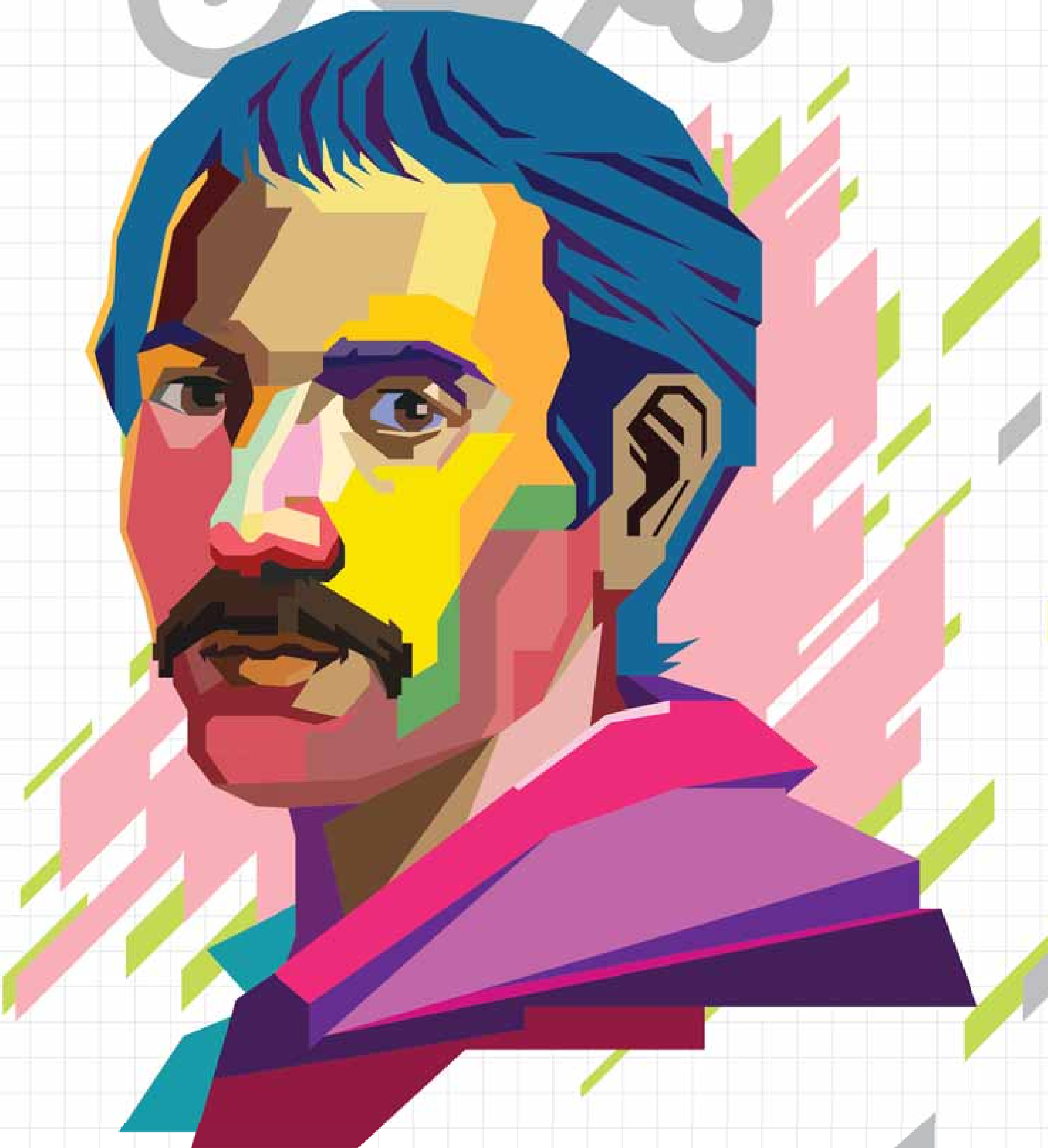
شماره ۶

وزارت آموزش و پرورش / سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی / دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی / www.roshdmag.ir
دوره بیست‌وسوم / شماره ۹۶ / اسفند ۱۳۹۶ / ۴۰ صفحه / ۱۱۰۰۰ ریال / پیامک تحریریه / ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲ / ISSN 1735-4943

رشد
ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برهان

ریاضی
برای دانش‌آموزان متوسطه اول



هنر کاغذ و تا

اوریگامی

هُوَ الحسیب

ISSN:1735-4943

۶

وزارت آموزش و پرورش /سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی /شرکت افست /دوره۲۳ /شماره ۹۶
اسفند۱۳۹۶ /برای دانش آموزان متوسطه اول/ ۴۰صفحه/ ۱۱۰۰۰ریال

رشد ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برهان ریاضی

نشانی دفتر مجله:
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶ / تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ -۰۲۱ داخلی ۳۷۵
نمابر: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶ / صندوق پستی:۱۵۸۷۵/۶۵۸۶
تلفن پیامگیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ -۰۲۱
صندوق پستی امور مشترکین: ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ / تلفن امور مشترکین: ۰۲۱-۸۸۸۶۷۳۰۸
وب‌گاه: www.roshdmag.ir / رایانامه: borhanmotevaseteh1@roshdmag.ir
: http://telegram.me/roshdmag / roshdmag:
وبلاگ اختصاصی مجله: weblog.roshdmag.ir/borhanrahnamaiee

شمارگان: ۱۷۰۰۰ نسخه

روی جلد: بوناونتورا کاوالیِری
پشت جلد را نیز ببینید.

چرا درست است؟

مهدی دهقانیان، دانش‌آموز ۱۳ سالهٔ کرمانی که از دوستان خوب مجلهٔ ماست، برای محاسبهٔ مربع یک عدد، رابطه‌ای پیدا کرده است. نامهٔ او را می‌توانید در صفحهٔ ۲۷ همین مجله بخوانید.

راستش مهدی، فرمول خود را بدون اینکه نشان دهد چرا درست است، بیان کرده است. هرچند به شکلی که او فرمول خود را نوشته، پیدا کردنِ دلیل درستی آن نیز کار نسبتاً ساده‌ای بود، ولی مهدی تنها به نشان دادن یک مثال اکتفا کرده است. دوست دارم در اینجا دربارهٔ این موضوع صحبت کنم که اگر یک رابطه یا فرمول برای یک یا چند عدد درست باشد، آیا می‌توانیم مطمئن باشیم که آن فرمول برای همهٔ عددهای دیگر هم درست است؟ شما چه فکر می‌کنید؟

خُب بگذارید مثالی بزنم: تساوی $x^2=x$ را ببینید. اگر به جای x عدد ۰ را بگذاریم، فرمول درست است و تساوی برقرار می‌شود: $0^2=0$. اگر به جای x، عدد ۱ هم بگذارید، باز تساوی برقرار خواهد بود: $1^2=1$. پس آیا این تساوی همیشه درست است؟ البته که نه! مثلاً: $2^2 \neq 2$ ؛ $(-1)^2 \neq -1$ ؛ $(\frac{1}{2})^2 \neq \frac{1}{2}$ و ... درواقع $x^2=x$ فقط برای ۰ و ۱ درست است و برای هیچ عدد دیگری برقرار نیست! حالا تساوی $x^2+1=(x+1)^2-2x$ را ببینید. برای چند عدد مانند $x=0$، $x=-1$، $x=2$ و $x=\frac{1}{2}$ درستی آن را بررسی کنید. خواهید دید که تساوی در همهٔ این موارد برقرار است. اما هنوز نمی‌توان نتیجه گرفت که این تساوی برای همهٔ عددها درست باشد. حتی اگر عددهای بیشتری را امتحان کردید و دیدید که باز هم برای همهٔ آن‌ها تساوی برقرار بود، نمی‌توانید مطمئن باشید که همیشه این تساوی درست است. برای اطمینان از درستی این تساوی باید از قاعده‌هایی که دربارهٔ محاسبات با عبارت‌های جبری وجود دارد، استفاده کنید. من بیش از این دربارهٔ این تساوی صحبت نمی‌کنم و حرف‌های بیشتری دربارهٔ چنین عبارت‌هایی را به مطلب تکمیلی که در ادامهٔ مطلب مهدی نوشته شده است، موکول می‌کنم. اما دوست دارم دوباره تأکید کنم که:

اگر یک روش یا رابطه (فرمول) برای بعضی از عددها درست باشد، هیچ دلیلی وجود ندارد که برای همهٔ عددهای دیگر هم درست باشد. درستی آن را باید با روش کلی و براساس قاعده‌هایی (که به آن استدلال منطقی می‌گویند) نشان داد، یا به قول ریاضی‌دان‌ها، درستی آن را **اثبات** کرد.

چرا درست است؟

چگونه از درست بودن یک روش محاسباتی یا فرمول ریاضی مطمئن شویم؟

علم همان ثروت است

نازنین حسن‌نیا
عکاس: شادی رضائی

اولین بار که تصمیم گرفتم سهام بخرم، فکر می‌کردم سودِ خوبی به دست می‌آورم. ولی از فردای روزی که سهم کارخانه‌ای را خریدم، قیمت سهام آن کارخانه پایین آمد و من به‌جای سود، اصل پولم را هم از دست دادم. ماجرا را به یکی از دوستانم که در بورس فعالیت می‌کرد گفتم. او به من گفت خرید و فروش سهام باید براساس اطلاعات علمی و ریاضی باشد. من دیگر سهام نخریدم و تصمیم گرفتم دربارهٔ این موضوع اطلاعاتی به دست آورم. فهمیدم رشته‌ای به‌نام ریاضیاتِ مالی وجود دارد. تصمیم گرفتم با چند نفر از اساتید دانشگاه که در این رشته فعالیت دارند و از بنیانگذاران این رشته در دانشگاه‌های ایران هستند،گفت‌وگویی انجام دهم. اگر شما هم ممکن است روزی وارد بورس شوید، بهتر است این گفت‌وگو را بخوانید. در این گفت‌وگو آقایان حسن داداشی و علی باستانی شرکت دارند.

برهان: ریاضیاتِ مالی چیست و به چه مسائلی می‌پردازد؟

باستانی: ریاضیاتِ مالی علمی بینِ رشته‌ای است که از شاخه‌های مختلف ریاضی استفاده می‌کند. این شاخه‌ها عبارتند از: آمار، بهینه‌سازی، فرآیندهای تصادفی و معادلات دیفرانسیل. من اینجا می‌خواهم از نقشِ بهینه‌سازی در ریاضیات مالی بگویم. در سال ۱۹۵۰ ریاضی‌دانی به نام هری مارکوویتس مسئله‌ای را در بازارهای مالی مطرح کرد. مسئلهٔ او این بود که یک فرد سرمایه‌گذار سهام کدام شرکت‌ها را انتخاب کند و از هر کدام چه مقدار بخرد تا بیشترین سود را داشته باشد. تا آن زمان سرمایه‌گذارها می‌گشتند و یک یا چند سهمی که پیش‌تر بیشترین سود را داشت می‌خریدند؛ اما قیمت سهام همیشه در حال تغییر است. ممکن است سهامِ شرکتی سود بالایی داشته باشد ولی قیمت آن مدام در حال زیاد و کم شدن باشد. بنابراین همان سهام ممکن است ضرر زیادی هم بدهد. این سهامی با سود بالا و با ریسک زیاد است. در اینجا برای اولین‌بار مفهوم ریسک مطرح شد.

گفت که سود سهام یک متغیر تصادفی است و مقادیر مختلفی می‌تواند به خودش بگیرد. میانگین آن مقدارها مهم است و یکسری اطلاعات به ما می‌دهد؛ ولی میانگین به تنهایی کافی نیست. او اختلاف بین مقدارهای مختلف با مقدار میانگین را با شاخصی به نام واریانس اندازه گرفت و اسم آن را ریسک گذاشت. در گام بعدی یک مسئلهٔ بهینه‌سازی نوشت تا با حل آن بفهمد چقدر از هر سهم باید خریده شود تا با کمترین ریسک، سود به دست آید. این مسئله دو راه حل داشت. اولین راه این بود که کمترین سودِ مطلوب را در نظر بگیرند و سهامی را انتخاب کنند که با کمترین ریسک ممکن، آن سود یا بیشتر از آن را بدهد. و راه حل دوم این بود که ریسک را مشخص کنند و سهامی انتخاب شود که بیشترین سود ممکن را بدهد، بدون اینکه ریسکِ آن از مقدار درنظر گرفته شده، بیشتر شود. او موفق شد این مسئله را به‌دقت حل کند و این اتفاق باعث به‌وجود آمدن یکی دیگر از ستون‌های اساسی ریاضیات مالی شد. او به‌خاطر این کار در سال ۱۹۹۰ برندهٔ جایزهٔ نوبل در اقتصاد شد.

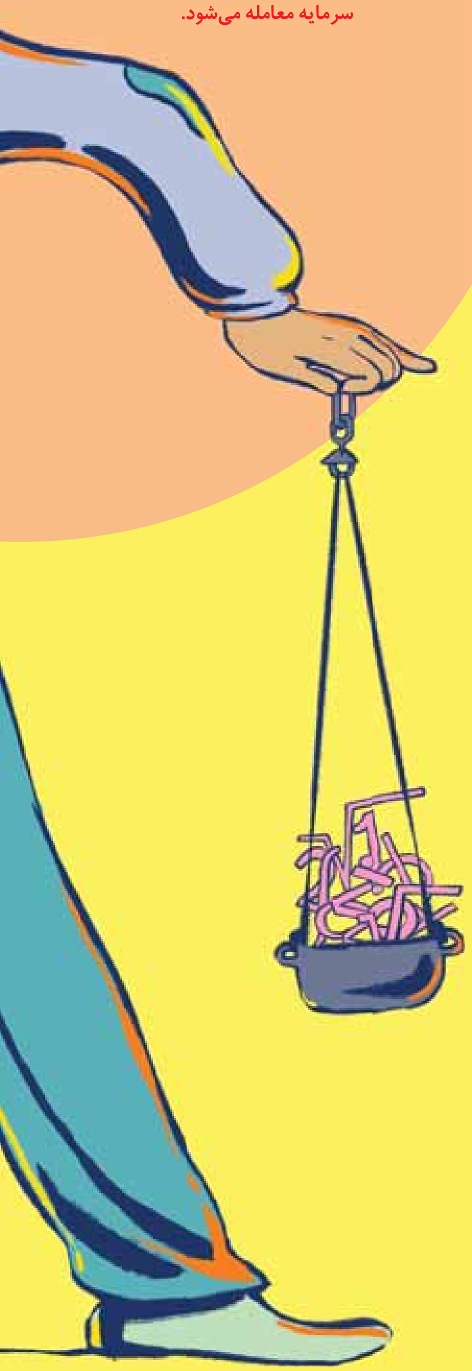
برهان: ریاضیاتِ مالی چه تغییراتی در بازار سرمایه ایجاد کرد؟

داداشی: بیشترین تغییری که علم ریاضی در بازارهای مالی به‌وجود آورد، ایجادِ روش‌های مختلف محاسباتی بود. یکی از ساده‌ترین ابزارهای معامله در بازار، اختیار معامله است. یعنی اینکه شما در یک تاریخی در آینده اختیار خرید یا فروش آن سهم را دارید. خود این اختیار قابل قیمت‌گذاری است. این ساده‌ترین قراردادی است که در بازار مالی هست و می‌شود هزاران شرط روی آن گذاشت. شرط حد و حدود، شرط زمان، که این خرید را انجام بدهم یا نه؟ و انواع قراردادها را تنظیم کرد. چیزی که علم ریاضی خیلی واضح کمک کرد به بازارهای مالی، ابداع این قراردادهاست. الان با مدل‌های ریاضی می‌توانید بگویید خیلی راحت می‌توانیم قیمت‌های منصفانهٔ قراردادها را به دست بیاوریم.

باستانی: در سال ۱۹۷۳ مِرتون همزمان با دو نفر دیگر به نام‌های بلک و شولز موفق شدند روش دقیقی برای محاسبهٔ قیمت قراردادهای اختیار بدست آورند. اهمیت این‌کار به اندازه‌ای بود که در دههٔ ۹۰ جایزهٔ نوبلِ اقتصاد به این سه نفر تعلق گرفت. روش محاسبات آن‌ها به فرمول بلک-شولز معروف شد. سرمایه‌گذاران به محاسبات بلک-شولز علاقهٔ زیادی نشان دادند و بازار معاملهٔ قراردادها شکل گرفت. این محاسبات آن‌قدر اهمیت پیدا کرد که ماشین‌حساب‌هایی ساخته شد

صنعت مالی چیست؟

در بازار سرمایه می‌توانید یک مقداری سهم بخرید و بفروشید. همچنین می‌توانید قراردادهایی را بخرید و بفروشید. مثلاً وام بانکی، یک قرارداد بین بانک و فردی است که وام می‌خواهد. خود این قرادادِ وام ارزشی دارد که می‌توان آن را خرید و فروخت. مثلاً شما می‌توانید درخواست وام از بانک کنید و سپس نوبت دریافت وام خود را به دیگران بفروشید. شما بدون اینکه از بانک پولی گرفته باشید، وام خود را به فرد دیگری فروخته‌اید. اوراق مشارکت و قراردادهای دیگری نیز هست که در بازار سرمایه معامله می‌شود.



که روی آن یک دکمهٔ جدیدی به‌نام بلک-شولز وجود داشت. اعداد را می‌زدی و بعد این دکمه را که می‌زدی، مطابق فرمول برای شما حساب می‌کرد که قیمت این قرارداد اختیار چقدر است.

برهان: آیا این علم توانست جای شَم اقتصادی را بگیرد؟

باستانی: بلک و شولز پس از اینکه در دهۀ ۹۰ جایزۀ نوبل را گرفتند، وسوسه شدند که خودشان هم وارد بازار سرمایه شوند و از این تکنیک‌ها پول در بیاورند. آن‌ها شرکتی برای خرید و فروش اوراق قرضه تأسیس کردند. چون با مفهوم ریسک و قراردادهای اختیار به‌خوبی آشنا بودند، فکر می‌کردند که هیچ خطری آن‌ها را تهدید نمی‌کند. اوایل سود خیلی خوبی می‌کردند. ولی متأسفانه چند سال بعد یک اتفاق عجیب و غریبی افتاد. آن‌ها اوراق قرضه دولت روسیه (شوروی سابق) را خریده بودند. در یک روز رئیس‌جمهور آن کشور تصمیم عجیبی گرفت که باعث افت ارزش آن اوراق قرضه شد. قیمت اوراق قرضه ناگهان پایین آمد و شرکت ورشکسته شد. یکی از بزرگ‌ترین

دکتر علی فروش باستانی / متولد ۱۳۵۷
کارشناسی ریاضی‌کاربردی، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۰-۱۳۷۶/ کارشناسی ارشد ریاضی‌کاربردی، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۲-۱۳۸۰/ دکتری: ریاضی‌کاربردی، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۸۷-۱۳۸۲/ علائق تحقیقاتی: روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی، پاره‌ای و تصادفی/ ریاضیات مالی و مدیریت ریسک/ محل اشتغال: دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

دکتر حسن داداشی: متولد ۱۳۵۸
کارشناسی و کارشناسی ارشد و دکترای رشته ریاضی دانشگاه صنعتی شریف
زمینه کاری: آنالیز تصادفی و ریاضیات مالی
محل اشتغال: دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

ورشکستگی‌ها در تاریخِ بازارهای مالی مربوط به این ریاضی‌دانان است.

برهان: یعنی یک عاملی که در این فرمول پیش‌بینی نشده بود، ظاهر شد و بر قیمت‌ها اثرگذاشت؟

باستانی: بله. یک مدلِ ریاضی هرچقدر هم که کامل باشد، باز همهٔ عوامل تأثیرگذار در آن درنظر گرفته نشده است. مدل‌های ریاضی، ساده شدهٔ واقعیت هستند. البته این مثال، اصلاً به معنی بی‌فایده بودن مدل علمی نیست. علم بالاخره کار خودش را انجام می‌دهد. مدل بلک- شولز مفید بودن خود را در موارد بسیار نشان داده بود و در بازار استفاده می‌شد.

ریاضیات مالی در ایران

برهان: این رشته از چه زمانی به ایران آمد؟ و چه تأثیری بر بازار ایران گذاشت؟

باستانی: این رشته سال ۸۷ در دو دانشگاه شروع به کار کرد. یکی همین دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان و دیگری دانشگاه علامه طباطبایی تهران. در چند سال اول کار خیلی سخت بود. بازارهای مالی ایرانِ محدود است و مثلاً قراردادهایی که خرید و فروش شوند یا بحث اختیار معامله اصلاً وجود نداشت. پس صحبت دربارهٔ آن‌ها کار سختی بود و به‌جای آن تمرکز را بر بحث‌های دیگری مثل بهینه‌سازی و ریسک گذاشتیم. بانک‌ها با بحث مدیریت ریسک آشنا بودند و به آن نیاز داشتند. دانشجویان ما فارغ‌التحصیل شدند، به‌تدریج بستر کار برایشان فراهم شد. این‌ها در سازمان بورس و مرکز تحقیقاتِ سازمان بورس، در ادارهٔ ریسک بانک ملت، و در کارگزاری‌ها مشغول کار هستند. الان هم کارهایی در حوزه بیمه تعریف کرده‌ایم که مورد توجه بیمه‌ها قرار گرفته است. راستش را بخواهید دانشجویان ما در هر سازمانی که رفته‌اند، آنقدر خوب کار کرده‌اند که نیاز به این رشته و افراد باسواد در زمینه مالی کاملاً حس شده است. البته ما هم که اینجا نشسته‌ایم باید بیشتر پیگیری کنیم و فرصت‌های جدیدی را برای دانشجویان ایجاد کنیم. ما در این چند سال ترجیح داده‌ایم که وقتی پیشنهاد همکاری به ما می‌دهند، خودمان آن کار را نپذیریم، بلکه دانشجوهایمان بروند مشغول شوند و اگر لازم بود ما راهنمایی و هدایت کنیم.

برهان: یعنی شما اساتید، دانشجویانی را تربیت می‌کنید که این کارها را انجام دهند و باتجربه و ماهر شوند. و تلاش می‌کنید که نتیجه و اهمیتِ کارِ آن‌ها دیده شود.

باستانی: بله. به نظر ما این کار اثر بهتری بر آیندهٔ بازار مالی کشور دارد.

داداشی: همان‌طور که آقای دکتر گفتند صنعت مالیِ ایران خیلی خیلی نوپاست و تازه دارد شکوفا می‌شود. شغل‌های جدیدی مثل تحلیل‌گری یا مدیریتِ ریسک دارد کم‌کم به‌وجود می‌آید و زیاد می‌شود. بنابراین به‌نظر می‌رسد این رشته آینده شغلی خوبی دارد.

ریاضی، ریاضی و باز هم ریاضی!

برهان: آیا برای شما پیش آمده که برای انجام یک پروژهٔ جدید، مجبور شوید دانش ریاضی خود را افزایش دهید؟

باستانی: خیلی پیش می‌آید که به یک مسئله‌ای برمی‌خورید که درِ آموزش‌های قبلیِ شما نبوده. مثلاً برای حل یک مسئلهٔ بیمه نیاز پیدا می‌کنید که مبحثی در کنترل بهینهٔ تصادفی را بدانید. گاهی وقتی موضوع را یاد می‌گیرید و مسئلهٔ خودتان را به‌صورت دقیق می‌نویسید، تازه می‌بینید که یک مسئلهٔ حل نشده است و خودتان باید روشی برای حل آن ابداع کنید.

داداشی: در هیچ کار علمی و پژوهشی مرز دانش بسته نمی‌شود و همیشه شما به نظریات و راه‌حل‌های نو احتیاج دارید. به‌دلیل ماهیت بین رشته‌ایِ ریاضیات مالی، به ریاضیات بسیارِ متنوع و علوم دیگری مثل اقتصاد و حسابداری نیاز داریم و مرتب با مسائل و موضوعاتِ جدید مواجه می‌شویم.

نویسنده: دانکن بیرمنگام
تصویرگر: دانکن بیرمنگام
مترجم: منصور کدیور
ناشر: کانون پرورش فکری کودکان و نوجوانان
تلفن: ۸۸۹۶۲۹۷۲ و ۸۸۹۶۴۱۱۵

معرفی کتاب

جعفر ربّانی

دوستان عزیز برهان

شما در هندسه با تقارن آشنا شده‌اید و گمان نمی‌کنیم لازم باشد به شما بگوییم تقارن چیست و چه استفاده‌هایی دارد. اما یادآوری آن و به‌خصوص نشان دادن این موضوع، یعنی تقارن، از طریق شکل آن هم شکل‌های معماگونه، حتماً برایتان جالب و تماشایی خواهد بود. این کاری است که یک نفر خارجی به نام دانکن بیرمنگام انجام داده و مجموعه‌ای از تصویرهای متنوع را طوری طراحی کرده است که از دل آن‌ها با استفاده از تقارن، معماهای زیبایی پدید می‌آیند.

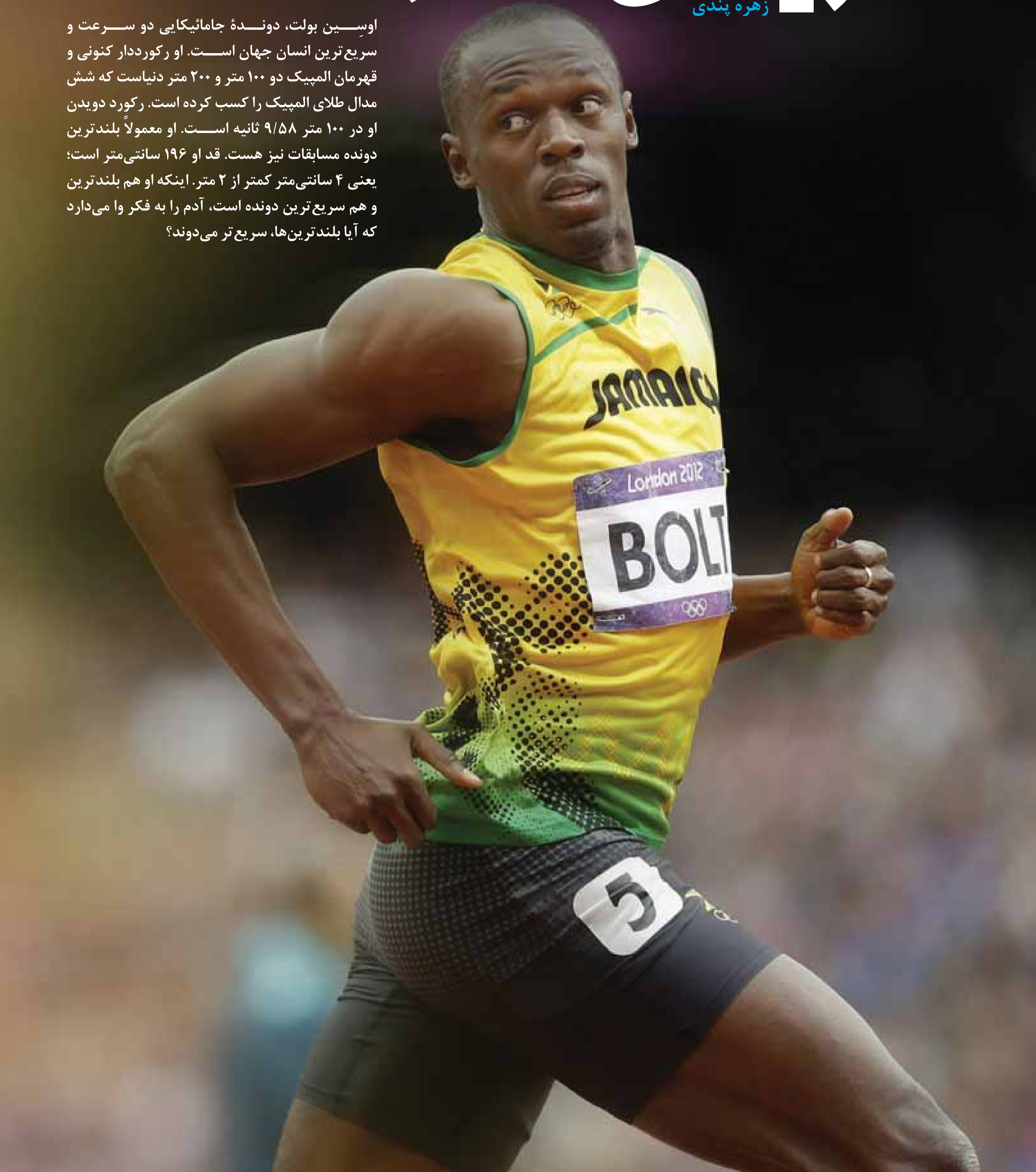
کتاب «با آینه پیدا کن» کتابی است شامل ۲۵ تصویر و یک آینه- مواظب باشید نشکنند!- که شما به کمک آینه می‌توانید تقارن‌سازی انجام دهید و خودتان و حتی خواهر و برادر یا دیگر کودکان خردسال را هم با آن مشغول سازید. توضیح بیشتر را لازم نمی‌دانم فقط توجه شما را به شکل متقارنی که خودمان از شکل شمارهٔ ۶ کتاب، با آینه به‌دست آورده‌ایم. جلب می‌کنیم؛ ببینید!

نگهبان باغ را پیدا کن!

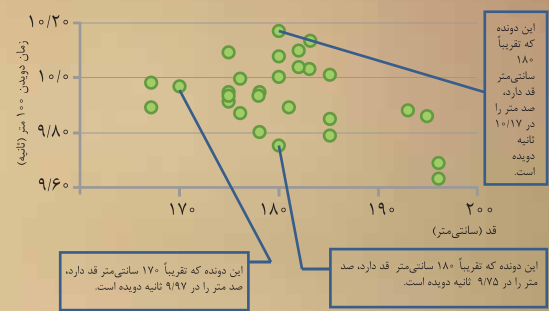
ریاضی در مسابقات دو سرعت

زهره پندی

اوسِین بولت، دوندهٔ جامائیکایی دو سرعت و سریع‌ترین انسان جهان است. او رکورددار کنونی و قهرمان المپیک دو ۱۰۰ متر و ۲۰۰ متر دنیاست که شش مدال طلای المپیک را کسب کرده است. رکورد دویدن او در ۱۰۰ متر ۹/۵۸ ثانیه است. او معمولاً بلندترین دونده مسابقات نیز هست. قد او ۱۹۶ سانتی‌متر است؛ یعنی ۴ سانتی‌متر کمتر از ۲ متر. اینکه او هم بلندترین و هم سریع‌ترین دونده است، آدم را به فکر وا می‌دارد که آیا بلندترین‌ها، سریع‌تر می‌دوند؟



در نمودار ۱ هر نقطه زمان دویدن یکی از دونده‌های المپیک و قد او را مشخص کرده است.



▲ آمارهای واقعی قد و زمان دویدن ۱۰۰ متر دونده‌های المپیک

می‌دانید که کشتی‌گیران در رده‌های وزنی متفاوت با هم رقابت می‌کنند و قهرمان سبک‌وزن با قهرمان سنگین‌وزن رقابت نمی‌کند. شاید بهتر بود در المپیک دونده‌ها را بر حسب قدشان دسته‌بندی می‌کردند و دونده‌های هر ردهٔ قدی با هم مسابقه می‌دادند. شاید با این دسته‌بندی، قهرمانان کوتاه‌قد به خاطر کوتاه قدی‌شان از بلندقدها عقب نمی‌ماندند. یا مثلاً در دوی سرعت، به جای آنکه زمان دویدن یک مسافت مشخص مثلاً ۱۰۰ متر را اندازه بگیرند، از هر دونده بخواهند به نسبت قدش مسافتی را بدود و زمان دویدن او را اندازه بگیرند و مقایسه کنند. مثلاً **بولت** که ۱۹۶ سانتی‌متر است، ۹۸=۲÷۱۹۶ متر بدود و دوندهٔ دیگری که ۱۸۲ سانتی‌متر است، ۹۱=۲÷۱۸۲ متر!

می‌توانیم این پیشنهادها را برای کمیتهٔ ملی المپیک بفرستیم تا بررسی کنند. البته خوب است قبل از آن خودمان هم با توجه به آمارها دربارهٔ این پیشنهاد بیشتر تأمل کنیم. بیایید این شکل جدید از مسابقه را بررسی کنیم:

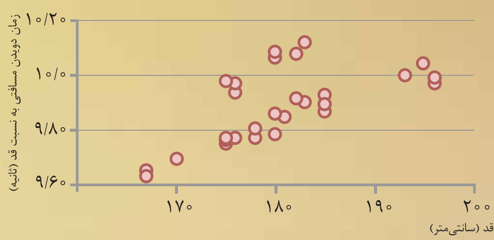
فرض کنید دونده‌ای با قد ۱۸۲ سانتی‌متر، صد متر را در ۱۰ ثانیه دویده است. با این شکل جدید مسابقات باید زمان دویدن او در ۹۱=۲÷۱۸۲ ثانیه را حساب کنیم. با فرض اینکه سرعت او ثابت بوده است و ۹۱ را هم با همان سرعتی می‌دود که ۱۰۰ متر دویده است، زمان ۹۱ متر دویدن او را در جدول بالا محاسبه می‌کنیم.

مسافت (متر)	۱۰۰	۹۱
زمان (ثانیه)	۱۰	۹/۱

به همین ترتیب زمان ۹۸=۲÷۱۹۶ ثانیه دویدن **بولت** را هم محاسبه می‌کنیم:

مسافت (متر)	۱۰۰	۹۸
زمان (ثانیه)	۹/۵۸	۹/۳۹

به نظر می‌رسد در این شکل جدید مسابقات، زمان دویدن دوندهٔ ۱۸۲ سانتی‌متری از **بولت** کمتر شده است. به همین ترتیب همهٔ زمان‌ها را با توجه به قد دونده‌های المپیک تغییر داده‌ایم. نمودار ۲ براساس این شکل جدید از مسابقات رسم شده است.



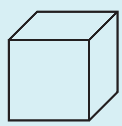
▲ آمارهای تغییریافتهٔ قد و زمان دویدن مسافتی به نسبت قد دونده‌های المپیک

نمودار ۲ را با نمودار قبلی مقایسه کنید. در نمودار قبلی نقاط در همهٔ صفحه پراکنده بودند. اما در نمودار جدید، بیشتر نقطه‌ها در طول یک قطر صفحهٔ مستطیلی قرار دارند. به نظر می‌رسد این شکل جدید مسابقات به نفع کوتاه‌قدهاست و هرچه قد کوتاه‌تر می‌شود، مسافت دویدن و زمان دویدن کمتر می‌شود و هرچه هم قد بلندتر می‌شود، زمان دویدن بیشتر.

گرچه با توجه به بررسی انجام شده به نظر می‌رسد، پیشنهادی که برای تغییر قوانین دوی ۱۰۰ متر داشتیم، منطقی نیست، ولی فرصتی برای درک داده‌هایی است که می‌توان از یک نمودار ساده و مقایسهٔ آن با یک نمودار دیگر به دست آورد.

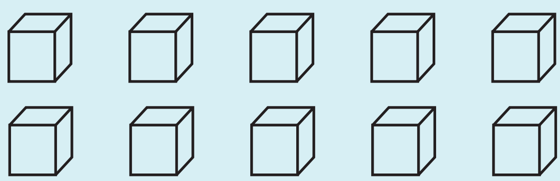
منبع
http://www.mathalicious.com/lessons/on-your-mark

این مکعب را در نظر بگیرید. این مکعب، مکعبی است به ابعاد ۱×۱×۱ سانتی‌متر و جرم ۱ گرم. پس چگالی آن برابر است با:



$$\frac{\text{۱ گرم}}{\text{۱ سانتی‌متر مکعب}} = \text{۱} \frac{gr}{cm^3}$$

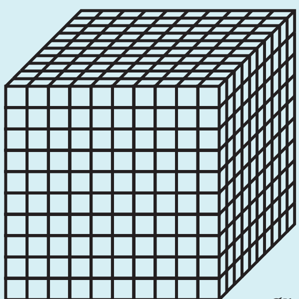
حالا اگـــر ۱۰ تا از این مکعب‌ها را کنار هم بگذاریم چه اتفاقی می‌افتد؟



جرم این مکعب‌ها ۱۰ گرم اســت و حجمشـــان ۱۰ سانتی‌متر مکعب. پس دوباره می‌توانیم به این شکل چگالی‌شان را حساب کنیم.

$$\frac{\text{۱۰ گرم}}{\text{۱۰ سانتی‌متر مکعب}} = \text{۱} \frac{gr}{cm^3}$$

حالا به شکل مقابل نگاه کنید:
در هرکـــدام از ابعاد این مکعب بـــزرگ، ۱۰ مکعب کوچک جا شده است.



یعنی این مکعب،
از کنار هم قرار گرفتن
(۱۰×۱۰×۱۰ مکعب)
۱۰۰۰ مکعب کوچک
درست شده است.
یعنی چند دسی‌متر مکعب؟
چگالی این مکعب را هم
حساب کنیم:

$$\frac{\text{۱۰۰۰ گرم}}{\text{۱۰۰۰ سانتی‌متر مکعب}} = \text{۱} \frac{gr}{cm^3}$$

برای آخرین بـــار یک مکعب بزرگ به ابعـــاد ۱ متر را در نظر بگیریم. پس تعـــداد مکعب‌هایی که داریـــم ۱۰۰×۱۰۰×۱۰۰ تاست! یعنی ۱ میلیون مکعب کوچک!
(ابعاد این مکعب، چند دسی‌متر مکعب است؟)
طبیعتاً چگالی این مکعب هم مثل حالت‌های قبلی به دســـت خواهد آمد.

$$\frac{\text{۱۰۰۰۰۰۰ گرم}}{\text{۱۰۰۰۰۰۰ سانتی‌متر مکعب}} = \text{۱} \frac{gr}{cm^3}$$

اما بیایید این بار چگالی این مکعب را طور دیگری هم حساب

محدثه کشاورز اصلانی

چگالی را چند بگیرم؟

کنیم. می‌دانیم که هر ۱ کیلوگرم معادل ۱۰۰۰ گرم است. پس با استفاده از تناسب می‌توانیم حساب کنیم که ۱ میلیون گرم چند کیلوگرم خواهد بود؟

؟	۱ کیلوگرم
۱۰۰۰۰۰۰ گرم	۱۰۰۰ گرم

پس می‌توانیــم بگوییم جرم این مکعب بزرگ ۱۰۰۰ کیلوگرم است.

از طرف دیگر چون ابعاد این مکعب ۱×۱×۱ متر است، می‌توانیم به جای محاســبهٔ حجم آن برحسب سانتی‌متر مکعب، از واحد متر مکعب استفاده کنیم. در این صورت حجم مکعب ما ۱ متر مکعب خواهد بود.

پس دوباره چگالی را پیدا کنیم:

$$\frac{\text{۱۰۰۰۰۰۰ گرم}}{\text{۱۰۰۰۰۰۰ سانتی‌متر مکعب}}=\text{۱}\,\frac{\text{gr}}{\text{cm}^{۳}}=\frac{\text{۱۰۰۰ کیلوگرم}}{\text{۱متر مکعب}}=\text{۱۰۰۰}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^{۳}}$$

چگالی مکعــب بزرگ، یک بار ۱ پیدا شــد و بار دیگر ۱۰۰۰! طبیعتاً این مکعب تغییری نکرده و جرم و حجم آن هم عوض نشــده است، اما استفاده از واحدهای متفاوت باعث شده است، دو عدد ظاهراً مختلف برای آن پیدا کنیم.

با ایــن واحدهای چگالی در کتاب‌های درســی علوم زیاد کار کرده‌ایم. حالا بیایید چند واحد دیگر را با هم امتحان کنیم: در همین مکعب بــزرگ، اگر واحد گرم را نگه داریم و به جای ســانتی‌متر مکعب، از متر مکعب اســتفاده کنیم، چه اتفاقی خواهد افتاد؟

$$\frac{\text{۱۰۰۰۰۰۰ گرم}}{\text{۱ متر مکعب}}=\frac{\text{gr}}{\text{m}^{۳}}\,\text{۱۰۰۰۰۰۰}$$

این بار همان سانتی‌متر مکعب را نگه داریم، اما به جای گرم از کیلوگرم استفاده کنیم:

$$\frac{\text{۱۰۰۰ کیلوگرم}}{\text{۱۰۰۰۰۰۰ سانتی‌متر مکعب}}=\text{۰/۰۰۱}\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^{۳}}$$

عددها متفاوت شــدند، اما همچنان حواســمان هست که این عددهای متفاوت، چگالی اجســام مختلفی را بیان نمی‌کنند، بلکه همه چگالی همان مکعب بزرگ خودمان هستند.

بــرای این مکعب بــزرگ، ما چهار مقــدار $\text{۱}\,\frac{\text{gr}}{\text{cm}^{۳}}$، $\text{۱۰۰۰}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^{۳}}$، $\text{۱۰۰۰۰۰۰}\,\frac{\text{gr}}{\text{m}^{۳}}$، و $\text{۰/۰۰۱}\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^{۳}}$ را به دست آوردیم.

اگر به چهار تا عدد به دست آمده نگاه کنیم، شاید متوجه شویم که چرا از دو واحد اخیر، چندان در محاسبات استفاده نمی‌شود. به نظر شما چرا؟

حساب و کتاب

حاشیه‌های ریاضی جام جهانی فوتبال

کسب امتیازهای ممکن برای هر تیم

جعفر اسدی گرمارودی

زمان برگزاری جام جهانی فوتبال نزدیک است و به این بهانه، در سه شمارهٔ پیش رو به حاشیه‌های ریاضی آن خواهیم پرداخت. همان‌طور که می‌دانید، از نظر نحوهٔ رویارویی تیم‌ها تا تعیین تیم قهرمان، جام به دو مرحلهٔ اصلی تقسیم می‌شود: مرحلهٔ مقدماتی (گروهی) و مرحلهٔ حذفی. در این مطلب می‌خوانیم در مورد مرحلهٔ گروهی و امتیازگیری تیم‌ها بحث کنیم و در پایان براساس آن با ارائهٔ چند مسئله، حل آن‌ها را به دانش‌آموزان علاقه‌مند واگذار کنیم.

⚽ ۳۲ تیم حاضر به هشت گروه چهارتیمی تقسیم می‌شوند و در هر گروه، همهٔ تیم‌ها با هم مسابقه می‌دهند و با توجه به چهارتیمی بودن گروه‌ها، بعد از آنکه هر تیم سه مسابقه‌اش را برگزار کرد، براساس نتایج امتیاز هر تیم محاسبه می‌شود و تیم‌ها برحسب امتیاز در جدول رتبه‌بندی می‌شوند. جدول ۱ به‌عنوان نمونه، مربوط به گروه F جام جهانی ۲۰۱۴ برزیل است که تیم کشورمان با کسب رتبهٔ ۴ موفق به صعود به مرحلهٔ حذفی نشد (از هر گروه دو تیم صعود می‌کنند). یادآوری می‌کنیم در هر مسابقه، تیم برنده ۳ امتیاز، بازنده صفر امتیاز و در صورت مساوی شدن هر تیم یک امتیاز کسب خواهند کرد. اکنون می‌خواهیم جدولی طراحی کنیم که تمام امتیازهای ممکن برای یک تیم بعد از سه مسابقه را نمایش دهد.

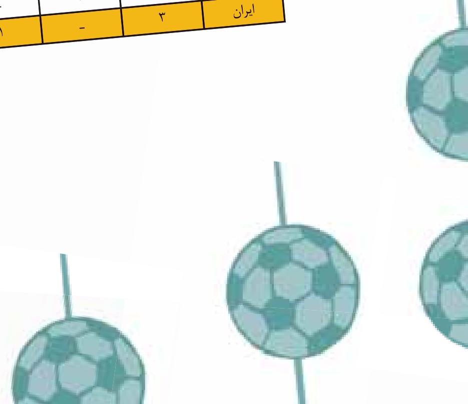
نام تیم	تعداد بازی	برد	مساوی	باخت	امتیاز
آرژانتین	۳	۳	–	–	۹
نیجریه	۳	۱	۱	۱	۴
بوسنی	۳	۱	–	۲	۳
ایران	۳	–	۱	۲	۱

⚽ حداکثر امتیاز در بهترین حالت ممکن، یعنی سه پیروزی اتفاق می‌افتد؛ یعنی ۹ امتیاز.

- حداقل امتیاز در بدترین حالت ممکن یعنی سه شکست اتفاق می‌افتد؛ یعنی صفر امتیاز.

⚽ در یک گروه چهارتیمی، چنین امتیازی امکان‌پذیر نیست. زیرا با ترکیب‌های متفاوت از جمله عددهای ۱ و ۳ مجموع ۸ به دست نمی‌آید. تنها ترکیب جمع سه عدد برای ۸، ۲+۳+۳=۸ است که در امتیازگیری اصلاً امتیاز ۲ نداریم. نحوهٔ کسب بقیهٔ امتیازها را می‌توانید در جدول ۲ مشاهده کنید. تنها امتیازی که دو حالت ممکن برای رخ دادن آن وجود دارد، امتیاز ۳ است.

امتیاز	برد	مساوی	باخت
۹	۳	–	–
۷	۲	۱	–
۶	۲	–	۱
۵	۱	۲	–
۴	۱	۱	۱
۳	۱	–	۲
۳	–	۳	۱
۲	–	۲	۱
۱	–	۱	۲
۰	–	–	۳

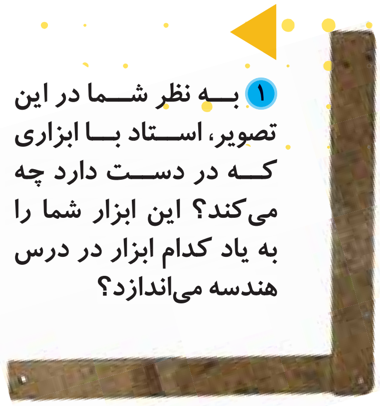


ریاضیات و مشاغل • سپیده چمن‌آرا • عکاس: اعظم لاریجانی

پای صحبت ابزارها

مقدمه

نزدیک منزل کدام‌یک از شما کارگاه نجاری هست؟ اگر هست، آیا تا به حال سری به آنجا زده اید؟ اگر نیست، با ما بیایید تا به کارگاه نجاری «هنرجو» برویم و نگاهی به ابزارهایی که در آنجا استفاده می‌شود بیندازیم تا ببینیم کدام یک به درس هندسه و ریاضیاتی که ما در مدرسه خوانده‌ایم مربوط است؟



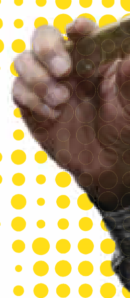
۱ به نظر شما در این تصویر، استاد با ابزاری که در دست دارد چه می‌کند؟ این ابزار شما را به یاد کدام ابزار در درس هندسه می‌اندازد؟

۲ گونیا برای رسم یا تشخیص گوشه‌های راست

۳ ابزاری برای کار با زاویه‌های مختلف

۴ به نظر شما این ابزار برای چه کاری است؟ استاد به ما توضیح داد که از این ابزار برای ساختن دستهٔ مبل و صندلی استفاده می‌شود. آیا منحنی‌هایی که در این ابزار هست بخشی از دایره هستند؟ چرا؟

۵ حالا شما به تصویرها نگاه کنید. آیا ابزار دیگری در آن می‌بینید که شما را به یاد درس هندسه و ریاضیات مدرسه بیندازد؟



الاکلنگ چه کسی برنده می‌شه؟

حسین نامی ساعی

من بالای الاکلنگ گیر کرده بودم. **حسن جعفری** تقریباً ۱۰ تا ۱۵ کیلو از من سنگین‌تر بود. عجیب بود که آقای **دقیق** تصمیم گرفته بود که کلاس علوم تجربی را آن روز در پارک بازی نزدیک مدرسه تشکیل دهد. درس آن روز ماشین‌ها بود. آقای دقیق در پارک به بچه‌ها گفت بروید و با وسایل بازی، بازی کنید و یادی از بچگی‌هایتان کنید! تاب‌بازی، سرسره، الاکلنگ‌بازی و... . این بود که من و حسن جعفری سراغ الاکلنگ رفتیم و من با شیطنت حسن، که از من سنگین‌تر بود، در آن طرف الاکلنگ بالا مانده بودم. تعدادی از بچه‌ها دور ما جمع شده بودند و فریاد می‌زدند: «الاکلنگ و تیشه، چه کسی برنده می‌شه!» به شوخی دادی زدم: «بابا من رو یکی از این بالا بیاره پایین!...» تا اینکه آقای دقیق با لبخندی که بر لب داشت، نزدیک الاکلنگ آمد و به همهٔ بچه‌ها گفت: «بازی را رها کنید و بیایید اینجا». همه تعجب کردند که آقای دقیق چه می‌خواهد بگوید. آقا گفت: «درس امروز ما همین است و سؤال هم این است که: چه کار کنیم تا حسین پایین بیاید؟» جواب این بود: یا باید عقب‌تر می‌رفتم و یا سنگین‌تر می‌شدم. راه دیگر هم این بود که حسن یا جلوتر می‌آمد و یا سبک‌تر می‌شد. اما چرا؟

آقای دقیق تازه درس را شروع کرد: **ماشین چیست؟** آقای دقیق توضیح داد که ماشین وسیله‌ای است شامل یک یا چند قسمت که از انرژی برای انجام کار مطلوب استفاده می‌کنند. ماشین‌ها از منابع انرژی شیمیایی، مکانیکی، هسته‌ای، گرمایی و الکتریکی تغذیه می‌کنند و انرژی دریافتی را صرف انجام کار می‌کنند. ماشین‌ها بسیار متنوع هستند و از یک پیچ تا یک هواپیما را در برمی‌گیرند. **ارشمیدس** در حدود قرن سوم پیش از میلاد، برای نخستین بار ایدهٔ ماشین ساده را مطرح کرد. او در کتاب خود سه ماشین سادهٔ اهرم، قرقره و پیچ را معرفی کرده است.

پس از آن آقای دقیق ماشین‌های ساده و ماشین‌های پیچیده را به ما معرفی کرد و برای اینکه بتوانیم مسئلهٔ الاکلنگ را حل کنیم، اهرم‌ها را معرفی کرد: اهرم نوعی ماشین ساده است و معمولاً میله‌ای است که حول یک نقطه دوران می‌کند. از اهرم‌ها در بسیاری از وسایلی که به‌طور روزمره به‌کار می‌بریم، استفاده شده است.

پس از این که آقای دقیق اجزای یک اهرم را شرح داد، فهمیدیم که اهرم‌ها براساس محل قرارگیری تکیه‌گاه و محل وارد شدن نیرو، به سه نوع تقسیم می‌شوند که الاکلنگ از نوع اهرم نوع اول است.

در اهرمِ نوع اول، تکیه‌گاه بین نیروی محرک و مقاوم قرار دارد. اهرم نوع اول باعث تغییر جهت نیرو می‌شود. در الاکلنگ که تکیه‌گاه دقیقاً وسط نیروی محرک و مقاوم است، رابطهٔ زیر همیشه برقرار است:

گشتاور نیروی پاد ساعت‌گرد= گشتاور نیروی ساعت‌گرد

طول بازوی محرک×نیروی محرک=طول بازوی مقاوم×نیروی مقاوم

بعد از پایان درس آقای دقیق متر و ترازویی را که از قبل پیش‌بینی کرده بود، از کیف خود درآورد. من و حسن از بالای الاکلنگ پایین آمدیم و روی ترازو رفتیم. من تقریباً ۶۰ کیلو بودم و حسن ۷۵ کیلو بود. آقای دقیق با متر طول میلهٔ الاکلنگ را هم اندازه گرفت. کل طول الاکلنگ ۳ متر و تکیه‌گاه دقیقاً وسط میله بود. طبق فرمول اهرم نوع اول، وضعیت من و حسن روی الاکلنگ به این صورت بود: (این را هم بگویم که آقای دقیق وزن من و حسن را بر حسب نیوتن حساب کرد. برای این کار وزن هر کدام از ما را در شتاب جاذبهٔ زمین که تقریباً ۱۰ نیوتن است، ضرب کرد. بنابراین: ۶۰ کیلو معادل ۶۰۰ نیوتن و ۷۵ کیلو معادل ۷۵۰ نیوتن شد).

$$۷۵۰*۱/۵ \neq ۶۰۰*۱/۵$$
$$۱۱۲۵ \neq ۹۰۰$$
$$۱۱۲۵ > ۹۰۰$$

خب برای اینکه تعادل بین من و حسن برقرار شود، یا باید من یک وزنهٔ ۱۵ کیلویی را کنار خودم قرار دهم و یا اینکه با استفاده از فرمول $۷۵۰*۱/۵=۶۰۰*X$ حساب کنم که چه اندازه باید از تکیه‌گاه فاصله بگیریم. X را به‌صورت زیر حساب کردم:

$$X=\frac{۷۵۰\times ۱/۵}{۶۰۰}=\frac{۱۱۲۵}{۶۰۰}\simeq ۱/۸۷۵$$

بنابراین: $۱/۸۷۵-۱/۵=۰/۳۷۵$

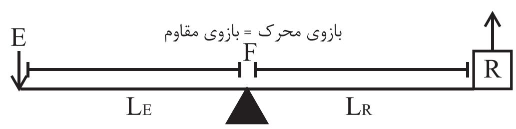
من باید ۰/۳۷۵ متر یا ۳۷/۵ سانتی‌متر از جایی که نشسته بودم عقب‌تر می‌رفتم (از تکیه‌گاه دور می‌شدم) و یا حسن باید

$$۷۵۰*X=۶۰۰*۱/۵$$

$$X=\frac{۶۰۰\times ۱/۵}{۷۵۰}=\frac{۹۰۰}{۷۵۰}=۱/۲$$

$$۱/۵-۱/۲=۰/۳$$

۰/۳ متر یا ۳۰ سانتی‌متر به تکیه‌گاه نزدیک‌تر می‌شد. درس الاکلنگ آن روز هم به این شکل در پارک بازی به پایان رسید و ما با آقای دقیق به مدرسه برگشتیم.

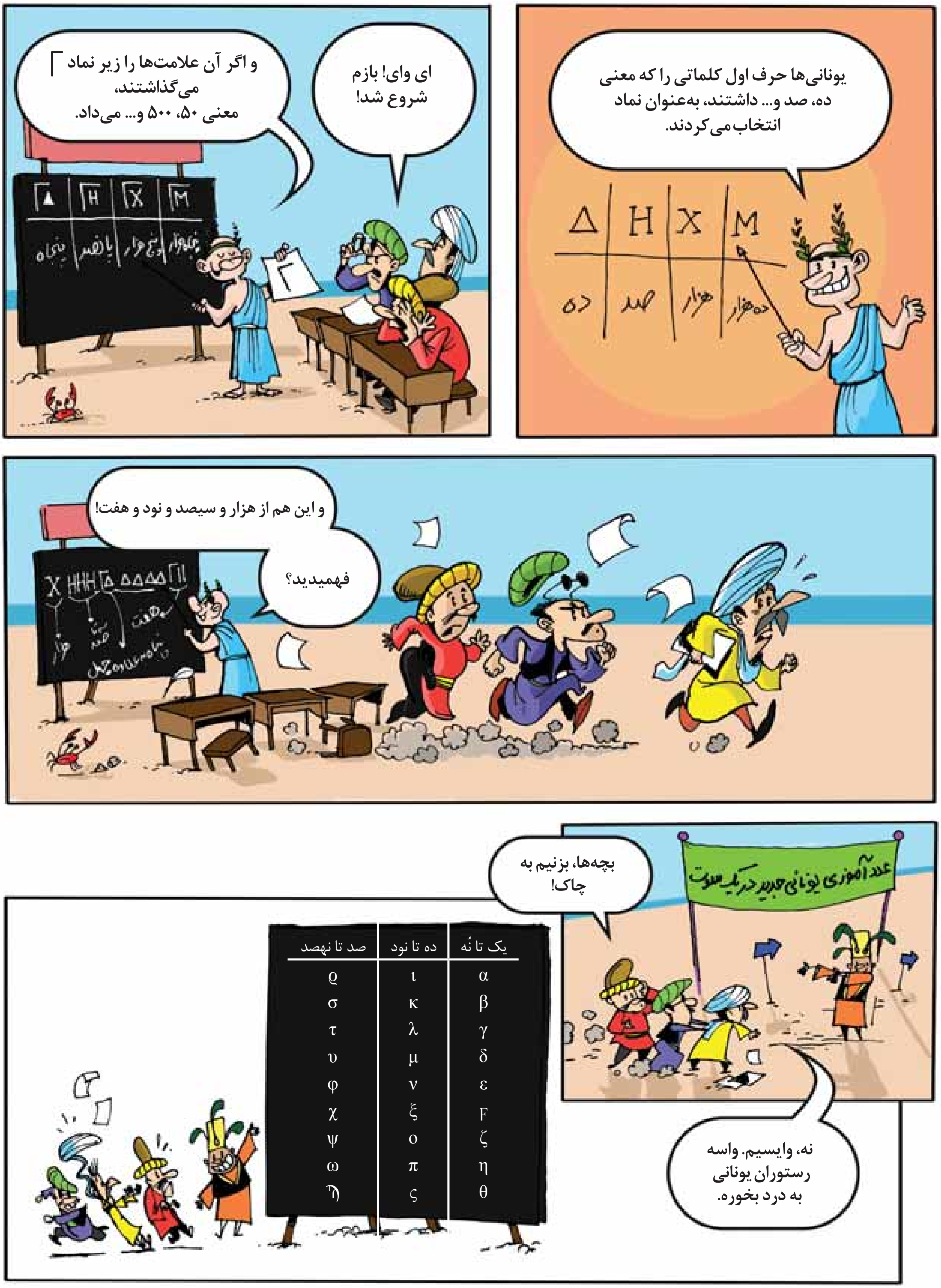


نویسنده: حسام سبحانی طهرانی
تصویرگر: سام سلماسی

گرد و خاک اعداد هندی در اروپا

در شمارهٔ قبل دیدید که چگونه خوارزمی در سفر به هند، عددهای هندی را برای ایران و تمدن اسلامی به سوغات آورد.


مسلمانان ابتدا سعی کردند با عددهای آن‌ها کنار بیایند.
RESTAURANT
MENU
و حتی برای یادگیری به کلاس رفتند.
عددنویسی امروزی ما ریشه در عددنویسی رومی دارد که آن هم تحت‌تأثیر عددنویسی یونانی بوده.
عدد آموزی درسه سوت!
پس چرا چهار و نُه نیست؟
و از اینجا دردسرها آغاز شد.
M D C L X V I
از سمت راست به عدد نگاه می‌کنیم. هرگاه نماد چپ از راست بزرگ‌تر باشد، آن را اضافه می‌کنیم و هرگاه کوچک‌تر باشد، کم می‌کنیم. برای همین، چهار را با IV و نُه را با IX نشان می‌دهند.
حالا که فهمیدید، پیش به سوی عددهای بزرگ‌تر!
DC → صد + پانصد = ششصد
CD → پانصد − صد = چهارصد
و حالا نمایش هزار و سیصد و نود و هفت!
M CCC XC VII
فهمیدید؟
به این ترتیب، آن‌ها را به کلاس پایه فرستادند تا شاید توفیری حاصل شود.
این عددنویسی به سال‌ها قبل از میلاد مسیح برمی‌گردد.


یونانی‌ها حرف اول کلماتی را که معنی ده، صد و... داشتند، به‌عنوان نماد انتخاب می‌کردند.
Δ H X M
ده صد هزار ده‌هزار
ای وای! بازم شروع شد!
و اگر آن علامت‌ها را زیر نماد ⌈ می‌گذاشتند، معنی ۵۰، ۵۰۰ و... می‌داد.
پنجاه پانصد پنج‌هزار پنجاه‌هزار
و این هم از هزار و سیصد و نود و هفت!
فهمیدید؟
عددآموزی یونانی جدید در یک سوت
بچه‌ها، بزنیم به چاک!
نه، وایسیم. واسه رستوران یونانی به درد بخوره.
یک تا نُه: α β γ δ ε F ζ η θ
ده تا نود: ι κ λ μ ν ξ ο π ϛ
صد تا نهصد: ρ σ τ υ φ χ ψ ω ϡ

پس از این دردسرها، مسلمانان تصمیم گرفتند به جای یادگیری عددنویسی غربی‌ها، عددنویسی خودشان را به آن‌ها یاد بدهند.

و از آنجا که این عددنویسی خیلی آسان‌تر بود، کلی طرفدار پیدا کرد.

اسپانیایی‌ها این عددها را غبار نامیدند؛ احتمالاً به خاطر گرد و خاک طرفداران پشت در آموزشگاه!

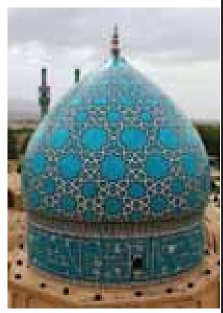
... و این آغاز جهانی شدن عددنویسی بود.

این داستان ادامه دارد ...

بخش دوم

کاشی‌های موزاییکی

سیدمهدی بشارت



به اطراف خود نگاه کنید. نقش‌هایی مانند تصاویر بالا را همه جا مشاهده می‌کنید. در طبیعت، در کاشی‌کاری، گچ‌بری، آینه‌کاری، در کف‌پوش‌ها و نرده‌ها، در لباس، کیف، جواهرات، در لوازم منزل و ...

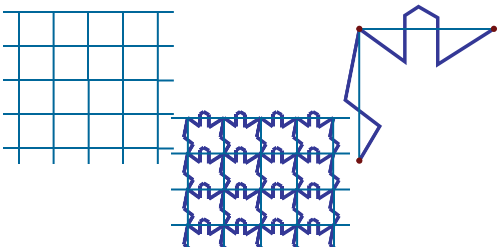
هنرمندان و طراحان همواره می‌کوشند که نقش‌های زیباتر و ترکیب‌های دلنشین‌تر ایجاد کنند.

در ادامهٔ این مطلب از تکنیک‌های متفاوت برای ایجاد طرح‌هایی که سطح را می‌پوشانند، دو تکنیک را که برای ایجاد شکل‌های «پوشا» به‌کار می‌روند، معرفی می‌کنیم.

الف) استفاده از شبکهٔ مربعی

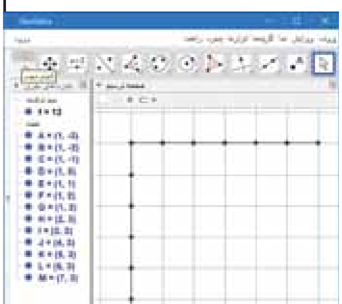
مطابق شکل ۱ طرحی روی دو ضلع مربع کشیده می‌شود و روی اضلاع متناظر در مربع‌های دیگر تکرار می‌شود.

۱ یک صفحهٔ جدید در «جئوجبرا» باز کنید، محورهای مختصات را پنهان کنید، ولی خطوط شبکه معلوم باشند.



تصویر۱

۲ از ابزار «خط شکسته» (Poly Line) (ستون سوم، آیکون پنجم) استفاده کنید و دو ضلع یک مربع ۶*۶ را رسم کنید. برای کامل شدن خط شکسته باید روی اولین نقطه در آخر دوباره کلیک کنید (تصویر ۲).

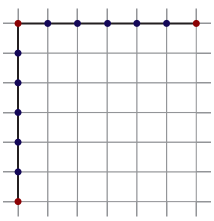


تصویر۲

۳ نقاط رأس‌های مربع را ثابت کنید تا تغییر نکند. به این منظور روی آن نقطه کلیک کنید و علامت قفل باز را که در منوی صفحهٔ ترسیم (تصویر ۳) مشاهده می‌کنید، کلیک کنید تا بسته شود. همچنین رنگ این نقطه‌ها را قرمز کنید (تصویر ٤).

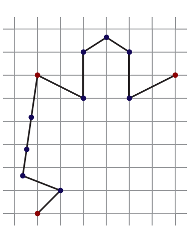
تصویر۳

۴ با ابزار جابه‌جایی نقطه‌ها را قدری جابه‌جا می‌کنیم تا شبیه شکل بالا- یا هر شکلی که مدنظر شماست- شود (تصویر ۵).



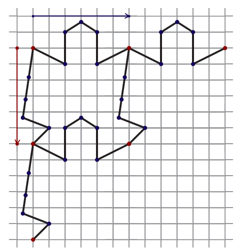
تصویر۴

۵ حالا وقت آن است که این شکل را تکرار کنید تا نقش بالا حاصل شود. از فعالیت‌های قبل آموختید که برای تکرار از «انتقال» استفاده کنید. ابتدا مطابق

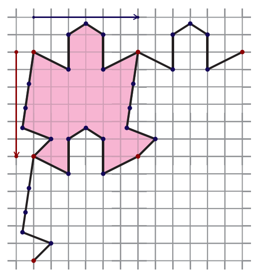


تصویر۵

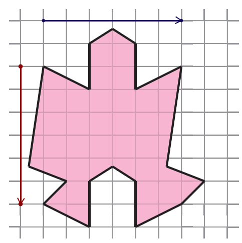
تصویر ۶، با ابزار بردار بین دو نقطــه، دو بــردار آبی و قرمزرنگ ایجــاد کنید. سپس این خط شکسته را یک بار بــا بردار آبی و یک بار هم با بردار قرمز انتقال دهید.


تصویر۶

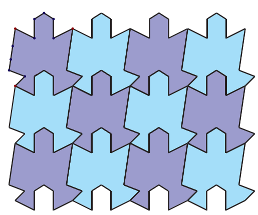
۶ تــاکنون شکــل تکرارشونده (که شبیه یک آدمک اســت) ایجاد شده اســت. با ابزار چندضلعی این شکل را مشخص کنید (تصویر ۷).


تصویر۷

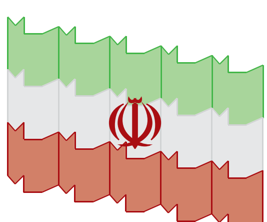
۷ اکنون می‌خواهیم این چندضلعی را تکثیر کنیم، ولی بهتر اســت قبل از آن قدری خلــوت کنیم. همهٔ اشــیا را، به جز چندضلعی اصلــی و بردارهــای آبی و قرمز، پنهان کنید (تصویر ۸).


تصویر۸

۸ اکنــون چندضلعــی اصلی را به تعداد دلخواه با بردارهای آبی و قرمز انتقال دهید و مطابق میلتان آن را رنگ‌آمیزی کنید. در نهایت خطوط شبکه و بردارها را پنهان کنید


تصویر۹

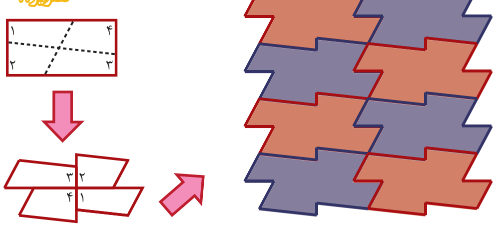
۹ شــما می‌توانید نقاط اولیه (A تا M) را آشــکار کنید و بــا تغییر آن‌ها هر شــکلی را که می‌خواهید ایجاد کنید. مثلاً در تصویر ۱۰ هنرمند از نقشه و پرچم ایران الهام گرفته است.


تصویر۱۰

ب) برش متوازی‌الاضلاع

یکی دیگر از روش‌های ایجاد شــکل‌های «پوشــا» برش متوازی‌الاضلاع اســت. توجه کنید که مســتطیل، لوزی و مربع هم نوعی متوازی‌الاضلاع هســتند. در این روش یک متوازی‌الاضــلاع را مانند تصویر ۱۱ برش می‌دهیم و مثل شــکل زیرش قطعــات را کنار هم می‌چینیم. این شــکل می‌تواند سطح را بپوشاند.

تصویر۱۱



۱ یک فایل جدید جئوجبرا باز کنید. خطوط شــبکه و محورهــای مختصات را پنهان کنیــد و نام‌گذاری را روی «تنها برای نقاط جدید» (New Points only) قرار دهید.

۲ طبق تعریف، متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی است که اضلاع روبه‌روی آن با هم موازی‌اند. بنابراین:

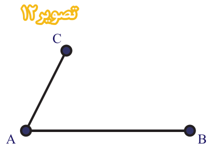
۲ـ۱. با ابزار «**پاره‌خط**» (Segment) (ســتون سوم، آیکون دوم) دو پاره‌خط از یک نقطه رسم کنید (تصویر ۱۲).

۲ـ۲. با ابزار «**خط موازی**» (Parallel line) (ستون چهارم، آیکون دوم) از نقطهٔ C خطی موازی AB و از نقطهٔ B خطی موازی AC رسم کنید (تصویر ۱۳).

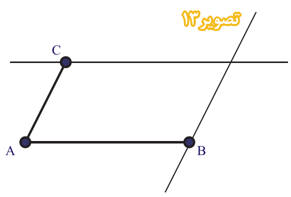
۲ـ۳. بــا ابزار «**نقطهٔ تقاطع**» (Intersect) (ســتون دوم، آیکون چهارم) محل تقاطع این دو خط را مشــخص کنید. سپس خط‌ها و پاره‌خط‌ها را پنهان کنید (تصویر ۱۴).

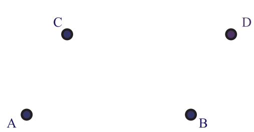
۲ـ۴. با ابزار «چندضلعی» متوازی‌الاضلاع را رســم کنید (تصویر ۱۵).

تصویر۱۲

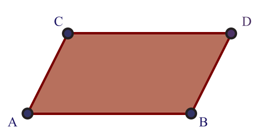


تصویر۱۳





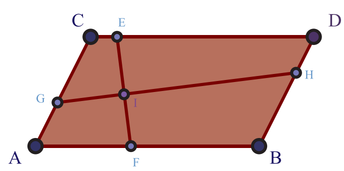
تصویر۱۴



تصویر۱۵

متوازی‌الاضلاعی که به این ترتیب ساخته می‌شود، یک متوازی‌الاضلاع واقعی است! یعنی با تغییر و جابه‌جایی نقاط آن، همچنان متوازی‌الاضلاع باقی می‌ماند، چون از روی تعریف ساخته شده است. امتحان کنید!

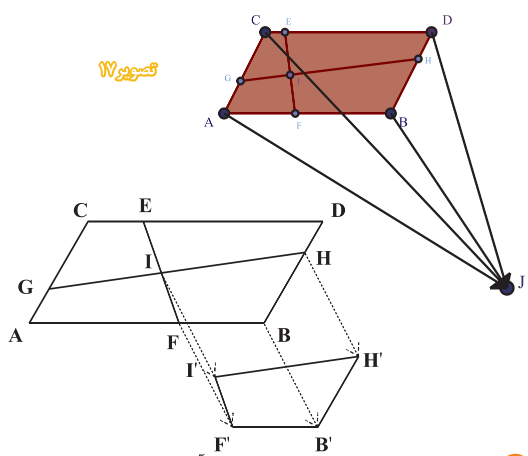
۳ حالا وقت برش است. پاره‌خطی رسم کنید که دو سر آن روی اضلاع بالا و پایین باشند. همین‌طور پاره‌خطی که دو سر آن روی دو ضلع بغل باشند. محل برخورد این دو پاره‌خط را مشخص کنید (تصویر ۱۶).



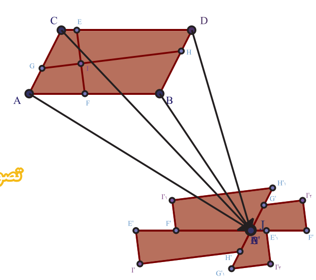
تصویر۱۶

۴ حالا هر ۴ قسمت را با ابزار چندضلعی مشخص کنید؛ یعنی چهارضلعی‌های CEIG، DHIF، BFIH و AFIG.

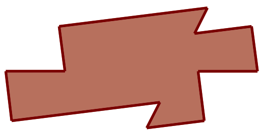
۵ با ابزار «**نقطه**» (Point) آیکون (ستون دوم، آیکون اول) نقطه‌ای بیرون متوازی‌الاضلاع ایجاد کنید. سپس از هر رأس متوازی‌الاضلاع برداری به این نقطه وصل می‌کنیم (تصویر ۱۷).

تصویر۱۷


۶ حالا هر قطعه را با برداری که از آن قطعه شروع می‌شود، انتقال دهید (تصویر ۱۸).

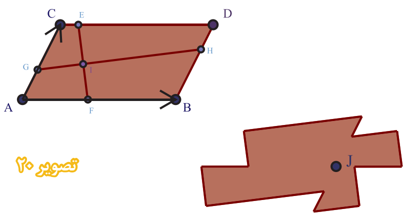

تصویر۱۸

۷ با رأس‌های چندضلعی تولید شده یک چندضلعی جدید درست کنید (تصویر ۱۹).


تصویر۱۹

۸ قبل از ادامهٔ کار، شکل را کمی خلوت می‌کنیم به این منظور تمام نقاط به جز نقاط اصلی (A تا J)، تمام بردارها، همهٔ چهارضلعی‌ها به جز متوازی‌الاضلاع اولیه را پنهان کنید.

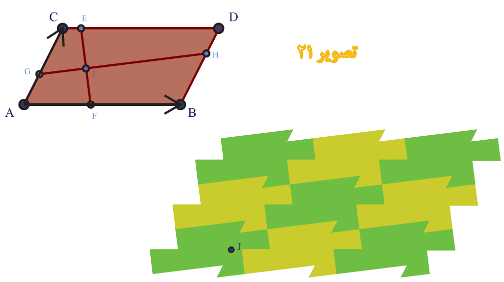
۹ حالا بردارهای AB و AC را رسم کنید (تصویر ۲۰).


تصویر ۲۰

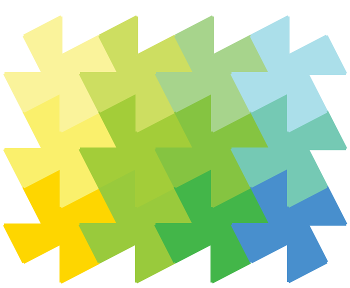
۱۰ چندضلعی نهایی را با بردار AB چند بار به سمت راست منتقل کنید.

۱۱ سپس همهٔ چندضلعی‌های ایجاد شده را با بردار AC چند بار به سمت بالا منتقل کنید.

با جابه‌جایی نقطهٔ J می‌توانید کل شکل را جابه‌جا کنید. شکل را طبق میلتان رنگ کنید (تصویر ۲۱).


تصویر ۲۱

با جابه‌جایی نقاط، شکل‌های زیبایی حاصل می‌شوند. نمونهٔ تصویر ۲۲ یکی از آن‌هاست.

تصویر ۲۲


پی‌نوشت‌ها:
1. Tessellation
2. Options
3. Labeling
4. No new objects
5. Polygon
6. Midpoint or Center
7. Rotate around Point
8. Vector
9. Translate by Vector
10. Move
11. File
12. New File

یک مسئله

داود معصومی مهوار

قرار است یک دوره مسابقهٔ کشتی برگزار شود. می‌خواهند این دوره از مسابقات تک حذفی باشد. یعنی هر کشتی‌گیر با یک باخت از دور بیرون برود. همچنین می‌خواهند هر مسابقه داوری جدید داشته باشد و هیچ داوری دو تا از مسابقه‌های این دوره را داوری نکند. اگر ۴۷ نفر کشتی‌گیر برای این دوره ثبت نام کرده باشند، برای داوری چند نفر لازم است؟ **مسئله‌ای با عدد کوچک‌تر را بررسی می‌کنیم.** فرض می‌کنیم تنها ۷ کشتی‌گیر داریم. ابتدا در سه مسابقه ٦ نفر با هم مسابقه می‌دهند. سه برنده و یک نفر که استراحت کرده می‌مانند. این چهار نفر در دو مسابقه با هم مبارزه می‌کنند. تا حالا ۵=۳+۲ مسابقه داشته‌ایم اکنون دو نفر بالا می‌آیند و مسابقهٔ نهایی برگزار می‌شود. پس جمعاً ۶ مسابقه انجام می‌شود و ۶ داور مختلف نیاز داریم. **تعداد کشتی‌گیرها را کمی بیشتر می‌کنیم و به ۱۰ می‌رسانیم.** ابتدا ۵ مسابقه داریم تا ۵ نفربرنده بشوند و بالا بیایند. یک نفر استراحت می‌کند و ۴ نفرشان در دو مسابقه شرکت می‌کنند و برنده‌ها و استراحت کننده ۳ نفر خواهند شد. تا اینجا ۷=۵+۲ مسابقه داشته‌ایم. دو نفر از ۳ نفر مسابقه می‌دهند و یک نفر استراحت می‌کند. تا حالا ۸=۷+۱ مسابقه داشته‌ایم. برنده و استراحت‌کننده، بازی نهایی را انجام خواهند داد. پس در مجموع ۹=۸+۱ مسابقه داریم و به همین تعداد داور نیاز داریم. با بررسی‌های دیگر می‌بینیم که برای ۱۴ کشتی‌گیر در مجموع ۱۳ مسابقه و طبیعتاً ۱۳ داور نیاز داریم و همین‌جور اگر ۲۳ کشتی‌گیر داشته باشیم، ۲۲ مسابقه و در نتیجه ۲۲ داور لازم داریم. بسیار شگفت‌انگیز شد! به نظر می‌رسد اگر ۴۷ کشتی‌گیر داشته باشیم، ۴۶ مسابقه باید انجام شود و ۴۶ داور نیاز داریم. اما چگونه این مطلب را ثابت کنیم؟ **به جای تمرکز روی تعداد بازی‌ها یا داورها بد نیست به تعداد بازنده‌ها توجه کنیم.** اگر a تا کشتی‌گیر داشته باشیم، روشن است که پس از پایان مسابقه‌ها $a-1$ نفر بازنده داریم که از دور مسابقه بیرون رفته‌اند و شخص برنده کسی است که همهٔ مسابقه‌های خود را برده و اصلاً باخت نداشته است. اما موضوع مهم این است که در هر مسابقه دقیقاً یک بازنده وجود دارد. هر کسی که می‌بازد و از دور بیرون می‌رود، ممکن است که بردهایی نیز داشته باشد. توجه به این بردها کار شمارش را سخت می‌کند. یعنی در هر مسابقه یک برنده و یک بازنده هست. پیگیری برنده‌ها (چنان که در بخش نخست، برای حس کردن مسئله انجام دادیم) کاری پرزحمت است. اما هیچ شکّی نیست که دست آخر تعداد بازنده‌ها $a-1$ است و هر کدام از این بازنده‌ها درست در یک مسابقهٔ منحصربه‌فرد باخته‌اند. یعنی هیچ مسابقه‌ای دو تا بازنده نداشته است. همین مطلب راه‌حل ما را استوار می‌کند. پس برای باخت $a-1$ نفر درست $a-1$ مسابقه لازم است و برای $a-1$ مسابقه نیز $a-1$ داور نیاز خواهیم داشت. **پس برای مسابقاتی با ۴۷ کشتی‌گیر، دقیقاً به ۴۶= ۱−۴۷ مسابقه و داور نیاز داریم.**

یک راه‌حل

باهم مسئله حل کنیم

جعفر اسدی گرمارودی

در دور مقدماتی جام جهانی فوتبال، تیم‌ها در گروه‌های چهار تیمی با هم مسابقه می‌دهند که در هر مسابقه تیم برنده ۳ امتیاز، بازنده صفر امتیاز و در صورت تساوی، هر کدام از دو تیم یک امتیاز کسب خواهند کرد. در مطلب «حساب‌وکتاب فوتبالی» در همین شماره می‌توانید اطلاعات بیشتری کسب کنید.

یک

حالتی را بیان کنید که سه تیم در یک گروه چهارتیمی ۶ امتیاز کسب می‌کنند؟

دو

آیا حالتی هست که در آن هر چهار تیم گروه، ۴ امتیاز کسب کنند؟

سه

اگر در یک گروه چهارتیمی، سه تیم ۳ امتیاز کسب کنند، چگونه این حالت رخ داده است؟

پاسخ‌ها در وبلاگ اختصاصی مجله:
weblog.roshdmag.ir/borhanrahnamaiee

مربع هر عددی را پیدا کن!

سلام، نام من **مهدی دهقانیان** است. ۱۳ ساله‌ام از کرمان، دانش‌آموز **«دبیرستان علامه حلی ۲»**.
من روشی را کشف کرده‌ام که مربوط می‌شود به عددهای مربعی مثل ۱۴۴، ۱۶۹، ۱۹۶، ۲۲۵، ۲۵۶ و ...
من می‌توانم با استفاده از این فرمول، عدد مربعی بعد از یک عدد مربعی مشخص را به دست آورم. مثلاً می‌توانم مربع عدد ۱۱۲ را که ۱۰۰ تا بعد از عدد ۱۲ است و می‌دانم که $۱۴۴=۱۲^۲$، به سادگی به‌دست آورم که می‌شود: $۱۲۵۴۴=۱۱۲^۲$.

روش کار

الف) اطلاعات مورد نیاز برای این فرمول

۱. یک عدد مربعی یعنی $x^۲$ مثل ۱۴۴
۲. جذر آن عدد مربعی یعنی x مثل ۱۲
۳. فاصلهٔ عدد بعد از x که مربع آن را می‌خواهیم یعنی b مثل ۱۰۰ تا بعد از ۱۲.

ب) مراحل انجام کار

مرحلهٔ اول: x را در دوبرابر b ضرب می‌کنیم:

$$x\times ۲b=۱۲\times ۲۰۰=۲۴۰۰$$

مرحلهٔ دوم: حاصل مرحلهٔ اول را با $b^۲$ جمع می‌کنیم:

$$(x\times ۲b)+b^۲=۲۴۰۰+۱۰۰۰۰=۱۲۴۰۰$$

مرحلهٔ آخر: حاصل مرحلهٔ دوم را با $x^۲$ جمع می‌کنیم:

$$((x\times ۲b)+b^۲)+x^۲=۱۲۴۰۰+۱۴۴=۱۲۵۴۴$$

این عدد، مربع (مجذور) مورد نظر ماست.

چرا روش مهدی درست کار می‌کند؟
مهدی به کمک $x^۲$، حاصل $(x+b)^۲$ را پیدا کرده است. در درس‌های مربوط به عبارت‌های جبری خوانده‌اید که:

$$\begin{aligned}(x+b)^۲&=(x+b)(x+b)\\&=x^۲+xb+bx+b^۲\\&=x^۲+۲xb+b^۲\end{aligned}$$

بنابراین اگر $x^۲$ را بدانیم، برای اینکه بتوانیم مجذور عدد $x+b$ را محاسبه کنیم، طبق ضرب بالا، باید به $x^۲$، مقدارهای $۲xb$ و $b^۲$ را اضافه کنیم.

گزارشی ازفعالیت‌های دانش‌آموزان در مدرسه‌های متوسطهٔ اول شهرستان بروجرد در دههٔ ریاضیات

ریاضیات در ده روز

سپیده چمن‌آرا

سال‌ها پیش، در سال ۱۳۷۹ «انجمن ریاضی ایران» اول تا دهم آبان‌ماه را دههٔ ریاضیات اعلام کرد تا در این ۱۰ روز، در جاهای گوناگون از جمله در مدرسه‌ها، فعالیت‌هایی برای «عمومی کردن ریاضیات» انجام شود. توجه به عمومی کردن ریاضیات فعالیتی جهانی بود که در آن سال، معادل سال ۲۰۰۰ میلادی در سراسر دنیا آغاز شد، به طوری که سال ۲۰۰۰ را «سال جهانی ریاضیات» اعلام کردند. از آن زمان نزدیک به ۱۷ سال می‌گذرد. این فعالیت‌ها در مدرسه‌ها چند سالی برقرار بود. ولی خودِ من خیلی وقت بود که دیگر نام دههٔ ریاضیات را از جایی نمی‌شنیدیم، تا اینکه...

دهم آبان امسال، برای تهیهٔ گزارشی برای مجله، به شهر بروجرد رفته بودیم و متوجه شدیم که در بعضی از دبیرستان‌های دورهٔ اول متوسطهٔ این شهر، برای بزرگداشت دههٔ ریاضیات فعالیت‌هایی توسط دانش‌آموزان انجام شده است.

مدرسه‌های فعال

دبیرستان‌های دورهٔ اول متوسطه که به مناسبت دههٔ ریاضیات فعالیت داشتند و دبیران ریاضی آن‌ها عبارت‌اند از:

۱. دبیرستان تیزهوشان شهید بهشتی، آقای محمدرضا کشفی.
۲. دبیرستان دخترانه شاهد، خانم‌ها فرانک گودرزی، لیلا فولادوند و آزاده معظمی.
۳. دبیرستان تربیت، خانم‌ها باقری و معظمی.
۴. دبیرستان فرزانگان، خانم‌ها مهرنوش خنجریان، الهام اسدی و وحیده چوبکار، با همکاری خانم‌ها مهرنوش صمیمی‌فر و اشرف همتی.
۵. دبیرستان شهدای عاشورا، خانم لیلا گلبادی.
۶. دبیرستان کوثر، خانم یارمحمدی.
۷. دبیرستان توحید، خانم‌ها الهام بیرجندی و آذر اکبری.
۸. دبیرستان حزب الله، خانم‌ها سوسن یاراحمدی و زهرا گلبادی.
۹. دبیرستان نرگس، خانم سرور مارابی.
۱۰. دبیرستان محدثه، خانم‌ها آزاده شعبانپور، آذر اکبری و سوسن یاراحمدی.

با دیدن عکس‌های این فعالیت‌ها که کارهای دانش‌آموزان را نشان می‌دهند، متوجه می‌شوید که هر دانش‌آموزی به فراخور توان، علاقه و امکاناتش، کاری در دهۀ ریاضی انجام داده است؛ از تزئین یک کیک با علائم ریاضی گرفته تا طراحی و ساخت دستگاهی که یک مستطیل را دوران می‌دهد تا یک استوانه را در فضا جارو کند. گرچه تزئین کیک و مواد خوراکی با علائم ریاضی، یک فعالیت ریاضی روزانه نیست، اما به خاطر بیاوریم که یکی از هدف‌های دهۀ ریاضیات، آشتی دادن عموم مردم با ریاضیات بوده است. همین که دانش‌آموزان داوطلبانه و با علاقه، کاری برای ریاضیات انجام بدهند، هر قدر هم که ریاضی نباشد، خوب است. هرچند اگر از این انرژی و اشتیاق، به‌صورت هدفمند و هدایت شده استفاده شود، به مراتب بهتر خواهد بود.

گزارش زیر را خبرنگار افتخاری، **زینب چنگ‌مریم**، از فعالیت‌های مدرسۀ خودشان برایمان ارسال کرده است.

«به نام آفریدگار علم»

سلام دوستان خوبم،

من دانش‌آموز دبیرستان تعالی تربیت در شهرستان بروجرد هستم.

چند وقتی به دهۀ ریاضی مانده بود که همۀ ما از مسئولان گرفته تا دانش‌آموزان مدرسه به تکاپو افتادیم.

من و دوستانم، خانم **گیوکی** معاونت محترم مدرسه، خانم **سلطانی‌راد** مدیر زحمتکشمان، خانم **سربندی**، معاون دوست‌داشتنی و خانم **معظمی** معلم ریاضی مهربان برای برگزاری برنامه‌ای جذاب که در شأن مدرسه‌مان باشد، تلاش کردیم. بالاخره تصمیم گرفتیم صفحۀ بردار و مختصات بزرگی را روی زمین حیاط مدرسه رسم کنیم و مسابقه‌ای را که خانم معظمی طراحی کرده بود، اجرا کنیم. جالب است بدانید که ایدۀ این بازی برای اولین بار توسط ما اجرا شد! خیلی هم مرتب و زیبا به اجرا درآمد.

دوباره مانند پارسال دوستانم گروه‌بندی شدند. برای خودمان و مهمانمان صندلی چیدیم، مجری انتخاب کردیم، سؤال طراحی کردیم و این برنامه در آخرین روز دهۀ ریاضی اجرا شد.

در آن روز هم تعدادی از هم‌مدرسه‌ای‌هایم با دستور مسئولان با پوشیدن لباس‌های محلی تلفیقی از فرهنگ، هنر، دانش و ریاضی را به نمایش گذاشتند و مدرسه میزبان مسئولان اداره بود.

خانم **زهرا سلطانی‌راد**، مدیر مدرسۀ تربیت، درخصوص بزرگداشت این دهه در مدرسه اظهار داشت:

«دهۀ ریاضیات بهترین فرصت برای معرفی درس ریاضیات است. ریاضیات در زندگی روزمره پیوسته جریان دارد. باید کاربرد ریاضی را در زندگی درک کرد تا درس ریاضی خسته‌کننده و نفرت‌انگیز نباشد. باید بدانیم بهترین ورزش فکری در مسائل ریاضی نهفته است. ما در مدرسه با هدف عمومی کردن آموزش ریاضی سعی در ایجاد نگرشی نوین و کارامد در درک مسائل ریاضی داریم.

به امید روزی که دانش‌آموزانی تربیت کنیم که تفکر و اندیشه‌شان بر مبنای منطق ریاضی باشد.»

تشکر و قدردانی / ۱. از آقای **علی قاسمی‌کیا**، سرگروه ریاضی متوسطۀ اول بروجرد برای ارسال اطلاعات و تعدادی از عکس‌های گزارش سپاسگزاریم. ۲. عکس‌های دبیرستان‌های تربیت و توحید توسط آقای **حامد ترابی گودرزی** گرفته شده است. ۳. از خانم **مهرنوش صمیمی‌فر** که عکس‌های مربوط به دبیرستان فرزانگان را در اختیار ما قرار گذاشتند سپاسگزاریم.

بازی‌های اندرویدی

بیست ۲۰۴۸ چهل و هشت

2048

AndroidGames

زهرا صباغی / کیمیا هاشمی

یکی از بازی‌های معروف این روزها بازی ۲۰۴۸ است. این بازی از یک صفحهٔ ۴*۴ تشکیل شده است. در ابتدا دو کاشی با اعداد روی آن‌ها در صفحه وجود دارد. شما باید با حرکت دادن کاشی‌ها،عددهای مشابه را با هم جمع کنید تا به عدد بزرگ‌تر برسید. عددهای موجود در بازی، توان‌های ۲ هستند.

یک راه موفقیت در این بازی آن است که بزرگ‌ترین عدد را در گوشهٔ صفحه نگه دارید.

بازی دیگری مشابه ۲۰۴۸ وجود دارد به نام «۲۰۴۸ فیبوناچی» (۲۰۴۸ fibonancci). صفحهٔ این بازی مشابه بازی ۲۰٤۸ است، با این تفاوت که در این بازی باید عددهای دنبالهٔ فیبوناچی را با هم جمع کنید تا به عددهای بزرگ‌تر برسید. دنبالهٔ فیبوناچی چنین است:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳٤، ...

و هر عدد از جمع دو عدد قبلی به دست می‌آید.

اکنون به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

۱. فرض کنید بعد از هر بار ترکیب کردن دو کاشی، عددی که به صفحهٔ بازی اضافه می‌شود، عدد ۲ است:

- وقتی عدد ۳۲ را ساختیم، حداکثر مجموعاً چند بار عدد ۲ در صفحه ظاهر شده است؟ (با فرض اینکه در ابتدای بازی هم دو کاشی ۲ در صفحهٔ بازی بوده است).
- تا ساخته شدن عدد ۳۲، حداکثر مجموعاً چند عدد در صفحهٔ بازی ظاهر می‌شود؟ (با فرض اینکه عددها را به‌طور مناسبی چیده‌ایم و بعد از ظاهر شدن هر عدد توانسته‌ایم آن را با عدد دیگری جمع کنیم).
- اگر بخواهیم بزرگ‌ترین عددی که در صفحهٔ بازی است، از ۱۴۷ بزرگ‌تر باشد، چند بار باید خانهٔ ۱۶ را در صفحهٔ بازی ببینیم و با یک خانهٔ ۱۶ دیگر جمع کنیم؟

۲. حال فرض کنید هر بار بعد از ترکیب کردن دو کاشی، عددی که در صفحهٔ بازی ظاهر می‌شود، همان عددی است که با ترکیب کردن کاشی‌ها ساخته‌ایم:

- اگر در ابتدای بازی فقط دو کاشی ۲ در صفحه وجود داشته باشد، برای ساختن عدد ۲۵۶ به چند بار جمع کردن احتیاج داریم؟
- فرض کنید دو نفر با هم در این بازی رقابت می‌کنند، اما قانون ظاهر شدن عدد جدید برای نفر اول مطابق سؤال یک است و برای نفر دوم مطابق توضیحات سؤال دو بعد از اینکه هر دو نفر ۸ بار شاهد ظاهر شدن عدد جدیدی در صفحهٔ بازی بودند، بزرگ‌ترین عدد صفحهٔ بازی نفر دوم چند برابر بزرگ‌ترین عدد صفحهٔ بازی نفر اول است؟

توجه داشته باشید:

۱. عددهای نوظهور ۲ یا ۴ هستند.

۲. دو عدد یکسان را اگر بتوانیم کنار هم بچینیم، حذف می‌شوند و مجموع آن دو باقی خواهد ماند.

۳. با کلیدهای حرکتی ↑، ↓، →، ← می‌توانیم همهٔ عددها را تا حدی که جا هست و امکان دارد، حرکت بدهیم.

۳. با توجه به تعداد کاشی‌های صفحهٔ بازی در تصویر مقابل ، بزرگ‌ترین عددی که در این بازی می‌توان ساخت، چه عددی است؟

فکر بکر!

باز هم یکی دو قُلُپ فکر

داود معصومی مهوار

در شمارهٔ ۲ مجله، بازی نیمه کارهٔ زیر را بررسی کردیم:

پاسخ	رنگ ۴، رنگ ۳، رنگ ۲، رنگ ۱	حدس
○	🔴 🟤 🟡 🟡	۱
○ ○ ●	🔵 🟠 🟢 🟢	۲
○ ○ ● ●	🟢 🔵 🟠 🟤	۳

یادآوری

پاسخ حدس نخست یک دایرهٔ سفید است. یعنی تنها یکی از چهار رنگ حدس نخست در ترکیب اصلی هست. ولی جای آن درست نیست. پاسخ حدس دوم یک دایرهٔ سیاه و دو دایرهٔ سفید است. یعنی یکی از رنگ‌های این حدس در ترکیب اصلی هست و در جای درست نیز نشسته است و دو تا از رنگ‌های این حدس در ترکیب اصلی هستند، ولی جای آن‌ها درست نیست. و بالاخره پاسخ حدس سوم دو دایرهٔ سیاه و دو دایرهٔ سفید است. یعنی دو تا از رنگ‌های این حدس در ترکیب اصلی هستند و در جای درست نیز نشسته‌اند. و دو تا از رنگ‌های این حدس در ترکیب اصلی هستند ولی جای آن‌ها درست حدس زده نشده است.

همان‌جا فهمیدیم که ترکیب اصلی یکی از ۴ حالت روبرو است.

رنگ ۴، رنگ ۳، رنگ ۲، رنگ ۱	حالت
🟠 🔵 🟢 🟤	۱
🟤 🔵 🟠 🟢	۲
🔵 🟢 🟠 🟤	۳
🟢 🟠 🔵 🟤	۴

می‌توانیم خیلی ساده یکی از این حالت‌ها، مانند حالت ۱ را پیشنهاد بدهیم. اگر ترکیب واقعی همان بود که هیچ. وگرنه بر اساس پاسخی که می‌گیریم، بررسی‌های جدیدی می‌کنیم تا ترکیب واقعی را پیدا کنیم. ولی چرا باید یک حالت را به تصادف انتخاب کنیم؟ بهتر نیست کمی فکر کنیم؟ اصلاً چرا باید یکی از همین حالت‌ها را پیشنهاد بدهیم؟ تعجب نکنید. همراهی کنید. فرض کنید که ترکیب زیر را پیشنهاد بدهیم:

رنگ ۴، رنگ ۳، رنگ ۲، رنگ ۱
🔵 🟢 🔵 🟤

حالا بررسی می‌کنیم که اگر ترکیب اصلی،
هر یک از حالت‌های ۱ تا ۴ باشد، این ترکیب پیشنهادی چه
پاسخی خواهد گرفت.

پاسخی که می‌گیریم	ترکیب پیشنهادی ما	رنگ ۴، رنگ ۳، رنگ ۲، رنگ ۱	حالت واقعی فرضی
● ○ ○	🟤 🔵 🟢 🔵	🟤 🟢 🔵 🟠	۱
○ ○ ○	🟤 🔵 🟢 🔵	🟢 🟠 🔵 🟤	۲
● ● ●	🟤 🔵 🟢 🔵	🟤 🟠 🟢 🔵	۳
● ● ○	🟤 🔵 🟢 🔵	🟤 🔵 🟠 🟢	۴

خیلی خوب شـــد! چهار پاسخ مختلف می‌گیریم. به کمک این چهار پاسخ می‌توانیم ترکیب واقعی را پیدا کنیم. مثلاً اگر پاســخی که گرفتیم سه دایرهٔ ســیاه بود، ترکیب واقعی حالت ۳ است و اگر سه دایرهٔ سفید پاسخ ما بود، ترکیب واقعی حالت ۲ است و ...

در اینجا ترکیب پیشنهادی یکباره طرح و بررسی شد، اما نگفتیم که چگونه می‌توان به آن دست یافت و آن را پیدا کرد. پیدا کردن چنین پیشـــنهادی خود مسـئله‌ای جالب است. ولی این بار تنها خواستیم وجود آن را یادآوری کنیم. و روی یافتن آن تمرکز نکردیم.

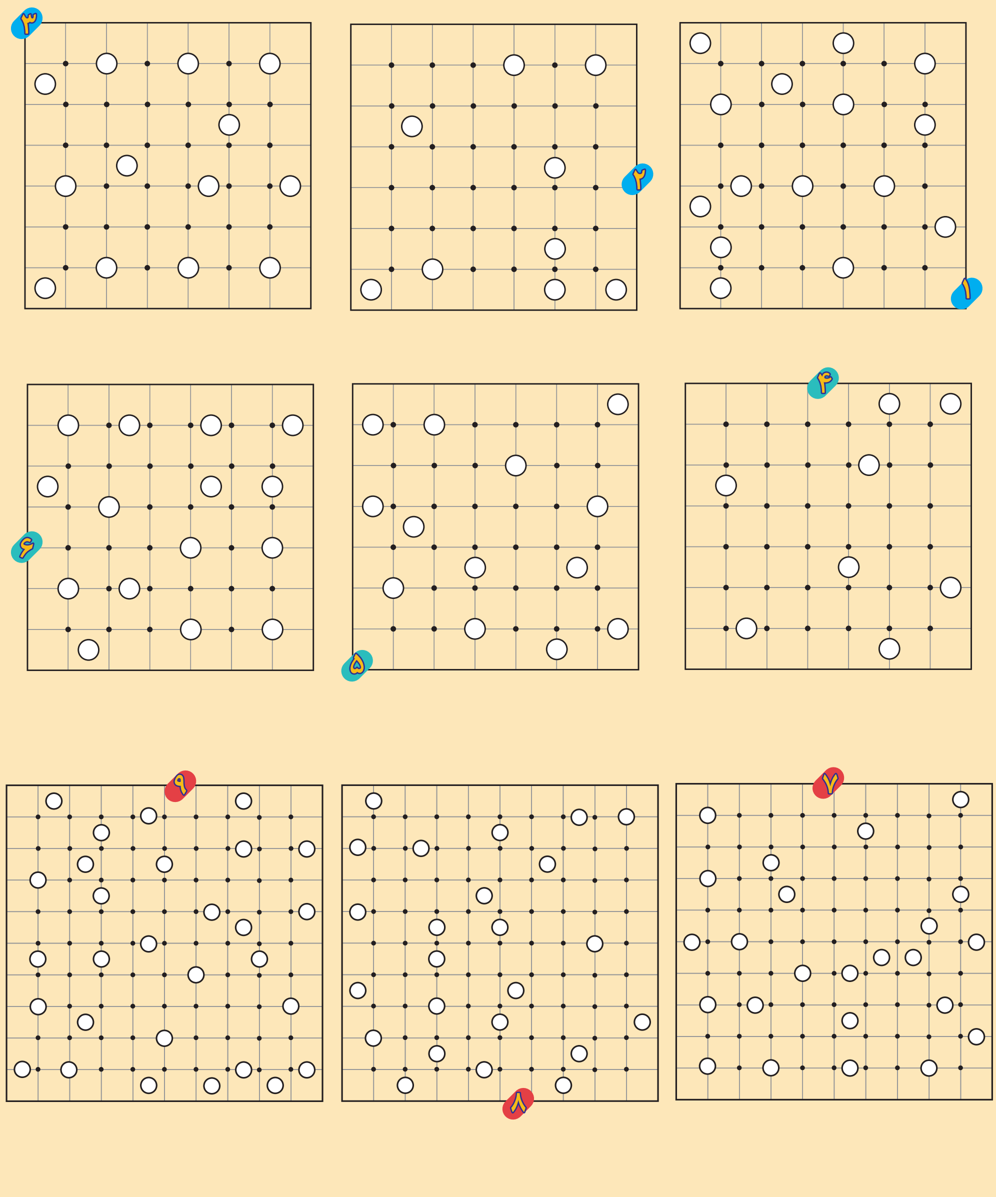
فکر کنید: پس از داشـــتن حدس۱ تا حدس۳، در روش بالا ما قطعاً می‌توانیم طی حدس۴ و حدس۵ ترکیب واقعی را از بین ۴ حالت ۱ تا ۴ پیدا کنیم. اما این کار واقعاً خوب است؟ همیشه بهترین کار است؟ در چه صورت انتخاب یکی از حالت‌های ممکن کار بهتری است؟

Galaxies

پازل حل کنیم

● محدثه کشاورز اصلانی

قوانین / ● شما باید با وصل کردن نقطه‌ها به هم (فقط به‌صورت افقی و عمودی)، تعدادی کهکشان رسم کنید. ● کهکشان‌ها نباید با هم تقاطع داشته باشند و باید در نهایت کل صفحه را پر کنند. ● مرکز هر کهکشان با یک دایره توخالی مشخص شده است. ● شکل کهکشان باید نسبت به مرکز آن متقارن باشد.



تعداد بیشتری از این پازل‌ها را می‌توانید به صورت رایگان در سایت «krazydad.com» پیدا کنید.
پاسخ پازل‌ها را در وبلاگ اختصاصی مجله به آدرس «weblog.roshdmag.ir/borhanrahnamaiee» ببینید.

ماشین توانا و حساب توان‌ها

شراره تقی‌دستجردی

ماشین‌حساب دوست‌داشتنی من

سلام دوستان. مطالب با عنوان «ماشین‌حساب دوست‌داشتنی من» با این هدف اصلی نوشته می‌شوند که نشان دهند، چگونه می‌توان به کمک ماشین‌حساب، به جای درگیر شدن در انجام محاسبات، روی جواب‌های به‌دست آمده متمرکز شد و راحت‌تر به نتایج هر فعالیت رسید. فعالیتی که این بار می‌خواهیم به کمک دوست خوبمان ماشین‌حساب انجام دهیم، باز هم توجه به توان‌های عددهاست. اگر در مورد سؤالاتی که در شمارهٔ قبلی پرسیده شده بود، فکر و نتایج آن‌ها را یادداشت کرده باشید، می‌توانید از آن‌ها استفاده کنید. و اما فعالیت! ابتدا از شما می‌خواهم که مانند چند نمونه دادهٔ نوشته شده در جدول زیر، حاصل‌جمع دیگر توان‌های ۳ و ۷ را به‌دست آورید. **دو نکتهٔ مهم در مورد بخش‌پذیری‌ها:** اگر دو عدد m و n هر دو بر عددی مانند a بخش‌پذیر باشند، حاصل‌جمع آن‌ها هم بر a بخش‌پذیر است (به‌راحتی با فاکتورگیری می‌توانید درستی این ادعا را نشان دهید). ✓ در صورتی که هیچ‌کدام از دو عدد m و n بر a بخش‌پذیر نباشند، بسته به عددهای m، n و a، حاصل‌جمع m+n ممکن است بر a بخش‌پذیر باشد یا نباشد! ✓ در مورد مجموع توان‌های ۳ و ۷ هم، چنین است. هیچ‌یک از توان‌های ۳ و هیچ‌یک از توان‌های ۷ به تنهایی بر ۱۰ بخش‌پذیر نیستند (به‌راستی چرا؟) اما حاصل‌جمع آن‌ها برای برخی از توان‌ها بر ۱۰ بخش‌پذیر است و برای برخی دیگر بخش‌پذیر نیست. اولین چیزی که در جدول به چشم می‌خورد این است که برای توان‌های فرد، حاصل $۷^{n}+۳^{n}$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است. اما چرا؟ آیا واقعاً حدس ما درست است؟ اگر فکر می‌کنید این ادعا درست است، آن را ثابت کنید. در غیر این صورت عدد فردی پیدا کنید که این خاصیت را نداشته باشد. سؤال‌های دیگری را نیز می‌توان پرسید: ● به غیر از عددهای ۳ و ۷ آیا می‌توانید دو عدد دیگر پیدا کنید که برای برخی از توان‌هایشان، مجموع آن‌ها بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد؟ ● کدام عددهای بخش‌پذیر بر ۱۰ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد توان‌دار، با توان‌های یکسان نوشت؟ برای مجموع سه عدد توان‌دار با توان‌های برابر چطور؟ ● .... (شما سؤال طرح کنید!)

۱۰	$۳^{۱}+۷^{۱}$
۵۸	$۳^{۲}+۷^{۲}$
۳۷۰	$۳^{۳}+۷^{۳}$
۲۴۸۲	$۳^{۴}+۷^{۴}$
۱۷۰۵۰	$۳^{۵}+۷^{۵}$
...	$۳^{۶}+۷^{۶}$
...	$۳^{۷}+۷^{۷}$
...	$۳^{۸}+۷^{۸}$
...	$۳^{۹}+۷^{۹}$
...	$۳^{۱۰}+۷^{۱۰}$
...	$۳^{۱۱}+۷^{۱۱}$
...	$۳^{۱۲}+۷^{۱۲}$
...	$۳^{۱۳}+۷^{۱۳}$
...	$۳^{۱۴}+۷^{۱۴}$
...	$۳^{۱۵}+۷^{۱۵}$

دوستان عزیز، لطفاً نتایج جالبی را که به‌دست می‌آورید، برای ما بفرستید.

نقطه خط شکل
شکل مناسب

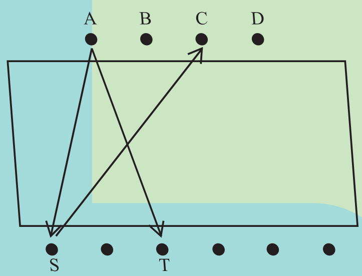
آیا شکل فقط مال هندسه است؟

یادش به خیر! آقای انسان‌دوست معلم ریاضی ما بود. اما نه، درواقع معلم انسانیت، اندیشه و سبک زندگی ما بود. همیشه می‌گفت: «ریاضیات به ما همهٔ این‌ها را می‌دهد، چون ریاضیات به ما منطق و طرز فکر می‌دهد.» کلاس درسش برعکس تصور ما که کلاس ریاضی باید همیشه خشک و یکنواخت باشد، سرشار از شادی، لذت و سرگرمی بود. نمی‌فهمیدیم کی تمام می‌شد. خیلی وقت‌ها به جای آنکه یک موضوع ریاضی را مستقیماً درس بدهد، با یک داستان، معما یا بازی به آن گریز می‌زد و با ایجاد پرسش ما را هم درگیر مسئله می‌کرد. طوری که وقتی همهٔ ما گرم بحث بودیم، بدون آنکه متوجه شویم، چیزهای زیادی می‌آموختیم. در این بخش اگر خدا بخواهد، می‌خواهم در هر شماره از مجله یکی از خاطراتم را از این کلاس‌ها برایتان بگویم.

باز هم با خاطره‌ای از کلاس معلم خوبم، آقای **انسان‌دوست** پیشتان آمده‌ام. آقای انسان‌دوست وارد کلاس شد و بعد از آرام شدن کلاس گفت: «بچه‌ها جلسهٔ قبل را که یادتان نرفته؟ در آن جلسه دربارهٔ توجه به یک مسئله از زاویه‌های متفاوت گفتم و اینکه گاهی مسئله‌ها راه‌حل‌های کوتاهی دارند که با توجه به آن‌ها و دقت به جوانب مختلف به آن‌ها می‌رسیم. آخر جلسه چند تمرین به شما دادم. حالا می‌خواهم به یکی از آن‌ها اشاره کنم تا کمی دربارهٔ آن بحث کنیم و به یکی از مهم‌ترین ابزارهای حل مسئله اشاره‌ای کرده باشیم. این ابزار مهم، رسم شکل‌های مناسب است. ممکن است فکر کنید رسم شکل فقط برای حل مسئله‌های هندسه اهمیت دارد. اما مسئله‌های زیادی هم هستند که هیچ ارتباطی با هندسه ندارند و با رسم شکل خیلی ساده‌تر حل می‌شوند. یک نمونه همان مسئلهٔ اول جلسهٔ قبل است». و بعد صورت مسئله را روی تخته نوشت:

چهار معلم و تعدادی دانش‌آموز در دو طرف یک میز نشسته‌اند. یک سینی که در آن ۲۸ عدد شیرینی وجود دارد، روی میز است. هر معلم یک شیرینی به هر یک از شاگردان خودش می‌دهد و هر دانش‌آموز یک شیرینی به معلمانی که معلم خودش نیستند، می‌دهد. در پایان همهٔ شیرینی‌ها تمام می‌شود. چند دانش‌آموز روبه‌روی معلم‌ها نشسته بودند؟

بعد از کمی مکث، آقا رو به بچه‌ها ادامه داد: «احتمالاً خودتان به مسئله فکر کرده‌اید و شاید هم آن را به روش‌هایی حل کرده باشید. اما امروز می‌خواهم به روش جالب و ساده‌ای براساس رسم شکل آن را با هم حل کنیم». بعد آقا روی تخته این شکل را کشید و توضیح داد:



«چهار معلم را با چهار نقطه این طرف میز نشان داده‌ایم. A، B، C و D معلم‌ها هستند. دانش‌آموزان هم که تعداد آن‌ها را نمی‌دانیم، این طرف میز هستند. هر معلم به بعضی از این دانش‌آموزان یک شیرینی می‌دهد. به کدام یک از آن‌ها؟ آن‌ها که شاگردش

کلاس ریاضی آقای انسان‌دوست

هوشنگ شرقی

باشـــند. مثلاً A به S و T که شـــاگردش بوده‌اند، شیرینی داده اســـت. اما هر دانش‌آموز فقط به معلم‌هایی که معلم خودش نبوده‌اند، شـــیرینی داده اســـت. مثلاً S به C که معلمش نبوده شیرینی داده است. به این ترتیب یک نتیجهٔ مهم می‌گیریم. آن چیســـت؟ راهنمایی‌تان می‌کنم: به پیکان‌هایی که بین نقطه‌های این طرف میز و آن طرف رسم شده‌اند، دقت کنید».

بابک گفت: «پیکان‌هایی که از بالا به پایین رسم شده‌اند، معرف شیرینی دادن معلم به دانش‌آموزند. ولی پیکان‌هایی که از پایین به بالا رسم شده‌اند، نشان‌دهندهٔ شیرینی دادن دانش‌آموز به معلم‌اند».

آقا گفت: «خب اینکه واضح است! دیگر چه؟!»

مدتی در کلاس ســـکوت برقرار شـــد و باز آقای انسان‌دوست گفت: «ببینید بچه‌ها! نقطه‌های بالا به جای معلم‌ها و نقطه‌های پایین به جای دانش‌آموزان گذاشته شده‌اند. هر معلم به دانش‌آموزان خودش شیرینی می‌دهد، ولی از آن‌ها شیرینی نمی‌گیرد. هر دانش‌آموز هم به معلمانی که معلم خودش نیستند، شیرینی می‌هد (و از آن‌ها نمی‌گیرد). پس هیچ پیکانی دوطرفه نیست. حالا شما دو نقطهٔ دلخواه، یکی در بالا و دیگری در پایین را در نظر بگیرید. یکی مربوط به یک معلم دلخواه و یکی مربوط به یک دانش‌آموز دلخواه است. پس...»

در اینجا **افشین** دستش را بالا برد و گفت: «آقا فهمیدم! بین هر دو نقطهٔ دلخواه بالا و پایین حتماً یک پیکان رسم می‌شود!»

آقا گفت: «آفرین! اما چرا؟»

و افشین ادامه داد: «چون یکی از آن‌ها به دیگری شیرینی می‌دهد. اگر دانش‌آموز، شاگرد آن معلم باشد، معلم به او شـــیرینی می‌دهد و اگر نباشد، خودش به او شیرینی می‌دهد. پس بالاخره یک پیکان، از بالا به پایین یا از پایین به بالا بین آن دو نقطه رسم می‌شود».

آقـــا گفت: «آفرین! و دقیقاً هم یک پیکان. پس بین تمام نقاط بالا و تمام نقاط پایین، یک به یک، بین هر دو نقطه فقط یک پیکان به یک سمت باید رسم شود. و تعداد پیکان‌ها مساوی تعداد شیرینی‌هاست (هر پیکان معادل یک عدد شیرینی است). اما تعداد پیکان‌ها چندتاست؟»

سهراب گفت: «تعداد معلم‌ها ضرب در تعداد دانش‌آموزان، یعنی چهار ضرب در تعداد دانش‌آموزان».

و آقا گفت: «احسنت! چهار ضرب در تعداد دانش‌آموزان می‌شود بیست و هشت! پس تعداد دانش‌آموزان برابر است با هفت تا!»

بچه‌ها از راه‌حل سادهٔ آقا خیلی خوششان آمد و از آقای انسان‌دوست خواستند یک نمونهٔ دیگر از این مسئله‌ها بگوید.

آقـــا گفت: «یک نمونهٔ دیگر برایتان دارم که می‌گذارم خودتان حل کنیـــد، ولی کمی راهنمایی‌تان می‌کنم: فاصلهٔ هوایی از شهر A تا شهر B برابر ۳۰ کیلومتر، از شهر B تا شهر C برابر ۸۰ کیلومتر، از شهر C تا شهر D برابر ۲۳۶ کیلومتر، از شهر D تا شهر E برابر ۸۶ کیلومتر، و از شهر E تا شهر A برابر ۴۰ کیلومتر است. فاصلهٔ هوایی از شهر E تا شهر C چند کیلومتر است؟»

بچه‌ها ســـکوت کردند و آقا ادامه داد: «یک نمودار بکشـــید و شهرها را با نقطه‌هایی نمایش دهید. فاصله‌ها را هم با عددهای داده شده مشخص کنید. یعنی هر دو شهر را با پاره‌خط‌هایی به هم وصل کنید. با توجه به عددها حقیقتی جالب را در مورد وضعیت این شهرها متوجه می‌شوید و از آنجا به راحتی می‌توانید جواب را که مساوی ۱۵۰ کیلومتر است، پیدا کنید».

این نمونه هم شبیه به نمونهٔ قبلی است. به آن هم فکر کنید: «فاصلهٔ بین دو شهر A و B برابر ۱۹۴ کیلومتر، فاصلهٔ بین دو شهر B و C برابر ۱۱۶ کیلومتر، فاصلهٔ بین دو شهر C و D برابر ۴۵۱ کیلومتر و فاصلهٔ بین دو شهر D و A برابر ۱۴۱ کیلومتر است. فاصلهٔ بین دو شهر B و D چقدر است؟»

وقتی در منزل این دو مسئله را حل کردم، اهمیت رسم شکل را در حل مسئله‌ها بهتر درک کردم. درس‌های آقای انسان‌دوست فراموش‌نشدنی هستند!

جعبه کاغذی

پری حاجی‌خانی

در این شماره می‌خواهیم با هم یک جعبهٔ هدیهٔ هندسی و زیبا با استفاده از کاغذ و تا بسازیم، برای این کار نیاز به ۸ برگ کاغذ اوریگامی داریم؛ ۴ برگ برای در جعبه و ۴ برگ برای خود جعبه، البته باید توجه داشته باشیم که کاغذی که برای در جعبه استفاده می‌کنیم باید ۲ میلی‌متر بزرگ‌تر باشد تا بتوانیم در جعبه را ببندیم. برای ساخت جعبه مراحل را باهم پیش می‌رویم.


۱

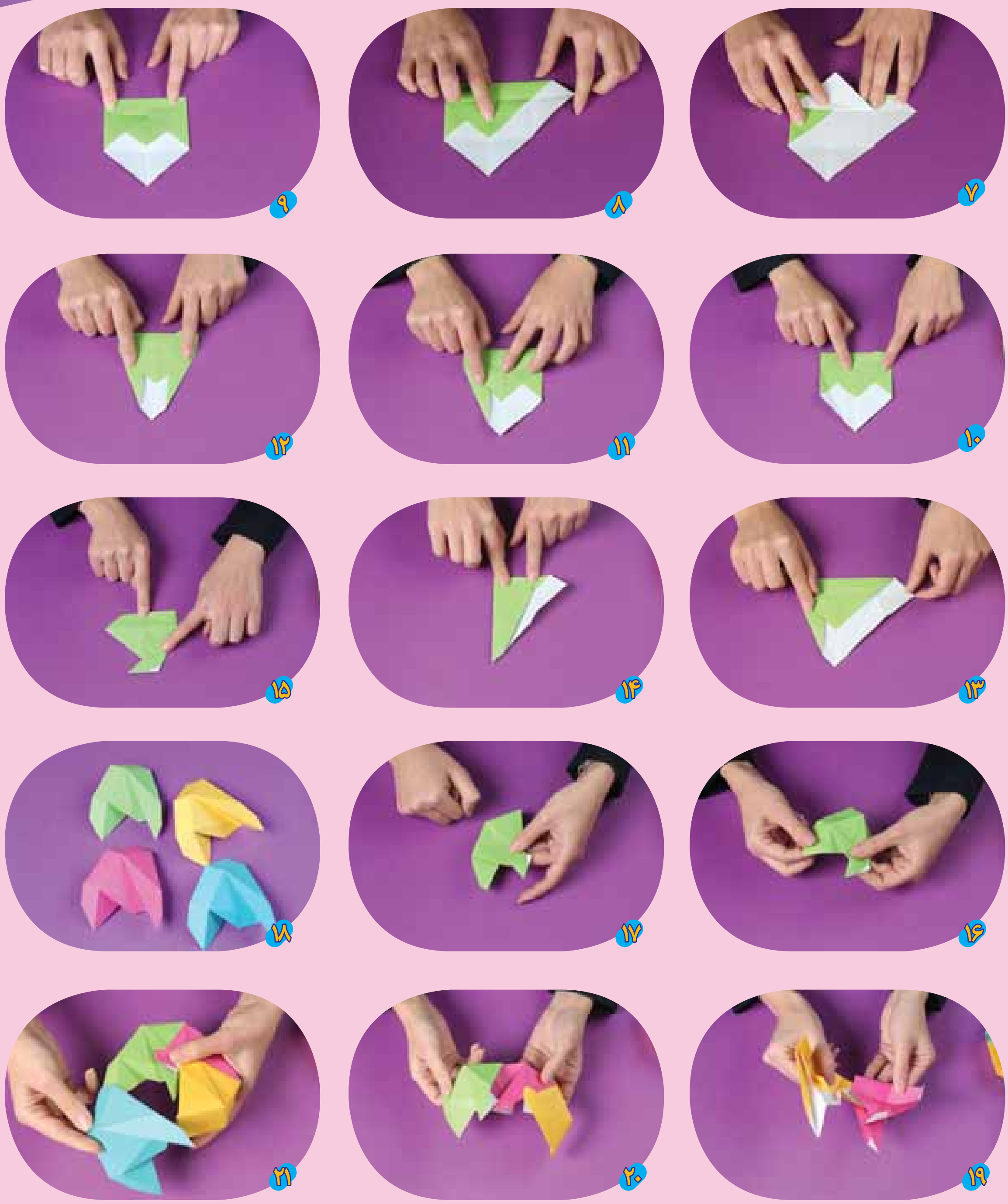

۲


۳


۴


۵


۶


۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱

ذخیره آب برای سال نو

ژما جواهری‌پور

«و جعلنا من الماء کل شئ حی»(الأنبیاء/۳۰)

آب یعنی زندگی. زنده بودن تمام موجودات روی کرهٔ زمین به این عنصر حیاتی وابسته است. آیا می‌دانید آب مصرفی و شرب ما در خانه از کجا تأمین می‌شود؟ آب سالم و گوارایی که از طریق لوله‌کشی به دست ما می‌رسد، راهی طولانی را طی کرده است. چاه‌ها، چشمه‌ها و رودها آب مصرفی ما را تأمین می‌کنند. بدون اغراق این آب شیرین شاید یکی از گران‌بهاترین کالاهای روی زمین است. در کشوری خشک و نیمه‌بیابانی مثل ایران که منابع محدودی از آب وجود دارد، استفادهٔ بهینه از منابع آب زیرزمینی و جاری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. آیا تا کنون به موارد مصرف آب در منزل خود توجه کرده‌اید ؟ آب برای نوشیدن، برای پخت وپز، برای نظافت، برای شست‌وشو و... ما ایرانیان رسوم بسیار زیبایی داریم، از جمله «خانه تکانی» که در روزهای نزدیک به عید نوروز انجام می‌دهیم. زدودن غباراز خانه و تمیزی، بوی عید را دل‌انگیزتر می‌کند. بازیگر نقش اول نظافت در خانه‌های ما «آب» است. آیا می‌توانید محاسبه کنید چقدر آب برای خانه تکانی مصرف می‌کنیم؟ صحبت از محاسبه شد. باید یک بار دیگر به سراغ کتاب ریاضی خود بروید. محاسبه و اندازه‌گیری یکی از جنبه‌های اساسی دانش ریاضی است. آیا می‌دانید اگر یک دقیقه شیر آب آشپزخانه باز باشد، چقدر آب مصرف می‌شود؟ شما در ریاضی با محاسبهٔ سطح و حجم آشنا شده‌اید. برای مثال، می‌دانید حجم یک استوانه برابر است با حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع استوانه. به این ترتیب آیا می‌توانید محاسبه کنید در یک وان استوانه‌ای حمام چند مترمکعب آب وجود دارد؟ به چه روشی می‌توانید محاسبه کنید که در یک روز خانه تکانی چقدر آب مصرف کرده‌اید؟ برای این کار اول باید آستین‌ها را بالا بزنید و در خانه تکانی کمک کنید. به خانوادهٔ خود بگویید که می‌خواهید برای محاسبهٔ میزان آب مصرفی، حداقل دو روز را در کنارشان به نظافت خانه بپردازید. بعد باید با روش‌های خلاقانه، میزان مصرف آب را برای هر فعالیت، مثل شستن ظرف، گردگیری، شست‌وشوی سرویس بهداشتی و دیگر موارد خانه تکانی محاسبه کنید. در واقع باید حجم آب مصرف‌شده را محاسبه کنید که با روش‌های گوناگون می‌توانید این کار را انجام دهید. در حین کار به این موضوع توجه کنید که آیا می‌توانید از روش‌هایی استفاده کنید که آب کمتری مصرف شود و در روزهای بعدی خانه تکانی، این روش‌ها را به کار ببرید و ببینید چقدر آب برای سال آینده ذخیره کرده‌اید؟ در مسابقهٔ این شمارهٔ مجله شرکت کنید.

مسابقه

جایزه بزرگ

درششمین مسابقه از سلسله مسابقات **ریاضیات و محیط زیست** مجله رشد برهان متوسطه اول، قصد داریم با شما و با استفاده از دانش محاسبه و اندازه‌گیری و هندسه، هم در خانه تکانی نوروز به اهالی منزل کمک کنیم، هم در مصرف آب صرفه‌جویی کنیم.

جدول زیر را برای هریک از فعالیت های خانه تکانی تکمیل کنید.

	کار و فعالیت خانه تکانی	میزان مصرف آب
روز اول		
روز دوم (پس از صرفه جویی)		
توضیح روش ها		

مشخصات شرکت کننده در مسابقه		
	نام و نام خانوادگی	
	پایه تحصیلی	
	نام استان، شهرستان یا روستا	
	نام مدرسه، آدرس و تلفن	
	نام و شماره تماس رابط	

شاخص های ارزیابی: ۱. کامل بودن توضیحات؛ ۲. روش‌های خلاقانه در محاسبات؛ ۳. دقت در محاسبات (خطای کمتر)؛ ۴. تعداد جدول‌های ارسال شده و تنوع فعالیت‌ها؛

شرایط مسابقه

* جدول را به تعداد فعالیت‌های خانه تکانی در منزل، تکمیل کنید. * جدول را به صورت فایل «pdf» ذخیره کنید و از طریق «ایمیل» به دفتر مجله رشد برهان ریاضی متوسطه اول بفرستید: borhanmotevaseteh1@roshdmag.ir

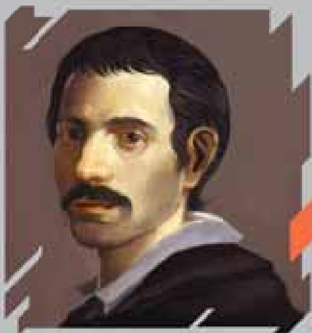
* در صورت نیاز، فایل «word» جدول را در وبلاگ اختصاصی مجله بیابید: weblog.roshdmag.ir/borhanrahnamaiee

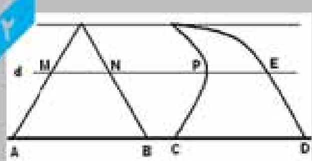
* مهلت ارسال پاسخ: ۱۳۹۷/۱/۳۰

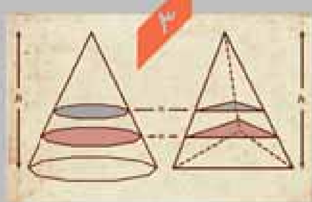
اصل کاوالیری

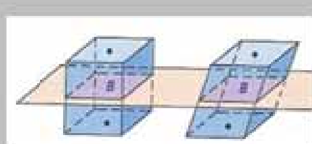
بوناوِنتورا فرانچسکو کاوالیری، ریاضی‌دان نام‌دار ایتالیایی در قرن هفدهم میلادی بود. او کارهای بسیار مهمی روی مسائل نور و حرکت در فیزیک انجام داد. علاوه بر این‌ها، شهرت او به‌خاطر ایجاد اصلی در هندسه دربارهٔ سطح و حجم شکل‌ها و معرفی لگاریتم است. بعضی‌ها معتقد هستند که او با تأثیر از دانشمند مشهور، گالیله، روش «غیرقابل تقسیم‌ها» را در هندسه به‌وجود آورد که آن را در اثر بزرگ خود در سال ۱۶۳۵، با عنوان «هندسه، با طرح تازه‌ای بر اساس غیرقابل تقسیم‌های پیوسته»، مطرح کرد. این روش در واقع پایه و اساس یک شاخهٔ بسیار مهم در ریاضیات، یعنی «حساب انتگرال» شد.

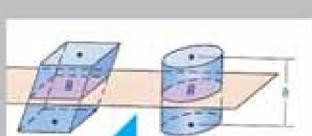
منظور کاوالیری از غیرقابل تقسیم‌ها، وترهای موازی در درون شکلی روی صفحه، یا صفحه‌های موازی در درون جسم‌های فضایی بود. او برای مقایسهٔ شکل‌های روی صفحه و جسم‌های فضایی، مفهوم «مجموع همهٔ غیرقابل تقسیم‌ها» را مطرح کرد که تمام سطح یا فضای جسم را پر می‌کردند.


۱

۲


۳





۴

اصل کاوالیری دربارهٔ مساحت

فرض کنید در یک صفحه، قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط راست قرار گرفته باشند و هر دو شکل در یک طرف آن خط باشند. اگر هر خطی موازی قاعده‌های دو شکل در آن‌ها قطعه‌هایی با طول‌های مساوی ایجاد کند، مساحت‌های آن دو شکل برابر است.

اصل کاوالیری دربارهٔ حجم

دو شکل فضایی و صفحه‌ای را که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند، در نظر بگیرید. اگر هر صفحه‌ای موازی با قاعده‌ها که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل، دارای مساحت‌های برابر باشند، آن‌گاه این دو شکل فضایی حجم یکسان دارند.

تصاویر: ۱/بوناونتورا کاوالیری ۲/اصل کاوالیری درباره مساحت ۳و۴/ اصل کاوالیری درباره حجم

منبع:
سایت دانش‌نامهٔ ویکی‌پدیا