



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی



دوره بیست و ششم

شماره ۹۶

آبان ۱۳۹۵

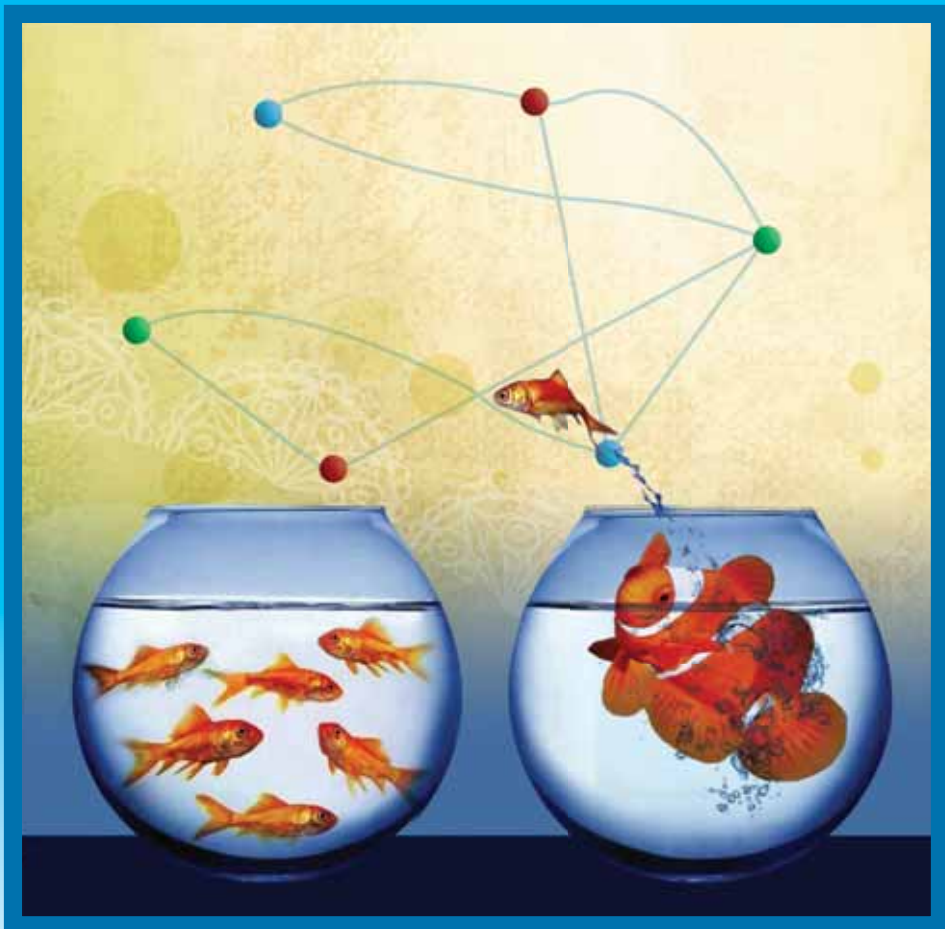
۴۸ صفحه

۱۰۰۰۰ ریال



پیماسک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

www.roshdmag.ir



آموزش ترجمه متون ریاضی

مسائل برای حل

اعداد فانتزی شاد!

چند معمای تصویری، یا بازی با تصاویر!

ماهی‌ها در گراف آکواریوم!

الفبای ترسیم

پروفسور ابوالقاسم غفاری (۱۳۹۲-۱۲۸۶)

تنها ایرانی حاضر در پروژه پرواز آپولو به کره ماه

نام آوران
عرصه
ریاضی معاصر
ایران

زنده‌یاد ابوالقاسم غفاری در ۲۵ خرداد ۱۳۸۶، در محله سرچشمه تهران زاده شد. پدرش میرزا حسین خان غفاری دبیر ارشد اداره کارگزینی وزارت عدلیه (دادگستری) بود. تحصیلات ابتدایی‌اش را در دبستان «اشرف» آغاز کرد و با ادامه تحصیل در دارالفنون، در سال ۱۳۰۷ خورشیدی موفق به اخذ دیپلم متوسطه خود شد. سپس با شرکت در آزمون اعزام محصل به



خارج از کشور و قبولی در آن، برای ادامه تحصیل به فرانسه اعزام شد و در دانشگاه «نانتس» به تحصیل در رشته ریاضی پرداخت. وی در سال ۱۳۱۱ با درجه کارشناسی از آنجا فارغ التحصیل شد و سپس به دانشگاه «سوربن» رفت و پس از دریافت سه مدرک عالی در فیزیک، نجوم و آنالیز ریاضی، به تحصیل فیزیک و ریاضی در دانشگاه «پاریس» مشغول شد.

استاد غفاری در اسفند ۱۳۱۵ به ایران بازگشت و از فروردین ۱۳۱۶ به تدریس در دانش‌سرای عالی (دانشگاه تهران) پرداخت. هم‌زمان نیز در اداره جغرافیای ارتش به‌عنوان استاد حضور می‌یافت و کارهای ماندگاری در این حوزه انجام داد. در سال ۱۳۲۵ به دعوت کالج سلطنتی لندن به آنجا رفت و در سال ۱۳۲۷ دکترای ریاضیات خود را از دانشگاه لندن دریافت کرد و ۱۲ سال در آنجا به کارهای پژوهشی در زمینه ریاضیات و فیزیک پیشرفته پرداخت. در سال ۱۳۳۹ استاد غفاری به دعوت دانشگاه هاروارد به آمریکا عزیمت کرد و پژوهش‌های جامعی را در آنجا در اطراف معادلات دیفرانسیل و حل مسائل دینامیک گازی انجام داد. در همین دوران هم به عضویت «مؤسسه مطالعات پیشرفته پرنستون» درآمد.

در سال ۱۳۴۱، ابوالقاسم غفاری به ایران بازگشت و به تدریس معادلات دیفرانسیل در دانشگاه تهران مشغول شد. شهرت پروفیسور غفاری چنان بود که در سال‌های دهه ۱۹۵۰ همکاری‌هایی در زمینه «تئوری وحدت میدان و الکترومغناطیس» با پروفیسور اینشتین انجام داد. در سال ۱۳۴۳ رساله‌ای را به دانشگاه واشنگتن ارائه کرد که زمینه‌ساز دعوت از او به ناسا (اسازمان هوا - فضای آمریکا) شد. چندی بعد او به پروژه عظیم آپولو پیوست که به انجام محاسباتی در زمینه پرواز موفقیت‌آمیز آپولو به ماه و بازگشت آن منجر شد. استاد غفاری در سال ۱۹۷۳ (۱۳۵۱) از ناسا بازنشسته شد و پژوهش‌های مستقلی را در زمینه کنترل مأموریت‌های بین‌سیاره‌ای آغاز کرد و موفق به دریافت نشان‌های علمی متعدد از سوی مقامات ایران و آمریکا در آن زمان شد. این استاد فرزانه ایرانی که با کارهای خود شهرتی جهانی یافته بود، علاوه بر نوشتن ۵ اثر تحقیقی در مورد ریاضیات نظری و عملی در آمریکا، انگلستان و فرانسه، سه کتاب مهم نیز تألیف کرد که به عنوان کتاب درسی در دانشگاه‌های معتبر جهان تدریس می‌شوند. در مقام و مرتبه این استاد بزرگ و کم‌نظیر همین بس که دکتر فیروز نادری، عضو ارشد ناسا که در حال حاضر در آنجا مشغول به تحقیق و از شاگردان اسبق زنده‌یاد پرویز شهریاری نیز هست، در مورد او می‌گوید: «غفاری غولی در جامعه علمی ایران بود.»

در سال‌های اخیر، زنده‌یاد ابوالقاسم غفاری، با وجود کهولت سن، حافظه‌ای استثنایی داشت و تمام خاطراتش را با جزئیات به یاد داشت که آن‌ها را در مصاحبه‌ای در اختیار خبرگزاری ایسنا قرار داد.

استاد غفاری، سه سال پیش در چنین روزهایی (۱۴ آبان ۱۳۹۲) در سن ۱۰۶ سالگی دارفانی را وداع گفت. یادش گرامی باد.

رشد

ریاضی

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و هشتم
- شماره پیاپی ۹۶
- آبان ۱۳۹۵
- شماره ۲
- صفحه ۴۸
- ۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیر مسئول: محمد ناصری
سر دبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی،
دکتر ابراهیم ریحانی،
احمد قندهاری،
میرشهرام صدر،
هوشنگ شرقی،
سید محمد رضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی پور،
دکتر محرم نژاد ایردموسی،
محمدعلی قربانی،
حسین کریمی،
محمود داوورزی،
احسان یارمحمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-
motevaseteh2
پیام گیر نشریات رشد:
۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۵
شمارگان:
۱۰۰۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)

حرف اول

روز جبر! / سر دبیر ۲

آموزشی

- ماهی ها در گراف آکواریم! / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۳
اعداد فانتزی و شاد! / عباس قلعه پور اقدم ۶
حل یک مسئله چالش برانگیز هندسه به سه روش / خدیجه اقدامی مقدم ۸
به استقبال سرشماری ۱۳۹۵ برویم! سرشماری (۲) / دکتر عین الله پاشا ۱۶
پای تخته! دکتر محرم نژاد ایردموسی ۲۶
آموزش ترجمه متون ریاضی / حمیدرضا امیری ۲۸
الفبای ترسیم / فریبا میرحسین زاده ۳۰
استدلال استقرایی و استقرای ریاضی (۲) / هوشنگ شرقی ۳۲
ریاضیات در چند دقیقه / غلامرضا یاسی پور ۳۶
مسائل برای حل ۳۸
حاصل ضرب جمله های دنباله هندسی متناهی / مراد کریمی شهیاروندی ۴۰
راهنمای حل مسائل ۴۱

ریاضیات در سینمای جهان

ایستگاه اعداد / احسان یارمحمدی ۲۰

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

- ایستگاه اول: چند معمای تصویری، یا بازی با تصاویر! / هوشنگ شرقی ۱۱
ایستگاه دوم: افسانه چهار برادر! ۲۵
ایستگاه سوم: لطیفه های ریاضی ۳۵

گفت و گو

میزگرد با مؤلفان کتاب های ریاضی پایه دهم (رشته ریاضی) از ترسیم تا تفکر! / هوشنگ شرقی ۱۲

پرسش های پیکارجو! ۲۹ - ۱۹ - ۱۰۰۵

با مخاطبان

پاسخ به نامه ها، ایمیل ها و ... ۴۶

پاسخ ها

پاسخ پرسش های پیکارجو! ۴۷
پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:
○ نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲)
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان ○ طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ● مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتما درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می توانید قصه ها، شعرها، نقاشی ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵-۱۵۸۷۵

تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

روز جبر!

«خدایی که محمد(ص) را روزگاری به پیامبری فرستاد، که پیوند مردم با پیامبران گسسته شده و حق ناشناخته مانده و...؛ پیامبری که با آمدنش کوردلان بینا شدند و گمراهان از هلاکت رهایی یافتند...، خدا بر محمد(ص) و خاندانش درود فرستد.»



جمشید کاشانی



ابوریحان بیرونی



خیام



ماهانی

این جملات را ریاضی‌دان مشهور، محمدابن موسی خوارزمی، در کتاب جبر و مقابله خود آورده است.

روز ۴ آبان‌ماه هر سال روز «بزرگداشت خوارزمی» (روز جبر) نام‌گذاری شده است. واژه «جبر»^۱ که امروزه به شاخه‌ای از ریاضیات اطلاق می‌شود، از نام همین کتاب خوارزمی گرفته شده است.

ترجمه کتاب خوارزمی با نام جمع و تفریق با عددهای هندسی به زبان لاتین باعث شد تا دستگاه عددی در اروپا از عددنویسی رومی (که بسیار ناتوان و محدود بود) به عددنویسی هندی - عربی تغییر یابد.

ریاضی‌دانان مسلمانی چون خوارزمی، جمشید کاشانی، ابوریحان بیرونی، خیام، ماهانی و... همواره در پیشرفت و تولید علم در ایران و جهان نقش بی‌بدیلی ایفا کرده‌اند و آثار و کتاب‌های ایشان همچنان مورد استفاده و تحقیق پژوهشگران قرار می‌گیرد و این خاصیت تولید علم است؛ همان چیزی که همواره مقام معظم رهبری بر آن تأکید داشته است. لذا بر همه شما دانش‌پژوهان و دانش‌آموزان است که در این راستا کوشا باشید و درس‌های ریاضی را که جزو درس‌های پایه‌ای برای تولید هر علمی از علوم تجربی محسوب می‌شود، فرا گیرید و برای اعتلای میهن اسلامی‌مان تلاش کنید. مؤید، سالم و شاداب باشید.

* پی‌نوشت‌ها:

1. Algebra

ماهی‌ها در گراف آکواریوم!

اشاره

جلسه قبل، دبیر ریاضیات گسسته مفاهیم اولیه گراف را توضیح داده و قرار بود امروز وارد موضوع جدیدی درباره گراف‌ها شویم. هر جلسه درس با حل چند مسئله شروع می‌شد و بچه‌ها داوطلبانه برای حل مسئله‌ها پای تخته می‌آمدند. مسئله اول شمارشی بود:

بقیه رأس‌ها چند حالت وجود دارد که مشابه قسمت

قبل برابر است با: $2^{\binom{n-1}{2}}$ حالت. پس در کل جواب

قسمت دوم برابر است با: $N_2 = \binom{n-1}{k} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}$.

جواب قسمت آخر هم برابر است با: $N_3 = 2^{\binom{n}{2}-1}$

چون ...

معلم حرف مهسا را قطع کرد و از بچه‌ها خواست که دلایل را خودشان در دفترشان بنویسند. معلم از مهسا تشکر کرد و برای مسئله دوم از بچه‌ها خواست که بیايند برای حل مسئله. اما صورت مسئله دوم:

مسئله ۲. ثابت کنید در میان هر n نفر، حداقل دو نفر

وجود دارند که تعداد آشنایانشان در میان همان جمع با هم برابر است.

مسئله ۱. چند گراف ساده از مرتبه n و با مجموعه رئوس

$V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ می‌توان تعریف کرد؟ در چندتای

آنها: $d(V_i) = k$ در چندتای آنها دو رأس V_1 و V_2 مجاور هستند؟

مهسا در حل مسئله‌های شمارشی قوی‌تر از بقیه بود و داوطلب شد که برود پای تخته.

♦ **مهسا:** بین n رأس، $\binom{n}{2}$ یال می‌توان رسم کرد.

برای هر کدام از این یال‌ها دو انتخاب داریم که در

گراف باشد یا نه. پس تعداد کل گراف‌های ساده

برابر است با: $N_1 = 2^{\binom{n}{2}}$. در قسمت دوم، باید ابتدا

k رأس مجاور V_1 را مشخص کنیم که $\binom{n-1}{k}$

انتخاب وجود دارد. بعد باید ببینیم برای یال‌های بین

می‌کنید که هر ماهی با کدام ماهی‌ها نمی‌تواند در یک‌جا باشد.

جدول ۱. هم‌زیستی ماهی‌ها

A	B	C	D	E	F
B, C	A, C, E	A, B, D, E	C, F	B, C, F	D, E

سؤالی که برای این دوست من مطرح است و از من خواست کمکش کنم، این بود که چند آکواریوم لازم دارد. من اول از شما می‌خواهم که مسئله را با مفهوم گراف مدل‌سازی کنید.

♦ **کیانا:** خانم هر نوع ماهی را در یک آکواریوم نگهداری کنیم؛ خلاص!

♦ **معلم:** بله، اما این جوری این دوست من باید همه حقوقش را بدهد برای خرید آکواریوم. در نظر داشته باشید که این دوست من هر ماه چند نوع ماهی جدید به مجموع ماهی‌هایش اضافه می‌کند!

♦ **آذر:** بهتر است هر نوع ماهی را با یک رأس در گراف نمایش دهیم. خانم این گراف را با اجازه شما من به نام «گراف ماهی‌ها» نام‌گذاری می‌کنم.

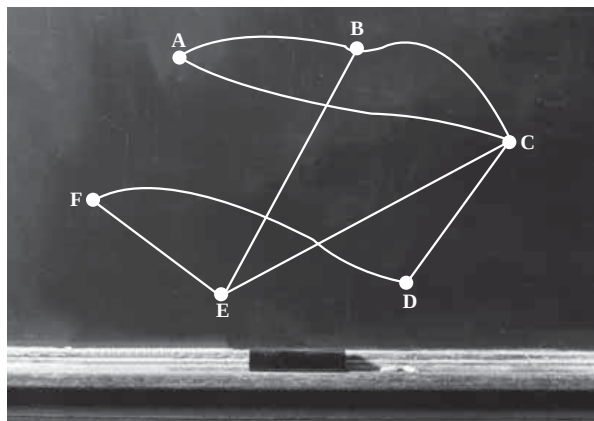
♦ **معلم:** آفرین! در جواب، رأس‌های گراف ماهی‌ها مشخص می‌شود. یال‌ها چی؟

♦ **زهره:** خانم می‌توانیم هر دو ماهی را که با هم مشکل دارند، با یک یال به هم وصل کنیم. من شکل گراف را کشیده‌ام. ببایم

روی تخته بکشیم؟

♦ **معلم:** بله، بفرمایید.

بعد زهره شکل زیر را روی تخته کشید که نمودار گراف ماهی‌هاست.



خیلی از بچه‌ها توانسته بودند مسئله را با مفهوم گراف، مدل‌سازی کنند، اما راه‌حلشان ناقص بود. آن‌ها حالا باید نشان می‌دادند در هر گراف ساده، دو رأس با درجه یکسان وجود دارد.

مرضیه مسئله را حل کرده بود و دستش را بلند کرد که بیايد پای تخته. معلم پرسید: «از چه راهی حل کردی؟»

و مرضیه که در گروه تئاتر هم فعال بود، شروع کرد به بال زدن! بچه‌ها با این حرکت آشنا بودند (اصل لانه کبوتر!!) و در واقع خانم معلم خودش اولین بار سر کلاس جبر و احتمال از این حرکت استفاده کرده بود. اما راه‌حل مرضیه:

♦ **مرضیه:** درجه هر رأس عددی است (صحیح) بین صفر و $n-1$ و این یعنی n حالت، اما درجه صفر و درجه $n-1$ نمی‌توانند با هم در یک گراف اتفاق بیفتند (چرا؟). در نتیجه $n-1$ حالت برای درجه هر رأس وجود دارد. اما گراف n رأس (کبوتر) دارد. در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری دو رأس با درجه برابر وجود دارند.

بنابراین اگر هر نفر را رأس یک گراف در نظر بگیریم و یال‌ها را آشنایی فرض کنیم، لاقل دو نفر هستند که تعداد آشنایانشان (تعداد یال‌ها - درجه رأس) یکسان است. راه‌حل مرضیه خیلی جالب بود و بچه‌ها هنوز درگیر مسئله بودند. خانم **مریم پرور** که پارسال معلم جبر و احتمال ما هم بود، خیلی خوشحال شد که مرضیه توانسته بود از مطالب گذشته استفاده کند. بعد از نشستن مرضیه معلم مسئله دیگری مطرح کرد و گفت که حل این مسئله جایزه دارد.

مسئله ۳. ثابت کنید که تنها دو گراف از مرتبه n وجود دارند که در آن‌ها دقیقاً دو رأس با درجه برابر وجود دارد و این دو گراف مکمل یکدیگر هستند.

خانم **مریم پرور** بعد از مکثی کوتاه از ما خواست که اول این دو گراف را پیدا کنیم. می‌خواستیم برویم سراغ تمرین بعدی که معلم نگاهی به ساعتش کرد و از بچه‌ها خواست که ادامه تمرین‌ها را بگذارند برای جلسه بعد. حتماً می‌خواست درس را شروع کند. چون نیم ساعت بیشتر از وقت کلاس نمانده بود.

♦ **معلم:** بچه‌ها امروز می‌خواهیم گراف‌ها را رنگ کنیم!

♦ **پروانه:** خانم این موضوع که تو کتاب نیست!

♦ **معلم:** بله، ولی موضوع جالبی است و شاید پاسخ این سؤال شما باشد که نظریه گراف کجاها کاربرد دارد. یکی از دوستان من علاقه زیادی به ماهی‌ها دارد و در خانه خود انواع ماهی‌ها را نگهداری می‌کند. او به تازگی شش نوع ماهی خریده است که آن‌ها را با حرف‌های A, B, ..., و F نام‌گذاری می‌کنیم. اما او نمی‌تواند همه این ماهی‌ها را در یک آکواریوم جای دهد. چون بعضی از آن‌ها طعمه دیگران خواهند شد. در جدول ۱ مشاهده

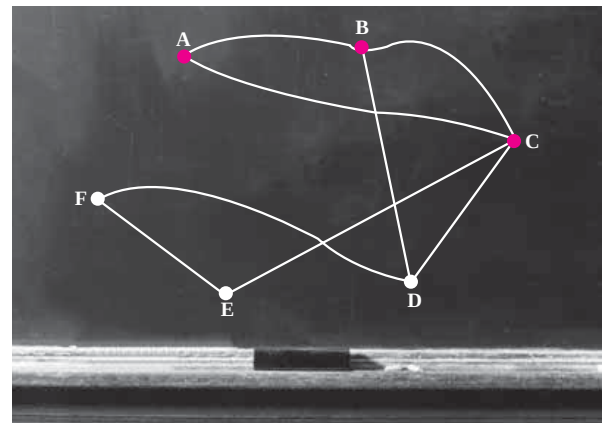
♦ **پریسا:** خانم پس آکواریوم‌ها چی شدند؟ مسئله اصلی تعداد حداقل آکواریوم‌ها برای نگهداری ماهی‌هاست که هنوز مشخص نیست.

♦ **معلم:** بله. تا اینجا ما مسئله را با یک گراف مدل‌سازی کرده‌ایم. حالا می‌توانیم مشخص کنیم که هر نوع ماهی (اینجا رأس‌ها) در چه آکواریومی باشد.

♦ **زهرا:** خانم سه نوع ماهی A، B و C در این گراف دوبه‌دو به هم وصل هستند. پس حداقل سه آکواریوم لازم داریم.

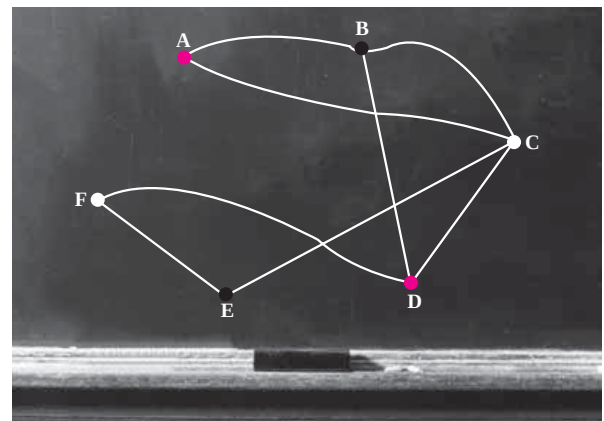
♦ **معلم:** آفرین زهرا. بیا ببیند آکواریوم‌ها را با رنگ رأس‌ها مشخص کنیم.

بعد معلم پای تخته رفت و سه رأس A، B و C را با سه رنگ متفاوت رنگ کرد.



♦ **زهرا:** خانم ماهی‌های نوع D کنار ماهی‌های نوع B و C نمی‌توانند باشند. پس بهتره آن‌ها را بریزیم تو آکواریوم آبی!

بچه‌ها رأس‌های E و F را هم خودشان رنگ کردند. معلم که دفتر بچه‌ها را یکی یکی نگاه می‌کرد، تأیید کرد که همه مسئله را کامل کرده‌اند. بعد هم رفت پای تخته و رنگ آمیزی رأس‌های گراف ماهی‌ها را تکمیل کرد.



♦ **معلم:** پس تعداد حداقل آکواریوم‌ها چی شد؟
♦ **تقریباً همه:** سه تا.

♦ **معلم:** بچه‌ها با رنگ آمیزی رأس‌ها و یال‌های گراف می‌توان مسائل جالبی را حل کرد که در اینجا شما یک نوع آن را دیدید. می‌خواستیم رأس‌های گراف را با کمترین تعداد رنگ به‌طوری رنگ کنیم که هر دو رأس مجاور هم‌رنگ نباشند.

این نوع رنگ آمیزی را معتبر می‌نامیم و تعداد حداقل رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ آمیزی معتبر گراف G را عدد رنگی G می‌نامیم. آیا مسئله برایتان جالب بود؟

♦ **بچه‌ها:** بله خانم.
♦ **من:** خانم «حدس بهزاد» چیست؟ به این موضوع ربطی دارد؟

معلم با تعجب مرا نگاه کرد و بعد پرسید که کجا حدس بهزاد را شنیده‌ام. پدرم استاد ریاضی دانشگاه بود و چند وقتی بود که از ۵۰ سالگی حدس بهزاد صحبت می‌کرد. توی خانه ما همه کنجکاو شده بودند که بدانند این حدس ریاضی چیست که هنوز کسی نتوانسته است آن را حل کند. ماجرا را که گفتم، همه فهمیدند که علت سکوت من (که بین بچه‌ها به گراف‌بست معروف بودم) در طول این جلسه چه بود!



زنگ خورد و خانم مریم‌پرور قول داد که در جلسات بعد اگر تست‌ها فرصتی باقی گذاشتند، حدس بهزاد را سر کلاس بگوید؛ شاید یکی از ماها توانستیم آن‌را حل کنیم!

پرسش‌های بیکارچو!

چند دوزنقه متساوی‌الساقین وجود دارد که طول‌های اضلاع و اقطار آن‌ها همگی اعداد اول باشند؟

(الف) ۰
(ب) ۱
(ج) ۲
(د) ۳
(ه) بی‌شمار

اعداد فانتزی و شاد!

ویژگی‌های جالب و سرگرم‌کننده برخی اعداد



اشاره

«نظریه اعداد» شاخه‌ای از دانش ریاضی است که جذابیت‌های خاص خود را دارد و نه تنها همواره مورد توجه ریاضی‌دانان بوده است، بخش‌هایی از آن (که به ویژگی‌های جالب برخی اعداد می‌پردازد)، برای عموم مردم به عنوان یک سرگرمی تلقی می‌شود و تا آنجا که بسیاری از آن‌ها را ساعت‌ها به تفکر واداشته است. در این مقاله سعی شده است به برخی از اعدادی که خصوصیات جالبی دارند پرداخته و گوشه‌ای از زیبایی‌های موجود در دنیای اعداد به نمایش گذاشته شود.

کلیدواژه‌ها: نظریه اعداد، متحابه، مقسوم‌علیه، عددهای قوی، عدد آشیلی، عدد خودشیفته

مقدمه

مربع هر رقم را به دست آورید. سپس آن‌ها را با هم جمع کنید.

$$4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$$

حال همین کار را با عدد جدید انجام دهید:

$$3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$

و دوباره:

$$1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

و سرانجام:

$$1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$$

چون به عدد یک رسیدید، پس ۴۴ عددی شاد است. شاد از آن نظر که به یک رسیده است!

به همین ترتیب هر وقت خواستید شاد بودن یک عدد را بیازمایید، فرایند بالا را اجرا کنید. اگر به یک رسیدید، عدد مورد نظر شاد است و اگر عدد شما هرگز به یک نرسید، ناشاد یا به اصطلاح غمگین است.

نکته: عددهای شاد زیادند. بین یک تا پنجاه، یازده عدد شاد وجود دارد. آن‌ها را پیدا کنید.

بزرگ‌ترین عدد شاد با رقم‌های غیر تکراری ۹۸۶۵۴۳۲۱۰ است. شاد بودن آن را بررسی کنید. همچنین به روش سعی و خطا می‌توانید نشان دهید که این بزرگ‌ترین عدد از این نوع (البته با ارقام غیر تکراری) است.

مطالعه عددها، طبقه‌بندی و سازماندهی آن‌ها به روش‌های متفاوت همیشه مورد توجه و علاقه و صحنه تلاش ریاضی‌دانان بوده است. عناوین متفاوتی از مجموعه‌های اعداد مانند طبیعی، صحیح، گویا، حقیقی، اصم، اول، متعالی، مثلثی و... گواهی بر این موضوع است. در راستای این تحقیقات، شاخه‌ای از دانش ریاضی با عنوان «نظریه اعداد» شکل گرفت که به شناخت ویژگی‌های اعداد و بررسی روابط بین اعداد صحیح می‌پردازد. این شاخه از دیرباز برای ریاضی‌دانان جاذبه‌های فراوان داشته و همواره پهنه بروز خلاقیت‌های آن‌ها بوده است. آغاز پیدایش این نظریه را باید در کارهای فیثاغورس^۱ (ریاضی‌دان سده ششم پیش از میلاد) و کاربردهای وسیع آن را در مخابرات و رمزنگاری جست‌وجو کرد. زیرمجموعه‌ای از این نظریه تحت عنوان «نظریه اعداد جالب و سرگرم‌کننده» ویژگی‌های جالب موجود در برخی عددها را بررسی می‌کند که شما می‌توانید با مطالعه این مقاله با گوشه‌ای از آن آشنا شوید.

عددهای شاد^۲

اگر دوست دارید اعداد شاد را بشناسید، باید اعمال زیر را به مرحله اجرا درآورید. به عنوان نمونه، عدد ۴۴ را در نظر می‌گیریم: در آغاز





* پی‌نوشت‌ها:

1. Pythagoras
2. Happy numbers
3. Narcissistic numbers
4. Powerfull numbers
5. Achilles
6. Amicable numbers
7. Fermat
8. Descartes

* منبع:

۱. شهریار، پرویز (۱۳۷۵). بخش‌پذیری در جبر. انتشارات مدرسه. تهران. چاپ سوم.
۲. تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رستگار، آرش (۱۳۷۵). آموزش هنر حل مسئله. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۳. راسخی کازرونی، محمد. اعداد جالب در ریاضیات و خواص آن‌ها.
۴. فائق، کاظم (۱۳۶۹). سرگرمی‌های ریاضی برای همه. نشر محمد. تبریز.
5. Andy, Martin (2013), 10fun examples of recreational number theory-list verse
6. Gardner, Martin (1973), mathematical puzzles and diversions (paper backed) pelican/penguin books, ISBN 0-14-020713-9

عددهای آشیلی که می‌توانید آن‌ها را بیازمایید: ۱۰۸، ۲۰۰، ۲۸۸، ۳۹۲، ۴۳۲، ۵۰۰ و ۶۴۸.

عددهای صمیمی^۶ (متحابه، دوست‌دار هم)

دو عدد صمیمی یکدیگر را بسیار دوست دارند، به‌طوری‌که با جمع کردن مقسوم‌علیه‌های واقعی (تمامی مقسوم‌علیه‌های یک عدد به غیر از خودش) هر کدام می‌توان به دیگری رسید. به‌عنوان نمونه زوج عدد صمیمی ۲۲۰ و ۲۸۴ را داریم:

مقسوم‌علیه‌های واقعی ۲۲۰ را با هم جمع می‌کنیم:

$$۱+۲+۴+۵+۱۰+۱۱+۲۰+۲۲+۴۴+۵۵+۱۱۰=۲۸۴$$

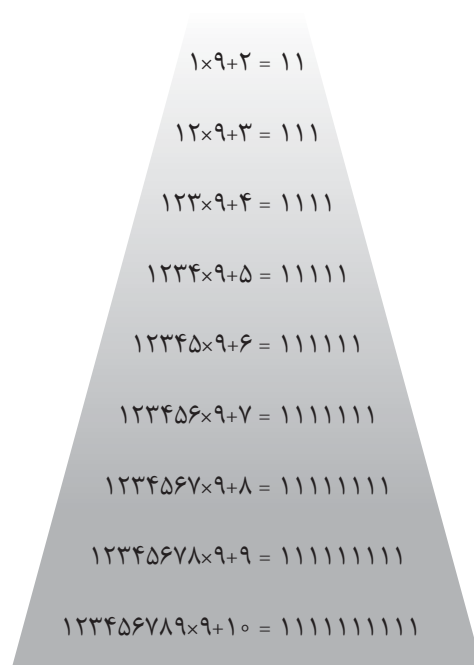
همین کار را با ۲۸۴ انجام می‌دهیم:

$$۱+۲+۴+۷+۱۴+۲۸=۵۵$$

نمونه‌های دیگر از عددهای صمیمی: (۱۱۸۴ و ۱۲۱۰)، (۲۶۲۰ و ۲۹۲۴) و (۵۰۲۰ و ۵۵۶۴).

این نوع از اعداد توسط فیثاغورس و شاگردان او کشف و مطالعه شده بود و تحقیقات بیشتر در طول قرون بعدی در این زمینه توسط فرما^۷، دکارت^۸ و یک نابغه ایرانی به نام محمدباقر یزدی انجام گرفته است.

و سرانجام مثلث عددی زیبای زیر خالی از لطف نیست:



عددهای خودشیفته^۳

عدد خودشیفته عددی است که اگر رقم‌های آن را به توان تعداد ارقامش برسانید و با هم جمع کنید، حاصل، خود عدد خواهد شد.

چهار عدد خودشیفته سه رقمی از این قرارند:

$$۱۵۳=۱^۳+۵^۳+۳^۳$$

$$۳۷۰=۳^۳+۷^۳+۰^۳$$

$$۳۷۱=۳^۳+۷^۳+۱^۳$$

$$۴۰۷=۴^۳+۰^۳+۷^۳$$

دو عدد ۳۹ رقمی متوالی را که خودشیفته‌اند، در زیر مشاهده می‌کنید. اگر حوصله و دقت لازم داشته باشید می‌توانید خودشیفته بودن آن‌ها را دریابید.

$$۱۱۵۱۳۳۲۱۹۰۱۸۷۶۳۹۹۲۵۶۵۰۹۵۵۹۷۹۷۳۹۷۱۵۲۲۴۰۰$$

$$۱۱۵۱۳۳۲۱۹۰۱۸۷۶۳۹۹۲۵۶۵۰۹۵۵۹۷۹۷۳۹۷۱۵۲۲۴۰۱$$

و یک عدد هفت رقمی خودشیفته:

$$۱۷۴۱۷۲۵=۱^۷+۷^۷+۴^۷+۱^۷+۷^۷+۲^۷+۵^۷$$

عددهای قوی^۴

آشیل^۵، قهرمان افسانه‌ای یونان، اهل شهر تروا، بسیار قوی و رویین‌تن بود. تنها نقطه ضعف او در پاشنه پایش بود (نظیر آشیل در فرهنگ حماسی کشورمان، اسفندیار است که تنها نقطه آسیب‌پذیر بدنش چشمانش بود). در ریاضی هم اعدادی هستند که آشیلی نام گرفته‌اند. این اعداد قوی هستند، اما کامل نیستند.

عدد قوی: عددی است که توان دوم هر مقسوم‌علیه اول آن جزو مقسوم‌علیه‌هایش باشد. ۲۵ عدد قوی است، زیرا تنها مقسوم‌علیه اول آن پنج است و توان دوم ۵ یعنی ۲۵ نیز جزو مقسوم‌علیه‌های ۲۵ است.

پرسش: آیا ۳۶ یک عدد قوی است؟

عدد کامل: عددی است که بتوان آن را به‌صورت توان صحیحی از یک عدد صحیح نوشت. ۸ کامل محسوب می‌شود، زیرا توان سوم ۲ است.

عدد آشیلی: عددی را گویند که قوی است، ولی کامل نیست.

۷۲ عدد آشیلی است. چرا؟ نمونه‌هایی دیگر از

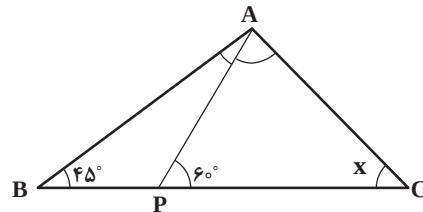


حل یک مسئله چالش برانگیز هندسه به سه روش

منبع سؤال: (المپیاد ریاضی جمهوری دموکراتیک آلمان - سال ۱۹۶۴ - چاپ شده در کتاب «مسئله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف» ترجمه: پرویز شهریاری - انتشارات فردوس - چاپ سوم - ۱۳۷۶ - تهران)

سؤال: نقطه P را روی ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $PC = 2BP$. زاویه ACB را پیدا کنید به شرطی که بدانیم:

$$\widehat{ABC} = 45^\circ, \widehat{APC} = 6^\circ$$



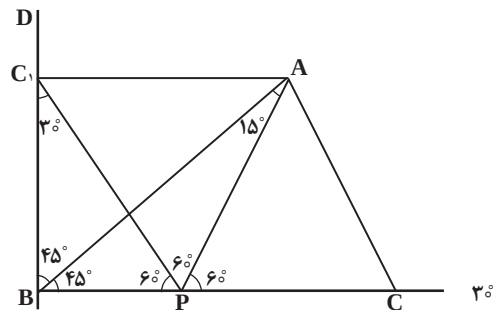
شکل ۱

حل

روش اول: راه حل موجود در کتاب منبع سؤال؛ با استفاده از ویژگی مثلث قائم‌الزاویه
نقطه C_۱ را قرینه نقطه C نسبت به خط راست AP در نظر می‌گیریم (شکل ۲).

$$C_1P = CP = 2BP \quad \text{داریم:}$$

$$\widehat{C_1PB} = 18^\circ - \widehat{APC} - \widehat{APC_1} = 18^\circ - 6^\circ - 6^\circ = 6^\circ$$



شکل ۲

بنابراین $\widehat{C_1BP} = 9^\circ$ (زیرا مثلث C_۱PB با مثلث قائم‌الزاویه به وتر ۲ و ضلع مجاور به زاویه قائمه ۱ متشابه است).
یعنی BA نیم‌ساز $\widehat{C_1BP}$ است. به این ترتیب، نقطه A که از خط‌های راست C_۱P و PC و C_۱B به یک فاصله است، بنابراین بر نیم‌ساز زاویه PC_۱D قرار دارد. (D بر امتداد پاره‌خط راست BC و بعد از C_۱ قرار گرفته است). بنابراین:

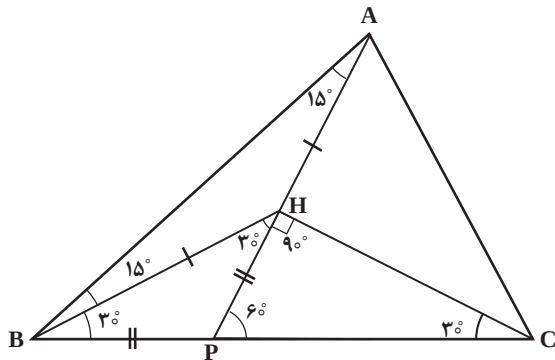
$$\widehat{ACB} = \widehat{AC_1P} = \frac{1}{2}(\widehat{C_1BP} - \widehat{BC_1P}) = \frac{1}{2}(18^\circ - 3^\circ) = 7.5^\circ$$

روش دوم: (روش اول ابتکاری؛ با استفاده از ویژگی مثلث قائم‌الزاویه)

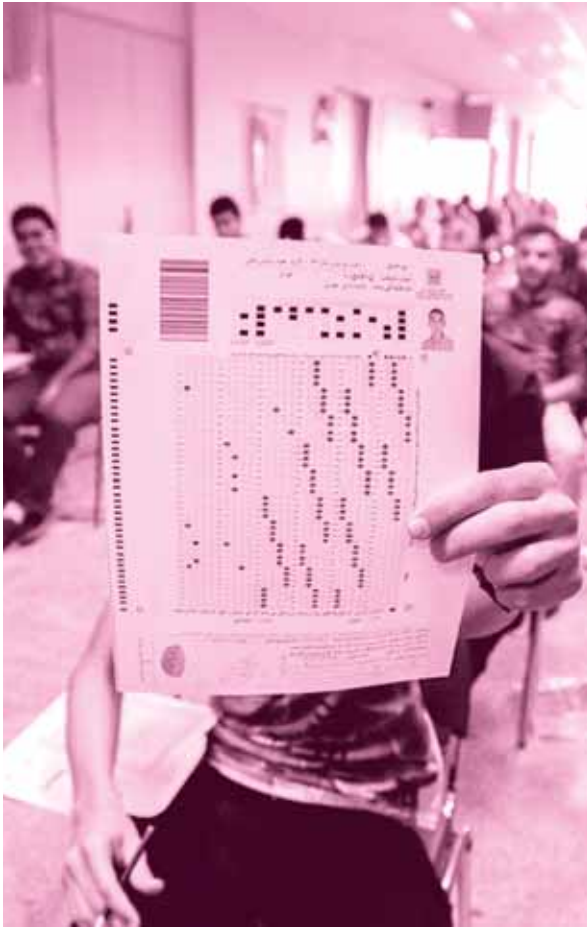
بنابر فرضیات و 6° بودن $\widehat{APC}$ (زاویه خارجی)، $\widehat{ABP} = 45^\circ$ که نتیجه می‌دهد:

$$\widehat{BAP} = 15^\circ$$

از نقطه C عمودی بر ضلع AP رسم می‌کنیم تا نقطه H روی ضلع AP ایجاد شود (شکل ۳).



شکل ۳



بنابر فرضیات و 60° بودن $\widehat{APC}$ (زاویه خارجی) داریم:
 $\widehat{ABP} = 45^\circ$ که نتیجه می‌دهد:

$$(1) \widehat{BAP} = 15^\circ$$

ابتدا از نقطه P روی ضلع PA به کمک پرگار، به اندازه BP رسم می‌کنیم و نقطه ایجاد شده را M می‌نامیم. داریم:

$$\widehat{BPM} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad BP = PB \Rightarrow \Delta BMP \text{ متساوی الساقین} \\ \Rightarrow \widehat{MBP} = \widehat{PMB} = 30^\circ$$

از طرف دیگر، از نقطه P به اندازه BP روی ضلع PC جدا می‌کنیم و به نقطه N می‌رسیم.

(می‌دانیم بنابر فرض مسئله، نقطه N وسط پاره خط PC است).
 بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{MPN} = 60^\circ \text{ فرض} \\ BP = MP = PN \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta MPN \text{ متساوی الاضلاع}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{PMN} = \widehat{PNM} = 60^\circ \\ MN = PN = MP = BP \end{array} \right. (2)$$

از آنجا که مثلث PHC قائم‌الزاویه است و داریم: $\widehat{HPC} = 60^\circ$ ،
 بنابراین: $\widehat{HCP} = 30^\circ$.

بنابر خواص مثلث قائم‌الزاویه با زوایای 30° و 60° درجه، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° درجه نصف وتر است، پس:

$$(1) PH = \frac{1}{2} PC$$

همچنین طبق فرض داشتیم: $BP = \frac{1}{2} PC$. از (1) و (2) نتیجه می‌شود: $BP = PH$.

لذا مثلث BPH متساوی الساقین است و بنابر 60° بودن $\widehat{HPC}$ (زاویه خارجی) خواهیم داشت:

$$\widehat{HBP} = \widehat{BHP} = 30^\circ$$

بنابراین: $\widehat{ABH} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ و بنابر 15° بودن $\widehat{BAP}$ بنا به فرض، مثلث ABH متساوی الساقین خواهد شد. پس:

$$(3) BH = HA$$

از طرف دیگر، مثلث BHC بنابر تساوی زوایای مجاور به دو ساق، متساوی الساقین خواهد شد و خواهیم داشت:

$$(4) BH = HC$$

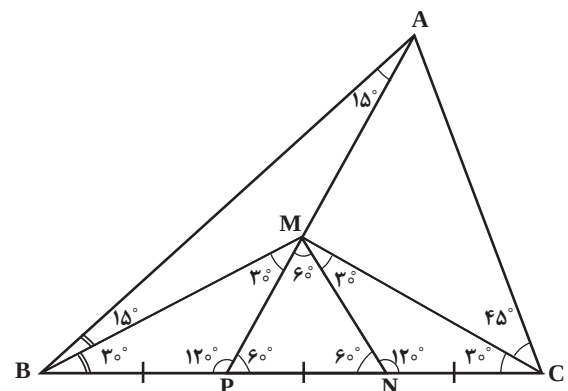
با توجه به (3) و (4) داریم: $HA = HC$ و داشتیم: $\widehat{AHC} = 90^\circ$ (H پای ارتفاع). پس:

زوایای مجاور به دو ساق مثلث AHC برابر خواهند بود:
 $\widehat{HAC} = \widehat{ACH} = 45^\circ$

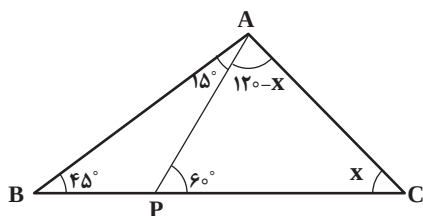
در نتیجه:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACH} + \widehat{HCP} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$$

روش سوم: (روش دوم ابتکاری؛ با استفاده از خواص مثلث متساوی الساقین)



شکل ۴



شکل ۵

از تقسیم دو رابطه فوق بر یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{PC}{PB} &= \frac{\sin 45^\circ \times \sin(120^\circ - x)}{\sin 15^\circ \times \sin x} = 2 \\ \Rightarrow \frac{\sin(120^\circ - x)}{\sin x} &= \frac{2 \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - 1 \\ \Rightarrow \frac{\sin 120^\circ \cos x - \cos 120^\circ \sin x}{\sin x} &= \sqrt{3} - 1 \\ \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x}{\sin x} &= \sqrt{3} - 1 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cot x + \frac{1}{2} &= \sqrt{3} - 1 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cot x = \sqrt{3} - \frac{3}{2} \Rightarrow \cot x &= \frac{\sqrt{3} - \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 - \sqrt{3} \\ \Rightarrow x &= 75^\circ \end{aligned}$$

پیکار جویا پرسش‌های



کوچک‌ترین عدد طبیعی که چون با ۲۰۱۶ عدد طبیعی متوالی بعد از خودش جمع شود، حاصل یک عدد مربع کامل شود، کدام است؟

(الف) ۱۰۰۱

(ب) ۱۰۰۶

(ج) ۱۰۰۹

(د) ۲۰۰۹

(ه) ۲۰۱۳

$$\left. \begin{aligned} PN &= NC \\ MN &= PN \end{aligned} \right\} \Rightarrow MN = NC \quad (2)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \triangle MNC &\text{ متساوی الساقین} \\ \widehat{MNC} &= 18^\circ - 6^\circ = 12^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{NCM} = 3^\circ$$

حال در مثلث MBC داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{MBP} &= 3^\circ \\ \widehat{MCB} &= 3^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle BMC \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow BM = MC \quad (3)$$

از طرف دیگر:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ABM} &= \widehat{ABC} - \widehat{MBC} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ \\ \widehat{BAP} &= 15^\circ \quad (1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle AMB \text{ متساوی الساقین}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} BM &= MA \\ (3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow MA = MC \quad (4)$$

و چون داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AMC} &= 18^\circ - (\widehat{PMN} + \widehat{CMN}) = 18^\circ - (6^\circ + 3^\circ) = 9^\circ \\ (4) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \triangle AMC \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ACM} = 45^\circ$$

پس:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACM} + \widehat{MCN} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$$

روش چهارم: (از هیئت تحریریه برهان)

یادآوری‌ها:

۱. قضیه سینوس‌ها: در هر مثلث نسبت هر دو ضلع به یکدیگر،

برابر است با نسبت سینوس‌های زوایای مقابل به آن‌ها.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad 2$$

۳. نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۱۵° و ۷۵°:

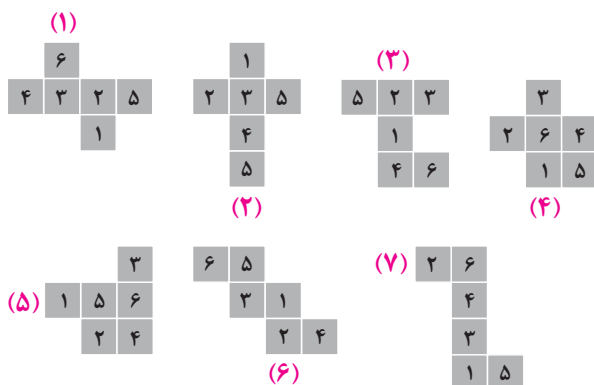
$$\left\{ \begin{aligned} \sin 15^\circ &= \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos 15^\circ &= \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tan 15^\circ &= \cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3} \\ \cot 15^\circ &= \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3} \end{aligned} \right.$$

حال در مثلث‌های APB و APC از قضیه سینوس‌ها داریم:

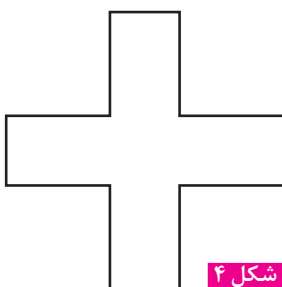
$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}, \frac{AP}{PC} = \frac{\sin x}{\sin(120^\circ - x)}$$

۳. فقط یکی از موارد شکل ۳ گسترده یک تاس شش وجهی معمولی را مشخص می کند. یعنی اگر این شکل را روی اضلاع مربع های کوچک تا بزنیم و آن را به شکلی فضایی و مکعب شکل تبدیل کنیم، یک تاس درست می شود. آن کدام شکل است؟



شکل ۳

۴. آیا می توانید با دو خط متقاطع، نماد جمع (+) را در شکل ۴، به چهار قطعه تقسیم کنید و سپس با کنار هم قرار دادن قطعات حاصل، یک مربع هم مساحت با این شکل درست کنید؟



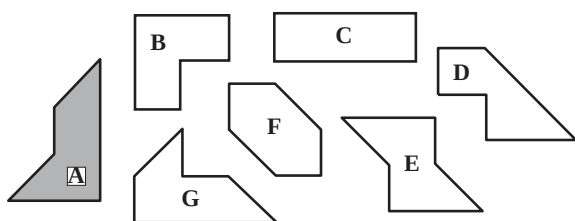
شکل ۴

۵. آیا می توانید ده سکه یکسان را روی صفحه طوری قرار دهید که سکه ها روی پنج خط راست قرار داشته باشند و هر چهار سکه روی یک خط باشند.



شکل ۵

۶. در شکل ۶، آیا می توانید A را طوری به دو بخش برش دهید، که با این دو بخش بتوانید همه شکل های B، C، D، E، F و G را بپوشانید؟



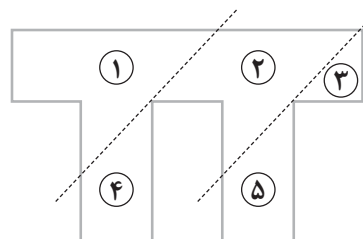
شکل ۶



ایستگاه اول

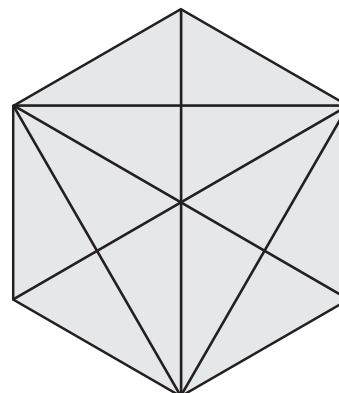
برای شروع چطور است به سراغ بازی با شکل های هندسی متفاوت برویم؟ این معماها به خاطر درک شهودی که به شما می دهند، اهمیت زیادی دارند و حل موفقیت آمیز آن ها هم، حتماً حس خوبی را به شما منتقل می کند. پس شروع می کنیم:

۱. شکل ۱ شکلی شبیه به نماد عدد پی (π) در زبان یونانی است که نقطه چین های روی آن، مسیره های دو برش متوالی از آن را نشان می دهند. به این ترتیب پس از برش، این شکل به پنج قطعه کوچک تر تقسیم می شود. آیا می توانید با کنار هم قرار دادن این پنج قطعه (بدون هیچ تغییری در آن ها) یک مربع بسازید؟



شکل ۱

۲. در شکل ۲ چند مثلث می توانید بشمارید؟



شکل ۲

میزگرد با مؤلفان کتاب هندسه پایه دهم (رشته ریاضی)

از ترسیم تا تفکر!

اشاره

در ادامه گفت‌وگوهای مجله برهان با مؤلفان کتاب‌های ریاضی پایه دهم (رشته ریاضی)، این بار به سراغ مؤلفان کتاب هندسه این پایه رفتیم و روز شنبه پنجم تیرماه در نشستی صمیمی گفت‌وگویی با این گروه داشتیم تا توصیه‌های ایشان را به شما دانش‌آموزان، برای استفاده هرچه بهتر از کتاب درسی انعکاس دهیم. در این نشست مؤلفان کتاب، آقایان سیدمحمدرضا سیدصالحی، محمود نصیری، هوشنگ شرقی و خانم زهرا رحیمی حضور داشتند و آقای هوشنگ شرقی به نمایندگی از «مجله برهان» سؤال‌ها را مطرح کرد. در ادامه این گفت‌وگو را می‌خوانید.

تغییرات اجتناب‌ناپذیر بود. بنابراین جلسات متعددی با متخصصان این موضوع برگزار کردیم و در نهایت تصمیم بر این شد که این کتاب چهار فصل داشته باشد. فصل اول درباره «ترسیم‌های هندسی و استدلال» است. ترسیم در هندسه از بحث‌های پایه‌ای است که همواره مورد توجه بوده و

شرقی: ابتدا از آقای سیدصالحی، مدیر محترم گروه تألیف هندسه ۱ می‌خواهم که ضمن معرفی نویسندگان کتاب درباره محتوا و اهداف موردنظر در تألیف کتاب و تفاوت‌های آن با کتاب‌های قبلی توضیحاتی بفرمایند.

سیدصالحی: به نام خدا. در پی

بحث‌های متعددی که در شورای برنامه‌ریزی ریاضی داشتیم و رایزنی‌هایی که در سطوح بالای «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» انجام گرفت، در نهایت تصمیم بر این شد که هندسه در پایه دهم تنها مختص رشته ریاضی و زمان تدریس آن هم دو ساعت در هفته



باشد. مؤلفان کتاب عبارت‌اند از: آقای نصیری که تجربه سالیان دراز تدریس هندسه و تألیف کتاب‌های متعدد هندسه (درسی و کمک‌درسی) را در کارنامه‌شان دارند؛ آقای شرقی که ایشان هم تجربه معلمی ریاضی و هندسه و نیز تألیف کتاب در این زمینه را دارند؛ خانم رحیمی که سال‌ها دبیر هندسه بوده‌اند و هم در رشته ریاضی و هم در رشته برنامه‌ریزی آموزشی تحصیل کرده‌اند و اکنون در دوره دکترا در زمینه تفکر ریاضی کار می‌کنند؛ و خود من که آخرین عضو گروه تألیف هستم.

درباره کتاب درسی هندسه پایه دهم و تغییرات آن هم باید بگویم که این تغییرات بیشتر در زمینه رویکرد است و نه محتوا. با توجه به تغییراتی که در دوره اول متوسطه انجام شد و دانش‌آموزان و معلمان پایه‌های پایین‌تر با آن‌ها بیشتر آشنایی دارند، انجام این



تصمیم بر این شد که در ابتدای کتاب هندسه دهم باشد. اما استدلال و تقویت آن از بحث‌هایی است که در «سند برنامه ملی ریاضی دهم» بسیار مورد توجه بوده است و بنابراین لازم بود که در کتاب درسی هم به آن پرداخته شود. لذا ضمن اینکه به صورت شفاف روش‌های استدلال مورد بررسی قرار می‌گیرند، سعی شده است که مفاهیم هندسه هم در خلال این توضیحات آموزش داده شوند.

فصل دوم به «قضیه تالس و تشابه» می‌پردازد که از بحث‌های مهم و پر کاربرد هندسه بوده و به صورت منسجم و کاربردی ارائه شده است. «چندضلعی‌ها و مساحت» موضوع فصل سوم است که همیشه جایگاه خودش را در هندسه داشته است. موضوعی که سعی شده به آن توجه شود، یکدست بودن فصل‌های کتاب از نظر حد و مرز ارائه مطالب بوده است تا کتاب برای سطح متوسط دانش‌آموزان که مدنظر مؤلفان هستند، قابل استفاده شود. لذا از طرح مسائلی که برای دانش‌آموزان نخبه یا معلمان قدیمی هندسه جذابیت دارند (ولی برای عموم دانش‌آموزان جاذبه‌ای ندارند)، پرهیز شده است. فصل چهارم درباره «تجسم فضایی» است. یکی از مواردی که سند برنامه درسی بسیار بر آن تأکید دارد، تقویت تجسم و تفکر هندسی است و این‌ها حداقل دو هدفی هستند که وجود هندسه دبیرستان را موجه می‌کنند. البته این موضوعی نیست که بتوان به سادگی به آن رسید، ولی با این حال تلاش کرده‌ایم در فصل چهارم

تا جایی که می‌شود به آن بپردازیم؛ بدون آنکه وارد بحث اثبات‌ها در هندسه فضایی و مباحث صوری بشویم. صرفاً سعی کرده‌ایم تفکر تجسمی دانش‌آموزان را به چالش بکشیم و تقویت کنیم و مطمئناً از مهم‌ترین مباحثی است که بسیار جای کار دارد و مورد مجادله دانش‌آموزان و معلمان قرار می‌گیرد.

❧ شرقی: در ادامه، در مورد هر فصل سؤال‌های تخصصی را از مؤلفان اصلی آن فصل می‌پرسیم. از فصل سوم شروع کنیم. یک بخش دیگر از فصل سوم که شما کمتر به آن اشاره کردید، بحث مساحت‌هاست. دانش‌آموزان در دوره اول متوسطه و حتی دوره ابتدایی دستورهای محاسبه مساحت شکل‌های هندسی را می‌آموختند و محاسبه مساحت انواع شکل‌ها را انجام می‌دادند.

شما در این بخش چه حرف تازه‌ای برای دانش‌آموزان دارید؟
❧ نصیری: همان‌طور که گفتید، دستورهای محاسبه مساحت را دانش‌آموزان در این دوره می‌دانند و ما هم فقط به‌طور خلاصه آن‌ها را یادآوری کرده‌ایم. فقط در بخش «خواندنی» این فصل اشاره‌ای به مفاهیم اولیه و تابع مساحت کرده‌ایم تا علاقه‌مندان با این مفاهیم هم آشنا شوند. اما در این فصل ما کوشیده‌ایم به کاربردهای مساحت توجه بیشتر کنیم که به نظر من مساحت یکی از اصلی‌ترین کاربردهای هندسه در زندگی روزمره است و حتی افراد عامی هم با این مفهوم سروکار دارند.



یکی از مباحثی که در سند برنامه درسی به آن اشاره شده، تقویت تفکر تجسمی است. منظور از تفکر تجسمی این است که وقتی ما فکر می‌کنیم، دو نوع تفکر داریم: یکی اینکه به زبان کلمات فکر می‌کنیم و دیگری اینکه به زبان تصویرهای اندیشیم

شرقی: کمی بیشتر توضیح می‌دهید که منظور تان از کاربرد مساحت چیست؟

نصیری: بحث کمی فنی تر شده است. مثلاً محاسبه مساحت چهارضلعی‌های غیرمستطیل و یا مسئله‌ای که دبیران هم از آن استقبال خوبی کردند و آن تبدیل مرز بین دو زمین کشاورزی از خط شکسته به خط راست و یا استفاده از مساحت‌ها برای اثبات قضیه‌ها (که در فصل دوم هم برای اثبات قضیه تالس یا قضیه نیم‌سازها مورد استفاده قرار گرفت) مطرح شده است.



بحث تازه‌ای هم که به این مبحث اضافه شده، محاسبه مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای به کمک «قضیه پیک» بوده است که کاربردهای خوبی هم دارد. به نمونه‌هایی از کاربرد آن برای تخمین مساحت شکل‌های طبیعی اشاره‌هایی شده است که می‌تواند در جغرافیا، زیست‌شناسی و باستان‌شناسی کاربرد داشته باشد.

شرقی: به فصل چهارم (تجسم فضایی) برویم و از خانم رحیمی می‌خواهیم تصویری از این فصل و اهداف آن ارائه دهند.

رحیمی: یکی از مباحثی که در سند برنامه درسی به آن اشاره شده، تقویت تفکر تجسمی است. منظور از تفکر تجسمی این است که وقتی ما فکر می‌کنیم، دو نوع تفکر داریم: یکی اینکه به زبان کلمات فکر می‌کنیم و دیگری اینکه به زبان تصویرهای اندیشیم. تفکر تجسمی، فکر کردن به زبان تصویر و شکل است. اما اینکه چرا مطالب به این شکل تنظیم شده‌اند، باز هم به همان سند برنامه درسی برمی‌گردد که در آن روی سه چیز تأکید شده است: یکی آموزش تلفیقی (به جای آنکه دیسپلین محور و یا موضوعی باشد) و دیگری کاربردها. تا حدی هم روی بحث شهود تأکید شده است. ما دیدیم که در این فصل فضا باز است تا ما به هر سه این مقوله‌ها بپردازیم.



من قبل از آنکه نوشتن مطالب را شروع کنم، از کسانی که

وارد دانشگاه‌ها شده بودند نظرخواهی کردم که آیا ریاضیاتی که در دوره متوسطه خوانده‌اند، به موضوعاتی که در دانشگاه‌ها با آن‌ها سروکار داشته‌اند، کمک کرده است یا خیر. اکثر آن‌ها گله داشتند که ریاضیات و به خصوص هندسه‌ای که در دوره دبیرستان خوانده‌اند، کمکی به مهندس شدن آن‌ها نکرده است. حداقل توقعی که داشتند این بود که در بحث‌های ترسیم فنی باید به آن‌ها کمک می‌کرد. بنابراین در تدوین این فصل سعی کردیم به جلوه‌هایی از معماری، زیبایی‌شناسی و هنر توجه کنیم و در نتیجه از الفبای هندسه شروع کردیم. نقطه، خط و صفحه - یعنی مفاهیم اولیه - را توضیح دادیم و حالت‌های مختلف آن‌ها را نسبت به هم بیان کردیم.

در ادامه به شکل‌های هندسی فضایی رسیدیم و در این میحث در مورد مشاهده شکل‌ها از نماهای مختلف بحث کردیم که در واقع یکی از ابتدایی‌ترین بحث‌های ترسیم فنی است. در اینجا کوشیدیم دانش‌آموزان را متوجه ارزش «نگاه کردن از زاویه‌های مختلف» کنیم که این متفاوت دیدن می‌تواند در هنر، معماری یا مهندسی مورد استفاده قرار گیرد. بعد وارد بحث برش‌ها شدیم و سطح مقطع‌های حاصل از برش‌ها را بررسی و سعی کردیم مثال‌هاییمان کاربردی و از زندگی روزمره باشند تا زمینه‌ای هم برای طرح موضوع مقاطع مخروطی در سال‌های آینده فراهم آید. در نهایت هم بحث «دوران» مطرح شد تا بچه‌ها بتوانند تصور کنند که از دوران یک شکل هندسی چه شکل فضایی ایجاد می‌شود؛ البته بدون اینکه وارد بحث استدلال شویم تا به جای درگیر شدن در استدلال، بیشتر تمرکز روی تجسم فضایی باشد.

شرقی: چه قدر توقع دارید دانش‌آموزان در محاسبه به توانایی برسند؟

رحیمی: در این فصل محاسبه چندان مورد توجه نیست و تأکید ما بیشتر روی تجسم است. مثلاً در مسئله پرتقال‌هایی که روی هم چیده شده‌اند، بیشتر از آنکه هدف ما درستی عددی باشد که دانش‌آموز به دست می‌آورد، این است که دانش‌آموز بتواند شکل و نحوه چینش پرتقال‌ها را درک کند. یا در مسئله تقاطع صفحه با کره و محاسبه مساحت مقطع حاصل، در واقع این محاسبه به تجسم کمک می‌کند و هدف تجسم است و نه محاسبه.

شرقی: یک سؤال خیلی مهم که دانش‌آموزان و معلمان هر دو دارند، این است که چون این بحث و مسائل مطرح شده در آن الگوریتم خاصی ندارند، چگونه در این زمینه می‌توان به مهارت دست یافت و تمرین مناسب برای این موضوع کجا پیدا می‌شود؟ آیا منابع مناسبی برای استفاده معلمان و دانش‌آموزان وجود دارد یا خیر؟

رحیمی: واقعیت این است که برای خود ما هم این بحث دشوار بود، چراکه ما هم در این زمینه آموزش چندانی ندیده بودیم و این بحث‌ها کاملاً تازگی داشتند. تنها منبعی که بعد از تحقیق بسیار به آن رسیدیم، کتاب‌های ترسیم فنی هنرستان و منابع پیشرفته‌تر در این زمینه بود. به دلیل نوپا بودن مبحث، بدیهی است که هنوز منابع جدی در این زمینه وجود ندارد، ولی امیدواریم که با انتشار کتاب راهنمای معلم، مسائل بیشتری در این زمینه مطرح شوند. ضمن اینکه استفاده از دست‌سازه و نرم‌افزارهای مناسب می‌تواند به تفهیم بهتر این مباحث یاری رساند. لذا قصد داریم لوح فشرده‌ای هم در این مورد طراحی کنیم. اگر این لوح به موقع به‌دست دانش‌آموزان برسد، می‌تواند به بحث تقویت تفکر تجسمی تا حد زیادی کمک کند.

شرقی: یعنی شما به دانش‌آموزان و معلمان توصیه می‌کنید که از دست‌سازه‌ها در این بحث استفاده کنند؛ مثلاً شکل‌ها را بسازند، از آن‌ها از زاویه‌های متفاوت عکس بگیرند و آن‌ها را با هم مقایسه کنند، و...

رحیمی: بله و من امیدوارم این فصل با توجه به محتوای خاص خود بتواند لذت یادگیری هندسه را به دانش‌آموزان تزریق کند.

شرقی: آیا با توجه به اهمیت موضوع تجسم هندسی، برنامه‌ای برای تکمیل این بحث در سال‌های آینده دارید؟

سیدصالحی: من فکر می‌کنم قبل از این بحث باید بیشتر روی معلمان سرمایه‌گذاری شود، چراکه معلمان هندسه و از جمله خود ما، با این فضا مأنوس نیستیم و این بحث‌ها را هندسه نمی‌دانیم. باید معلمان را آموزش دهیم تا وقتی سر کلاس می‌روند، از مندرجات سند راهنمای برنامه‌داری و اهداف آموزش هندسه در آن آگاه باشند و با آن اهداف به آموزش هندسه بپردازند. البته ما محدودیت زمان هم داریم و فکر می‌کنم در سال‌های آینده حداکثر دو ساعت در هفته برای آموزش هندسه زمان داریم.

شرقی: خب کمی هم در مورد فصل اول کتاب توضیح دهید. حدود ترسیم‌های هندسی را تا کجا مدنظر دارید؟

سیدصالحی: یک مجموعه ترسیم‌های ساده و ابتدایی هستند که توقع داریم دانش‌آموزان با روش و حتی استدلال آن‌ها آشنا شوند. مثل ترسیم نیم‌ساز، عمودمنصف، خط عمود بر یک خط و... اما در فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها حد و مرزی را که باید در طرح سؤال و تمرین رعایت شود، مشخص کرده‌ایم و قصد نداریم سؤال‌های خیلی دشواری در این زمینه داشته باشیم.



یک مجموعه ترسیم‌های ساده و ابتدایی هستند که توقع داریم دانش‌آموزان با روش و حتی استدلال آن‌ها آشنا شوند. مثل ترسیم نیم‌ساز، عمودمنصف، خط عمود بر یک خط و...

شرقی: در مورد استدلال هم لطفاً توضیح بدهید. این بحث چقدر به بحث استدلال که در کتاب ریاضی نهم بود، مربوط می‌شود؟

سیدصالحی: در کتاب نهم اشاره‌هایی به انواع روش‌های استدلال بدون نام بردن از آن‌ها داشتیم. اینجا یک پله بالاتر رفته‌ایم و روش‌های استدلال را به‌صورت شفاف‌تر (استدلال استقرایی، استدلال استنتاجی، برهان خلف و...) مطرح کرده‌ایم. اما استدلال و اثبات چیزی نیست که بتوان با یک آموزش رسمی به آن رسید، بلکه باید در ضمن ارائه بحث این روش‌ها را آموزش داد.

شرقی: آقای نصیری دانش‌آموزان در ریاضی متوسطه اول تعریف چندضلعی‌های مهم را دیده‌اند و با ویژگی‌های آن‌ها هم کم و بیش آشنایی دارند. در اینجا چه حرف تازه‌ای در این مورد برای آن‌ها دارید؟

نصیری: خب اینجا بحث‌ها و تعریف‌ها دقیق‌تر می‌شوند. مثلاً در تعریف دوزنقه می‌گوییم: «یک چهارضلعی که فقط دو ضلع آن موازی باشند». خب این تأکید بر اینکه فقط دو ضلع موازی باشند برای چیست؟ آیا نمی‌شود بگوییم: «لااقل» دو ضلع موازی داشته باشند؟ تعریف‌های این فصل هم در همین راستا هستند و سعی شده است جامع‌تر باشند. اما توصیه‌ما به معلمان این است که در طرح سؤال در این زمینه، سعی کنند سؤال‌هایی مطرح کنند که دانش‌آموز واقعاً خودش بتواند آن‌ها را حل کند و در سطح متوسط دانش‌آموزان باشد.

شرقی: در مورد فصل دوم هم خودم یک توضیح کلی بدهم. عنوان‌های درسی این فصل نسبتاً زیاد هستند. در درس اول «نسبت و تناسب» و ویژگی‌های آن را داریم که با رنگ و بوی هندسی مطرح شده است. لذا توصیه می‌کنیم که همکاران ما به هیچ عنوان وارد مسائل پیچیده جبری در این بخش نشوند. در درس دوم قضیه تالس و نتایج آن و عکس قضیه تالس را مطرح کرده‌ایم. در درس سوم تشابه و قضایای آن آمده است و در درس چهارم هم کاربردهایی از قضیه‌های تشابه را آورده‌ایم. تمرین‌های ما از آسان به متوسط تنظیم شده‌اند و مثال‌ها و تمرین‌های کاربردی زیادی هم داشته‌ایم.

سیدصالحی: دانش‌آموزان و اولیای آن‌ها معمولاً یک جمله می‌پرستند: «کتاب آسان شده یا سخت؟!»

شرقی: من ترجیح می‌دهم که بگویم نه آسان شده و نه سخت، بلکه کتاب منسجم‌تر و بهتر شده است.

شهر بتواند توسعه یابد.

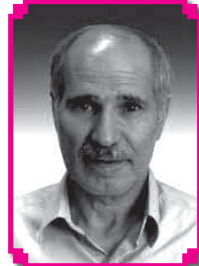
در هر صورت ناصرالدین شاه با مشکل افزایش جمعیت روبه‌رو می‌شود. وی موضوع سرشماری دارالخلافه را به وزیر علوم وقت خود، **اعتضادالسلطنه علیقلی میرزا** ابلاغ می‌کند. او هم به سراغ تنها مرکز علمی موجود در ایران، یعنی دارالفنون (مدرسه مبارکه) از یادگاری‌های ماندگار **امیرکبیر** می‌رود و موضوع سرشماری را به مدیر آن مدرسه، **جعفر قلی خان نیرالملک** احاله می‌دهد. در دارالفنون سرپرستی سرشماری به **عبدالغفار**، معلم کلیهٔ درس‌های ریاضی واگذار می‌شود. عبدالغفار نیز به کمک هشت تن از شاگردان خود از مدرسهٔ دارالفنون در مدت ۵۵ روز جمعیت ساکن تهران را سرشماری می‌کند و نتیجه را به‌صورت رساله‌ای به اعتضادالسلطنه ارائه می‌دهد. عبدالغفار نام این رساله را «تشخیص نفوس دارالخلافه» می‌گذارد.

در این رساله، عبدالغفار بحثی دربارهٔ جمعیت‌شناسی و «نظریهٔ مالتوس» می‌آورد. (طبق نظریهٔ مالتوس، رشد جمعیت سریع‌تر از رشد منابع غذایی است) (اولی تصاعد هندسی و دومی تصاعد حسابی و لذا باید رشد جمعیت محدود شود). عبدالغفار خود به این نظریه اعتقاد داشت و در نتیجه از رشد بی‌رویهٔ جمعیت هراسناک بود. همچنین در این رساله به علم آمار اشاره می‌شود (شاید به‌صورت آکادمیک برای اولین‌بار در ایران) و از فواید و کارایی آن و از موضوعاتی از قبیل عمر متوسط، نرخ‌ها، میانگین‌ها و حساب احتمالات صحبت به میان می‌آورد.

عبدالغفار برای آنکه بتواند سرشماری را انجام دهد، به نقشهٔ دقیقی از شهر تهران نیاز داشت که این نقشه را خود قبلاً به‌وسیلهٔ شاگردانش تهیه کرده بود. علاوه بر این، می‌باید فرم‌های جمع‌آوری اطلاعات، طراحی و دستورالعمل دقیق مراجعه به منازل و ثبت اطلاعات تهیه می‌شد. این

به استقبال سرشماری ۱۳۹۵ برویم!

سرشماری



اشاره

دادهٔ بهتر، زندگی بهتر

شعار سازمان ملل متحد
به مناسبت روز جهانی آمار

در شمارهٔ پیش (مهرماه) تاریخچه‌ای از سرشماری به شکل ابتدایی آن در جوامع بشری کهن و قرون معاصر آوردیم. اینک به بحث تاریخ سرشماری در کشور عزیزمان، ایران می‌پردازیم.

سرشماری در ایران

در جامعه دست یافت و البته هدف هم این نبود.

از این قبیل سرشماری‌های خودرو و بی‌چارچوب که بگذریم، اولین نمونهٔ سرشماری در ایران که آن هم فقط از شهر تهران بود، در زمان **ناصرالدین شاه قاجار** در سال ۱۲۴۶ هجری شمسی اجرا شد. در مقیاس تاریخی، هنوز چیزی از پایتختی (دارالخلافگی) تهران نگذشته بود. در آن زمان دورتادور تهران را مثل سایر شهرها دیوار (دیوار شاه طهماسب) کشیده و دروازه‌هایی برای ورود و خروج تعبیه کرده بودند. در اطراف دیوار هم به خاطر امنیت بیشتر خندق حفر کرده بودند. اما به سبب پایتخت شدن تهران و مهاجرت مردم از سایر شهرها به تهران (در واقع هجوم مردم به تهران به علت پایتخت شدن آن)، کم‌کم دیوارها را خراب و خندق‌ها را پر کردند تا

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، در زمان هخامنشیان، حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، سرشماری‌هایی در ایران انجام می‌شد که هدف عمدهٔ آن‌ها تعیین نیروی جنگی و تأمین منابع مالی بوده است. هر یک از حکومت‌های امپراتوری بزرگ ایران ضرورت داشتن اطلاعات از جامعهٔ خود را حس می‌کردند و به‌صورت‌هایی به تهیهٔ اطلاعات مورد نیاز در این زمینه دست می‌زدند. این سرشماری‌ها همان‌طور که گفته شد چارچوب معینی نداشتند و هر از چند گاهی انجام می‌گرفتند. اطلاعات گردآوری شده هم شاید چندان دقیق نبوده‌اند. علاوه بر این، چون سؤال‌های سرشماری و زمان‌های گردآوری آن‌ها ثابت نبودند، اطلاعات حاصل را نمی‌شد در کنار هم قرار داد و به روند مناسبی از تغییرات

اقدامات نشان از یک سرشماری مدرن مطابق با استانداردهای آن روز جهان داشت. شاید عبدالغفار از طریق معلمان خارجی دارالفنون که به خود وی درس داده بودند، یا آن موقع در مدرسه همکاری می کردند، اطلاعاتی درباره سرشماری کسب کرده بود. در هر حال، اقدام او شروع خوبی در سرشماری محسوب می شود.

در تقسیم های آن روزها، شهر تهران به شش محله تقسیم شده بود. اقلام اطلاعاتی که در آن سرشماری مدنظر قرار داشتند تعداد افراد خانوار، نوع تصرف مسکن (ملکی، اجاره ای)، توزیع جمعیت برحسب جنس و سن، پیروان ادیان مختلف، موقعیت شغلی و اجتماعی، تأسیسات شهری و اماکن عمومی بودند. برخی از اطلاعات حاصل از این سرشماری به این شرح است:

- جمعیت تهران: ۱۴۷/۲۵۶ نفر
- تهرانی: ۲۶/۶ درصد
- مهاجر: ۷۳/۴ درصد (علت تخریب دیوار شاه طهماسب و پر کردن خندق ها، از این درصد بالا به خوبی استنباط می شود).
- نسبت تعداد مردان به زنان:

$$\frac{53972}{52390} = 1/03$$

سرشماری بعدی که در دوره قاجار انجام گرفت، به چهار سال پس از به سلطنت رسیدن مظفرالدین شاه قاجار، در سال ۱۲۷۷ برمی گردد. در این سال امر سرشماری تهران به وسیله اتابک اعظم امین السلطان به حسن اخضر علی شاه که ظاهراً از درویش بوده و خود را کلب آستان دوستان مولا می خوانده است، واگذار شد. این مأموریت به سبب نامه های بسیار متملقانه و پرتکلف که حسن اخضر علی شاه به امین السلطان نوشته و در آن قصد خود را یک سال نوکری اعلام کرده بود، واگذار شد. در این سرشماری که یک سال طول کشید، تعداد ابنیه تهران به تفکیک مورد استفاده از قبیل خانه، دکان، کاروان سرا، مدرسه دولتی، طویله و به تفکیک محله های پنج گانه تهران آورده شد.

سرشماری دیگری که از تهران به عمل آمد، در زمان سردار سپه و در سال ۱۳۱۰ بود. این سرشماری به وسیله تشکیلات بلدیه (شهرداری) که تازه تأسیس شده بود، انجام شد و براساس آن جمعیت کل تهران ۲۱۰/۰۰۰ نفر و تراکم آن ۸۰ نفر در هر ۱۰/۰۰۰ مترمربع بود.

به طور گذرا از سال ۱۲۷۷ تا سال ۱۳۱۸

سرشماری های نامنظم و محدودی در تهران برگزار شدند. اولین قانون سرشماری تهران در سال ۱۳۱۲ در ۱۴ ماده به تصویب هیئت وزرا رسید که ماده اول آن به صورت زیر است:

ماده ۱. سرشماری مملکت در هر ۱۰ سال یک مرتبه بواسطه مهرماه در روز غیر تعطیل و ظرف ۲۴ ساعت انجام می پذیرد.

همان طور که گفته شد، اگرچه قانون سرشماری کشور در سال ۱۳۱۲ به تصویب رسید، ولی تا سال ۱۳۱۸ این کار عملی نشد. در این سال برای اولین بار از کل ایران سرشماری به عمل آمد که خلاصه ای از نتایج (که به صورت ناقص به دست آمده و تنها مربوط به بخش هایی از کشور بوده است). آن به این شرح است:

- جمعیت ایران: ۱/۸۳۲/۸۵۷
- زن: ۸۵۶/۱۱۳
- مرد: ۹۷۶/۷۴۴

طبق ماده ۱، این سرشماری که قرار بود در مدت ۲۴ ساعت برگزار شود تا سال ۱۳۲۰ به تدریج ادامه یافت و در آن سال به علت اشغال ایران و رفتن رضا شاه، کار به نتیجه نهایی نرسید.



دیدیم که اولین سرشماری تهران در دوره ناصری با مسئولیت دارالفنون برگزار شد. در دوره پهلوی اول، قوانین و چارچوب اجرایی سرشماری تدوین شد و تنها سرشماری که قرار بود براساس این قوانین به اجرا درآید، ابتر ماند. در هر حال موضوع سرشماری همیشه مدنظر دولت بوده است. در دوره پهلوی دوم، پس از تکمیل قوانین، اولین سرشماری که مطابق با سرشماری‌های بین‌المللی بود، در سال ۱۳۳۵ برگزار شد. از آن پس هر ۱۰ سال یکبار تا سال ۱۳۸۵ و ۵ سال بعد از آن در سال ۱۳۹۰ سرشماری برگزار شد. این سرشماری‌ها عموماً با بهره‌گیری از فناوری‌های جدید دائماً رو به تکامل بودند و سرشماری ۵۵ روزه دوره ناصری، آن هم از شهر تهران با جمعیت ۱۴۷/۷۳۶ نفر، به سرشماری ۲۰ روزه از ایران با جمعیت ۷۵ میلیون نفر در سال ۱۳۹۰ رسید. در دوره ناصری ۹ نفر مجری سرشماری بودند، ولی در سال ۱۳۹۰ حدود ۱۱۳/۵۰۰ نفر در امر سرشماری شرکت مستقیم داشتند. در بخش بعدی اطلاعات حاصل از سرشماری‌های انجام شده در ایران به اختصار ارائه می‌شود.

ایران در آینه سرشماری (الف) دوره ناصری

همان‌طوری که قبلاً اشاره شد، در این دوره از تهران سرشماری به عمل آمد و خلاصه‌ای از اطلاعات حاصل از این سرشماری به شرح زیر است:

- جمعیت تهران: ۱۴۷/۲۵۶ نفر
- جمعیت بالای ۱۵ سال: ۱۰۶/۳۶۲ (۷۲/۲ درصد)
- جمعیت بین ۵ تا ۱۵ سال: ۱۹/۲۶۹ (۱۳ درصد)
- جمعیت زیر ۵ سال: ۲۱/۶۲۵ (۱۴/۷ درصد)

● آقایان کسبه، ارباب حرف و

- صنایع: ۶۱/۹ درصد
- سپاهیان: ۱۲/۳ درصد
- نوکرها: ۱۴/۵ درصد
- کنیز سیاه: ۳/۷ درصد
- خدمتکار: ۵/۵ درصد
- خواجه و غلام سیاه: ۱/۲ درصد
- خلاصه‌ای از اطلاعات سرشماری سال ۱۳۰۱ در تهران نیز به‌صورت زیر است:
- جمعیت: ۱۹۶/۲۵۵ نفر
- تراکم جمعیت: ۸۰ نفر در هر ۱۰/۰۰۰ مترمربع
- افراد شاغل: ۳۵/۳۱۲ نفر
- بی‌کار بی‌مصرف: ۶/۴۰۲ نفر

در این سرشماری اطلاعاتی درباره جمعیت محلات تهران، تعداد خانه‌ها و اتاق‌ها، جمعیت شاغل و بی‌کار، تعداد جمعیت شاغل و بی‌کار، تأهل (و انواع زن)، طلاق، جمعیت خانواده‌ها، تفکیک جمعیت براساس مذاهب و ادیان مختلف، توزیع سن ازدواج، تعداد اماکن (از قبیل مریضخانه، پانسیون، مسافرخانه و...) فوت کودکان، معلولیت، فوت (علت و سن فوت)، و انواع مشاغل (به تفکیک دولتی، نیمه آزاد، آزاد و غیرمجاز) آمده است.^۲

در آن سرشماری اطلاعات بیشتری مورد توجه بود که در این دوره اصلاً موضوعیت ندارند، ولی برای اطلاع شما و یادآوری تاریخ، به یکی دو نمونه اکتفا می‌کنیم. اولین مورد مربوط به گروه‌های شغلی است. گروه‌های شغلی آن دوره با این زمان بسیار متفاوت بود که از نظر ما ممکن است عجیب به نظر آید. اطلاعات مربوط به گروه‌های شغلی دوره ناصری به‌صورت زیر است:

(ب) دوره پهلوی

بعد از مشروطیت و تأسیس مجلس شورای ملی انجام اقدامات بنیادی در کشور آغاز شد. از جمله قانونی بود که طبق آن، افراد باید «سجل احوال» یا «ورقه هویت» (که همان شناسنامه امروزی است) دریافت می‌کردند. این قانون در سال ۱۲۹۷ هجری شمسی تصویب شد، ولی گرفتن سجل اختیاری بود. در سال ۱۳۰۴ قانون سربازی (که به آن اجباری هم می‌گفتند) از تصویب گذشت و از همین سال گرفتن سجل اجباری شد. سجل علاوه بر آنکه وقایع چهارگانه تولد، فوت، ازدواج و طلاق را ثبت



می‌کرد، سندی بود که به وسیله آن فرد می‌توانست بسیاری از کارهای اجتماعی، از جمله تحصیل، رأی دادن و غیره را انجام دهد.

مقارن همین ایام موضوع سرشماری نیز در دستور کار قرار گرفت. ابتدا بلدیة (شهرداری) و سپس اداره‌ای در وزارت کشور متصدی انجام سرشماری شد. در این سال‌ها دولت و کابینه‌های مختلف سرگرم تهیه قوانین و چارچوب‌های مربوط به سرشماری بودند. اگرچه قانون سرشماری آماده شده بود، ولی سرشماری به سال ۱۳۱۸ موکول شد و این قرار بود اولین سرشماری سراسری در مملکت باشد. این سرشماری طبق قانون قرار بود در ۲۴ ساعت انجام شود، ولی به علت نبودن وسایل ارتباطی مناسب بین شهرها و اوضاع نابسامان آن دوره (جنگ جهانی دوم)، تا سال ۱۳۲۰ به تدریج ادامه یافت. در این سال به علت خروج رضا شاه از کشور و از هم پاشیده شدن شیرازه مملکت، سرشماری در بسیاری از شهرها انجام نشد. در نتیجه اطلاع دقیقی از اوضاع و احوال مملکت به دست نیامد. مسئول برگزاری این سرشماری **علی اصغر حکمت**، استاد دانشگاه تهران بود. جمعیت تهران در این سال ۵۴۰/۰۸۷ نفر به دست آمد. گزارش آن، روز بعد از سرشماری تهران در هیئت وزرا در حضور رضا شاه مطرح شد. علی اصغر حکمت می‌نویسد: «عدد و کمیت نفوس شهر پایتخت، مرضی طبع عالی و همت بلند شاه نشد، زیرا ایشان میل داشتند جمعیت پایتخت خیلی بیش از آنچه سرشماری نشان می‌داد، باشد.»

هنوز کار تصویب و اصلاح قانون سرشماری و تعیین مرکزی که باید مسئول آن باشد، ادامه داشت. پس از مصوبات لازم و تهیه چارچوب‌های بسیار دقیق و با جزئیات کامل، امر سرشماری عمومی ایران به کمک «اصل چهار ترومن» از ۱۰ تا ۲۵ آبان سال ۱۳۳۵ در تمام نقاط ایران برگزار شد.

بنابراین، اولین تعداد جمعیت قابل اتکای ایران در این سال به میزان ۱۸/۹۵۴/۷۰۴ نفر به دست آمد که ۹/۶۴۴/۹۴۴ نفر از آنان مرد و ۹/۳۰۹/۷۶۰ نفر از آنان زن بودند. یعنی نسبت تعداد مردها به زن‌ها ۱/۰۴ بود. جمعیت شهرنشین کشور ۵/۹۵۳/۵۶۳ نفر و جمعیت روستایی ۱۳/۰۰۱/۱۴۱ نفر بود. تراکم جمعیت در کشور ۱۲ نفر در هر کیلومتر مربع به دست آمد.

سرشماری بعدی مطابق قانون، ۱۰ سال بعد در سال ۱۳۴۵ برگزار شد. این سرشماری اولین سرشماری است که به وسیله مرکز آمار ایران که در سال ۱۳۴۴ به این منظور تأسیس شده بود، برگزار شد. قبل از شروع سرشماری، به‌طور آزمایشی در دو شهر سرشماری انجام شد تا مشکلات و معایب کار عیان شود. جمعیت ایران در این سرشماری ۲۵/۷۸۸/۷۲۲ نفر بود که شامل ۵/۱۶۷/۱۹۲ خانوار (برای اولین بار است که به‌طور رسمی در کشور تعداد خانوار ذکر می‌شود) می‌شد. از این جمعیت، ۱۳/۳۵۵/۸۰۱ نفر مرد و ۱۲/۴۳۲/۹۲۱ نفر زن و نسبت مردان به زنان ۱/۰۷ بود.

مجدداً در سال ۱۳۵۵ سومین

سرشماری عمومی نفوس و مسکن ایران به وسیله مرکز آمار ایران انجام شد. در این سرشماری نیز به منظور آزمایش پرسش‌نامه و بررسی مفاد آن‌ها از یک سال قبل در شش شهر سرشماری برگزار شد. این سرشماری از ۸ تا ۲۸ آبان‌ماه سال ۱۳۵۵ طول کشید و طبق اطلاعات آن، جمعیت ایران برابر ۳۳/۷۰۸/۷۴۴ نفر، تعداد مردان ۱۶/۳۵۲/۳۹۷ نفر، تعداد زنان ۱۷/۳۵۶/۳۴۷ نفر و نسبت مردان به زنان ۱/۰۶ اعلام شد.

* پی‌نوشت‌ها

۱. میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله متولد سال ۱۲۵۵ و وفات به سال ۱۳۲۶ هجری قمری، فرزند آخوند ملاعلی محمد اصفهانی، او به تشویق علی‌قلی میرزا اعتضادالسلطنه در زمره شاگردان مدرسه دارالفنون درآمد و در محضر معلمان فرنگی، زبان‌های بیگانه را آموخت و با ریاضیات جدید عصر خود آشنایی کامل پیدا کرد. خود او می‌نویسد قبل از سن ۲۰ سالگی به تدریس علوم ریاضی در دارالفنون مشغول و معلم کل علوم ریاضی آن مدرسه شده است.
۲. در این سرشماری از جمله اطلاعاتی که می‌خواستند، نام همسر بود. در آن زمان مردان از عنوان کردن نام همسر خود بین عموم خودداری می‌کردند. از این‌رو در مقابل این سؤال مقاومت می‌کردند. نزدیک بود بلوایی در شهر پیش آید که با وساطت معتمدین شهر، این قلم از پرسش‌نامه حذف شد.



پیکارجویان پرسش‌های

اگر برای عدد حقیقی x و عدد طبیعی و دلخواه $n > 1$ داشته باشیم:

$$x^n = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$$

x متعلق به آن است، کدام است؟

(الف) $(2, 2 + \frac{1}{n})$

(ج) $(2 - \frac{1}{n}, 2)$

(ه) $(2, 2 + \frac{2}{n})$

(ب) $(2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$

(د) $(2 - \frac{2}{n}, 2)$

ایستگاه اعداد



احسان یارمحمدی

- کارگردان: کاسپار بارفورد^۱
- تهیه‌کنندگان: شِن فرست^۲، برایان فرست^۳ و نایجل توماس^۴
- فیلم‌نامه‌نویس: اف. اسکات فریزر^۵
- بازیگران: جان کیوساک^۶ و مالین آکرمن^۷
- موسیقی: پل لئونارد - مورگان^۸
- تدوین: کریس جیل^۹ و پر سندهلت^{۱۰}
- تاریخ اکران: ۱۸ آوریل ۲۰۱۳ در دانمارک و ۲۶ آوریل ۲۰۱۳ در ایالات متحده آمریکا*
- مدت فیلم: ۸۹ دقیقه
- محصول: پادشاهی متحده بریتانیا، ایالات متحده آمریکا و بلژیک
- زبان فیلم: انگلیسی



به انجام رساندن چنین مقصودی، یعنی پنهان داشتن مفهوم پیام‌ها، مبحثی را تشکیل می‌دهد که آن را تحت عنوان «رمزنگاری» می‌شناسیم.

پیش از پیدایش پُست به مفهوم امروزی آن و ارسال الکترونیکی اطلاعات، شیوه معمول فرستادن پیام، استفاده از قاصد خصوصی بود. با وجود این، باز هم غالباً صلاح در این بود که از روش‌های پنهان‌سازی رمزنگاری استفاده شود، زیرا امکان دستگیر شدن قاصد یا خیانت وی وجود داشت. در روزگار کنونی هم، از پیامی که با بی‌سیم انتقال یابد، هر کسی که ابزار مناسب را داشته باشد و از آن در زمان مناسب با انتخاب فرکانس صحیح استفاده کند، می‌تواند رونوشت بردارد. در چنین موردی نیز، اگر پنهان کردن محتوای پیام، موردنظر فرستنده باشد، باید از نوعی شیوه پنهان‌سازی رمزنگاری استفاده کند.

اما همان‌طور که فرستنده پیام تلاش می‌کند اطلاعات خود را از هر کس مگر گیرنده موردنظر پنهان دارد، کسانی هم هستند که به کشف محتوای پیام بسیار علاقه‌مندند، و چه بسا این افراد از همان کسانی باشند که فرستنده تلاش دارد، اطلاعات خود را از ایشان پنهان دارد. اگر چنین کسانی به طریقی رونوشتی از پیام رمزی را

نام فیلم، ایستگاه اعداد، برگرفته از روشی است که برای ارسال پیام‌های رمزار از آن استفاده می‌شود. به‌همین دلیل ابتدا به معرفی رمزنگاری و رمزگشایی می‌پردازیم. سپس با استفاده از ماتریس‌ها و ارائه یک مثال، دانش‌آموزان را بیشتر و بهتر با رمزنگاری به روش ریاضی آشنا می‌کنیم، تا بدین ترتیب هم مقدمه‌ای برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به رشته رمزنگاری و رمزگشایی که می‌توانند در دوران تحصیلات تکمیلی دانشگاهی، این رشته را برگزینند، فراهم کرده باشیم و هم پیش‌زمینه‌ای را برای درک مفیدتر و عمیق‌تر فیلم مزبور به آن‌ها ارائه کرده باشیم.

پیشرفت بشر تا اندازه زیادی مرهون قابلیت وی در برقراری ارتباط است و یک جنبه اساسی این قابلیت، توانایی برقراری ارتباط از طریق نوشتن است. از همان نخستین روزهای نوشتن، موقعیت‌هایی پیش می‌آمد که کسانی می‌خواستند اطلاعات خود را منحصراً به عده محدودی برسانند. آنان اسراری داشتند که می‌خواستند فاش نشود. برای این کار، طرح‌هایی یافتند که از آن راه می‌توانستند برای کسانی که به اطلاعات به‌خصوص مورد نیاز برای از رمز درآوردن دسترسی نداشتند، مکاتبه‌های خود را نامفهوم سازند. تکنیک‌های کلی برای

به دست آورند، در آشکار کردن رازی که پیام حاوی آن است، خواهند کوشید. البته تلاش آن‌ها بدون داشتن اطلاعاتی درباره جزئیات عمل رمزنگاری، که برای پنهان ساختن مضمون پیام به کار رفته است، انجام خواهد پذیرفت. تلاشی که از این راه و با هدف خواندن پیام‌های سری انجام پذیرد، تحت عنوان مبحثی قرار می‌گیرد که «رمزگشایی» نامیده می‌شود.

در تاریخ از موارد فراوانی می‌توان یاد کرد که رمزگشایی موفقیت‌آمیز، عامل خیلی مهمی در به دست آوردن موفقیت‌های سیاسی، کسب پیروزی‌های نظامی، دستگیری جنایتکاران و فعالیت‌های ضد جاسوسی بوده است. در ترجمه اسناد تاریخی که از بایگانی‌های رسمی به دست آمده‌اند و تشخیص داده شده که به زبان سری نوشته شده‌اند، همچنین در بازسازی زبان‌هایی که مدت‌ها پیش از بین رفته‌اند و کسی درباره آن‌ها چیزی نمی‌داند و در حقیقت زبان‌هایی سری محسوب می‌شوند نیز رمزگشایی سهیم بوده است. فرایندهای تحلیلی که در رمزگشایی به کار می‌روند، با استفاده

نکته ۱. اگر A ماتریسی مربعی با دترمینان مخالف صفر ($\det(A) = |A| \neq 0$) باشد، آن گاه ماتریس A معکوس پذیر و دارای معکوس A^{-1} است.

نکته ۲. اگر A ماتریسی معکوس پذیر باشد، آن گاه داریم: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (ماتریس همانی I هم مرتبه با ماتریس A است).

نکته ۳. اگر A ماتریسی معکوس پذیر باشد، آن گاه داریم: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ (A^* ماتریس الحاقی A^T هم مرتبه با ماتریس A است).

نکته ۴. اعمال سطری مقدماتی عبارت‌اند از:

- تعویض دو سطر از ماتریس با یکدیگر.
- ضرب یک سطر از ماتریس در یک عدد حقیقی مخالف صفر.
- اضافه کردن مضربی از یک سطر ماتریس به سطر دیگر آن.

نکته ۵. اعمال ستونی مقدماتی عبارت‌اند از:

- تعویض دو ستون از ماتریس با یکدیگر.
- ضرب یک ستون ماتریس در یک عدد حقیقی مخالف صفر.
- اضافه کردن مضربی از یک ستون ماتریس به ستون دیگر آن.



برای به رمز درآوردن یک پیام با استفاده از ماتریس‌ها، به دو ماتریس قابل ضرب مربعی A و ماتریس B (نه الزاماً مربعی) به گونه‌ای نیازمندیم که متن رمز در قالب حاصل ضرب دو ماتریس A و B ارائه شود. به بیان بهتر، ماتریس B دربرگیرنده پیام اصلی است که به صورت رمز درآمده، ماتریس A کلید رسیدن به پیام رمز آلود شده است، و ماتریس AB حاوی رمزی است که حامل رمز آن را در اختیار دارد و می‌باید از تساوی ماتریسی $A^{-1}(AB) = B$ به محاسبه ماتریس B بپردازیم. (البته روشن است که حامل رمز تنها ماتریس AB را در اختیار دارد. از طرف دیگر، فردی که می‌خواهد رمزگشایی کند، می‌باید ماتریس A را در اختیار داشته باشد تا به واسطه آن A^{-1} مطلوب را تعیین کند و سپس با عملیات ضرب $A^{-1}(AB)$ به ماتریس B که هدف اصلی در این محاسبه است، دست پیدا کند.)

بنابراین بحث اصلی می‌باید روی ماتریس A انجام پذیرد. چراکه بدون این ماتریس عملاً رمز گشوده نمی‌شود. اما آیا هر ماتریس مربعی را می‌توان به عنوان ماتریس A در نظر گرفت و با انجام محاسبات لازم به مقصود نهایی رسید؟ در پاسخ بیان می‌کنیم که می‌توان هر ماتریس مربعی را به عنوان ماتریس A در نظر گرفت. اما اگر برای این ماتریس



از تکنیک‌هایی صورت می‌گیرند که بعضی ریاضی‌اند، بعضی مربوط به زبان‌اند، بعضی ماهیت مهندسی دارند، و بعضی هم به راحتی قابل توصیف نیستند؛ مانند شانس، فراست، حس ششم و غیره.^{۱۱}

رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها^{۱۲}

رمزدار کردن پیام‌ها نیز در طول زمان‌های گذشته از اسلوب‌ها و مناسک متفاوت و متمایزی پیروی کرده‌اند که مجال پرداختن به آن‌ها از حوصله این مقاله خارج است. اما آنچه در این مقاله ملاک و معیار رمزدار کردن یک پیام است، بهره‌گیری و استفاده از مفاهیم ماتریس‌ها در جهت رمزدار کردن یک پیام است. بنابراین به ریاضی‌آموزان پیشنهاد می‌شود که برای درک بهتر و بیشتر این مقاله، آشنایی لازم و کافی را با مفاهیمی مانند: ضرب ماتریس‌ها، ماتریس مربعی^{۱۳}، قطر اصلی^{۱۴}، ماتریس، دترمینان^{۱۵}، ماتریس معکوس پذیر^{۱۶}، ماتریس بالا مثلثی^{۱۷}، ماتریس پایین مثلثی^{۱۸}، اعمال سطری مقدماتی^{۱۹} و اعمال ستونی مقدماتی^{۲۰} داشته باشند. البته تعدادی از مطالب و نکات لازم برای مطالعه رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها را قبل از ورود به آن آورده‌ایم.

مثال: فردی پیام زیر را دریافت کرده است. چگونگی رمزگشایی و رمزنگاری این پیام را در زیر مشاهده می‌کنید:

۳۸, -۴, -۳, -۳۷, -۲۰۹, -۷۱, -۱۵۳, ۱۵۵, -۱۶, ۲۱, ۴۳, -۴۸, -۱۹, -۲۷, -۴۷, ۱۱۵, ۳۰, -۲۸, -۵۴, ۸۴

$$AB = \begin{bmatrix} 38 & -209 & -16 & -19 & 30 \\ -4 & -71 & 21 & -27 & -28 \\ -3 & -153 & 43 & -47 & -54 \\ -37 & 155 & -48 & 115 & 84 \end{bmatrix}$$

دریافت کننده این پیام بعد از دریافت آن، اعداد قرار گرفته شده در این پیام را در قالب ماتریس روبه‌رو می‌گنجاند.

$$A = \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 & 2 \\ 6 & -4 & 7 & 1 \\ 13 & -8 & 14 & 2 \\ -13 & 11 & -21 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{البته وی به ماتریس}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 5 & -1 \\ -1 & -105 & 43 & -7 \\ 7 & 696 & -287 & 45 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}(AB) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 5 & -1 \\ -1 & -105 & 43 & -7 \\ 7 & 696 & -287 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 & -209 & -16 & -19 & 30 \\ -4 & -71 & 21 & -27 & -28 \\ -3 & -153 & 43 & -47 & -54 \\ -37 & 155 & -48 & 115 & 84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & -10 & 1 & 10 \\ -6 & 0 & -4 & -10 & 0 \\ 8 & 7 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = B \quad \text{بنابراین:}$$

۵, ۰, -۶, ۸, -۱۱, ۳, ۰, ۷, ۱, -۱۰, -۴, ۳, ۷, ۱, -۱۰, ۵, ۲, ۱۰, ۰, ۰

بنابراین:

اکنون با متناظر کردن هر یک از اعداد بالا با حروف انگلیسی بنابر آنچه که بیان شده است، پیام زیر را به‌دست می‌آورد:

I LOVE MATHEMATICS

روش محاسبه ماتریس A توسط اعضای گروه طراحی رمز:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_1+R_2, R_2+R_3} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 7 & 1 \\ 11 & -5 & 7 & 1 \\ 9 & 4 & 6 & 1 \\ 6 & -4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_1+R_2} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 7 & 1 \\ 11 & -5 & 7 & 1 \\ 20 & -1 & 13 & 2 \\ 6 & -4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_1+R_1, -2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 13 & -8 & 14 & 2 \\ -1 & 3 & -7 & -1 \\ 20 & -1 & 13 & 2 \\ 6 & -4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2, R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 & -1 \\ 13 & -8 & 14 & 2 \\ 20 & -1 & 13 & 2 \\ 6 & -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 & 2 \\ 6 & -4 & 7 & 1 \\ 13 & -8 & 14 & 2 \\ -1 & 3 & -7 & -1 \end{bmatrix} \xRightarrow{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 & 2 \\ 6 & -4 & 7 & 1 \\ 13 & -8 & 14 & 2 \\ -13 & 11 & -21 & -3 \end{bmatrix} = A \Rightarrow |A| = 1$$

بنابراین:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 5 & -1 \\ -1 & -105 & 43 & -7 \\ 7 & 696 & -287 & 45 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = 1$$





داستان فیلم

امرسون کنت یکی از مأموران سرویس اطلاعاتی ایالات متحده آمریکا است که به عنوان عضو حرفه‌ای این سازمان زیر نظر مافوق خود، **مایکل گری**، مأموریت‌هایی را انجام می‌دهد. مأموریت جدید او اعزام به کشور انگلیس و ورود به یک ایستگاه اعداد و همراهی و محافظت از شخصی به نام **کاترین** است که به عنوان گوینده اعداد قرار است در این ایستگاه فعالیت کند. بعد از گذشت چند روز از آغاز فعالیت آن‌ها در ایستگاه اعداد، عده‌ای به آن‌ها حمله می‌کنند که هدفشان دست یافتن به اطلاعات محرمانه‌ای است که در این ایستگاه اعداد ارسال و تبادل می‌شود. در این بین درگیری‌هایی صورت می‌گیرد که در نهایت با اتخاذ تصمیم‌ها و ابتکار عمل‌های درست از جانب **امرسون کنت**، باعث نجات جان او و کاترین می‌شود. در اینجا از پرداختن به جزئیات این فیلم پرهیز می‌کنیم تا به هنگام تماشای آن از انگیزه و هیجان کافی برخوردار باشید.

ایستگاه اعداد چیست؟

ایستگاه اعداد یک ایستگاه رادیویی موج کوتاه است که معمولاً در آن‌ها یک زن در حال خواندن یک مجموعه از اعداد است. البته گاهی در این ایستگاه‌ها به جای استفاده از یک زن برای خواندن اعداد مزبور، از یک مرد یا از یک بچه یا از یک ربات یا تلفیقی از صدای آن‌ها استفاده می‌شود. هر چند که تاکنون هیچ کشور یا سازمانی مسئولیت ایستگاه‌های اعداد و اعداد ارسال شده در آن‌ها را به عهده نگرفته است، اما در حقیقت این ایستگاه‌های اعداد به منظور ارسال پیام‌های محرمانه و رمزگونه برای مأموران اطلاعاتی و جاسوسان از جانب سرویس‌های اطلاعاتی و جاسوسی کشورها مورد استفاده قرار می‌گیرد. جاسوسان نیز با در اختیار داشتن کلید رمزشما، می‌توانند به پیام نهفته در رمز دست یابند. اولین استفاده از ایستگاه‌های اعداد به جنگ جهانی اول باز می‌گردد و بیشترین استفاده از این ایستگاه‌ها به دوران جنگ سرد بین دو ابرقدرت شرق و غرب، یعنی اتحاد جماهیر شوروی و ایالات متحده آمریکا برمی‌گردد. استفاده از ایستگاه‌های اعداد بعد از پایان جنگ سرد در سال ۱۹۸۹ و فروپاشی اتحاد جماهیر شوروی در سال ۱۹۹۱ رو به کاهش نهاد. اما امروزه هنوز تعدادی از آن‌ها با تغییراتی در طراحی این ایستگاه‌ها و نیز دگرگونی‌هایی در چگونگی استفاده از گوینده اعداد، فعال هستند.

* پی‌نوشت

1. Kaspar Barford
2. Sean Furst
3. Bryan Furst
4. Nigel Thomas
5. F. Scott Frazier
6. John Cusack
7. Malin Akerman
8. Paul Leonard - Morgan
9. Chris Gill
10. Per Sandholt

۱۱. برگرفته از کتاب «آشنایی با رمزگشایی به روش ریاضی» به قلم **آبراهام سینکوف** که توسط **رویا درودی** و **عبادالله محمودیان** به فارسی برگردان شده و چاپ نخست آن در سال ۱۳۷۴ در «انتشارات مرکز نشر دانشگاهی» به زیور طبع آراسته شده است.

۱۲. ریاضی‌آموزان برای بررسی بیشتر و بهتر روش رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها می‌توانند به مقاله «**رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها**» به قلم **احسان یارمحمدی** در شماره ۲ «مجله ریاضی پایا» که در تابستان ۱۳۹۲ در شرکت آموزشی فرهنگی «مبتکران» به زیور طبع آراسته شده است، مراجعه کنند.

13. Square Matrices
14. Diagonal
15. Determinant
16. Invertible Matrix
17. Upper Triangular Matrix
18. Lower Triangular Matrix
19. Elementary Row Operations
20. Elementary Column Operations
21. Identity Matrix
22. Adjacency Matrix
23. Integer Numbers

۲۴. ریاضی‌آموزان برای درک بهتر این موضوع بهتر است که قبل از بررسی مثال‌ها و تمرین‌های این مقاله مثال زیر را مورد کنکاش قرار دهند:

فردی پیام زیر را دریافت کرده است. چگونگی رمزگشایی و رمزنگاری این پیام را در مقابل مشاهده می‌کنید: $26, 73, -33, -102, -1, -8$. دریافت‌کننده این پیام بعد از دریافت آن، اعداد پیام را در قالب ماتریس زیر می‌گنجاند:

$$A = \begin{bmatrix} 26 & -33 & -1 \\ 73 & -102 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6/667 & -2/333 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

البته وی به ماتریس A ، $|A| = 3 \neq \pm 1$ ، نیز برای انجام محاسبات لازم برای رمزگشایی پیام نیاز دارد. پس:

$$A^{-1}(AB) = \begin{bmatrix} 6/667 & -2/333 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 & -33 & -1 \\ 73 & -102 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/033 & 17/955 & 11/997 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \approx B$$

با انتخاب مقادیر تقریبی برای درایه‌های ماتریس B داریم: $3, 5, 18, 3, 12, 5$

۲۵. ممکن است تعدادی از ریاضی‌آموزان از بیان این مطلب دچار تعجب شوند که چگونه امکان دارد که بنابر اعمال سطری یا ستونی مقدماتی، سطر یا ستونی از یک ماتریس در یک عدد حقیقی مخالف صفر ضرب شود، اما دترمینان آن تغییر نکند. در اینجا منظور نگارنده مقاله از انجام اعمال سطری و ستونی مقدماتی برای تغییر ظاهر و ساختمان ماتریس، استفاده از اضافه کردن مضربی از یک سطر یا ستون ماتریس به سطر یا ستون دیگری از آن است که انجام این اعمال هیچ‌گونه تغییری در مقدار دترمینان ماتریس‌های بالامثلی یا پایین‌مثلثی که دترمینان آن‌ها همواره برابر 1 یا -1 باشد، ایجاد نمی‌کند. در ضمن هنگام انجام اعمال سطری یا ستونی مقدماتی با استفاده از روش تعویض دو سطر یا ستون از ماتریس با یکدیگر، اگر تعداد تعویض‌های سطرها یا ستون‌ها با یکدیگر عددی زوج باشد، دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند و اگر تعداد تعویض‌های سطرها یا ستون‌ها با یکدیگر عدد فردی باشد، دترمینان ماتریس قرینه می‌شود.

* فیلم ایستگاه اعداد (به صورت دوبله شده به زبان فارسی) در ساعت ۳۰ دقیقه بامداد روز ۹۵/۲/۲۱ از شبکه ۳ سیمای جمهوری اسلامی ایران پخش شده است.



ایستگاه دوم



کاوه، پرویز، حمید و مجید چهار برادر همزاد هستند که در ظاهر کاملاً شبیه هم و غیرقابل تشخیص‌اند.

کاوه راست‌گویی عاقل است. یعنی همه‌چیز را به درستی تشخیص می‌دهد و راست هم می‌گوید. مثلاً می‌داند که آب مایع است و اگر از او بپرسید که آیا آب مایع است، می‌گوید: بله.

اما پرویز یک راست‌گوی دیوانه است! یعنی همه‌چیز را به غلط تشخیص می‌دهد و باورهایش نادرست‌اند. گرچه در گفتارش صادق است و هرچه را تشخیص می‌دهد، عیناً بیان می‌کند. مثلاً اگر از او بپرسید که آیا 2×2 مساوی ۴ است، باورش این است که این‌طور نیست و صادقانه می‌گوید: خیر!

حمید دروغ‌گویی عاقل است. یعنی همه باورهایش دقیق و درست‌اند، اما به عمد همیشه دروغ می‌گوید. پس اگر از او هم بپرسید آیا 2×2 مساوی ۴ است، با اینکه می‌داند درست است، اما می‌گوید: خیر! و بالاخره مجید یک دروغ‌گوی دیوانه است. یعنی همه باورهایش غلط هستند و در عین حال، به عمد دروغ هم می‌گوید! حالا اگر از او بپرسید که آیا 2×2 مساوی ۴ است، باورش این است که غلط است، اما چون می‌خواهد دروغ بگوید، می‌گوید: بله!

حالا که این چهار برادر را شناختید، این مسئله‌ها را که در ارتباط با آن‌ها هستند حل کنید:

۱. فرض کنید روزی شما دوتا از این برادرها را در جایی می‌بینید و به شما گفته‌اند که آن‌ها کاوه و مجید هستند. آیا می‌توانید با یک پرسش از یکی از آن‌ها، هویت هر یک از آن‌ها را تشخیص دهید؟

۲. فرض کنید روزی شما یکی از برادرها را در خیابان می‌بینید و می‌خواهید نام او را بدانید. چگونه می‌توانید با دو پرسش، که پاسخ آن‌ها بله یا خیر باشد، او را شناسایی کنید؟

۳. کاوه و پرویز هر دو ازدواج کرده‌اند ولی حمید و مجید مجردند. روزی شما یکی از چهار برادر را می‌بینید و می‌خواهید بدانید که آیا او ازدواج کرده است یا خیر. با چه سؤال‌هایی با پاسخ بله یا خیر می‌توانید به هدف‌تان برسید؟

۴. آیا می‌توانید یک سؤال از این برادرها بپرسید که همه آن‌ها به آن پاسخ بله بدهند؟



اشاره

دومین شماره پای تخته را در سال تحصیلی جدید پیش رو دارید. در این شماره ۱۰ مسئله جدید و جالب مطرح شده‌اند که از حل آن‌ها لذت خواهید برد. حل مسائل ۱۹۱ تا ۲۰۰ نیز در این شماره آمده‌اند.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۲۷. x را بیابید، اگر $x! = \frac{(7!)!}{7!}$.

۲۲۸. دو عدد یکان و دهگان عدد بزرگ $9^{9^{9^{9^5}}}$ را بیابید (۹ به توان ۸ به توان ... به توان ۵)

۲۲۹. همه اعداد طبیعی n را بیابید، به طوری که $\frac{(n+1)^7}{n+7}$ عددی صحیح باشد.

۲۳۰. همه اعداد اول p را بیابید، به طوری که عدد p رقمی $1...111$ مضرب p باشد.

بخش دوم:
راه حل‌ها

۱۹۱. a عددی است حقیقی به طوری که: $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$. مقدار $a^3 + \frac{1}{a^3}$ را به دست آورید.

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 = 14 \rightarrow a + \frac{1}{a} = \pm 4$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = (a + \frac{1}{a})^3 - 3(a + \frac{1}{a})$$

$$= (\pm 4)^3 - 3(\pm 4) = \pm 64 \mp 12 = \pm 52$$

۲۲۱. اگر: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 1$ ، مقدار عبارت $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$ را بیابید.

۲۲۲. مجموع همه ریشه‌های حقیقی معادله زیر را بیابید.

$$(x^2 + 5x + 5)^{x^2 - 10x + 21} = 1$$

۲۲۳. چند جمله‌ای $f(x)$ در تساوی زیر صدق می‌کند. ضابطه f را بیابید.

$$f(x) + (x+1)^3 = 2f(x+1)$$

۲۲۴. اگر: $|a-b|=2$ ، $|b-c|=3$ و $|c-d|=4$ ، مجموع همه مقادیر ممکن برای $a-d$ را بیابید.

۲۲۵. مجموع دو عدد طبیعی را بیابید که حاصل ضرب آن‌ها برابر است با: 10^{1395} ، اما هیچ کدام از آن دو عدد، رقم صفر ندارند.

۲۲۶. برای آنکه تساوی زیر صحیح باشد، تعداد جملات زیر رادیکال چندانست؟

$$\sqrt{17^2 + 17^2 + \dots + 17^2} = 17^2 + 17^2 + 17^2$$

۱۹۲. بزرگ‌ترین توان ۲ را پیدا کنید که عدد $K=75!-71!$ را می‌شمارد.

می‌دانیم که توان عدد اول p در تجزیه $n!$ برابر است با: $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right]$.
در نتیجه در تجزیه ۷۱!، توان ۲ برابر است با: $1+2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024+2048+4096+8192+16384+32768+65536+131072+262144+524288+1048576+2097152+4194304+8388608+16777216+33554432+67108864+134217728+268435456+536870912+1073741824+2147483648+4294967296+8589934592+17179869184+34359738368+68719476736+137438953472+274877906944+549755813888+1099511627776+2199023255552+4398046511104+8796093022208+17592186044416+35184372088832+70368744177664+140737488355328+281474976710656+562949953421312+1125899906842624+2251799813685248+4503599627370496+9007199254740992+18014398509481984+36028797018963968+72057594037927936+144115188075855872+288230376151711744+576460752303423488+1152921504606846976+2305843009213693952+4611686018427387904+9223372036854775808+18446744073709551616+36893488147419103232+73786976294838206464+147573952589676412928+295147905179352825856+590295810358705651712+1180591620717411303424+2361183241434822606848+4722366482869645213696+9444732965739290427392+18889465931478580854784+37778931862957161709568+75557863725914323419136+151115727451828646838272+302231454903657293676544+604462909807314587353088+1208925819614629174706176+2417851639229258349412352+4835703278458516698824704+9671406556917033397649408+19342813113834066795298816+38685626227668133590597632+77371252455336267181195264+154742504910672534362390528+309485009821345068724781056+618970019642690137449562112+1237940039285380274899124224+2475880078570760549798248448+4951760157141521099596496896+9903520314283042199192993792+19807040628566084398385987584+39614081257132168796771975168+79228162514264337593543950336+158456325028528675187087900672+316912650057057350374175801344+633825300114114700748351602688+1267650600228229401496703205376+2535301200456458802993406410752+5070602400912917605986812821504+10141204801825835211973625643008+20282409603651670423947251286016+40564819207303340847894502572032+81129638414606681695789005144064+162259276829213363391578010288128+324518553658426726783156020576256+649037107316853453566312041152512+1298074214633706907132624082305024+2596148429267413814265248164610048+5192296858534827628530496329220096+10384593717069655257060992658440192+20769187434139310514121985316880384+41538374868278621028243970633760768+83076749736557242056487941267521536+166153499473114484112975882535043072+332306998946228968225951765070086144+664613997892457936451903530140172288+1329227995784915872903807060280344704+2658455991569831745807614120560689408+5316911983139663491615228241121378816+10633823966279326983230456482242757632+21267647932558653966460912964485515264+42535295865117307932921825928971030528+85070591730234615865843651857942061056+170141183460469231731687303715884122112+340282366920938463463374607431768244224+680564733841876926926749214863536488448+1361129467683753853853498429727072976896+2722258935367507707706996859454145953792+5444517870735015415413993718908291907584+10889035741470030830827987437816583815168+21778071482940061661655974875633167630336+43556142965880123323311949751266335260672+87112285931760246646623899502532670521344+174224571863520493293247799005065341042688+348449143727040986586495598010130682085376+696898287454081973172991196020261364170752+1393796574908163946345982392040522728341504+2787593149816327892691964784081045456683008+5575186299632655785383929568162090913366016+11150372599265311570767859136324181826732032+22300745198530623141535718272648363653464064+44601490397061246283071436545296727306928128+89202980794122492566142873090593454613856352+178405961588244985132285746181186909227712704+35681192317648997026457149236237381845542528+71362384635297994052914298472474763691085056+142724769270595988105828596944949527382170112+285449538541191976211657193889899054764340224+570899077082383952423314387779798109528680448+1141798154164767904846628775559596219057360896+2283596308329535809693257551119192438114721792+4567192616659071619386515102238384876229443584+9134385233318143238773030204476769752458887168+182687704666362864775460604089535395049177536+365375409332725729550921208179070790098355072+730750818665451459101842416358141580196710144+1461501637330902918203684832716283160393420288+2923003274661805836407369665432566320786840576+5846006549323611672814739330865132641573681152+11692013098647223345629478661730265283147362304+23384026197294446691258957323460530566294724608+46768052394588893382517914646921061132589449216+93536104789177786765035829293842122265178898432+187072209578355573530071658587684244530357796864+374144419156711147060143317175368489060715593728+748288838313422294120286634350736978121431187456+1496577676626844588240573268701473956242862374912+2993155353253689176481146537402947912485724749824+5986310706507378352962293074805895824971449499648+11972621413014756705924586149611791649942898999296+23945242826029513411849172299223583299885797998592+47890485652059026823698344598447166599771595997184+95780971304118053647396689196894333199543191994368+191561942608236107294793378393788666399086383988736+383123885216472214589586756787577332798172767977472+766247770432944429179173513575154665596345535954944+1532495540865888858358347027150309331192691071909888+3064991081731777716716694054300618662385382143819776+6129982163463555433433388108601237324770764287639552+12259964326927110866866776217202474649541528575279104+24519928653854221733733552434404949299083057150558208+49039857307708443467467104868809898598166114301116416+98079714615416886934934209737619797196332228602232832+196159429230833773869868419475239594392664457204465664+392318858461667547739736838950479188785328914408931328+784637716923335095479473677900958377570657828817862656+1569275433846670190958947355801916755141315657635725312+3138550867693340381917894711603833510282631315271450624+627710173538668076383578942320766702056526263054290128+1255420347077336152767157884641533404113052526108580256+2510840694154672305534315769283066808226105052217160512+5021681388309344611068631538566133616452210104434321024+1004336277661868922213726307713226732890442020886864256+2008672555323737844427452615426453465780884041773728512+4017345110647475688854905230852906931561768083547447024+8034690221294951377709810461705813863123536167094894048+16069380442589902755419620923411627726247072334189788096+32138760885179805510839241846823255452494144668379576192+64277521770359611021678483693646510904988289336759152384+128555043540719222043356967387293021809976578673518304768+257110087081438444086713934774586043619953157347036609536+514220174162876888173427869549172087239906314694073219072+1028440348325753776346855739098344174479812629388146438144+2056880696651507552693711478196688348959625258776292876288+4113761393303015105387422956393376697919250517552585752576+8227522786606030210774845912786753395838501035105171155152+16455045573212060421549691825573506791677002070210342310304+32910091146424120843099383651147013583354004140420684620608+65820182292848241686198767302294027166708008280841369241216+13164036458569648337239753460458805433341601656168273842432+26328072917139296674479506920917610866683203312336547684864+52656145834278593348959013841835221733366406624673095369728+105312291668557186697918027683670443466732813249346190739456+210624583337114373395836055367340886933465626498692381478912+421249166674228746791672110734681773866931252997384762957824+842498333348457493583344221469363547733862505994769525915648+1684996666696914987166688442938727095467725011989539051231296+3369993333393829974333376885877454190935450023979078102462592+6739986666787659948666753771754908381870900047958156204925184+13479973333575319897333507543509816763741800095916312409850368+26959946667150639794667015087019633527483600191832624819700736+53919893334301279589334030174039267054967200383665249639401472+10783978666860255917866806034807853410993440076733049927882344+21567957333720511835733612069615706821986880153466099855764688+43135914667441023671467224139231413643973760306932199711529376+86271829334882047342934448278462827287947520613864399423058752+172543658669764094685868896556925654575895041227728798846117504+345087317339528189371737793113851309151790082455457597692235008+690174634679056378743475586227702618303580164910915195384470016+1380349269358112757486951172455405236607160329821830390768940032+2760698538716225514973902344910810473214320659643660781537880064+5521397077432451029947804689821620946428641319287321563075760128+11042794154864902059895609379643241892857282638574643126151520256+22085588309729804119791218759286483785714565277149286252303040512+44171176619459608239582437518572967571429130554298572504606081024+88342353238919216479164875037145935142858261108597145009212162048+176684706477838432958329750074291870285716522217194290018424324096+353369412955676865916659500148583740571433044434388580036848648192+706738825911353731833319000297167481142866088868777160073697376384+1413477651822707463666638000594334962285732177737554320147394752768+2826955303645414927333276001188669924571464355475108640294789505536+5653910607290829854666552002377339849142928710950217280589579011072+11307821214581659709333104004754679698285857421900434561179158022144+22615642429163319418666208009509359396571714843800869122358316044288+45231284858326638837332416019018718793143429687601738244716632088576+90462569716653277674664832038037437586286859375203476489433264177152+180925139433306555349329664076074875172573718750406952978866528354304+361850278866613110698659328152149750345147437500813905957733056708608+723700557733226221397318656304299500690294875001627811915466113417216+1447401115466452442794637312608599001380589750003255623830932226834432+2894802230932904885589274625217198002761179500006511276611864453668864+5789604461865809771178549250434396005522359000013022253223728907337728+11579208923731619542357098500868792011044718000026044506447457814675456+23158417847463239084714197001737584022089436000052089012894916029350912+46316835694926478169428394003475168044178872000104177805789832058701824+9263367138985295633885678800695033608835774400020835561577966411740368+18526734277970591267771357601390067217671548800041671123155932823480736+37053468555941182535542715202780134435343097600083342246318656466961472+74106937111882365071085430405560268870686195200166684492637312933922944+148213874223764730142170860811120537741372390400333368985274625867845888+296427748447529460284341721622241075482744780800666737970549251735691776+592855496895058920568683443244482150965489561601333475941098503471383552+1185710993790117841137366886488964301930979123200266751882197006942767104+2371421987580235682274733772977928603861958246400533503764394013885534208+4742843975160471364549467545955857207723916492801067007528788027771068416+9485687950320942729098935091911714415447832985602134015057576055542136832+18971375900641885458197870183823428830895665971204268030115152111084273664+37942751801283770916395740367646857661791331942408536060230304222168547328+75885503602567541832791480735293715323582663884817072120460608444337094656+151771007205135083665582961470587430647165307769634144240921216888674189312+303542014410270167331165922941174861294330615539268288481842433777348378624+607084028820540334662331845882349722588661231078536576963684867554696757248+1214168057641080669324663691764699445177322462157073153927369735109393514496+2428336115282161338649327383529398890354644924314146307854739470218787028992+4856672230564322677298654767058797780709289848628292615709478940437574057984+9713344461128645354597309534117595561418579697256585231418957880875148115968+19426688922257290709194619068235191122837159394513170462837915761750296231936+38853377844514581418389238136470382245674318789026340925675831523500592463872+77706755689029162836778476272940764491348637578052681851351663047001184927744+15541351137805832567355695254588152898269727515610536370270332609400236985528+31082702275611665134711390509176305796539455031221072740540665218800473971056+62165404551223330269422781018352611593078910062442145481081330437600947942112+124330809102446660538845562036705223186157820124884290962162660875201895884224+248661618204893321077691124073410446372315640249768581924325321750403791768448+4973232364097866421553822481468208927446312804995371638486506435008075835368$

آموزش ترجمه متون ریاضی

برای ترجمه دانش آموزان

3. Use The Factor Theorem

If $R=P(r)=0$ in the equation $P(x)=(x-r)Q(x)+R$, then $P(x)$ factors as $(x-r)Q(x)$. This fact can help us factor polynomials.

The Factor Theorem

If $P(x)$ is a polynomial function and r is any number, then

If $P(r)=0$, then $x-r$ is a factor of $P(x)$.

If $x-r$ is a factor of $P(x)$, then $P(r)=0$.

PROOF

Part1: First, we assume that $P(r)=0$ and prove that $x-r$ is a factor of $P(x)$. if $P(r)=0$, then $R=0$, and the equation $P(x)=(x-r)Q(x)+R$ becomes

$$P(x)=(x-r)Q(x)+0$$

$$P(x)=(x-r)Q(x)$$

Therefore, $x-r$ divides $P(x)$ exactly, and $x-r$ is a factor of $P(x)$.

Part2: Conversely, we assume that $x-r$ is a factor of $P(x)$ and prove that $P(r)=0$. Because, by assumption, $x-r$ is a factor of $P(x)$, $x-r$ divides $P(x)$ exactly, and the division has a remainder of 0. By the Remainder Theorem, this remainder is $P(r)$. Hence, $P(r)=0$.

* دانش آموزان عزیز

شما می‌توانید ترجمه‌هایتان را برای ما ارسال کنید تا به نام خودتان در این قسمت (یا در بخش با مخاطبان) به چاپ برسد.

قضیه باقی مانده: اگر $P(x)$ یک تابع چندجمله‌ای، r هر عدد (حقیقی) دلخواه، و $P(x)$ بر $(x-r)$ تقسیم شده باشد، باقی مانده تقسیم $P(r)$ است.

اثبات: برای تقسیم $P(x)$ بر $x-r$ باید خارج قسمتی چون $Q(x)$ و باقی مانده‌ای چون $R(x)$ بیابیم به طوری که:

$$\text{باقی مانده} + \text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم علیه} = \text{مقسوم}$$

↓

↓

↓

↓

$$P(x) = (x-r) \times Q(x) + R(x)$$

از آن جایی که درجه باقی مانده $(R(x))$ باید کمتر از درجه مقسوم علیه $(x-r)$ باشد و درجه $(x-1)$ ، ۱ است. لذا $R(x)$ باید عدد ثابت R باشد. در معادله $P(x)=(x-r)Q(x)+R$ ، چندجمله‌ای سمت چپ با چندجمله‌ای سمت راست یکسان (هم‌ارز) است، و مقادیری که آن‌ها برای هر عدد x می‌پذیرند، با هم برابرند. اگر ما به جای x قرار دهیم r ، خواهیم داشت:

$$P(r)=(r-r)Q(r)+R=(0)Q(r)+R=R$$

$$P(r)=R \text{ بنابراین}$$

مثال ۳. کاربرد قضیه باقی مانده

در صورتی که بدانیم $P(x) = 2x^4 - 10x^3 + 17x^2 - 14x - 3$ بر $(x-3)$ تقسیم شده است، با استفاده از قضیه باقی مانده، باقی مانده تقسیم را پیدا کنید.

حل: با استفاده از قضیه باقی مانده، باقی مانده تقسیم $P(3)$ خواهد بود.

$$P(x) = 2x^4 - 10x^3 + 17x^2 - 14x - 3$$

$$P(3) = 2 \times (3)^4 - 10 \times (3)^3 + 17 \times (3)^2 - 14 \times (3) - 3 = 0$$

باقی مانده ۰ خواهد بود. اگرچه این محاسبه کسل کننده است، برای یک ماشین حساب، ساده است.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Remainder Theorem	قضیه باقی مانده	2. Divided	تقسیم شده
3. Polynomial function	تابع چندجمله‌ای	4. Quotient	خارج قسمت
5. Divident	مقسوم	6. Divisor	مقسوم علیه
7. Less than	کمتر از، کوچکتر از	8. Replace	جای گذاری، قرار دادن
9. Values	مقادیر	10. Assume	پذیرفتن، فرض کردن
11. Equal	مساوی، برابر	12. Equation	معادله



The Remainder Theorem

If $P(x)$ is a polynomial function. r is any number, and $P(x)$ is divided by $x-r$, the remainder is $P(r)$.

PROOF

To divide $P(x)$ by $x-r$, we must find a quotient $Q(x)$ and a remainder $R(x)$ such that

$$\text{Divident} = \text{divisor} \cdot \text{quotient} + \text{remainder}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P(x) & = & (x-r) & \cdot & Q(x) & + & R(x) \end{array}$$

Since the degree of the remainder $R(x)$ must be less than the degree of the divisor $x-r$, and the degree of $x-r$, is 1, $R(x)$ must be a constant R .

In the equation

$$P(x) = (x-r)Q(x) + R$$

the polynomial on the left side is the same as the polynomial on the right side, and the values that they assume for any number x are equal. If we replace x with r , we have

$$\begin{aligned} P(r) &= (r-r)Q(r) + R \\ &= (0)Q(r) + R \\ &= R \end{aligned}$$

Thus, $P(r) = R$.

EXAMPLE 3

Using the Remainder Theorem

Use the Remainder Theorem to find the remainder that will occur when

$$P(x) = 2x^4 - 10x^3 + 17x^2 - 14x - 3$$

is divided by $x-3$.

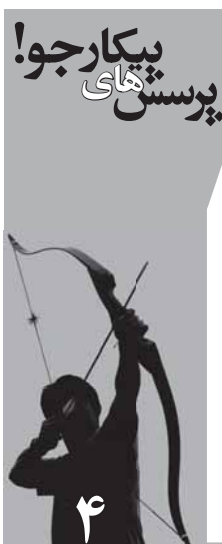
SOLUTION

By the Remainder Theorem, the remainder will be $P(3)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^4 - 10x^3 + 17x^2 - 14x - 3 \\ P(3) &= 2(3)^4 - 10(3)^3 + 17(3)^2 - 14 \times (3) - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Substitute 3 for x .

The remainder will be 0. Although this calculation is tedious, it is easy to do with a calculator.



میانۀ AM از مثلث ABC از نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث به زاویه قائمه دیده می‌شود. درباره مثلث ABC چه حکمی می‌توان داد؟

$$AC = BC \quad (\text{الف})$$

$$\hat{A} = 90^\circ \quad (\text{ب})$$

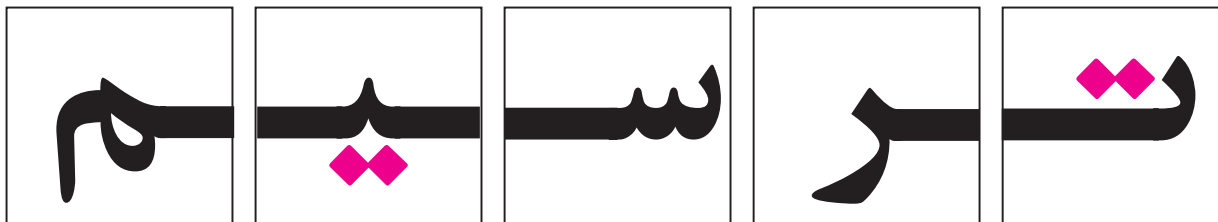
$$\hat{C} = 120^\circ \quad (\text{ج})$$

$$|C - B| = 90^\circ \quad (\text{د})$$

$$BC = 2|AB - AC| \quad (\text{ه})$$



الفبای



مقدمه

ترسیم چیست؟ ترسیمی که تنها با خط کش و پرگار صورت می گیرد و از یک رشته مراحل تشکیل شده است و در هر مرحله یکی از کارهای زیر انجام می گیرد:

۱. وصل کردن دو نقطه به وسیله خط راست؛
۲. یافتن نقطه تلاقی دو خط؛
۳. رسم یک دایره با یک شعاع مفروض و به مرکز یک نقطه داده شده؛
۴. یافتن نقطه های تلاقی یک دایره با دایره های دیگر، یا نقطه تلاقی یک دایره با یک خط.

مسئله های ترسیم همیشه موضوع محبوبی در هندسه بوده اند. خواننده از دوره مدرسه به یاد دارد که می توان فقط با خط کش و پرگار، انواع زیادی از ترسیم ها را انجام داد. در همه مسائل ترسیم از خط کش فقط به عنوان ابزاری غیرمدرج برای کشیدن خط راست استفاده می شود و نه اندازه گیری یا مشخص کردن فاصله ها.

یکی از مشهورترین مسئله های کلاسیک ترسیم، مسئله «تماس ها» از آپولونیوس (حدود ۲۰۰ سال پیش از میلاد) است که در آن سه دایره دلخواه در صفحه مفروض اند و مطلوب مسئله، دایره چهارمی است که بر هر سه مماس باشد.

گاوس^۱ در ۱۷ سالگی به بررسی ترسیم پذیری P ضلعی منتظم در حالتی که P عددی اول باشد، پرداخت. او کشف کرد که P ضلعی منتظم ترسیم پذیر است: اگر و تنها اگر P یک «عدد فرما»^۲ ی اول، یعنی $P = 2^{2^n} + 1$ باشد. نخستین عددهای فرما ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۵۳۷ هستند.

وقتی با یک ترسیم هندسی سروکار داریم، هرگز نباید فراموش کنیم که مسئله این نیست که شکل هایی را به طور عملی و با درجه

معینی از دقت بکشیم؛ بلکه باید روشن کنیم، آیا فقط با استفاده از خط کش و پرگار و با فرض اینکه ابزارهای ما از دقت کامل برخوردارند، می توان به طور نظری به جواب دست یافت یا نه.

حال به بررسی چند ترسیم کلاسیک می پردازیم. کلید فهم عمیق تر این موضوع برگرداندن مسئله های هندسی به زبان جبر است. در این صورت ترسیم هندسی عبارت است از حل یک معادله جبری. نخست باید رابطه (معادله) بین کمیت خواسته شده (x) و کمیت های مفروض $(a, b, c, \dots)$ را پیدا کنیم. سپس باید کمیت مجهول را با حل این معادله بیابیم و بالاخره باید تعیین کنیم که آیا می توان این جواب را با فرایندهای جبری به دست آورد که متناظر با ترسیم هایی با خط کش و پرگار باشد یا نه.

بنیان تمام نظریه های مورد بحث ما اصل اساسی هندسه تحلیلی، یعنی مشخص سازی کمی اشیای هندسی به وسیله عددهای حقیقی است که بر پایه مفهوم پیوستار اعداد حقیقی قرار دارد.

توجه: بعضی از ساده ترین عمل های جبری متناظرند با ترسیم های مقدماتی. اگر دو پاره خط با طول های a و b داده شده باشند، آن گاه رسم ab ، $\frac{a}{b}$ ، $a-b$ و $a+b$ کار خیلی ساده ای است.

۱. ترسیم $a+b$

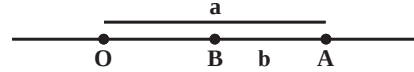
خط راستی می کشیم و روی آن فاصله های $OA=a$ و $AB=b$ را با پرگار مشخص می کنیم. در این صورت: $OB=a+b$.



۲. ترسیم $a-b$

خط راستی می کشیم و روی آن فاصله های $AB=b$

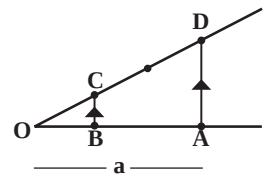
و $OA=a$ را با پرگار مشخص می‌کنیم، اما این‌بار AB در جهت مخالف OA تعیین می‌کنیم. در این صورت: $OB=a-b$.



۳. ترسیم a

برای ترسیم آن $a+a+a$ را رسم می‌کنیم.

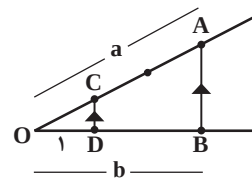
۴. ترسیم $\frac{a}{3}$



$OA=a$ را روی یک خط مشخص می‌کنیم و خط دیگری را که از O بگذرد، می‌کشیم. این خط، پاره‌خط دلخواه $OC=c$ را مشخص می‌کنیم و $OD=3c$ را رسم می‌کنیم. A و D را به هم وصل می‌کنیم و خطی گذرنده از C به موازات AD می‌کشیم که OA را در B قطع کند.

$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel AD \rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD} \\ \frac{OC}{OD} = \frac{c}{3c} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{1}{3} \rightarrow OB = \frac{OA}{3} = \frac{a}{3}$$

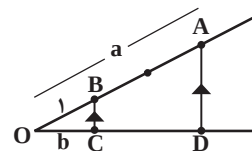
۵. ترسیم $\frac{a}{b}$



$OA=a$ و $OB=b$ را روی ضلع‌های زاویه دلخواه O و $OD=1$ را روی OB مشخص می‌کنیم. از D خطی به موازات AB رسم می‌کنیم که OA را در C قطع کند. داریم:

$$CD \parallel AB \rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} \rightarrow \frac{OC}{a} = \frac{1}{b} \rightarrow OC = \frac{a}{b}$$

۶. ترسیم $a.b$



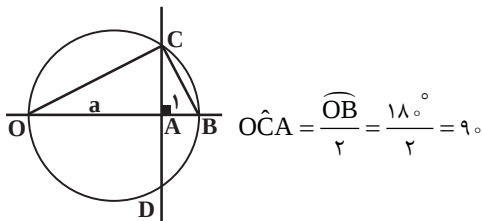
$OA=a$ و $OC=b$ را روی ضلع‌های زاویه دلخواه O و $OB=1$ را روی OA مشخص می‌کنیم. از A خطی به موازات BC رسم می‌کنیم که OC را در D قطع کند. داریم:

$$BC \parallel AD \rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{b}{OD} \rightarrow OD = a.b$$

از مطالب بالا نتیجه می‌گیریم که عمل‌های جبری «گویا» (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کمیت‌های معلوم) را می‌توان با ترسیم هندسی انجام داد.

۷. ترسیم $\sqrt{a}$

روی خط راستی $AB=1$ و $OA=a$ را مشخص می‌کنیم (با خط‌کش و پرگار). دایره‌ای به قطر OB رسم می‌کنیم. سپس در نقطه A عمودی بر OB رسم می‌کنیم تا دایره را در C قطع کند. زاویه OCB محاطی و روبه‌رو به قطر دایره است. پس:

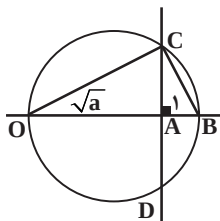


و در مثلث OCB پاره‌خط AC ارتفاع وارد بر وتر است. پس:

$$CA^2 = OA \times AB \rightarrow CA^2 = a \times 1 \rightarrow CA = \sqrt{a}$$

۸. ترسیم $\sqrt[3]{a}$

روی خط راستی $OA = \sqrt{a}$ و $AB=1$ را مشخص می‌کنیم (با خط‌کش و پرگار). دایره‌ای به قطر OB رسم می‌کنیم در نقطه A عمودی بر OB رسم می‌کنیم تا دایره را در C قطع کند. در مثلث OCB پاره‌خط CA ارتفاع وارد بر وتر است. پس:



$$CA^2 = OA \times AB \rightarrow CA^2 = \sqrt{a} \times 1 \rightarrow CA = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[3]{a}$$

و به روش مشابه می‌توان $\sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \dots, \sqrt[n]{a}$ ($n \in \mathbb{N}$) را رسم کرد. اما در ریاضیات عالی ثابت می‌شود که دیگر ریشه‌ها، از جمله $\sqrt[3]{a}$ و $\sqrt[n]{a}$ قابل رسم نیستند.

* پی‌نوشت‌ها

1. Gauss

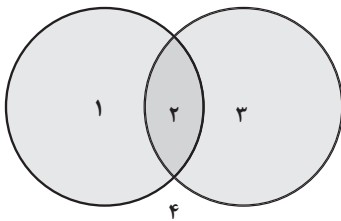
کارل فردریش گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) ریاضی‌دان بسیار مشهور آلمانی که به‌عنوان یکی از برترین ریاضی‌دانان همه اعصار شناخته می‌شود.

استدلال استقرایی و استقرای ریاضی

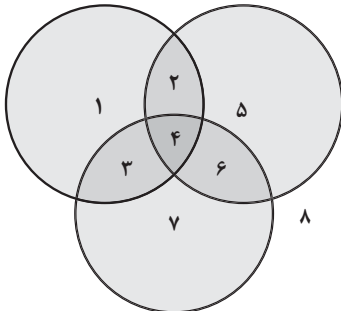
اشاره

در شماره قبل، در مورد ساختارهای استقرایی و استدلال استقرایی گفتیم و مثال‌هایی آوردیم. در خاتمه این پرسش را مطرح کردیم که: آیا الگوهای استقرایی که کشف می‌کنیم (حدس می‌زنیم)، همواره معتبر هستند؟ یعنی آیا تا بی‌نهایت آن الگو ادامه می‌یابد؟

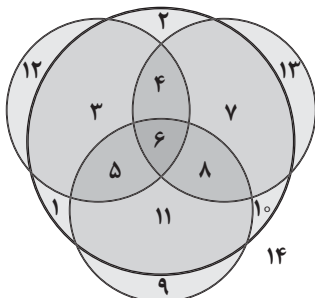
صفحه را به دو ناحیه (درون و بیرون دایره) تفکیک می‌کند. دو دایره نیز صفحه را به حداکثر چهار ناحیه تفکیک می‌کنند:



و سه دایره، به هشت ناحیه:



اکنون شاید حدس بزنیم که n دایره، صفحه را به حداکثر 3^n ناحیه تفکیک می‌کنند، ولی این حدس با رسم چهار دایره، بلافاصله باطل می‌شود!



با یک مثال تاریخی شروع می‌کنیم: **لئونارد اویلر** (۱۷۸۳-۱۷۰۷)، ریاضی‌دان مشهور سوئیسی، می‌گوید: «من هیچ استدلال دیگری به جز استقرای طولانی ندارم. آزمایش‌های طولانی که انجام داده‌ایم، شکی در صحت قانون باقی نگذاشته است و... به نظر می‌رسد وقتی قانونی مثلاً برای ۲۰ مورد متوالی آن صحیح باشد، غیرممکن است برای موارد بعدی نادرست از آب درآید.» همین شخص زمانی حدس زد که تابع $f(n) = n^2 + n + 41$ به ازای همه اعداد طبیعی، همیشه دارای مقداری است که یک عدد اول است. حدس او به ازای تمام اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰ درست است:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۲۰	۲۱	...
$f(n)$	۴۳	۴۷	۵۳	۶۱	۷۱	۸۳	...	۴۶۱	۵۰۳	...

و چنانچه ملاحظه می‌کنید، همه اعداد ردیف زیرین، عددهای اول هستند. ولی آیا آن گونه که او ادعا می‌کرد، می‌توان نتیجه گرفت که همه عددهای بعدی هم عددهای اول هستند؟ آزمایش نشان می‌دهد که لااقل به ازای $n = 41$ چنین نیست:

$$n = 41$$

$$\Rightarrow n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \times 43$$

یعنی $f(41)$ عددی اول نیست. (چرا؟) حتی به ازای $n = 40$ هم حاصل عددی مرکب است:

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \times 41 + 41 = 41(40 + 1) = 41 \times 41$$

این گونه حدس‌های استقرایی نادرست بسیارند. بعضی از آن‌ها خیلی زود باطل می‌شوند و بعضی دیرتر. مثلاً می‌دانیم هر دایره،

یعنی دایره چهارم اگر همه دایره‌ها را قطع کند، حداکثر نواحی که ۱۴ ناحیه است، ایجاد می‌شود. در واقع حدس درست به صورت 2^n ناحیه نیست، بلکه $2^n - n + 2$ ناحیه است! (که به ازای $n=1, 2, 3, 4$ جواب درست را به ما می‌دهد).

اما از کجا می‌توانیم مطمئن شویم این حدس همواره درست است و هیچ مثال نقضی برای آن پیدا نخواهد شد؟ به عبارت دیگر، برای اثبات درستی یک حدس استقرایی، چه شرایطی لازم است؟

داستان حکیم فرزانه و نسخه عمر جاودانی!

بشر از هنگامی که خود را شناخته است و تاریخ آن نشان می‌دهد، همواره به دنبال دارو یا معجزه‌گری بوده که آب حیات یا نسخه عمر جاودانی باشد. در روزگاران کهن گفته می‌شد که پیری دانا در بلندی کوهی زندگی می‌کند و نسخه عمر جاودان دارد. جوانی برای یافتن این نسخه رنج سفر را بر خود هموار کرد و به هر زحمتی بود خود را به منزل پیر خردمند رساند. از او پرسید که آیا شایعه وجود نسخه عمر جاودان درست است یا خیر. حکیم فرزانه گفت: «آری و تنها دو شرط دارد: اول، از امروز فقط جملات راست به زبان بیاوری، و دوم، بگویی که فردا هم همین حرف‌ها را تکرار می‌کنی!»

جوان کمی فکر کرد و بعد لبخندی زد و گفت: «آری اگر بتوانم این دو کار را بکنم، عمر جاودان خواهم داشت!»

اما چرا؟ واضح است که اگر جوان از امروز راست بگوید و بگوید که فردا هم همین حرف را خواهد زد، یعنی تا فردا زنده خواهد بود و فردا هم همین حرف‌ها را تکرار خواهد کرد. پس تا پس فردا هم زنده خواهد بود و الی آخر! پس او نمی‌تواند چنین تضمینی بدهد! اما جمله حکیم درست است، زیرا گفت: «اگر بتوانی...».



حدس‌های استقرایی ساختمان‌ی بسیار شبیه به این دارند. یعنی اگر حکمی که شامل یک مجهول با دامنه اعداد طبیعی است $(n \in \mathbb{N})$ ، به ازای $n=1$ درست باشد و (2) با فرض درستی به ازای $n=k$ بتوان تضمین کرد که به ازای $n=k+1$ هم درست است، آن‌گاه این حکم برای هر عدد طبیعی دلخواه n نیز درست است. درستی این موضوع بدیهی است، زیرا اگر به موجب بند (۱) حکم برای $n=1$ درست باشد، به موجب بند (۲) برای $n=2$ هم درست است و در نتیجه (باز به موجب بند (۲)) برای $n=3$ نیز درست خواهد بود و الی آخر. درستی این قضیه را به صورت منطقی هم می‌توان به دقت (با استدلال استنتاجی) ثابت کرد:

قضیه: اگر $p(n)$ حکمی (گزاره‌ای) باشد که در آن، $n \in \mathbb{N}$ و $p(1)$ درست باشد و با فرض درستی $p(k)$ ، $p(k+1)$ هم درست باشد، آن‌گاه $p(n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است.

اثبات (برهان خلف): فرض کنیم $p(n)$ به ازای بعضی اعداد طبیعی نادرست باشد. کوچک‌ترین این اعداد را a می‌نامیم. بدیهی است که $a \neq 1$ (چرا؟) پس: $a \geq 2$ و $a-1 \geq 1$. لذا: $a-1 \in \mathbb{N}$ و $p(a-1)$ درست است (زیرا a کوچک‌ترین عددی بود که به ازای آن $p(n)$ نادرست است). بنابراین به موجب فرض مسئله، درستی $p(k)$ درستی $p(k+1)$ را نتیجه می‌دهد: $p(a-1+1)$ هم درست است و یعنی $p(a)$ درست است و این تناقض محسوب می‌شود. زیرا قبلاً فرض شده بود که $p(a)$ نادرست است! پس درستی قضیه ثابت شد.

نتیجه: برای اثبات یک حدس استقرایی باید دو قدم زیر را برداریم:

قدم ۱. درستی حکم را به ازای $n=1$ تحقیق می‌کنیم.
قدم ۲. درستی حکم را به ازای $n=k$ فرض می‌گیریم (فرض استقرا) و سپس درستی حکم را به ازای $n=k+1$ اثبات می‌کنیم (حکم استقرا). برای اثبات حکم استقرا از روی فرض در مسائل گوناگون روش‌های مختلفی وجود دارند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. جمله عمومی یک دنباله حسابی (تصاعد حسابی) را حدس بزنید و حدس خود را با قضیه استقرای ریاضی اثبات کنید.

حل: می‌دانیم دنباله (تصاعد) حسابی دنباله‌ای است که هر جمله آن با افزودن مقداری ثابت (قدرنسبت) به جمله قبلی به دست می‌آید. اگر قدرنسبت این دنباله d باشد، جمله دوم آن برابر است با جمله اول به اضافه قدرنسبت: $a_2 = a_1 + d$ و جمله سوم برابر است با: $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$ ، و $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$ و... و حدس می‌زنیم:

$a_n = a_1 + (n-1)d$. حال به کمک قضیه استقرای ریاضی این حدس را ثابت می‌کنیم:

$$n=1: a_1 = a_1 + (1-1)d \Rightarrow a_1 = a_1 \quad (\text{شروع استقرا})$$

$$n=k: a_k = a_1 + (k-1)d \quad (\text{فرض استقرا})$$

$$n=k+1: a_{k+1} = a_1 + kd \quad (\text{حکم استقرا})$$

برای اثبات حکم از روی فرض (که به آن گذر استقرایی می‌گوییم) کافی است بنویسیم:

$$\begin{aligned} \text{فرض} \quad a_{k+1} &= a_k + d \Rightarrow a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d \\ \text{استقرا} \quad &= a_1 + (k-1+1)d \\ &= a_1 + kd \end{aligned}$$

و به این ترتیب گذر استقرایی انجام شده و حکم ثابت شده است.

مثال ۲. حاصل ضرب زیر را حدس بزنید و حدس خود را با قضیه استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) = ?$$

حل: اگر این حاصل ضرب را P_n بنامیم، داریم:

$$P_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, P_2 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

$$P_3 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 4$$

و احتمالاً حدس می‌زنیم: $P_n = n+1$ یعنی:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$$

حال این حدس را اثبات می‌کنیم:

$$n=1: 1 + \frac{1}{1} = 1+1 \Rightarrow 2=2 \quad (\text{شروع استقرا})$$

$$n=k: \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1 \quad (\text{فرض استقرا})$$

$$n=k+1: \underbrace{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{k+1} \left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1) \left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k+2 \quad (\text{حکم استقرا})$$

برای اثبات حکم از روی فرض، کافی است به جای حاصل ضرب k جمله (پرانتر) نخست، از فرض معادل آن را جایگزین کنیم (یا اینکه دو طرف فرض را در $1 + \frac{1}{k+1}$ ضرب کنیم):

$$(k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k+1+1 = k+2$$

و بنابراین گذر استقرایی کامل و حکم اثبات می‌شود.

مثال ۳. ثابت کنید n دایره در صفحه، صفحه را به حداکثر $n^2 - n + 2$ ناحیه مجزا تفکیک می‌کنند.

اثبات: به ازای $n=1$ ، $n^2 - n + 2 = 2$. یعنی یک دایره صفحه را به دو ناحیه مجزا (درون و بیرون دایره) تفکیک می‌کند. فرض می‌کنیم k دایره، صفحه را به حداکثر $k^2 - k + 2$ ناحیه مجزا تفکیک کنند (فرض استقرا). حال یک دایره دیگر به این دایره‌ها اضافه می‌کنیم. بدیهی است، در صورتی تعداد نواحی تفکیک شده حداکثر می‌شود که دایره $k+1$ ام همه k دایره قبلی را در دو نقطه قطع کند (تبدیل یک دایره به دو دایره، و دو دایره به سه دایره را به یاد بیاورید). پس از برخورد این دایره با هر یک از k دایره قبلی، دو ناحیه جدید به وجود می‌آید و در مجموع $2k$ ناحیه اضافه می‌شود. پس تعداد نواحی که از برخورد $k+1$ دایره به وجود می‌آید برابر است با:

$$\begin{aligned} (k^2 - k + 2) + 2k &= (k^2 + 2k + 1) - (k + 1) + 2 \\ &= (k+1)^2 - (k+1) + 2 \end{aligned}$$

به این ترتیب درستی حکم به ازای $n=k+1$ هم ثابت شد و گذر استقرایی کامل است.

تمرین

۱. جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q را حدس بزنید و حدس خود را با قضیه استقرای ریاضی ثابت کنید.

۲. مجموع زیر را حدس بزنید و حدستان را اثبات کنید:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

۳. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: $2n > 2n-1$.

۴. ماتریس دودردوی $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مفروض است.

ماتریس‌های A^2 ، A^3 و A^4 را تشکیل دهید. سپس برای A^n حدس بزنید و درستی این حدس را اثبات کنید.

۵. برای دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

۶. بررسی کنید که یک خط راست، دو خط راست متقاطع، سه خط راست دوه‌دو متقاطع و چهار خط راست دوه‌دو متقاطع صفحه را به چند ناحیه تفکیک می‌کنند. سپس حدس بزنید که n خط راست دوه‌دو متقاطع صفحه را به چند ناحیه تفکیک می‌کنند و حدس خود را اثبات کنید.

۷. مسئله «جزیره گنگ‌ها» را از شماره قبل به یاد بیاورید. آیا می‌توانید حدس استقرایی زده شده را اثبات کنید؟



لطفه دوم:

پدر: پسر من ۵ کیک به تو بدهم و تو دو تا از کیکها را به خواهرت بدهی، آن وقت چند کیک برایت می ماند؟
پسر: نمی دانم!
پدر: چرا، اینکه مسئله ساده ای است!
پسر: آخر همه محاسبه های ما در مدرسه با سیبها و پرتقال هاست!



ایستگاه سوم

لطفه اول:

معلم ریاضی رو به یکی از دانش آموزان گفت: «اگر فرض کنیم x مقداری مجهول است و $x+5=2x+1$ درباره x چه می توانیم بگوییم؟»
دانش آموز با خونسردی گفت: «فکر نمی کنم چیز تازه ای اتفاق بیفتد.
 x همچنان مجهول است!»

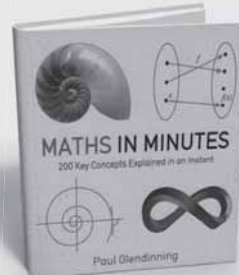
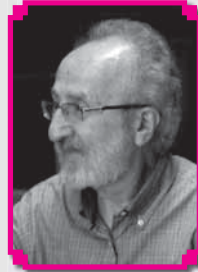


لطفه سوم:

این یک روایت واقعی از یکی از مدرسه های کشور انگلستان است: معلم ریاضی از یکی از دانش آموزان پرسید که چگونه می توانید عدد هفت (seven) را به یک عدد زوج (even) تبدیل کنید؟ دانش آموز گفت: خیلی ساده! کافی است حرف s را از اول آن حذف کنید!



تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی پور



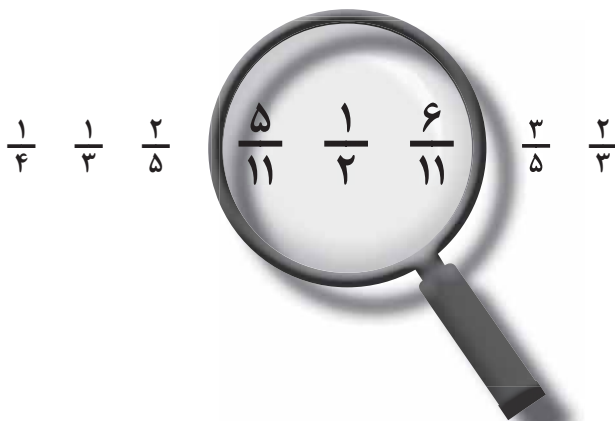
مجموعه‌های چگال

با ویژگی «چگال بودن» می‌توان روابط بین مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌های آن‌ها را، زمانی که مفهومی از فاصله بین اعضای مجموعه‌ها وجود دارد، توصیف کرد. این ویژگی طریق ارزیابی از «اندازه» نسبی مجموعه‌های متناهی مختلفی را به دست می‌دهد که با شمارش اعضا تفاوت دارد. به عنوان نمونه، یک راه برای معنی ریاضی داشتن این مفهوم که اعداد گویا مجموعه‌ای «بسیار بزرگ» اند، این است که آن‌ها در زیرمجموعه‌ای خاص - در این حالت اعداد حقیقی - که خودشان «بسیار بزرگ» اند، چگال (dense) هستند.

می‌گوییم مجموعه X در مجموعه دیگر Y چگال است، اگر X زیرمجموعه‌ای از Y باشد و هر نقطه در X یا عضوی از Y باشد، یا به طور دلخواه نزدیک به عضوی از آن باشد. یعنی به ازای هر نقطه واقع در Y بتوانیم هر

فاصله d ی بزرگ‌تر از صفری را انتخاب کنیم و نقطه‌ای در X در فاصله d از آن نقطه بیابیم.

برای مثال، به منظور اثبات اینکه گویاها در حقیقی‌ها چگال‌اند، فاصله d و عدد حقیقی y را انتخاب می‌کنیم. آن‌گاه ثابت می‌کنیم که همواره عدد گویای x در فاصله d از y موجود است که بتواند با تقریب زدن بسط دهدی y تولید شود.



مجموعه‌های ناشمارا

مجموعه‌های ناشمارا مجموعه‌هایی نامتناهی هستند که اعضای آن‌ها را نمی‌توان در ترتیب شمارایی مرتب کرد. وجود چنین مجموعه‌هایی بدان معنی است که دست‌کم دو نوع مجموعه نامتناهی، یعنی شمارا و ناشمارا موجودند و آشکار می‌شود که بی‌نهایت انواع متفاوت از مجموعه‌های ناشمارا وجود دارد.

اما چگونه می‌توان اثبات کرد که مجموعه‌ای شماراست؟ در سال ۱۸۹۱، ژرژ کانتور (Georg Cantor)، ریاضی‌دان آلمانی، برای نشان دادن اینکه مجموعه اعداد

حقیقی بین 0 و 1 ناشماراست، از اثباتی با به‌کار بردن تناقض استفاده کرد. وی چنین استدلال کرد که اگر این مجموعه شمارا باشد، در این صورت فهرستی نامتناهی اما شمارا از اعضای آن وجود دارد که هر یک از آن‌ها می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$0.a_1a_2a_3a_4\dots$$

که در آن هر رقم a_k عدد طبیعی بین 0 و 9 است.

کانتور نقیض این گزاره را با نشان دادن این موضوع به‌دست آورد که همواره ساختن عددی حقیقی بین 0 و 1 که در این فهرست نباشد، موجود است.

مجموعه‌های کانتور

مجموعه‌های کانتور قدیمی‌ترین ظهور اشیایی معروف به «فرکتال‌ها» هستند. استدلال قطری‌ای که توسط ژرژ کانتور (Georg Cantor) گسترش یافت، نشان می‌دهد که بازه‌های خاصی از خط اعداد حقیقی، مجموعه‌هایی ناشمارا دارند. اما آیا جمیع مجموعه‌های ناشمارا شامل چنین بازه‌های خطی هستند؟ کانتور نشان داد ممکن است مجموعه‌ای ناشمارا بسازیم که شامل هیچ بازه خطی نباشد. مجموعه‌های کانتور به گونه‌ای نامتناهی در هم تنیده‌اند؛ یعنی ساختاری مبتنی بر مقیاس‌های ظریف‌تر و ظریف‌تر دارند.

یک مثال در این مورد «مجموعه وسط سوم کانتور» (middle third Cantor set) است. این مجموعه با بازه‌ای آغاز می‌شود و حاصل حذف یک‌سوم‌های وسط از جمیع بازه‌هایی است که در هر مرحله باقی می‌ماند. این مجموعه در مرحله ساخت n ام، دارای 3^n بازه هر یک به طول $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و کل طول $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ است. همچنان که n به بی‌نهایت میل می‌کند، تعداد نقاط داخل در آن نیز چنین می‌شود، در حالی که طول مجموعه به طرف صفر منقبض می‌شود. البته نشان دادن اینکه در حد نامتناهی این زیر تقسیم در واقع چیزی به‌جا می‌ماند و اثبات اینکه مجموعه ناشماراست، اندکی کار بیشتر می‌طلبد، اما می‌تواند انجام گیرد.

و غیره

ساخت مجموعه کانتور

کار را با بازه واحد بسته، اعداد حقیقی بین 0 و 1 ، از جمله نقاط انتهایی آغاز می‌کنیم، و یک سوم وسط را حذف کنیم و دو بازه بسته به طول $\frac{1}{3}$ ، از جمله نقاط انتهایی‌شان را، به‌جا می‌گذاریم. اکنون یک‌سوم وسط هر یک از این بازه‌ها را حذف می‌کنیم. به این ترتیب چهار $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ بازه بسته، هر یک به طول $\frac{1}{9}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ خواهیم داشت. فرایند مورد بحث را به‌طور نامتناهی تکرار می‌کنیم.

مسائل برای حل



هندسه پایه دهم

۱. مثلث ABC را که در آن $AB=8$ و $AC=6$ و میانه BM به طول ۵ واحد است، رسم کنید.
۲. زاویه xoy و دو نقطه A و B روی نیم خط ox مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B و نیز از ox و oy به یک فاصله باشد.
۳. دوزنقه $ABCD$ را طوری رسم کنید که قاعده بزرگ CD از آن به طول ۶ واحد، ارتفاع آن ۳ واحد و طول ساق‌های آن ۴ و $\frac{3}{5}$ واحد باشد.
۴. در مثلث ABC ، نیم‌ساز زاویه A ، ضلع BC را در D قطع می‌کند. ثابت کنید اگر: $BD \neq CD$ ، آن گاه: $AB \neq AC$.
۵. در مثلث ABC ، نیم‌ساز زاویه A ضلع BC را در D قطع می‌کند. ثابت کنید: $AC > CD$.
۶. کدام یک از احکام کلی زیر درست هستند و کدام نادرست. احکام درست را با استدلال استنتاجی ثابت کنید و احکام نادرست را با مثال نقض رد کنید.
- الف) نقطه هم‌رسی سه ارتفاع هر مثلث، درون مثلث واقع است.
- ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از دو ضلع مجاورش کوچک‌تر است.

سوالات ریاضی دهم

۱. اگر $A = [-2, +\infty)$ ، $B = (-\frac{5}{2}, 10]$ و $C = (-\infty, 10)$ ، حاصل هر کدام را به صورت بازه نمایش دهید:
- I) $(A \cap B)$
II) $(A \cup C)$
III) $(A' \cap C)'$
IV) $(A \cup C)'$
V) $(A - B)$
۲. اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد و داشته باشیم: $A \cap B \neq \emptyset$ ، آیا $(A - B)$ تهی است؟ چرا؟
۳. دو مجموعه نامتناهی مانند A و B مثال بزنید به طوری که $(A - B)$ متناهی و $(A \cap B)$ نامتناهی باشد.
۴. در یک دنباله حسابی، قدرنسبت (-3) و جمله پنجم ۸ است. جمله دوازدهم در این دنباله را بیابید.
۵. اگر جملات سوم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۵ و ۸۰ باشد، جمله یازدهم این دنباله را بیابید.

ج) هر متوازی‌الاضلاع که دو قطر آن با هم برابر باشند، مستطیل است.

هندسه ۲ (سال سوم دبیرستان)

۱. در «مثلث سرپینسکی» به روش استقرایی الگویی برای تعداد مثلث‌های سیاه شده در مرحله n ام حدس بزنید.

۲. اولاً نشان دهید که هر سه عدد طبیعی متوالی بزرگ‌تر از ۱ می‌توانند طول‌های اضلاع مثلثی باشند. ثانیاً طول‌های اضلاع چنین مثلثی را به‌دست آورید که در آن نیم‌ساز وارد بر بزرگ‌ترین ضلع، آن را به دو قطعه تقسیم کند که اختلاف اندازه‌های آن‌ها $\frac{2}{3}$ واحد باشد.

۳. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۶ واحد، نقطه M درون مثلث، از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. این فاصله را به‌دست آورید.

۴. ثابت کنید در هر مثلث، مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث از سه رأس آن، از محیط مثلث کوچک‌تر و از نصف محیط بزرگ‌تر است.

۵. مثلث ABC را با داشتن طول‌های سه میانه آن رسم کنید.

۶. چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ای مانند M درون چهارضلعی را به‌دست آورید که چهارضلعی‌های $MADC$ و $MABC$ هم مساحت باشند.

سؤالات حسابان

۱. باقی‌مانده تقسیم x^{10} را بر $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ به‌دست آورید.

۲. $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۴ است و در تقسیم بر $x+1$ ، $x+2$ ، $x-1$ و $x-2$ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد. اگر باقی‌مانده $P(x)$ بر $x-3$ نیز صفر باشد، چندجمله‌ای $P(x)$ را مشخص کنید.

۳. به کمک رسم نمودار (هندسی)، جواب‌های تقریبی معادله $2x^2 + 2^{2x+1} = 8$ را به‌دست آورید.

۴. با استفاده از نابرابری مثلث، تمام جواب‌های معادله $|x-1| + |4-2x| = |3x-5|$ را بیابید.

۵. معادله $\frac{5}{4} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + x^2$ را حل کنید.

۶. حاصل عبارت مقابل را پیدا کنید:

$$A = \binom{n}{1} + \frac{\binom{n}{2}}{2} + \frac{\binom{n}{3}}{2^2} + \dots + \frac{\binom{n}{n-2}}{2^{n-2}}$$

سؤالات جبر و احتمال

۱. برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید که عبارت $1 + (n+3)(n+2)(n+1)n$ مربع کامل است.

۲. ثابت کنید حاصل ضرب هر n عدد صحیح متوالی، مضرب $n!$ است.

۳. $n+1$ عدد طبیعی از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و $2n$ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید در بین آن‌ها حداقل دو عدد وجود دارند که نسبت به هم اول‌اند.

۴. اگر a ، b و c اعداد حقیقی مخالف صفر باشند، ثابت کنید:
$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9$$

۵. برای اعداد حقیقی $x > y > 0$ ثابت کنید:
$$\frac{x^4 - y^4}{4y^3} > x - y$$

سؤالات ریاضی ۳

۱. اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ و احتمال رخ دادن A و B با هم برابر $\frac{1}{6}$ باشد، احتمال‌های زیر را حساب کنید:

الف) $P(A \cup B)$

ب) $P(A \cap B')$

ج) A و B هیچ‌کدام رخ ندهد.

د) حداکثر یکی از آن‌ها رخ دهد.

ه) فقط یکی از آن‌ها رخ دهد.

۲. نسبت دانش‌آموزان کلاس‌های A و B ، به ۲ است و ۳ است و ۶۰ درصد دانش‌آموزان کلاس A و ۷۵ درصد دانش‌آموزان کلاس B در آزمون پذیرفته شده‌اند. یک دانش‌آموز از این دو کلاس، به تصادف انتخاب شده است. با چه احتمالی این دانش‌آموز در آزمون قبول نشده است؟

۳. از ظرفی حاوی ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه، دو مهره با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال:

الف) این دو مهره هم‌رنگ هستند.

ب) فقط یکی سفید است.

ج) حداقل یکی سیاه است.

حاصل ضرب جمله‌های دنباله هندسی متناهی



$$\text{ب) } \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81} \Rightarrow P_n = \sqrt{\left(\frac{1}{3} \times \frac{8}{81}\right)^4}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{3 \times 81}\right)^4} = \left(\frac{8}{3 \times 81}\right)^2 = \frac{64}{3^{10}}$$

مثال ۲: یک دنباله هندسی متناهی پنج جمله دارد. جمله اول آن $2\sqrt{3}$ و قدرنسبت $\sqrt{2}$ است. حاصل ضرب جمله‌های آن را حساب کنید.

$n = 5$ $t_1 = 2\sqrt{3}$ $q = \sqrt{2}$	حل: ابتدا به کمک معلومات، جمله آخر را به دست می‌آوریم و سپس حاصل ضرب جملات را حساب می‌کنیم.
--	--

$$t_5 = t_1 \times q^4 = 2\sqrt{3} \times (\sqrt{2})^4 = 8\sqrt{3}$$

$$P_5 = \sqrt{(2\sqrt{3} \times 8\sqrt{3})^5} = \sqrt{(16 \times 3)^5} = \sqrt{4^{10} \times 3^5}$$

$$= \sqrt{4^5 \times 4^5 \times 3^2 \times 3^3} = 9 \times 4^5 \times \sqrt{3}$$

مثال ۳: در یک دنباله هندسی داریم: $t_1 = -16$ ، $q = \frac{1}{2}$ و $n = 5$. را به دست آورید.

$n = 5$ $t_1 = -16$ $q = \frac{1}{2}$ $P_5 = ?$	$t_5 = t_1 \times q^4 = (-16) \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = -1$ $P_5 = \sqrt{(t_1 \cdot t_5)^5} = \sqrt{[(-16) \times (-1)]^5}$ $= \sqrt{16^5} = \sqrt{(2^4)^5} = \sqrt{2^{20}} = 2^{10} = 1024$
--	--

تمرین

۱. در یک دنباله هندسی حاصل ضرب جملات اول، دوم، نهم و دهم مساوی ۴ است. حاصل ضرب ۱۰ جمله اول آن را بیابید.

۲. در یک دنباله هندسی حاصل ضرب جمله‌های سوم و یازدهم مساوی با جمله چهاردهم است. حاصل ضرب ۱۰ جمله اول آن را بیابید.

نکته: در هر دنباله هندسی متناهی حاصل ضرب جمله‌هایی که از دو طرف تصاعد به یک فاصله هستند، مقداری ثابت و برابر است با حاصل ضرب جمله اول در جمله آخر و اگر تعداد جملات فرد باشد برابر است با مجذور جمله وسط.

یعنی: جملات یک دنباله هندسی

$$\Rightarrow t_1 \cdot t_n = t_2 \cdot t_{n-1} = \dots$$

توجه: نکته فوق به قانون اندیس‌ها معروف است و به زبان ریاضی یعنی:

$$m + n = P + r \Leftrightarrow t_m \times t_n = t_p \times t_r$$

$$m + n = 2P = P + P \Leftrightarrow t_m \times t_n = t_P^2$$

قضیه: اگر $t_1, t_2, \dots, t_n$ جملات یک دنباله هندسی متناهی باشند،

نشان دهید حاصل ضرب آن‌ها برابر $\sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$ است.

اثبات: اگر حاصل ضرب جملات دنباله هندسی متناهی را با P_n

نمایش دهیم، در این صورت داریم:

$$P_n = t_1 \times t_2 \times t_3 \times \dots \times t_{n-2} \times t_{n-1} \times t_n \quad (1)$$

$$P_n = t_n \times t_{n-1} \times t_{n-2} \times t_3 \times t_2 \times t_1 \quad (2)$$

دو طرف روابط (۱) و (۲) را نظریه نظیر در یکدیگر ضرب می‌کنیم

و با توجه به نکته فوق نتیجه می‌شود:

$$P_n^2 = (t_1 \cdot t_n) \times (t_2 \cdot t_{n-1}) \times (t_3 \cdot t_{n-2}) \times \dots \times (t_{n-2} \cdot t_3) \times (t_{n-1} \cdot t_2) \times (t_n \cdot t_1)$$

$$P_n^2 = (t_1 \cdot t_n) \times (t_1 \cdot t_n) \times (t_1 \cdot t_n) \times \dots \times (t_1 \cdot t_n) \times (t_1 \cdot t_n)$$

$$\times (t_1 \cdot t_n) = (t_1 \cdot t_n)^n$$

$$\Rightarrow |P_n| = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$$

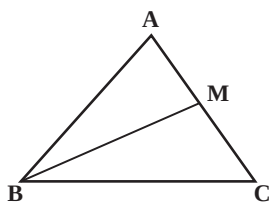
مثال ۱: حاصل ضرب جمله‌های دنباله‌های هندسی متناهی زیر را

به دست آورید:

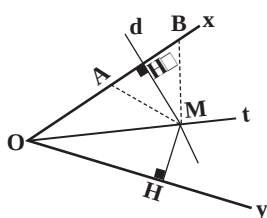
$$\text{الف) } 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \Rightarrow |P_n| = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$$

$$\Rightarrow P_4 = \sqrt{\left(8 \times \frac{1}{8}\right)^4} = \sqrt{1} = 1$$

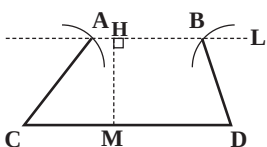
پاسخ مسائل هندسه پایه دهم



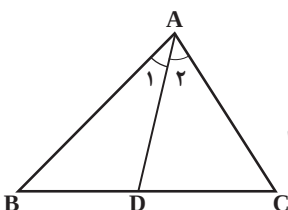
۱. در مثلث ABC که $AC=6$, $AB=8$ و میانه $BM=5$ ، $AM = \frac{AC}{2} = 3$ را در نتیجه، مثلث ABM با داشتن طول‌های سه ضلع آن می‌توان رسم کرد و از آنجا مثلث ABC را بنا کرد. پس ابتدا پاره‌خط BM به طول ۵ را رسم می‌کنیم و سپس به مرکز B و به شعاع ۸ و به مرکز M و به شعاع ۳ کمان‌هایی رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن‌ها را A می‌نامیم. سپس AM را از طرف M به اندازه خودش تا نقطه C امتداد می‌دهیم و C را به B وصل می‌کنیم.



۲. نیم‌ساز زاویه xoy (ot) را رسم می‌کنیم. همه نقاط روی ot از ox و oy به یک فاصله‌اند. سپس عمود منصف AB را رسم می‌کنیم (d) همه نقاط روی d از A و B به یک فاصله‌اند. پس محل برخورد d و ot، یعنی نقطه M، جایی است که از A و B به یک فاصله و از ox و oy نیز به یک فاصله است: $MA=MB$ و $MH=MH'$.



۳. ابتدا پاره‌خط CD به طول ۶ واحد را رسم می‌کنیم. سپس از یک نقطه دلخواه روی آن عمودی خارج می‌کنیم و به اندازه ۳ واحد روی آن جدا می‌کنیم ($MH=3$). در ادامه در نقطه H عمودی بر MH رسم می‌کنیم که خطی موازی CD است (خط L). بعد به مرکز C و به شعاع ۴ و به مرکز D و به شعاع ۳/۵ کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخورد این کمان‌ها با L نقاط A و B است.



۴. فرض $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $BD \neq CD$ حکم: $AB \neq AC$

اثبات: فرض کنیم $AB \neq AC$ نباشد، پس: $AB=AC$. یعنی مثلثی متساوی‌الساقین است و در نتیجه طبق خواص این مثلث، نیم‌ساز زاویه رأس در آن، میانه (و ارتفاع) نیز هست. و در نتیجه: $BD=CD$. اما این خلاف فرض است. پس باید $AB \neq AC$ باشد (برهان خلف).

راهنمای حل مسائل

راهنمایی حل مسائل ریاضی دهم

۱. I) $(A \cap B) = [-2, 10]$
II) $(A \cup C) = R$
III) $A' = (-\infty, -2), (A' \cap C) = (-\infty, -2) \Rightarrow (A' \cap C)' = [-2, +\infty)$
IV) $C' = [10, +\infty) \Rightarrow A \cup C' = [-2, +\infty)$
V) $(A - B) = (10, +\infty)$

۲. خیر، می‌دانیم $(A - B) \subseteq A$ و A متناهی است. پس قطعاً $(A - B)$ متناهی است، اما لزوماً تهی نیست. به عنوان مثال:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, \dots\}$$

$$\Rightarrow A - B = \{1, 2\} \neq \emptyset$$

$$A = \{2, 3, 4, \dots\}$$

$$B = \{6, 7, 8, 9, \dots\}$$

$$A - B = \{2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{6, 7, 8, \dots\}$$

$$d = -3, t_d = 8 \Rightarrow 8 = a + (5-1) \times (-3)$$

$$\Rightarrow 8 = a - 12 \Rightarrow a = 20 \Rightarrow t_{12} = a + 11 \times d$$

$$\Rightarrow t_{12} = 20 + 11 \times (-3) \Rightarrow t_{12} = -13$$

$$t_n = a \times r^{n-1}$$

$$\begin{cases} t_7 = a \times r^6 \\ t_3 = a \times r^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_7}{t_3} = \frac{a \times r^6}{a \times r^2} \Rightarrow \frac{t_7}{t_3} = r^4$$

$$\Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow t_{11} = a \times r^{10} \Rightarrow t_{11} = a \times 2^{10}$$

برای یافتن a از جمله سوم استفاده می‌کنیم:

$$5 = a \times 2^2 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \Rightarrow t_{11} = \frac{5}{4} \times 2^{10} = 5 \times 2^8 = 1280$$

مرحله	۰	۱	۲	۳	...	n
تعداد مثلث‌های سیاه	۰	۱	۴	۱۳	...	$\frac{3^n - 1}{2}$

۲. کافی است نشان دهیم که $a=n$ ، $b=n+1$ و $c=n+2$ می‌توانند با فرض $n > 1$ اضلاع مثلثی باشند و این کار را به کمک نامساوی مثلثی انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} a+b &> c: 2n+1 > n+2 \Leftrightarrow n > 1 \\ a+c &> b: 2n+2 > n+1 \Leftrightarrow n > -1 \\ b+c &> a: 2n+3 > n \Leftrightarrow n > -3 \end{aligned}$$

و برای قسمت دوم با توجه به قضیه نیم‌سازهای زوایای داخلی می‌نویسیم:

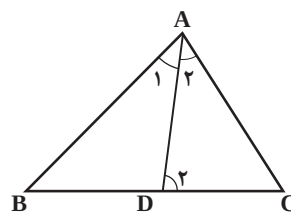
$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} &= \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{n+1}{n} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{n+1+n}{n} = \frac{AB}{DB} \\ \Rightarrow \frac{n+2}{DB} &= \frac{2n+1}{n} \Rightarrow DB = \frac{n^2+2n}{2n+1}, \\ DA &= n+2 - \frac{n^2+2n}{2n+1} = \frac{n^2+2n+2}{2n+1} \\ \Rightarrow DA - DB &= \frac{n+2}{2n+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2n+2 = 3n+6 \\ \Rightarrow n &= -4 \Rightarrow BC = 4, AC = 5, BA = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MH_1 &= MH_2 = MH_3 = x \\ AB &= AC = BC = a = 6 \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} MH_1 \cdot BC + \frac{1}{2} MH_2 \cdot AC + \frac{1}{2} MH_3 \cdot AB \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 &= \frac{3}{2} ax \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6} a = \sqrt{3} \end{aligned}$$

۴. از نامساوی مثلثی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} OA+OB &> AB \\ OA+OC &> AC \\ OB+OC &> BC \end{aligned} \right\} \\ + \\ \Rightarrow 2(OA+OB+OC) &> AB+AC+BC \\ \Rightarrow OA+OB+OC &> \frac{AB+AC+BC}{2} \end{aligned}$$

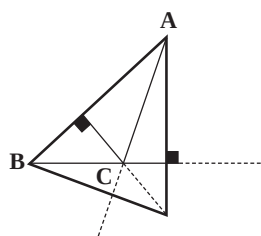
برای اثبات اینکه $OA+OB+OC < AB+AC+BC$ از یک نابرابری دیگر به صورت زیر کمک می‌گیریم:
برای هر نقطه دلخواه M درون مثلث ABC داریم:



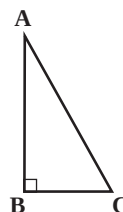
۵. فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
حکم: $AC > AD$

اثبات: زاویه D_2 نسبت به مثلث ABD خارجی است. پس داریم:
 $\hat{D}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B} > \hat{A}_1$ و چون: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، پس: $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$. لذا در مثلث ADC زاویه روبه‌رو به AC از زاویه روبه‌رو به DC بزرگ‌تر است و در نتیجه: $AC > CD$.

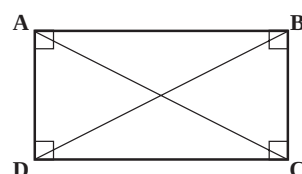
۶. الف) نادرست. مثال نقض:
مثلثی با یک زاویه منفرجه.



ب) نادرست. مثال نقض:
در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، ارتفاع AB از هر دو ضلع مجاورش (AC و AB) کوچک‌تر نیست.

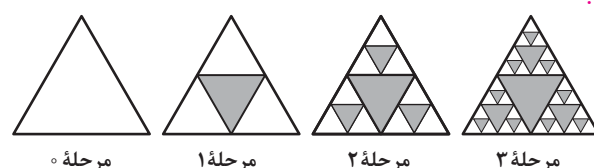


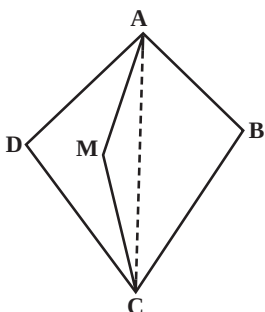
ج) درست. در متوازی‌الاضلاع ABCD قطرهای AC و BD برابرند. با توجه به ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع داریم:



$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} AB &= AB \\ BC &= AD \\ AC &= BD \end{aligned} \right\} \text{ض‌ض‌ض} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}, \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \text{ABCD مستطیل است.} \end{aligned}$$

هندسه ۲ (سوم دبیرستان)





بنابراین S_{MAC} مقداری ثابت است و چون AC هم مقداری ثابت است، پس مکان هندسی M خط راستی موازی AC است.

پاسخ نامه حسابان

$$\begin{aligned} x^1 &= (x^1 - 1) + 1 = [(x^5)^{-1} - 1] + 1 = (x^5 - 1)(x^5 + 1) + 1 \\ &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + 1) + 1 \\ \Rightarrow x^1 &= (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + 1 \Rightarrow \boxed{R(x) = 1} \end{aligned}$$

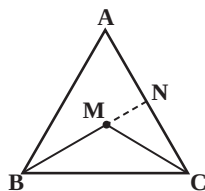
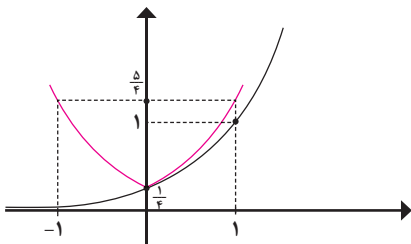
۲. چون تقسیم $P(x)$ بر $x+1$ باقی مانده ۲ دارد، پس: $P(x) = (x+1)Q(x) + 2$
و: $P(x) - 2 = (x+1)Q(x)$ یعنی $P(x) - 2$ مضرب $(x+1)$ است. به طور مشابه $P(x) - 2$ باید مضرب $(x-1)$ و $(x-2)$ باشد، پس $P(x) - 2$ مضرب تمام آن هاست. یعنی:

$$\begin{aligned} P(x) - 2 &= (x+1)(x-1)(x-2)Q(x) \\ P(x) - 2 &= (x^3 - \Delta x^2 + 4)Q(x) \text{ و در نتیجه } P(x) - 2 = (x^3 - 1)(x^3 - 4)Q(x) \\ \text{پس: } P(x) &= (x^3 - \Delta x^2 + 4)Q(x) + 2 \\ \text{بنابراین: } P(x) &= (x^3 - \Delta x^2 + 4)Q(x) + 2 \\ \text{چون } P(x) \text{ از درجه } 4 \text{ است، پس: } Q(x) &= k \text{ یعنی مستقل از } x \text{ است} \\ \text{و } k \in \mathbb{R} \text{ و بنابراین: } P(x) &= k(x^3 - \Delta x^2 + 4) + 2 \\ \text{بخش پذیر است، داریم: } P(3) &= 0 \text{، بنابراین:} \\ P(3) = 0 &\Rightarrow k(27 - 45 + 4) + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 40k + 2 &= 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{20} \\ \text{پس: } P(x) &= -\frac{1}{20}(x^3 - \Delta x^2 + 4) + 2 \end{aligned}$$

۳. ابتدا معادله داده شده را ساده می کنیم.

$$\begin{aligned} 2^{2x+1} &= 4x^2 + 2 \Rightarrow 2 \times (2^x)^2 = 2(4x^2 + 1) \\ \Rightarrow 4^x &= 4x^2 + 1 \Rightarrow 4^{x-1} = x^2 + \frac{1}{4} \\ \text{اکنون نمودار هر کدام از توابع } y &= x^2 + \frac{1}{4} \text{ و } y = 4^{x-1} \text{ را رسم می کنیم.} \end{aligned}$$



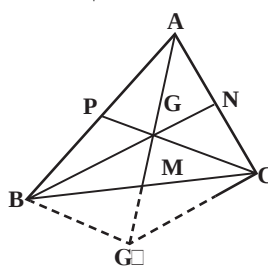
$AB + AC > MB + MC$
برای اثبات، مطابق شکل MB را امتداد می دهیم تا AC را در نقطه N قطع کند و به کمک نامساوی مثلثی می نویسیم:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} MN + NC &> MC \\ BA + AN &> BM + MN \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow MN + NC + BA + AN &> MC + BM + MN \\ \Rightarrow AB + AC &> MC + MB \end{aligned}$$

حال به کمک این قضیه می نویسیم:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} OB + OC &< AB + AC \\ OA + OC &< AB + BC \\ OB + OA &< AC + BC \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow 2(OA + OB + OC) &< 2(AB + AC + BC) \\ \Rightarrow OA + OB + OC &< AB + AC + BC \end{aligned}$$

۵. مسئله را حل شده فرض می کنیم. GM را به اندازه خودش تا نقطه G' امتداد می دهیم. چون $GM = G'M$ و $MB = MC$ ، پس $GCG'B$ متوازی الاضلاع است. بنابراین: $CG' = GB = \frac{2}{3}BN$ ، $CG = \frac{2}{3}CP$ و



اکنون $GG' = 2GM = \frac{2}{3}AM$
با معلوم بودن طول های CG و GG' (بر حسب طول های میانه های مثلث) می توان ابتدا مثلث CGG' و از آنجا مثلث ABC را رسم کرد.

طریقه رسم: پاره خط CG' را مساوی $\frac{2}{3}m_b$ (دو سوم طول میانه وارد بر $AC=b$) رسم می کنیم. به مرکز G' و به شعاع $\frac{2}{3}m_a$ و به مرکز C به شعاع $\frac{2}{3}m_c$ کمان می زنیم و محل برخورد دو کمان را G می نامیم تا مثلث CGG' رسم شود. سپس CG را از طرف G به اندازه $\frac{1}{3}m_c$ امتداد می دهیم تا به نقطه P برسیم، $G'G$ را به اندازه $\frac{1}{3}m_a$ امتداد می دهیم تا به نقطه A برسیم، و A را به P وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا امتداد میانه CM از مثلث CGG' را در نقطه B قطع کند و مثلث ABC رسم می شود. شرط وجود جواب آن است که مثلث CGG' رسم شود؛ یعنی: $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > \frac{2}{3}m_c$ و یا: $m_a + m_b > m_c$. به همین ترتیب: $m_a + m_c > m_b$ و $m_b + m_c > m_a$.

$$\begin{aligned} S_{MABC} &= S_{MADC} \\ \Rightarrow S_{ABC} + S_{MAC} &= S_{ADC} - S_{MAC} \\ \Rightarrow S_{MAC} &= \frac{S_{ADC} - S_{ABC}}{2} \end{aligned}$$

به وضوح $x=0$ یک ریشه است، ولی چون رشد تابع نمایشی 4^{x-1} نسبت به تابع درجه دوم $x^2 + \frac{1}{4}$ خیلی بیشتر است، برای x های بزرگ، این دو نمودار دوباره یکدیگر را قطع می کنند. پس معادله اولیه دو ریشه خواهد داشت. با توجه به جدول زیر، ریشه دوم عددی بین ۲ و ۳ خواهد بود.

x	۱	۲	۳
4^{x-1}	۱	۴	۱۶
$x^2 + \frac{1}{4}$	$1 + \frac{1}{4}$	$4 + \frac{1}{4}$	$9 + \frac{1}{4}$

۴. نابرابری مثلثی به صورت $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ است و تساوی هنگامی رخ می دهد که a و b هم علامت باشند. در این سؤال $a=x-1$ ، $b=4-2x$ و $a-b=3x-5$. پس تساوی $|a-b| = |a| + |b|$ هنگامی رخ می دهد که a و b مثبت و یا هر دو منفی باشند.

$$\begin{cases} \text{اشتراک} \\ a < 0 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \\ b < 0 \Rightarrow 4-2x < 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} \text{اشتراک} \\ a > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ b > 0 \Rightarrow 4-2x > 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

بنابراین مجموعه جواب های این معادله (۱،۲) است.

۵. ابتدا قرار می دهیم $t=x+1$:

$$x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow (t-1)^2 + \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t + 1 + \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t + 1 + 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 2\left(t + \frac{1}{t}\right) + 2 = \frac{5}{4}$$

اکنون اگر $s = t + \frac{1}{t}$ ، پس:

$$s^2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$$

بنابراین: $s^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}$. با جای گذاری در معادله بالا داریم:

$$(s^2 - 2) - 2s + 2 = \frac{5}{4} \Rightarrow s^2 - 2s - \frac{5}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4s^2 - 8s - 5 = 0 \Rightarrow (2s-5)(2s+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = \frac{5}{2} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \\ \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}, t = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = -\frac{1}{2} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow 2t^2 + t + 2 = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

اگر $t=2$ ، داریم: $x=1$ و اگر $t=\frac{1}{2}$ ، داریم: $x=-\frac{1}{2}$.

۶. در بسط دوجمله ای $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ ، قرار می دهیم $a=2$ و $b=1$:

$$3^n = (2+1)^n = 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2}$$

$$+ \binom{n}{3} 2^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-1} \times 2 + \binom{n}{n} \times 1$$

$$\Rightarrow 3^n = 2^n + 2^{n-1} \left[\binom{n}{1} + \frac{\binom{n}{2}}{2} + \frac{\binom{n}{3}}{2^2} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{2^{n-2}} \right] + 1$$

$$\Rightarrow 3^n = 2^n + A(2^{n-1}) + 1 \Rightarrow A = \frac{3^n - 2^n - 1}{2^{n-1}}$$

پاسخ سؤالات ریاضی ۳

۱. در این سؤال داریم: $P(A) = \frac{1}{2}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{الف})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (\text{ب})$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \quad (\text{ج})$$

د) حداکثر یکی رخ دهد. یعنی فقط A یا فقط B رخ دهد و یا هیچ کدام رخ ندهد. متمم آن، این است که هر دو با هم رخ دهند، پس اگر این پیشامد C باشد، داریم:

$$P(C) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

هـ) فقط یکی از دو پیشامد رخ دهد. یعنی فقط A و یا فقط B رخ دهد. پس اگر این پیشامد D باشد، داریم:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= (P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(A \cap B)) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

۲. فرض کنیم A پیشامد قبول نشدن دانش آموز انتخاب شده باشد. شکل زیر را در نظر می گیریم:



۳. اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... و $2n$ را در n دسته به صورت زیر طبقه‌بندی می‌کنیم:

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$$

اکنون $(n+1)$ عدد انتخابی از این n مجموعه، طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو عضو از یک مجموعه را در اختیار خواهد داشت و با توجه به اینکه داخل هر مجموعه دو عدد متوالی قرار دارند، پس نسبت به یکدیگر اول خواهند بود.

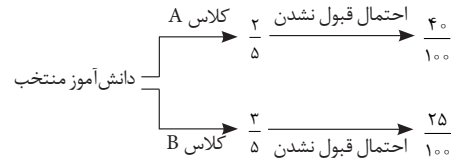
$$\begin{aligned} A &= (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \\ &= \frac{a^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2}{c^2} \\ &= 3 + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \right) \end{aligned}$$

می‌دانیم که برای هر عدد حقیقی مثبت x داریم: $x + \frac{1}{x} \geq 2$. با توجه به اینکه دو عبارت داخل هر پرانتز معکوس یکدیگرند و مثبت، پس:

$$A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - y^4}{4y^3} &> x - y \Rightarrow x^4 - y^4 > 4y^3(x - y) \\ &\Rightarrow (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) > (x - y)4y^3 \\ &\Rightarrow x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 > 4y^3 \\ &\Rightarrow (x^3 - y^3) + y(x^2 - y^2) + y^2(x - y) > 0 \end{aligned}$$

اکنون با توجه به اینکه $x > y > 0$ ، بنابراین تمام عبارت‌های بالا در سمت چپ نامساوی مثبت هستند و آخرین نامساوی صحیح است. پس به کمک اثبات بازگشتی حکم مسئله ثابت می‌شود.



پس:

$$P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{100} + \frac{15}{100} = \frac{31}{100}$$

۲. الف) اگر A پیشامد دو مهره هم‌رنگ باشد، داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1} + \binom{6}{1}\binom{6}{1}}{10 \times 10} = \frac{16 + 36}{100} = \frac{52}{100}$$

ب) اگر B پیشامد فقط یک مهره سفید باشد، این مهره سفید در انتخاب اول و یا در انتخاب دوم ظاهر می‌شود. پس:

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1} + \binom{6}{1}\binom{4}{1}}{10 \times 10} = \frac{24 + 24}{100} = \frac{48}{100}$$

ج) اگر C پیشامد حداقل یک مهره سیاه باشد، متمم این پیشامد این است که هر دو مهره سفید باشند. پس:

$$P(C) = 1 - \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{10 \times 10} = 1 - \frac{16}{100} = \frac{84}{100}$$

پاسخ‌نامهٔ جبر و احتمال

۱.

$$\begin{aligned} A &= n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 \\ &= (n(n+3))(n+1)(n+2) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \end{aligned}$$

اگر $n^2 + 3n = x$ باشد، داریم:

$$A = x(x+2) + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

۲. فرض کنید: $A = (k+1)(k+2)\dots(k+n)$ حاصل ضرب n عدد متوالی باشد که $k \in \mathbb{Z}$. با توجه به اینکه از دو عدد متوالی، حداقل یکی مضرب ۲ است، پس A مضرب ۲ است. همچنین از هر سه عدد متوالی، حداقل یکی مضرب ۳ است، پس A مضرب ۳ است و به همین ترتیب از هر n عدد متوالی، حداقل یکی مضرب n است، پس A مضرب n نیز هست. بنابراین A مضرب ۲، ۳ و ... و n خواهد بود و چون این اعداد نسبت به هم اول‌اند، پس A مضربی از حاصل ضرب آن‌ها، یعنی $n!$ است.

پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و ...



با درود به خوانندگان عزیز مجله، همکاران محترم فرهنگی و دانش‌آموزان عزیز، در این شماره هم به بخشی از نامه‌ها و ایمیل‌های شما بزرگواران پاسخ می‌دهیم.

و منسجم ریاضی. دومی هم بیشتر به یک جزوه درسی شباهت دارد. از شما همکار بزرگوار می‌خواهیم با دقت و توجه بیشتری یاری‌رسان مجله خودتان باشید. منتظر کارهای دیگرتان می‌مانیم.

● همکار محترم، سرکار خانم آمنه پورذکریا، مدیریت پژوهش‌سرای دانش‌آموزی شهرستان لنگرود
با سپاس از توجهتان به مجله و ارسال کار یکی از دانش‌آموزان آن مرکز (خانم فاطمه حسنی) که ترجمه مربوط به بخش «آموزش ترجمه متون» را انجام داده بودند، برای تشویق این دانش‌آموز متن نوشته (ترجمه) ایشان را عیناً در اینجا می‌آوریم:
ترجمه متن ریاضی ماهنامه برهان ریاضی متوسطه ۲، شماره ۸۷، مهر ۱۳۹۴، صفحه ۲۸:

♦ مثال ۲. حل یک معادله درجه دوم به روش تجزیه
معادله $9x^2 - 6x + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: این معادله به شکل استاندارد است و می‌توان آن را به روش تجزیه حل کرد:

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$(3x - 1)(3x - 1) = 0$$

$$3x - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{یا} \quad x = \frac{1}{3}$$

این معادله تنها جواب تکراری $\frac{1}{3}$ دارد.

مجموعه جواب $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ است.

روش ریشه دوم:

فرض کنیم بخواهیم معادله درجه دوم $x^2 = p$ را حل کنیم که در آن $p \geq 0$ یک عدد حقیقی نامنفی است. در این زمینه مثال‌هایی آورده شده است.

شکل استاندارد معادله فوق به صورت زیر است:

$$x^2 - p = 0$$

$$(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p}) = 0$$

تجزیه (با اعداد حقیقی)

$$x = \sqrt{p} \quad \text{یا} \quad x = -\sqrt{p}$$

نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$x = \sqrt{p} \quad \text{یا} \quad x = -\sqrt{p} \quad \text{اگر} \quad x^2 = p \quad \text{و} \quad p \geq 0 \quad \text{آن‌گاه:}$$

با سپاس از همه عزیزان تا شماره بعد همگی را به خدای بزرگ می‌سپاریم.

● همکار محترم، آقای جابر مختاری دهقادی

مقاله‌تان با عنوان «تقویم و ریاضی» مدتی است که به دستمان رسیده است و به دنبال فرصتی برای چاپ آن می‌گردیم! اگرچه موضوع آن تکراری است و در بسیاری از کتاب‌های مربوط به نظریه اعداد یا ریاضیات گسسته و حتی کتاب درسی ریاضیات جدید نظام قدیم آموزشی مطرح شده، ولی باز هم قابل طرح است. از شما همکار محترم می‌خواهیم که با ارائه مطالب تازه‌تر، دوستان خود را در مجله برهان یاری کنید و سپاس از لطفتان.

● همکار محترم، سرکار خانم بتول نوری یامچی از استان آذربایجان شرقی
مقاله‌تان با عنوان «آموزش رسم نمودار با نرم‌افزار متلب» به دستمان رسید. این گونه مقالات که ارتباطی بین ریاضیات و نرم‌افزار رایانه برقرار می‌کنند، در مجله ما جایگاهی دارند و ان‌شاءالله در آینده از این مقاله استفاده می‌کنیم. اما سعی کنید، اولاً حجم این مقاله‌ها چندان زیاد نشود و ثانیاً در مقاله‌های بعدی که ارسال می‌کنید، به موضوعات خالص ریاضی بیشتر بپردازید. با تشکر از لطفتان به مجله برهان.

● همکار گرامی، آقای محمود ندائی و دوست دانش‌آموز آقای حسین دامغانی

با سپاس فراوان از لطف و توجهتان به مجله، پاسخ‌هایتان به مسائل پای تخته به مسئول این بخش تحویل داده شد.

● همکار محترم، آقای مهدی بشارت از تهران

ضمن سپاس از توجهتان به مجله و ارسال مقاله «دنباله دایره‌ها»، به اطلاعات می‌رسانیم که کار تحقیقی‌تان خوب و قابل قبول است و در صورت امکان در یکی از شماره‌های آتی آن را مورد استفاده قرار می‌دهیم. اما خواهش ما از شما همکار عزیز و توانمند این است که به نیازهای دانش‌آموزان در سطوح متفاوت توجه کنید و براساس این نیازها مطالبی را برای ما به رشته تحریر درآورید. باز هم از شما سپاسگزاریم.

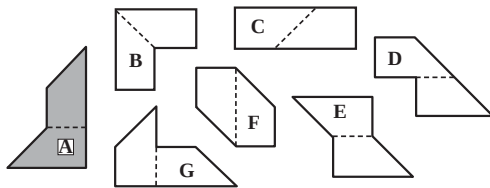
● همکار محترم، سرکار خانم احترام انبارکی، از شهرستان کرج

دو مقاله‌تان با عنوان‌های «ارزش ریاضیات» و «حل نامعادلات گویا به کمک نقاط بحرانی» به دست ما رسید. قبلاً هم لطفتان شامل حال مجله شده بود و ترجمه‌ای از شما را در برهان به چاپ رساندیم. بابت توجهتان به مجله خودتان، از شما سپاسگزاریم، ولی باید به اطلاعات برسانیم که متأسفانه مقاله اول شما بیشتر به یک توصیه اخلاقی شباهت دارد تا یک مقاله مدون

هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشتاد شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال
هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

پاسخ ایستگاه‌های اندیشه

ایستگاه اول: چند معمای تصویری، یا بازی با تصاویر!



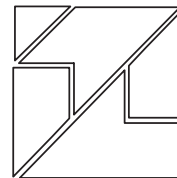
ایستگاه دوم: افسانه چهار برادر

۱. می‌دانیم که کاوه و مجید به همهٔ سؤال‌ها یک‌جور پاسخ می‌دهند! (چرا؟) ولی کافی است از یکی از آن‌ها بپرسیم: «آیا تو راست‌گو هستی؟» در این صورت اگر او کاوه باشد، می‌گوید: بله، ولی اگر مجید باشد چطور؟ اگر او مجید باشد، چون دیوانه است، پس باور دارد که راست‌گوست (زیرا در اصل چنین نیست)، ولی برای آنکه دروغ بگوید، می‌گوید: خیر! پس با این پرسش و پاسخ آن معلوم می‌شود کدام یک کاوه و کدام مجید است.

۲. می‌توانید نخست از او بپرسید: «آیا دو به اضافهٔ دو مساوی چهار است؟» اگر او پاسخ بله بدهد، می‌فهمید او به همهٔ سؤال‌ها پاسخ درست می‌دهد و در نتیجه، کاوه یا مجید است. سپس به راه‌حل مسئله (۱) رجوع می‌کنید و از آنجا هویت او را تشخیص می‌دهید. اما اگر او پاسخ خیر بدهد، آن‌گاه می‌فهمید که او به همهٔ سؤال‌ها پاسخ نادرست می‌دهد و در نتیجه پرویز یا حمید است. پس از او می‌پرسید: «آیا تو پرویز هستی؟» پرویز در پاسخ به این سؤال می‌گوید خیر و حمید می‌گوید بله و از آنجا هویت او را تشخیص می‌دهید.

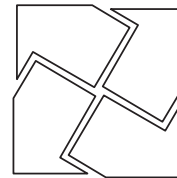
۳. فقط کافی است از او بپرسید: «آیا تو کاوه یا حمید هستی؟» به این سؤال هم کاوه و هم پرویز پاسخ بله می‌دهند، اما حمید و مجید پاسخ خیر می‌دهند. (چرا؟) بنابراین اگر او به این سؤال پاسخ بله بدهد، متاهل است و اگر پاسخ خیر بدهد، مجرد است!

۴. بله، اگر بپرسیم: «آیا تو کاوه یا مجید هستی؟» همه به آن پاسخ بله می‌دهند! (چرا؟)

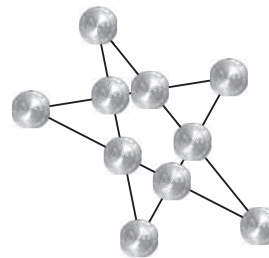


۳۷. ۲ مثلث

۳. فقط موردهای ۱، ۲، ۶ و ۷ را می‌توان به مکعب تبدیل کرد که از میان آن‌ها، فقط ۶ یک تاس واقعی را می‌سازد که در آن مجموع هر جفت عدد دو وجه متقابل، مساوی ۷ است.



۴



۵

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهانه و نه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد کوک برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی

رشد نوجوان برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

رشد دانش‌آموز برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهانه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد نوجوان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد پارهانی برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد جوان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

رشد پراگندگی برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهانه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

رشد آموزش ابتدایی • رشد تکنولوژی آموزشی

رشد مدرسه فردا • رشد معلم

مجله‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی • رشد آموزش زبان و ادبیات فارسی
رشد آموزش هنر • رشد آموزش مشاور مدرسه • رشد آموزش تربیت بدنی
رشد آموزش علوم اجتماعی • رشد آموزش تاریخ • رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش زبان‌های خارجی • رشد آموزش ریاضی • رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش فلسفه • رشد آموزش زیست‌شناسی • رشد مدیریت مدرسه
رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کارآفرینی • رشد آموزش پیش‌دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و... تهیه و منتشر می‌شود.

• نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر، شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۱۶۶.

• تلفن و نمابر: ۸۸۲۰۱۴۷۸ - ۲۱

• وبگاه: www.roshdmag.ir



مستند شدن
دانش‌آموزان
و معلمان
و کارکنان
آموزشی

پهارم آبان روزگرمیداشت محمد بن موسی خوارزمی ۹ روز بهر

محمد بن موسی خوارزمی، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، فیلسوف، جغرافی‌دان و مورخ بنام ایران‌زمین در دوره عباسیان، حدود سال ۱۸۵ هجری قمری در «خوارزم» زاده شد که امروزه «خیوه» نام دارد و در جمهوری ازبکستان واقع است. درباره او و کارهایش هرچه بگوییم کم است. اما به‌طور خلاصه می‌توان گفت که کارهای او در زمینه ریاضیات بسیار گسترده بوده‌اند که یکی از مهم‌ترین آن‌ها کار روی حل معادلات درجه اول و دوم و ابداع روش‌های گوناگون جبری و هندسی برای حل آن‌ها بوده است. از این جنبه وی را می‌توان بنیان‌گذار اصلی دانش جبر دانست. اصطلاح جبر (algebra) هم از نام کتاب معروف او «الجبر و المقابله» گرفته شده است. در زمینه نجوم نیز کارهای گسترده‌ای انجام داده که یکی از مهم‌ترین آن‌ها تلفیق میراث علمی هند و یونان در این زمینه بوده است. وی همچنین کتاب‌های زیادی در زمینه نجوم تحریر کرد که از آن جمله است: دو کتاب در اصطلاح، اطلسی از نقشه آسمان و زمین، و نیز چند ترجمه و تصحیح از کتاب‌های هند و یونان، از جمله تصحیح نقشه‌های جغرافیایی بطلمیوس. خوارزمی در جغرافیای طبیعی و تاریخ‌نگاری هم تبحر به‌سزایی داشت و آثاری از وی به‌جا مانده است که از این موضوع حکایت می‌کند. کتاب‌های «صورت‌الارض» و «التاریخ» وی متأسفانه در دسترس نیستند که اولی درباره جغرافیا و تقسیم‌بندی شهرها و ولایات آن دوره و دومی درباره تاریخ اسلام است.

درباره اهمیت کارهای خوارزمی همین بس که بگوییم: جورج سارتن در کتاب «تاریخ علم» خود، نیمه نخست قرن نهم میلادی را «عصر خوارزمی» نامید. نویسنده اروپایی دیگری گفته است: «محمد بن موسی خوارزمی معلم واقعی ملل اروپایی جدید در علم جبر بوده است». همچنین یکی از حفره‌های سطح کره ماه به نام این دانشمند بزرگ ایرانی نام‌گذاری شده است. برای اطلاع بیشتر از زندگی این استاد بزرگ تاریخ ریاضی کشورمان می‌توانید به مطلبی از زنده‌یاد پرویز شهریاری در فصل‌نامه برهان (شماره ۸۰، زمستان ۱۳۹۲) مراجعه کنید.



اربعین مسینی تسلیت باد

اربعین حسینی، یادآور چهلمین روز شهادت آبِمردی حق طلب و یاران عدالت پیشه‌اش است که برای اصلاح دین و برای دعوت جامعهٔ چهل‌زده به اندیشیدن، قیام به حق نمودند. می‌توان این روز را روز تفکر و منطق نیز دانست: روز حق‌طلبی بر اساس اندیشه و منطق متعالی در پرتو امامت حسین بن علی (ع). این شهادت بر همهٔ رهروان واقعی آن حضرت تسلیت باد!

