

ریاضی

ISSN: 1735-4951



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

۱

دوره بیست و هفتم

شماره ۱۰۳

مهر ۱۳۹۶

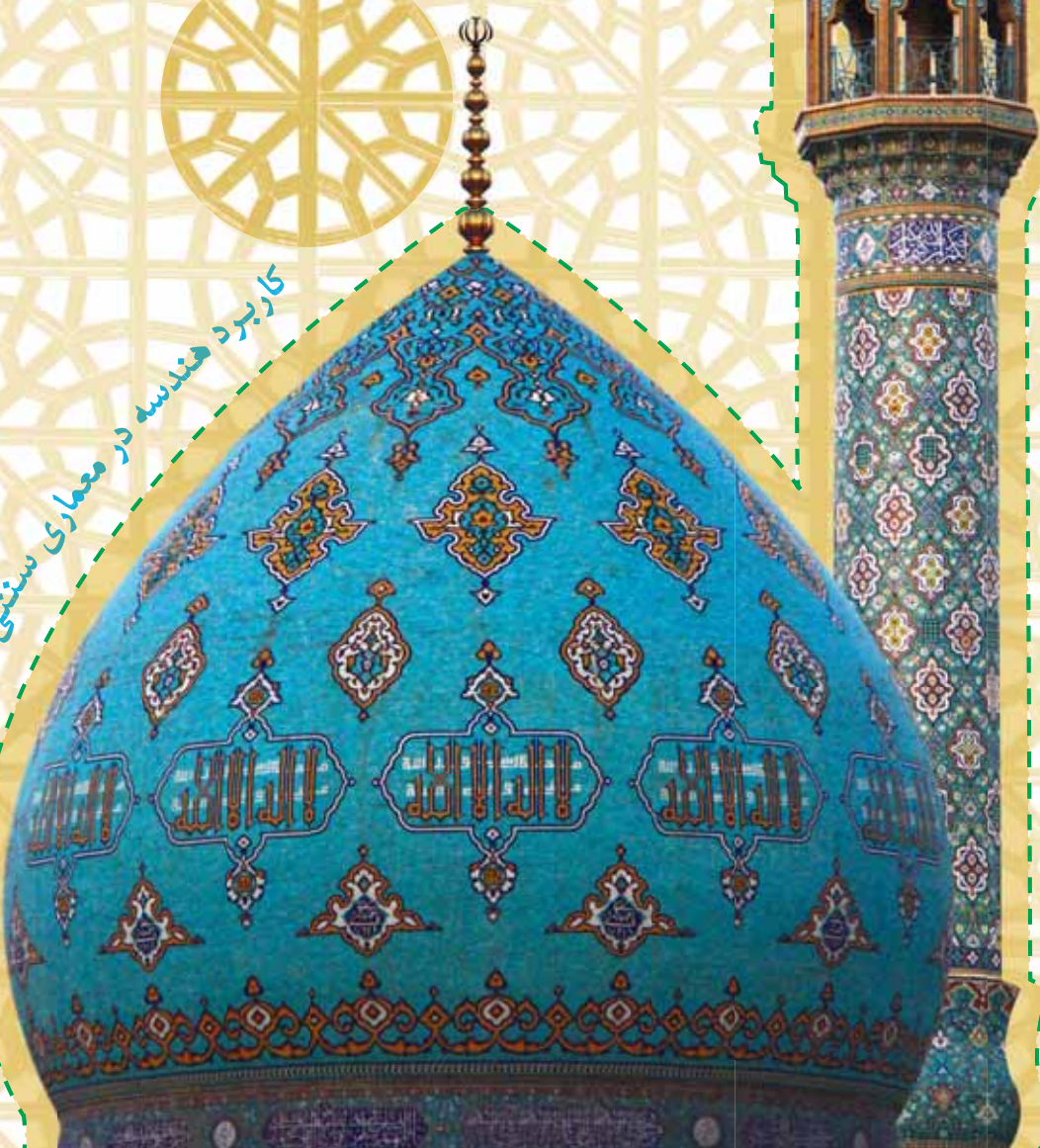
صفحه ۴۸

۱۱۰۰۰ ریال

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

کاربرد هندسه در معماری سنتی و مسجدهای ایران



سه گانه های فیثاغورس
شرکت های هرمی - واقعیت یا فریب!

بحثی در باب کاربرد هندسه در صنعت
«پی» در تنگنایی تعیین کننده!

زنده یاد پروفیسور مریم میرزاخانی
(۱۳۵۶-۱۳۹۶)



یادی از ستاره درخشان آسمان ریاضی ایران

سه سال پیش همین موقعها بود که داشتیم شماره مهرماه مجله را می‌بستیم که خبری ناگهانی باعث شد، صفحه‌های ۲ و ۳ جلد را در لحظه آخر تغییر بدهیم: «مریم میرزاخانی ریاضی‌دان برجسته ایرانی موفق به دریافت مدال «فیلدز»، عالی‌ترین جایزه جهانی ریاضیات شد.» با سرعت متنی را تهیه کردیم و این دو صفحه را در شماره مهرماه ۱۳۹۳ به معرفی او و کارهایش اختصاص دادیم. اما باور نمی‌کردیم که به فاصله‌ای چنین اندک باز هم باید صفحه ۲ جلد مجله مهرماه همان را به او اختصاص دهیم و این بار با خبر تلخ وداع او که نه تنها جامعه ریاضی، بلکه کل کشورمان را در غم فقدان این نابغه جوان اندوهگین کرد.

او را از سال‌های ابتدایی دهه ۱۳۷۰ که با شایستگی دو سال پیاپی مدال طلای المپیاد ریاضی دانش‌آموزی جهان را به گردن آویخت می‌شناختیم، تا هنگامی که از دانشگاه صنعتی شریف در رشته ریاضی فارغ‌التحصیل شد. به هاروارد رفت و دکترای ریاضی گرفت، و در دانشگاه استنفورد به تدریس ریاضی پرداخت و به قله افتخار ریاضی دست یافت.

وقتی مدال فیلدز گرفت، یکی از شخصیت‌های علمی دنیا او را با مادام کوری مقایسه کرد که نخستین زن برنده جایزه نوبل بود و مریم نخستین زن برنده مدال فیلدز بود. عجب که فرجام او هم بی‌شباهت به فرجام همتایش نبود. ریاضی‌دانان بسیاری بوده‌اند که در سنین پایین و در اوج شایستگی از دنیا رفته‌اند. از جمله امی نوتر، ریاضی‌دان آلمانی (۱۸۸۲-۱۹۳۵) که زمانی او را بزرگ‌ترین ریاضی‌دان زن می‌دانستند و فقط ۵۳ سال عمر کرد. ریاضی‌دان بزرگ روس، خانم سونیا کووالنسکی که فقط ۴۱ سال عمر کرد. وقتی آبل، ریاضی‌دان نام‌دار نروژی که بحث‌های بسیاری در ریاضیات مدیون اوست، در ۲۶ سالگی درگذشت، هرمیت، ریاضی‌دان فرانسوی گفت: «از او برای ریاضی‌دانان چیزی باقی مانده است که آن‌ها را ۵۰۰ سال مشغول می‌کند.»

ما معتقدیم میراث مریم میرزاخانی هم تا سده‌ها و هزاره‌ها برای ریاضی‌دانان باقی خواهد ماند. یادش گرامی باد!



رشد

ریاضی

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و هفتم
- شماره پی در پی ۱۰۳
- مهر ۱۳۹۶
- شماره ۱
- ۴۸ صفحه
- ۱۱۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیر مسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خردغانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
دکتر محمزنزاد ایردموسی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیامنگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیامگیر نشریات رشد:
۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag: 
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۳۳۴
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ - ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
۸۰۰۰ نسخه

حرف اول

احساس دوگانه / سردبیر ۲

آموزشی

- شرکت‌های هرمی - واقعیت یا فریب! / قاسم حسین قنبری ۳
بحثی در باب کاربرد هندسه در صنعت / حسین کریمی ۱۲
سه گانه‌های فیثاغورس / عباس قلعه پور اقدم ۱۴
یک روش ساده برای ضرب عددها در اعداد دو رقمی / علی بهادر ۱۷
پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۱۸
کاربرد هندسه در معماری سنتی و مسجدهای ایران / مریم شفیعی، محدثه تاجیک و حنا یزدی ۲۴
ریاضیات در چند دقیقه / مترجم: غلامرضا یاسی پور ۳۲
«پی» در تنگنایی تعیین کننده! / محمد طبعی ۳۴
بسط دوجمله‌ای و بخش پذیری عددها / محمدحاجی محمدحسینی ۳۶
مسائل برای حل ۳۸

ریاضیات در سینمای جهان

- سرزمین ستاره‌ها: ابوالوفا بوزجانی - مردی که همه چیز می دانست / احسان یارمحمدی ۶

گزارش

- نقد و نظری بر مجله ریاضی برهان متوسطه ۲ در کنار دانش آموزان / هوشنگ شرقی ۲۲

آموزش ترجمه متون ریاضی

- عملگرهای (رابطه‌های) منطقی اصلی / حمیدرضا امیری ۳۰

معرفی کتاب

- دانش نامه ریاضی ۴۴

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

- ایستگاه اول: جدول نام‌آوران ریاضی! / هوشنگ شرقی ۱۱
ایستگاه دوم: یک داستان و یک معما! ۲۱
ایستگاه سوم: یک حکایت جالب! ۴۵

پرسش‌های پیکارجو!

- ۳۵ - ۲۰ - ۱۶ - ۱۰ - ۵

با مخاطبان

- پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و ... ۴۷

پاسخ‌ها

- راهنمای حل مسائل ۴۰

- پاسخ پرسش‌های پیکارجو! ۴۶

- پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه ۲)
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان
○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

✉ نشانی: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵-۶۵۸۷

☎ تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

احساس دوگانه

همیشه آغاز سال تحصیلی و مهرماه برایم پر از خاطرات تلخ و شیرین بوده است. در دوره ابتدایی رفتن یک دوست و هم‌کلاسی از مدرسه و یا حتی از کلاسی به کلاس دیگر برایم تلخ بود و البته تلخ‌تر از آن اینکه معلمی را که یک سال تحصیلی هر روز با او بودیم و با هم یاد می‌گرفتیم و با هم بازی می‌کردیم، این احساس دوگانه تا یکی دو هفته با ما بود و کم‌کم قسمت شیرین آن غالب می‌شد. همیشه بهترین دوست‌های من که هیچ‌گاه از من جدا نمی‌شدند و هیچ‌گاه مرا تنها نمی‌گذاشتند، کتاب‌هایم بودند. بعد از کتاب «درسی، کتاب‌های آموزشی استاندارد و مجله‌های علمی، مثل مجله ریاضی یکان»، از صمیمی‌ترین دوستانم بودند.

امیدوارم «برهان» نیز بتواند جایگاهی را نزد شما به‌عنوان یک دوست صمیمی داشته باشد، و شما در درس ریاضی بتوانید به‌عنوان یک منبع قابل اطمینان و قوی به آن اتکا کنید. با استفاده از مسائل طرح شده مقاله‌های کمک‌درسی و مقاله‌های آموزشی، معماها و سرگرمی‌های ریاضی، مسابقه‌ها و گزارش‌ها، و خلاصه همه مطالب متنوع موجود در آن، اوقات مطالعه علمی خود را پر کنید. این مجله را از خود برانید و با آن اشکال‌های درسی خود را بر ایمان بفرستید و منتظر جواب‌های ما در شماره‌های بعدی باشید. ما از این ماه و هر ماه تا آخر اردیبهشت با شما و در کنار شما هستیم. راه‌های ارتباطی شما با ما به قرار زیر است:

۱. پست الکترونیکی:

۲. نامه به آدرس دفتر مجله:

Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

تهران صندوق پستی ۶۵۸۵/۱۵۸۷۵ مجله رشد برهان متوسطه ۲

حمیدرضا امیری
سرپرست



قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

دریافت می‌کنید که به پول خود می‌رسید و بخشی از آن را هم به حساب شرکت و وی می‌پردازید. به این دو نفر زیرشاخه شما گفته می‌شود.

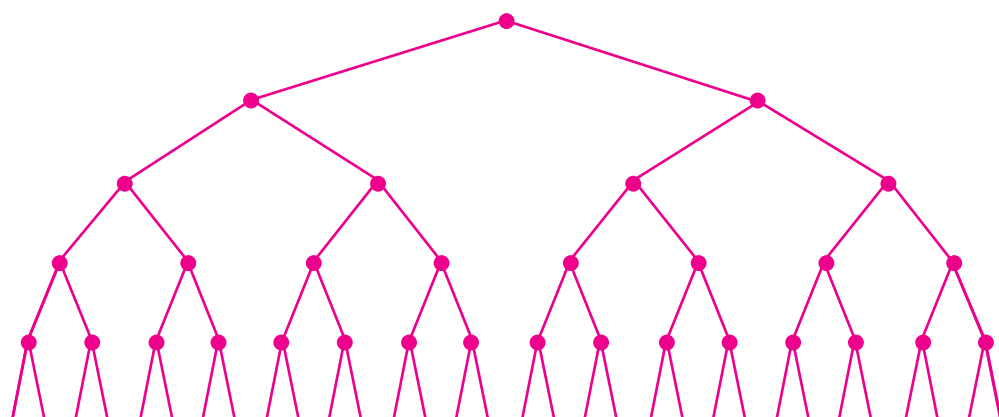
از اینجا به بعد هر کسی که به زیرشاخه‌های شما اضافه شود، به حساب شما مبلغی واریز می‌شود و شما به همین سادگی پول‌دار می‌شوید. و به همین ترتیب، همه پول‌دار می‌شوند و فقر ریشه‌کن می‌شود. معمولاً شکلی شبیه به شکل ۱ هم برای شما رسم می‌شود تا اطمینان شما بیشتر شود.

در این شکل، نقطه‌ها افراد عضو را مشخص می‌کنند و مرحله یک تا شش نمایش داده شده است که به ترتیب ۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ و ۳۲ و... نفر هستند. تا اینجا کار همه چیز منطقی است، اما چرا در عمل چنین اتفاقی نمی‌افتد و بیشتر افراد همه اموال خود

مقدمه

بی‌شک دنیای ریاضی دنیای نامحدودی است و زیبایی آن هم شاید به همین دلیل باشد. اما دنیای مادی دنیایی محدود و متناهی است. در بسیاری از مسائل، اگر این فرض محدود و متناهی بودن در نظر گرفته نشود، جواب نادرستی خواهیم داشت و بی‌شک به دنبال آن ضرر و زیان را در پی خواهد داشت.

در تاکسی یا در یک مهمانی نشسته‌اید که شخصی با شما گرم می‌گیرد و صحبتی از شرکتی می‌کند که قرار است همه را پول‌دار کند و فقر را از بین ببرد. به این صورت که شما مبلغی را به او می‌دهید و عضو شرکت می‌شوید. سپس دو نفر (برخی موارد سه یا چند نفر) عضو می‌گیرند و شما نیز از آن‌ها مبلغی



شکل ۱. شرکت هرمی با دو زیرشاخه

دنباله هندسی هستند که در آن داریم: $q=2$ و $a=1$. پس جمله عمومی آن $a_n=2^{n-1}$ و تعداد کل اعضای شرکت تا مرحله n نیز $s_n=2^n-1$ است. بنابراین تا مرحله بیست و یکم تعداد اعضای شرکت $2^{21}-1=2097151$ نفر می‌شود.

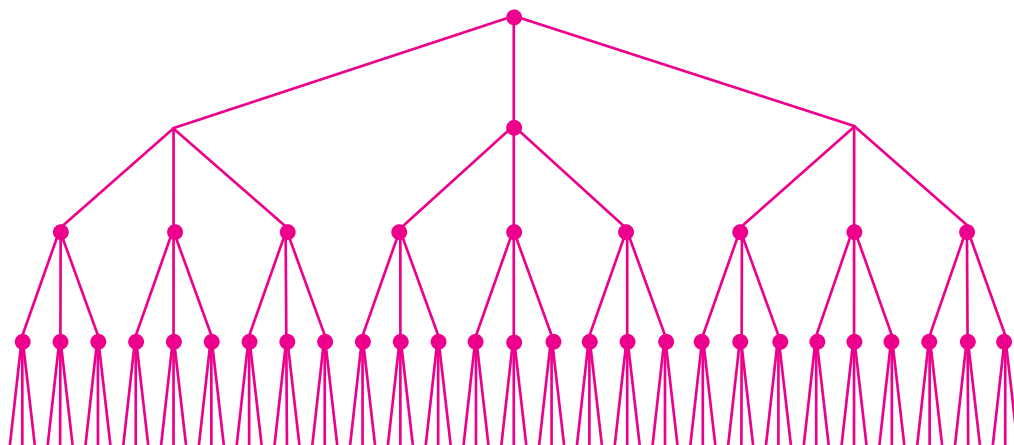
اگر شما تازه عضو این شبکه شوید، باید از خارج این مجموعه دو میلیون نفری دنبال زیرشاخه بگردید. حال اگر در مرحله ۲۶ جمعیت شرکت را حساب کنیم، جمعیت آن $2^{26}-1=67108863$ نفر است که تقریباً معادل جمعیت ایران می‌شود. در صورتی که شبکه تا مرحله ۳۰ ادامه پیدا کند، تعداد اعضای شرکت $2^{30}-1=1073741823$ نفر می‌شود که تقریباً معادل جمعیت کشور چین است.

فاجعه وقتی عمیق‌تر می‌شود که زیرشاخه‌ها بیشتر شوند. مثلاً اگر شرکت با زیرشاخه‌های سه‌تایی باشد، شبکه ۲ به‌وجود می‌آید.

را از دست می‌دهند و بیچاره می‌شوند. اگر کمی حوصله به خرج دهیم به این نتیجه می‌رسیم که تعداد اعضای جدید در هر مرحله دو برابر می‌شود پس اگر با ماشین حساب جواب‌ها را به‌دست آوریم به عددهای زیر می‌رسیم:

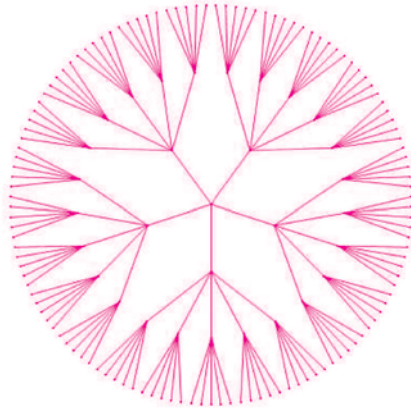
$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576\}$

یعنی در مرحله بیست و یکم، $1048576/1$ نفر باید عضو جدید به شرکت اضافه شوند. حال اگر شما در یک شهر با جمعیت یک میلیون نفر زندگی کنید، باید علاوه بر جمعیت شهر، بیش از ۴۸ هزار نفر دیگر هم عضو پیدا کنید. تازه اعضای قبلی هم هستند که باید در نظر گرفته شوند. تا اینجا فقط از ماشین حساب استفاده کردیم. حال اگر بخواهیم کمی از ریاضیات استفاده کنیم، می‌بینیم که این عددها جمله‌های یک

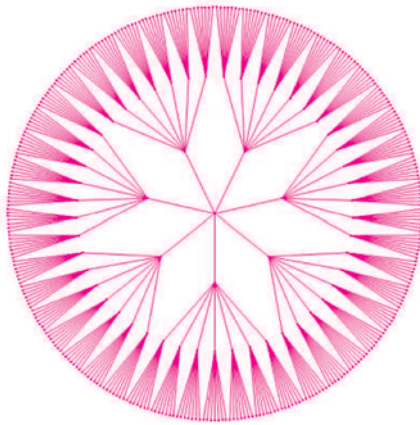


شکل ۲. شرکت هرمی با سه زیرشاخه

این شرکت اگر تا مرحله ۲۱ شرکت جلو
برود، جمعیت آن $5/230/176/601$ می‌شود که
برابر جمعیت چند قاره می‌شود. شکل‌های ۳ و
۴، شرکت هرمی با ۵ و ۷ زیرشاخه را به نمایش
می‌گذارند.



شکل ۳. شرکت هرمی با پنج زیرشاخه



شکل ۴. شرکت هرمی با هفت زیرشاخه

در زیبایی این شکل‌ها که شکی نیست.
آن‌ها در هندسه فرکتال بررسی می‌شوند. یکی
از ویژگی‌های این شکل‌ها، شباهت جزء به کل
آن‌هاست، یا به عبارت دیگر، خود متشابه بودن. به
این معنی که شما هر قسمت آن را که جدا کنید،
با رشد کردن، شکلی شبیه شکل اصلی به وجود
می‌آورد. این موضوع در فضای نامحدود ریاضی
امکان‌پذیر است، ولی در دنیای محدود و تقریباً
هفت میلیارد نفری انسان‌ها امکان‌پذیر نیست. در
حال حاضر شرکت‌های دیگری هم وجود دارند
که ساختاری شبیه شرکت هرمی دارند و در حال
فعالیت هستند، اما ظاهری متفاوت دارند. این
شرکت‌ها هم دنیای نامحدود ریاضی را با دنیای
محدود انسان‌ها یا دنیای مادی شبیه می‌کنند و
اعضا را فریب می‌دهند و با یک فرض نادرست
مسئله را حل می‌کنند. در صورتی که اگر اعضا
کمی فکر کنند و دست به محاسبه و حل مسئله
بزنند، چنین کلاه‌های سرشان نخواهد رفت.





سرزمین ستاره‌ها:
ابوالوفا بوزجانی

مردی که همه چیز می‌دانست

- کارگردان: علی محمد قاسمی و اعظم نجفیان • تهیه‌کننده: هومن مرادی کرمانی • تصویربردار: علی محمد قاسمی • تدوین اولیه: طاهره حسینی
- تدوین نهایی: علی محمد قاسمی • پژوهشگر: محبوبه کلاتری • طراحی و ترکیب صدا و موسیقی: بهروز شهامت • انتخاب تصاویر آرشیوی: اعظم نجفیان
- تصویربرداران بخش مصاحبه: مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان • گوینده و راوی: محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

اشاره



احسان یارمحمدی

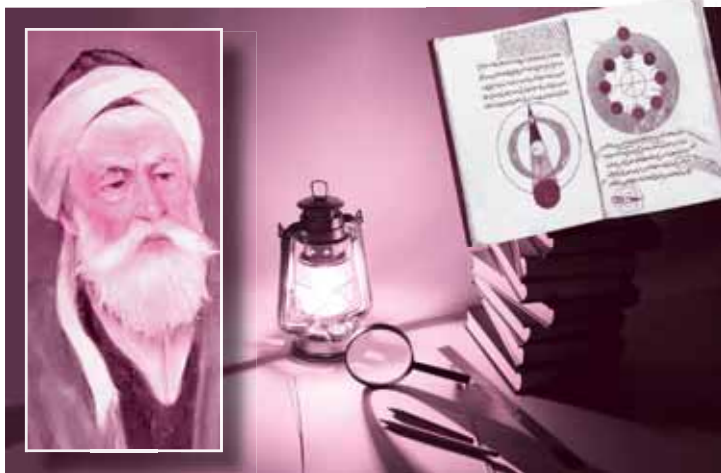
ابوالوفا محمدبن محمدبن یحیی بن اسماعیل بن عباس زاده ۲۱ خرداد ۳۱۹ خورشیدی در «بوژگان»، از توابع ولایت «جام» در نیشابور، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس شهیر ایرانی است. او روش‌های محاسبه‌ای را که بازرگانان، کارمندان دوایر مالیه، و مساحان زمین در شرق اسلامی در کارهای روزمره خود به کار می‌بردند، به شکل منظم بدون ساخت و همچنین روش‌های متداول را اصلاح کرد. او از بعضی روش‌های ناصحیح نیز انتقاد کرد. در این مقاله با معرفی مستند ابوالوفا بوزجانی از مجموعه مستند «سرزمین ستاره‌ها»، قصد داریم تا ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصه دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا سازیم. به همین دلیل نخست به ارائه سطرهایی از کتاب «گاهی به تاریخ ریاضیات در ایران» به قلم زنده‌یاد پرویز شهریاری (۱۳۹۱-۱۳۰۵) که چاپ نخست آن در سال ۱۳۸۵ توسط «انتشارات علمی و فرهنگی» به زیور طبع آراسته شده است، می‌پردازیم و در ادامه مطالبی از مستند مزبور ارائه خواهیم کرد.

محمد فرزند محمد فرزند یحیی فرزند اسماعیل فرزند عباس، مشهور به «ابوالوفای بوزجانی»، ریاضی‌دان و اخترشناس سده چهارم هجری قمری است که در اول رمضان سال ۳۲۸ در «بوزجان»، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. مقدمه‌های ریاضیات زمان را همان‌جا نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در ۲۵ سالگی به بغداد رفت و به خدمت شرف‌الدوله فرزند عضدالدوله درآمد. در رصدخانه‌ای که شرف‌الدوله در بغداد ساخته بود، به سرپرستی ابوسهل بیژن فرزند رستم کوهی مشغول کار شد. امضای ابوالوفا محمد بن محمد الحاسب زیر تأییدی که بر رصد بیژن رستم کوهی در روز سه‌شنبه، سه شب مانده به آخر جمادی‌الآخر سال ۳۸۸ هجری قمری، یازدهم شهریور سال ۳۵۷ یزدگردی نوشته شده و به خط خود ابوالوفاست، دیده می‌شود.

ابوالوفا هنگام حیات مشهور بود و با دانشمندان هم‌عصر خود رفت و آمد و مکاتبه داشت. ابن‌ندیم که هم‌عصر ابوریحان است، در «الفهرست» از او به‌عنوان دانشمند نام می‌برد و سیاهه نوشته‌های او را می‌آورد. ابوریحان بیرونی او را می‌شناخت و با وی مکاتبه داشت. وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد هم‌زمان ماه‌گرفتگی با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه‌های دو رصد را که در دو نقطه مختلف انجام گرفته بود، برای یکدیگر بفرستند و با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از نوشته‌های اندیشمندان ایرانی و یونانی، مثل «اصول» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر دیوفانت»، «جبر» هیپارخوس (ابرخس)، «مجسطی» بطلمیوس و غیره، تفسیر نوشت و خود زیجی تنظیم کرد. ابتکارها و نوآوری‌های او در مثلثات و هندسه است. او سوم رجب ۳۸۸ در بغداد درگذشت.

چهار نوشته اصلی بوزجانی به ما رسیده است که از آن میان، به ویژه «مجسطی» و «اعمال هندسی» اهمیت بسیار دارند. دو کتاب بوزجانی به نام‌های «آنچه از علم حساب مورد نیاز کاتبان و حسابداران است» و «آنچه از اعمال هندسی مورد نیاز صنعتکاران است»، نمونه‌های مشخصی از گونه کاربردی ریاضیات این دوره هستند. بوزجانی در حساب عملی خود، دو بخش اول را به بحث‌های خالص اختصاص می‌دهد و سپس، از بخش سوم تا هفتم، آمیزه‌ای از ریاضیات نظری و کاربردی را (مانند صراف، مساحی، کارهای بازرگانی و محاسبه‌ای که مورد نیاز کارگزاران دولتی است) مطرح می‌کند.

در کتاب اعمال هندسی، در آغاز از ابزارهایی که برای ساختمان‌های هندسی لازم است (خط‌کش، پرگار و گونیا) صحبت می‌کند. بعد ساده‌ترین مسائل ساختمانی هندسه را (همچون تقسیم پاره‌خط راست یا تقسیم زاویه به دو بخش برای رسم عمود بر خط راست و بر صفحه، رسم خط‌های راست موازی، رسم مماس بر دایره، و پیدا کردن مرکز دایره) شرح می‌دهد و سپس به رسم شکل‌های پیچیده‌تر (مانند چندضلعی‌هایی با ضلع‌ها یا زاویه‌های برابر، شکل‌های محاطی و محیطی، تقسیم مثلث یا چهارضلعی به دو یا چند بخش هم‌ارز، تبدیل



چهار نوشته اصلی بوزجانی به ما رسیده است که از آن میان، به ویژه «مجسطی» و «اعمال هندسی» اهمیت بسیار دارند. دو کتاب بوزجانی به نام‌های «آنچه از علم حساب مورد نیاز کاتبان و حسابداران است» و «آنچه از اعمال هندسی مورد نیاز صنعتکاران است» نمونه‌های مشخصی از گونه کاربردی ریاضیات این دوره هستند

یک مربع به چند مربع و برعکس، و...) می‌پردازد. بوزجانی همه‌جا با استدلال و گاه با چند روش، حل مسئله را ارائه می‌دهد و به کاربردهای عملی راه‌حل‌های خود هم توجه دارد. تلفیق نظریه و کاربرد را در جمله‌هایی که برای نمونه از ترجمه فارسی اعمال هندسی بوزجانی انتخاب شده است، به خوبی می‌توان دید: «... اکنون در این باب قسمت کردن و بریدن بعضی شکل‌ها را به چند بخش، آن‌طور که صنعتکاران به کار می‌برند، می‌آوریم... اگر از مهندسی بپرسید می‌خواهیم مربعی از چند مربع دیگر بسازیم... اگر بخواهیم زمین مربع شکلی را بین دو نفر به دو بخش برابر تقسیم کنیم و راهی هم برای آن‌ها در نظر بگیریم که پهنای آن به اندازه معلوم باشد...». بوزجانی در کتاب اعمال هندسی خود، به شکل‌های فضایی هم توجه می‌کند و به‌ویژه درباره رسم شکل روی کره و ساختن چندوجهی‌های منتظم و نیمه‌منتظم، مسئله‌های متعددی را حل می‌کند. در ضمن شکل‌های زینتی هندسه را هم که در گل‌دوزی، قالی‌بافی و کاشی‌کاری کاربرد دارند، فراموش نمی‌کند.



آورده بودند. آن گاه شکل ظلی (یعنی قضیهٔ تانژانت‌ها) در مثلث کروی را ثابت می‌کند که کار محاسبه‌های اخترشناسی را بسیار ساده می‌سازد. پیش از آن از شکل قطاع (قضیهٔ هندسی منلائوس) استفاده می‌کردند که کار محاسبه را دشوار و طولانی می‌کرد.

در ادامه به ارائهٔ بخش‌هایی از مستند «ابوالوفا بوزجانی» از مجموعهٔ مستند «سرزمین ستاره‌ها» می‌پردازیم و شما ریاضی‌آموزان را به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.

استدلال‌های هندسی را از اعمال حساب جدا ساختیم تا اگر مهندسان و محاسبانی باشند که هر یک به فن دیگری آشنایی نداشته باشند، بتوانند به تنهایی کتاب را به کار گیرند و کسی که در هر دو فن دست دارد، از هر دو بهره‌مند شود.

مجسطی - ابوالوفا بوزجانی

هر جاده‌ای که ساخته می‌شود، هر خرید و فروش زمین، هر آبیاری، و هر ساخت‌وساز به اندازه‌گیری نیاز دارد. در گذشته این کار برعهدهٔ «مساحان» بود. مساحی اندازه‌گیری زاویه‌ها و فاصله‌ها روی زمین و استفاده‌ی دقیق از آن‌ها در ترسیم نقشه یا همان نقشه‌برداری است. از مساحی برای طراحی و احداث جاده‌ها، ساختمان‌ها، املاک و مشخص کردن مرز بین املاک و چره‌ها کمک می‌گیرند. رومیان از فناوری‌های ساده در مساحی برای تراز کردن زمین استفاده می‌کردند و این امر برعهدهٔ مسلمانان اسپانیا بود. آن‌ها تراز مثلث ساده و شاقول را به علم مساحی افزودند. در گذشته گروه‌های مساح همانند امروز پروژه‌های بزرگی مانند مساحی مسیرهای آبیاری را به انجام می‌رسانند. در آندلس یا اسپانیای

از شاهکارهای ابوالوفای بوزجانی کتابی است با عنوان مجسطی یا «الکامل» که آن‌را بر مبنای مجسطی بطلمیوس نوشته است. برخلاف نظر برخی مورخان، این کتاب تحریر تازه‌ای از کتاب بطلمیوس نیست. احتمال داده می‌شود که زیج بوزجانی که نسخه‌ای از آن به جای نمانده است، همان مجسطی ابوالوفا باشد. البته ابوریحان بیرونی آن‌ها را دو نوشتهٔ جداگانه دانسته است. بوزجانی در کتاب مجسطی خود، آنچه برای توضیح حرکت‌های آسمانی لازم است، می‌آورد که در واقع چیزی جز پایه‌گذاری کامل مثلثات نیست. او با روش خود سینوس 30° دقیقه را به کمک یک نابرابری، تا هشت رقم بعد از ممیز به‌دست آورده است، سپس جدول سینوس‌ها را 30° دقیقه به 30° دقیقه تنظیم کرده و بعد از تعریف مفهوم دقیق تانژانت و سکانت، جدول‌های تانژانت‌ها را تشکیل داده است.

بوزجانی در مجسطی، این رابطه‌های مثلثاتی را ثابت کرده است:

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

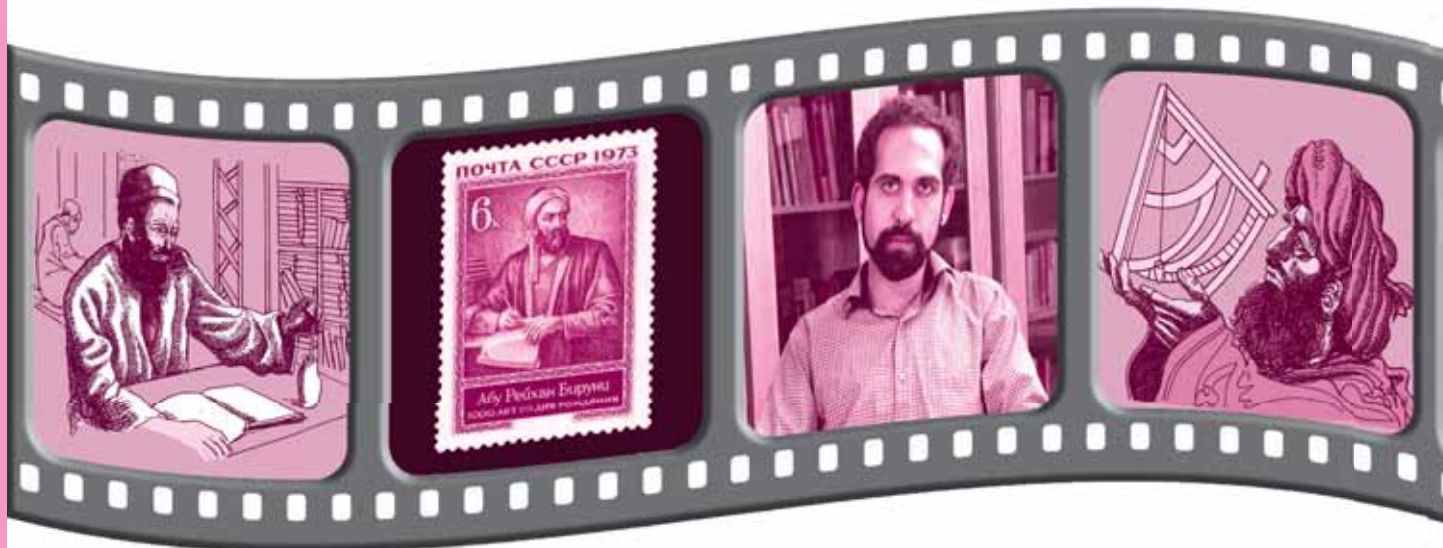
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

او شعاع دایره را R می‌گیرد، ولی بلافاصله توضیح می‌دهد، اگر شعاع دایره را واحد بگیریم، به رابطه‌های ساده‌تری مانند:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

می‌رسیم. سپس به مثلث‌های کروی می‌پردازد و معادله‌های مثلثاتی را در مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی به‌دست می‌آورد. در مثلث کروی غیرمستطیل رابطهٔ سینوس‌ها را پیدا می‌کند: $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$. گرچه ابونصر عراق، خجندی و کوشیار گیلانی، هم‌عصران بوزجانی هم شکل مغنی را (که همان قضیهٔ سینوس‌هاست) به‌دست

بوزجانی
در کتاب مجسطی
خود، آنچه برای
توضیح حرکت‌های
آسمانی لازم است،
می‌آورد که
در واقع چیزی
جز پایه‌گذاری
کامل مثلثات نیست



هر جاده‌ای که
ساخته می‌شود،
هر خرید و فروش
زمین، هر آبیاری،
و هر ساخت‌وساز به
اندازه‌گیری نیاز دارد

شرق خراسان ایران قرار دارد، متولد شد. مقدمات علم حساب را نزد عمو و دایی خود فرا گرفت و پس از آن در ۲۰ سالگی راهی بغداد شد که در آن زمان مرکز علمی معتبری محسوب می‌شد. او از بزرگ‌ترین دانشمندان زمان خود به‌شمار می‌آمد و این موضوع از ذکر نام او در **الفهرست** ابن‌ندیم که معاصر بوزجانی بوده، پیداست. بخش مهمی از اطلاعات ما از زندگی بوزجانی نیز از همین کتاب به‌دست آمده است. فعالیت‌های علمی بوزجانی پس از مهاجرت وی به بغداد، دامنه وسیعی از علوم متفاوت چون هندسه، مثلثات و حساب نجوم را دربرمی‌گرفته که در هر کدام از این‌ها، به دستاوردهای بدیع و تازه‌ای رسیده است.

از دوران زندگی بوزجانی در «تربت جام» اطلاعات دقیقی در دست نیست. براساس شواهد تاریخی، بیشتر فعالیت‌های رصدی بوزجانی در منطقه‌ای به نام «باب‌التبن» در بغداد انجام می‌شد و او ارتباط خوبی با دربار عضدالدوله دیلمی داشت. علاوه بر فعالیت‌های علمی به کارهای دربار هم می‌پرداخت و حتی در آن زمان ریاست یک بیمارستان را هم برعهده داشت. همچنین با ابوریحان بیرونی به هم‌فکری می‌پرداخت که قاعدتاً از طریق مکاتبه صورت می‌گرفته است. یکی از کارهای نجومی بوزجانی که بسیار مورد توجه و اهمیت است، همکاری او با ابوریحان بیرونی در سال ۳۸۷ هجری قمری و زمانی است که بوزجانی در بغداد و بیرونی در خوارزم سکونت داشتند. آن‌ها یک ماه‌گرفتنی را با هم رصد کردند و براساس مکاتباتی که با هم داشتند، از طریق رصد هم‌زمان این ماه‌گرفتنی توانستند که اختلاف طول بین دو شهر خوارزم و بغداد، و براساس آن، اختلاف ساعت بین نصف‌النهارهای گذرنده از این دو شهر را محاسبه کنند. این اختلاف

امروز، این گروه‌ها را «مهندس» می‌خوانند و در مشرق اسپانیا به آنان مساح می‌گفتند.

امروزه برای تعیین محل نقاط ناشناخته از قوانین مثلثات و فناوری‌های پیشرفته‌ای چون «سیستم موقعیت‌یاب جهانی»^۱ یا «جی‌پی‌اس» استفاده می‌شود. بیشتر ماشین‌های امروزی دارای این سیستم هستند و به کمک آن شما در هر لحظه می‌توانید موقعیتتان را در هر نقطه از زمین شناسایی کنید. اگر تا پیش از قرن سوم هجری شمسی زنجیره‌ای از اندیشمندان مسلمان سنگ بنای مثلثات را نمی‌گذاشتند و با کارهای خود راه را برای دیگر دانشمندان هموار نساخته بودند، امروزه این امکان فراهم نمی‌شد. مثلثات برای استفاده در ستاره‌شناسی ایجاد شده و کاربردهای اولیه آن نیز در همین‌باره بوده است.

واژگان مثلثات در متون فارسی و عربی قدیم با امروز تفاوت داشته است. آنچه یونانی‌ها داشتند، هندسه کره بود. آنچه مسلمانان درست کردند، مثلثات است و کم‌کم مثلثات در دوره اسلامی خودش را از نجوم جدا کرد و شاخه خاصی از ریاضیات شد. مثلثات از بطن نجوم که یکی از نیرومندترین مطالعات علمی مسلمانان، به‌ویژه برای تعیین وقت نماز است، متولد شد. اما منجمان یونانی پیش از مسلمانان از اندازه اضلاع و زاویه‌های مثلث برای محاسبه حرکت خورشید، ماه و پنج سیاره‌ای که در آن زمان شناخته شده بودند، استفاده می‌کردند. یونانیان برای تعیین موقعیت خورشید، ماه و سیارات و حل مسائل هندسی، جدول‌ها و قواعدی تنظیم کرده بودند. جامع‌ترین نوشته‌ها درباره این موضوع در کتاب مجسطی بطلمیوس که در نیمه نخست قرن میلادی در اسکندریه می‌زیست، وجود داشت. این رساله بطلمیوس از طریق مسلمانان به دانشمندان اروپایی رسید.

ابوالوفا بوزجانی در سال ۳۲۸ هجری قمری در منطقه بوزجان که در ۱۸ کیلومتری شرق تربت جام کنونی در

حدود یک ساعت محاسبه شد.

قرن‌ها پیش دانشمندان ایرانی با ایجاد رصدخانه به توسعه علم نجوم پرداختند. همچنین ابزارهای مربوط به علم ستاره‌شناسی را جمع‌آوری و توسعه بخشیدند. برای مثال، ابوالوفا بوزجانی حرکات ماه را قرن‌ها پیش کشف و ضبط کرد. ماه برای مسلمانان به‌طور شگفت‌انگیزی اهمیت دارد، زیرا تقویمی که از آن استفاده می‌کنند، یعنی تقویم هجری قمری، با چرخش ماه تنظیم می‌شود. یکی از مشکلات مسلمانان در آن زمان این بود که تقریباً دوازده ماه یک سال قمری با ۳۶۵ روز از سال خورشیدی هماهنگ نبود. دوازده ماه قمری در مجموع ۳۴۵ روز می‌شد. مسیحیان و یهودیان هم این مشکل را داشتند. آن‌ها تدبیری اندیشیده بودند که بر کشف مِثْنِ آن، ستاره‌شناس اهل آتن در حدود سال ۴۳۰ میلادی مبتنی بود. این تقویم از دوازده سال با دوازده ماه قمری و هفت سال با سیزده ماه قمری تنظیم شده بود. به این ترتیب، ماه سیزدهم به بعضی سال‌ها اضافه می‌شد تا روزهای تقویم هماهنگ با فصل‌ها پیش رود. مسلمانان از این چرخه‌ها استفاده می‌کردند.

اما بعضی حاکمان گاهی هر زمان که دلشان می‌خواست، ماه سیزدهم را به سال می‌افزودند. بنابراین خلیفه دوم، عُمَر که از سال ۱۰ هجری به مدت ۱۰ سال حکومت کرد، تقویم هجری قمری را پیشنهاد داد که هنوز در کشورهای اسلامی از آن استفاده می‌شود. این تقویم دقیقاً گردش ماه را دنبال می‌کند. یک سال هجری قمری در حدود یازده روز کوتاه‌تر

از یک سال خورشیدی است و ماه‌هایی چون «رمضان» به آرامی بین فصل‌ها می‌چرخد. بنابراین ماه رمضان در هر سال، یازده روز زودتر از سال قبل آغاز می‌شود و هر ۳۰ سال خورشیدی یکبار بر همان روز منطبق می‌شود. ماه رمضان و ماه‌های اسلامی دیگر زمانی شروع می‌شوند که هلال اول رؤیت شود. بنابراین هیچ‌کس به‌طور دقیق نمی‌داند که رمضان در چه زمانی شروع می‌شود تا آنکه هلال باریک ماه در آسمان شب نمایان شود.

پیش‌بینی زمان رؤیت هلال ماه برای ستاره‌شناسان و ریاضی‌دانان مسلمان چالش بزرگی بود. البته فرضیه بطلمیوس در مورد حرکات ماه در زمان نزدیک به ماه جدید و ماه غیرقابل رؤیت دقیق بود. او مسیر ماه را تنها به منزله بخشی از گرفتگی یا مسیر خورشید در مقابل ماه در نظر می‌گرفت. بوزجانی برای تعیین اوقات روز از روی ارتفاع خورشید، رساله‌ای نوشت که نسخه‌ای از آن در هند وجود دارد.

نوآوری‌ها و کوشش‌های بوزجانی در ریاضیات و نجوم زبانزد و مشهور است. اما پژوهش‌های او در موسیقی از اشتهار کمتری برخوردار است. اروپاییان به پاس خدمات بوزجانی به ریاضیات و نجوم، یکی از دهانه‌های ماه را به نام وی نام‌گذاری کرده‌اند.

❖ پی‌نوشت‌ها.....

1. Global Positioning System (GPS)
2. Methon



جدول
نام آوران
ریاضی!

ایستگاه
اول

برای شروع بد نیست کمی سرگرم شویم و در عین حال نام‌های تعدادی از ریاضی‌دانان و استادان بنام کهن و معاصر کشورمان را مرور کنیم. شاید از این طریق کنج‌کاو شویم که شرح حالی از آن‌ها را بیابیم و با زندگی و آثارشان بیشتر آشنا شویم. چرا که برخی از آن‌ها از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان تاریخ علم در کشور ما و حتی در سطح جهان هستند. در جدول زیر نام‌های این اشخاص (که در بیرون جدول هم آمده است) به صورت افقی (از راست به چپ یا برعکس)، عمودی (از بالا به پایین یا برعکس) یا اریب (از دو طرف) به شکل پراکنده آمده است. این نام‌ها را بیابید و دور آن‌ها را مانند نمونه خط بکشید. سپس حرف‌های باقی‌مانده در جدول را بنویسید. از ترکیب این حرف‌ها نام یکی از ریاضی‌دانان معاصر کشورمان به دست می‌آید که رمز جدول است. نام این ریاضی‌دان برجسته را به همراه شرح حال وی برای ما ارسال کنید تا به قید قرعه جایزه‌ای تقدیم‌تان کنیم!



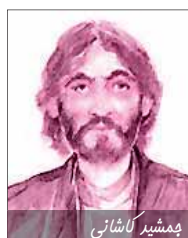
مه‌ما‌د‌ب‌



ن‌ب‌ر‌ی‌ز‌ی‌



ش‌ی‌خ‌ ب‌ه‌ا‌ی‌



ج‌م‌ش‌ی‌د‌ ک‌ا‌ش‌ا‌ن‌ی‌

ی	ش	ی	خ	ب	ه	ا	ی	ی
ن	پ	ل	ی	ز	ی	ر	ی	ن
ا	ن	ی	س	ن	ب	ا	س	ا
ج	ف	گ	و	ی	و	ق	ی	ش
ز	ت	ر	ط	ب	م	م	ی	ا
و	ی	ا	ی	ا	ز	ا	ه	ک
ب	م	ی	ف	ر	ر	ی	و	د
ح	ا	ش	ا	ا	خ	ه	ر	ی
ا	ی	و	ر	ف	ی	ف	ف	ش
ص	خ	ک	ر	ج	ی	و	ر	م
م	ی	د	و	ر	ت	ش	ه	ج

نام‌های نام‌آوران:

جمشید کاشانی،
ابن سینا،
کوشیار گیلی،
خوارزمی،
بیرونی،
شیخ بهایی،
فارابی،
کرجی،
بوزجانی،
خیام،
نیریزی،
کوهی،
فخری،
هشترودی،
هورفر،
مصاحب.



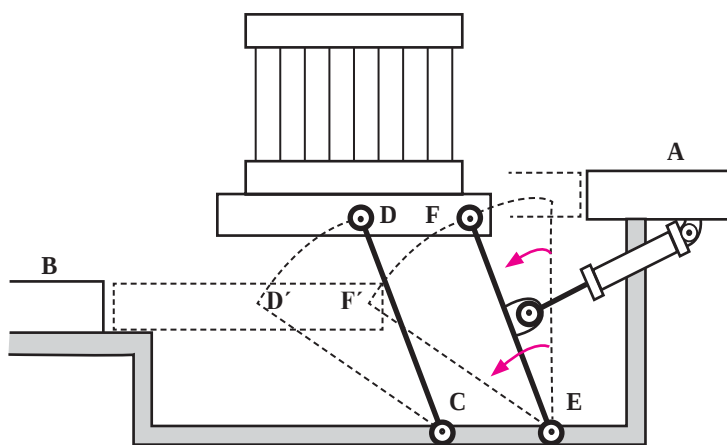
حسین کریمی

چندی قبل یکی از دوستانم از جمعی صحبت می‌کرد که هر صبح جمعه در پارک جمع می‌شوند و پس از نرمش و ورزش در کنار هم صبحانه می‌خورند. می‌گفت: جمع جالبی هستند و هر کدام به کاری مشغول‌اند و از تجربیاتشان صحبت می‌کنند؛ به‌خصوص تجربه‌های کاری و تخصصی خودشان که برای همه می‌تواند مفید باشد. صحبت‌های دوستم در مورد آن جمع مرا برای آشنا شدن با آن‌ها مشتاق کرد و خواستم یک جمعه به آن‌ها بپیوندم. روز موعود رسید و آن‌ها با گشاده‌رویی مرا به‌عنوان مهمان پذیرفتند. در آن جمع با فردی به نام آقا ناصر آشنا شدم که کارش ساخت جک‌های هیدرولیکی به‌عنوان بالابر و صفحه‌های جابه‌جایی بار بود. در صحبت‌های آقا ناصر آنچه که هیچ جایگاهی نداشت، سود و زیان و مشکلات کار بود. در عوض تمام گفتار ایشان نشان از علاقه و خلاقیت در کار بود.

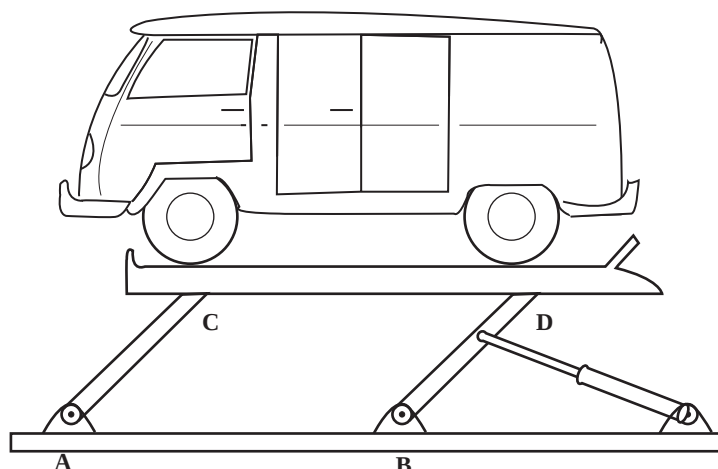
حرف‌های آقا ناصر، مدام مرا به سال‌های حضورم در کلاس درس می‌برد و به این فکر می‌کردم که چرا این‌همه فاصله بین درس و کار در کتاب‌های درسی ما زیاد است. آیا می‌توان معلمی و یا دانش‌آموزی را پیدا کرد که در هر سال تحصیلی این جمله را حداقل یک‌بار نشنیده باشد: «آنچه که درس می‌دهیم و آنچه که می‌خوانیم، به چه درد می‌خورد؟» چکیده‌ای از صحبت‌هایم با آقا ناصر را برایتان بازگو می‌کنم. امیدوارم در دانش‌آموزان ما ایجاد انگیزه کند و معلم‌های ما را تشویق کند، مقدمات ایجاد انگیزه برای دانش‌آموزانشان را فراهم آورند.

ناصرخان وقتی متوجه شد که من دبیر ریاضی هستم و بیشتر روی تدریس هندسه متمرکزم، کلی ذوق کرد. از دوران تحصیلش گفت و اینکه علاقه شدیدی به شکل‌های هندسی داشته و همان هم اساس کارش را در بزرگسالی تشکیل داده است.





شکل ۱.



شکل ۲.

می‌گفت: مثلاً من از خواص متوازی‌الاضلاع خیلی استفاده می‌کنم. خاصیتی مثل ثابت بودن اندازه‌ی اضلاع متوازی‌الاضلاع، هر چند که اندازه‌ی زوایای آن تغییر کند. با استفاده از این خاصیت تا به حال چند دستگاه ساخته‌ام.

ناصر خان تأکید می‌کرد: من اختراع نکرده‌ام، ولی از اینکه در صنعت کاربردی از آموخته‌های دبیرستانی‌ام را می‌بینم، احساس خوب و لذت‌بخش دارم. او شکل ۱ را نشان داد که اصول کار دستگاهی را نشان می‌داد که برای انتقال بار از سطحی به سطح دیگر از آن استفاده می‌شود، بدون آنکه بار در سطح شیب‌دار قرار گیرد.

در شکل ۱، یک «متوازی‌الاضلاع لولایی» برای انتقال جعبه‌های بار از سکوی A به سکوی B نمایش داده شده است. دو بازوی CD و EF دارای طول‌های مساوی‌اند. فاصله‌ی دو لولای C و E مساوی با فاصله‌ی دو لولای D و F است. بنابراین چهارضلعی CDEF که اضلاع مقابل آن دوه‌دو مساوی‌اند، یک متوازی‌الاضلاع است.

چون خط CE دارای وضعیت ثابت است، پس وقتی متوازی‌الاضلاع لولایی یاد شده، تغییر شکل می‌دهد، امتداد خط متحرک DF ثابت می‌ماند. به علت ثابت ماندن امتداد DF و $D'F'$ ، صفحه‌ی انتقال بار همواره موازی سطح زمین باقی می‌ماند و در نتیجه بار نخواهد لغزید.

محرك در این دستگاه انتقال بار، هیدرولیکی است. محرك هیدرولیکی سکوی A را به قسمت بار وصل می‌کند. به کارگیری محرك هیدرولیکی برای آن است که انتقال بار به‌طور آرام و آهسته انجام گیرد.

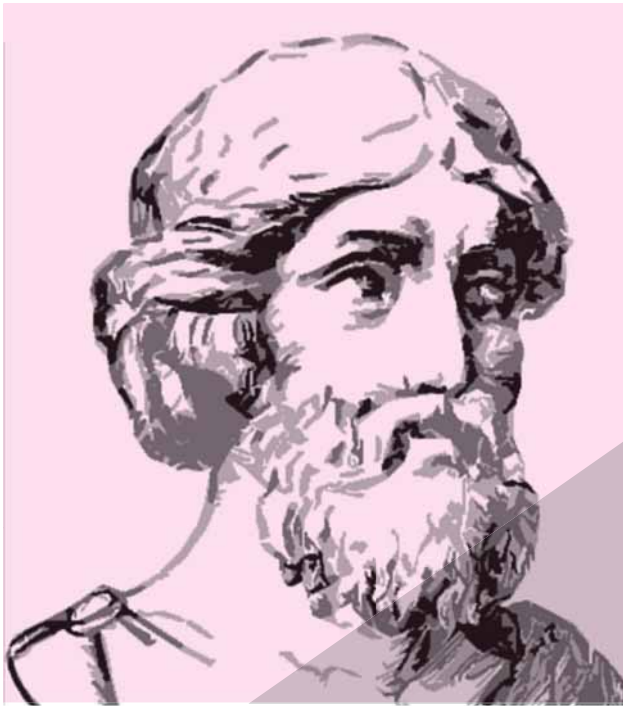
آقا ناصر دومین دستگاهی را که می‌ساخت، «جک بزرگ» نام داشت، با نشان دادن شکل ۲ به صورت زیر توضیح داد:

شکل ۲ یک جک بزرگ را نشان می‌دهد. A و B دو پایه‌اند و AC و BD دو تسمه با طول‌های مساوی هستند که به ترتیب به پایه‌های A و B لولا شده‌اند. دو تسمه AC و BD به کفه‌ی بالایی جک لولا شده‌اند، فاصله‌ی دو لولای C و D برابر فاصله‌ی دو لولای A و B اختیار شده است.

در چهارضلعی ABDC اضلاع مقابل دوه‌دو مساوی‌اند. پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. در طرف راست شکل، یک سیلندر روغنی (هیدرولیک) دیده می‌شود. هنگامی که بازوی سیلندر روغنی از استوانه

خارج می‌شود، تسمه BD را دور لولای B می‌چرخاند. در نتیجه کف بالایی جک بالا می‌رود. چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است، پس با چرخش تسمه BD، امتداد CD همواره موازی با امتداد AB می‌ماند. لذا با تغییر شکل چهارضلعی ABDC، کفه‌ی بالایی جک همواره موازی با سطح زمین حرکت می‌کند و در نتیجه خودرویی که روی کفه قرار دارد، نمی‌افتد.

آن روز جمعه یکی از پرخاطره‌ترین روزهای زندگی‌ام بود؛ روزی پربار؛ روزی که درس بزرگی گرفتم. تأسف خوردم که چه زمان‌هایی را می‌توانستم برای دانش‌آموزانم مفیدتر باشم، از دست دادم و چه بسا که می‌توانستم بسترهای لازم را برای شکوفایی علاقه‌ها و استعدادهای بچه‌ها فراهم کنم.



سه گانه های فیثاغورس

اشاره

این مقاله عمدتاً دربارهٔ جبر است، ولی با مسئله‌ای که نغمهٔ هندسه از آن برمی آید، کار را شروع می‌کنیم. این مسئله قضیهٔ فیثاغورس است که از زمان اقلیدس (۳۰۰ سال پیش از میلاد) سابقه دارد.



عباس قلعه پوراقدم
دبیر ریاضی ارومیه

۴. و بی‌شمار سه‌تایی دیگر که مضرب‌هایی از ۳، ۴ و ۵ هستند.

۵. $a=5$, $b=12$ و $c=13$ ، چون: $5^2+12^2=13^2$ ، یا: $25+144=169$.

۶. $a=10$, $b=24$ و $c=26$ ، چون: ...

۷. و بی‌شمار سه‌تایی دیگر که مضرب‌هایی از ۵، ۱۲ و ۱۳ هستند.

با اندکی معلومات جبری می‌توانیم مسئلهٔ زیر را حل کنیم:

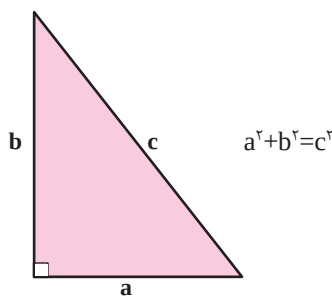
اگر d عدد صحیح باشد و m ، n و s یک سه‌گانهٔ فیثاغورسی باشند، آن‌گاه dm ، dn و ds نیز سه‌گانهٔ فیثاغورسی خواهند بود.

اثبات:

$$(dm)^2 + (dn)^2 = d^2 m^2 + d^2 n^2 = d^2 (m^2 + n^2) \\ = d^2 s^2 = (ds)^2$$

راستی آیا یافتن سه‌گانه‌های فیثاغورسی تا بی‌نهایت ادامه خواهد داشت؟ به عبارت دیگر، آیا بی‌نهایت سه‌گانهٔ فیثاغورسی وجود دارد؟

مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر می‌گیریم که اضلاع آن a ، b و c (وتر است) باشند. رابطهٔ فیثاغورس در مورد این مثلث به شکل زیر خواهد بود:



شکل ۱.

عددهای صحیح a ، b و c را که در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند، سه‌گانه‌های فیثاغورس می‌نامیم.

چند نمونه از سه‌گانه‌های فیثاغورس

۱. $a=3$, $b=4$ و $c=5$ ، چون: $3^2+4^2=5^2$ ، یا: $9+16=25$.

۲. $a=6$, $b=8$ و $c=10$ ، چون: ...

۳. $a=9$, $b=12$ و $c=15$ ، چون: ...

در واقع به دنبال همهٔ عددهای صحیح a ، b و c هستیم که در معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (*)$$

اگر طرفین معادلهٔ $(*)$ را بر c^2 تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

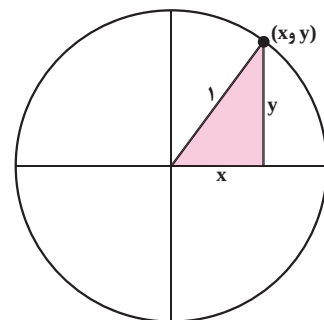
a ، b و c عددهای صحیح هستند. بنابراین $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ اعداد گویا خواهند بود. فرض کنیم:

$$x = \frac{a}{c}, \quad y = \frac{b}{c}$$

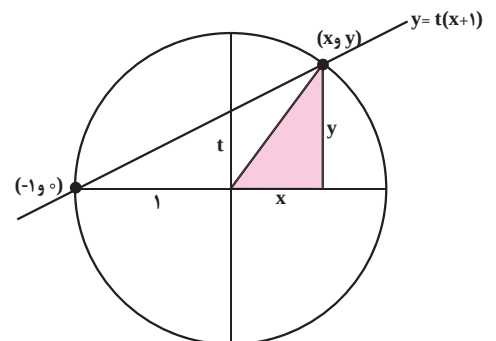
معادلهٔ ما به شکل زیر درمی‌آید:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (**)$$

مسئله به یافتن عددهای گویای x و y که در معادلهٔ $(**)$ صدق کنند، تبدیل می‌شود. مجموعهٔ این عددها معادلهٔ دایره‌ای به شعاع یک است که مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع است. جواب معادله همهٔ نقاط واقع بر دایره است. در واقع به دنبال همهٔ نقاط (x, y) هستیم که x و y عدد گویا هستند و در $x^2 + y^2 = 1$ صدق می‌کنند. به شکل‌های ۲ و ۳ دقت کنید.



شکل ۲.



شکل ۳.

برای حل معادلهٔ $(**)$ از پارامتری کردن استفاده می‌کنیم. پارامتر در واقع متغیر سومی چون t است که به دو متغیر x و y وابسته است. اگر با این ایده که چگونه می‌توان این جواب‌ها را به‌دست آورد، مدتی تفریح کنید، به این فرمول‌ها خواهید رسید (البته در ادامه، این مطلب تحت عنوان یک قضیه مطرح و اثبات خواهد شد، لیکن فرصت را از دست ندهید و شانس خود را امتحان کنید. ضمن اینکه پارامتر t در شکل ۳ مشخص شده است):

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

اگر کمی جبر بلد باشید، می‌توانید درستی $x^2 + y^2 = 1$ را آزمایش کنید. حالا فرض کنید t مقادیر معینی را اختیار کند. چنداناً از این مقادیر را امتحان می‌کنیم و پس از یافتن x و y از $x = \frac{a}{c}$ و $y = \frac{b}{c}$ سه‌گانهٔ فیثاغورسی موردنظر را پیدا می‌کنیم.

مثال ۱. $t=2$. با جایگذاری عدد ۲ به جای t در فرمول‌ها خواهیم داشت:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{-3}{5}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{4}{5}$$

پس $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ این‌ها هستند و جواب‌های $a=3$ ، $b=4$ و $c=5$ به‌دست می‌آیند.

مثال ۲. اگر t مساوی هفت اختیار شود، سه‌تایی ۷، ۲۴ و ۲۵ به‌دست خواهد آمد.

حالا نسبت به ابتدای بحث پیشرفت زیادی کرده‌ایم، چون در آغاز حتی اگر همهٔ نیروی فکری خود را به‌کار می‌بردیم، جواب‌ها را یکی‌یکی با حدس و آزمایش به‌دست می‌آوردیم. علاوه بر این، معلوم نبود که می‌توان بی‌نهایت جواب به‌دست آورد یا نه. ولی حالا با قرار دادن مقادیر متفاوت به جای t به این مرحله رسیده‌ایم که عملاً بتوانیم جواب‌های بی‌شماری را بنویسیم. اما سؤال بعدی این است که با این فرمول‌ها آیا همهٔ جواب‌ها به‌دست می‌آیند؟ پاسخ این سؤال و چگونگی به‌دست آمدن فرمول‌ها به‌صورت قضیهٔ زیر بیان و اثبات می‌شود:

تاریخچه

اقلیدس یا ریاضی دانان هم عصر او، در سه قرن پیش از میلاد، می دانستند که سه گانه های فیثاغورس a, b و c را با استفاده از فرمول های $a=m^2-n^2$ و $b=2mn$ و $c=m^2+n^2$ که m و n اعداد صحیح هستند، می توان به دست آورد. به مدد جبر می توانید $a^2+b^2=c^2$ را بیازمایید.

ریاضی دانان در آن زمان از کار کردن با کسرها اکراه داشتند و بیشتر ترجیح می دادند با عددهای صحیح کار کنند. سه قرن پس از میلاد، دیو فانتوس به کسرها روی آورد و دانست که اگر فرمول های بالا را بر m^2+n^2 تقسیم کند و $t = \frac{n}{m}$ قرار دهد، این فرمول ها به دست خواهند آمد:

$$\frac{a}{c} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \frac{b}{c} = \frac{2t}{1+t^2}$$

با این حساب از اقلیدس تا دیو فانتوس حدود شش قرن طول کشید تا فرمول ها به همان صورتی که ما در قضیه بیان کردیم، درآمدند.

تحقیق: شاید برایتان جالب باشد که ظاهراً در آغاز سه گانه های فیثاغورسی یک عدد صحیح فرد می آید. آیا درست است که گفته شود هر عدد صحیح فردی، اولین عدد چنین سه گانه ای است؟ بررسی کنید.

قضیه: به جز جواب $x=-1$ و $y=0$ ، همه جواب های گویای معادله $x^2+y^2=1$ با قرار دادن مقادیر گویا در فرمول های زیر به دست می آیند:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

برهان: با در نظر گرفتن نقاط متفاوت روی دایره، کمیتی که آن را در شکل ۳ با t نشان داده ایم، تغییر می کند. مقدار t بر حسب x و y ، هم از معادله خط راست و هم از قضیه تالس به صورت زیر قابل یافتن است:

$$t = \frac{y}{x+1}$$

به وضوح $x=-1$ مخرج را صفر می کند، پس جواب $x=-1$ و $y=0$ را کنار می گذاریم.

حال از $x^2+y^2=1$ می توانیم $y^2=1-x^2$ را نتیجه بگیریم و باز با به کار بستن جبر مراحل زیر را طی می کنیم:

$$t = \frac{y}{x+1} \Rightarrow y = t(x+1) \Rightarrow y^2 = t^2(1+x)^2$$

$$y^2 = 1-x^2 \Rightarrow t^2(1+x)^2 = (1+x)(1-x)$$

$$\Rightarrow t^2 + t^2x = 1-x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$y = t(x+1) \Rightarrow y = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) \Rightarrow y = \frac{2t}{1+t^2}$$



یک

روش ساده برای ضرب عدد ۹ در اعداد دو رقمی



علی بهادر
دانش‌آموز از کرمان

عدد منهای یک واحد بیشتر از رقم دهگان $x =$

$$\overline{ab} - (a + 1) = 10a + b - a - 1 = 9a + b - 1$$

بنابراین به عدد $\overline{xy}$ که مساوی $10x + y$ است می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\overline{xy} &= 10x + y = 10(9a + b - 1) + 10 - b \\ &= 90a + 10b - 10 + 10 - b = 90a + 9b \\ &= 9(10a + b) = 9\overline{ab}\end{aligned}$$

یعنی حاصل، ۹ برابر عدد اولیه است!

توضیح از هیئت تحریریه

این گونه روابط عددی بسیارند و طی قرن‌ها، هزاران رابطه این چنین توسط افراد گوناگون کشف شده‌اند. علاوه بر آن، شاید اگر عدد ۹ را به‌طور مستقیم در عدد دورقمی ضرب کنیم، ساده‌تر باشد! اما استدلال ارائه شده ارزش بیشتری دارد و یک تمرین خوب در حیطه بحث وسیع «نظریه اعداد» است. به نویسنده محترم و سایر دانش‌آموزان علاقه‌مند ریاضی توصیه می‌شود، به جای تلاش برای کشف استقرایی روابطی این چنین، به مطالعه بیشتر در زمینه مبانی نظریه اعداد بپردازند تا بتوانند درباره علت وجود چنین نظم‌ها و الگوهای خود استدلال کنند.

فرض کنید بخواهیم عدد ۹ را در یک عدد دورقمی ضرب کنیم. ابتدا عدد دورقمی را منهای یک واحد بیشتر از رقم دهگان آن می‌کنیم. سپس رقم یکان عدد دورقمی را از ده کم می‌کنیم. بعد دو عدد حاصل را کنار هم قرار می‌دهیم؛ به همین سادگی! مثلاً فرض کنید بخواهیم ۹ را در ۱۳ ضرب کنیم:

الف) ۱۳ را از یک واحد بیشتر از رقم دهگان آن، یعنی ۲ کم می‌کنیم:

$$13 - 2 = 11$$

ب) ده را از رقم یکان عدد، یعنی ۳ کم می‌کنیم:

$$10 - 3 = 7$$

اکنون دو عدد حاصل را کنار هم می‌گذاریم: $117 = 9 \times 13$. یعنی:

با همین روش ۹ را ضرب در ۴۶ می‌کنیم:

$$46 - 5 = 41$$

$$10 - 6 = 4$$

بنابراین: $414 = 9 \times 46$.

اما چرا این‌طور است؟ در حالت کلی درستی این روش را اثبات می‌کنیم.

عدد دورقمی $\overline{ab}$ را که مساوی $10a + b$ است در

نظر بگیرید. با این روش داریم:

$$y = 10 - b = \text{ده منهای رقم دهگان}$$



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید با از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۹۴. تعداد دسته جواب‌های طبیعی معادله $6x + 10y + 15z = 3000$ را به دست آورید.

۲۹۵. ABCD یک چهارضلعی محدب است و داریم $AC = 7$ و $BD = 17$. فرض کنید N, P, M و نقاط میانی CD, BC, AB و Q نقطه میانی DA باشند. حاصل $MN^2 + PQ^2$ را بیابید.

۲۹۶. زوج $(A$ و $B)$ از زیرمجموعه‌های $X = \{1, 2, \dots, 1396\}$ را ویژه می‌نامیم، هرگاه نه A زیرمجموعه B باشد و نه B زیرمجموعه A . تعداد زوج‌های ویژه را به دست آورید.

۲۹۷. روی تخته سیاه عددهای ۱ تا ۱۰۰ نوشته شده‌اند. در هر دقیقه، دو عدد a و b را پاک می‌کنیم و دو عدد $\frac{a+b}{2}$ و $2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ را به جای آن‌ها می‌نویسیم. بعد از چند مرحله به وضعیتی رسیدیم که همه عددها به جز یک عدد، برابر ۱ هستند. آن عدد چیست؟

۲۹۸. چند تابع از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ به مجموعه

۲۹۱. تابع f از IR به IR در تساوی $f(x)f(y) = f(x-y)$ به ازای هر x و y صدق می‌کند. $f(2017)$ را به دست آورید.

۲۹۲. پانزده رقم ۱ در یک ردیف نوشته شده‌اند. می‌خواهیم با نوشتن چند علامت «+» بین آن‌ها، حاصل جمعی بسازیم که مضرب ۳۰ باشد. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ (برای مثال $S = 111 + 1 + 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ یکی از پاسخ‌هاست.)

۲۹۳. فرض کنید A, B, C, D, E و F ، شش نقطه روی یک دایره باشند (با همین ترتیب). همچنین فرض کنید، X نقطه تقاطع AD و BE ، Y نقطه تقاطع AD و CF ، و Z نقطه تقاطع CF و BE باشند. اگر X روی پاره‌خط BZ و AY و Y روی پاره‌خط CZ باشند و داشته باشیم: $AX = 3$ ، $BX = 2$ ، $CY = 4$ ، $DY = 10$ ، $EZ = 16$ و $FZ = 12$ ، مطلوب است مثلث XYZ .

۲۹۹. لاستیک‌های عقب اتومبیل بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک‌های جلو بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می‌شوند. چه موقع باید جای لاستیک‌های جلو و عقب را عوض کنیم تا با هم و در یک زمان ساییده شوند؟

۳۰۰. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، ریشه مثبت معادله $x^n + x^{n-1} + \dots + x = n+2$ را a_n بنامیم، ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ هم‌گراست و حد آن را به دست آورید.

بخش دوم: راه حل‌ها

۲۶۱. همه اعداد حقیقی x, y و z را بیابید، به طوری که:

$x + \sqrt[3]{x} = 2y, y + \sqrt[3]{y} = 2z, z + \sqrt[3]{z} = 2x$
تابع $f(t) = \frac{t + \sqrt[3]{t}}{2}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی است. (چرا؟) اگر $\{x, y, z\}$ یک جواب دستگاه باشد، آن‌گاه: $f(x)=x$ و $f(y)=z$ ، ادعا می‌کنیم: $f(z)=x$. در غیر این صورت، اگر: $f(x) < x$ ، آن‌گاه: $f(f(x)) < f(x) < x$ و در نتیجه: $f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x$ از طرف دیگر: $f(f(f(x))) = x$. پس $x < x$ که تناقض است. در نتیجه: $f(x) = x$ و یا $x = \sqrt[3]{x}$. پس: $x = 0$ یا $x = 1$ و یا $x = -1$.
بنابراین دستگاه معادلات فوق سه دسته جواب دارد: $(-1, -1, -1)$ و $(1, 1, 1)$ و $(0, 0, 0)$.

۲۶۲. چند زوج از اعداد طبیعی می‌توان یافت، به طوری که مجموع آن‌ها برابر ۱۳۹۵ و حاصل ضرب آن‌ها مضرب ۱۳۹۵ باشد.

با فرض $ab = 1395k$ و $1395 = a+b$ داریم: $a^2 - 1395a + 1395k = 0$ که در آن k عددی طبیعی است. با تشکیل Δ داریم: $\Delta = 1395(1395 - 4k)$ که باید مربع کامل باشد. با تجزیه ۱۳۹۵ به عامل‌های اول، یعنی $5 \times 9 \times 31$ ، نتیجه می‌شود که باید $4k - 1395$ نیز بر این اعداد بخش‌پذیر باشد که ممکن نیست. در نتیجه چنین زوجی وجود ندارد.

۲۶۳. $2n$ نقطه در صفحه مفروض هستند. ثابت کنید می‌توان با n پاره‌خط دوه‌دو نامتقاطع، این نقاط را به هم وصل کرد، به طوری که هر نقطه روی دقیقاً یک پاره‌خط باشد. در میان تمام «پاره‌خط‌های ممکن» که تعدادشان متناهی

است، آن حالتی را در نظر بگیرید که مجموع طول n پاره‌خط، کمترین مقدار ممکن باشد. ثابت می‌کنیم در این حالت هیچ دو پاره‌خطی از این n پاره‌خط، متقاطع نیستند (برهان خلف). فرض کنید دو پاره‌خط AB و CD از این n پاره‌خط متقاطع باشند. با تعویض این دو پاره‌خط با دو پاره‌خط AC و BD به n پاره‌خط جدید می‌رسیم که مجموع طول آن‌ها کمتر است و این تناقض است. پس هیچ دو پاره‌خطی از n پاره‌خط اولیه متقاطع نیستند.

۲۶۴. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. نقطه E روی AB و نقطه F روی AC مفروض‌اند؛ به طوری که EF و AB موازی‌اند. اگر O مرکز ثقل مثلث AEF و M نقطه میانی EC باشد، مطلوب است اندازه زاویه OBM .

فرض کنید T تقاطع EF و BM باشد. چون دو مثلث MCB و MEF هم‌نهشتند، در نتیجه CTE یک متوازی‌الاضلاع و مثلث CTF متساوی‌الاضلاع است. همچنین، چون دو مثلث OEB و OFT هم‌نهشتند، داریم: $OB = OT$ و $\widehat{FOE} = \widehat{EOB}$. بنابراین مثلث BOT یک مثلث متساوی‌الساقین است و: $\widehat{BOT} = \widehat{EOF} = 120^\circ$. OM میانه مثلث BOT است و در نتیجه نیم‌ساز است. پس: $\widehat{BOM} = 60^\circ$ و بنابراین: $\widehat{OBM} = 30^\circ$.

۲۶۵. همه اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید که به صورت تفاضل دو مکعب کامل باشند.

اگر $P = x^3 - y^3$ اول باشد، آن‌گاه $P = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$. در نتیجه $x - y = 1$. پس x و y دو عدد متوالی هستند. با فرض $P < 100$ و با آزمودن مقادیر به عددهای ۷، ۱۹، ۳۷ و ۶۱ می‌رسیم که شرایط فوق را دارند.

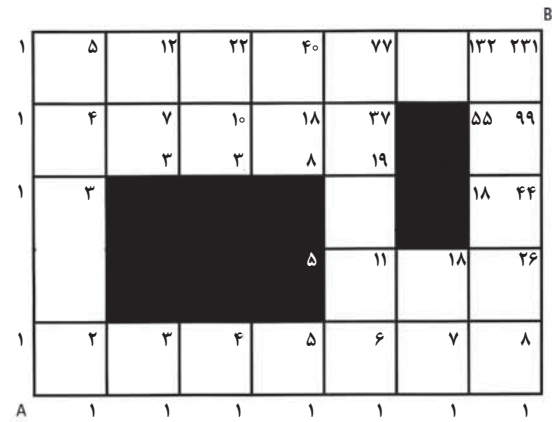
۲۶۶. مجموع ۲۰ عدد طبیعی برابر است با ۴۶۲. بزرگ‌ترین عامل مشترک این ۲۰ عدد حداکثر چقدر است؟

اگر d بزرگ‌ترین عامل مشترک ۲۰ عدد باشد، آن‌گاه با تقسیم عددها بر d به ۲۰ عدد می‌رسیم که مجموعشان حداقل ۲۰ است. پس: $\frac{462}{d} \leq 20$ و یا $d \leq 23$. از طرف دیگر، d باید ۴۶۲ را بشمارد. با توجه به تجزیه $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$ ، بیشترین مقدار d ، ۲۱ است.

۲۶۷. مقدار a را بیابید، به طوری که معادله زیر دقیقاً یک ریشه داشته باشد.

اگر x یک ریشه معادله باشد، $x - 1396 = 0$ هم ریشه دیگر معادله است. پس باید داشته باشیم: $x - 1396 = 0$ و یا $x = 683$. با جای‌گذاری این مقدار به پاسخ $a = 683 \times 684$ می‌رسیم.

۲۶۸. در شکل یک چند مسیر از A به B وجود دارد؟ حرکت‌های مجاز پایین به بالا و چپ به راست هستند.



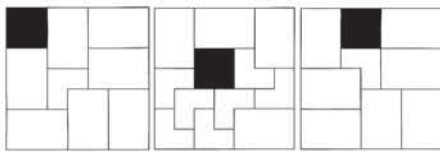
شکل ۱.

در شکل تعداد مسیرها از نقطه A تا هر نقطه مشخص شده است. برای این کار کافی است به صورت بازگشتی تعداد مسیرها تا هر نقطه را از مجموع تعداد مسیرها تا دو نقطه پایینی و سمت چپی به دست آوریم. پس پاسخ برابر است با: ۲۳۱.

۲۶۹. از یک جدول مربعی به ضلع $n = 6k + 1$ یک خانه 1×1 را حذف کرده‌ایم. ثابت کنید جدول حاصل را می‌توان با موزاییک‌هایی به شکل  فرش کرد.

حکم را به روش استقرا ثابت می‌کنیم. برای $k = 1$ حکم برقرار است. برای $k = 1$ ، با توجه به تقارن، سه حالت وجود دارد که در شکل ۲ آمده است. در این سه حالت، صفحه 7×7 با یک

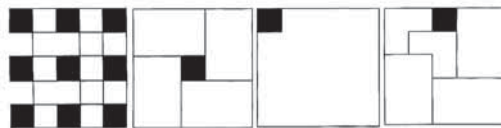
مربع 2×2 که شامل خانه حذف شده است و مستطیل‌های 2×3 و تعدادی موزاییک پر شده است و فرش کردن صفحه امکان‌پذیر است. حال فرض کنید حکم برای $n = 6k + 1$ برقرار باشد. مربعی به ضلع $n = 6k + 7$ در نظر بگیرید. می‌توان مربعی به ضلع $n = 6k + 1$ چنان از یکی از چهار گوشه جدا کرد که شامل خانه حذف شده باشد. طبق فرض این قسمت قابل فرش کردن است. باقی‌مانده خانه‌ها دو مستطیل $6 \times (6k + 7)$ و $6 \times (6k + 1)$ هستند که به راحتی با مستطیل‌های 2×3 فرش می‌شوند و هر مستطیل 2×3 نیز با دو موزاییک فرش می‌شود.



شکل ۲.

۲۷۰. از یک جدول 5×5 ، کدام خانه 1×1 را اگر حذف کنیم، می‌توانیم بقیه خانه‌ها را با موزاییک‌هایی به شکل  فرش کنیم؟

چون از ۸ موزاییک استفاده می‌شود، بنابراین یکی از ۹ خانه رنگ شده پوشیده نمی‌شود. شکل ۳ نشان می‌دهد که کدام خانه‌ها ممکن است خانه‌های حذف شده باشند.



شکل ۳.

پیکارجوی! ۴ پرسش‌های

در مثلث ABC، $\hat{C} = 2\hat{B}$ و عمودی که در نقطه E وسط BC بر آن رسم شده، AB را در نقطه D قطع کرده است، به طوری که: $AC = 2DE$. اندازه $\hat{B}$ چند درجه است؟

الف) 1° ☐

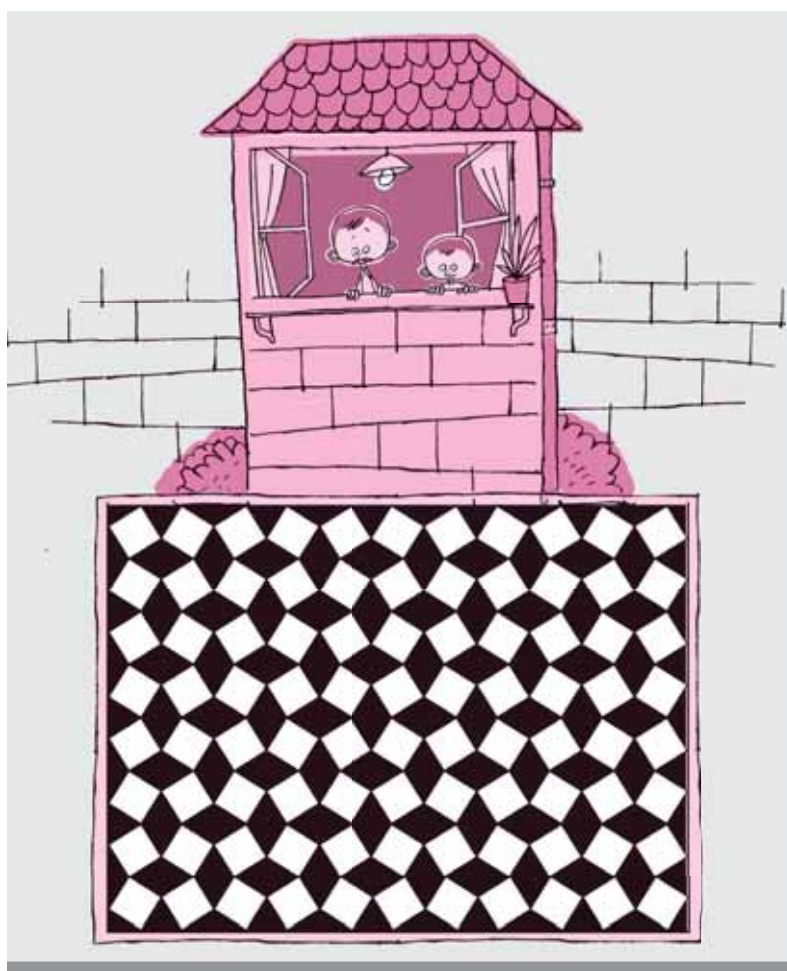
ب) 15° ☐

ج) 18° ☐

د) 2° ☐

ه) $22/5^\circ$ ☐





سفید برابر بود. تعداد کاشی‌های سفیدی که مصرف کردیم بیشتر بود، ولی برای پر کردن گوشه‌های خالی زمین فقط از کاشی‌های سیاه استفاده کردیم و تعداد درستی کاشی هم مصرف شد و...»

فرهاد صحبت پدر را قطع کرد و گفت: «نه پدر امکان ندارد! حتماً خرده کاشی اضافه آوردید.»

پدر گفت: «تو از کجا می‌دانی؟ تو که آن موقع خیلی کوچک بودی و اصلاً هم اینجا نبودی!»

فرهاد گفت: «آری پدر درست می‌گویی، ولی من با دلیل و به کمک هندسه برایت ثابت می‌کنم که امکان ندارد تعداد کاشی‌های سیاه عدد درستی بوده باشد.»

آیا شما هم می‌توانید این موضوع را ثابت کنید؟

تمام آن قطعه مستطیل شکل کاشی کاری شده بود. البته بدیهی است که کناره‌های زمین مستطیل شکل، با تکه‌های کاشی فرش شده بود که همه آن‌ها هم سیاه‌رنگ بودند.

فرهاد از پدرش پرسید: «پدرجان! چطور شد که اینجا را این‌طوری کاشی کاری کردید؟»

پدر گفت: «راستش را بخواهی، می‌دانی که عمویست کاشی‌فروشی دارد و چون ما می‌خواستیم از او کاشی بخریم و او همین دو نوع کاشی را داشت، ما هم این طرح به فکرمان رسید که زیاد هم بد نشد.»

فرهاد پرسید: «چند تا کاشی مصرف کردید؟»

پدر گفت: «یادم نیست. ابعاد این زمین شش متر در هشت متر است و یادم هست که قطر کوچک هر کاشی سیاه با ضلع کاشی‌های

فرهاد کوچولو از دوستان خوب من است. با اینکه خیلی کوچک و کم‌سن است! ولی سال‌هاست که با هم دوست هستیم! و در زندگی من حضور دارد. به همین دلیل هم می‌خواهم در اینجا به یک معمای بسیار زیبا که توسط او حل شد، اشاره‌ای کنم.

فرهاد امسال در کلاس دهم تحصیل می‌کند. چند روز پیش فرهاد و پدرش از پشت پنجره حیاط خانه را تماشا می‌کردند که ناگهان کاشی‌کاری کف حیاط توجه فرهاد را به خودش جلب کرد. محوطه‌ی میانی حیاط خانه با دو نوع کاشی سیاه و سفیدرنگ به زیبایی کاشی‌کاری شده بود. به‌طوری که هر کاشی سیاه‌رنگ که لوزی‌شکل بود، با چهار کاشی سفیدرنگ که مربع‌شکل بودند، احاطه شده بود و چهار رأس آن نیز به چهار رأس چهار کاشی سیاه دیگر وصل بود. به همین صورت

بعد و نظری

بر مجله ریاضی برهان متوسطه ۲ در کنار دانش آموزان

اشاره

یک صبح بهاری به میان دانش آموزان «دبیرستان غیردولتی خاتم» منطقه ۶ شهر تهران رفتیم و با آن‌ها به بحث پیرامون «برهان» نشستیم تا مجله را از نگاه آنان ببینیم؛ کاری که متأسفانه تا این زمان کمتر به آن پرداخته بودیم. جمعی از دانش آموزان سال‌های دهم و سوم ریاضی از قبل مجله شماره ۷ (ویژه فروردین ۹۶) را مطالعه کرده بودند و در آن روز با هم به مرور نظرهای آنان پرداختیم. ابتدا مقدمه‌ای گفتیم و در همان مقدمه هم با بچه‌ها بحثمان شد!



مقدمه

ابتدا به بچه‌ها در مورد اهمیت مطالعه عمومی (غیردرسی) گفتم و اینکه در کشور ما سطح و میزان مطالعه چگونه است. آیا رضایت‌بخش است یا خیر و آیا سطح مطالعه رابطه‌ای با توسعه‌یافتگی یک کشور دارد یا خیر؟ در پاسخ این نظرها را دریافت کردم:

- میزان مطالعه به نوع کار افراد بستگی دارد. کسانی که بیشتر کارهایی انجام می‌دهند که آمیخته با فعالیت‌های فیزیکی است، اصولاً نیاز چندانی به مطالعه احساس نمی‌کنند.
- یک سلسله درس‌های ثابت برای ما گذاشته‌اند که باید با خواندن آن‌ها مسیری مشخص را طی کنیم تا به اصطلاح در زندگی مان موفق شویم. در نتیجه از مطالعه غیردرسی دور می‌شویم. در حالی که در کشورهای پیشرفته، اطلاعات عمومی اشخاص اهمیت دارد. به همین علت سرائه مطالعه در کشور ما پایین می‌آید.

- برای آشنایی با فرهنگ غنی کشورمان، مثلاً آشنایی با ادبیات، شعر و... باید مطالعه کنیم.
- مطالعه باعث تعالی جامعه می‌شود و از این طریق فرهنگ شهروندی بهبود می‌یابد.

البته نظرهای دیگری هم داشتیم که بعضی از آن‌ها بد نیستند؛ از جمله:

- آرش فتیحی می‌گوید: «مطالعه باید همراه با عمل باشد. بیشتر ما کتاب می‌خوانیم که بگوییم چیزی خوانده‌ایم و تأثیر آن در زندگی روزمره مان محسوس نیست!»



- فرمهر فارسیان هم می‌گوید: «با نظرتمان در مورد رابطه بین میزان مطالعه و توسعه‌یافتگی موافق نیستیم. جامعه‌ای توسعه یافته است که در آن، هر کس در جایی باشد که شایستگی آن را دارد!»



برایش توضیح دادم که منظور ما این نیست که این تنها عامل توسعه‌یافتگی است، بلکه یکی از نشانه‌های آن است. بعد از بحثی نسبتاً طولانی درباره جایگاه و اهمیت مطالعه، به بحث پیرامون مطالعه تخصصی رسیدیم. درباره نشریات تخصصی توضیحاتی دادم و اشاره کردم که وضع نشریات تخصصی در کشور ما چندان بهتر از نشریات عمومی نیست. در میان نشریات تخصصی، نشریات مرتبط با ریاضیات وضعیت بهتری داشته‌اند و این به‌خاطر اهمیت دانش ریاضی بوده که به نوعی «مادر علوم» خوانده می‌شده

است. یعنی تعداد عنوان و شمارگان نشریات ریاضی در یک قرن اخیر که سال‌های پایانی آن را می‌گذرانیم، به مراتب بیشتر از نشریات مرتبط با علوم دیگر (فیزیک، شیمی، نجوم و...) بوده است.

اشاره‌ای هم به قدمت و تاریخچه مجلات ریاضی ایران کردم و به‌طور خاص از «مجله یکان» و اثرگذاری آن بر آموزش ریاضی کشورمان در زمان انتشار آن، یاد کردم. در نهایت به مجلات ریاضی بعد از انقلاب اشاره کردم و رسیدم به مجلات رشد و نشریات ریاضی که در چارچوب آن منتشر می‌شوند (رشد آموزش ریاضی برای معلمان و دبیران ریاضی، رشد برهان متوسطه ۱ و رشد برهان متوسطه ۲). تأکید کردم که مجله ما تنها مجله دانش‌آموزی در سطح دبیرستان است که به‌صورت ماهانه منتشر می‌شود. از بچه‌ها پرسیدم به نظر آن‌ها جایگاه مجله ریاضی دانش‌آموزی چیست و چه تأثیری می‌تواند داشته باشد؟

● **آرش فتحی:** «اگر مجله ریاضی جذابیت لازم را داشته باشد، حتماً آن را می‌خوانم و فکر می‌کنم دانش‌آموزان هم به آن نیاز دارند.»

● **امیر حسین رستمی:** «برنامه‌های مدرسه آن‌قدر سنگین است که حتی اگر مجله خوبی هم در دسترس ما باشد، اصلاً فرصت پرداختن به آن باقی نمی‌ماند.»



● **شایان فهام:** مجله باید طوری طراحی شود که معلم‌های ریاضی ما مجاب شوند، آن را در کنار برنامه آموزشی‌شان به بچه‌ها معرفی کنند. علاوه بر آن، فرهنگ‌سازی برای مطالعه مجلات ریاضی باید از دوره اول متوسطه شروع شود. مطالب مجله باید راه‌های جدید و متنوعی برای یادگیری ریاضیات ارائه دهند تا دانش‌آموزان احساس نیاز کنند. ولی اگر بحثی دشوار همراه با استدلال‌های طولانی و خسته‌کننده ارائه شود، حوصله تعقیب موضوع از بین می‌رود.

● **فرمهر فارسبایان:** کتاب‌های درسی و کمک‌درسی به اندازه کافی درباره نکته‌ها و فرمول‌های ریاضی مطلب دارند. مجله ریاضی باید بیشتر به سبک مطالعه ریاضی، نوع تفکر ریاضی و شیوه مواجهه با مسئله‌های ریاضی بپردازد.

همچنین، اغلب بچه‌ها می‌گفتند که گرافیک مجله تأثیر بسزایی در جذابیت مجله و تشویق دانش‌آموزان به استقبال از آن دارد و بیشتر آن‌ها معتقد بودند که طراحی مجله می‌تواند با رنگی بودن خیلی از این بهتر باشد. اگرچه **ناصریان**، یکی از دانش‌آموزان، معتقد بود که گرافیک مجله نقش ثانوی دارد و محتوا مهم‌تر است. همچنین



حیدری، یکی دیگر از بچه‌ها، هم همین اعتقاد را داشت و تأکید کرد: «اگر مجله بتواند راه‌حل‌های کوتاه‌تر و ساده‌تری برای مسائل و مشکلات دانش‌آموزان ارائه دهد، می‌تواند موفق باشد.»

در خاتمه بحثی هم درباره محتوای مجله برهان صورت گرفت و عنوان‌های مطالب آن مرور شد و از دانش‌آموزان درباره آن‌ها نظرخواهی کردم. خلاصه این نظرات به شرح زیر است:

● **ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی:** از بهترین بخش‌های مجله است. بازی‌ها و معماهای آن به نوعی ریاضیات کاربردی است. پیشنهاد می‌شود که با توجه به جذابیت آن حجمش بیشتر شود و صفحات بیشتری به آن اختصاص یابد.

● **صفحات جلد:** روی جلد این شماره می‌توانست از این جذاب‌تر باشد. طرح روی جلد نقش زیادی در جذب خواننده دارد. صفحه ۲ جلد (نام‌آوران عرصه ریاضی معاصر ایران) کار خوبی است. با مطالعه آن با کارهای ریاضی‌دانان ایرانی بیشتر آشنا می‌شویم. لاقول نام آن‌ها را یاد می‌گیریم و می‌توانیم با تحقیق بیشتر در مورد کارهای آن‌ها اطلاعات بیشتری به‌دست آوریم. صفحه ۳ جلد که در آن جمله‌ای از بزرگان ریاضی آمده، مناسب و آموزنده است. مطلب صفحه ۴ (ریاضیات و گردشگری) هم چندان توجه دانش‌آموزان را جلب نمی‌کند.

● **گفت‌وگو و مصاحبه:** مصاحبه‌ها کوتاه‌تر باشد و مخاطب گفت‌وگو کسی باشد که اکثر دانش‌آموزان او را بشناسند. صحبت‌هایش هم به درد ما بخورد و به لحاظ سنی با ما سنخیت بیشتری داشته باشد. مثلاً با رتبه‌های برتر کنکور و المپیاد ریاضی یا نخبگان جوان مصاحبه شود. همچنین، ممکن است گفت‌وگو به‌صورت میزگرد با چند نفر باشد. لطفاً بخش‌های جذاب مصاحبه پررنگ شوند.

● **ریاضیات در سینمای جهان:** از بخش‌های خوب و جذاب مجله است.

● **آموزش ترجمه متون:** خوب است، ولی ترجیح دارد نوآوری‌هایی در آن صورت گیرد.

● **مقالات کمک‌درسی:** اگر تکرار مباحث کتاب‌های درسی باشند، مناسب نیستند. به جای آن‌ها بهتر است، بیشتر به مباحث جنب درسی پرداخته شود. به‌خصوص ریاضیات کاربردی شامل کاربرد ریاضیات در فیزیک، شیمی، هواشناسی، زیست‌شناسی، موسیقی و... می‌تواند در مقالات جذاب مورد توجه قرار گیرد.

● **مسائل برای حل:** خوب است، ولی شاید بتوان به جای طرح تعداد زیادی مسئله، یک مسئله را به روش‌های گوناگون حل کرد و روش‌های حل را تحلیل کرد.

● **ریاضیات در چند دقیقه:** خوب و آموزنده است و چون متن‌های آن کوتاه هستند، خواندن آن آسان و مفید است.

کاربرد هندسه در معماری سنتی و مسجدهای ایران

مقدمه



مریم شفیعی
مدرس پژوهش سرای
دانش آموزی زکریای رازی
ناحیه یک ری

محدثه تاجیک
و حنا یزدی
دانش آموزان پژوهشگر
پژوهش سرای دانش آموزی
زکریای رازی ناحیه یک ری

هندسه ابزاری مناسب برای نظم بخشیدن به معماری و برقراری روابط آگاهانه میان اجزای بنا با یکدیگر است، تا در عین مرکب بودن، یکپارچگی فضا را به عنوان یک ترکیب خلاق و هدفمند میسر سازد. در فضای قانونمند هندسه است که هر چیزی و از آن جمله اجزای یک خانه و حتی یک شهر می توانند هویت پیدا کنند.

در فرایند طراحی، اشراف معمار به علم هندسه و استفاده خلاقانه از آن، تبدیل مفهوم به فضا و شکل را ساده تر می کند و می تواند مفهوم بعد و اندازه را به روشنی بیان کند. حاصل چنین فرایندی نوعی معماری است که به دور از برداشت های سلیقه ای، از نظم و معماری قابل درک می شود. طراحی یک معماری در قالب هندسه است که نمود می یابد [عمومی، ۱۳۸۷]. تحلیل روابط هندسی در بناهای ارزشمند، روش تفکر و تصمیمات معمار را در برخورد با مسئله و یافتن راه حل مناسب برای پاسخ گویی به آن اثبات می کند.

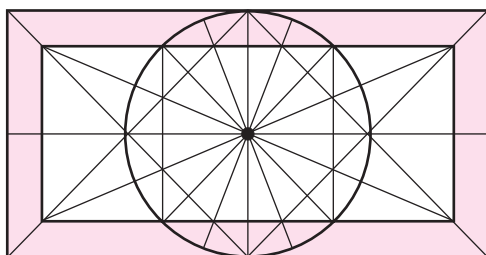
جایگاه علم هندسه در معماری همواره موضوعی جذاب برای تحقیق بوده است. پژوهش های متعددی در خصوص روش های استفاده از این ابزار کارآمد در فن معماری به انجام رسیده اند. در تمامی این مطالعات، فرض بر این بوده است که معماران گذشته از ترسیمات هندسی پایه ای، برای شکل دادن به اثر از معماری استفاده می کردند، یا حداقل از آن برای به دست آوردن و تنظیم تناسبات اجزای بنا سود می بردند. ساده ترین مثال آن استفاده از «پیمون» در طراحی معماری و استفاده از روش های هندسی ساده برای ترسیم تاق ها و گنبد هاست.

مقاله حاضر با این فرض آغاز می شود که معماری بناها و ساختمان ها، به خصوص مسجدهای دوران صفوی، نمی تواند تنها بر مبنای اصول سازه و به منظور تزئین آن شکل گرفته باشد. حتماً در طراحی آن ها از اصول هندسی و ترکیبات خاصی استفاده شده که هدف این مقاله یافتن این تناسبات است. تدوین یک مجموعه اطلاعاتی از کاربرد هندسه در معماری سنتی، به کشف رمز زبان هندسه در معماری ایرانی یاری می رساند.

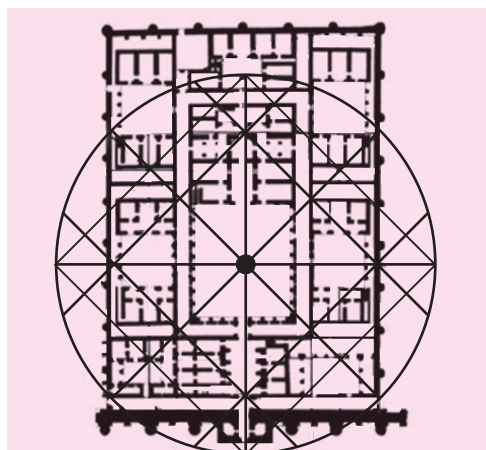
جایگاه هندسه در معماری ایرانی - اسلامی

قائم در چارچوبی از مربع و مثلث های متساوی الاضلاع طراحی شده است که برخوردگاه های آن ها همه نقاط ثابت مهم، نظیر عرض و ارتفاع درها، عرض، طول و ارتفاع سالن ها، موقعیت کتیبه ها و غیره را مشخص کرده است. بنابراین،

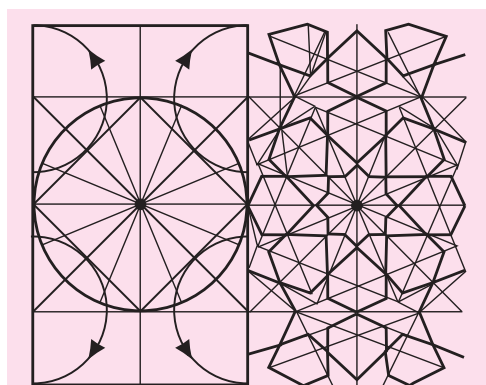
در معماری بناها و مسجدهای ایرانی، از ابزار هندسه متناسب با شرایط زمانی و مکانی و نیازهای هر ساختمان به خوبی استفاده شده است. لذا با وجود الگوی تقریباً مشابه مسجدها در هر دوره تاریخی ایران، هر ساختمان معماری منحصر به خود را دارد. در این بناها پلان و مقطع



تصویر ۱ (الف) تحلیل هندسی فرش مقبره شیخ صفی الدین اردبیلی بر مبنای تقسیم هشت.



تصویر ۱ (ب) تحلیل هندسی قصر مشتی در سوریه بر مبنای مربع و مستطیل ۷۲.



تصویر ۱ (پ). تحلیل هندسی نوعی گره چینی بر مبنای تقسیم هشت السعید، ۱۳۱۰.

اندازه هر قسمت به وسیله تناسب معینی با هر قسمت دیگر مرتبط است. در نتیجه، یک ساختمان مجموعه‌ای از اجزای غیرمتجانس نیست، بلکه ترکیبی هماهنگ از اجزا با ارتباط‌های متناسب است که به فضا حرکت و به چشم آرامش می‌دهد [حجاری، ۱۳۸۷].

بحث در مبنای کاربرد هندسه در معماری ایرانی - اسلامی گسترده است، اما شرح کوتاهی درباره این مبنای می‌تواند به درک جایگاه هندسه در معماری سنتی ایرانی کمک کند. در این بخش اشاره‌ای خواهیم داشت به آنچه باعث ارزش یافتن هندسه و نظم نزد مسلمانان شده است. در هنر اسلامی، تمامیت کائنات به وسیله هندسه و عددها قابل درک می‌شود [Akkach, 2015]. استفاده از هندسه در شاخه‌های گوناگون هنر اسلامی، به‌خصوص معماری و هنرهای وابسته به آن، دارای جایگاه ویژه‌ای است. نمونه‌هایی از کاربرد هندسه در آثار هنری اسلامی را در تصویر ۱ می‌بینیم.



دایره که نمادی از حرکت پیوسته و مدور آسمان است، با الوهیت نیز ارتباط دارد

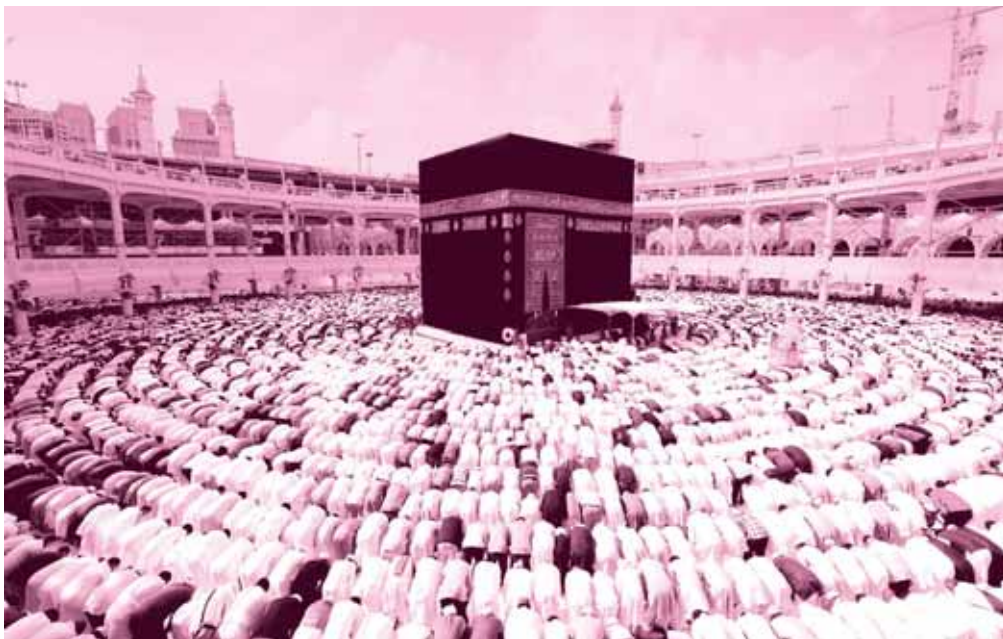
نقش دایره و مربع در اندام‌های معماری ایرانی

دایره در واقع همان نقطه است. نقطه می‌تواند به شکل‌های متفاوت نمود داشته باشد، اما شکل متداول و عام آن دایره است که از تمام جهات به صورت یکسان و مساوی رشد کرده است. افلاطون معتقد بود: دایره شکلی کامل است. در طبیعت هزاران شکل داریم که سطح مقطع آن‌ها دایره است.

دایره که نمادی از حرکت پیوسته و مدور آسمان است، با الوهیت نیز ارتباط دارد. معمولاً مخاطب و بیننده شکل دایره، به‌طور فطری و ذاتی نقاطی فرضی را روی خط محیط دایره با مرکز دایره می‌سنجد. در مرکز دایره تمام شعاع‌ها به نحوی هماهنگ کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. نقطه مرکز دایره در برگیرنده تمام خط‌هایی است که از مبانی مشترک هماهنگ با یکدیگر نشئت می‌گیرند. یکپارچگی این خط‌ها در این نقطه مرکزی در اوج کمال خویش است، و چون فاصله نقاط فرضی روی محیط دایره با مرکز یکسان است و به‌طور کلی تمامی شرایط در دایره به‌طور یکسان است، پس اعتدال و تعادل کامل را در دایره می‌توان احساس کرد. خصوصیات و ویژگی‌های مربوط به دایره را در فرم سه‌بعدی، می‌توان در «کره» و «استوانه» یافت. دایره در معماری سنتی نمادی است روحانی که دارای ارزش‌های مقدس و آسمانی در ارتباط با عالم بالا و

ملکوت اعلاست.

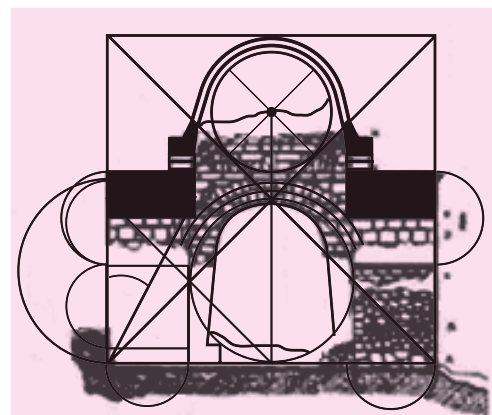
شکل مربع از ترکیب و تقاطع دو خط موازی عمودی، و دو خط موازی افقی، به‌وجود می‌آید. دارای چهار ضلع و چهار زاویه مساوی است. هر زاویه مربع ۹۰ درجه و مجموع چهار زاویه آن ۳۶۰ درجه است. طبق نظر فیثاغورس، مربع نماینده وحدت‌گونه‌ها و نشان‌دهنده برابری یک چیز با خودش به نحوی نامتناهی است. در نتیجه می‌تواند نمادی از عدالت قانون تلقی شود که همه را به یک چشم می‌نگرد. از نظر افلاطون، مربع نماینده هماهنگی است که عالی‌ترین فضیلت به‌شمار می‌آید؛ شناختی کامل که شخص می‌تواند از طریق آن به حقیقت مطلق دست یابد. مربع شکلی است ثابت‌گرا که اضلاع و زوایای برابرش احساسی از سکون، استحکام و حصار به بیننده القا می‌کنند و چهارپایه مستحکم برای آشیایی محسوب می‌شوند که به ثبات احتیاج دارند. گاهی کمال ایستای مربع یا مکعب با نمادگرایی پویای دایره ترکیب می‌شود. این امر در مورد کعبه مصداق دارد که مرکز مناسک طواف است و بی‌شک یکی از کهن‌ترین عبادتگاه‌هاست. مناسک طواف با دقت تمام بیانگر رابطه بین عبادتگاه و حرکت آسمانی است. طواف هفت‌بار انجام می‌شود که با تعداد کرات آسمانی هم‌خوانی داشته باشد؛ سه مرتبه شتابان و چهار مرتبه با قدم‌های کوتاه [آردلان، ۱۳۹۲].



تصویر ۲. کعبه

چهار تاقی

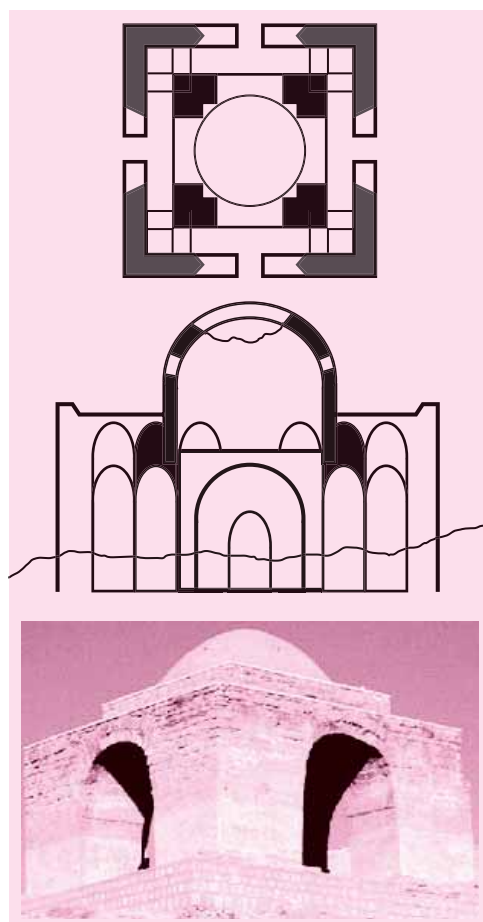
چهار تاقی بنایی چهار گوش با گنبدی است که بر مربعی از چهار قوس قرار گرفته است و با یک ورودی در هر طرف، شناخته می‌شود. چهار تاق در شکل‌های پایه‌ای ترکیبی از مربع و دایره است.



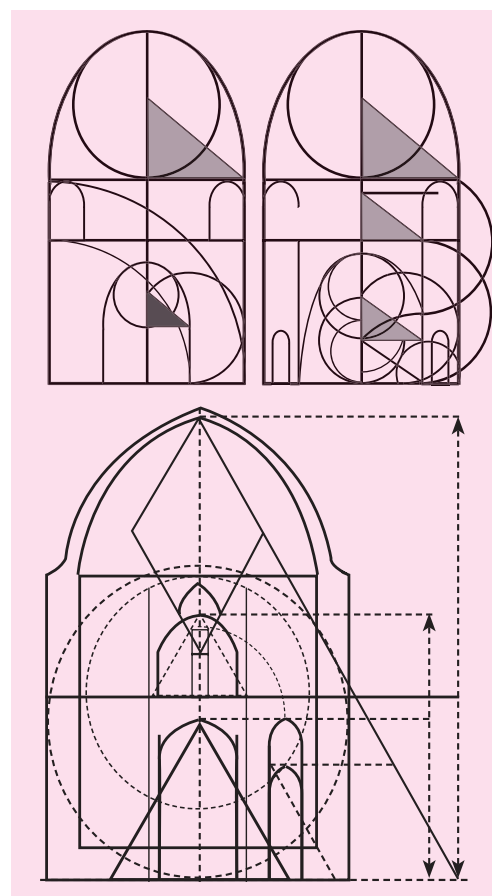
تصویر ۳ (الف). بالا: تحلیل هندسی چهار تاقی نیاسر از هاردی اگدار، ۱۳۸۸.

در چهار تاقی، گنبدی مدور یا کروی بر فضای مستطیلی قرار داده می‌شود که نشان‌دهنده دنیای کیفیت ناب است. چهار تاقی با مفهوم سنتی به گونه‌ای وارد دنیای شکل‌های اسلامی شد که اهمیت پیشین خود را حفظ می‌کرد. چهار تاقی از دیدگاه درون‌گرایی اسلامی به نماد یکپارچگی و آفرینش تبدیل شده و مانده است. این شکل که نماد سبکی و پویایی مطلق روح است، آغاز و پایانی ندارد. تنها نقطه مرجعش مرکز است که محور متافیزیکی آن را به محور تکیه‌گاهش متصل می‌کند، از آن می‌گذرد، و دو شکل دایره و مربع را به صورت کیفی یکی می‌کند.

بهترین بقایای تاریخی آن را می‌توان در معابد ساسانیان که آتش نمادین در مرکزشان می‌سوخت، یا در اورنگ‌گاه‌های شاهنشاهی، مانند تخت تاق‌دیس و شاید بهتر از همه در طرح‌های مشابه چهارباغ در بهشت‌های ساسانیان یافت. (تصویر ۳ و ۴)



تصویر ۴. شکلی دیگر از چهار تاقی نیاسر



تصویر ۳ (ب). تحلیل هندسی گنبد تاج‌الملک مسجد جامع اصفهان ایوب، ۱۳۵۶.

در معماری ایرانی به‌ندرت به بشن گرد برمی‌خوریم و معمولاً قسمت انتهایی بشن به شکل مربع و گاهی مستطیل است

گنبد

تعریف هندسی گنبد: گنبد مکان هندسی نقاطی است که از دوران چفدی مشخص حول یک محور قائم به‌وجود می‌آید. اما در زبان معماری، گنبد پوششی است که روی زمینه‌ای گرد برپا شود.

تعریف کاربردی گنبد: سقفی است نیم کره‌ای یا مقعر که معمولاً بالای پلان‌های مدور یا مربع و کثیرالاضلاع، که با کمک گوشوار مدور می‌شوند، تعبیه می‌شود.

اجزای تشکیل دهنده ساختمان گنبد

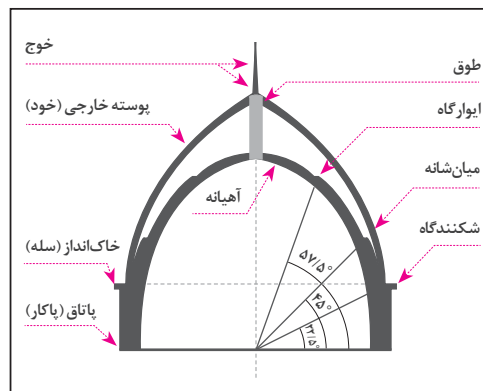
گنبد از سه قسمت تشکیل می‌شود:

۱. گنبدخانه = زمینه گنبد

۲. بشن = هیکل. یعنی قسمتی از گنبد که روی زمینه به‌صورت مکعب بالا می‌آید و یک یا دو طرف آن باز است (در گنبدهای قبل از اسلام هر چهار طرف به دهانه‌های باز منتهی می‌شد).

۳. چپیره = جمع شده

از آنجا که در معماری ایرانی به‌ندرت به بشن گرد برمی‌خوریم و معمولاً قسمت انتهایی بشن به شکل مربع و گاهی مستطیل است، با چپیره کردن آن را به دایره تبدیل می‌کنند و بعد گنبد روی آن سوار می‌شود. به‌همین دلیل، مرحله چپیره‌شدن در گنبدسازی شایان توجه است. زیرا امکان داشتن زمینه گرد است که اجرای نهایی پوشش گنبد را میسر می‌سازد. معمولاً در نقشه‌هایی که پوشش به‌صورت گنبد طراحی می‌شود، زمینه را به شکل مربع در نظر می‌گیرند تا به سادگی بتوان آن را به ۸، ۱۶، ۳۲ ضلعی و... و بالاخره دایره تبدیل کرد [پیرنیا، ۱۳۷۰]. (تصویر ۵)



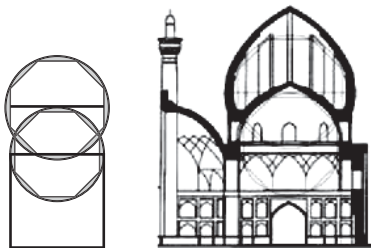
تصویر ۵. برخی از اجزای گنبد

یافته‌ها

در معماری مسجدها، به‌خصوص مسجدهای دوره صفوی، هندسه دارای تناسبات خاصی است که در ادامه به بررسی و تحلیل چند نمونه از آن‌ها می‌پردازیم (جدول ۱). مشاهده می‌شود که در تمامی برش‌های افقی (پلان)، قطر دایره مماس شده برابر است با ضلع مربع محاطی (تصویر ۶). در تقسیماتی که توسط هشت‌ضلعی مماس بر دایره است، رابطه فیثاغورس به‌دست می‌آید (تصویر ۷). در برش عمودی (مقطع) نیز همین رابطه برقرار است؛ با تفاوت اینکه در اینجا ضلع مربع بر قطر دایره مماس است (تصویر ۸).



در مسجد شیخ لطف‌الله، برش عمودی (مقطع) با مماس کردن ضلع مربع بر قطر دایره، ارتفاع گنبد تا کف را نشان می‌دهد. در مسجد امام که دارای گنبد دو پوسته گسسته است، برش عمودی (مقطع)، با مماس کردن ضلع مربع بر قطر دایره پوسته داخلی، ارتفاع گنبد تا کف را نشان می‌دهد. ضلع پایینی هشت‌ضلعی پوسته خارجی؛ مماس بر قطر دایره پوسته داخلی است.

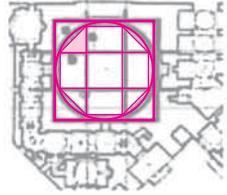
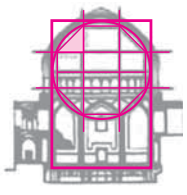
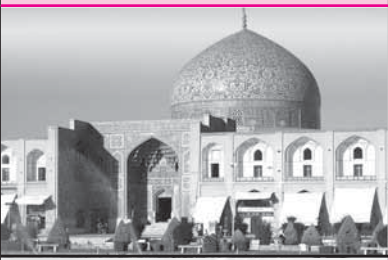
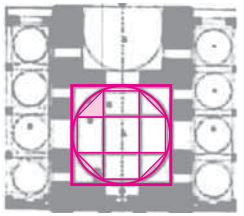
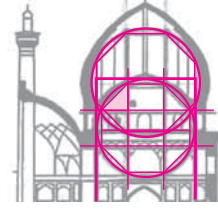
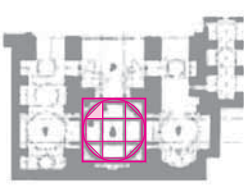
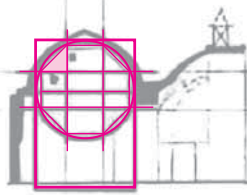
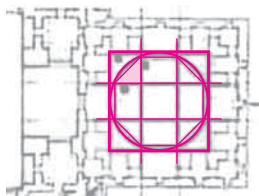
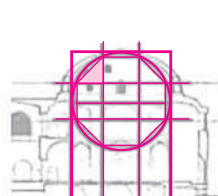


تصویر ۹. گنبد دو پوسته مسجد امام

در مسجد آقانور و مسجد علی که دارای گنبد تک پوسته با انحنا کمتر هستند، برش عمودی (مقطع)، با مماس کردن ضلع مربع بر قطر دایره، ارتفاع کمتر گنبد تا کف را نشان می‌دهد.

نتیجه‌گیری

ترکیب‌بندی و تناسبات هندسی در تاریخ معماری سنتی ایران به شیوه‌های گوناگون وجود دارد. در معماری مساجد، به دلیل کاربرد ایده‌ها، تفسیر هندسه به شیوه‌های مقدس ارائه شده است.

نام بنا	ترکیب شکل در پلان	ترکیب شکل در مقطع	ارتباط مربع به دایره	تصویر
مسجد شیخ لطف‌الله (اصفهان)			قطر دایره = ضلع مربع $\sqrt{a^2 + b^2} = c$	
مسجد امام (اصفهان)			قطر دایره = ضلع مربع $\sqrt{a^2 + b^2} = c$	
مسجد آقاخان (اصفهان)			قطر دایره = ضلع مربع $\sqrt{a^2 + b^2} = c$	
مسجد علی (اصفهان)			قطر دایره = ضلع مربع $\sqrt{a^2 + b^2} = c$	

* منابع

۱. اردلان، نادر (۱۳۹۲). *حس وحدت*. انتشارات علم معمار روپال. تهران. چاپ چهارم.
۲. پوپ، آرتور (۱۳۵۶). *معماری ایران، پیروزی شکل و رنگ*. ترجمه کرامت‌الله افسر. انتشارات یساولی. تهران.
۳. رضازاده اردبیلی، مجتبی و ثابت فرد، رضا (۱۳۹۲). «بازشناسی کاربرد اصول هندسی در معماری سنتی». *نشریه هنرهای زیبا*. شماره ۱. بهار.
۴. حجازی، مهرداد (۱۳۸۷). «هندسة مقدس در طبیعت و معماری ایرانی». *مجله تاریخ علم*. شماره ۷.
۵. لولر، رابرت (۱۳۶۸). *هندسة مقدس*. ترجمه هاید معیری. مؤسسه مطالعات و تحقیقات فرهنگی. تهران.
۶. رضازاده اردبیلی، مجتبی (۱۳۹۰). *مرمت آثار معماری: شناخت، آسیب‌شناسی و فن‌شناسی*. انتشارات دانشگاه تهران.
7. Akkach, Samer (2005), *Cosmology and Architecture in Premodern Islam*, State University of New York Press, New York.
8. Donato, Sandro (1990), *IRAN, La Ricostruzione Delle Aree Distrutte Dalla Guerra*, Gangemi Editore, Roma, Reggio C.

با بررسی‌های انجام شده به این نتیجه می‌رسیم که هندسه در معماری مسجدها، به‌خصوص در دوران صفوی، از الگوهایی که از ترکیب شکل‌های مربع و دایره شکل می‌گرفت، ایجاد می‌شد. حس این ترکیب‌بندی در پلان‌های افقی و عمودی در محدوده گنبد خانه‌ها به کرات دیده می‌شود و از نوع یک رابطه هندسی متناسب است. این رابطه در تقسیم‌بندی از کف تا بطن (بشن) در محدوده گوشه‌سازی (ناحیه انتقال)، و در ناحیه ارتفاع گنبد و ارتفاع نهایی (خیز گنبد) وجود دارد. آنچه‌ان که بررسی‌های تطبیقی نشان می‌دهند، در گنبدهای دو پوسته گسسته، به علت ارتفاع زیاد، هر پوسته به‌طور جداگانه هندسه خود را دارد.

عملگرهای (رابطه‌های) منطقی اصلی

$p \wedge q$ دروغ است. به همین ترتیب برای بقیه سطرها. مشاهده می‌شود که در جدول ۱، چهار سطر وجود دارند که متناظرند با چهار حالت ممکن در ترکیب‌های T و F برای دو گزاره p و q . توجه دارید، $p \wedge q$ فقط وقتی راست است که p و q هر دو راست باشند.

مثال: چهار عبارت زیر را در نظر بگیرید:

۱. پاریس در فرانسه است و: $۲+۲=۴$.
۲. پاریس در فرانسه است و: $۲+۲=۵$.
۳. پاریس در انگلستان است و: $۲+۲=۴$.
۴. پاریس در انگلستان است و: $۲+۲=۵$.

فقط اولین عبارت راست است. بقیه عبارت‌ها دروغ‌اند، زیرا حداقل یکی از دو گزاره دروغ است.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول ۱

این بخش سه عمل منطقی عطف، فصل و نقیض را مطرح می‌کند که به ترتیب معادل با کلمات «و»، «یا» و «نه» هستند.

عطف (ترکیب عطفی)، $p \wedge q$

هر دو گزاره می‌توانند با کلمه «و» با هم ترکیب شوند و یک گزاره مرکب تشکیل دهند که ترکیب عطفی از دو گزاره اصلی نامیده می‌شود. ترکیب عطفی p و q با $p \wedge q$ نمایش داده می‌شود و می‌خوانیم: « p و q ». از آنجا که $p \wedge q$ یک گزاره است، دارای ارزش راستی است و ارزش راستی آن به ارزش راستی p و q بستگی دارد. به‌ویژه داریم:

تعریف: اگر p و q راست باشند، آن‌گاه $p \wedge q$ راست است. در بقیه حالت‌ها $p \wedge q$ دروغ است.

به‌طور معادل، ارزش راستی $p \wedge q$ در جدول ۱ تعریف شده است.

در این جدول، سطر اول یک راه کوتاه است برای بیان اینکه اگر p راست و q راست باشد، آن‌گاه $p \wedge q$ راست است. دومین سطر می‌گوید اگر p راست و q دروغ باشد، آن‌گاه

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Logical Operation عملگرهای منطقی - رابطه‌های منطقی
2. Discusses مطرح کردن - اشاره کردن
3. Conjunction عاطف
4. Disjunction فاصل
5. Negation نقیض
6. Compound Propositions گزاره‌های ترکیبی
7. Since از آنجا که
8. Otherwise در غیر این صورت
9. Equivalently به‌طور معادل - هم‌ارز
10. Corresponding متناظراً

4.3 BASIC LOGICAL OPERATIONS

This section discusses three basic logical operation of conjunction, disjunction, and negation which correspond, respectively, to the English words "and", "or", and "not".

Conjunction, $p \wedge q$

Any two propositions can be combined by the word "and" to form a compound proposition called the **conjunction** of the original propositions. Symbolically,

$$p \wedge q$$

read " p and q ", denotes the conjunction of p and q . Since $p \wedge q$ is a proposition it has a truth value, and this truth value, and this truth value depends only on the truth values of p and q . Specifically:

Definition 4.1: If p and q are true, then $p \wedge q$ is true; otherwise $p \wedge q$ is false.

The truth value of $p \wedge q$ may be defined equivalently by the table in Fig. 4-1(a). Here, the first line is a short way of saying that if p is true and q is true, the $p \wedge q$ is true. The second line says that if p is true and q is false, then $p \wedge q$ is false. And so on. Observe that there are four lines corresponding to the four possible combinations of T and F for the two subpropositions p and q . Note that $p \wedge q$ is true only when both p and q are true.

EXAMPLE 4.2 Consider the following four statements:

- (i) Paris is in France and $2+2=4$.
- (ii) Paris is in France and $2+2=5$.
- (iii) Paris is in England and $2+2=4$.
- (iv) Paris is in England and $2+2=5$.

Only the first statement is true. Each of the other statements is false, since at least one of its substatements is false.

ترجمه برای دانش آموزان

Disjunction, $p \vee q$

Any two propositions can be combined by the word "or" to form a compound proposition called the **disjunction** of the original propositions. Symbolically,

$$p \vee q$$

read " p or q ", denotes the disjunction of p and q . The truth value of $p \vee q$ depends only on the truth values of p and q as follows.

Definition 4.2: If p and q are false, then $p \vee q$ is false; otherwise $p \vee q$ is true.

The truth value of $p \vee q$ may be defined equivalently by the table in Fig. 4-1(b). Observe that $p \vee q$ is false only in the fourth case when both p and q are false.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

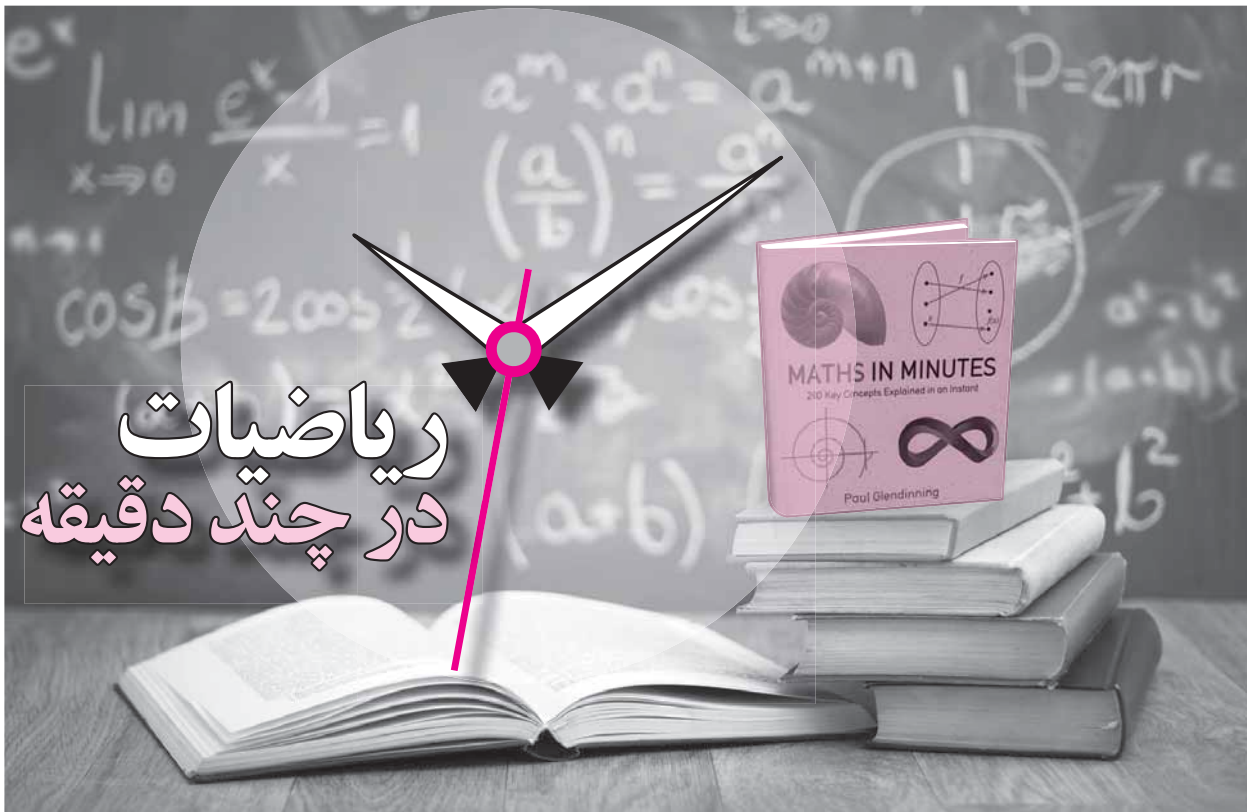
(a) " p and q "

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(b) " p or q "

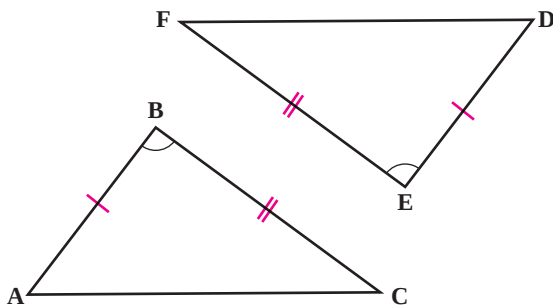
p	$\sim p$
T	F
F	T

(c) "not p "



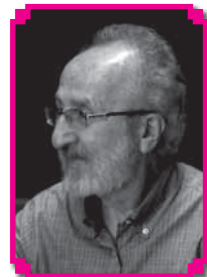
هم‌نهشتی

یکی از آن‌ها به خارج از صفحه، می‌توانند برهم منطبق شوند. دو مثلث در حالت کلی هم‌نهشت‌اند، اگر هر یک از سه مجموعه این مقادیر در هر دو یکسان باشند: طول‌های سه ضلع؛ طول‌های دو ضلع و زاویه بین آن‌ها؛ یا طول یک ضلع و زاویه‌های تشکیل شده با اضلاع دیگر دو طرف آن. به این ترتیب هر یک از این سه معیار برای مشخص کردن یک مثلث کافی است.



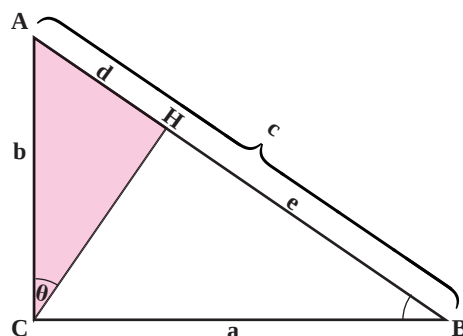
یک جفت مثلث هم‌نهشت را می‌توان با استفاده از آزمون‌هایی، از قبیل دانستن دست کم دو ضلع برابر و یک زاویه برابر مطابق شکل فوق شناخت. با این حال، این دو مثلث هم‌نهشت نمی‌توانند روی یکدیگر قرار گیرند.

دو شیء را «هم‌نهشت» (congruent) می‌گویند اگر یک‌شکل و یک‌اندازه باشند. بنابراین دو مثلث هم‌نهشت‌اند اگر مشابه - یک‌شکل - باشند و طول اضلاع متناظرشان برابر یا یک‌اندازه باشد. یعنی عامل مقیاس‌بندی بین آن‌ها ۱ باشد. توجه داشته باشید که هم‌نهشتی لزوماً به این معنی نیست که می‌توان یک مثلث را صرفاً توسط تبدیلات واقع در صفحه، طوری روی دیگری حرکت داد که کاملاً برهم منطبق شوند. دو مثلث هم‌نهشت می‌توانند تصویرهای آینه‌ای یکدیگر باشند و تنها به‌طور فیزیکی با برداشتن کامل



ترجمه غلامرضا یاسی‌پور

قضیه فیثاغورس



تشابه مثلث‌های ABC و CHB از یک طرف، و ABC و ACH از طرف دیگر، مستلزم این است که:

$$\frac{a}{c} = \frac{e}{a} \quad \text{و} \quad \frac{b}{c} = \frac{d}{b}$$

در نتیجه: $a^2 = ec$ و $b^2 = dc$ داریم:

$$a^2 + b^2 = (e+d)c = c^2$$

گرچه این قضیه از اواخر قرن ششم ق.م. به نام فیثاغورس (Pythagoras)، ریاضی‌دان یونانی، نامیده شده است، این ارتباط مشهور بین طول‌های اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، با یقین بسیار، قرن‌ها پیش از این نزد بابلی‌ها شناخته شده بوده است.

طبق این قضیه، مربع بزرگ‌ترین ضلع، که به نام وتر شناخته می‌شود، برابر مجموع مربعات طول‌های دو ضلع دیگر آن است. اثبات ساده آن مبتنی بر نسبت‌های اضلاع مثلث‌های متشابه را در شکل مقابل نشان داده‌ایم، اما آن را می‌توان با در نظر گرفتن سطوح مربع‌های هندسی ساخته شده بر هر ضلع مثلث نیز به اثبات رساند.

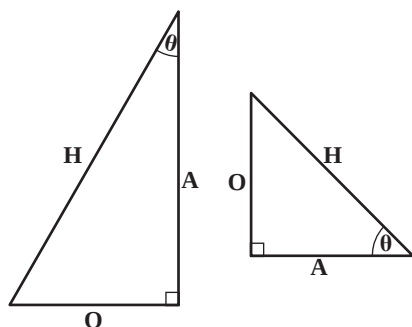
قضیه فیثاغورس یکی از ابزارهای مهم هندسه است، و بسیاری از تعاریف فاصله در هندسه مختصاتی مبتنی بر این رابطه‌اند. این قضیه را می‌توان برحسب رابطه بین توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس نیز بیان کرد.

سینوس، کسینوس و تانژانت

مثلث‌های یکدیگرند، توابع مذکور، بی‌توجه به اندازه مثلث، به پاسخ یکسان منجر می‌شوند. گذشته از این، از آنجا که:

$$\frac{O}{A} = \frac{O}{H} / \frac{A}{H}$$

می‌توان ملاحظه کرد که: $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.



در حالی که وتر یک مثلث قائم‌الزاویه همواره بزرگ‌ترین ضلع است، اضلاع مقابل و مجاور آن در رابطه با زاویه مورد بررسی تعریف می‌شوند.

مثلث‌های قائم‌الزاویه این امکان را به‌دست می‌دهند که توابع را با زاویه‌ها، از طریق نسبت‌های طول‌های اضلاع آن‌ها، وابسته کنیم. این‌ها به «توابع مثلثاتی» (trigonometric functions) موسوم‌اند، و توابع اساسی تعریف شده به این طریق عبارت‌اند از توابع «سینوس» (sine)، «کسینوس» (cosine) و «تانژانت» (tangent).

برای تعریف این توابع، یکی از زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه، به‌نام θ را که 90° نباشد، انتخاب می‌کنیم. این زاویه از برخورد وتر مثلث به طول H ، و ضلع دیگر، موسوم به ضلع مجاور، به طول A تشکیل می‌شود. ضلع باقی‌مانده، مقابل زاویه مزبور، دارای طول O است. در این صورت، توابع سینوس، کسینوس و تانژانت توسط نسبت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin \theta = \frac{O}{H} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{A}{H} \quad \text{و} \quad \tan \theta = \frac{O}{A}$$

از آنجا که دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویه θ



محمد طبیبی
دانشجوی مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی شریف

«پی» در ریاضی تعیین کننده!

مقدمه

عدد پی (π) یک ثابت ریاضی است که از تقسیم محیط دایره بر قطر آن به دست می آید. یافتن مقدار دقیق این عدد، در طول تاریخ مورد توجه ریاضی دانان بسیاری بوده و هر یک از آن ها سعی داشته است تا تقریب دقیق تری از عدد پی را ارائه دهد. غیاث الدین جمشید کاشانی، ریاضی دان ایرانی قرن های هشتم و نهم، توانسته بود عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشار به درستی محاسبه کند. باید در نظر داشت که در آن دوران روش مناسبی برای به دست آوردن نسبت های مثلثاتی (همچون بسط تیلور و...) وجود نداشت و تنها راه، به کارگیری اتحاد های مثلثاتی بود.

در این مقاله قصد داریم با استفاده از مفاهیم مقدماتی روشی را برای به دست آوردن عدد π ارائه دهیم.

برای به دست آوردن مساحت ABPC نخست باید توجه داشت که دو مثلث ABP و ACP هم نهشت هستند.

پس:

$$APBC = 2 \times \frac{R \times R \tan \frac{\theta}{2}}{2} = R^2 \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

و $ABPC = 2 \times \triangle APC$ مساحت

در نتیجه با استفاده از نامساوی (۱) داریم:

$$\frac{1}{2} R^2 \sin \theta \leq \frac{\theta}{360} \pi R^2 \leq R^2 \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

از طرف دیگر می دانیم:

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \leftarrow \text{اگر } \theta \text{ حاده باشد}$$

$$\tan \theta \geq 2 \tan \frac{\theta}{2} \text{ با جای گذاری نامساوی اخیر در}$$

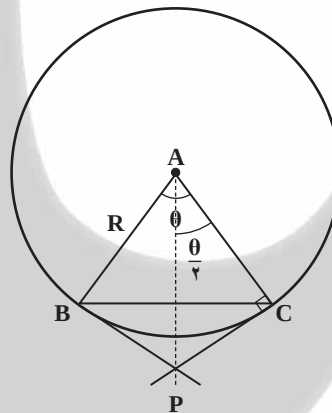
نامساوی بالا داریم:

$$\frac{1}{2} R^2 \sin \theta \leq \frac{\theta}{360} \pi R^2 \leq \frac{1}{2} R^2 \tan \theta$$

با تقسیم طرفین بر $R^2 \times \frac{\theta}{360}$ داریم:

$$\frac{180}{\theta} \sin \theta \leq \pi \leq \frac{180}{\theta} \tan \theta \quad (2)$$

در گام اول یک مثلث متساوی الساقین حاده الزویه رسم می کنیم (مانند ABC) که زاویه رأس آن برابر θ (بر حسب درجه) باشد. سپس به مرکز A و شعاع AB دایره ای رسم می کنیم. در نقاط B و C بر این دایره مماس هایی رسم می کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند. روشن است که داریم:



مساحت چهارضلعی $ABPC \leq \text{مساحت قطاع } ABC \leq \text{مساحت } \triangle ABC$

$\triangle ABC$

اگر طول AB را برابر R بگیریم، آن گاه داریم:

$$\text{مساحت } \triangle ABC = \frac{1}{2} R^2 \sin \theta$$

$$\text{مساحت قطاع } ABC = \frac{\theta}{360} \pi R^2$$



غیاث‌الدین جمشید کاشانی،
ریاضی‌دان ایرانی قرن‌های
هشتم و نهم، توانسته بود
عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشار
به درستی محاسبه کند

* پی نوشت
۱ و ۲. توجه کنید که این اتحاد
اثبات‌های مقدماتی و هندسی
فراوانی دارد که به برخی از
آن‌ها در «مجله برهان» اشاره
شده است.

* منابع
۱. دانشنامه آزاد ویکی‌پدیا «عدد
پی».
۲. وبسایت کانون فرهنگی
آموزش، «غیاث‌الدین جمشید
کاشانی».

لذا: $a_n = \sqrt{2} a_{n+1} \sqrt{1 - a_{n+1}^2}$

پس:

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } n \geq 2, a_{n+1} = \sqrt{\frac{-\sqrt{1-a_n^2}+1}{2}} \quad (۴)$$

توجه کنید که عبارت‌های (۳) و (۴) با فرض
مثبت بودن b_1 ها و a_1 ها به دست آمده‌اند.

اکنون به‌طور خلاصه داریم:

$$2^n a_n \leq \pi \leq 2^n b_n$$

$$n \geq 2 \quad n \geq 2$$

$$b_{n+1} = \frac{\sqrt{b_n^2 - 1}}{b_n} \text{ که } b_n \text{ از دنباله بازگشتی}$$

و $b_1 = 1$ پیروی می‌کند و a_n از دنباله بازگشتی

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } a_{n+1} = \sqrt{\frac{-\sqrt{1+a_n^2}+1}{2}} \text{ به دست می‌آید.}$$

اکنون اگر تا a_{12} و b_{12} پیش برویم، داریم:

$$2^{12} a_{12} \leq \pi \leq 3/1415932$$

$$3/1415932 \leq \pi \leq 3/1415932$$

لذا می‌توان دریافت که π تا ۵ رقم اعشار عبارت

است از: $3/1415932$ تا این اوصاف هنوز ۱۱ رقم از پیر

کاشان عقب‌تریم!

توجه کنید که می‌توان با افزایش n و همچنین افزایش

دقت ارقام اعشاری در هر مرحله از استفاده از روابط

بازگشتی، به تقریب‌های بسیار دقیق‌تر هم دست یافت.

نامساوی بالا به ازای هر θ حاده برقرار است، بدیهی
است که هر چه θ به صفر نزدیک‌تر باشد، کران بالا و
پایین دقیق‌تری برای π به دست می‌آید. به همین سبب
برای اینکه θ رشد سریعی به سمت صفر داشته باشد،

می‌گیریم: $\theta = \frac{180}{n}$ پس:

$$2^n \sin \frac{180}{2^n} \leq \pi \leq 2^n \tan \frac{180}{2^n}$$

اکنون فرض کنید:

$$a_n = \sin \frac{180}{2^n} \text{ و } b_n = \tan \frac{180}{2^n}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \text{ می‌دانیم:}$$

در نتیجه:

$$\tan \frac{180}{2^n} = \frac{2 \tan \frac{180}{2^{n+1}}}{1 - \tan^2 \frac{180}{2^{n+1}}}$$

$$\leftarrow b_{n+1} b_n + 2b_{n+1} - 1 = 0 \leftarrow b_n = \frac{2b_{n+1}}{1 - b_{n+1}^2}$$

$$b_{n+1} = \frac{\sqrt{b_n^2 - 1}}{2b_n} \quad (۳)$$

$$n \geq 2 \quad b_1 = 1$$

از طرف دیگر می‌دانیم: $2 \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

یاد صورت حاده بودن x : $\sin 2x = 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$$\text{یعنی: } \sin \frac{180}{2^n} = 2 \sin \frac{180}{2^{n+1}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{180}{2^{n+1}}}$$





محمد حاجی محمد حسینی
دانش آموز سال چهارم
رشته ریاضی و فیزیک
از دماوند

بسط دوجمله‌ای و بخش پذیری عددها

مقدمه

ممکن است وقتی شاخه‌های گوناگون ریاضی را مطالعه می‌کنیم، در نگاه اول هیچ ارتباطی میان آن‌ها مشاهده نکنیم. اما در حقیقت چنین نیست. در این مقاله قصد داریم به ذکر یک رابطه جالب در مورد بسط دوجمله‌ای و مبحث بخش پذیری عددها بپردازیم.

«مثلث خیام» در

طول تاریخ ریاضیات همواره

مورد توجه بوده و بسط «دوجمله‌ای

خیام - پاسکال» نیز یکی از مباحث شیرین

دوره دبیرستان است. ابتدا توضیحی کوتاه در مورد

این بسط می‌دهیم:

برای هر مجموع یا تفاضل دو جمله رابطه زیر برقرار است:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}a b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

تذکره ۱: نماد (فاکتوریل) برای هر عدد طبیعی

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

تذکره ۲:

در بسط

$(a-b)^n$ ضریب

جملات ردیف زوج

(جملات دوم، چهارم و...) منفی

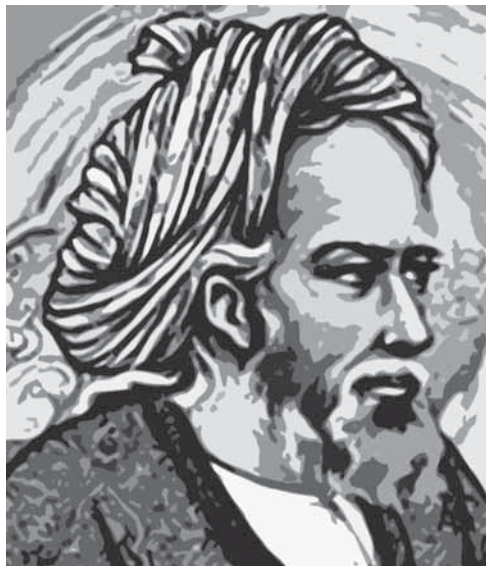
است. به مثال زیر دقت کنید:

$$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

اکنون بسط دوجمله‌ای را در نظر بگیرید. اگر مقدار

باز شده $(a+b)^n$ را بنویسیم و در آن از a فاکتور بگیریم،

به عبارت زیر می‌رسیم:



$(a+b)^n = a(a^{n-1} + na^{n-2}b^1 + \dots + na^1b^{n-1}) + b^n = aQ + b^n$
با فرض صحیح بودن a و b در عبارت بالا Q یک عدد صحیح است.

نتیجه: برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $(a+b)^n$ بر a کافی است، باقی مانده تقسیم b^n بر a را بیابیم.

■ **مثال:** باقی مانده تقسیم 20^5 بر ۱۸ را بیابید.

حل: 20^5 را می توان به صورت $(18+2)^5$ نوشت. پس برای به دست آوردن باقی مانده این تقسیم کافی است، باقی مانده تقسیم 2^5 بر ۱۸ را بیابیم که ۱۴ است. پس باقی مانده تقسیم اصلی نیز ۱۴ است.

اکنون به سراغ عددها و مبنای در کتاب ریاضیات گسسته سال چهارم می رویم:

اگر A یک عدد در مبنای n باشد، آن گاه برای بردن این عدد به مبنای ۱۰ از فرمول زیر استفاده می شود:

$A = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n^1 + a_0 n^0$
پس اگر یک عدد در مبنای ۱۰ نیز باشد، می توان فرمول فوق را در مورد آن به کار برد.

■ **مثال:** عدد ۲۳۴ را در نظر بگیرید:

$234 = 4(10)^2 + 3(10)^1 + 2(10)^0 = 4 + 30 + 200 = 234$
اکنون می خواهیم بینم عدد $A = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_n$ که در مبنای ۱۰ است، آیا به یک عدد دلخواه x که $x \in Z$ و $1 < x < 20$ بخش پذیر است یا خیر؟

$A = a_0(10)^0 + a_1(10)^1 + \dots + a_{k-1}(10)^{k-1} + a_k(10)^k$
حال در عبارت فوق می توانیم به جای ۱۰ مقدار $x+y$ را قرار دهیم؛ به طوری که:

$x, y \in Z$ و $x+y=10$

$A = a_0(x+y)^0 + a_1(x+y)^1 + \dots + a_k(x+y)^k$
حال با توجه به نتیجه قسمت قبل، باقی مانده تقسیم A بر X را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$r = y^k a_0 + y^{k-1} a_1 + \dots + y^1 a_{k-1} + a_k$$

■ **تذکر:** در عبارت $y^m \geq x$ می توان برای سهولت در محاسبه، به جای y^m باقی مانده y^m/x را جای گذاری کرد.

■ **مثال:** باقی مانده تقسیم 163596 بر ۷ را بیابید.

$$x = 7, x + y = 10 \Rightarrow y = 3$$

$$\begin{aligned} r &= 3^6 a_0 + 3^5 a_1 + 3^4 a_2 + \dots + 3^0 a_6 \\ &= a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 + 243a_5 + 729a_6 \\ &\Rightarrow 6 + 27 + 10 + 18 + 24 + 5 = 90 \end{aligned}$$

باقی مانده تقسیم ۹۰ بر ۷ برابر ۶ است، پس باقی مانده تقسیم اصلی نیز ۶ است.

حال با روش فوق می خواهیم بدانیم، کدام عددهای سه رقمی بر ۸ بخش پذیرند:

$$\begin{aligned} A &= a_2 a_1 a_0 = a_0(10)^0 + a_1(10)^1 + a_2(10)^2 \\ &= a_0 + a_1(10+2) + a_2(10+2)^2 \end{aligned}$$

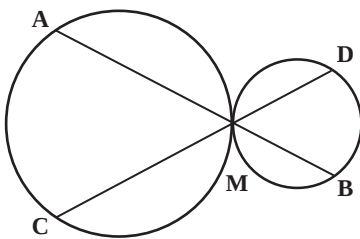
یعنی مقدار باقی مانده عدد A بر ۸ برابر مقدار زیر است:

$$2^2 a_0 + 2^1 a_1 + 2^0 a_2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2$$

پس عددهایی مثل ۱۲۸ که حاصل جمع یکان و دو برابر دهگان و چهار برابر صدگان آن ها بر ۸ بخش پذیر باشد، بر ۸ بخش پذیرند.

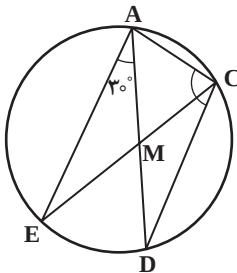
تمرین

- کدام عددهای سه رقمی بر ۱۲ بخش پذیرند؟



شکل ۱.

۲. در شکل ۲، $MA=ME$ ، $\widehat{EAD} = 30^\circ$ و $\widehat{CD} = 70^\circ$. اندازه $\widehat{ACD}$ را به دست آورید.



شکل ۲.

۳. اگر در یک دایره، مرکز دایره از وتری به طول ۸ سانتی‌متر، به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد، از وتری به طول ۶ سانتی‌متر چه فاصله‌ای دارد؟

هندسه ۱

(پایه دهم)

۱. چهار نقطه متمایز A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. شرط وجود این نقطه چیست؟ (بحث کنید).

۲. در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم: $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{C} = 40^\circ$. نیم‌ساز زاویه B AC را در D قطع کرده است. از D عمود DH را بر BC رسم کرده‌ایم. اندازه زاویه DAH چند درجه است؟

۳. یک دوزنقه رسم کنید که اندازه ساق‌های آن ۶ و ۴ و اندازه قاعده‌های آن ۷ و ۱۰ واحد باشد.

۴. ثابت کنید در هر دوزنقه، مجموع اندازه‌های قاعده بزرگ و هر ساق، از مجموع اندازه‌های قاعده کوچک و ساق دیگر بزرگ‌تر است.

هندسه ۲

(پایه یازدهم)

۱. در شکل ۱ دو دایره C_1 و C_2 در نقطه M برهم مماس‌اند. ثابت کنید: $AC \parallel BD$.

سوالات درس حسابان (پایه یازدهم رشته ریاضی)

۱. در محاسبه مجموع اعداد طبیعی فرد از ۱ تا $2n-1$ اشتباهی رخ داده و یکی از اعداد دوبار جمع و حاصل ۱۰۰۰ شده است. مشخص کنید کدام عدد دوبار جمع شده است؟

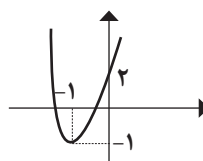
۲. مستطیلی به مساحت S داریم. ابتدا $\frac{1}{3}$ آن را رنگ می‌زنیم. سپس $\frac{1}{3}$ از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌زنیم. به همین ترتیب در هر مرحله $\frac{1}{3}$ از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌زنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۰ درصد سطح شکل رنگ می‌شود؟

۳. اگر هر دو جواب معادله درجه دوم $x^2+ax+b=0$ عددهای صحیح باشند، نشان دهید:

(الف) اگر هر دو جواب فرد باشند، a عددی زوج و b فرد است.
(ب) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد، a عددی فرد و b زوج است.

۴. در شکل ۳ نمودار تابع درجه دوم (سه‌می) $f(x)=ax^2+bx+c$ رسم شده است.

(الف) صفرهای تابع را به دست آورید.
(ب) معادله $f^2(x)-7f(x)=8$ را حل کنید.



شکل ۳

ریاضی دهم

۱. مجموعه اعداد گویا بین دو عدد ۲ و ۳، متناهی است یا نامتناهی؟ چرا؟

۲. آیا جمله عمومی دنباله زیر از درجه دوم است؟ چرا؟ جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

۲, ۶, ۱۲, ۲۰, ۳۰, ...

۳. مجموع سه جمله متوالی دنباله حسابی ۳ حاصل ضرب آن‌ها ۳۶۰ است. این جمله‌ها را به دست آورید.

۴. عددهای a, b و c را طوری تعیین کنید که عددهای زیر، جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی (غیر ثابت) باشند.
۳, a, b, c, ۲۷

آمار و احتمال (پایه یازدهم)

۱. اگر p گزاره‌ای راست (درست) و q گزاره‌ای دروغ (نادرست) و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

(الف) $(p \Rightarrow q) \wedge r$ (ب) $(r \Rightarrow p) \vee q$

(پ) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$

۲. با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

(الف) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

(ب) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

(پ) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow p \equiv T$

۳. با توجه به هم‌ارزی (ب) در تمرین ۲، نقیض گزاره زیر را بنویسید:
«۵ عددی اول است یا عدد ۹ مربع کامل نیست.»

ریاضی ۲ تجربی

۱. معادلات اضلاع مثلثی عبارت‌اند از: $AB: y=x+2$, $AC: y=-x+4$ و $BC: y=2x+5$. معادله عمودمنصف ضلع AB را به دست آورید.

۲. معادله درجه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$ax^2+bx+c=0$$

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن:

(الف) قرینه ریشه‌های معادله بالا باشند.

(ب) معکوس ریشه‌های معادله بالا باشند.

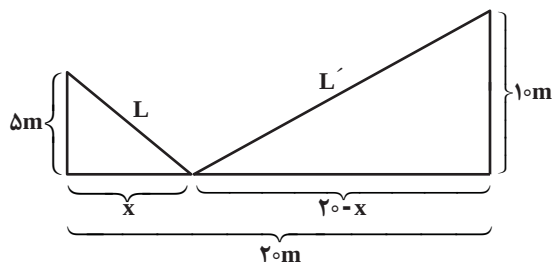
(پ) n واحد بیشتر (یا کمتر) از ریشه‌های معادله بالا باشند.

(ت) n برابر (یا $\frac{1}{n}$ برابر) ریشه‌های معادله فوق باشند.

۳. معادله زیر را حل کنید.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) = 5$$

۴. دو تیر به ارتفاع‌های ۵ متر و ۱۰ متر مطابق شکل ۴ به فاصله ۲۰ متر از هم قرار دارند که باید سیمی از دو سر آن‌ها به زمین وصل شود. این سیم را کجا به زمین وصل کنیم تا جمع مربعات طول سیم‌ها کمترین مقدار باشد؟



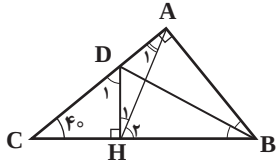
شکل ۴

۵. مریم یک کتاب ۴۸۰ صفحه‌ای را این‌طور مطالعه کرد که هر روز تعداد صفحاتی یکسان را خواند. اگر او هر روز ۱۶ صفحه بیشتر می‌خواند، ۵ روز زودتر کتاب را تمام می‌کرد. مریم این کتاب را چند روزه خوانده است؟

۶. معادله زیر را حل کنید.

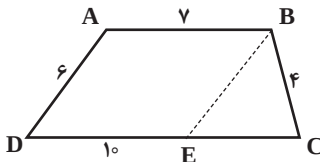
$$\sqrt{2x} + \sqrt{x+1} = 1$$

در نتیجه: $\hat{D}_1 = 50^\circ$ و $\hat{D}_1 = \hat{A}_1 + \hat{H}_1 = 2\hat{A}_1 = 50^\circ$ و بنابراین: $\hat{A}_1 = \hat{D}\hat{A}\hat{H} = 25^\circ$



شکل ۵.

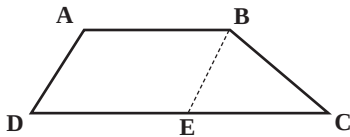
۳. اگر این دوزنقه به صورتی باشد که در شکل ۶ می‌بینیم، با رسم خط BE موازی AD، متوازی الاضلاع ABED تشکیل می‌شود و در نتیجه: $BE=AD=6$ و $DE=AB=7$ و $EC=DC-DE=10-7=3$ لذا در مثلث BEC اندازه اضلاع را داریم و می‌توانیم آن را رسم کنیم و از آنجا دوزنقه را بنا کنیم.



شکل ۶.

طریقه رسم: ابتدا پاره خط EC را به طول ۳ واحد رسم می‌کنیم. سپس به مرکز C کمانی به شعاع ۴ و به مرکز E کمانی به شعاع ۶ می‌زنیم. نقطه برخورد دو کمان فوق نقطه B است و از آنجا مثلث BEC را رسم می‌کنیم. سپس از B پاره خطی موازی CE به طول ۷ واحد رسم می‌کنیم و CE را نیز از طرف E به همین طول ادامه می‌دهیم. نقطه‌های انتهایی این دو پاره خط را به هم وصل می‌کنیم تا دوزنقه رسم شود.

۴. از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا CD را در E قطع کند.



شکل ۷.

در متوازی الاضلاع ABED داریم:

$$AD=BE, DE=AB$$

بنابراین با فرض: $CD=a, AB=b, BC=c$ و $AD=d$ در مثلث BEC داریم:

$$BC=c \text{ و } CE=a-b \text{ و } BE=d \text{ و با توجه به نامساوی مثلثی داریم:}$$

$$BC+CE>BE, BE+BC>CE, BE+CE>BC$$

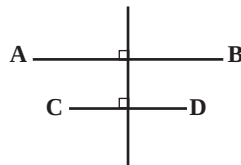
$$c+a-b>d, d+c>a-b, d+a-b>c$$

$$\Rightarrow a+c>b+d, a+d>b+c$$

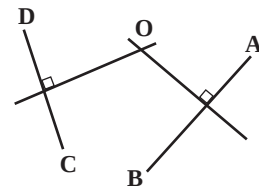


هندسه ۱

۱. می‌دانیم که مجموعه نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB را تشکیل می‌دهند و مجموعه نقاطی که از C و D به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف CD قرار دارند. پس عمودمنصف‌های AB و CD را رسم می‌کنیم. نقطه برخورد آن‌ها، هم از A و B به یک فاصله است و هم از C و D. یعنی در شکل ۱ نقطه O جواب است. حال اگر AB و CD موازی باشند، این دو عمودمنصف یا برهم منطبق می‌شوند که در این صورت همه نقاط روی این خط جواب مسئله هستند. یعنی مسئله بی‌شمار جواب دارد:

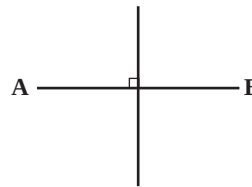


شکل ۲.

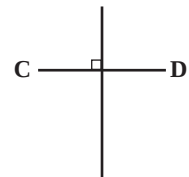


شکل ۱.

و یا اینکه دو عمودمنصف با هم موازی‌اند که در این حالت مسئله جوابی ندارد:



شکل ۴.

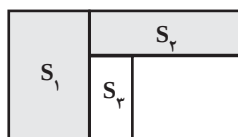


شکل ۳.

۲. چون نقطه D روی نیم‌ساز B است، پس از اضلاع زاویه به یک فاصله است. بنابراین: $DA=DH$ و از آنجا: $\hat{A}_1 = \hat{H}_1$. در مثلث DCH نیز داریم: $\hat{C} = 40^\circ$ و $\hat{H} = 90^\circ$.

حسابان

۱. داریم: $n^2 = (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 1$ ، پس مجموع اعداد، مربع کامل است. نزدیکترین عدد به ۱۰۰۰ که به صورت مربع کامل و از آن کوچکتر است، ۹۶۱ است؛ یعنی 31^2 . در این حالت عددی که دوبار جمع شده برابر $39 = 961 - 1000$ و جواب مسئله است. اگر بخواهیم عدد مربع کامل بعدی، یعنی ۹۰۰ را در نظر بگیریم، اختلافش با ۱۰۰۰ عدد ۱۰۰ است که عددی فرد نیست.



شکل ۱۰

$$\frac{1}{3}S, \frac{2}{9}S, \frac{4}{27}S, \dots$$

$$S_n = \frac{1}{3}S \left(\frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) > \frac{9}{10}S$$

$$1 - (\frac{2}{3})^n > \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{1}{10} > (\frac{2}{3})^n$$

$$\Rightarrow 10 < (\frac{3}{2})^n$$

با آزمایش و خطا جواب مسئله $n \geq 6$ به دست می آید. یعنی بعد از حداقل ۶ مرتبه، حداقل ۹۰ درصد شکل رنگ می شود.

۳. الف) اگر هر دو جواب فرد باشند، حاصل جمع آن ها عددی زوج و حاصل ضرب آن ها عددی فرد است. پس a زوج و b فرد است.
ب) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد، مجموع آن ها عددی فرد و حاصل ضرب آن ها عددی زوج است. پس a عددی فرد و b عددی زوج است.

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

الف. ۴

$$\begin{cases} x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow -1 = \frac{-b}{2a} \\ (x = -1, y = -1) \Rightarrow -1 = a - b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + 2 = -1 \\ b = 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - 2a + 2 = -1 \Rightarrow a = 3 \quad b = 6$$

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 2 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$f(x) - \gamma(f(x) - \lambda) = 0$$

ب)

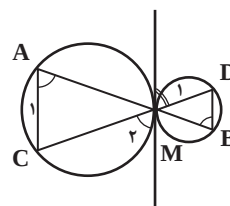
$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 2 = -1 \\ f(x) = \lambda \Rightarrow 3x^2 + 6x + 2 = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 3x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

هندسه ۲

۱. در نقطه M مماس مشترک دو دایره را رسم می کنیم. به کمک ویژگی زاویه های ظلّی و محاطی داریم:

$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \frac{\widehat{MD}}{2}, \hat{B} = \frac{\widehat{MD}}{2} \Rightarrow \hat{B} = \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 = \frac{\widehat{MC}}{2}, \hat{A} = \frac{\widehat{MC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \hat{M}_2 \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow AC \parallel BD \end{cases}$$

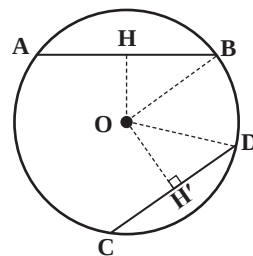


شکل ۸

۲. با توجه به شکل داریم:

$$\begin{aligned} MA = ME &\Rightarrow \hat{E} = \hat{A} = 30^\circ \\ \Rightarrow \widehat{DE} = \widehat{AC} = 60^\circ, \widehat{CD} = 70^\circ \\ \Rightarrow \widehat{ACDE} = 60^\circ + 60^\circ + 70^\circ = 190^\circ \\ \Rightarrow \widehat{AE} = 360^\circ - 190^\circ = 170^\circ \\ \Rightarrow \widehat{AED} = 170^\circ + 60^\circ = 230^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = \frac{\widehat{AED}}{2} = 115^\circ \end{aligned}$$

۳. می دانیم که خطی که از مرکز دایره بر یک وتر عمود می شود، وتر را نصف می کند. بنابراین در شکل ۹ داریم:



شکل ۹

$$\begin{aligned} AB = 8 &\Rightarrow AH = HB = 4 \\ \Delta OHB : OB^2 &= OH^2 + BH^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \\ \Rightarrow OB = OD = R = 5, CD = 6 \\ \Rightarrow \Delta ODH' : DH' &= CH' = 3, OD = 5, \\ OD^2 &= OH'^2 + DH'^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + OH'^2 \Rightarrow OH' = 4 \end{aligned}$$

یعنی فاصله مرکز دایره از وتر ۶ سانتی متری، ۴ سانتی متر است.

ریاضی دهم

۱. اعداد گویای بین ۲ و ۳ نامتناهی اند، زیرا می توانیم دنباله زیر از اعداد گویا را بین این دو عدد بنویسیم:

$$2 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{5}, \dots$$

۲. در دنباله داده شده، دنباله تفاضل جمله های متوالی را به دست می آوریم:

$$2, 6, 12, 20, 30, \dots$$

$$4 \quad 6 \quad 8 \quad 10$$

۲. دنباله حاصل، یعنی دنباله $4, 6, 8, 10, \dots$ یک دنباله حسابی است، پس دنباله اولیه از درجه دوم است:

$$a_n = an^2 + bn + c \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 6 \\ a_3 = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 12 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 0$$

$$a_n = n^2 + n$$

۳. سه جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت $a+r$ و a و $a-r$ در نظر می گیریم. بنابراین:

$$(a-r) + a + (a+r) = 30 \Rightarrow 3a = 30 \Rightarrow a = 10$$

از سوی دیگر داریم:

$$(a-r).a.(a+r) = 30 \Rightarrow a(a^2 - r^2) = 360$$

$$\Rightarrow 10(100 - r^2) = 360 \Rightarrow 100 - r^2 = 36$$

$$\Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = \pm 8$$

$$\begin{cases} a = 10, r = 8 \Rightarrow a-r, a, a+r: 2, 10, 18 \\ a = 10, r = -8 \Rightarrow a-r, a, a+r: 18, 10, 2 \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت، این سه جمله ۲، ۱۰ و ۱۸ هستند.

۴. می دانیم که اعداد m, n و p سه جمله متوالی از دنباله ای هندسی هستند، اگر و تنها اگر: $n^2 = mp$. بنابراین اگر اعداد $27, c, b, a$ و ۳، جملات متوالی از دنباله ای هندسی باشند، پس:

$$a^2 = 3b, b^2 = ac, c^2 = 27b$$

از حاصل ضرب اولین و آخرین تساوی داریم: $a^2 c^2 = 81 b^2$ و چون: $ac = b^2$ پس: $b^2 = 81 b^2$ بنابراین:

$$b^2 - 81 b^2 = 0 \Rightarrow b^2(b^2 - 81) = 0 \Rightarrow b^2 = 0 \text{ یا } b^2 = 81$$

$$\Rightarrow b = 0 \text{ یا } b = \pm 9$$

$b = 0$ قابل قبول نیست، زیرا با وجود $b = 0$ ، داریم $a = 0$ و $c = 0$

دنباله هندسی ثابت می شود. همچنین $b = -9$ نیز قابل قبول نیست، زیرا با جایگذاری در تساوی بالا داریم: $a^2 = -27$ و این معادله جواب ندارد.

پس $b = 9$. با جایگذاری این مقدار در تساوی های بالا داریم: $a = 3\sqrt{3}$ و $c = 9\sqrt{3}$ ، و یا $c = -9\sqrt{3}$ و $a = -3\sqrt{3}$.

آمار و احتمال

۱. الف) چون p درست و q نادرست است، پس $(p \Rightarrow q)$ نادرست و ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge r$ نادرست است.

ب) چون p درست است، پس $(r \Rightarrow q)$ همواره درست است و لذا $(r \Rightarrow q) \vee q$ دارای ارزش درست است.

ج) چون p و q هم ارزش نیستند، بنابراین $(p \Leftrightarrow q)$ نادرست است و لذا گزاره شرطی $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$ به انتفای مقدم درست است.

الف)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

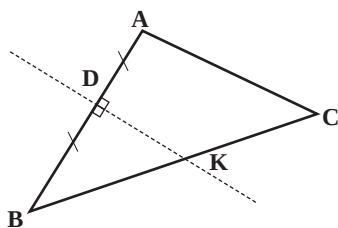
ج)

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow p$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

۲. «۵ عددی اول نیست و عدد ۹ مربع کامل است.»

ریاضی ۳ تجربی

۱. ابتدا مختصات نقاط A و B را به دست می آوریم تا بتوانیم مختصات وسط آن ها را به دست آوریم:



جای شکل

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) &= 5 \\ x - \frac{1}{x} = A &\Rightarrow A^2 + \frac{1}{x} A - 2 = 0 \\ \Rightarrow 2A^2 + A - 6 = 0 &\Rightarrow A_1, A_2 = \frac{3}{2}, -2 \\ \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} & (1) \\ x - \frac{1}{x} = -2 & (2) \end{cases} \\ (1) \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 &\Rightarrow x_1, x_2 = 2, -\frac{1}{2} \\ (2) \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 &\Rightarrow x_3, x_4 = -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} I^2 = 5^2 + x^2 \\ I^2 = 10^2 + (20 - x)^2 \end{cases} \\ I^2 + I^2 = 25 + x^2 + 100 + 400 - 40x + x^2 \\ = 2x^2 - 40x + 525 \Rightarrow x_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2(2)} = 10 \end{aligned}$$

پس به ازای $x=10$ مجموع مربعات طول سیم‌ها، کمترین مقدار می‌شود.

۵. اگر x را تعداد صفحاتی از کتاب فرض کنیم که مریم هر روز خوانده است، داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{480}{x} = \frac{480}{x+16} + 5\right) \\ 480 \cdot (x+16) = 480 \cdot x + 5x(x+16) \\ \Rightarrow 480 \cdot x + 7680 = 480 \cdot x + 5x^2 + 80x \\ \Rightarrow 5x^2 + 80x - 7680 = 0 \Rightarrow x^2 + 16x - 1536 = 0 \\ \Rightarrow x = 32 \Rightarrow \frac{480}{32} = 15 \text{ روز} \end{aligned}$$

۶. دو طرف معادله را به کمک اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ به توان می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2x) + (x+1) + 3(\sqrt{2x})(\sqrt{x+1})(\sqrt{2x} + \sqrt{x+1}) &= 1 \\ \Rightarrow 3x + 1 + 3(\sqrt{2x})(\sqrt{x+1})(1) &= 1 \\ \Rightarrow 3x + 1 + 3\sqrt{2x} + 2x &= 1 \\ \Rightarrow 3\sqrt{2x} + 2x = -3x \Rightarrow \sqrt{2x} + 2x &= -x \\ \Rightarrow 2x^2 + 2x = -x^2 \Rightarrow x^2 + 2x^2 + 2x &= 0 \\ \Rightarrow x(x^2 + 2x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \\ x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \end{aligned}$$

۳.

$$\begin{aligned} \text{مختصات A} \begin{cases} AB: y = x + 2 \\ AC: y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 2 \Rightarrow A(1, 2) \\ \text{مختصات B} \begin{cases} AB: y = x + 2 \\ BC: y = 2x + 5 \end{cases} \Rightarrow x = -3, y = -1 \Rightarrow B(-3, -1) \end{aligned}$$

$$m_{AB} = \frac{-1-2}{-3-1} = 1$$

اگر وسط ضلع AB را D و عمودمنصف آن را DK بنامیم، داریم:

$$\begin{aligned} m_{AB} \times m_{DK} = -1 &\Rightarrow 1 \times m_{DK} = -1 \Rightarrow m_{DK} = -1, \\ x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1, &y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \\ DK: y - y_D = m_{DK}(x - x_D) &\Rightarrow y - \frac{1}{2} = -1(x + 1) \end{aligned}$$

AB عمودمنصف ضلع $= y = -x$

۲. ریشه‌های معادله مفروض را x_1 و x_2 و معادله مطلوب را $x^2 + px + q = 0$ فرض می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \begin{cases} p = -(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a} \\ q = (-x_1)(-x_2) = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ ax^2 - bx + c = 0 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} \begin{cases} p = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{-(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} \\ q = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c} \end{cases} \\ \Rightarrow x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0 \Rightarrow cx^2 + bx + a = 0 \end{aligned}$$

پ)

$$\begin{aligned} \begin{cases} p = -(x_1 + x_2 + 2n) = -\left(-\frac{b}{a} + 2n\right) = \frac{b}{a} - 2n \\ q = (x_1 + n)(x_2 + n) = x_1 x_2 + n(x_1 + x_2) + n^2 \\ = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2 \end{cases} \\ x^2 + \left(\frac{b}{a} - 2n\right)x + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2 = 0 \\ \Rightarrow ax^2 + (b - 2an)x + (an^2 - bn + c) = 0 \end{aligned}$$

ت)

$$\begin{aligned} \begin{cases} p = -n(x_1 + x_2) = \frac{nb}{a} \\ q = n^2 x_1 x_2 = \frac{n^2 c}{a} \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{nb}{a}x + \frac{n^2 c}{a} = 0 \\ \Rightarrow ax^2 + nbx + n^2 c = 0 \end{aligned}$$



نویسندگان: پرویز شهریاری، حمیدرضا
امیری و...

ناشر: انتشارات کانون فرهنگی آموزش

چاپ اول: ۱۳۹۰

دانش نامه ریاضی

این کتاب همچنان که از نامش برمی آید، یک فرهنگ موضوعی ریاضیات است و هدف از انتشار آن، ارائه مجموعه منظمی از واژه‌های مرتبط با دانش ریاضی، همراه با معرفی، توضیح و تعریف واژه‌هاست و به نوعی می‌توان آن را یک واژه‌نامه ریاضی هم دانست. با این تفاوت که اولاً درباره مفاهیم به سبک یک دایرةالمعارف (دانش‌نامه) توضیح مفصل و کافی داده شده است، و ثانیاً رابطه طولی مفاهیم حفظ شده است. بهتر است به جای هر توضیحی بخش‌هایی از مقدمه کتاب را بیاوریم:

«کتابی که پیش‌رو دارید، اولین و تنها دانش‌نامه موضوعی ریاضیات با ویژگی‌های منحصر به فردی است که تاکنون در ایران به چاپ رسیده است. چینش موضوع‌های ریاضی در این دانش‌نامه طوری است که رابطه طولی بین آن‌ها رعایت شده است. برای مثال، واژه تابع در جایی قرار گرفته است که برای فهم آن به همه واژه‌ها و موضوع‌های قبل از آن وابسته‌ایم. در عین حال این کتاب طوری تدوین شده است که دستیابی به واژه «تابع» به شکلی مستقل و به شکل الفبایی نیز میسر است.

در انتهای کتاب یک واژگان فارسی به انگلیسی و یک واژگان انگلیسی به فارسی قرار دارد و روبه‌روی هر واژه یک شماره به چشم می‌خورد که این شماره صفحه‌ای را که واژه موردنظر در آن قرار دارد، نشان می‌دهد. در واقع هر مؤلف، دبیر یا کارشناس ریاضی، هم می‌تواند واژه‌ای را به صورت موضوعی تعقیب کند و آن را در جای خودش (که البته می‌تواند از قبل حدس بزند) پیدا کند، و هم می‌تواند به شکل الفبایی آن را بیابد.

برای هر واژه به صورت مستقل حتی‌الامکان تاریخچه یا فلسفه‌ای بیان کرده‌ایم و پس از تعریف مناسب، یک مثال کلیدی آورده شده است. در مورد بسیاری از واژه‌ها یا قضیه‌ها، نکات و نتیجه‌های مهم و حتی فرمول‌ها یا رابطه‌های مربوط به آن واژه آمده است. روبه‌روی هر واژه یا اصطلاح معادل انگلیسی آن ثبت شده است. در هر صفحه این دانش‌نامه تعدادی از کلمات داخل متن شماره خورده‌اند که معادل انگلیسی آن‌ها در پایین و به همراه شماره صفحه‌ای که در آن قرار دارد، آورده شده است. این کار دستیابی به کلیدواژه‌های هر صفحه را به آسانی میسر می‌سازد.»

با توصیف‌هایی که شد، بدیهی است که کتاب می‌تواند برای دانش‌آموزان رشته ریاضی، معلمان و دبیران و دانشجویان ریاضی کتابی مناسب و مفید باشد و مطالعه آن را به همه علاقه‌مندان رشته ریاضی توصیه می‌کنیم.

چهار نفر، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، شیمی‌دان و پزشک در یک مهمانی حضور داشتند. فیزیک‌دان رو به پزشک گفت: «گفته‌های شما پزشک‌ها اصلاً قطعیت ندارد. امروز چیزی می‌گویید و فردا چیز دیگری! مثلاً فرض کنید امروز مریضی که سرماخوردگی سختی دارد، پیش شما بیاید و شما به او بگویید با خوردن آش ساده حالش بهتر خواهد شد. او نیز به دستور شما عمل کند و حالش خوب شود. فوراً همه‌جا اعلام می‌کنید که خوردن آش ساده در درمان آنفولانزا مؤثر و مفید است. اما اگر فردا مریض دیگری که او هم آنفولانزای حاد داشته باشد، پیش شما بیاید و به او هم دستور خوردن آش ساده بدهید و بعداً پس از اجرای دستور شما حالش بدتر شود، فوراً اعلام می‌کنید: تحقیقات پزشکی نشان می‌دهد که خوردن آش ساده در درمان ۵۰ درصد موارد آنفولانزای حاد مؤثر است!»

در اینجا شیمی‌دان رو کرد به فیزیک‌دان و گفت: «خود شما فیزیک‌دان‌ها چطور؟ بعد از یک محاسبه طولانی می‌گویید: اگر جسمی به جرم دلخواه از ارتفاع ۱۲۵ متری سقوط کند، بعد از ۵ ثانیه به زمین می‌رسد. بعد وقتی در عمل چنین نمی‌شود، می‌گویید: البته شتاب جاذبه زمین در نقاط متفاوت فرق می‌کند و من شتاب جاذبه را در قطب در نظر گرفتم! و البته از مقاومت هوا هم نباید غافل شد!»

در این لحظه ریاضی‌دان رو کرد به شیمی‌دان و گفت: «شیمی‌دان‌ها چه؟ جلوی چشم ده‌ها نفر از دانشجویان‌تان آزمایشی را انجام می‌دهید و می‌گویید: حالا باید گاز دی‌اکسید کربن از محلول خارج شود. و چون هیچ علامتی مبنی بر این اتفاق مشاهده نمی‌کنید، می‌گویید: البته باید شرایط متعارفی آزمایشگاه را در نظر گرفت! همچنین از وجود ناخالصی‌ها و غلظت و درجه خلوص مواد نیز نباید غفلت کرد!»

در اینجا پزشک به ریاضی‌دان گفت: «خود شما ریاضی‌دان‌ها چه؟ شما از همه ما بدترید! با هم به باغ‌وحش می‌رویم، جلوی قفس شیر از شما می‌پرسیم: درون این قفس چه جانوری قرار دارد؟ می‌گویید: اول درون و بیرون را تعریف کنید تا بعد...!»



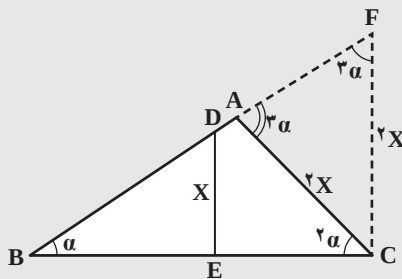
پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۳. بدیهی است که a و b با هم صفر نیستند. پس با فرض $a \neq 0$ از فرض

مسئله داریم: $c = -\frac{bd}{a}$ و از آنجا داریم:

$$\begin{aligned} c^2 + d^2 = 1 &\Rightarrow \frac{b^2 d^2}{a^2} + d^2 = 1 \Rightarrow \frac{d^2 (a^2 + b^2)}{a^2} = 1 \\ \Rightarrow d^2 &= a^2, \quad ab + cd = ab - \frac{bd^2}{a} = \frac{a^2 b - bd^2}{a} \\ &= \frac{b(a^2 - d^2)}{a} = 0. \quad (\text{گزینه ب}) \end{aligned}$$

۴. مطابق شکل با فرض $\hat{B} = \alpha$ ، داریم: $\hat{C} = 2\alpha$.



و با فرض $DE = x$ داریم: $AC = 2x$. AB را امتداد می‌دهیم و نقطه F را روی امتداد آن طوری در نظر می‌گیریم که: $CA = CF$. حال با توجه به اندازه زاویه‌های خارجی داریم:

$$\hat{CAF} = \hat{CFA} = 2\alpha$$

چون: $CF = CA$ ، پس: $CF = 2x$ و چون: $BE = EC$ لذا داریم:

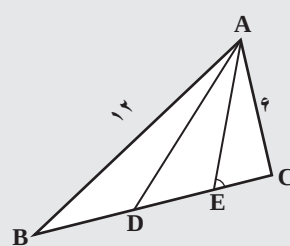
$$\begin{aligned} \frac{BE}{BC} &= \frac{DE}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE \parallel FC, \quad \hat{FCB} = 90^\circ \\ \Rightarrow \hat{F} + \hat{B} &= 90^\circ \Rightarrow 4\alpha = 90^\circ, \alpha = 22.5^\circ \quad (\text{گزینه ه}) \end{aligned}$$

۵. بدیهی است که توان‌های ۲ زوج‌اند. بنابراین این عدد فرد است. اما چون عدد ۲ به پیمانه ۳ با ۱- هم‌نهشت است و توان ۲ در این عدد، عددی فرد است، پس این عدد به پیمانه ۳ هم‌نهشت با صفر است و لذا مضرب ۳ هم هست. اما توان این عدد در تقسیم بر ۳ مساوی ۴۱۱۵۲۶۳ می‌شود. یعنی این عدد به فرم $2^k + 1$ و k عددی فرد است. بنابراین:

$$2^{2k} + 1 = 8^k + 1 \equiv (-1)^k + 1 = 0$$

پس این عدد مضرب ۹ هم هست. اما می‌دانیم توان‌های ۲ به صورت تناوبی به رقم‌های ۲، ۴، ۸ و ۶ ختم می‌شوند. با توجه به اینکه توان ۲ در این عدد به صورت $4k+1$ است، پس رقم یکان این عدد ۳ است و این عدد نمی‌تواند مربع کامل باشد. پس سه تا از ویژگی‌ها را دارد (گزینه د).

۱. تعداد همه اعداد پنج‌رقمی به کمک اصل ضرب برابر است با: 9×10^4 اما بدیهی است، از هر سه عدد متوالی یکی مضرب ۳ است. پس یک سوم این اعداد مضرب ۳ هستند. یعنی 3×10^4 عدد پنج‌رقمی مضرب ۳ داریم. (این عددها از ۱۰۰۰۰ که به فرم $3k+1$ است، شروع می‌شوند و به ترتیب به فرم $3k+2$ و $3k$ می‌رسند و همین ترتیب تا عدد ۹۹۹۹۹ که به فرم $3k$ است، ادامه دارد.) اما رقم یکان عددهای مضرب ۳ هم به صورت تناوبی عبارت است از: ۳، ۶، ۹، ۲، ۵، ۸، ۱، ۴، ۷ و ۰. پس یک‌دهم این عددها هم به رقم ۶ ختم می‌شوند؛ یعنی 3×10^2 که برابر است با ۳۰۰۰ عدد (گزینه الف).



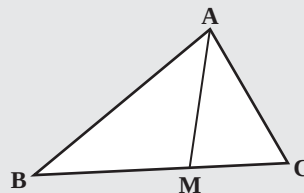
۲. روی ضلع BC به طول ۹ واحد، دو نقطه D و E وجود دارند که آن را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند. بدیهی است که در این صورت: $BD = DE = EC = 3$ در مثلث‌های AEB و AEC به کمک قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2AC \cdot EC \cdot \cos \alpha \\ AB^2 = AE^2 + EB^2 - 2AE \cdot EB \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 36 = AE^2 + 9 - 6AE \cdot \cos \alpha \\ 144 = AE^2 + 36 + 12AE \cdot \cos \alpha \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 72 = 2AE^2 + 18 - 12AE \cdot \cos \alpha \\ 144 = AE^2 + 36 + 12AE \cdot \cos \alpha \end{cases} \\ \Rightarrow 216 = 3AE^2 + 54 \\ \Rightarrow 3AE^2 = 162, \quad AE^2 = 54 \Rightarrow AE = 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

و اگر همین محاسبه را در مثلث‌های ADB و ADC انجام دهیم، نتیجه می‌شود: $AD = 3\sqrt{10}$. یعنی فاصله این نقطه تا رأس A مساوی $3\sqrt{6}$ یا $3\sqrt{10}$ است (گزینه ج).

پی‌نویس: به کمک قضیه موسوم به استوارت نیز می‌توانیم طول AD (و AE) را به سادگی محاسبه کنیم:

قضیه استوارت:



برای نقطه دلخواه M روی ضلع BC از مثلث ABC داریم:

$$AM^2 \cdot BC = AC^2 \cdot MB + AB^2 \cdot MC - MB \cdot MC \cdot BC$$



۳. با ارسال مطالبی پیرامون سرگرمی‌های ریاضی، بازی و ریاضی، لطیفه‌های ریاضی، جدول و معما، و خواندنی‌های دیگر، و نیز کاریکاتور، نقاشی و حتی عکس‌های مرتبط با ریاضیات، به ما در غنی کردن محتوای مجله یاری رسانید.

باسپاس از دوستان، به بعضی از پیام‌ها و نامه‌های رسیده تا این زمان، پاسخ‌های کوتاهی می‌دهیم:

- همکار گرامی، آقای اسفندیار ملیح ملکی، از شهرستان ملکان، استان آذربایجان شرقی مطلبینان به دستمان رسید. با سپاس از لطفان به اطلاع می‌رساند که تلاش کنید مطالبی که در رابطه با مباحث کتاب‌های درسی می‌نویسید، با زبانی دیگر (غیر از کتاب‌های رایج کمک‌درسی) بیان شوند. همچنین سعی کنید به کاربردهای ریاضیات بپردازید.
- دوست دانش‌آموز، آقای علی بهادر از راین کرمان مطلبینان با عنوان «روشی برای ضرب عدد ۹ در اعداد دورقمی» را در این شماره به چاپ رساندیم. اما دوست عزیز این الگوها در نظریه اعداد بسیارند و بهتر است به جای پرداختن به آن‌ها، اصول و مبانی ریاضیات را فرا بگیرید و توانایی استدلال را در خود بالا ببرید. در این صورت در مسیر صحیح آموزش ریاضی قرار می‌گیرید.
- همکار گرامی، سرکار خانم خدیجه اقدامی مقدم از شهرستان پندر انزلی کاریکاتو، رهایتان به دست ما رسید. با سپاس فراوان از شما حتماً از کارهایتان استفاده می‌کنیم. باز هم برای ما از کارهای خوبتان ارسال کنید.
- همکار محترم، آقای صالح دامن افشان از کرمان مقاله‌تان با عنوان «تعیین جمله عمومی یک دنباله غیرخطی خاص» به دستمان رسید. با تشکر از زحماتتان به اطلاع می‌رسد که مقاله‌تان بدون ورود به مطلب و بی‌مقدمه وارد مثال‌های محاسباتی شده است و از این حیث به یک مقاله منسجم شباهتی ندارد. ابتدا با یک مقدمه ساده و عامه‌پسند که مورد توجه دانش‌آموزان واقع شود، هدفتان را از نگارش این مقاله روشن کنید. سپس با مثال‌های ساده بحث را شروع کنید تا دانش‌آموزان به آramی وارد بحث شوند. ضمن اینکه توجه کنید که از نمادهایی که دانش‌آموزان با آن‌ها آشنایی ندارند (مانند نمادهای جمع و ضرب: Σ و π) استفاده نکنید. تا می‌توانید لحن مقاله‌تان را ساده‌تر و همه‌فهم‌تر کنید. با این بازنگری و اصلاح می‌توانیم از مطلبتان استفاده کنیم.
- همکار محترم، آقای سیداحمد شفقتی از خوانسار، استان اصفهان بارها گفته‌ایم که مقالاتی مثل مقاله‌ای که فرستاده‌اید را به مجله «رشد آموزش ریاضی» ارسال کنید. مخاطبان اصلی ما فقط دانش‌آموزان هستند.

♦ تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ -
♦ وبگاه: www.roshdmag.ir

A diagram showing three squares arranged around a central triangle. The top square has its bottom-left vertex at point A. The bottom-left square has its top-right vertex at point B. The bottom-right square has its top-left vertex at point C. The side length of each square is labeled 'a'. The vertices of the central triangle are A, B, and C. The side BC is dashed.

◆ هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال

◆ هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

زنده یاد پروفیسور مریم میرزاخانی
(۱۳۵۶-۱۳۹۶)



یادی از ستاره درخشان آسمان ریاضی ایران

سه سال پیش همین موقعها بود که داشتیم شماره مهرماه مجله را می‌بستیم که خبری ناگهانی باعث شد، صفحه‌های ۲ و ۳ جلد را در لحظه آخر تغییر بدهیم: «مریم میرزاخانی ریاضی‌دان برجسته ایرانی موفق به دریافت مدال «فیلدز»، عالی‌ترین جایزه جهانی ریاضیات شد.» با سرعت متنی را تهیه کردیم و این دو صفحه را در شماره مهرماه ۱۳۹۳ به معرفی او و کارهایش اختصاص دادیم. اما باور نمی‌کردیم که به فاصله‌ای چنین اندک باز هم باید صفحه ۲ جلد مجله مهرماه همان را به او اختصاص دهیم و این بار با خبر تلخ وداع او که نه تنها جامعه ریاضی، بلکه کل کشورمان را در غم فقدان این نابغه جوان اندوهگین کرد.

او را از سال‌های ابتدایی دهه ۱۳۷۰ که با شایستگی دو سال پیاپی مدال طلای المپیاد ریاضی دانش‌آموزی جهان را به گردن آویخت می‌شناختیم، تا هنگامی که از دانشگاه صنعتی شریف در رشته ریاضی فارغ‌التحصیل شد. به هاروارد رفت و دکترای ریاضی گرفت، و در دانشگاه استنفورد به تدریس ریاضی پرداخت و به قله افتخار ریاضی دست یافت.

وقتی مدال فیلدز گرفت، یکی از شخصیت‌های علمی دنیا او را با مادام کوری مقایسه کرد که نخستین زن برنده جایزه نوبل بود و مریم نخستین زن برنده مدال فیلدز بود. عجب که فرجام او هم بی‌شباهت به فرجام همتایش نبود. ریاضی‌دانان بسیاری بوده‌اند که در سنین پایین و در اوج شایستگی از دنیا رفته‌اند. از جمله امی نوتر، ریاضی‌دان آلمانی (۱۸۸۲-۱۹۳۵) که زمانی او را بزرگ‌ترین ریاضی‌دان زن می‌دانستند و فقط ۵۳ سال عمر کرد. ریاضی‌دان بزرگ روس، خانم سونیا کووالنسکی که فقط ۴۱ سال عمر کرد. وقتی آبل، ریاضی‌دان نام‌دار نروژی که بحث‌های بسیاری در ریاضیات مدیون اوست، در ۲۶ سالگی درگذشت، هریت، ریاضی‌دان فرانسوی گفت: «از او برای ریاضی‌دانان چیزی باقی مانده است که آن‌ها را ۵۰۰ سال مشغول می‌کند.»

ما معتقدیم میراث مریم میرزاخانی هم تا سده‌ها و هزاره‌ها برای ریاضی‌دانان باقی خواهد ماند. یادش گرامی باد!



لابیرنت‌ها و مازها

ریاضیات دلپذیر

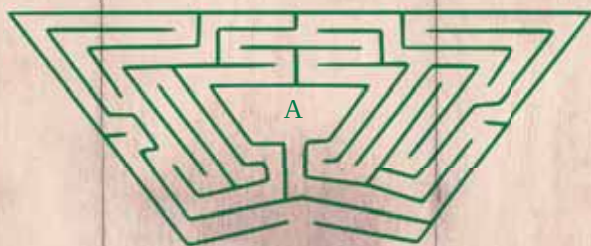
نکنید! در این صورت یکی از دو اتفاق زیر می‌افتد:

۱. به مرکز ماز می‌رسید و از آنجا به خارج هدایت می‌شوید.

۲. بدون رسیدن به مرکز، از یک خروجی دیگر، از ماز خارج می‌شوید.



اکنون این ایده را روی این ماز معروف که موسوم به ماز «همپتون کورت» است (و در سال ۱۶۹۰ در نزدیکی لندن بناشد) به کار ببرید. فرض کنید مثلاً در نقطه A قرار دارید. با ایده دست راست، از ماز خارج شوید!



«لابیرنت»^۱ و «ماز»^۲ دو مفهوم مستقل هستند که در زبان فارسی برای هر دوی آن‌ها معادل «هزارتو» به کار برده می‌شود. هزارتوها مجموعه‌ای از مسیرهای پیچ‌درپیچ و تودرتو هستند که افراد در آن‌ها گیر می‌افتند و باید از آن خارج شوند. این پدیده در تاریخ سابقه‌ای دیرینه دارد، به‌طوری که لابیرنت کرتی در اساطیر یونان باستان جایگاه ویژه‌ای دارد و قدمت آن به ۱۶۰۰ سال پیش از میلاد مسیح (ع) برمی‌گردد. براساس افسانه‌های یونانی، مینوس‌شاه، دستور احداث این بنا را داده بود و هیولایی موسوم به مینوتور را در آن زندانی کرده بود. محکومان به مرگ را در این هزارتو رها می‌کردند تا راه را گم کنند و قربانی مینوتور شوند!



اما لابیرنت‌ها در سال‌های بعد و در تمدن‌های مختلف حضور داشتند. از جمله در کشورهای اروپایی در ابتدای هزارهٔ دوم ده‌ها لابیرنت ساخته شدند که امروزه از جمله مکان‌های دیدنی برای گردشگران هستند. امروزه لابیرنت‌ها و مازها کارکرد تفریحی دارند و معمای آن‌ها ورود به درون و خروج از جایی دیگر است. گاهی هم دو نفر وارد هزارتو می‌شوند و باید یکدیگر را پیدا کنند.

ایدهٔ ریاضی خروج از ماز (یا لابیرنت) بسیار ساده است: برای خروج از ماز کافی است از هر نقطهٔ دلخواه شروع به حرکت کنید و در ضمن حرکت، دست راست خود را به دیوار تکیه دهید و هرگز از آن جدا

- * پی‌نوشت‌ها.....
1. Labyrinth
 2. Maze

(تفاوت آن‌ها در این است که مازها یک میسر محتوم (ناگزیر) دارند و فقط از آن مسیر می‌توان وارد و خارج شد. اما لابیرنت‌ها در پیچ‌های گوناگون برای حرکت دارای انتخاب‌های متفاوت منطقی هستند. البته این دو مفهوم خیلی وقت‌ها به جای هم به کار می‌روند.)