمام مسافت‌هایی را که پرنده طی کرده اســـت با هم جمع کنیم و مسافت کلی او را بیابیـــم. ابتدا پرنده با ســـرعت $۸۰\frac{km}{s}$ و اتوبوس دوم با سرعت $۴۰\frac{km}{h}$ به‌هم نزدیک می‌شوند. بنابراین طبق دســـتور $t=\frac{d}{v_۱+v_۲}$ (d، طول جاده و $v_۱$ و $v_۲$ سرعت‌های دو متحرک است) تعیین می‌کنیم که پس از چه مدت به‌هم می‌رسند:

$$t=\frac{۱۲۰}{۸۰+۴۰}=۱$$

یعنی ۱ ســـاعت بعد، پرنده ۸۰ کیلومتر و اتوبوس ۴۰ کیلومتر طی کرده‌اند و به‌هم می‌رسند. در این مدت اتوبوس اول هم ۴۰ کیلومتر حرکت کرده است. نمودار زیر وضع پرنده و اتوبوس‌ها را نشان می‌دهد:



در مرحلهٔ بعد، پرنده از روی اتوبوس دوم به سمت اتوبوس اول برمی‌گردد و اتوبوس هم به سمت او می‌آید و طول مســـیر هم ۴۰ کیلومتر است. پس زمان رسیدن آن‌ها به هم برابر است با:

$$\frac{d}{v_۱+v_۲}=\frac{۴۰}{۴۰+۸۰}=\frac{۱}{۳}$$

یعنی $\frac{۱}{۳}$ ساعت بعد اتوبوس اول و پرنده دوم به‌هم می‌رسند. در این مدت اتوبوس اول $\frac{۴۰}{۳}$ کیلومتر جلوتر آمـــده، پرنده $\frac{۸۰}{۳}$ کیلومتر حرکت کرده، و اتوبوس دوم هـــم همین مقدار حرکت کرده اســـت. حـــال پرنده از اتوبوس اول به ســـمت اتوبوس دوم برمی‌گردد و طول مســـیر $۴۰-\frac{۴۰}{۳}-\frac{۴۰}{۳}=\frac{۴۰}{۳}$ کیلومتر است. حالا زمان لازم برای رسیدن پرنده و اتوبوس دوم به‌هم برابر است با:

$$\frac{\frac{۴۰}{۳}}{۴۰+۸۰}=\frac{۱}{۹}$$

و مسافتی که پرنده طی می‌کند، $\frac{۸۰}{۹}$ کیلومتر است

و به‌همین ترتیب. پس مجموع مسافت‌های طی شده برابر است با:

$$۸۰+\frac{۸۰}{۳}+\frac{۸۰}{۹}+...$$

و یا: $۸۰(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+...)$.

عبارت داخل پرانتز مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی بی‌پایان با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $\frac{۱}{۳}$ است. برای محاسبه این مجموع چنین عمل می‌کنیم:

$$S=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+...\Rightarrow ۳S=۳+۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+...$$

$$\Rightarrow ۳S=۳+S\Rightarrow S=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین مجموع مسافتی که پرنده طی کرده برابر است با: $\frac{۳}{۲}\times۸۰$؛ یعنی ۱۲۰ کیلومتر.

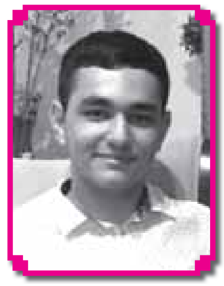
روش دوم: نیازی به این همه محاسبه نیست! چقدر طول می‌کشد تا دو اتوبوس به‌هم برسند؟ $t=\frac{۱۲۰}{۴۰+۴۰}=\frac{۳}{۲}$ مگر نه این است که پرنده در تمام این مدت در حال پرواز است؟ پس مقدار مسافتی که می‌پیماید از ضرب سرعت پرنده در این زمان به‌دست می‌آید: $۸۰\times\frac{۳}{۲}=۱۲۰$ به‌همین سادگی!

درخصوص این مسئلهٔ معروف روایت جالبی وجود دارد. می‌گویند روزی دانشجوی جوانی در راهروی دانشکدهٔ ریاضی «دانشگاه پرینستون» به **جان فون نویمان** ریاضی‌دان و دانشمند نابغهٔ مجاری‌الاصل، برخورد کرد و از او پاسخ همین سؤال را خواست. نویمان کمی فکر کرد و پاسخ صحیح را داد. دانشجو ضمن تشکر گفت: «می‌خواستم از درستی پاسخ خودم مطمئن شوم. آخر دو راه‌حل برای این مسئله وجود دارد.» بعد همین دو راه‌حل را که شرح آن آمد، برای او توضیح داد و گفت: «استاد شما احتمالاً از راه دوم پاسخ را یافتید؟»

نویمان گفت: «نه اتفاقاً من از همان راه اول جواب را یافتم!»

دربارهٔ هوش و استعداد فوق‌العادهٔ جان فون نویمان (۱۹۵۷-۱۹۰۳) روایت‌های بسیاری وجود دارد. گفته شده است که در شش سالگی می‌توانست حاصل تقسیم دو عدد هشت رقمی را برهم به‌صورت ذهنی به‌دست بیاورد! در هشت سالگی با حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا شد، و در نوزده سالگی اولین نظریه‌های ریاضی‌اش را ارائه داد. او یکی از طراحان نخستین رایانه موسوم به «انیاک» (ENIAC)، اقتصاددان و فیزیک‌دان نیز بود، مدرک مهندسی شیمی داشت و استاد دانشگاه پرینستون آمریکا بود. اما این نابغهٔ بزرگ فقط ۵۴ سال عمر کرد.

روش تقریب جذر عددها به کمک نامساوی حسابی ـ هندسی



حسین قاسم دامغانی
دانش‌آموز فارغ‌التحصیل پیش‌دانشگاهی

جـذر یک عدد، از آشـناترین و پرکاربردترین مفهوم‌های ریاضی است و در محاسبهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه، حل معادلهٔ درجهٔ دو و مسائل بسیار دیگر کاربرد دارد. جذر برای هر عدد نامنفی N به این صورت تعریف می‌شود: جذر N، عددی نامنفی مانند M است، اگر و تنها اگر: N=M×M.

برای مثال، ۵ جذر عدد ۲۵ است، زیرا: ۵×۵=۲۵. یا ۱۳ جذر عدد ۱۶۹ است و همچنین ۱ جذر عدد ۱ است. اما در اکثر موارد، جذر یک عدد، عددی طبیعی و یا گویا نیست، بلکه عددی گنگ است؛ مانند جذر عدد ۳ که در حدود ۱/۷۳۲۰۵۰ می‌شود. برای نمایش دقیق جذر ۳ از $\sqrt{3}$ استفاده می‌کنند.

گاه محاسبهٔ جذر یک عدد آن هم بدون ماشین‌حساب، طولانی و خسته کننده می‌شود. اما با استفاده از نامساوی معروف $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ می‌توان به نحوی مقدار جذر یک عدد را با دقت بالایی تخمین زد. ابتدا خود نامساوی را اثبات می‌کنیم (a و b هر دو نامنفی‌اند).

می‌دانیم که مجذور هر عدد، عددی نامنفی است پس با مجذور کردن عدد a-b داریم:

$$(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$$
$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \ge 0$$
$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab \Rightarrow (a+b)^2 \ge 4ab$$
$$\Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

حال فرض کنید که می‌خواهیم جذر عددی مانند a را حساب کنیم که مربع کامل نیست و b یک مربع کامل غیرصفر و برابر k^2 است (k عددی طبیعی است). با جای‌گذاری k^2 به جای b در نامساوی و استفاده از قوانین جذر و نامساوی داریم:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \overset{b=k^2}{\Rightarrow} \frac{a+k^2}{2} \ge \sqrt{ak^2}$$
$$\Rightarrow \frac{a+k^2}{2} \ge k\sqrt{a} \Rightarrow \frac{a+k^2}{2k} \ge \sqrt{a}$$

بنابراین مقدار تخمینی ما $\frac{a+k^2}{2k}$ خواهد بود.

حال برای دقیق شـدن این تخمیـن باید بهترین عدد ممکن را برای k پیدا کنیم. از آنجا که شـرط برقراری تسـاوی در نامسـاوی یاد شـده در ابتدای مطلب، برابری a و b اسـت (اثبات آن به راحتی امکان‌پذیر اسـت)، پس برای نزدیک شدن به تساوی باید به یکی از عددهای مربع کامل قبل و یا بعد a رسید. علت این موضوع را چنین می‌توان بیان کرد که فرض کنید، نامساوی زیر برقرار باشد (z عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ است):

$$(z-2)^2 < (z-1)^2 < a < z^2 < (z+1)^2$$

اگر در انتخاب k مناسـب به جای z از z+1 استفاده شود، آن‌گاه تخمین نادقیق‌تر می‌شود، زیرا:

$$\frac{a+(z+1)^2}{2(z+1)} \ge \frac{a+z^2}{2z}$$

و چون حاصل تخمین ما به علت نامساوی از مقدار واقعی بزرگ‌تر اسـت، پس باید کوچک‌ترین تخمین را محاسبه کرد. برای اثبات به راحتی دو کسر را از هم کم می‌کنیم و با بهره‌گیری از فرض $a<z^2$ و $z>0$، صحت نامساوی مشخص می‌شود. پس به راحتی با استقرا ثابت می‌شود که از z+1، z+2 و ... نباید استفاده کرد.

همچنین، اگر در انتخاب k مناسب، به جای z-1 از z-2 استفاده شود، آن‌گاه تخمین نادقیق‌تر می‌شود (اثبات آن هم مانند اثبات قبلی اسـت) و به راحتی با استقرا ثابت می‌شـود که از z-2، z-3 و... نباید استفاده کرد. پس باید بین z و z-1 یکی را انتخاب کنیم و برای این کار بررسی می‌کنیم در چه شرایطی کدام بهتر است. فرض کنید در یک موقعیت، انتخاب z از z-1 بهتر اسـت. بنابراین حاصل تخمین با z-1، بزرگ‌تر از حاصل آن با z است و داریم:

$$\frac{a+(z-1)^2}{2(z-1)} \ge \frac{a+z^2}{2z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{az+z^{3}-2z^{2}+z}{2(z-1)(z)} \geq \frac{az-a+z^{3}-z^{2}}{2(z-1)(z)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{az+z^{3}-2z^{2}+z-(az-a+z^{3}-z^{2})}{2(z-1)(z)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-z^{2}+z+a}{2(z-1)(z)} \geq 0 \Leftrightarrow -z^{2}+z+a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq z^{2}-z \Leftrightarrow a \geq z(z-1) \overset{z^{2}\geq a}{\Leftrightarrow} z^{2} \geq a \geq z(z-1)$$

چون تمام مراحل بازگشت‌پذیر اســت، پس هنگامی که داریم: $z^{2} \geq a \geq z(z-1)$، باید از z اســتفاده کرد و به ســادگی می‌توان نشــان داد، زمانی که داریــم: $z(z-1) \geq a \geq (z-1)^{2}$، باید از z-1 استفاده کرد. البته اگر داشته باشیم: $a = z(z-1)$، فرقی بین استفاده از z و z-1 وجــود نــدارد (حاصل تخمین ما در هــر دو حالت برابر می‌شود). پس در جمع‌بندی برای تخمین جذر عددی مانند a، تابع زیر را می‌توان معرفی کرد: z همان کوچک‌ترین مربع کامل بزرگ‌تر مســاوی a است و برای سادگی تابع از $\lceil \sqrt{a} \rceil^{2}$ استفاده نشده است. ($\lceil\ \rceil$ علامت ســقف است و برای هر عدد، کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر مساوی آن است. مثلاً سقف ۵/۷، عدد ۶ و سقف ۸/۲- عدد ۸- است.)

$$\sqrt{a} \approx \begin{cases} \dfrac{a+z^{2}}{2z}, z(z-1) \leq a \leq z^{2} \\ \dfrac{a+(z-1)^{2}}{2(z-1)}, (z-1)^{2} \leq a \leq z(z-1) \end{cases}$$

یا

$$\sqrt{a} \approx \min\left(\frac{a+z^{2}}{2z}, \frac{a+(z-1)^{2}}{2(z-1)}\right)$$

حال برای شفاف‌سازی بیشتر مطلب به ارائهٔ مثال می‌پردازیم: فرض کنید می‌خواهید جذر عدد ۵۱ را حســاب کنید. می‌دانیم که: ۸۱>۶۴>۵۱>۴۹>۳۶. اگر تخمین جذر ۵۱ را با هر کدام از مربع کامل‌ها امتحان کنیم، نتایج زیر به‌دست می‌آید:

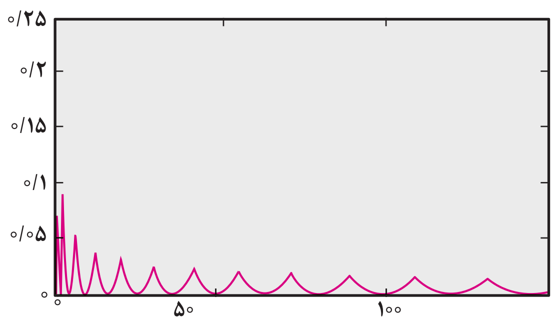
	k=۶	k=۷	k=۸	k=۹	جذر ۵۱
محاسبه	$\frac{51+6^{2}}{2\times 6}$	$\frac{51+7^{2}}{2\times 7}$	$\frac{51+8^{2}}{2\times 8}$	$\frac{51+9^{2}}{2\times 9}$	$\sqrt{51}$
حاصل	۷/۲۵	۷/۱۴۲۸۵۷...	۷/۱۸۷۵	۷/۳۳۳۳۳۳...	۷/۱۴۱۴۲۸...

پس طبق تابع، چون داریم ۷×۸>۵۱>۴۹، باید از k=۷ استفاده می‌شد که بهترین تخمین را ارائه می‌دهد و با مقدار واقعی در حدود ۰/۰۰۱۴ اختلاف دارد.

بــرای مثــال دیگر، جــذر ۱۳۷ را محاســبه می‌کنیــم. چون داریــم: ۱۴۴>۱۳۷>۱۲×۱۱>۱۲۱، پــس تخمین برابر اســت با: $\frac{137+144}{2\times 12} = \frac{281}{24} = 11/70833...$ کــه با مقدار واقعــی در حدود ۰/۰۰۳۶ تفاوت دارد.

حال نگاهی به شــکل تابــع **میزان خطای تخمین** می‌اندازیم.
(خطا = تابع تخمین - مقدار واقعی)

همان‌طور که مشــاهده می‌شود، با بزرگ شــدن X ، روند کلی خطا رو به صفر می‌رود و همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، هرچه از مربع کامل دور می‌شویم، تخمین نادقیق‌تر می‌شود و نقطهٔ تلاقی دو مقدار تخمین، در میانگین هندســی دو مربــع کامل بعد و قبل از عدد رخ می‌دهد. همچنین در این نقاط با بیشترین خطا مواجه می‌شویم. برای کاهش خطا به عبارت $z(z-1)$ نگاهی دوباره می‌اندازیم:



$$z(z-1) = ((z-\frac{1}{2})+\frac{1}{2})((z-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}) = (z-\frac{1}{2})^{2}-(\frac{1}{2})^{2}$$

$$4(z(z-1)) = 4((z-\frac{1}{2})^{2}-(\frac{1}{2})^{2}) = 2(z-1)^{2}-1$$

بنابراین اگر آن عبارت را ۴ برابر کنیم (که ۴ مربع کامل اســت)، فقــط ۱ واحد تا مربع کامل بعدی فاصله داریــم. از این قضیه برای تخمین دقیق‌تر این‌گونه عددها می‌توان اســتفاده کرد. پس اگر جذر عددی مانند ۵×۶=۳۰ را بخواهیم تخمین بزنیم، از روش قبلی استفاده نمی‌کنیم و به جای آن از قوانین جذر اســتفاده می‌کنیم تا تخمین بهتری به دست آوریم:

$$\sqrt{30} = \frac{\sqrt{4\times 30}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{120}}{2} \approx \frac{\frac{120+121}{2\times 11}}{2} = \frac{241}{44} = 5/477272...$$

که اختــلاف آن با مقدار واقعی در حدود ۰/۰۰۰۰۵ اســت. در صورتی که اگر با روش قبلی محاســبه می‌کردیم، این عبارت حاصل می‌شد: $\frac{30+36}{2\times 6} = \frac{66}{12} = \frac{30+25}{2\times 5} = \frac{55}{10} = \frac{11}{2} = 5/5$ که در حدود ۰/۰۲۳ خطا داشــت (اما همان تخمیــن اولیه هم تا حد قابل قبولی مناسب است و واجب نیست مرحلهٔ دوم را نیز حتماً انجام دهیم). در مثال هم نشان داده شد، اگر عدد ما میانگین هندسی دو مربع کامل قبل و بعد از خود بود، حاصل استفاده از z یا z-1 برابر می‌شود.

حال ممکن است جذر عددهای بزرگ‌تری مانند ۷۳۷۳ را بخواهیم حساب کنیم که حدس مربع کامل قبل و بعد از آن کمی دشوار خواهد شد. برای تخمین جذر عددهای بزرگ، با قوانین جذر، مقدار تخمین زنی جذر را کاهش می‌دهیم (مثلاً با تقسیم بر مربعات توان‌های ۱۰) و سپس تخمین می‌زنیم. برای مثال، برای تخمین جذر ۷۹۷۳ داریم (خطا: ۰/۰۰۲۷):

$$\sqrt{۷۹۷۳} = \sqrt{۱۰۰}\times\sqrt{\frac{۷۹۷۳}{۱۰۰}}$$
$$= ۱۰\times\sqrt{۷۹/۷۳} \overset{۶۴<۷۲<۷۹/۷۳<۸۱}{\approx} ۱۰\times\frac{۷۹/۷۳+۸۱}{۲\times۹}$$
$$= ۸۹/۲۹۴۴۴...$$

اگر بخواهیم از این دقیق‌تر هم جذر عددهای بزرگ را تخمین بزنیم، کافی است به جزء صحیح تخمین قبلی خود نگاهی بیندازیم و از آن برای «عدد مربع کامل قبلی» استفاده کنیم. در همین مثال، جذر تقریبی اولیهٔ ما ...۸۹/۲۹۴۴۴ است. پس عدد مربع کامل قبل از ۷۹۸۳، عدد $۸۹^۲=۷۹۲۱$ خواهد بود (در اعداد بزرگ‌تر، به علت خطای تخمین، ممکن است جزء صحیح تخمین اولیه دقیقاً مربع کامل قبل از عدد موردنظر نباشد، بلکه کمی اختلاف داشته باشد). داریم:

$$۸۰۱۰=۹۰\times۸۹$$

پس: $۸۹^۲ < ۷۹۸۳ < ۹۰\times۸۹ < ۹۰^۲$

حال برای تخمین هرچه قدر دقیق‌تر جذر ۷۹۸۳ از k=۸۹ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{۷۹۸۳} \approx \frac{۷۹۸۳+(۸۹)^۲}{۲\times۸۹} = ۸۹/۲۹۲۱۳۴...$$

که تفاوت آن با مقدار واقعی در حدود ۰/۰۰۰۴ است. اما تخمین اولیه مقدار بزرگ‌تری را نشان می‌دهد که خود نشانگر دقیق‌تر بودن تخمین دوم است. (اما همان تخمین اولیه هم تا حد قابل قبولی مناسب است و واجب نیست مرحلهٔ دوم را نیز حتماً انجام دهیم.)

برای تمرین، جذر عددهای ۵۳۹۱، ۶۰۱ و ۲ را با روش تقریبی محاسبه و با مقدار واقعی مقایسه کنید.

برای علاقه‌مندان: قدمی فراتر

این قسمت از سرعت تخمین می‌کاهد، اما در عوض آن را دقیق‌تر می‌کند.

به نامساوی‌های اولیه باز گردیم:

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \overset{b=k^۲}{\Rightarrow} \frac{a+k^۲}{۲} \geq \sqrt{ak^۲}$$
$$\Rightarrow \frac{a+k^۲}{۲} \geq k\sqrt{a} \Rightarrow \frac{a+k^۲}{۲k} \geq \sqrt{a}$$

اگر این‌بار فرض کنیم k فقط محدود به عددهای طبیعی نیست و آن را به عددهای گویای مثبت گسترش دهیم، می‌توانیم از نامساوی تخمین $(\frac{a+k^۲}{۲k})$ بارها و بارها استفاده کنیم تا به دقیق‌ترین جواب برسیم:

به فرض شما می‌خواهید جذر ۳ را حساب کنید. چون: ۴<۳<۲×۱<۱، پس تخمین اولیه چنین خواهد بود (خطا: ۰/۰۱۸) $\frac{۷}{۴}=\frac{۳+۴}{۲\times۲}$. اگر $\frac{۷}{۴}$ را دوباره به عنوان k برگزینیم، تخمین دوم ما چنین می‌شود:

$$\frac{۳+(\frac{۷}{۴})^۲}{۲\times\frac{۷}{۴}} = \frac{\frac{۳\times۱۶+۴۹}{۱۶}}{\frac{۷}{۲}} = \frac{۴۸+۴۹}{۵۶} = \frac{۹۷}{۵۶}$$

که خطای ۰/۰۰۰۰۹ دارد. اگر باز از تخمین قبلی به عنوان k استفاده کنیم، میزان خطا به ۲×۱۰^{-۹} کاهش می‌یابد و در استفاده‌های بعدی، خطا به کمتر از $۱۰^{-۱۵}$ می‌رسد!

و یا به فرض می‌خواهید جذر $\frac{۱۳}{۸}$ را حساب کنیم، به سادگی متوجه می‌شویم که:

$$\frac{۱۳}{۸}=\frac{۲۶}{۱۶}=\frac{۲۵}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}=(\frac{۵}{۴})^۲+\frac{۱}{۱۶}$$

پس بدون اینکه سراغ عددهای طبیعی برای k برویم، یا صورت و مخرج را جدا جدا تخمین جذری بزنیم، از $\frac{۵}{۴}$ استفاده می‌کنیم و تخمین ما چنین خواهد بود (خطا: ۰/۰۰۰۲)

$$\frac{\frac{۱۳}{۸}+(\frac{۵}{۴})^۲}{۲\times\frac{۵}{۴}} = \frac{\frac{۲۶+۲۵}{۱۶}}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۵۱}{۴۰}$$

در صورت استفاده از عدد طبیعی داریم (خطا: ۰/۰۳۷)

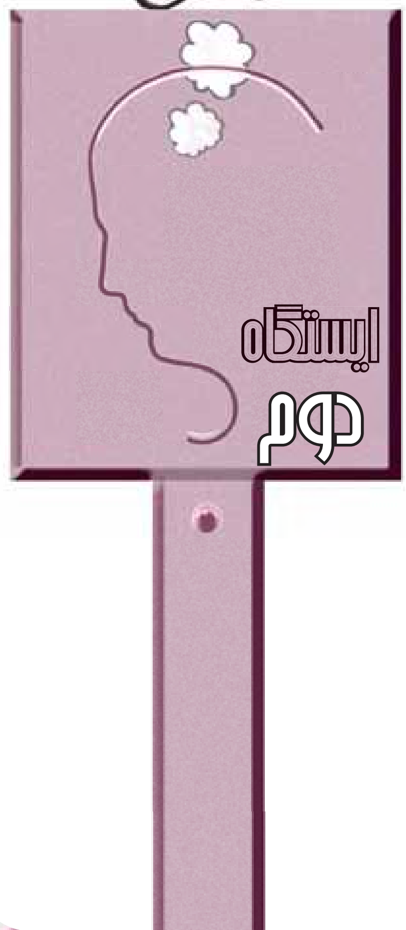
$$۱<\frac{۱۳}{۸}<۱\times۲<۴ \Rightarrow \sqrt{\frac{۱۳}{۸}} = \frac{\frac{۱۳}{۸}+۱}{۲\times۱} = \frac{۲۱}{۱۶} = ۱/۳۱۲۵$$

در صورت استفاده از تقریب صورت و مخرج به‌طور جدا خواهیم داشت (خطا: ۰/۰۰۴۶):

$$\sqrt{\frac{۱۳}{۸}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۸}} = \frac{\frac{۱۳+۱۶}{۲\times۴}}{\frac{۸+۹}{۲\times۳}} = \frac{\frac{۲۹}{۸}}{\frac{۱۷}{۶}} = \frac{۶\times۲۹}{۸\times۱۷} = \frac{۳\times۲۹}{۴\times۱۷}$$
$$= \frac{۸۷}{۶۸} = ۱/۲۷۹۴۱۱$$

به‌عنوان تمرین این قسمت، جذر عدد ۲ را (با یکبار تکرار) و یکبار با توجه به اینکه $\frac{۱}{۲۵}+\frac{۴۹}{۲۵}=۲$ محاسبه کنید و با مقدار واقعی مقایسه کنید.

یک داستان و یک معما!



باز هم می‌خواهیم از **فرهاد** کوچولو و ماجراهایش بگوییم! در شـــهریور ماهی که گذشت، جشن تولدی برایش برگزار کردند. فرهاد برای جشن تولدش تعدادی از دوستانش را به مهمانی دعوت کرد و با تعجب متوجه شد که تعدادی از دوستانی که به جشن دعوت شده و آمده‌اند، دقیقاً هم‌ســـن او هستند و همان تعداد نیز کسانی هستند که یک سال از او کوچک‌ترند و باز به همان تعداد کسانی هستند که از او یک سال بزرگ‌ترند و مهمان دیگری نیز وجود ندارد.

نکتهٔ جالب توجه دیگر نیز آن اســـت که تعداد مهمانان درســـت مساوی سن فرهاد بود! همچنین مجموع ســـن همهٔ مهمان‌ها ۹ برابر سن خواهر فرهاد بود که از او ۱۰ سال بزرگ‌تر است. حالا بگویید چند نفر مهمان جشن تولد فرهاد بودند؟

معمای چندان دشـــواری نیست و فقط باید مدل ریاضی مناسبی برای آن بیابید و با حل معادله‌های مناســـب، پاسخ را به‌دست آورید. پس از آن‌که به اندازهٔ کافی با آن چالش کردید، برای اطمینان از درستی پاسختان به بخش پاسخ‌ها مراجعه کنید.

تکامل نقش‌های هندسی در فرش ایرانی

قاسم حسین‌قنبری
دبیر ریاضی سمنان

مقدمه

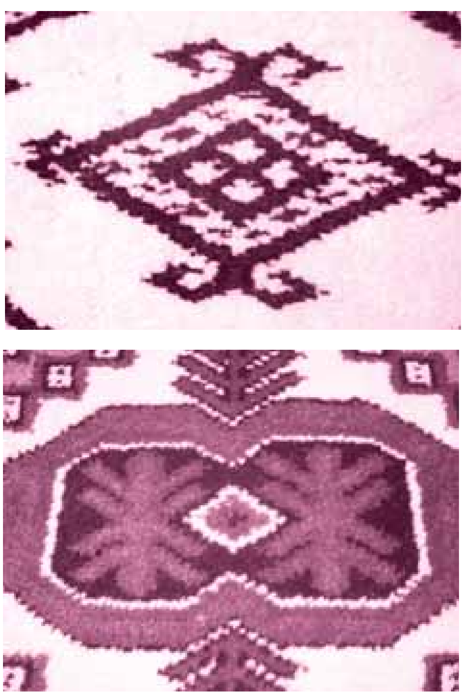
فرش را می‌توان از جنبه‌های متفاوت بررسی کرد؛ از جمله جنس تار و پود، طرح، بافت و... طرح فرش را نیز که موضوع کار ماســـت، می‌توان از نظر تاریخ، رنگ، منحنی‌ها و... بررسی کرد که ما در اینجا فقط به بررسی منحنی‌های آن از جنبهٔ ریاضی می‌پردازیم. به عبارت دیگر، طرح یک فرش را به عنوان یک مجموعه از منحنی‌های ریاضی در نظر می‌گیریم و قصد داریم تکامل این نقش‌ها را تا حد ممکن نشان دهیم.

مقدمه

در طرح فرش‌های ایرانی نقوش مختلفی وجود دارد. بسیاری از این نقوش، هندسی می‌باشند. لوزی، مربع، مستطیل، ترنج و... از جمله این نقوش هستند که برخی با پاره‌خط و برخی با منحنی طراحی شده‌اند. سؤالاتی که مطرح می‌گردد این است که آیا با گذر زمان پاره‌خط‌ها به منحنی تبدیل شـــده‌اند و یا اینکه در نقوش روستایی از پاره‌خط و در نقوش شهری از منحنی استفاده شده است؟ آیا اصلاً چنین تکاملی وجود داشته است؟ پاسخ به این ســـؤالات جنبه تاریخی دارد. ولی ما در این مقاله به وجود چنین مسئله‌ای می‌پردازیم. یعنی اینکه در نقوش فرش ایرانی هندسه‌ای بسیار زیبا از منحنی وجود دارد که به زبان ریاضی امروز قابل بیان است. البته در وجود هندسه‌ای با خطوط شکسته و پاره‌خط مسائل حل شده است.

خطوط شکسته

در بســـیاری از فرش‌ها طرح‌های ساده‌ای وجود دارند که فقط با خط شکسته به‌وجود آمده‌اند. این طرح‌ها در عین زیبایی به سادگی قابل ترسیم هستند.



شکل ۱. نقش‌های خط شکسته

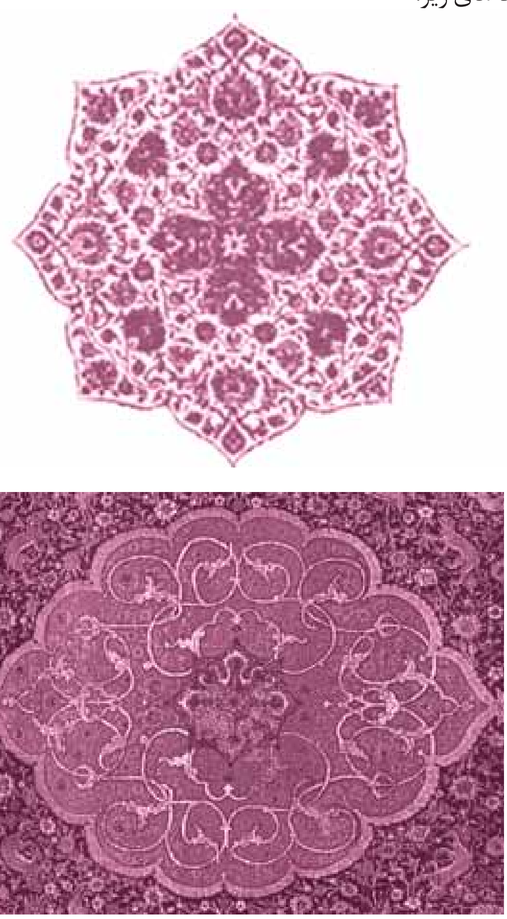
این نقش‌ها می‌توانند نقش‌های ســادهٔ هندسی باشند و یا اینکه طرح‌هایی انتزاعی باشند که از روی حیوانات به‌دست آمده‌اند. این‌گونه نقش‌ها که برخی متقارن و برخی نامتقارن‌اند، در عین ســادگی زیبا هستند و شاید بتوان گفت بیشتر در فرش‌های روستایی وجود دارند.

منحنی‌ها

اما در بسیاری از فرش‌های دیگر، از جمله فرش **شیخ لطف‌الله** و فرش **شیخ صفی‌الدین اردبیلی**، طرح‌ها بیشتر با منحنی به‌وجود آمده‌اند. در این طرح‌ها اندازه‌ها و نســبت‌ها بســیار حســاب شده و دقیق‌اند و به عبارت دیگر، از هندســهٔ پیشرفته‌تری برخوردارند. این فرش‌ها به فرش‌های شــهری یا درباری شهرت دارند. اما منحنی‌ها را نیز می‌توان به دو گروه بسته و باز تقسیم کرد.

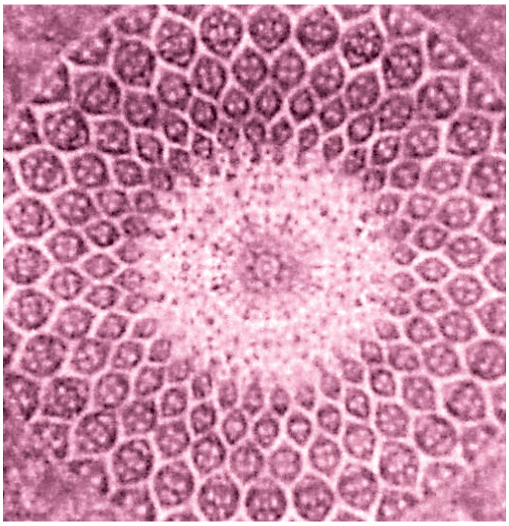
۱. منحنی‌های بسته یا ترنج

منحنی بســته به آن منحنی گفته می‌شود که صفحه را به سه قســمت جدا از هم تقسیم کند. به آن ترنج نیز می‌توان گفت. مانند نمونه‌های زیر:



شکل ۲. چند نوع ترنج

و نیز کامل‌تر آن‌ها ترنج مسجد شیخ لطف‌الله یا فرش شیخ لطف‌الله.



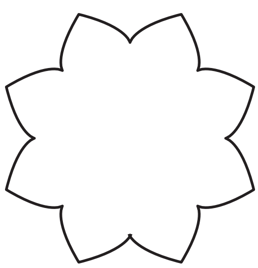
شکل ۳. فرش شیخ لطف‌الله

در زبان ریاضی می‌توان ترنج را نمودار یک تابع در نظر گرفت که در دســتگاه قطبی[1] رسم شده است. اما سؤال این است که: ضابطه یا فرمول این تابع چیست؟

نگارنده در مقالهٔ «مدل ریاضی ترنج و طرح ســقف مسجد شیخ لطــف‌الله» فرمول تابعی را ارائه کرد کــه نمودار ترنج‌های متفاوت را رسم می‌کند و به‌صورت زیر است[2]:

$$T(x) = R + \mathrm{Arc}\sin\left(2\left(\left|\frac{k}{\pi}x - 2\left[\frac{(\frac{k}{\pi}x+1)}{2}\right]\right| - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (1)$$

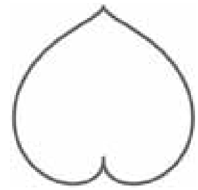
با این تابع که به آن «تابع طلایی» می‌گوییم، ترنج‌های متفاوتی را می‌توانیم رسم کنیم.



شکل ۴. نمایش ترنج رسم شده با تابع T

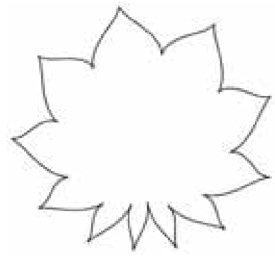
دلیل انتخاب نام تابع طلایی آن اســت که این تابع در کنار سایر تابع‌هــا مجموعه‌ای بســیار زیبا و کامل از ترنج‌ها را رســم می‌کند. همچنین برخی از این ترنج‌ها با تغییر K و R به‌وجود می‌آیند.

۱. نمودار با R=۲ و K=۱ (شکل ۵)



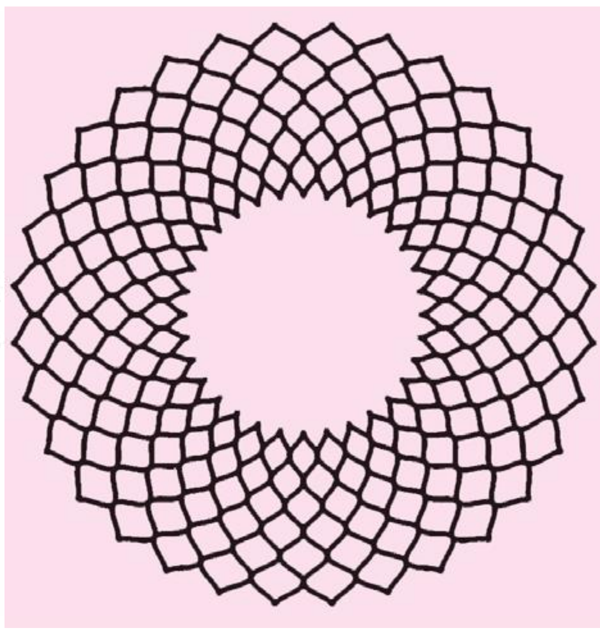
شکل ۵. نمایش ترنج رسم شده با تابع T

۲. نمودار در ترکیب با سایر توابع (شکل ۶)



شکل ۶. نمایش ترنج رسم شده با تابع T

در ضمن به کمک این تابع ترنج‌های متداخل، از جمله ترنج شیخ لطف‌الله را نیز رسم می‌کنیم.



شکل ۷. ترنج شیخ لطف‌الله بازسازی شده با تابع T

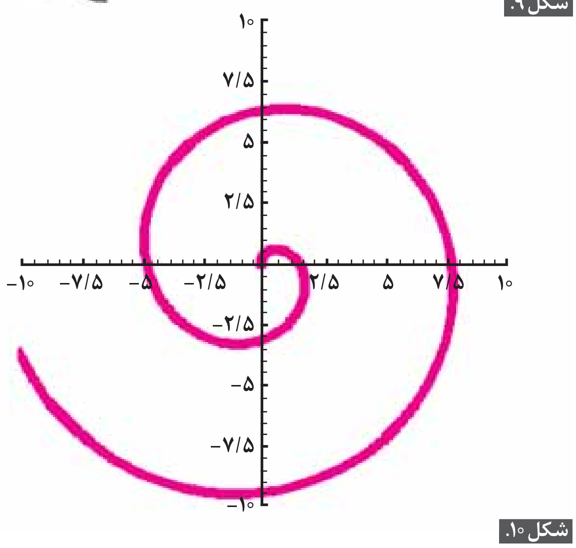
۲. منحنی‌های باز

این نوع از منحنی‌ها صفحه را به دو قسمت تقسیم می‌کنند. در نقش‌های ایرانی به آن‌ها معمولاً «افشـــانه» یا «اسلیمی» می‌گویند و بین ریاضی‌دان‌ها به «پیچ ارشمیدس» معروف است.

شکل ۸.

در صورتی‌که فقط منحنی‌های بـــاز یک چهارم فرش را در نظر بگیریم، شـــکل ۹ را خواهیم داشت که از ترکیب چند افشانه درست شده است.

شکل ۹.



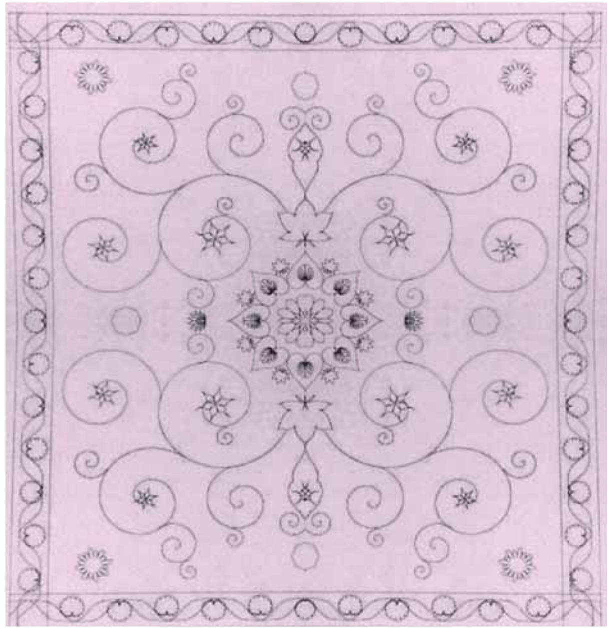
شکل ۱۰.

شـــکل اصلی این افشانه همان پیچ ارشمیدس است که در شکل ۱۰ وجـــود دارد. رابطهٔ ریاضی این منحنی به صـــورت پارامتری در صفحه به این صورت است:

$$H(x) = (x\sin(x), x\cos(x)) \qquad (۲)$$

اگـــر این دو نوع منحنی را با هم بـــه‌کار گیریم، تقریباً می‌توانیم

منحنی‌های یک فرش را کامل کنیم. این توضیح ضروری است که هدف ما طراحی فرش نیست، بلکه نشان دادن عظمت و بزرگی نقش‌های فرش ایرانی است که واقعاً جای شگفتی دارد.

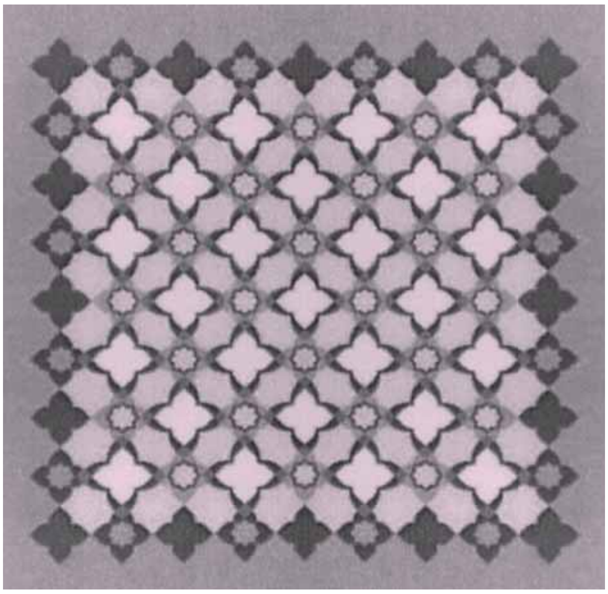


شکل ۱۱.

بعد از طراحی منحنی‌ها بحث رنگ‌آمیزی مطرح می‌شود که شکل ۱۲ نمونه‌ای از این کار را نشان می‌دهد [قنبری قاسم و دانشگر، ۱۳۸۸].

شکل ۱۲. فرش ساده طراحی شده با توابع طلایی و پیچ ارشمیدس

شکل ۱۳ نمونه‌ای دیگر از این کار است که با الهام از نقش‌های مسجد جامع عتیق اصفهان رسم شده است.



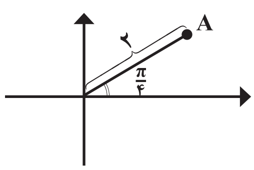
شکل ۱۳.

نتیجه‌گیری

هر چند هدف ما طراحی مجدد نقش‌های ایرانی نیست، ولی با این روش می‌توان طرح‌های بسیاری زیبا و مدرنی طراحی کرد. از سوی دیگر می‌توان با این روش پلی بین دنیای ریاضی و دنیای نقش‌های ایرانی ایجاد کرد تا هر دو طرف بتوانند از یکدیگر استفاده کنند و به غنای یکدیگر یاری رسانند.

پی‌نوشت

۱. دستگاه مختصات قطبی دستگاهی هندسی است که در آن هر نقطه دارای دو مؤلفه است و مؤلفهٔ اول (R) فاصلهٔ آن نقطه تا مبدأ مختصات و مؤلفهٔ دوم زاویه‌ای است که پاره‌خط واصل بین آن نقطه و مبدأ مختصات با محور xها در جهت مثبت مثلثاتی می‌سازد (θ). مثلاً در شکل مقابل، نقطهٔ $(۲,\frac{\pi}{۴})$ رسم شده است:



۲. منظور از تابع Arcsinx، وارون تابع sinx است. تابع y=sinx در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است و وارون آن را با نماد Arcsinx یا $\sin^{-۱}(x)$ نمایش می‌دهیم. برای مثال داریم:

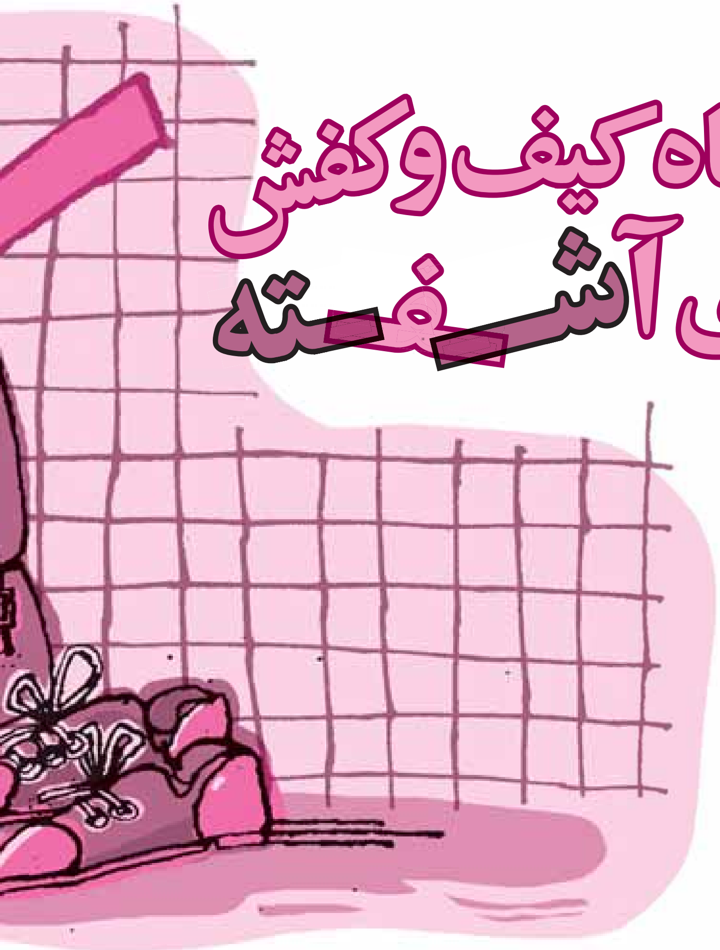
$$\sin(\frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \mathrm{Arc}\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{\pi}{۳}$$

منابع

۱. قنبری قاسم، حسین (۱۳۸۳). «مدل ریاضی طرح ترنج و طرح سقف مسجد شیخ لطف‌الله». کنفرانس ریاضی اهواز.

۲. حسین قنبری قاسم، حسین و دانشگر، پری (۱۳۸۸). «توابع زیبا در فرش‌های زیبا». رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۹۶. تابستان.

مسئلۀ کارگاه کیف و کفش و آقای آشفته



حسین نامی‌ساعی

چند وقتی است که فکر پدرم حسابی مشغول است. او از تولیدکنندگان قدیمی و باسابقۀ کیف و کفش مدرسه است. پدرم می‌گوید به‌تازگی در تولید کیف و کفش به مشکلی برخورده است. مشکلش این است که در چند سال اخیر، تولید کفش با توجه به قیمت‌های بازار برایش ضرر دارد و تولید کیف هم تقریباً برایش سودآور است.

اما مسئله این است که هیچ‌کدام از خریداران عمدۀ کیف و کفش حاضر نیستند، کیف را به تنهایی بخرند و همۀ آن‌ها کیف و کفش را با هم و با قیمتی که پیشنهاد می‌دهند، می‌خواهند! بله دردسر از همین‌جا شروع شده.

پدرم می‌گوید: برای تولید هر جفت کفش حداقل ۲ هزار تومان ضرر می‌دهد و برای تولید هر کیف ۴ هزار تومان سود می‌برد. با این حال برای اینکه تولیدی‌اش تعطیل نشود، قراردادی با یکی از خریداران بسته است؛ به این صورت که: او باید به‌طور میانگین حداقل روزی ۶۰ جفت کفش و ۴۸ کیف تولید کند. اما به دلیل مشکلاتی که در کارگاه تولیدی‌اش دارد، مثل تعداد کم دستگاه و نیروی کار، میانگین ظرفیت تولید او بیشتر از ۱۲۰ کفش و ۱۰۲ کیف، در روزهای کاری‌اش نمی‌تواند باشد. از طرف دیگر طبق قراردادش با بخش باربری، باید حداقل روزی ۱۲۰ کیف و کفش بارگیری کند.

بله! حالا مسئله این است که پدرم با این شرایط و با توجه به ضرر تولید کفش و سود تولید کیف، روزانه چقدر تولید کند تا درآمدش را بالا ببرد. این مشکلی است که با ریاضیات حل می‌شود. از من خواست تا کمکش کنم. من که خودم قادر به حل این مشکل نبودم، تصمیم گرفتم موضوع را با معلم ریاضی‌مان، آقای **آشفته** مطرح کنم.

فردای آن روز موضوع را عیناً برای آقای آشفته توضیح دادم. او با خوش‌حالی گفت که به پدرت بگو نگران نباشد. مشکل به آسانی قابل حل است. بعدازظهر آن روز همراه آقای آشفته به کارگاه پدرم رفتیم که نزدیک مدرسه بود. پدرم با آقای آشفته آشنا شد و بار دیگر مشکل را بیان کرد. بعد از شنیدن صحبت‌های پدرم، آقا رو به من کرد و با لبخندی گفت: «خوش‌حال باش پسرم، مسئلۀ پدرت را به آسانی حل می‌کنیم.» بعد اشاره کرد، بیا با هم این مسئله را حل کنیم و به این صورت شروع به حل مسئله کردیم. در اولین مرحله برای حل مسئله، آقای آشفته تعداد کفش‌ها را x و تعداد کیف‌ها را y فرض کرد. بعد مشکل تولید را به شکل و زبان ریاضی به‌صورت زیر نوشتیم:

الف) تولید حداقل ۶۰ جفت کفش و ۴۸ کیف در روز:

$y\geq ۴۸ \, , \, x\geq ۶۰$

ب) در روز بیشتر از ۱۲۰ کفش و ۱۰۲ کیف نمی‌توان تولید کرد:

$y\leq ۱۰۲ \, , \, x\leq ۱۲۰$

ج) روزانه باید حداقل ۱۲۰ کفش و کیف بارگیری کرد:

$, \, x+y\geq ۱۲۰$

د) تولید هر جفت کفش ۲ هزار تومان ضرر و تولید هر کیف ۴ هزار تومان سود دارد.

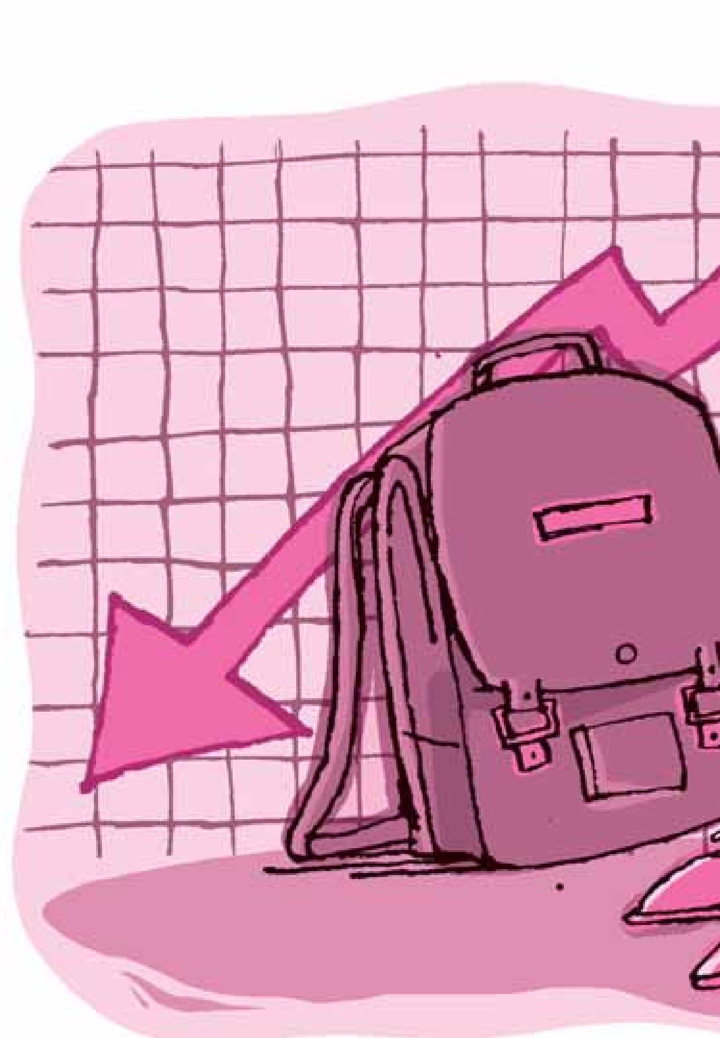
$R=-۲x+۴y$ (درآمد)

در گام بعدی، یکی‌یکی شرایط تولید را روی محور مختصات رسم کردیم.

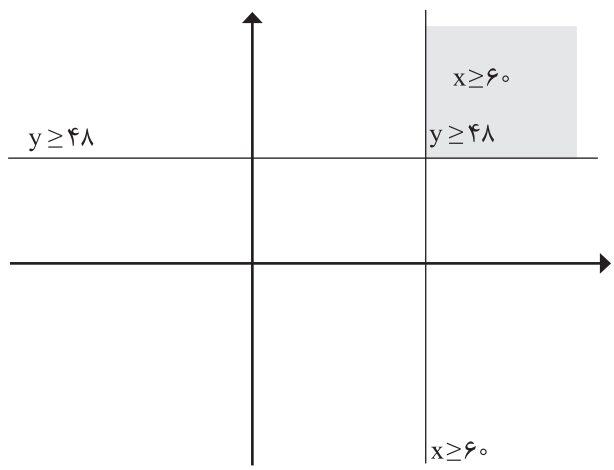
رسم شرایط الف

تولید حداقل ۶۰ جفت کفش و ۴۸ کیف در روز:

قسمت هاشورخورده ترکیب یا اشتراک $x\geq ۶۰$ و $y\geq ۴۸$ است. این اشتراک ناحیه‌ای است که شرایط $x\geq ۶۰$ و $y\geq ۴۸$ را دارد.

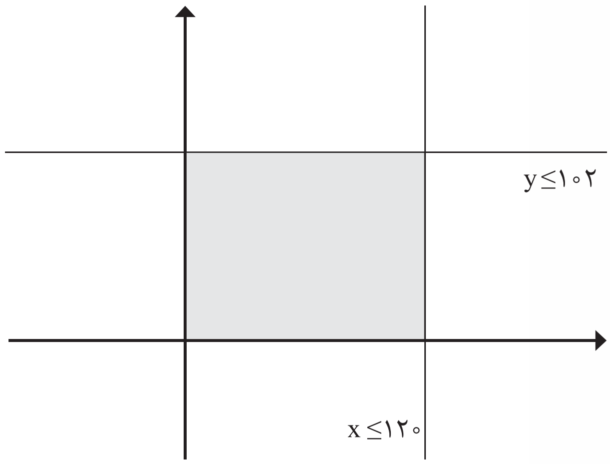


در ایـــن ناحیه نقاط آن هم بـــرای $x\geq ۶۰$ و هم برای $y\geq ۴۸$ موجه و درست است. در واقع جواب مشترک $x\geq ۶۰$ و $y\geq ۴۸$ است.



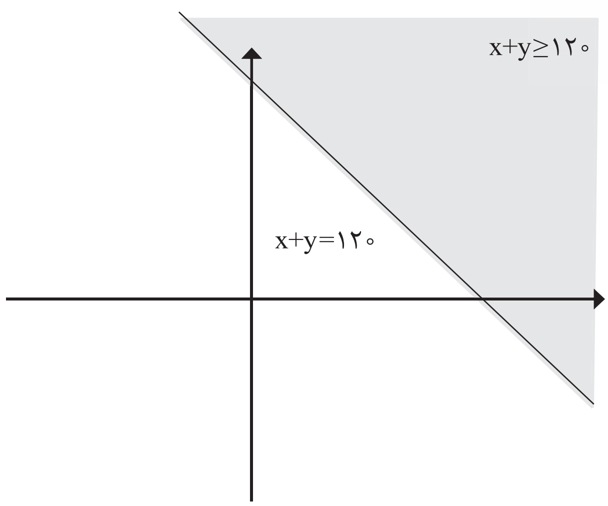
رسم شرایط ب

در روز بیشـــتر از ۱۲۰ کفش و ۱۰۲ کیف نمی‌توان تولید کرد: قسمت هاشورخورده اشتراک یا ترکیب $x\leq ۱۲۰$ و $y\leq ۱۰۲$ را نشان می‌دهد. همچنین این ناحیه‌ای است که مجموعهٔ نقاط در این ناحیه برای $x\leq ۱۲۰$ و $y\leq ۱۰۲$ موجه و قابل قبول و جواب مشـــترک هر دو است.



رسم شرایط ج

روزانه بایـــد حداقل ۱۲۰ کفش و کیف بارگیری کرد. قســـمت هاشورخورده $x+y\geq ۱۲۰$ است.



و جمع همهٔ شـــرایط، قسمت هاشـــورخوردهٔ اشتراک یا ترکیب مجموع شـــرایط الف، ب، ج اســـت. این ناحیه ناحیهٔ جواب اســـت و بهترین جواب یکی از رأس‌های این ناحیه نقاط A، B، C و یا D و E است که با امتحان این نقاط در R به‌دست می‌آید.

از آقای آشفته پرسیدم که: چرا نقاط رأسی بهترین نقاط است؟

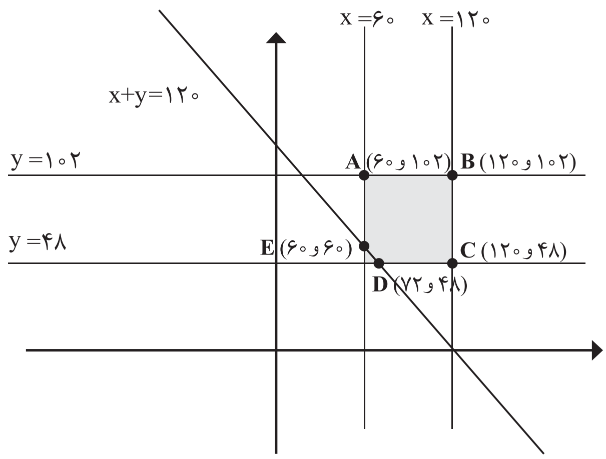
آقا گفت: «برای اینکه بیشـــترین و کمترین نقاط در گوشـــه‌ها هستند.»

البته این پاسخ مربوط به شـــاخه‌ای از ریاضیات به نام «تحقیق در عملیات»* اســـت. که تحقیق در عملیات به‌صورت قضیه‌ای ثابت

می‌کند که چرا یکی از نقاط رأس بهترین جواب است.

ناحیهٔ جواب ناحیه‌ای است که تمام شرایط مسئله در آن ناحیه وجود دارد. در واقع اشتراکی از تمام شرایط است و تمام نقاط موجود در این ناحیه در شرایط $x \geq ۶۰$، $y \geq ۴۸$، $x \leq ۱۲۰$، $y \leq ۱۰۲$ و $x+y \geq ۱۲۰$ موجه و صادق است.

یکی از رأس‌های A، B، C، D و E بهترین نقطه برای R و تولید است که با قرار دادن مشخصات آن در R پیدا می‌شود.



می‌دانیم که تولید هر جفت کفش دو هزار تومان ضرر و تولید هر کیف چهار هزار تومان سود دارد؛ یعنی $R=-۲x+۴y$. اکنون با قرار دادن نقاط A، B، C، D و E در $R=-۲x+۴y$، مقدار R به ازای هر پنج نقطه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

(۱) $A(۶۰, ۱۰۲) \Rightarrow R=(-۲×۶۰)+(۴۰×۱۰۲)=۲۸۸$

(۲) $B(۱۲۰, ۱۰۲) \Rightarrow R=(-۲×۱۲۰)+(۴×۱۰۲)=۱۶۸$

(۳) $C(۱۲۰, ۴۸) \Rightarrow R=(-۲×۱۲۰)+(۴×۴۸)=-۴۸$

(۴) $D(۷۲, ۴۸) \Rightarrow R=(-۲×۷۲)+(۴×۴۸)=۴۸$

(۵) $E(۶۰, ۶۰) \Rightarrow R=(-۲×۶۰)+(۴×۱۰۲)=۱۲۰$

از مقایسهٔ این پنج مقدار محاسبه شده برای R، بهترین نقطه برای تولید به‌دست می‌آید که نقطهٔ $A(۶۰, ۱۰۲)$ است؛ چرا که بیشترین سود را دارد. بنابراین مشکل پدرم حل شد و بهترین تولیدش، تولید روزی ۶۰ جفت کفش و ۱۰۲ کیف مدرسه است.

***پی‌نوشت**

* **تحقیق در عملیات:** یا پژوهش عملیاتی یکی از زیرشاخه‌های ریاضیات کاربردی است که برای پیدا کردن نقطهٔ بهینه (بهترین نقطه) در مسائل بهینه‌سازی کاربرد دارد. پیدا کردن نقطهٔ بهینه براساس نوع مسئله مفاهیم متفاوتی دارد و در تصمیم‌سازی از آن استفاده می‌شود.

از تحقیق در عملیات در بیشینه‌سازی سود، سرعت خط تولید و... و کمینه‌سازی، هزینه، ریسک و... استفاده می‌شود. روش اصلی تحقیق در عملیات پیدا کردن بهترین پاسخ برای مسائل پیچیده‌ای است که به زبان ریاضی مدل‌سازی شده‌اند و سبب بهبود یک فرایند می‌شوند.

تاریخچهٔ تحقیق در عملیات

اولین استفاده از تحقیق در عملیات در جنگ جهانی دوم به سال ۱۹۴۱ در انگلستان صورت گرفت. مدیریت نظامی انگلستان در آن زمان، گروهی از دانشمندان را که با مسائل تاکتیکی دفاع هوایی و زمینی سروکار داشتند، مأمور تحقیقاتی در این زمینه کرد. دلیل اصلی انجام این تحقیق محدودیت بودجهٔ نظامی بود. برای همین لازم بود که چگونگی استفادهٔ مناسب و حداکثر از منابع نظامی مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. همان‌طور که از نام تحقیق در عملیات مشخص است، علت به‌کارگیری آن، ماهیت مطالعات تیمی بود که روی عملیات (نظامی) تحقیق می‌کرد.

دانشمندان انگلیسی رادار را اختراع کردند، اما ارتش با استفادهٔ بهینه از این وسیله آشنا نبود. برای همین با گردهمایی جمعی از دانشمندان و با به‌کارگیری تکنیک‌های مؤثر ریاضی و داده‌های اطلاعاتی، توان دفاعی انگلستان تا حد ۱۰ برابر افزایش یافت. موفقیت این گروه انگیزهٔ استفاده از گروه‌های مشابه را در بررسی مسائل متفاوت نظامی بیشتر کرد. نتایج ارزشمند حاصل از تحقیق در عملیات توسط تیم انگلیسی به سرعت مدیریت نظامی ایالات متحده را به فعالیت‌هایی در این زمینه علاقه‌مند کرد. نوآوری‌های موفقیت‌آمیز توسط تیم‌های آمریکایی، شامل توسعهٔ الگوهای جدید پرواز، برنامه‌ریزی در مین‌گذاری دریا و بهره‌گیری مؤثر از تجهیزات الکترونیکی می‌شد.

در این زمینه، گروه‌های تحقیق در عملیات مشابهی در دیگر کشورها از جمله کانادا و فرانسه مشغول فعالیت شدند. این گروه‌ها که معمولاً برای اجرای عملیات تعیین می‌شدند، در انگلستان به نام تحقیق در عملیات شناخته شدند و نیز گاهی در آمریکا با نام‌های دیگر، نظیر تحلیل عملیات، ارزیابی عملیات، تحقیق در عملیات، تحلیل سیستم‌ها، ارزیابی سیستم‌ها و تحقیق در سیستم‌ها به‌کار برده می‌شدند.

بررسی مسئلهٔ حملهٔ هواپیما به زیردریایی‌های آلمانی از موارد دیگری بود که دانشمندان ریاضی به آن پرداختند. در اوایل جنگ جهانی دوم، نیروی هوایی انگلستان از بمب‌های معمولی علیه زیردریایی‌های آلمانی استفاده می‌کرد. این نحوه حمله تنها در صورتی مؤثر بود که زیردریایی‌ها مستقیماً مورد اصابت بمب قرار می‌گرفتند. زیرا انفجار در سطح آب بود و نمی‌توانست به بدنهٔ زیردریایی‌ها آسیب بزند؛ مگر اینکه بمب به عرشه اصابت می‌کرد. برای تخریب بیشتر زیردریایی‌هایی که به زیر آب فرو رفته بودند، انفجار در عمق مورد استفادهٔ هواپیما قرار می‌گرفت، ولی برای تعیین عمق مناسب انفجار، اختلاف‌نظر وجود داشت. بعضی جنگنده‌ها بمب‌های خود را برای انفجار در عمق ۱۵۰ فوت تنظیم می‌کردند، چون فکر می‌کردند این مقدار، حداکثر عمقی است که زیردریایی مورد حمله ممکن است فرو برود. اما جنگنده‌های دیگر ۵۰ فوت را برای تنظیم انتخاب کردند، چون زیردریایی‌ها در عمق ۱۵۰ فوت دیگر دیده نمی‌شوند و در نتیجه مورد حمله قرار نمی‌گیرند. لذا بین گروه طرفداران تنظیم عمق و سطح انفجار اختلاف‌نظر وجود داشت و... .

یک حکایت جالب، داستان یک نامه!

در اینجا می‌خواهیم برایتان اندکی از تاریخ بگوییم و ماجرای جالب و خواندنی یک نامه. **نیلس هنریک آبل**[1]، ریاضی‌دان بنام نروژی، در سال ۱۸۰۲ متولد و به سال ۱۸۲۹ در حالی‌که تنها ۲۷ بهار از عمرش گذشته بود، به مرض سل درگذشت. آبل در سراسر عمر کوتاهش که همراه با مشقت و فقر و تنگدستی بسیار بود، دمی از تحقیق و مطالعه دست برنداشت و کارهای بسیار بزرگی نیز در همین مدت کوتاه انجام داد. از جملهٔ این کارها اثبات لاینحل بودن معادلات درجهٔ پنجم و ششم بود.[2] هنگامی که آبل موفق به این کشف شد، از آنجا که امکان انتشار آن را نداشت، تصمیم گرفت به خرج خودش آن را در شش صفحه (و به‌صورت خلاصه شده به زبان فرانسوی) منتشر کند. (قابل توجه آن‌هایی که امروزه به کمک اینترنت در مدت زمان اندک، به منابع بی‌شمار دسترسی یافته و یا آن‌ها را در اختیار همهٔ مردم جهان قرار می‌دهند!)

هنگامی که این رساله به دست **گاوس** (که آن زمان ریاضی‌دان مطرح و شناخته شده‌ای بود) رسید، بی‌آنکه آن را بخواند، آن را دور افکند و گفت: «این هم یکی از همان مزخرفات است!»

اما بعد از این مقدمه، به نامهٔ معروفی از آبل اشاره می‌کنیم که شامل مقاله‌ای معروف از او تحت عنوان «یادداشتی در یک خاصیت عمومی دستهٔ بسیار وسیعی از توابع متعالی» است. این مقالهٔ آبل مقدمه‌ای بر کشف شاخه‌ای جدید از آنالیز ریاضی است. آبل این نامه را در سال ۱۸۲۶ (سه سال قبل از فوتش) به آکادمی علوم پاریس عرضه کرد. **لژاندر، وکوشی** که هر دو از نام‌آوران ریاضی هستند، مأمور رسیدگی به آن شدند.

کوشی مقاله را به خانه‌اش برد و آن را گم کرد! لژاندر هم در سال ۱۸۲۹، در یکی از آخرین روزهای عمر آبل، در نامه‌ای به **ژاکوبی**، مقالهٔ آبل را «غیرقابل خواندن» نامید! یک سال بعد در سال ۱۸۳۰، کوشی مقاله را پیدا کرد! ولی آن را منتشر نکرد و سرانجام در سال ۱۸۴۱ موفق به گرفتن نامه از او شدند و تصمیم به چاپ آن گرفتند، ولی در حین چاپ، مقاله بار دیگر گم شد!

اما این پایان ماجرا نبود. در سال ۱۹۵۲ (حدود صد سال بعد) مقاله در شهر فلورانس ایتالیا کشف شد!

و امروزه در موزهٔ آثار این ریاضی‌دان بنام نگهداری می‌شود. گفته‌اند آبل علاوه بر نبوغ و استعداد فراوانی که در ریاضیات داشت، به لحاظ پاکی، صفای باطن و اخلاق نیز نمونه بوده است.

*پی‌نوشت

1. nils henrik abel

۲. در ریاضیات عالی (جبر پیشرفته) ثابت می‌کنند که هیچ راه‌حل کلی (الگوریتم) برای حل معادلات جبری درجهٔ پنجم و بالاتر از آن وجود ندارد.

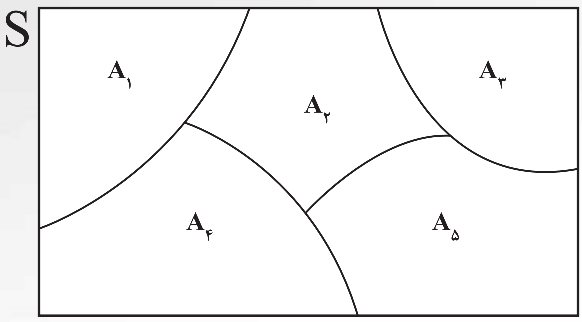
حمیدرضا امیری

افـــــرازهـــــا

فرض کنیم S مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک افراز از S، زیرتقسیمی از S است به زیرمجموعه‌های ناتهی و جدا از هم S. صراحتاً، یـــک افراز از S گردایه‌ای چون $\{A_i\}$ شامل زیرمجموعه‌های ناتهی S است، به‌طوری که:

الف) هر a در S به یکی از A_iها تعلق داشته باشد.

ب) مجموعه‌های موجود در گردایهٔ $\{A_i\}$ متمایز (جدا از هم) هســـتند؛ یعنـــی اگـــر: $A_i \neq A_j$، آن‌گاه: $A_i \cap A_j = \varnothing$



شکل ۱۱-۱

زیرمجموعه‌های موجود در این افراز را «سلول»ها می‌نامیم. شکل ۱۱-۱ نمودار وِن از یک افرازِ مجموعهٔ مستطیلی S از نقاط، به پنج سلول $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، $A_۴$ و $A_۵$ است.

مثال: گردایه‌های زیر از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,۹\}$ را در نظر بگیرید:

الف) $[\{۱,۳,۵\}, \{۲,۶\}, \{۴,۸,۹\}]$

ب) $[\{۱,۳,۵\}, \{۲,۴,۶,۸\}, \{۵,۷,۹\}]$

ج) $[\{۱,۳,۵\}, \{۲,۴,۶,۸\}, \{۷,۹\}]$

در این صورت «الف» افرازی از S نیست، چون ۷ در S به هیچ‌یک از زیرمجموعه‌ها تعلق ندارد. به‌علاوه، «ب» افرازی از S نیست چون، $\{۱,۳,۵\}$ و $\{۵,۷,۹\}$ جدا از هم نیستند. از طرف دیگر، «ج» یک افرازِ S است.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Partition .... افراز
2. nonempty .... ناتهی
3. Nonoverlapping .... جدا از هم
4. Collection .... گردایه
5. Belongs .... تعلق
6. Cell .... سلول، حفره
7. Venn diagram .... نمودار وِن
8. Rectangular .... مستطیل
9. Subset .... زیرمجموعه
10. Precisely .... صراحتاً

Partitions

Let S be a nonempty set. A partition of S is a subdivision of S into nonoverlapping, nonempty subsets. Precisely, a partition of S is a collection $\{A_i\}$ of nonempty subsets of S such that:

(i) Each a in S belongs to one of the A_i.

(ii) The sets of $\{A_i\}$ are mutually disjoint; that is, if

$$A_i \neq A_j \text{ then } A_i \cap A_j = \varnothing$$

The subsets in a partition are called cells. Figure 1-11 is a Venn diagram of a partition of the rectangular set S of points into five cells, A1, A2, A3, A4, and A5.

EXAMPLE 1.10. Consider the following collections of subsets of S={1,2,...,8,9}

(i) [{1,3,5}, {2,6}, {4,8,9}]

(ii) [{1,3,5}, {2,4,6,8}, {5,7,9}]

(iii) [{1,3,5}, {2,4,6,8}, {7,9}]

Then (i) is not a partition of S since 7 in S does not belong to any of the subsets. Furthermore, (ii) is not a partition of S since {1,3,5} and {5,7,9} are not disjoint. On the other hand, (iii) is a partition of S.

ترجمه برای دانش‌اموزان

Generalized Set Operation

The set operations of union and intersection were defined above for two sets. These operations can be extended to any number of sets, finite or infinite, as follows.

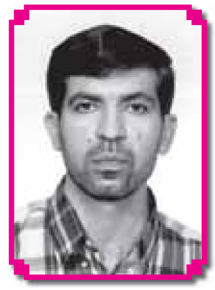
Consider first a finite number of sets say, $A_1, A_2, \ldots, A_m$. The union and intersection of these sets are denoted and defined, respectively, by

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \cup_{i=1}^{m} A_i = \{x: x \in A_i \text{ for some } A_i\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m = \cap_{i=1}^{m} A_i = \{x: x \in A_i \text{ for every } A_i\}$$

That is, the union consists of those elements which belong to at least one of the sets, and the intersection consists of those elements which belong to all the sets.

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.
مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۳۱۱. عدد گویای r را بیابید، به‌طوری که:

$$\tan^{-1}\frac{۱}{۳}+\tan^{-1}\frac{۱}{۴}+\tan^{-1}\frac{۲}{۹}=\pi r$$

۳۱۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$\tan^{-1}\frac{۱}{۱+۱+۱^{۲}}+\tan^{-1}\frac{۱}{۱+۲+۲^{۲}}+\ldots+\tan^{-1}\frac{۱}{۱+n+n^{۲}}<\frac{\pi}{۴}$$

۳۱۳. مقادیـــر a، b و c را بیابید، به‌طوری که برای تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داشته باشیم:

$$f(۰)=f(۱)=f(۲)=۱۳۹۶$$

۳۱۴. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی روبه‌رو را حل کنید.

$$\begin{cases} x^{۲}=y+\frac{۱}{۴} \\ y^{۲}=x+\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

۳۱۵. چنــد تابــع f از $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ بــه A می‌توان تعریف کرد به‌طوری‌که:

الف) $f(۲)>f(۳)$

ب) $f(۱)\neq f(۲)$

ج) برد تابع مجموعه‌ای دوعضوی باشد.

ابتدا مســئله را در ســه حالت جداگانه حل کنید. سپس در حالتی مسئله را حل کنید که سه شرط را با هم در نظر می‌گیرید.

۳۱۶. ایــن گزاره را ثابت یــا رد کنید: «زیرمجموعهٔ S از اعداد صحیــح نامنفی به‌گونه‌ای وجود دارد که هر عدد صحیح نامنفی را به‌صورت یکتایی به فرم x+۲y می‌توان نوشت؛ به قسمی که: x,y∈S.

۳۱۷. نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به ســه رأس مثلث وصل کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع طول دو پاره‌خط کوچک‌تر در میان PA، PB و PC با طول پاره‌خط بزرگ‌تر برابر است.

۳۱۸. در مســتطیل ABCD با طول قطر d، عمود AE را بر قطر BD رســم کرده‌ایم. اگــر طول اضلاع مســتطیل EFCG برابر ۱ و n باشد، ثابت کنید: $\sqrt[3]{d^2} = \sqrt[3]{n^2} + 1$. نقطــهٔ F روی DC و نقطهٔ G روی BG است.

۳۱۹. حاصل جمع ده جملهٔ متوالی از یک دنباله هندسی برابر ۱۸ و حاصل جمع معکوس‌های آن‌ها برابر ۶ است. حاصل‌ضرب این ده جمله را به‌دست آورید.

۳۲۰. حاصل‌ضــرب دو عدد ســه رقمی $\overline{2A5}$ و $\overline{13B}$ مضرب ۳۶ است، همهٔ مقادیر ممکن برای دو رقم A و B را بیابید.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۸۱. یــک ترازوی دو کفــه‌ای داریم که میزان نیســت (در حالی‌که هیچ وزنه یا شــیء روی کفه‌ها نیست، دو کفه در یک ارتفاع نیستند). از طرف دیگر، وزنه یا سنگ ترازو به هر میزانی که بخواهیم در اختیار داریم. راهی برای وزن کردن یک شــیء با وزن مجهول پیدا کنید.

در کفه‌ای که بالاتر است، آن‌قدر وزنهٔ معلوم می‌گذاریــم تا دو کفه در مقابل هم قرار گیرند و ترازو میزان شــود. اکنون ترازو میزان شده است و می‌توان هر شیء را وزن کرد.

۲۸۲. در کشــوری که ۵۰ شهر دارد، می‌خواهیم بین شــهرها خطوط هوایی برقرار کنیم؛ به‌طوری که بتوانیم از هر شــهر به شــهر دیگر با حداکثر ۱ توقف مســافرت کنیم. حداقل تعداد خطوط مستقیم بین شهرها را به‌دست آورید.

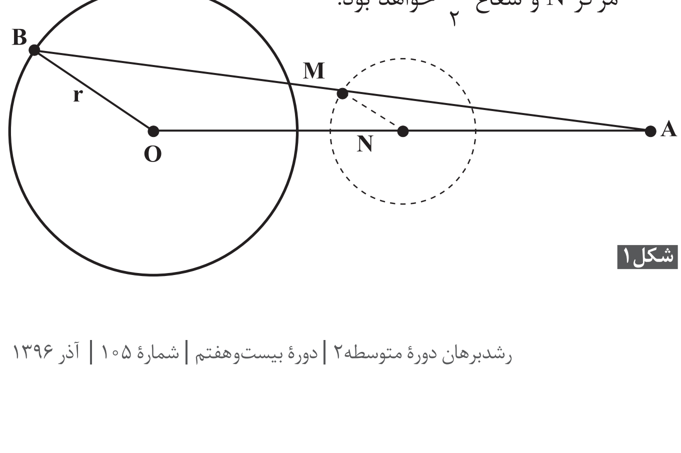
اگر متناظر با هر شهر یک رأس در گراف G در نظر بگیریم و هر دو شــهر با پرواز مستقیم را با یک یال به‌هم وصل کنیم، با توجه به شرایط مســئله، G باید همبند باشد. از طرف دیگر، هر گــراف همبند با n رأس، حداقل n-۱ یال دارد. پس تعــداد یال‌های G حداقل برابر ۴۹ خواهد بود. برای رســیدن به شــرایط خواسته شده، درخت G باید به شــکل ستاره باشد؛ یعنی یک رأس به ۴۹ رأس دیگر وصل باشد.

۲۸۳. از ظرفی که ۱۰ لیتر آب دارد، می‌خواهیم ۶ لیتر آب برداریم. دو پیمانه با اندازه‌های ۵ لیتری و ۹ لیتری در اختیار داریم. چطور می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

بــا پیمانهٔ ۵ لیتری، ۵ لیتر آب برمی‌داریم و تمام آن را در پیمانهٔ ۹ لیتری می‌ریزیم. ســپس یک‌بار دیگر بقیهٔ آب ظرف را در پیمانهٔ ۵ لیتری می‌ریزیم و ۴ لیتر آن‌را در پیمانه ۹ لیتری می‌ریزیم تا پر شــود. در نتیجه در پیمانهٔ ۵ لیتری، ۱ لیتر باقی می‌ماند. ۹ لیتر آب پیمانهٔ بزرگ‌تر را به ظرف ۱۰ لیتری برمی‌گردانیم. سپس ۱ لیتر آب پیمانهٔ کوچک‌تر را داخل پیمانه ۹ لیتری می‌ریزیم. قدم آخر این اســت که با پیمانهٔ کوچک‌تر ۵ لیتر آب برداریم و به پیمانهٔ بزرگ‌تر اضافه کنیم.

۲۸۴. نقطهٔ A خارج دایرهٔ C مفروض است. نقطهٔ متحــرک B را روی دایــره، و M را نقطهٔ میانی AB در نظر بگیرید. با حرکت B روی C، مکان هندسی M را بیابید.

مطابق شــکل اگر شعاع دایره، r و مرکز آن نقطهٔ O باشــد و M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و OA باشــند، آن‌گاه MN طولی برابر $\frac{r}{2}$ خواهد داشــت. در نتیجــه M روی دایره‌ای به مرکز N و شعاع $\frac{r}{2}$ خواهد بود.



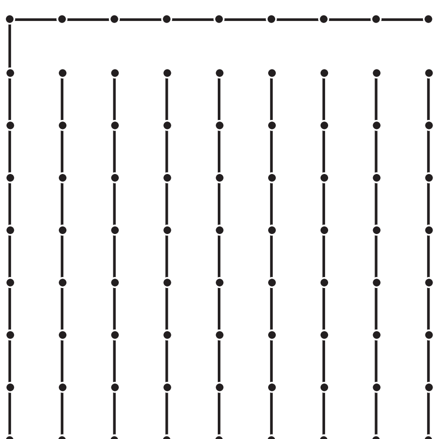
شکل ۱

۲۸۵. در یک کلاس تعداد دانشـــجویان دختر بیـــش از ۴۰ درصد و کمتـــر از ۵۰ درصد است. حداقل تعداد دانشجویان کلاس را بیابید.

اگـــر n تعـــداد کل دانشـــجویان و k تعداد دانشجویان دختر باشد، آن‌گاه باید: $\frac{۲}{۵} < \frac{k}{n} < \frac{۱}{۲}$. در نتیجه باید: $\frac{۲n}{۵} < k < \frac{n}{۲}$. با بررسی مقادیر اولیـــه برای n به عدد n=۷ می‌رســـیم و در این حالت: k=۳.

۲۸۶. با چوب کبریت یک جدول ۸×۸ ساخته‌ایم که شامل ۶۴ خانه یک‌دریک است. حداقل چند چوب کبریت را حذف کنیم، به‌طوری که بتوانیم از هـــر خانه جدول به هر خانهٔ دیگر جدول حرکت کنیم و مسیر حرکت هیچ چوب کبریتی را قطع نکند؟

اگر G را به این صورت تعریف می‌کنیم: به ازای هر خانهٔ جدول، رأسی در G در نظر می‌گیریم. هر دو رأس را که متناظر بـــا دو خانهٔ مجاور (با یک ضلع مشترک) هســـتند، با یک یال به هم وصل می‌کنیم. اگر ضلع مشـــترک آن‌ها را حذف کرده باشیم، چون می‌خواهیم از هر رأس به رئوس دیگر مسیری داشته باشیم، پس گراف G باید همبند باشـــد. در نتیجه G کم‌ترین تعداد یال را خواهد داشـــت؛ البته اگر یک درخت باشـــد. در نتیجه حداقل باید ۶۳ یال (چوب کبریت حذف شـــده) داشته باشد. شـــکل ۲ یک نمونه از جواب است.



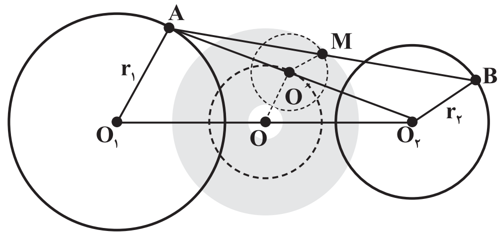
شکل ۲

۲۸۷. یک جعبهٔ در بـــاز با ابعاد صحیح داریم که قاعدهٔ آن مربع شـــکل و مساحت کل آن ۴۲۹ ســـانتی‌متر مربع است. ابعاد جعبه را بیابید، به‌طوری که جعبه بیشترین حجم را داشته باشد.

اگـــر x طـــول ضلـــع قاعـــده و y ارتفـــاع جعبـــه باشـــد، داریـــم: x(x+۴y)=۴۲۹، و یا: x(x+۴y)=۳×۱۱×۱۳. در نتیجـــه x برابر ۱، ۳، ۱۱، ۱۳ و یـــا مقداری بزرگ‌تر یا مســـاوی ۳۳ خواهد بود. اگـــر x=۱، آن‌گاه: y=۱۰۷ و حجم برابر ۱۰۷ خواهد بود. اگـــر x=۳، آن‌گاه y=۳۵ و حجم جعبه برابر ۳۱۵ خواهد شـــد. اگر x=۱۱ آن‌گاه y=۷ و حجم برابر ۸۴۷ خواهد شـــد. اگر x=۱۳، y=۵ و حجـــم جعبه برابر با ۸۴۵ خواهد شد. در حالتی که x≥۳۳ باشد، آن‌گاه: $x^۲>۴۲۹$ که غیرممکن اســـت. در نتیجه پاســـخ مســـئله (x,y)=(۱۱,۷) است.

۲۸۸. دو دایره به شعاع ۲ و ۴ در صفحه مفروض‌اند و فاصلهٔ مراکز آن‌ها برابر است با ۱۰. نقطهٔ متحرک A روی دایرهٔ اول و نقطهٔ متحرک B روی دایرهٔ دوم به‌طور مستقل می‌توانند حرکت کنند. مکان هندســـی M وســـط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

شـــعاع دایرهٔ بزرگ‌تر را $r_۱$ و مرکز آن را $O_۱$، و شـــعاع دایرهٔ کوچک‌تـــر را $r_۲$ و مرکز آن‌را $O_۲$ می‌نامیم. همچنین وســـط پاره‌خط $O_۱O_۲$ را O می‌نامیم. اگر A را به $O_۲$ وصل کنیم و وسط آن‌را بـــا ´O نمایش دهیـــم، آن‌گاه به راحتی می‌توان ثابـــت کرد: $OO' = \frac{r_۱}{۲}$ و $O'M = \frac{r_۲}{۲}$. حال اگر A را ثابـــت در نظر بگیریم و B را روی دایرهٔ دوم حرکت دهیم، M روی دایره‌ای به شـــعاع $\frac{r_۲}{۲}$ و مرکز ´O تغییر خواهد کرد. با تغییر A نیز مرکز ´O روی دایره‌ای به شـــعاع $\frac{r_۱}{۲}$ و مرکز O تغییر خواهد کرد. در نتیجه M در ناحیهٔ خاکســـتری رنگ با شـــعاع داخلی $\frac{r_۱ - r_۲}{۲}$ و شعاع خارجی $\frac{r_۱ + r_۲}{۲}$ تغییر می‌کند.



شکل ۳

۲۸۹. با فرض $a=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ریشه‌های معادلهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$\sqrt[۳]{x+a}=\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{x-a}$$

اگر $m=\sqrt[۳]{x+a}$ و $n=\sqrt[۳]{x-a}$، آن‌گاه داریم: $m-n=\sqrt[۳]{a}$.

پس: $(m-n)^۳=a$.

بنابراین: $m^۳-n^۳-۳mn(m-n)=a$.

در نتیجه:

$$x+a-(x-a)-۳\sqrt[۳]{x^۲-a^۲}(m-n)=a$$

که پس از ساده کردن ما را به معادلهٔ $\sqrt[۳]{x^۲-a^۲}=\frac{\sqrt[۳]{a^۲}}{۳}$ می‌رساند. با حل معادله به جواب $x=\sqrt{\frac{a^۲}{۲۷}+a^۲}=\frac{۲\sqrt{۲۱}}{۹}a$ می‌رسیم.

۲۹۰. با فرض $x_۱,x_۲,x_۳>۰$ و $\frac{۱}{۱+x_۱}+\frac{۱}{۱+x_۲}+\frac{۱}{۱+x_۳}=۱$ کمترین مقدار $P=x_۱x_۲x_۳$ را به‌دست آورید.

با تغییر متغیر $y_i=\frac{۱}{۱+x_i}$ خواهیم داشت: $x_i=\frac{۱-y_i}{y_i}$. در نتیجه:

$$x_۱x_۲x_۳=(\frac{۱-y_۱}{y_۱})(\frac{۱-y_۲}{y_۲})(\frac{۱-y_۳}{y_۳})$$
$$=\frac{۱}{y_۱y_۲y_۳}(y_۲+y_۳)(y_۱+y_۳)(y_۱+y_۲)$$

حال به کمک نامساوی واسطه‌ها خواهیم داشت:

$$x_۱x_۲x_۳\geq\frac{۲\sqrt{y_۲y_۳}\times۲\sqrt{y_۱y_۳}\times۲\sqrt{y_۱y_۲}}{y_۱y_۲y_۳}=۸$$

در نتیجه کمترین مقدار $x_۱x_۲x_۳$ برابر ۸ است و زمانی به این مقدار می‌رسیم که: $x_۱=x_۲=x_۳=۲$.

نسبت طلایی در ۱۶ اثر باستانی جهان

عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر ریاضی ارومیه

اشاره

این مقاله به بررسی ریاضیات حاکم بر ۱۶ اثر خارق‌العادهٔ معماری از دنیای قدیم می‌پردازد. این ۱۶ اثر شگفت‌انگیز در عین حال که هر کدام در جایگاه خود دارای ویژگی‌های منحصربه‌فرد و جالبی هستند، و با اینکه کیلومترها از هم فاصله دارند، فاصله‌های خاصی با یکدیگر دارند و همگی روی یک دایرهٔ بزرگ فرضی قرار دارند که همچون کمربندی دور زمین را احاطه کرده است. به‌همین سبب به نظر می‌رسد، ارتباط عجیبی میان آن‌ها وجود دارد. این بناهای عظیم و شگرف، قرن‌ها فیلسوفان، دانشمندان و جهان‌گردان را از نقاط متفاوت جهان مجذوب خود ساخته‌اند. در این مقاله به معرفی اجمالی این ۱۶ اثر پرداخته‌ایم و ردپای نسبت طلایی را در فواصل میان آن‌ها جست‌وجو خواهیم کرد.

کلیدواژه‌ها: دایره بزرگ، پی، فی، نسبت طلایی، آثار باستانی

مقدمات

مایل، اینچ و ارش مصری

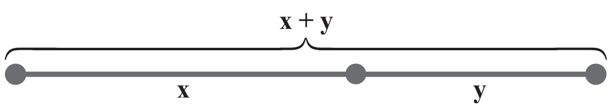
این سه واحدهای طول هستند. یک «مایل» معادل ۱۶۰۹/۳۴ متر و یک «اینچ» برابر ۲/۵۴ سانتی‌متر است. «ارش» که معادل انگلیسی آن «cubit» است، واحد طولی است که مصریان باستان از آن استفاده می‌کردند. هر ارش معادل ۲۰/۶۲۵ اینچ یا ۵۲/۳۸۷۵ سانتی‌متر است.

فی

حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد، ریاضی‌دان برجستهٔ یونان باستان، **اقلیدس**، در فصل چهارم از کتاب معروف «اصول» که تا ۱۰۰ سال پیش، از پرخواننده‌ترین کتاب‌های علمی بود، چنین نوشته است: «یک پاره‌خط مستقیم را می‌توان به دو قسمت کوچک و بزرگ آن‌چنان تقسیم کرد که نسبت طول پاره‌خط به جزء بزرگ برابر با نسبت طول جزء بزرگ به کوچک باشد.» او با حل جبری این مسئله دریافت که مقدار چنین نسبتی همواره معادل نصف جذر عدد پنج، به اضافهٔ یک، یا به‌طور تقریبی برابر ۱/۶۱۸ است؛ عدد گنگی که با حرف یونانی φ نمایش داده شد و «نسبت طلایی» نام گرفت:

$$\varphi=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

حل جبری این مسئله، به زبان امروزی چنین است:



$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}\Rightarrow x^{۲}=xy+y^{۲}$$
$$\Rightarrow x^{۲}-yx-y^{۲}=۰$$

پس از حل این معادله درجهٔ دوم دو ریشهٔ $x_۱=(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})y$ و $x_۲=(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})y$ برای x به‌دست می‌آید که به دلیل نامنفی بودن طول پاره‌خط، فقط $x=(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})y$ قابل قبول است و در نتیجه: $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$.

دو ویژگی جالب فی

۱. مربع فی یک واحد از خودش بزرگ‌تر است؛ یعنی: $\varphi^{۲}=\varphi+۱$.

۲. وارون فی از خودش یک واحد کمتر است؛ یعنی: $\frac{۱}{\varphi}=\varphi-۱$.

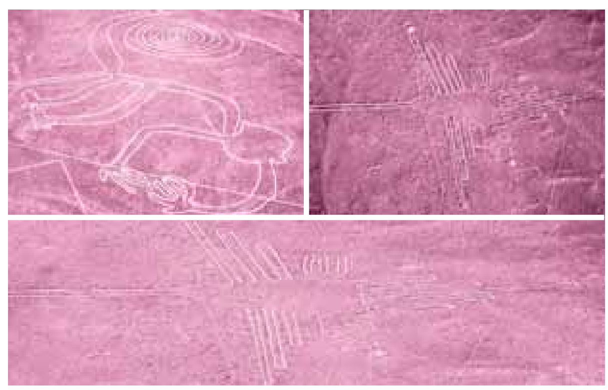
تمرین

این دو ویژگی را ثابت کنید.

معرفی مختصر ۱۶ اثر تاریخی

۱ جزیرهٔ ایســـتر[۱]: جزیره‌ای اســت متعلق به کشور شیلی که به‌خاطر تندیس‌های ۴۰۰ سالهٔ عجیب خود (موآیی) معروف است.

۲ نازکا[۲]: خطها و تصویرهای نازکا، مجموعهٔ خطهایی در صحرای نازکا در کشــور پرو هستند که توسط فرهنگ نازکا، بین ۲۰۰ پیش از میلاد تا ۷۰۰ میلادی، خلق شده‌اند، صدها شکل منحصربه‌فرد که از نظر پیچیدگی از خطهای ساده تا عنکبوت، مرغ مگس، میمون و مارمولک، دارای تنــوع هســتند. این خطها به جز از هــوا (و گاه فضا)، به‌صورت منســجم قابل تشخیص نیستند. از این‌رو حدس زده می‌شود که مردم نازکا هرگز نتوانستند کاری را که خلق کرده‌اند، به‌صورت منسجم ببینند.



۳ اولان تای‌تامبو[۳]: شــهر کوچک باستانی مربوط به امپراتوری «اینکا» در «پروی جنوبی»

۴ پاراتو آری[۴]: ترکیبی از شــکل‌های هــرم مانند که به‌طور طبیعی در جنوب کشــور «پرو» اطراف «آمازون» تشکیل شده‌اند. این مجموعه در ســال ۱۹۷۶ از فضا، توســط «مؤسسهٔ فضانوردی ناسا» کشف شد.

۵ غارهای طاســیلی ناجر[۵]: این غارها با بیــش از ۱۵۰۰۰ طراحی و حکاکی متعلق به ۲۵۰۰۰ سال پیش از میلاد مسیح تا قرن اول میلادی، حاوی نقاشــی‌های مرموزی هستند که نشان از وجود تمدن در حدود ۳۰۰۰۰ سال پیش دارند.

۶ جیزه[۶]: سومین شهر بزرگ کشور مصر که شهرتش به واسطهٔ اهرام ثلاثه و مجسمه‌ای به نام «ابوالهول» است.

۷ **پترا**[۷]: شهری تاریخی با معماری شگفت‌انگیز در کشور «اردن» است که قدمت ۲۵۰۰ ساله دارد.

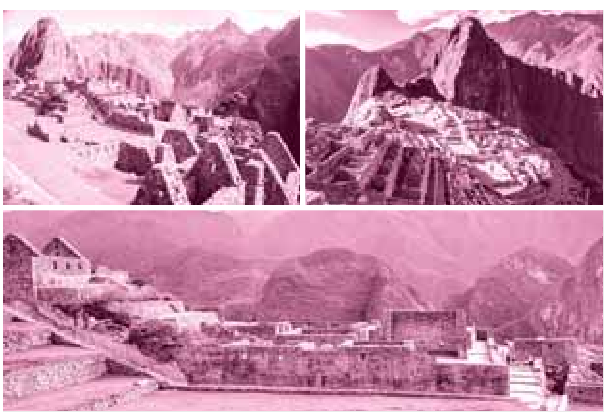
۸ **پرسپولیس**[۸]: نام یکی از شهرهای باستانی ایران است. کاخی به نام تخت‌جمشید در آن وجود داشته که در سال ۵۱۸ پیش از میلاد بنایش آغاز شده است. در این کاخ نسبت ارتفاع سردرها به عرض آن‌ها و نیز ارتفاع ستون‌ها به فاصلهٔ بین دو ستون، برابر نسبت طلایی بوده است.

۹ **پیای**[۹]: شهرکی با معماری جالب در کشور «میانمار».

۱۰ **سوخوتای**[۱۰]: شهر قدیمی سوخوتای تایلند، محل بسیار مناسبی برای عکاسان و علاقه‌مندان به تاریخ است. قدمت این شهر به قرن سیزدهم میلادی برمی‌گردد.

۱۱ **جزیرهٔ آناتوم**[۱۱]: جنوبی‌ترین جزیرهٔ مسکونی در کشور «وانواتو» که دارای مناظر و طبیعت خارق‌العاده‌ای است.

۱۲ **ماچوپیچو**[۱۲]: پربازدیدترین مکان گردشگری کشور «پرو» و از عجایب هفتگانهٔ جدید جهان است که قدمت ۵۰۰ ساله دارد.



۱۳ سـیـیو[۱۳] : نام یک آبادی در کشور مصر اســت و قدمت آن به ۳۰۰۰ سال می‌رسد.

۱۴ موهنجودارو[۱۴] : به معنای «تپهٔ مردگان»، در کشور پاکستان. این اثر باستانی شاهد بلامنازعی بر عظمت تمدنی است که از ۵۰۰۰ سال پیش در پاکستان شکوفا شد.

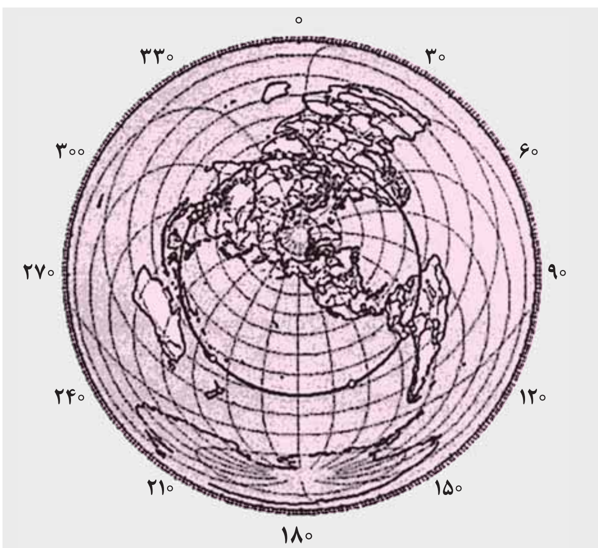
۱۵ آنگکور[۱۵] : شــهری در شــمال‌غربی کامبوج که در قرن نهم میلادی ساخته شده است.

۱۶ اور[۱۶] : نام شهری باستانی در عراق مربوط به تمدن سومری که قدمت آن به ۳۸۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد.

این ۱۶ مورد از سه حیث جالب توجه هستند:

۱. این آثار جاذبه‌ها و شگفتی‌های خاص خود را دارند.

۲. به موقعیت این ۱۶ مکان روی کرهٔ زمین در تصویر زیر توجه کنید.

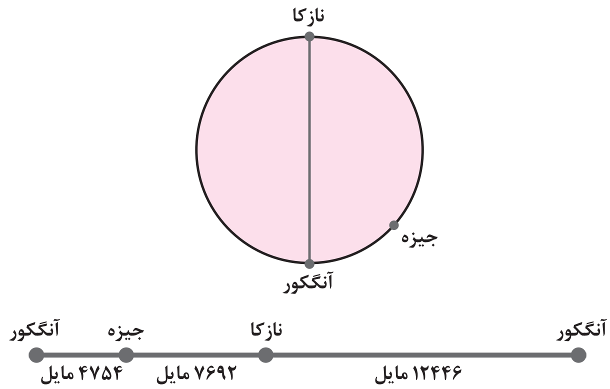


این ۱۶ اثــر، روی دایــره‌ای واحد که همچــون کمربندی به دور زمین کشــیده شده است، هم‌ردیف هســتند. به بیان دقیق‌تر، شــش مورد اول دقیقاً روی دایره، موارد هفــت تا یازده با اختلاف حداکثــر یک دهم درجه (حداکثــر ۱۰ کیلومتر) و موارد دوازده تا شــانزده، حداکثر به اندازهٔ یک چهارم درجه (حداکثر ۶۰ کیلومتر) از دایــرهٔ اصلی فاصله دارند. در جدول زیــر مختصات و فاصلهٔ این نقــاط تا دایرهٔ بــزرگ آمده‌اند. محیط این دایــره ۲۴۸۹۲ مایل و شــعاع آن ۳۹۶۲ مایل، با محیط و شعاع استوایی زمین هم‌خوانی دارد.

نام فارسی	نام لاتین	عرض جغرافیایی	طول جغرافیایی	فاصله تا دایره‌ای بزرگ
جزیرهٔ ایستر	Easter Island	۲۷°۶´ جنوبی	۱۰۹°۴۲´ غربی	۰ مایل
نازکا	Nazca	۱۴°۴۲´ جنوبی	۷۵°۶´ غربی	۰ مایل
اولان تای تامبو	Ollantaytambo	۱۳°۱۵´ جنوبی	۷۲°۱۶´ غربی	۰ مایل
پاراتوآری	Paratoari	۱۲°۴۸´ جنوبی	۷۱°۲۵´ غربی	۰ مایل
طاسیلی ناجر	Tassili n'ajjer	۲۶°۳۲´ شمالی	۹°۵۰´ شرقی	۰ مایل
جیزه	Giza	۲۹°۵۹´ شمالی	۳۱°۹´ شرقی	۰ مایل
پترا	Petra	۳۰°۱۹´ شمالی	۳۵°۲۸´ شرقی	۶ مایل
پرسپولیس	Persepolis	۲۹°۵۶´ شمالی	۵۲°۵۵´ شرقی	۵ مایل
پیای	Pyay	۱۹°۱۵´ شمالی	۹۵°۵´ شرقی	۵ مایل
سوخوتای	Sukhothai	۱۷°۱´ شمالی	۹۹°۴۲´ شرقی	۵ مایل
جزیرهٔ آناتوم	Aneityum Island	۲۰°۱۰´ جنوبی	۱۶۹°۴۸´ شرقی	۸ مایل
ماچوپیچو	Machupicchu	۱۳°۶´ جنوبی	۷۲°۳۵´ غربی	۱۵ مایل
سیوه	Siwa	۲۹°۱۴´ شمالی	۲۵°۳۱´ شرقی	۱۰ مایل
موهنجودارو	Mohenjo Daro	۲۷°۱۵´ شمالی	۶۸°۱۷´ شرقی	۲۰ مایل
آنگکور	Angkor	۱۴°۲۴´ شمالی	۱۰۴°۴۰´ شرقی	۲۵ مایل
اور	Ur	۳۰°۵۷´ شمالی	۴۶°۷´ شرقی	۴۰ مایل

۳. نکتهٔ جالب توجه و در واقع اصلی‌ترین موضوع بحث این مقاله، فاصله‌های شگرفی است که این نقاط با هم دارند. بین این فاصله‌ها می‌توان ردپای نسبت طلایی را به کرات دید. به دلیل محدودیت حجم مقاله، به ذکر یک مورد اکتفا و از خوانندگان علاقه‌مند دعوت می‌کنیم که به مقالهٔ «The prehistoric alignment of world wonders» اثر **جیم آلیسون**[17] مراجعه کنید.

موقعیت معبد آنگکور، هرم جیزه و مرغ مگس از مجموعهٔ خط‌های نازکا و فاصلهٔ بین آن‌ها در شکل‌هایی که در ادامه به نمایش گذاشته شده است.



همان‌طور که قبلاً اشـــاره شد، محیط دایرهٔ بزرگی که ۱۶ اثر یاد شده روی آن هم‌ردیف هســـتند، ۲۴/۸۹۲ مایل است. معبد آنگکور از هــرم جیزه ۴۷۵۴ مایل و هرم جیزه از نــازکا ۷۶۹۲ مایل فاصله دارد. اگــر این دو فاصله را جمع کنیم، عدد ۱۲۴۴۶ مایل به دســت می‌آید (نصف محیط دایرهٔ بزرگ). یعنی روی دایره، انگکور و نازکا در نقطهٔ مقابل هم قرار دارند و دو ســطر قطری از دایره هستند. حال به تناسبات زیر توجه کنید:

$$\frac{۷۶۹۲}{۴۷۵۴}=\frac{۷۶۹۲+۴۷۵۴}{۷۶۹۲}\approx ۱/۶۱۸$$

$$\frac{۱۲۴۴۶}{۷۶۹۲}=\frac{۱۲۴۴۶+۷۶۹۲}{۱۲۴۴۶}\approx ۱/۶۱۸$$

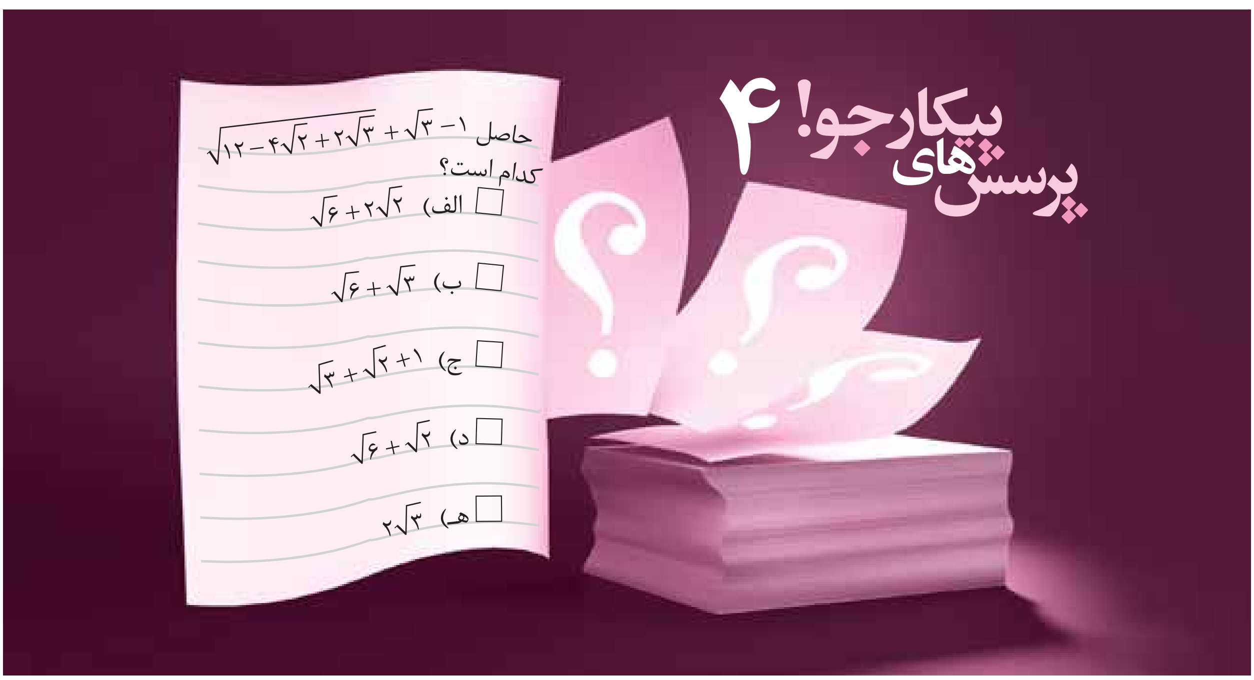
در واقع پاره‌خط و اصل آنگکور و نازکا توســط جیزه به نســبت طلایی به دو قطهٔ بزرگ و کوچک تقســیم شــده اســت؛ همچنین پاره‌خط واصل جیزه و آنگکور توسط نازکا.

***پی‌نوشت‌ها**

1. Easter Island
2. Nazca
3. ollan tay tambo
4. Para toary
5. Tassili n'ajjer
6. Giza
7. Petra
8. Persepolis
9. Pyay
10. Sukotai
11. Anatom Island
12. Machupiccho
13. Siwa
14. Mohenjo Daro
15. Angkor
16. Ur
17. jim Alison

***منابع**

۱. اطلس جامع گیتاشناســی ۸۷-۸۶. طرح،تهیه، کارتوگرافی رایانه و چاپ از مؤسسهٔ جغرافیایی و کارتوگرافی گیتاشناسی (۱۳۸۶). زیرنظر سعید بختیاری. تهران. چاپ اول.
۲. جعفری، عبــاس (۱۳۶۶). فرهنگ بزرگ گیتاشناســی (اصطلاحات جغرافیایی). انتشارات گیتاشناسی. تهران. چاپ اول.
۳. قراگوزلو، جلیل ا... (۱۳۷۴). مثلثات پایه. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ شانزدهم.
۴. قلعه پوراقدم، عباس (۱۳۹۴). «فی، پی و هرم بزرگ مصر». مجلهٔ رشد برهان ریاضی متوسطهٔ ۲. شمارهٔ ۸۹. دورهٔ ۲۴.
5. Alison, jim. A new look at an old design. the prehistoric alignment of world wonders.
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Nazca lines.
7. http://en.wikipedia.org/wiki/Tassili n'Ajjer
8. lemesurier, peter. (1977). the great pyramid decoded
9. meisner, gary. (august 18. 2012), phi, pi and the great pyramid of EGYPT at GIZA.



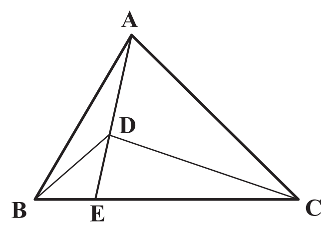
هوشنگ شرقی، محمدتقی طاهری تنجانی
محمود داورزنی، آناهیتا کمیجانی

هندسهٔ ۱

۱. الف) ثابت کنید اگر: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$، آن‌گاه: $\frac{a-c}{b-d}=\frac{e}{f}$ $(b\neq d)$.

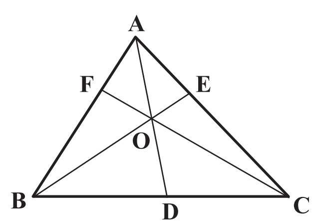
ب) در شکل زیر ثابت کنید:

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}}=\frac{BE}{EC}$$

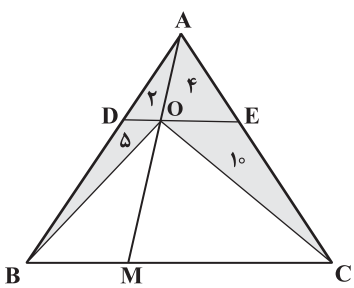


ج) در مثلث ABC خطوط AD، BE و CF در نقطهٔ O همرس‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=۱$$



۲. در شکل مقابل مساحت هر مثلث با عدد درون آن مشخص شده است. اگر AM=۱۰cm طول OM را به‌دست آورید.



هندسهٔ ۲

۱. در مثلث ABC، می‌دانیم مجموع AB و AC شش واحد بزرگ‌تر از BC است. از نقطهٔ برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های B و C عمودی بر AC رسم می‌کنیم. اگر پای این عمود نقطهٔ H باشد، طول AH را به‌دست آورید.

۲. نسبت مساحت‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای معین محاط شده و بر آن محیط شده‌اند.

۳. ثابت کنید مربع تنها چهارضلعی است که هم محیطی و هم محاطی است و مرکزهای دایره‌های محاطی و محیطی آن برهم منطبق‌اند.

ریاضی(۳) تجربی

۱. دامنهٔ توابع گویای زیر را به‌صورت بازه بنویسید.

الف) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2-2x-3}$

ب) $g(x)=\frac{x^3+2}{x^2+x+1}$

۲. برد تابع زیر را به‌دست آورید:

$f(x)=-2-\sqrt{x+a}$

۳. با رسم نمودار تابع‌های با ضابطه‌های داده شده، مشخص کنید کدام‌یک از آن‌ها یک‌به‌یک است. ($x\in[-2,2]$)

الف) $y=x+[x]$

ب) $y=x-[x]$

۴. اگر داشته باشیم: $f(x)=|x|-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$، دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ را به‌دست آورید.

ریاضی
(پایهٔ دهم)

۱. اگر $0<a<1$، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$|a-\sqrt{a}|-|\sqrt[3]{a}-a|-|a^2-\sqrt{a}|$

۲. اگر $a<0$، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$\sqrt{-4a^3}-\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[4]{a^4}$

۳. اگر $3x+\frac{1}{x}=5$، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$x^3+\frac{1}{27x^3}$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را تجزیه کنید:

الف) x^9-y^9 **ب)** $2a^3-a^2-2a+1$

۵. مخرج هر یک از کسرهای زیر را گویا کنید:

الف) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{4}}$ **ب)** $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

حسابان (۳)

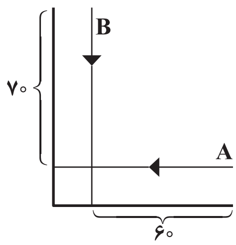
۱. اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ با دامنهٔ $D_f=(0,+\infty)$ داده شده باشد، ضابطهٔ تابع معکوس آن را مشخص کنید و $f^{-1}(\sqrt{3})$ را به‌دست آورید.

۲. اگر $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$، دامنهٔ تابع fof را به‌دست آورید و نشان دهید:

$(fof)(x)=x$

۳. دو خودرو A و B به سمت محل تلاقی دو جاده (مطابق شکل) در حرکت‌اند. فاصلهٔ خودرو A از محل تقاطع ۶۰ کیلومتر و فاصلهٔ خودرو B از محل تلاقی ۷۰ کیلومتر است. هر دو خودرو با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در حرکت‌اند.

الف) پس از ۳۰ دقیقه فاصلهٔ بین دو خودرو چند کیلومتر است؟



ب) فاصلهٔ بین دو خودرو را برحسب کیلومتر به عنوان تابعی از زمان (برحسب دقیقه) به‌دست آورید.

۴. ویژگی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $[x+n]=[x]+n \quad (n\in Z)$

ب) $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$

آمار و احتمال
(پایهٔ یازدهم)

۱. فرض کنید در استان مرکزی ۲۵ درصد جرائم در طول روز و ۸۰ درصد جرائم در شهر صورت می‌گیرند. اگر تنها ۱۰ درصد جرائم خارج از شهر و در طول روز واقع شوند، در این صورت چند درصد جرائم، داخل شهر و در طول شب اتفاق می‌افتند؟ چند درصد آن‌ها خارج از شهر و در طول شب اتفاق می‌افتند؟

۲. عددی به تصادف از مجموعهٔ $\{1,2,3,...,1000\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد بر ۴ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۶ بخش‌پذیر نباشد، چقدر است؟

۳. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، ثابت کنید:

$P(A\cap B)\ge P(A)+P(B)-1$

۴. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول سه برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول در هر بار پرتاب است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی کوچک‌تر از ۴ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید.

۵. اگر $S=\{a,b,c\}$ فضای نمونه‌ای و $P(\{a,b,c\})=\frac{3}{4}$ و $P(\{a,c,d\})=\frac{4}{5}$ باشد، $P(\{a,c\})$ را محاسبه کنید.

۶. اگر در فضای نمونه‌ای $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ داشته باشیم: $(1\le i\le 4)\ P(x_i)=\frac{1}{i}P(x_i+1)$، حاصل $P(\{x_2,x_4\})$ را به‌دست آورید.

حل مسائل هندسهٔ ۱

۱. الف)

$$\frac{e}{f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow a=bk, c=dk$$

$$\Rightarrow \frac{a-c}{b-d}=\frac{bk-dk}{b-d}=\frac{(b-d)k}{b-d}=k$$

$$\Rightarrow \frac{a-c}{b-d}=\frac{e}{f}$$

ب) به کمک ویژگی نسبت مساحت‌ها (قضیهٔ کتاب درسی) داریم:

$$\frac{S_{ABE}}{S_{ACE}}=\frac{BE}{CE}, \frac{S_{BDE}}{S_{CDE}}=\frac{BE}{CE}$$

و به کمک ویژگی (الف) داریم:

$$\frac{S_{ABE}-S_{BDE}}{S_{ACE}-S_{CDE}}=\frac{BE}{CE} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} \Rightarrow \frac{BE}{CE}$$

ج) به کمک ویژگی ثابت شده در (ب) داریم:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}=\frac{BD}{DC}, \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}=\frac{CE}{EA}, \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}=\frac{AF}{FB}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}\times\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}\times\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}=1$$

۲. با توجه به مقدار مساحت‌ها داریم:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{S_{AOD}}{S_{DOB}}=\frac{2}{5}, \frac{AE}{EC}=\frac{S_{AOE}}{S_{OEC}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

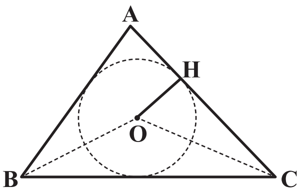
$$\Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \overset{\text{عکس قضیهٔ تالس}}{\Longrightarrow} DE \parallel BC$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{OM}=\frac{AD}{DB}=\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{\overbrace{AO+OM}^{10}}{OM}=\frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow OM=\frac{50}{7}$$

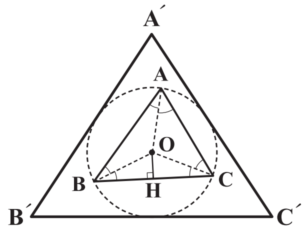
حل مسائل هندسهٔ ۲

۱. نقطهٔ O، نقطهٔ همرسی نیم‌سازها و در نتیجه مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث است. بنابراین OH=r شعاع دایره و AH=p-a:



$$AH=p-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}=\frac{6}{2}=3$$

۲. O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. بنابراین نقطهٔ همرسی نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی مثلث است و در نتیجه:



$$OA=OB=OC \Rightarrow O\hat{C}B=O\hat{B}C=30^\circ$$

$$\Rightarrow OH=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}r, CH=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{3}r \Rightarrow S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3}r)^2$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

اما دایرهٔ فوق، دایرهٔ محاطی مثلث A´B´C´ است. بنابراین:

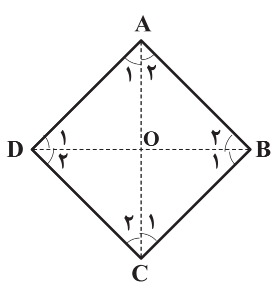
$$r=\frac{S_{A'B'C'}}{P_{A'B'C'}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}B'C'^2}{\frac{3B'C'}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}B'C'$$

$$\Rightarrow B'C'=\frac{6r}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}r$$

$$S_{A'B'C'}=\frac{\sqrt{3}}{4}B'C'^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(12r^2)=3\sqrt{3}r^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=4$$

۳. فرض کنیم ABCD محیطی باشد. در این صورت نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی چهارضلعی در نقطهٔ O (مرکز دایرهٔ محاطی) همرس‌اند. اما چون ABCD محاطی هم است و O مرکز دایرهٔ محیطی آن است، بنابراین: OA=OB=OC=OD=R.



یعنی مثلث‌های AOB، BOC، COD و AOC متساوی‌الساقین هستند و لـــذا: $\hat{A}_۲ = \hat{B}_۲$ و در نتیجـــه: $۲\hat{A}_۲ = ۲\hat{B}_۲$ و $\hat{A} = \hat{B}$. به‌همین صورت: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$ و چون $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰^\circ$، پس: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ$ و در نتیجه ABCD مربع است.

پاسخ مسائل ریاضی(۳) تجربی

۱. الف) مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۳, x = -۱ \Rightarrow D_f = R - \{-۱, ۳\}$$

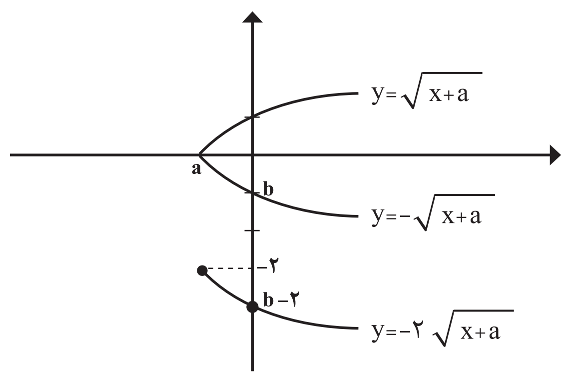
نمای بازه‌ای $D_f = (-\infty, -۱) \cup (-۱, ۳) \cup (۳, +\infty)$

ب) $x^۲ + x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = (۱)^۲ - ۴(۱)(۱) = -۳ < ۰$

بنابراین معادله جواب ندارد، یعنی:

$$D_g = R = (-\infty, +\infty)$$

۲. a را نقطه‌ای دلخواه فرض می‌کنیم:



$$\Rightarrow R \quad = (-\infty, - \quad]$$

۳. قسمت الف) نمودار تابع را در بازه $[-۲,۲]$ رسم می‌کنیم:

الف) $y = x + [x]$

$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = x - ۲$ بسته $\left|\begin{matrix}-۲\\ -۴\end{matrix}\right.$ باز $\left|\begin{matrix}-۱\\ -۳\end{matrix}\right.$

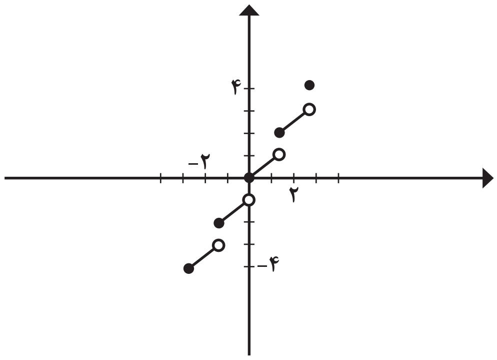
$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = x - ۱$ بسته $\left|\begin{matrix}-۱\\ -۲\end{matrix}\right.$ باز $\left|\begin{matrix}۰\\ -۱\end{matrix}\right.$

$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = x$ بسته $\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right.$ باز $\left|\begin{matrix}۱\\ ۱\end{matrix}\right.$

$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = x + ۱$ بسته $\left|\begin{matrix}۱\\ ۲\end{matrix}\right.$ باز $\left|\begin{matrix}۲\\ ۳\end{matrix}\right.$

$x = ۲ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = x + ۲$ نقطه $(۲, ۴)$

با رســم خطوط موازی محور xها مشــخص می‌شــود که این تابع یک‌به‌یک است.



قسمت ب) نمودار تابع را در بازه $[-۲,۲]$ رسم می‌کنیم:

ب) $y = x - [x]$

$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = x + ۲$ بسته $\left|\begin{matrix}-۲\\ ۰\end{matrix}\right.$ باز $\left|\begin{matrix}-۱\\ ۱\end{matrix}\right.$

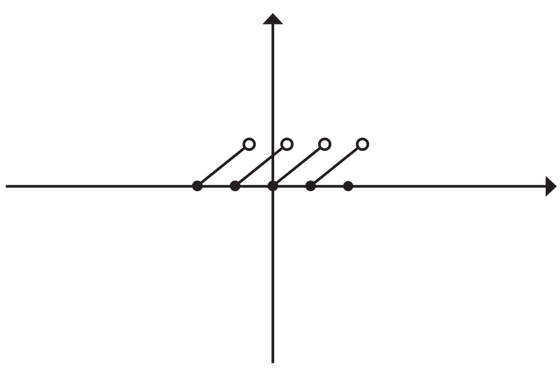
$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = x + ۱$ بسته $\left|\begin{matrix}-۱\\ ۰\end{matrix}\right.$ باز $\left|\begin{matrix}۰\\ ۱\end{matrix}\right.$

$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = x$ بسته $\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right.$ باز $\left|\begin{matrix}۱\\ ۱\end{matrix}\right.$

$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = x - ۱$ بسته $\left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right.$ باز $\left|\begin{matrix}۲\\ ۱\end{matrix}\right.$

$x = ۲ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = ۲ - ۲ = ۰$ نقطه $(۲, ۰)$

با رســم خطوط موازی محور xها مشــاهده می‌شــود کــه این تابع یک‌به‌یک نیست.



۴.

$$(\frac{g}{f})(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{|x| - ۱}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \,|\, f(x) = ۰\}$$

$$D_f = R, D_g = [۰, +\infty)$$

$$f(x) = ۰ \Rightarrow |x| - ۱ = ۰ \Rightarrow |x| = ۱ \quad \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = R \cap [۰, +\infty) - \{۱, -۱\} = [۰, +\infty) - \{۱\}$$

پاسخ مسائل ریاضی دهم

۱. اگر $0<a<1$، در این‌صورت: $a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}$. بنابراین:

$$\left|a-\sqrt{a}\right|-\left|\sqrt[3]{a}-a\right|-\left|a^2-\sqrt{a}\right|$$
$$=\sqrt{a}-a-(\sqrt[3]{a}-a)-(\sqrt{a}-a^2)=a^2-\sqrt[3]{a}$$

۲. در حالت کلی می‌دانیم که $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a| & n\ \text{زوج}\\ a & n\ \text{فرد}\end{cases}$، بنابراین:

$$\sqrt{-4a^3}-\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[4]{a^4}=\sqrt{(4a^2)(-a)}-a-|a|$$
$$=2|a|\sqrt{-a}-a-|a|$$

و چون: $a<0$، پس: $|a|=-a$. بنابراین عبارت بالا برابر است با:

$$-2a\sqrt{-a}-a-(-a)=-2a\sqrt{-a}$$

۳.

$$3x+\frac{1}{x}=5\Rightarrow x+\frac{1}{3x}=\frac{5}{3}\Rightarrow (x+\frac{1}{3x})^3=(\frac{5}{3})^3$$
$$\Rightarrow x^3+3x^2(\frac{1}{3x})+3x(\frac{1}{9x^2})+\frac{1}{27x^3}=\frac{125}{27}$$
$$\Rightarrow (x^3+\frac{1}{27x^3})+(x+\frac{1}{3x})=\frac{125}{27}$$
$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{27x^3}=\frac{125}{27}-\frac{5}{3}=\frac{125-45}{27}=\frac{80}{27}$$

۴.

الف) $x^9-y^9=(x^3)^3-(y^3)^3$
$$=(x^3-y^3)(x^3+x^3y^3+y^3)$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^3+x^3y^3+y^3)$$

ب) $2a^3-a^2-2a+1=(2a^3-2a)-(a^2-1)$
$$=2a(a^2-1)-(a^2-1)$$
$$=(a^2-1)(2a-1)$$
$$=(a-1)(a+1)(2a-1)$$

۵.

الف) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{2-\sqrt[3]{4}}\times\frac{4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}{4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$
$$=\frac{4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}{8-4}=\frac{4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}{4}$$

ب) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}\times\frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}$
$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}$$
$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$$

پاسخ مسائل حسابان

۱.

$$y=\frac{x^2-1}{2x}\Rightarrow 2xy=x^2-1$$
$$\Rightarrow x^2-2xy-1=0$$
$$x=\frac{-2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=-y\pm\sqrt{y^2+1}$$

چون در فرض مسئله $x>0$، پس جواب منفی قابل قبول نیست و: $x=-y+\sqrt{y^2+1}$. در نتیجه:

$$f^{-1}(x)=-x+\sqrt{x^2+1}$$
$$f^{-1}(\sqrt{3})=-\sqrt{3}+\sqrt{4}=2-\sqrt{3}$$

۲.

$$D_f=R-\{-1\}$$
$$D_{fof}=\left\{x\,\middle|\,x\in R-\{-1\},\frac{1-x}{1+x}\in R-\{-1\}\right\}$$

معادلهٔ $\frac{1-x}{1+x}=-1$ جوابی ندارد. (چرا؟) بنابراین شرط دوم برای D_{fof} برقرار است و در نتیجه: $D_{fof}=R-\{-1\}$

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=\frac{2x}{2}=x$$

۳. الف) پس از ۳۰ دقیقه خودروی A در فاصلهٔ $60-60(\frac{30}{60})=30$ کیلومتری تقاطع و خودروی B در فاصلهٔ $70-60(\frac{30}{60})=40$ کیلومتری محل تقاطع هستند.

فاصلهٔ بین دو خودرو برابر است با:

$$AB=\sqrt{30^2+40^2}=\sqrt{2500}=50\,Km$$

ب) در زمان t برحسب دقیقه خودروی A در فاصلهٔ $60-60(\frac{t}{60})=60-t$ و خودروی B در فاصلهٔ $70-t$ از محل تقاطع قرار دارند. فاصلهٔ A و B از یکدیگر برابر است با:

$$S(t)=\sqrt{(60-t)^2+(70-t)^2}$$

۴. الف) فرض کنید: $[x+n]=t$. داریم:

$$t\le x+n\le t+1$$
$$\underbrace{t-n\le x\le(t-n)+1}_{\text{دو عدد متوالی‌اند}}\Rightarrow[x]=t-n$$
$$\Rightarrow[x]+n=t\Rightarrow[x]+n=[x+n]$$

ب)

$$x\in Z\Rightarrow[x]=x$$
$$x\in Z\Rightarrow[x]+[-x]=x+(-x)=0$$
$$x\notin Z\Rightarrow x=n+p,n\in Z,0<p<1$$
$$[x]=[x+p]=n$$
$$[-x]=[-n-p]=-n+[-p]=-n-1$$
$$[x]+[-x]=n+(-n-1)=-1$$
$$\Rightarrow[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$$

پاسخ مسائل آمار و احتمال (پایهٔ یازدهم)

۱. فرض کنیم A پیشامد وقوع جرم در روز و B پیشامد وقوع جرم در شهر باشد، در این صورت $P(A)=۰/۲۵$ ، $P(B)=۰/۸$ و $P(A\cap B')=۰/۱$ مطلوب مسئله $P(A'\cap B)$ است.

$$P(A\cap B')=۰/۱\Rightarrow P(A-B)=۰/۱$$
$$\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=۰/۱\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۳۵$$
$$P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$
$$=۰/۸-۰/۳۵=۰/۴۵$$

۲. فرض کنیم A و B به ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیری عدد انتخاب شده بر ۴ و ۶ باشد. حکم مسئله P(A–B) است.

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۴}]}{۱۰۰}-\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۱۲}]}{۱۰۰۰}=\frac{۱۶۶}{۱۰۰۰}$$

۳. از رابطهٔ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ استفاده می‌کنیم.

با توجه به اینکه: $P(A\cup B)\leq ۱$، پس:

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq ۱$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-۱$$

۴.

$$P(۱)=P(۴)=P(۶)=x,$$
$$P(۲)=P(۳)=P(۵)=۳x$$
$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow P(۱)+P(۲)+...+P(۶)=۱$$
$$\Rightarrow x+۳x+۳x+x+۳x+x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$$
$$A=\{۱,۲,۳\}\Rightarrow P(A)=P(۱)+P(۲)+P(۳)=۷x=\frac{۷}{۱۲}$$

۵.

$$S=\{a,b,c,d\}\Rightarrow \underbrace{P(a)+P(b)+P(c)}_{P(\{a,b,c\})}+P(d)=۱$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}+P(d)=۱\Rightarrow P(d)=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow P(\{a,c,d\})=P(\{a,c\})+P(d)=\frac{۴}{۵}$$
$$\Rightarrow P(\{a,c\})=\frac{۴}{۵}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۱}{۲۰}$$

۶.

$$P(x_i)=\frac{۱}{i}P(x_{i+۱})$$
$$\Rightarrow P(x_۱)=P(x_۲),P(x_۲)=\frac{۱}{۲}P(x_۳),$$
$$P(x_۳)=\frac{۱}{۳}P(x_۴),P(x_۴)=\frac{۱}{۴}P(x_۵)$$

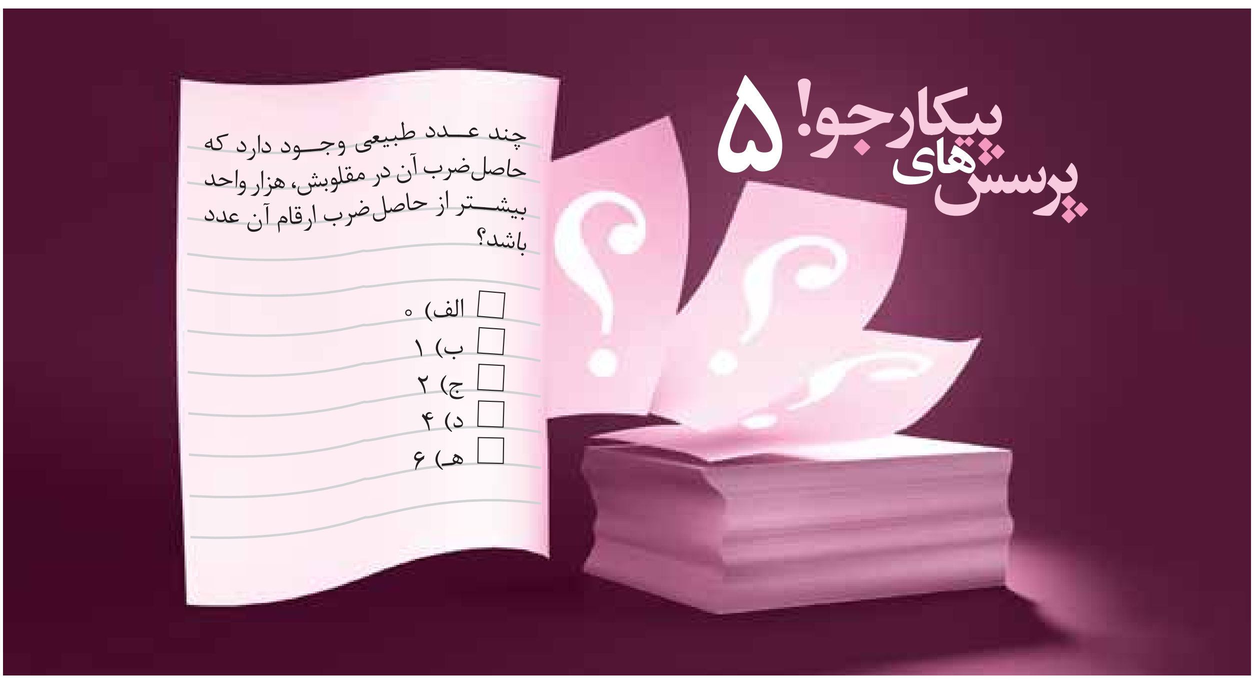
فرض می‌کنیم: $P(x_۱)=a$

بنابراین:

$$S=\{x_۱,x_۲,...,x_۵\}$$
$$\Rightarrow P(x_۱)+P(x_۲)+P(x_۳)+P(x_۴)+P(x_۵)=۱$$
$$\Rightarrow a+a+۲a+۳(۲a)+۴(۶a)=۱\Rightarrow ۳۴a=۱$$
$$\Rightarrow a=\frac{۱}{۳۴}$$

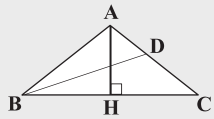
پس:

$$P(\{x_۲,x_۴\})=P(x_۲)+P(x_۴)=a+۲۴a=۲۵a=\frac{۲۵}{۳۴}$$



پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱. می‌دانیم در هر مثلث با دو ضلع مجاور به طول‌های a و b که با هم زاویهٔ α بسازند، طول نیم‌ساز زاویهٔ α از دستور $d=\frac{۲ab\cos\frac{\alpha}{۲}}{a+b}$ به‌دست می‌آید. پس مطابق شکل داریم:



$$BD=\frac{۲AB.BC.\cos\frac{\hat{B}}{۲}}{AB+BC}=\frac{۲AB.BC.\cos ۱۸^\circ}{AB+BC}$$

$$AH=AB.\sin B=AB.\sin ۳۶^\circ$$

$$\Rightarrow (\sin ۳۶^\circ=۲\sin ۱۸^\circ\cos ۱۸^\circ)$$

$$\frac{BD}{AH}=\frac{۲BC.\cos ۱۸^\circ}{(AB+BC)\sin ۳۶^\circ}=\frac{BC}{(AB+BC)\sin ۱۸^\circ}$$

و به کمک قضیهٔ سینوس‌ها می‌نویسیم:

$$BC=۲R\sin ۱۰۸^\circ$$

$$AB=۲R\sin ۳۶^\circ,$$

$$\sin ۱۰۸=\sin(۹۰+۱۸)=\cos ۱۸^\circ=\sin ۷۲^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AH}=\frac{\sin ۱۰۸}{(\sin ۳۶+\sin ۱۰۸)\sin ۱۸}$$

$$=\frac{۲\cos ۱۸^\circ}{(\sin ۳۶^\circ+\sin ۷۲^\circ)\sin ۱۸^\circ}=\frac{\cos ۱۸^\circ}{(۲\sin ۵۴^\circ\cos ۱۸^\circ)\sin ۱۸^\circ}$$

$$\frac{۱}{۲\sin ۱۸^\circ\sin ۵۴^\circ}=\frac{۱}{۲\sin ۱۸^\circ\cos ۳۶^\circ}$$

$$=\frac{۱}{۲\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}\times\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}}=۲$$

(گزینهٔ ج)

۲. اگر یک n تایی $(a_۱,a_۲,...,a_n)$ با این ویژگی وجود داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$a_۱+a_۲+...+a_{n-۱}+a_n=a_{n-۱}a_n$$

اما واضح است که با فرض $a_۱<a_۲<...<a_{n-۱}<a_n$ (که از کلیت مسئله نمی‌کاهد) داریم: $a_۱+a_۲+...+a_n<na_n$ و بنابراین: $a_{n-۱}a_n<na_n$ و $a_{n-۱}<n$ و برای آنکه a_iها متمایز باشند، تنها امکان این است که: $a_۱=۱$ و $a_۲=۲$ و... و $a_{n-۱}=n-۱$ و از آنجا:

$$a_۱+a_۲+...+a_{n-۱}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow a_n+\frac{n(n-۱)}{۲}=(n-۱)a_n$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{n(n-۱)}{۲(n-۲)}$$

اما واضح است که $a_n>a_{n-۱}$ و در نتیجه:

$$\frac{n(n-۱)}{۲(n-۲)}>(n-۱)$$

و از آنجا: $n>۲n-۴$ و در نتیجه: $n<۴$.

پس تنها جواب ممکن $n=۳$ است که به ازای آن سه‌تایی ۳ و ۲ و ۱ که در شرایط مسئله صدق می‌کند، به دست می‌آید (گزینهٔ ب).

۳. با فرض $AB=x$، $AC=x-۱$ و $BC=x+۱$ و به کمک دستور هرون، مساحت و طول ارتفاع وارد بر AB را می‌یابیم:

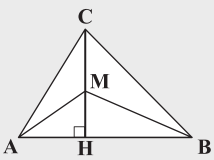
$$P=\frac{AB+AC+BC}{۲}=\frac{۳x}{۲}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{\frac{۳x}{۲}\times\frac{x}{۲}(\frac{x}{۲}+۱)(\frac{x}{۲}-۱)}=\frac{x}{۲}\sqrt{۳(\frac{x^۲}{۴}-۱)}$$

$$=\frac{x}{۴}\sqrt{۳(x^۲-۴)}\Rightarrow h=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳(x^۲-۴)}=۴۵$$

$$\Rightarrow ۳(x^۲-۴)=۸۱۰۰\Rightarrow x^۲=۲۷۰۴, x=۵۲$$

یعنی طول‌های اضلاع مثلث، ۵۱ و ۵۲ و ۵۳ سانتی‌متر است. حال در شکل داریم:



$$AC=۵۱,\ AB=۵۲,\ BC=۵۳$$

$$\Rightarrow AH=\sqrt{۵۱^۲-۴۵^۲}=۲۴$$

$$\frac{S_{MAB}}{S_{CAB}}=\frac{MH}{CH}$$

$$\Delta CAH:\frac{AH}{AC}=\frac{MH}{MC}=\frac{۲۴}{۵۱}=\frac{۸}{۱۷}$$

$$\Rightarrow\frac{MH}{MH+MC}=\frac{۸}{۲۵}\Rightarrow\frac{MH}{CH}=\frac{۸}{۲۵}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{MAB}}{S_{CAB}}=\frac{۸}{۲۵}$$

(گزینهٔ ب)

۴. با فرض $b=\sqrt{۳}-۱$، $a=\sqrt{۱۲-۴\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}}$ داریم:

$$a^۲=۱۲-۴\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}, b^۲=۴-۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲=۱۶-۴\sqrt{۲}$$

$$a^۲b^۲=(۱۲-۴\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳})(۴-۲\sqrt{۳})$$

$$=۴۸-۲۴\sqrt{۳}-۱۶\sqrt{۲}+۸\sqrt{۶}+۸\sqrt{۳}-۱۲$$

$$=۳۶-۱۶\sqrt{۳}+۸\sqrt{۶}-۱۶\sqrt{۲}$$

$$=۴(۹-۴\sqrt{۳}+۲\sqrt{۶}-۴\sqrt{۲})=۴(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۲)^۲$$

$$\Rightarrow ab=۲(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۲)$$

$$\begin{cases}a^۲+b^۲=۱۶-۴\sqrt{۲}\\ ۲ab=۴\sqrt{۳}+۴\sqrt{۲}-۸\end{cases}\Rightarrow a^۲+۲ab+b^۲=۸+۴\sqrt{۳}$$

$$(a+b)^۲=(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲\Rightarrow a+b=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$$

(گزینهٔ د)

۵. چون حاصل‌ضرب ارقام عدد نمی‌تواند خیلی بزرگ باشد، لذا عدد موردنظر نمی‌تواند سه رقمی یا بیشتر باشد و فقط می‌تواند دو رقمی باشد. بنابراین:

$$\overline{ab}.\overline{ba}=۱۰۰۰+ab$$

$$\Rightarrow(۱۰a+b)(۱۰b+a)=۱۰۰۰+ab$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲+۱۰ab=۱۰۰\Rightarrow a=۲,b=۴$$

$$a=۴,b=۲$$

(گزینهٔ ج)

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...

یاران و همراهان همیشگی مجلهٔ برهان متوسطهٔ ۲، با سلامی دوباره مروری گذرا بر نامه‌ها و ایمیل‌های ارسالی‌تان داریم.

● آقای دکتر **ابراهیم سوری**، مدرس ریاضی از دانشگاه لرستان

ایمیل ارسالی‌تان با عنوان «بررسی یک اشکال علمی در کتاب ریاضی پایهٔ دهم» به دستمان رسید. دوست گرامی، مجلهٔ ما به‌هیچ عنوان مأموریتی برای نقد و بررسی کتاب‌های درسی ندارد. مخاطبان مجلهٔ ما فقط دانش‌آموزان هستند. نقدهای مربوط به کتاب‌های درسی ریاضی را می‌توانید به «دفتر تحقیق و توسعهٔ ریاضی» در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی انعکاس دهید.

● همکار گرامی، آقای **مسلم نادری** از شهرستان ثلاث باباجانی

دو مطلبتان با عنوان‌های «عدد هفت» و «محاسبهٔ زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار» به‌دست ما رسید. در مورد اولی باید بگوییم که مطالبی از این دست با این حجم در برنامهٔ ما جایی ندارد. فقط به‌عنوان خواندنی ممکن است در حاشیه‌های صفحات از چنین مطالبی استفاده کنیم و در این صورت باید خلاصه و محدود و حداکثر نیم‌صفحه باشد. اگر بتوانید مجموعه‌ای از چنین مطالبی را برای ما ارسال کنید، می‌توانیم در هر شماره از یکی از آن‌ها استفاده کنیم. اما در مورد دومی باید بگوییم که موضوع آن بسیار قدیمی و تکراری است.

● همکار گرامی، آقای **کاظم اسفندیاری**، سرگروه محترم ریاضی ناحیهٔ ۱ ساری

مسائل ارسالی‌تان را به مسئول صفحهٔ «پای تخته» تحویل دادیم. با سپاس از توجهتان به مجلهٔ برهان.

● دوست دانش‌آموز، آقای **احسن محمودی**

مطالبتان دربارهٔ اثبات قضیهٔ فیثاغورس و چند مطلب دیگر به دست ما رسید. با سپاس فراوان از تلاشتان باید بگوییم که استدلال‌هایتان به لحاظ منطقی چندان دقیق نبودند. توصیه می‌کنیم با مطالعهٔ بیشتر دست به قلم ببرید و کارهایتان را به کمک دبیران ریاضی‌تان ویرایش و بازنگری کنید.

● همکار گرامی، خانم **زهرا دهقانی**، دبیر ریاضی از شهرستان زواره استان اصفهان

مقاله‌تان با عنوان «حل معادله درجه سوم ـ دستور کاردانو» به دستمان رسید. ضمن سپاس از توجهتان به اطلاعتان می‌رسانیم که این دستور سال‌ها است که در برخی کتاب‌های آموزشی به زبان فارسی مطرح شده است و امروزه هم در برنامه درسی دانش‌آموزان جایی ندارد.

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی
به صورت ماهنامه و نه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:
- رشد کودک: برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایهٔ اول دورهٔ آموزش ابتدایی
- رشد نوآموز: برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ آموزش ابتدایی
- رشد دانش‌آموز: برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ آموزش ابتدایی

مجله‌های دانش‌آموزی
به‌صورت ماهنامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:
- رشد نوجوان: برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول
- رشد برهان: برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول
- رشد جوان: برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم
- رشد برهان: برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم

مجله‌های بزرگسال عمومی
(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):
◆ رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد تکنولوژی آموزشی ◆ رشد مدرسهٔ فردا ◆ رشد معلم

مجله‌های بزرگسال تخصصی:
به صورت فصلنامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:
◆ رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی ◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش تربیت‌بدنی ◆ رشد آموزش علوم اجتماعی ◆ رشد آموزش تاریخ ◆ رشد آموزش جغرافیا ◆ رشد آموزش زبان‌های خارجی ◆ رشد آموزش ریاضی ◆ رشد آموزش فیزیک ◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش زیست‌شناسی ◆ رشد مدیریت مدرسه ◆ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کاردانش ◆ رشد آموزش پیش‌دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانشجویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و ... تهیه و منتشر می‌شوند.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶.
◆ تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ـ ۰۲۱
◆ وبگاه: www.roshdmag.ir

- دوست دانش‌آموز، آقای **امیرحسین عزیزی** از شهرستان ابهر راه‌حل‌هایتان برای مسائل پای تخته را به مسئول این صفحه تحویل دادیم. ضمن سپاس از توجهتان باز هم با ما در تماس باشید.
- همکار گرامی، آقای **جابر مختاری دهقادی**
مقاله‌تان با عنوان «توابع بی‌گراف» به دستمان رسید. قبلاً هم از شما کارهایی داشته‌ایم و مقالاتتان در مجله به چاپ رسیده‌اند. ضمن سپاس از لطفی که به مجلهٔ خودتان دارید، متذکر می‌شویم که در نگارش مقالات به سطح اطلاعات مخاطبان، یعنی دانش‌آموزان پایهٔ دوم متوسطه، توجه کنید. مطلبتان به لحاظ محتوا و پیش‌نیازهای لازم بسیار بالاتر از سطح آنان است.
- همکار محترم، خانم **لیلا صالحی** از شهرستان کرج
مقاله‌تان با عنوان «ورود احتمال به دنیای ریاضی» به دستمان رسید. نظر اکثر اعضای هیئت تحریریه مجله این بود که فاقد انسجام لازم برای درج در مجله است. مقاله باید دارای ورود به مطلبی مناسب باشد که برای دانش‌آموز خواننده انگیزه و جذابیت ایجاد کند. سپس به زبان ساده و با مثال‌های متنوع خواننده را با خود همراه سازد و در انتها او را به سمت‌وسویی مشخص هدایت کند.
مقالهٔ شما فاقد چنین ساختاری است. ضمن تشکر از شما منتظر کارهای دیگرتان هستیم.
- همکار گرامی، آقای **نادر بلال‌زاده**، از شهرستان هشترود
مقاله‌تان با عنوان «تصورات غلط بعضی داوطلبان نسبت به سؤالات کنکور» به دست ما رسید. باید به اطلاعتان برسانیم که مطالبی از این دست که بیشتر به کار مجلات مشاورهٔ کنکور بعضی مؤسسات می‌آیند، در مجلهٔ ما جایی ندارند. سعی کنید با استفاده از تجربه‌هایتان مقالاتی کاربردی به رشتهٔ تحریر درآورید که در آن‌ها به نیازهای واقعی دانش‌آموزان در یادگیری مباحث ریاضی توجه شود.
ضمن پوزش از دوستانی که فرصت پرداختن به نامه‌ها و ایمیل‌هایشان در این شماره فراهم نشد، همگی را تا شمارهٔ آینده به پروردگار یکتا می‌سپاریم.

ایستگاه دوم:

اگر تعداد دوستان هم‌سن فرهاد x باشد، تعداد دوستان او که یک سال از او بزرگ‌ترند هم x و تعداد دوستان او که یک سال از او کوچک‌ترند هم x است و تعداد کل مهمانان او ۳x می‌شود. در نتیجه سن فرهاد ۳x و سن خواهرش ۳x+۱۰ و مجموع سن همهٔ مهمانان برابر است با:

$$x(۳x-۱)+x(۳x)+x(۳x+۱)=۹x^۲$$

و طبق فرض داریم:

$$۹x^۲=۹(۳x+۱۰)\Rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow (x-۵)(x+۲)=۰\overset{x>۰}{\Rightarrow} x=۵$$

و در نتیجه فرهاد ۱۵ سال دارد و ۱۵ مهمان داشته است.

پاسخ جدول ایستگاه اندیشهٔ شمارهٔ ۱۰۳ (مهرماه):

رمز جدول «پروفسور تقی فاطمی» بود. دربارهٔ زندگی این استاد فرزانه در صفحهٔ ۲ جلد (ریاضی‌دانان معاصر ایران) در شمارهٔ ۸۷ مجلهٔ مهرماه ۱۳۹۴ مطلبی داشتیم.

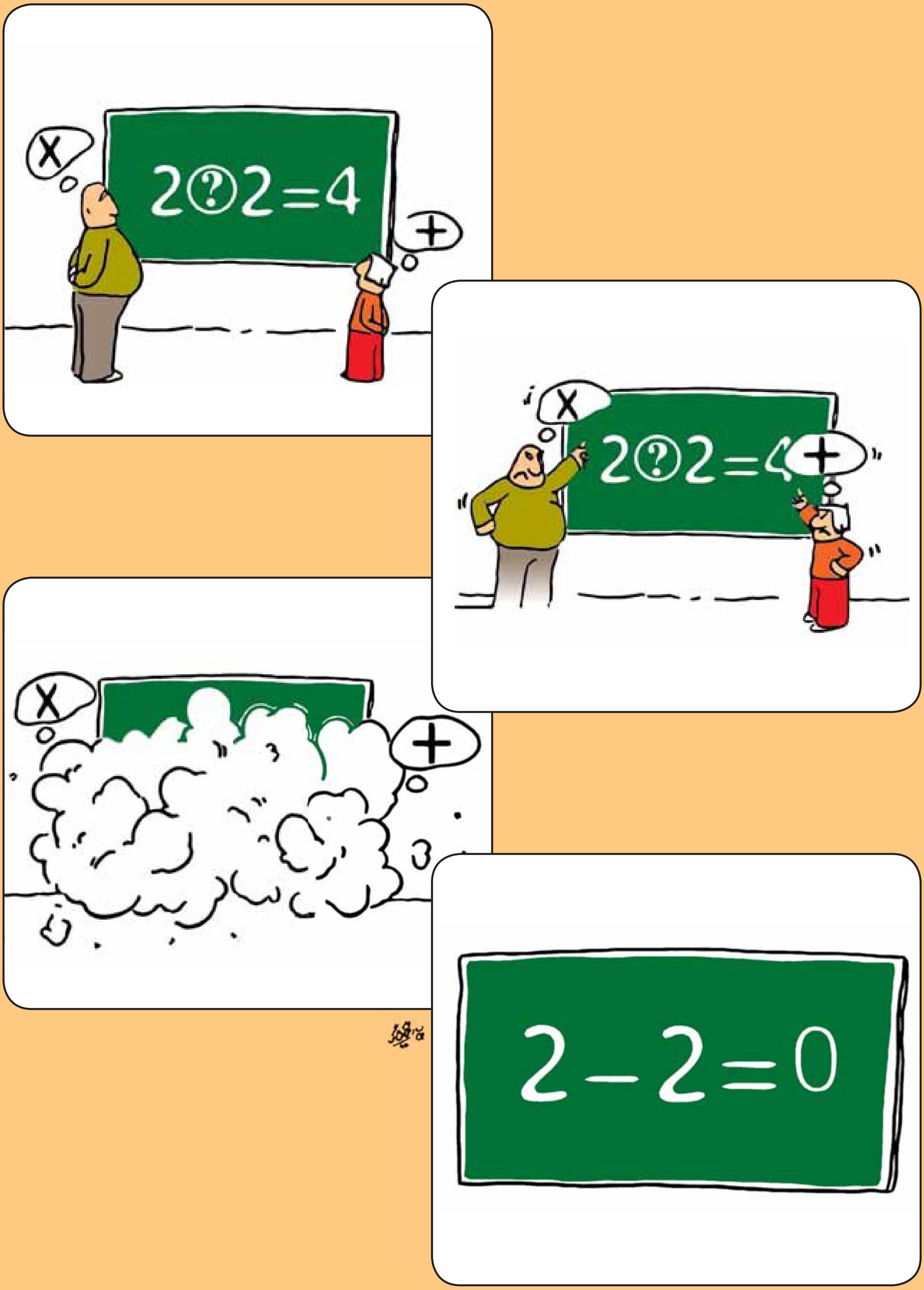
◆ هزینهٔ اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

• نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۵۸۷۵–۳۳۳۱
• تلفن بازرگانی: ۰۲۱-۸۸۸۶۷۳۰۸
• Email: Eshterak@roshdmag.ir

◆ عنوان مجلات درخواستی:
◆ نام و نام خانوادگی:
◆ تاریخ تولد: ◆ میزان تحصیلات:
◆ تلفن:
◆ نشانی کامل پستی:
استان: شهرستان:
خیابان:
پلاک: شمارهٔ پستی:
شمارهٔ فیش بانکی:
مبلغ پرداختی:
◆ اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید:
امضا:

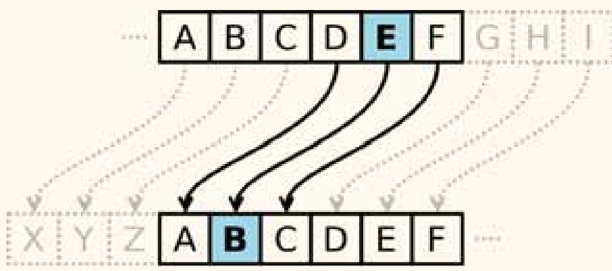
نحوهٔ اشتراک:
پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر، مشترک مجله شوید:
۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی؛
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۰۲۱-۸۸۴۹۰۲۳۳ لطفاً کپی فیش را نزد خود نگه دارید.

رشد برای رشد
اقتصاد مقاومتی؛ تولید و اشتغال

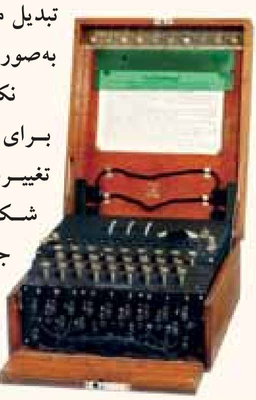

X
2?2=4
+
X
2?2=4
+
X
+
2−2=0

دنیای کد و رمزها

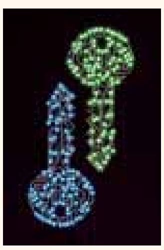
یکی از کاربردهای بسیار جالب ریاضیات در شاخهٔ ترکیبیات «رمزنگاری»[۱] است. منظور از رمزنگاری همان‌طور که از نام آن برمی‌آید، رمز کردن پیام‌هایی است که باید به‌صورت سری ارسال شوند. اما این شاخه از ریاضیات امروزه بسیار گسترده‌تر از این هدف اولیه آن شده است. با این حال شاید جالب باشد که بدانید، سابقهٔ این امر بسیار دیرینه است.

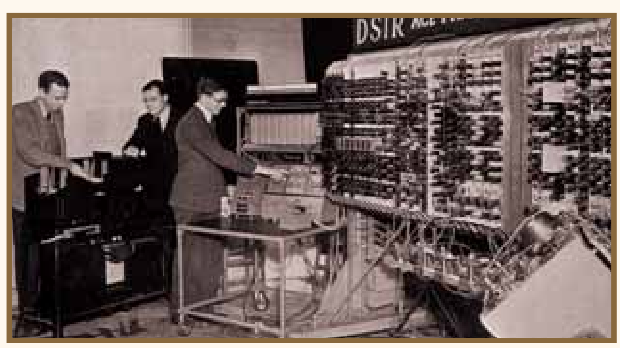


نخستین ردپای این موضوع به دوران قیصرهای روم برمی‌گردد. رمز قیصر (رمز سزار) یکی از روش‌های اولیهٔ رمزنگاری بوده است. در این روش حروف الفبا به تعدادی ثابت جابه‌جا می‌شوند. مثلاً در الفبای زبان انگلیسی با انتقال ثابت (مثلاً ۵ واحد) حرف **A** به حرف **F** و حرف **B** به **G** و... و **U** به **Z** و **V** به **A** و **W** به **B** و **X** به **C** و **Y** به **D** و **Z** به **E** تبدیل می‌شود. به این ترتیب، مثلاً کلمهٔ **MATH** به‌صورت **RFYM** رمز می‌شود.



نکتهٔ جالب این است که از این ایده برای رمزنگاری تا حدود بیست قرن با تغییرات جزئی استفاده می‌شده است. البته شکل آن پیشرفته‌تر شد. برای مثال، در جنگ جهانی دوم آلمانی‌ها از دستگاهی به نام «ماشین انیگما»[۲] برای رمزنگاری استفاده می‌کردند. این دستگاه که ظاهر آن شبیه یک ماشین تایپ قدیمی بود، در هر جمله، برای جابه‌جایی حروف آن، از یک الگو استفاده می‌کرد و در نتیجه کشف آن دشوار می‌شد. اما متفقین هم بی‌کار ننشستند! در انگلستان که زیر بمباران‌های پیاپی آلمانی‌ها قرار داشت، نظامیان برای مقابله با این وضع تصمیم به کشف رمز به‌کار رفته در پیام‌های مخابراتی آلمانی‌ها گرفتند. به این منظور گروه بزرگی از ریاضی‌دان‌ها، طراحان جدول و معما و منطق‌دان‌ها را در محلی به نام «پارک بلچلی»[۳] گرد آوردند. آن‌ها در این مکان امن به سرپرستی ریاضی‌دان بزرگ انگلیسی، آلن تورینگ[۴] گرد آمدند و موفق به شکستن رمز انیگما شدند. نتیجهٔ این کار تأثیر بسزایی در شکست نازی‌ها در جنگ جهانی دوم داشت. امروزه رمزنگاری یکی از شاخه‌های اصلی ترکیبیات در دورهٔ دکترای ریاضی است و کاربردهای بسیاری در امور نظامی و غیرنظامی یافته است. از جمله در بانک‌داری الکترونیک کاربرد زیادی دارد.






پارک بلچلی

پی‌نوشت‌ها

1. cryptography 2. Enigma machine 3. Bletchley park

۴. Alan Turing (۱۹۱۲-۱۹۵۴) ریاضی‌دان، منطق‌دان، متخصص رایانه و فیلسوف انگلیسی قرن بیستم، مخترع ماشین به نام «بامب» که کدشکنی کدهای انیگما را انجام داد.