



# کتاب درسی و کلاسی درسی

## دو عامل مهم در موفقیت

تمام آموزش‌های مدرسه‌ای از «کتاب درسی» آغاز می‌شوند و برای تألیف، چاپ و توزیع هر کتاب درسی هزینه‌های بسیاری صرف می‌شود و از بهترین کارشناسان، استادان و دبیران هر رشته، در تألیف هر کتاب درسی بهره برده می‌شود. در نهایت هم قرار است این کتاب درسی بعد از آموزش‌های لازم به دبیران و معلمان شما، در کلاس درس توسط ایشان تدریس شود. بنابراین، بی‌توجهی به اهداف کتاب درسی، کم‌توجهی و عدم تمرکز روی تمام مطالب نگارش شده (حتی پاورقی‌ها) در کتاب‌های درسی، چه از طرف معلمان و دبیران و چه از طرف دانش‌آموزان، به معنی به هدر دادن تمام سرمایه‌هایی است که برای تألیف، چاپ و توزیع کتاب درسی صرف شده است.

البته به دلیل محدودیت‌های موجود در تألیف کتاب‌های درسی و به‌خصوص این موضوع که کتاب درسی در ایران برای سراسر کشور تألیف می‌شود و در سراسر کشور، توان همه دانش‌آموزان یکسان نیست، شما با صلاحدید و مشورت معلم خودتان در هر درسی که لازم است، از کتاب‌های کمک‌آموزشی استاندارد و مورد تأیید وزارت آموزش و پرورش استفاده می‌کنید. به همه شما دانش‌پژوهان عزیز توصیه می‌کنم در حد امکان با تمرکز بالا در کلاس درس حضور یابید و کلاس درس و کتاب درسی را اصلی‌ترین عامل در یادگیری و موفقیت بدانید.

مؤید و پیروز باشید

سردبیر

## دانش آموزان

## هر سؤالی می‌خواستند می‌پرسیدند!

اشاره

اعضای هیئت تحریریه مجله ریاضی رشد برهان متوسطه ۲ تابستان امسال گفت‌وگویی صمیمی با استاد جعفر نیوشا، معلم پیشکسوت هندسه و مؤلف کتاب‌های درسی و کمک‌درسی و عضو سابق کمیته المپیاد ریاضی ایران داشتند. قسمت اول این گفت‌وگو را در شماره ۵ ملاحظه نمودید. اینک قسمت دوم و پایانی این گفت‌وگو را با هم می‌خوانیم.

مصاحبه  
با استاد  
جعفر نیوشا  
معلم  
پیشکسوت  
درس  
هندسه



■ بر خورد شما با دانش آموزان در کلاس درس چگونه بود؟

○ من در کلاس جدی بودم، تکلیف می‌دادم و تکلیف می‌خواستم. اما در عین حال فضایی در کلاس بود که هر دانش‌آموزی هر سؤالی می‌خواست می‌توانست بپرسد و ترس و واهمه‌ای در کار نبود. یک خاطره هم بگویم بد نیست. در دبیرستان فرزنانگان، خانمی بود به نام پرستو صادقی که حالا دکتر دارد و در استرالیا زندگی می‌کند. نفر دوم کنکور سراسری سال ۱۳۷۱ بود. مسئله نسبتاً مشکلی داده بودم و بچه‌ها نتوانسته بودند آن را حل کنند. راه حل آن را توضیح دادم. این خانم دست بلند کرد و گفت: اگر اجازه بدهید من هم راه دیگری بگویم و آمد و با روشی خیلی بهتر از روش من مسئله را حل کرد. من هم رو به بچه‌ها گفتم این دوست شما نه تنها خودش و کلاس را روسفید کرد، بلکه باعث افتخار من هم شد و این شعر را برایش سرودم:

پرستو راه‌حلی را بیان کرد  
که بودش کار او بس خوب و زیبا  
دبیرش کار او را آفرین گفت  
ازیرا هست شاگردی توانا  
بخندیدند بر او دوستانش  
نگار و مریم و رؤیا و شیوا  
بپرسیدم چه رازی در میان است؟  
چرا آزرده‌اش کردید او را؟

بگفتند بسته‌ایم ما عهد و پیمان  
که هر کس طرح نو آرد ز ماها  
چنان با نیش خود کارش بسازیم  
که تا دنیا نتواند برخیزد از جا  
نیوشا این سخن از بهر شوخی  
سروده است از بهر شماها

عزیزان قدر یکدیگر بدانید  
که باشد زندگی چون خواب و رؤیا  
به دنیا مردمی آزاده باشید  
نترسید از عتاب پیر و برتا  
بینیم من شما را شاد و خندان  
بسان شاخ گل در بوستان‌ها  
من این شعر را در کلاس خواندم و بچه‌ها آن را  
نوشتند و روی دیوار کلاس نصب کردند!

■ استاد شهر یاری جمله‌ای دارد که می‌گوید:  
«اگر ریاضی‌دان این حق را از خود سلب کند که  
از موسیقی لذت ببرد، به کمک شعر و رمان خوب  
به ژرفای روح انسان‌ها وارد شود، گل و گیاه را  
دوست داشته باشد، به مسئله‌های حاد اجتماعی  
و سیاسی زمان خود علاقه‌مند باشد و... آن وقت،  
به یک انسان تک‌بعدی تبدیل می‌شود که در این

به طور کلی به  
ریاضیات علاقه  
داشتیم اما در  
دانشگاه بیشتر  
تحت تأثیر دکتر  
هشترودی و دکتر  
آل بویه به هندسه  
علاقه مند شدم

صورت، بعید می‌دانم بتواند حتی یک ریاضی‌دان  
خوب باشد» شما با این جمله موافقت می‌کنید؟

بله، صددرصد. شما استادان ریاضی را ببینید: آقای  
شهریاری، آقای امامی، آقای غیور، آقای مصاحب، آقای  
دکتر هشترودی، دکتر آل بویه. این‌ها اصلاً آدم‌های  
یک‌بعدی نبودند. دایرةالمعارف، آقای مصاحب معروف  
بود. آقای غیور دیوان شعر داشت و آقای هشترودی  
شاعر بود. دکتر آل بویه هم شاعر بود و دیوانی داشت  
به نام «دیوان بویه» که من آن را از خودش هدیه گرفته  
بودم.

شما ظاهراً در سال ۱۳۶۱ از خدمت رسمی  
آموزش و پرورش بازنشسته شدید. معلمی را از  
چه سالی شروع کردید؟

بعد از پایان دوره دانش‌سرا، من معلمی را از سال ۱۳۳۴  
در تبریز شروع کردم. بعد از ۹ سال در سال ۱۳۴۳ به  
تهران منتقل شدم و ۱۷ سال در تهران بودم. خدمت  
رسمی من در دبیرستان مروی بود. مدیر دبیرستان  
مرویی، آقای مساوات بود که از اشخاص فرهیخته و  
فرهنگی بود. ایشان لیسانس ریاضی داشت و در بیرجند  
معلم آقای علم - نخست‌وزیر و وزیر دربار در حکومت  
پهلوی - بود. یک‌بار در جشنی که در دبیرستان مروی  
به مناسبتی برگزار شده بود، آقای علم و وزیر آموزش  
و پرورش وقت - دکتر هدایتی - آمده بودند که من هم  
آنجا حاضر بودم.

تدریس غیردولتی خودم را از دبیرستان خوارزمی  
شروع کردم. آقای باقر امامی که مدیرعامل  
آنجا بود، در تبریز معلم من بود و در

کلاس ششم ریاضی هندسه‌های ما را تدریس می‌کرد.  
وقتی من به تهران منتقل شدم، پیش ایشان رفتم و ایشان  
به من گفت که ما داریم مدرسه «خوارزمی ۲» را در میدان  
بهارستان راه می‌اندازیم و شما برای تدریس به آنجا بروید.  
این‌طور بود که من از آنجا شروع کردم و بعد به دبیرستان  
خوارزمی پسرانه و دخترانه رفتم و سال‌ها در آن مدارس  
هم تدریس کردم.

با آقای شهریاری هم همکاری بودید؟

بله در خوارزمی و «دبیرستان مرجان» با ایشان همکاری  
بودم. آقای شهریاری معلمی بسیار توانا بود و البته  
فصاحت کلام بسیار خوبی هم داشت و بچه‌ها بسیار او  
را دوست داشتند. چون فقط ریاضی درس نمی‌داد و در  
کنار درس مطالبی می‌گفت که بچه‌ها خیلی استقبال  
می‌کردند. وی با همه همکاران رفتار بسیار خوبی داشت  
و در جمع آن‌ها همیشه حرف‌های تازه‌ای می‌زد و از  
صحبت‌هایشان استفاده می‌کردیم.

شرقی: آقای دکتر فیروز نادری که در آمریکا و در  
سازمان هوا-فضای آنجا (ناسا) سمت مهمی دارد، جمله  
معروفی دارد و می‌گوید: «کلاس‌های آقای شهریاری  
برای ما حکم «مدی تیشن» داشت و ما را مسحور کلام  
خود می‌کرد.»

امیری: یک خاطره در این باره بگوییم: من در سال‌های

۷۶-۱۳۷۳ در «دبیرستان فیروز بهرام»

افتخار همکاری با استاد شهریاری

را داشتم. در کلاس سوم

ریاضی من ریاضیات



از راست به چپ:

محمد رضا امیری، هوشنگ شرقی،

جعفر نیوشا، حمیدرضا امیری،

محمد هاشم رستمی،

حسین کریمی و

ابراهیم دارابی

در سال‌های آغاز دهه ۵۰، دو مرتبه، هر بار دو ماه از طرف وزارت آموزش و پرورش برای یادگیری مباحث ریاضیات جدید به کشور فرانسه اعزام شدم

■ با دفتر تألیف کتب درسی از چه زمانی همکاری داشتید؟

○ در سال‌های آغاز دهه ۷۰ شمسی، همزمان با تحول نظام آموزشی به دفتر تألیف دعوت شدم و در گروه ریاضی در تألیف کتاب‌های هندسه نقش داشتم. آقایان رستمی و دارابی هم آن زمان آنجا بودند و در تألیف بعضی کتاب‌ها همکاری می‌کردند. اما من از سال‌های میانی دهه ۷۰ دیگر با دفتر تألیف همکاری نداشتم و از روند تألیف کتاب‌های هندسه ۱ و ۲ نیز راضی نبودم و نسبت به آن‌ها انتقاد داشتم. اگرچه با کمیته المپiad ریاضی تا سال ۱۳۸۶ همکاری داشتم.

■ امیری: الان چه می‌کنید، دست به قلم هستید؟ آخرین کارهایتان چه بودند؟

■ در حال حاضر مشغول گردآوری کارهایم هستم و بعضی از آن‌ها را هم منتشر کرده‌ام. در واقع پسر من که خودش هم تحصیلات عالی دارد (در ایران مهندسی عمران گرفت و از دانشگاهی در ژاپن دکترای زلزله‌شناسی دریافت کرد و اکنون مقیم ایران است) مشوق من برای این کار بوده است.

○ از وقتی که در اختیار ما گذاشتید سپاس‌گزار و امیدواریم که بتوانیم باز هم از تجربیات شما در مجله برهان استفاده کنیم.

■ من هم از شما تشکر می‌کنم و امیدوارم بتوانم در خدمتتان باشم.

جدید درس می‌دادم و آقای شه‌ریاری جبر می‌گفت. استاد خودش مؤلف کتاب جبر سوم ریاضی نظام قدیم بود. از بدشانسی من، کلاس ریاضی جدید من درست بعد از کلاس جبر آقای شه‌ریاری بود و وقتی من می‌رفتم سر کلاس، این سحر را می‌دیدم و تا می‌آمدم کلاس را به دست بگیرم، مدتی طول می‌کشید!

■ چه شد که رشته ریاضی را انتخاب کردید و

چه طور شد که به هندسه روی آوردید؟

○ در آن دوره که ما در دبیرستان تحصیل می‌کردیم، مثل حالا نبود. ما تقریباً چشم و گوش بسته بودیم و معلم‌هایمان ما را با توجه به توانایی و استعدادمان هدایت می‌کردند که مثلاً شما به رشته ریاضی بروید و شما به رشته طبیعی. اما خب، خودم هم کلاً به ریاضیات علاقه داشتم. در دانشگاه بیشتر تحت تأثیر دکتر هشترودی و دکتر آل‌بویه به هندسه علاقه‌مند شدم.

■ در دوران معلمی، شما برای برخی تحصیلات

تکمیلی به کشور فرانسه اعزام شدید. در این مورد هم کمی توضیح بدهید.

○ بله در سال‌های آغاز دهه ۵۰، دو مرتبه، هر بار دو ماه از طرف وزارت آموزش و پرورش برای یادگیری مباحث ریاضیات جدید به کشور فرانسه اعزام شدم؛ چون فرانسوی‌ها در این امر پیشگام بودند.



# جبر خطی در

# Mathstudio

## اشاره

معرفی یک ماتریس، جمع، تفریق و ضرب ماتریسی، دترمینان ماتریس‌ها و محاسبه ماتریس معکوس از جمله مواردی هستند که روش محاسبه آن‌ها با نرم‌افزار «Mathstudio» روی سیستم عامل اندروید در این مختصر مطرح شده‌اند. در پایان ضرب بردارها و محاسبه زاویه بین بردارها نیز بیان شده است. در ادامه مقاله‌های قبل در این مقاله به موضوع جبر خطی می‌پردازیم که بیشتر همان بحث ماتریس است. ماتریس شاید یکی از قسمت‌های ساده در ریاضی دبیرستانی است که در ریاضی سال دوم دبیرستان و هنرستان، همچنین در کتاب هندسه تحلیلی و جبر خطی سال چهارم ریاضی مطرح می‌شود. ولی برخی قسمت‌های آن به دلیل محاسبات طولانی خسته‌کننده است. این مشکل در این نرم‌افزار به سادگی حل شده است.



قاسم حسین قنبری  
دبیر ریاضی سمنان

باید اسمی داشته باشد که مساوی کروشه اصلی قرار می‌گیرد. برای مثال ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = [[2,-1,3],[5,0,7]]$$

۲	-۱	۳
۵	۰	۷

## تصویر ۱

### جمع، تفریق و ضرب ماتریسی

برای انجام اعمال جبری روی ماتریس‌ها، ابتدا باید این ماتریس‌ها را به برنامه معرفی کنیم. اعمال جمع و تفریق طبق معمول و عمل ضرب با علامت ستاره انجام می‌شود. می‌توان چند ماتریس را در یک سلول تعریف کرد. به این منظور بعد از معرفی هر ماتریس کلید "Enter" را فشار می‌دهیم تا خط جدید در سلول موردنظر تعریف شود.

### معرفی یک ماتریس

ماتریس به کمک کروشه تعریف می‌شود. هر سطر ماتریس داخل یک کروشه قرار می‌گیرد و سطرها به کمک ویرگول از هم جدا می‌شوند. کروشه در گوشه سمت راست صفحه کلید رایانه وجود دارد. هر ماتریس



۱	$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
۲	$A^2$	
۱	۲	
۰	۱	

$A^3$		
۱	۳	
۰	۱	

$A^4$		
۱	۴	
۰	۱	

$A^5$		
۱	۵	
۰	۱	

تصویر ۴

با توجه به جواب‌ها می‌بینیم که  $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  در ادامه می‌توانیم با استقرای ریاضی مسئله را ثابت کنیم.

همچنین توان  $n$ ام ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  را حساب می‌کنیم (تصویر ۵).

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$			
۱	۲	۳	
۰	۱	۴	
۰	۰	۱	

$A^2$			
۱	۴	۱۴	
۰	۱	۸	
۰	۰	۱	

$A^3$			
۱	۶	۳۳	
۰	۱	۱۲	
۰	۰	۱	

$A^4$			
۱	۸	۶۰	
۰	۱	۱۶	
۰	۰	۱	

تصویر ۵

مثلاً می‌خواهیم برای دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$  را  $A+B$  و  $A-B$ ،  $A \times B$  حساب کنیم (تصویر ۲).

۱	$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	
۲	$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$	
۳	$A+B$	
۶	۳	
۰	۶	

$A-B$		
-۲	۳	
-۲	-۴	

$A * B$		
۱۱	۱۵	
-۳	۵	

تصویر ۲

### توان ماتریس

در صورتی که بخواهیم توان  $n$ ام یک ماتریس مربعی را حساب کنیم، از دستور  $A^n$  استفاده می‌کنیم. برای

مثال، توان چهارم ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$  را حساب می‌کنیم (تصویر ۳).

۱	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$		
۲	$A^4$		

۱۱۳	۲۶۰	۷۲
۰	۸۱	۰
۱۴۴	۴۴۰	۱۱۳

تصویر ۳

اما فقط کار به همین محاسبات ختم نمی‌شود و ما می‌توانیم برای حل مسائل بزرگ‌تر نیز از این برنامه کمک بگیریم. مثلاً می‌خواهیم شکل کلی توان  $n$ ام ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  را حساب کنیم. در این صورت مراحل حدس و آزمایش را با این برنامه و به سرعت طی می‌کنیم (تصویر ۴).

۱	$A = [[1, 2, 3], [3, 4, 1], [0, 3, 4]]$
۲	$B = [[-2, 3, 1], [0, 5, 5], [3, 2, 1]]$
۳	$\text{Det}(A * B)$

۶۴۰

$\text{Det}(A) * \text{Det}(B)$
---------------------------------

۶۴۰

$\text{Det}(A) + \text{Det}(B)$
---------------------------------

۵۶

تصویر ۷

### وارون ماتریس

برای محاسبه وارون یک ماتریس کافی است بعد از معرفی ماتریس دستور  $\text{Inverse}(A)$  را اجرا کنیم. مثلاً وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$  را حساب می‌کنیم (تصویر ۸).

$A = [[3, 4, 5], [5, 3, 4], [4, 5, 3]]$									
<table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۵</td></tr> <tr><td>۵</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۵</td><td>۳</td></tr> </table>	۳	۴	۵	۵	۳	۴	۴	۵	۳
۳	۴	۵							
۵	۳	۴							
۴	۵	۳							

$\text{Det}(A)$
-----------------

۳۶

$\text{Inverse}(A)$									
<table border="1"> <tr><td><math>-\frac{11}{36}</math></td><td><math>\frac{13}{36}</math></td><td><math>\frac{1}{36}</math></td></tr> <tr><td><math>\frac{1}{36}</math></td><td><math>-\frac{11}{36}</math></td><td><math>\frac{13}{36}</math></td></tr> <tr><td><math>\frac{13}{36}</math></td><td><math>\frac{1}{36}</math></td><td><math>-\frac{11}{36}</math></td></tr> </table>	$-\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{11}{36}$
$-\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{36}$							
$\frac{1}{36}$	$-\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$							
$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{11}{36}$							

تصویر ۸

یکی از مزایای این نرم‌افزار آن است که برخی از محدودیت‌ها را از پیش روی دانش‌آموزان برمی‌دارد. مثلاً می‌توانیم دترمینان و معکوس یک ماتریس مرتبه ۴ را به سادگی حساب کنیم و از آن لذت ببریم (تصویر ۹).

با توجه به جواب‌ها به این نتیجه می‌رسیم که:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n & a_n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_n$  در این مورد دنباله  $3, 14, 33, 60, \dots$  است. با کمک همین برنامه می‌توان جمله عمومی این دنباله را پیدا کرد. جمله عمومی این دنباله  $a_n = 4n^2 - n$  است که به کمک مفهوم رگرسیون به دست آمده است.

### ترانهادۀ ماتریس

برای به دست آوردن ترانهادۀ ماتریسی به نام  $B$ ، ابتدا ماتریس را تعریف و سپس از دستور  $\text{Transpose}(B)$  استفاده می‌کنیم (تصویر ۶).

$B = [[1, 2, 3], [0, 4, 5]]$						
<table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۰</td><td>۴</td><td>۵</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۰	۴	۵
۱	۲	۳				
۰	۴	۵				

$\text{Transpose}(B)$						
<table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۰</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۵</td></tr> </table>	۱	۰	۲	۴	۳	۵
۱	۰					
۲	۴					
۳	۵					

تصویر ۶

### دترمینان ماتریس

برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی به نام  $C$ ، پس از معرفی ماتریس از دستور  $\text{Det}(C)$  استفاده می‌کنیم (تصویر ۷).

مثال: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

حاصل  $|A+B|$ ,  $|A| |B|$ ,  $|A \times B|$  را حساب کنید.





### زاویه بین دو بردار

برای محاسبه زاویه بین دو بردار  $u$  و  $v$  کافی است که دستور  $\text{angle}(v,u)$  را اجرا کنیم. برای مثال، اگر  $w=i+j+k$ ،  $u=j+k$  و  $v=i+j$  زاویه بین بردارهای  $u$  و  $v$  و همچنین  $w$  و  $u$ ، و  $w$  و  $v$  را حساب کنید (تصویر ۱۱).

۱	$v=[1,1,0]$
۲	$u=[0,1,1]$
۳	$w=[1,1,1]$
۴	$\text{Angle}(v,u)$
۶۰	

$\text{Angle}(u,w)$
۳۵.۲۶۴۳۹

$\text{Angle}(v,w)$
۳۵.۲۶۴۳۹

تصویر ۱۱

### سخن پایانی

با کمک Mathstudio می‌توان محاسبات دیگری نیز روی ماتریس‌ها انجام داد؛ از جمله محاسبات مقادیر ویژه و بردارهای ویژه که در حیطه ریاضی دبیرستان نیستند.

تصویر ۹

### بردارها

بردار به صورت ماتریسی یک سطر می‌شود. اگر  $u$  و  $v$  دو بردار باشند، ضرب درونی با علامت  $\text{Dot}(v,u)$  و ضرب خارجی با علامت  $\text{Cross}(v,u)$  محاسبه می‌شود. برای مثال، اگر داشته باشیم:  $u=2i+4j+7k$  و  $v=i+3j-5k$  آن‌گاه حاصل  $(v-u) \cdot (v+u)$  و  $(v-u) \times (v+u)$  را حساب کنید (تصویر ۱۰).

۱	$V=[1,3,-5]$
۲	$U=[2,4,7]$
۳	$\text{Dot}(V,U)$
-۲۱	

$\text{Dot}(V-U, V+U)$
-۳۴

$\text{Cross}(V,U)$
$[41, -17, -2]$

$\text{Cross}(V-U, V+U)$
$[82, -34, -4]$

تصویر ۱۰

## پرست‌های پیکار جو!



چند جفت اعداد اول  $(p,q)$  یافت می‌شوند که در رابطه  $q^2+p^2=2^p$  صدق کنند؟

- الف) ۰      ب) ۱      ج) ۲  
د) ۳      ه) ۴

۱

## هندسه

- طول‌های قطرهای وجه‌های جانبی یک مکعب مستطیل مساوی ۲،  $2\sqrt{2}$  و  $\sqrt{6}$  هستند. طول قطر اصلی مکعب مستطیل را به دست آورید.
- حجم استوانه‌ای را به دست آورید که ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر و سطح کل آن مساوی  $112\pi$  سانتی‌متر مربع باشد.
- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن شش ضلعی منتظمی به ضلع واحد و طول پال‌های جانبی آن  $\sqrt{2}$  است.

۲

## هندسه

- خط راست  $L: y=2x+1$  تحت تبدیل هندسی  $T(x,y)=(-2x,y+1)$  به خط  $L'$  تبدیل می‌شود. معادله  $L'$  را به دست آورید.
- در یک صفحه مختصات قائم، دو خط  $L_1: 3x-2y=6$  و  $L_2: 3x-2y=12$  مفروض‌اند: الف) ضابطه سه انتقال متفاوت را که تحت آن‌ها  $L_1$  به  $L_2$  تصویر شود را بنویسید. ب) اگر  $L_2$  بازتاب  $L_1$  باشد، معادله محور بازتاب را به دست آورید.

- تبدیل هندسی  $T(x,y) = \left( \frac{ax+4y}{5}, \frac{ay-4x}{5} \right)$  مفروض است.  $a$  را طوری به دست آورید که این تبدیل ایزومتري باشد.

## حسابان

- حاصل  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$  را به دست آورید.
- $k$  را طوری به دست آورید که تابع زیر در نقطه  $x=1$  دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k\sqrt{x}-k}{\sqrt{x^2+3}-2} & x > 1 \\ \frac{k[2x]+2x}{k+[x]} & x < 1 \end{cases}$$



۲

## ریاضی

- نمودار تابع با ضابطه  $y = -2\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + 1$  را در یک دوره تناوب آن رسم کنید.
- در یک شش ضلعی منتظم، طول قطر بزرگ چند برابر طول قطر کوچک است؟
- شخصی زمینی به شکل متوازی‌الاضلاع دارد که ابعاد آن ۳۰۰ و ۱۰۰ متر است و یک زاویه حاده آن  $60^\circ$  است. او می‌خواهد با نصب دو حصار موازی از دو رأس قطر کوچک متوازی‌الاضلاع، در داخل زمین خود باغچه‌ای به شکل لوزی محصور کند. طول ضلع و مساحت باغچه را به دست آورید.

۳. حد مقابل را به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x - 6 \sin x}{2 \sin 2x \cos 4x - \sin 4x}$$

## حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. معادله مماس بر منحنی تابع  $f(x) = \text{tg}^{-1}(e^{2x})$  در نقطه‌ای از آن به طول  $x = \ln \sqrt[3]{3}$  بنویسید.

۲.  $a$  و  $b$  را طوری به دست آورید که  $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{4})$  یک نقطه ماکزیمی مم برای تابع با ضابطه  $y = \sin^2 x + \cos x + b$  باشد.

۳. از یک رودخانه به عرض  $a$ ، کانالی به عرض  $b$  عمود بر آن ایجاد کرده‌ایم. طول بلندترین قایقی را به دست آورید که می‌تواند از رودخانه وارد کانال شود.

## جبر و احتمال

۱. یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش را و پیشامد آنکه سکه حداقل یک بار پشت بیاید بنویسید.

۲. یک کیسه حاوی ۲۰ مهره قرمز، ۱۰ مهره سفید و ۱۵ مهره سبز است. ۱ مهره را به طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم. مطلوب است: الف) احتمال آنکه این مهره سفید باشد.

حال این مهره را به کیسه برمی‌گردانیم و ۲ مهره را به طور تصادفی بیرون می‌آوریم؛ مطلوب است: ب) احتمال اینکه یک مهره قرمز و یک مهره سفید باشد.

۳. تاس سالمی را ۱۵ بار می‌ریزیم. احتمال اینکه ۶ بار از آمدن تاس، یک عدد فرد باشد، چیست؟

## ریاضیات گسسته

۱. به چند طریق می‌توانیم از بین ۵ نوع گل و به دلخواه، ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع سوم دقیقاً ۳ شاخه انتخاب شود؟

۲. تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 8$  را پیدا کنید، طوری که شرط‌های

زیر برقرار باشند:

$$2 \leq x_1 \leq 3$$

$$4 \leq x_2 \leq 8$$

$$x_3 \geq 1$$

۳. اگر سه تاس را با هم بریزیم، چقدر احتمال دارد مجموع اعدادی که می‌آیند کوچک‌تر از ۱۶ باشد؟

## ریاضیات ۳ (علوم تجربی)

۱. مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که چندجمله‌ای  $x^3 + 2ax^2 - bx + 4$  بر  $(x-1)$  بخش پذیر و باقی‌مانده تقسیم این چندجمله‌ای بر  $(x+1)$  مساوی ۱۲ باشد.

۲. حد هر یک از تابع‌های زیر را به دست آورید:

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + \sqrt{x^2 - 1}}{10x^2 + 3x - 4}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - \sqrt{x + 14}}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & x > -2 \\ 6 & x = -2 \\ x^2 + bx - 1 & x < -2 \end{cases}$$

تابع با ضابطه  $f(x)$  مفروض است.

$a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع در  $x = -2$  پیوسته باشد.

## پرسش‌های پیکار جو!



دنباله  $a_n$  با ضابطه  $a_n \cdot a_{n-1} + 1 = 2a_{n-1}$  و  $a_1 = 2$  مفروض است.  $a_{1395}$

کدام است؟

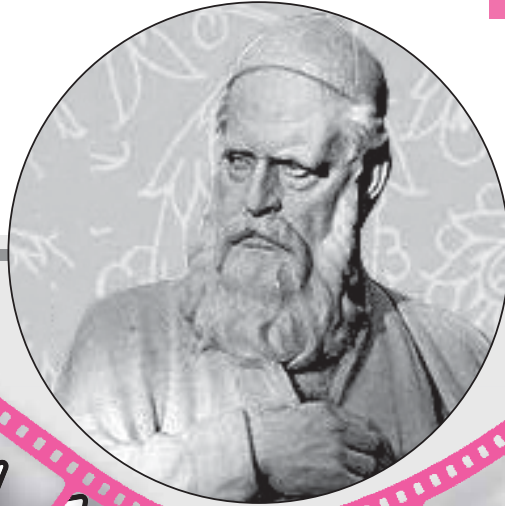
ج)  $\frac{1395}{1396}$

ب)  $\frac{1395}{1394}$

الف)  $\frac{1394}{1395}$

ه) ۱

د)  $\frac{1396}{1395}$



# خیام هزار ساله

● اسم فیلم: خیام هزار ساله

● کارگردان: سعید تارازی

● نویسنده: سعید تارازی

● تهیه کننده: سعید رشتیان

● تدوین: مهدی باقری

● سال تولید: ۱۳۸۸-۱۳۸۷

داشته و این هم از آن قصه‌هایی است که توی دل مردم ساخته می‌شود!

در صحنه‌ای دیگر دوربین فیلم‌برداری به داخل «دبیرستان علامه حلی تهران» می‌رود و پرسش‌هایی درباره خیام، از تعدادی از دانش‌آموزان آن مدرسه به عمل می‌آید. در این بین دانش‌آموزی به نام **احسان شواربی مقدم** دانسته‌های زیادی درباره خیام دارد و توانسته است چندین مقاله نیز درباره این ریاضی‌دان و شاعر نام‌دار ایرانی بنویسد. نیز علاقه بسیاری دارد تا اطلاعات جدید و تازه‌ای را درباره رساله موسیقی خیام به دست آورد.

از صحنه‌های جالب فیلم می‌توان از صحنه‌ای یاد کرد که دوربین فیلم‌برداری به صفحه‌ای از یک کتاب اشاره دارد که در آن جدولی شامل آثار تألیفی خیام نیشابوری نمایش داده می‌شود. آنچه در این صفحه آمده است را در ادامه ارائه می‌کنیم تا علاقه‌مندان به این ریاضی‌دان مشهور ایرانی و نیز تاریخ ریاضیات بتوانند با پیگیری موارد مزبور به دانسته‌هایشان اضافه کنند.

فیلم «خیام هزار ساله» با صحنه‌هایی آغاز می‌شود که در آن چند نقاشی و تندیس منسوب به خیام به تصویر کشیده و این پرسش مطرح می‌شود که خیام واقعی شبیه کدام یک از آن‌ها بوده است. سپس دوربین فیلم‌برداری به میان مردم در خیابان خیام تهران می‌رود و راوی فیلم می‌پرسد که اگر خیام در دوره کنونی زندگی می‌کرد، دارای چه شکل و شمایل بود. در ادامه **سعید تارازی**، در مقام کارگردان فیلم، دوربین را در کوچه و بازار به حرکت درمی‌آورد و نظرات و عقاید مردم را درباره خیام می‌پرسد. جالب این است که در این میان، گفته‌های بسیار متفاوتی را از زبان مردم می‌شنویم و می‌بینیم.

در یکی از صحنه‌های فیلم که به قسمتی از مستندی که از شبکه چهار سیمای جمهوری اسلامی ایران پخش شده اشاره دارد، گفته می‌شود: «... در نیشابور درس خواند و با **حسن طوسی** و **حسن صباح** هم‌درس بود که در تاریخ به سه یار دبستانی معروف هستند...» اما در ادامه راوی فیلم بیان می‌کند که خواجه نظام‌الملک با خیام ۳۰ سال اختلاف سن



احسان یارمحمدی

نام تصنیف	موضوع	مکان نسخه خطی
مشکلات الحساب	رساله حساب	پیدا نشده
بی نام	رساله جبر	تهران
رساله فی البراهین علی مسائل الجبر والمقابلہ	رساله جبر	پاریس، لیدن، لندن، نیویورک و رم
شرح المشکل من کتاب الموسیقی	رساله تئوری موسیقی	پیدا نشده <sup>۱</sup>
شرح من اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس	رساله هندسه	لیدن
مختصر فی الطبیعیات	رساله فیزیک	پیدا نشده
میزان الحکم	رساله فیزیک	لنینگراد، بمبئی، حیدرآباد و گوتا
لوازم الامکنه	رساله جغرافیا	پیدا نشده
رساله الکون و التکلیف	رساله فلسفی	قاهره
الجواب عن ثلاث مسائل	رساله فلسفی	قاهره
الفتاء العقلی فی موضوع العلم الکلی	رساله فلسفی	قاهره
رساله فی الوجود	رساله فلسفی	برلن، پونا و تهران
زیج ملکشاهی	جدول های نجومی	پاریس
رساله فی کلیات الوجود	رساله فلسفی	لندن، پاریس و تهران
نوروزنامه	رساله تاریخی	برلن و لندن

که توانست کارهای ریاضی را انجام بدهد و معادلات درجه سوم را حل کرد. احتمالاً محورهای مختصات را هم درست کرده است و در هندسه هم اگرچه خیلی جدی نتوانست کاری کند، ولی کتابش در زمینه هندسه کتاب بسیار باارزشی است. فقط به خاطر اطرافینش نتوانسته بود کار کند. برای اینکه کتاب جبر را نوشته بود و مدت‌ها هیچی نمی‌گفت تا مقطعی که رفت به شمال ایران و آنجا توانست آن را پخش کند.

■ **مشیری:** چه طور استاد می‌شود ثابت کرد که خیام شاعر و خیام ریاضی‌دان یک فرد بوده است؟

در صحنه‌های دیگر سعید تارازی و **منوچهر مشیری**<sup>۲</sup> به ملاقات زنده‌یاد پرویز شهریار<sup>۱</sup> (۱۳۰۵-۱۳۹۱) می‌روند. در این گفت‌وگو منوچهر مشیری چند سؤال از زنده‌یاد شهریار می‌پرسد که دو پرسش را به همراه پاسخ‌های استاد در ادامه بیان می‌کنیم.

■ **مشیری:** پرسشی که ذهن مرا مشغول کرده، استاد این است که واقعاً خیام کیست؟  
○ **شهریار:** من خیام را ریاضی‌دان می‌دانم و بنابراین این سؤال خیلی هم مهم است. ریاضی‌دانی

همت خود ساخته و در ترک دروغ، خودنمایی، مکر و حيله جهد و سعی دارد، او را خوار می‌شمارند و تمسخر می‌کنند و در هر حال خدا یاری‌دهند و پناه همه است.»

در صحنه‌های دیگر، بهمن اصلاح‌پذیر دربارهٔ تدوین تقویم خورشیدی چنین می‌گوید: «... و ما می‌رسیم به خیام. در آن زمان دیگر تصمیم گرفته می‌شود، نه براساس عقاید، سنت‌ها و... بلکه کاملاً علمی نظم و نسق امور را برقرار بکنند. این باعث



### ○ شهر یاری: در مقدمهٔ همین کتاب جبر مطلبی

دارد که تقریباً عین اشعارش است، اما خود شعرهایش را منتشر نکرد. بعد از مرگش منتشر شد و توی نوشته‌هایش دیدند... در مقدمهٔ کتاب جبرش، در همان ابتدای مقدمه توضیحی می‌دهد که کاملاً عین اشعارش است: «چنین است گرفتار روزگاری شده‌ایم یا هستیم که از اهل علم فقط عدهٔ کمی مبتلا به اندیشهٔ آن‌اند که غفلت‌های زمان را فرصت جُسته به تحقیق در علم و استوار کردن آن بپردازند و بیشتر عالم نمایان زمان ما حق را جامعهٔ باطل می‌پوشند و گامی از خودنمایی و تظاهر به دانایی فراتر نمی‌نهند و آنچه را هم می‌دانند، جز در راه اغراض مادی به‌کار نمی‌بندند و اگر ببینند کسی جُستن حقیقت و برگزیدن راستی را وجههٔ

می‌شود که از خیام و چند ریاضی‌دان دیگر خواسته شود که تقویم شمسی مدونی را بر پایهٔ علمی و دقیق بنویسند...»

در پایان شما را به تهیهٔ این فیلم تشویق می‌کنیم، تا آن‌چه را که در این مقاله به آن اشاره نکرده‌ایم، پیگیری کنید و نیز از تماشای آن لذت ببرید.

### \* پی‌نوشت

۱. بعدها بخشی از این اثر یافته و منتشر شد: «رسالهٔ موسیقی خیام از دیدگاه ریاضیات»، صفورا هوشیار و محمد باقری، رهپویهٔ هنر، دفتر سوم، پاییز ۱۳۷۶، صفحات ۴۳-۶۳.
۲. منوچهر مشیری کارگردان فیلم مستند «معلمی را دوست دارم» است که در سال ۱۳۸۲ در گروه دانش شبکهٔ یک سیما جمهوری اسلامی ایران دربارهٔ زنده‌یاد پرویز شهریاری تهیه شد.

ایستگاه اول:

بازدهم معمای  
لاپیرنت



در شماره قبیل با معماهای جدول های لاپیرنتی آشنا شدید. دیدید که عددهای درون دایره های موجود در خانه های جدول بیانگر تعداد خانه های خالی (سفید) در امتداد افقی و عمودی آن خانه هستند و خود این خانه ها هم، خانه خالی اند. تعدادی از خانه ها هم با توجه به این عددها باید سیاه شوند. بعد از سیاه شدن این خانه ها یک لاپیرنت طراحی می شود که مسیر ورود و خروج آن باید رسم شود. حال به دو نمونه دیگر از این جدول ها توجه کنید و با توجه به عددهای خانه ها، خانه های سیاه را پر و لاپیرنت را طراحی کنید و مسیر ورود و خروج آن را نیز رسم کنید:

ورود

	۴			۴			۲		
	۲				۲			۲	
	۲						۲		
			۶			۵			
	۴			۸				۴	
	۲				۲				
		۴						۳	
	۱			۲		۵	۱		
		۴			۲				۲
				۳					

خروج

ورود

							۱		
				۴					
			۳			۵			
				۱				۸	
	۱						۴		
					۲				
	۱	۵			۱				
				۳				۲	
	۲		۸						
			۴		۶				

خروج

پرسش های  
پیکار جو!



از نقطه M درون مثلث ABC، سه خط موازی اضلاع مثلث رسم کرده ایم و از برخورد آن ها با اضلاع مثلث، سه مثلث به مساحت های ۱، ۳ و ۴ تشکیل شده است. مساحت مثلث ABC چه قدر است؟

- الف) ۱۶      ب)  $۱۶\sqrt{۳}$       ج)  $۶(۲ + \sqrt{۳})$   
 د)  $۶(۳ + \sqrt{۳})$       هـ)  $۹\sqrt{۲}$

# قبولی شانسی و مهترسانی شانسی!

برای اخذ یک مدرک، آزمونی چهارگزینه‌ای با ۶۰ سؤال برگزار می‌شود. داوطلبی موفق به اخذ مدرک خواهد شد که «حد نصاب» امتیاز او از آزمون لااقل ۵۰ درصد باشد. هر پاسخ غلط دارای  $\frac{1}{4}$  نمره منفی است. اگر شما در این آزمون شرکت کرده باشید و بعد از تلاش برای پاسخ‌گویی به سؤالات، تنها به ۲۹ سؤال پاسخ گفته باشید، چه می‌کنید؟ آیا دست روی دست می‌گذارید تا از آزمون مردود بیرون بیایید یا اینکه شانس خود را امتحان می‌کنید و به سؤالاتی به طور «شانسی» پاسخ می‌دهید؟

بعضی از افراد در پاسخ به این سؤال فوراً می‌گویند: خب هر پاسخ غلط  $\frac{1}{4}$  نمره منفی دارد. اگر به سؤالی شانسی پاسخ دهیم، همان امتیازی که ممکن است با پاسخ‌گویی صحیح کسب کنیم با احتمال پاسخ‌گویی غلط خنثا می‌شود. پس در عمل وضعیت ما تفاوتی نخواهد کرد. این افراد فراموش می‌کنند، داوطلبی که در این آزمون به ۲۹ سؤال (یا کمتر) پاسخ گفته باشد، چیزی برای از دست دادن ندارد! (چون ۲۹ پاسخ صحیح او را به قبولی در آزمون نمی‌رساند). آیا بهتر نیست به یک سؤال به‌طور شانسی پاسخ دهیم؟ مسلماً بهتر است! چون در آن صورت به احتمال  $\frac{1}{4} = 0.25$  به سؤال پاسخ صحیح می‌دهیم و مدرک را کسب می‌کنیم، ولی با ۲۹ پاسخ صحیح به هیچ‌جا نمی‌رسیم!

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم: آیا بهتر نیست به دو سؤال به‌طور شانسی پاسخ دهیم؟ ممکن است شما فوراً بگویید لابد بهتر است! بگذارید حساب کنیم. در این حالت اگر به یک سؤال صحیح و به یک سؤال غلط پاسخ دهیم، مجموعاً  $29 + 1 + (-\frac{1}{4}) = 29\frac{3}{4}$  امتیاز کسب می‌کنیم که از ۳۰ امتیاز کمتر است. در حالتی موفق به قبولی در آزمون می‌شویم که به هر دو سؤال شانسی پاسخ صحیح بدهیم (۳۰) که احتمال آن برابر است با:  $0.0625 = (\frac{1}{4})^2$ . پس پاسخ گفتن شانسی به دو سؤال بهتر از پاسخ گفتن شانسی به یک سؤال نیست.

اگر به سه سؤال به‌طور شانسی پاسخ دهیم چه‌طور؟ اگر هر سه پاسخ ما صحیح باشد، در آزمون قبول می‌شویم (۳۰)  $29 + 3 > 30$ . اگر به دو سؤال صحیح و به یک سؤال غلط پاسخ دهیم، باز هم امتیاز لازم برای قبولی را کسب می‌کنیم  $29 + 2 + (-\frac{1}{4}) > 30$ . اما ترکیب‌های دو پاسخ غلط - یک پاسخ صحیح و سه پاسخ غلط ما را مردود می‌کند. پس احتمال قبولی ما در آزمون از مجموع احتمال دو ترکیب اول به‌دست می‌آید:

$$0.15625 = 0.0625 + \binom{3}{2} (0.25)^2 (0.75) \quad (1)$$

در جمله دوم عبارت فوق، قرار است از بین سه پاسخ، دو پاسخ





صحيح باشد. احتمال صحيح بودن هر پاسخ برابر  $0/25$  و احتمال غلط بودن آن برابر  $0/75$  است. انتخاب دو پاسخ از سه پاسخ مذکور  $\binom{3}{2}$  حالت مختلف ايجاد می‌کند. در واقع صورت بهتر رابطه ۱ به شکل زیر است:

$$\binom{3}{2} (0/25)^2 (0/75)^1 + \binom{3}{1} (0/25)^1 (0/75)^2 = 0/15625 \quad (2)$$

نتیجه آنکه پاسخ گویی شانسی به سه سؤال بهتر از پاسخ گویی شانسی به دو سؤال است، اما از پاسخ گویی شانسی به یک سؤال بهتر نیست. قبل از حل مسئله به صورت کلی، یک مثال دیگر را به طور خاص حل می‌کنیم: احتمال قبولی داوطلب اگر به پنج سؤال شانسی پاسخ دهد چه قدر می‌شود؟ در جدول ۱ نشان داده شده است که احتمال آنکه پاسخ داوطلب به ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ سؤال صحيح باشد، چه قدر است (مجموع تمامی این احتمالات برابر ۱ است). اما احتمال قبولی داوطلب از جمع احتمال در وضعیت‌هایی به دست می‌آید که امتیاز لااقل ۳۰ را برای او کسب کند. (یعنی حالت‌های اول تا چهارم). می‌توان به ازای هر وضعیت، نشانگری دودویی تعریف کرد که در صورت کسب امتیاز حد نصاب (عدم کسب) برابر ۱ (۰) خواهد شد (در ستون ششم) و حاصل ضرب احتمال رخداد هر وضعیت در نشانگر وضعیت در ستون هفتم نشان داده شده است. حاصل جمع احتمال‌های نمایش داده شده در ستون هفتم برابر کل احتمال قبولی داوطلب است. (این احتمال برابر  $0/36719$  خواهد شد).

اگر داوطلب به سؤالات بیشتری به طور شانسی پاسخ دهد، آیا می‌توانیم بگوییم احتمال قبولی‌اش بیشتر و بیشتر می‌شود؟ آیا تعداد سؤالی وجود دارد که اگر به آن تعداد پاسخ دهد، احتمال قبولی‌اش ماکزیمی می‌شود؟ (در این صورت بعد از آنکه داوطلبان تلاش خود را برای پاسخ گویی به سؤالات کردند، می‌توانند تصمیم بگیرند که به چند سؤال به طور شانسی پاسخ درست گویند تا بیشترین احتمال قبولی را داشته باشند).

بیايد مسئله را به صورت کلی مطرح کنیم. فرض کنیم داوطلبی بعد از تلاش برای پاسخ گویی به سؤالات، با حل کردن آن‌ها (بگوییم به صورت تحلیلی) به  $k_1$  سؤال ( $0 \leq k_1 \leq 30$ ) پاسخ درست گفته است. می‌خواهیم احتمال آن را به دست آوریم که داوطلب با پاسخ گویی شانسی به  $k_2$  سؤال دیگر حد نصاب قبولی را به دست آورد ( $1 \leq k_2 \leq 60 - k_1$ ). مشابه با مثال‌های حل شده ممکن است از بین این پاسخ‌ها،  $i$  پاسخ صحيح و  $i - k_2$  پاسخ غلط باشد. ( $k_2 = 1, 2, \dots$ ). باید مجموع احتمال وضعیت‌هایی محاسبه شوند که قبولی را برای داوطلب رقم می‌زنند. این مطلب در رابطه زیر خلاصه شده است:

$$P(k_1, k_2) = \sum_{i=0}^{k_2} \binom{k_2}{i} (0/25)^i (0/75)^{k_2-i} \cdot f(k_1, k_2, i) \quad (3)$$

در این رابطه،  $P(k_1, k_2)$  احتمال مطلوب و  $f(k_1, k_2, i)$  نشانگری دودویی است. این نشانگر در وضعیتی که نمره کسب شده توسط داوطلب بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰ باشد، برابر ۱ و در غیر این صورت

### جدول ۱. محاسبه احتمال قبولی داوطلب با پنج پاسخ شانسی

تعداد پاسخ	امتیاز	وضعیت	احتمال رخداد وضعیت	نشانگر وضعیت	احتمال قبولی و	
					رخداد وضعیت	
صحيح	غلط					
۵	۰	$29 + 5 + (-\frac{1}{3}) = 34$	قبول	$\binom{5}{5} (0/25)^5 (0/75)^0 = 0/00098$	۱	۰/۰۰۰۹۸
۴	۱	$29 + 4 + (-\frac{1}{3}) = 32\frac{2}{3}$	قبول	$\binom{5}{4} (0/25)^4 (0/75)^1 = 0/01465$	۱	۰/۰۱۴۶۵
۳	۲	$29 + 3 + (-\frac{2}{3}) = 31\frac{1}{3}$	قبول	$\binom{5}{3} (0/25)^3 (0/75)^2 = 0/08789$	۱	۰/۰۸۷۸۹
۲	۳	$29 + 2 + (-\frac{2}{3}) = 30$	قبول	$\binom{5}{2} (0/25)^2 (0/75)^3 = 0/26367$	۱	۰/۲۶۳۶۷
۱	۴	$29 + 1 + (-\frac{4}{3}) = 28\frac{2}{3}$	مردود	$\binom{5}{1} (0/25)^1 (0/75)^4 = 0/39551$	۰	۰
۰	۵	$29 + 0 + (-\frac{5}{3}) = 27\frac{1}{3}$	مردود	$\binom{5}{0} (0/25)^0 (0/75)^5 = 0/23730$	۰	۰

برابر صفر است:

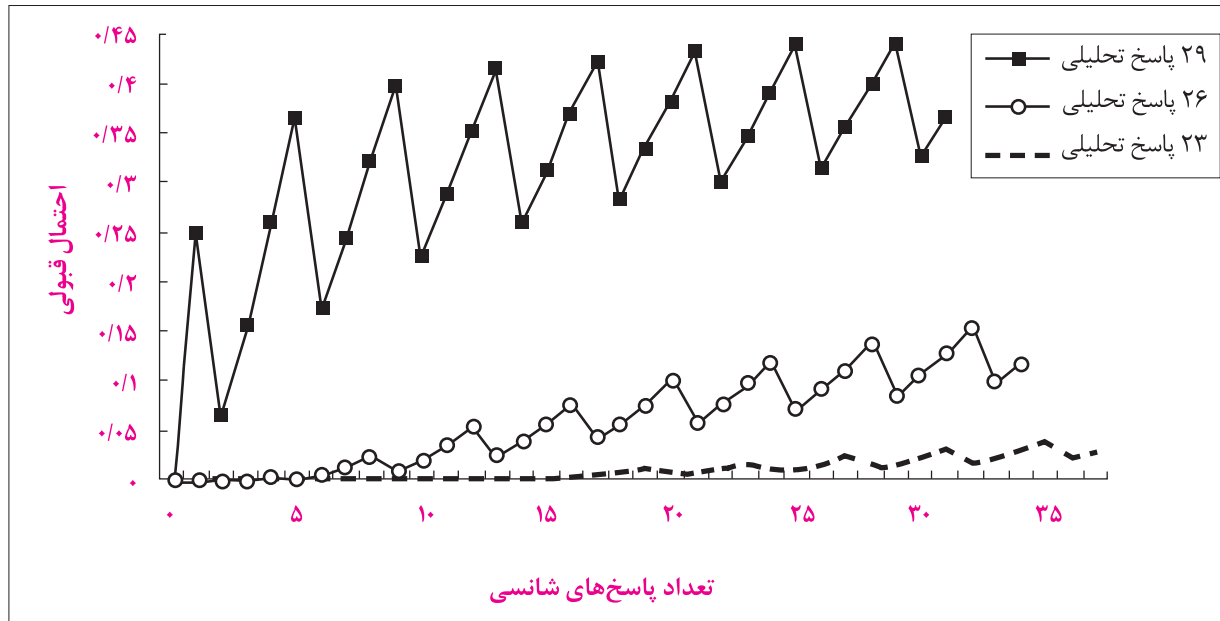
$$f(k_1, k_2, i) = \begin{cases} 1 & k_1 + i - \frac{1}{3} \times (k_2 - i) \geq 30 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (4)$$

آزمون). می‌توانید مسئله را برای آزمون‌های ۵ گزینه‌ای با نمره  $-\frac{1}{4}$  برای هر پاسخ غلط تکرار کنید و ببینید در منحنی متناظر، تعداد سؤالات موجود در هر یک از دندان‌های اره‌ای برابر ۵ سؤال می‌شود یا نه؟!۴

۳. متأسفانه یا خوش‌بختانه، احتمال قبولی داوطلبان با پاسخ‌گویی شانس‌ی به سؤالات چندان زیاد نیست. در بهترین حالت که داوطلب به ۲۹ سؤال، تحلیلی و ۲۹ سؤال، شانس‌ی پاسخ گفته باشد، شانس قبولی‌اش برابر  $0/4432$  است. (که زیر ۵۰ درصد است!)  
۴. همه نتیجه‌گیری‌های فوق در حالتی درست‌اند که فرض کنیم تمامی پاسخ‌های تحلیلی داوطلب درست باشند. این در حالی است که عملاً چنین نیست. همه شما این تجربه را داشته‌اید که در آزمون‌های چهارگزینه‌ای تعدادی از پاسخ‌هایتان به دلیل اشتباه محاسبات و... غلط از آب درمی‌آید! اهمیت این مطلب از آن جهت است که نقاط ماکزیم‌نسبی منحنی‌های احتمال قبولی (مانند نمودار ۱) دارای دره‌هایی در هر دو طرف خود هستند. چه‌بسا اگر از احتمال غلط بودن برخی پاسخ‌های تحلیلی‌تان صرفه‌نظر کنید، در یکی از دره‌ها می‌افتید و احتمال قبولی‌تان شدیداً کاهش می‌یابد!

محاسبه P از رابطه فوق با یک برنامه‌نویسی رایانه‌ای نه‌چندان پیچیده قابل اجراست. با اجرای این برنامه می‌توانید به سادگی P را به ازای مقادیر مختلف  $k_1$  و  $k_2$  محاسبه کنید. از خروجی‌های این برنامه نتایج زیر قابل برداشت‌اند:

- در نمودار، منحنی تغییرات احتمال موفقیت داوطلبی که به ۲۹ و ۲۶ سؤال به‌صورت تحلیلی پاسخ گفته باشد، در ازای تغییرات پاسخ‌های شانس‌ی رسم شده است. روند تغییرات صعود منحنی یک‌نوا نبوده و به‌صورت دندان اره‌ای است. به‌علاوه، هر منحنی دارای یک ماکزیم‌مطلق است. مثلاً می‌توانیم بگوییم در صورتی که داوطلب به ۲۶ سؤال به‌صورت تحلیلی پاسخ گفته باشد، شانس قبولی‌اش وقتی ماکزیم‌م می‌شود که به سؤالات باقی‌مانده، ۳۲ پاسخ شانس‌ی بدهد.
- نکته جالب‌تر اینکه هر یک از دندان‌های اره‌ای منحنی شامل چهار سؤال شانس‌ی است (احتمالاً به‌دلیل چهارگزینه‌ای بودن



نمودار ۱. احتمال قبولی داوطلب با تعداد پاسخ‌های شانس‌ی متفاوت

**\* پی‌نوشت:**

۱. دقت کنید، در این سؤال یک آزمون چهارگزینه‌ای با حد نصاب قبولی ۵۰ درصد مطرح است. نتیجه‌گیری‌های طرح شده در این مقاله برای آزمون‌های چهارگزینه‌ای که در آن داوطلبان با تراز با یکدیگر مقایسه می‌شوند، معتبر نیست. در آزمون‌های چهارگزینه‌ای با تراز، هر پاسخ غلط موقعیت شما را نسبت به داوطلبان دیگر تضعیف می‌کند.

## اصطلاحات و لغات مهم

1. Multiple	مضرب
2. Hypothesis	فرض
3. Number	عدد
4. Implicit	بدیهی
5. Properties	خاصیت‌ها
6. Operations	اعمال
7. Integer numbers	اعداد صحیح
8. State	بیان کردن
9. Conclude	نتیجه‌گیری
10. Therefore	بنابراین

آموزش ترجمه  
متون ریاضی

**EXAMPLE 1.** If  $b$  is a multiple of 2 and of 5, then  $b$  is a multiple of 10.

*proof*

Hypothesis:

A: The number  $b$  is multiple of 2.

B: The number  $b$  is a multiple of 5.

(*Implicit hypothesis:* All the properties and operations of integer numbers can be used.)

Conclusion:

C: The number  $b$  is a multiple of 10.

By hypothesis A, the number  $b$  is a multiple of 2. So,  $b=2n$  for some integer  $n$ . The other hypothesis B, states that  $b$  is a multiple of 5. Therefore,  $b=5k$  for some integer  $k$ . Thus

$$2n=5k.$$

Because  $2n$  is divisible by 5, and 2 is not divisible by 5, we conclude that  $n$  is divisible by 5. Thus,  $n=5t$  for some integer number  $t$ . This implies that

$$b=2n=2(5t)=10t$$

for some integer number  $t$ . Therefore, the number  $b$  is a multiple of 10.

## ترجمه برای دانش آموز

**EXAMPLE 2.** If  $n$  is a positive integer, then either  $n$  is a multiple of 2 or  $n$  divided by 2 has a remainder of 1.

*Proof*

Hypothesis:

A: The number  $n$  is a positive integer.

(*Implicit hypothesis:* All the properties and operations of integer numbers can be used.)

Conclusion:

B: The number  $n$  is a multiple of 2.

C: The number  $n$  divided by 2 has a remainder of 1.

We assume that  $n$  is an integer and that the remainder of the division of  $n$  by 2 is not 1 (composite hypothesis: "A and 'not C'").

We have to prove that the only other possible conclusion we can reach is that  $n$  is a multiple of 2.

The division algorithm establishes that the only possible remainder when dividing by 2 is either 0 or 1. By hypothesis the remainder is not 1. So it must be 0. Thus

$$n=2q+0=2q$$

where  $q$  is a positive integer. Therefore,  $n$  is a multiple of 2. ■



**مثال ۱.** اگر  $b$  مضرب ۲ و ۵ باشد، در این صورت  $b$  مضرب ۱۰ است.

## اثبات

فرض:

(الف) عدد  $b$  مضرب ۲ است.

(ب) عدد  $a$  مضرب ۵ است.

(فرضیات بدیهی: همه خاصیت‌ها و اعمال

مربوط به اعداد صحیح می‌توانند مورد استفاده

قرار گیرند.)

حکم:

(ج) عدد  $b$  مضرب ۱۰ است.

با توجه به فرض الف، عدد  $b$  مضرب ۲ است.

بنابراین به ازای بعضی مقادیر صحیح  $n$ :  $b=2n$ .

فرض دیگر (ب) بیان می‌کند که  $b$  مضرب

۵ است. بنابراین، به ازای بعضی مقادیر صحیح

$k$  داریم:  $b=5k$ . پس:  $2n=5k$ .

چون  $2n$  بر ۵ بخش پذیر است، و ۲ بر ۵

بخش پذیر نیست، نتیجه می‌گیریم که  $n$  بر ۵

بخش پذیر است. بنابراین برای بعضی مقادیر

صحیح  $t$  داریم:  $n=5t$  و این اثبات می‌کند که:

$$b=2n=2(5t)=10t$$

بنابراین، عدد  $b$  مضرب ۱۰ است. ■

# KVANT

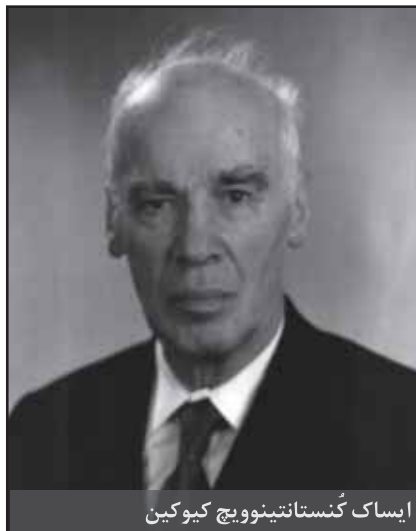
از مقالات منتخب آن به زبان انگلیسی ترجمه شد و بین سال‌های ۱۹۹۰ تا ۲۰۰۱ در مجله علمی-ریاضی «کوانتوم» واقع در ایالات متحده آمریکا به چاپ رسید. در ضمن دو کتاب نیز، مشتمل بر مقالات برگزیده از مجله kvant در فرانسه به زیور طبع آراسته شده است. ایده اولیه مجله kvant برای اولین بار در طرح‌های آکادمی به «آکادمی علوم اتحاد جماهیر شوروی» و مزبور تا زمان فروپاشی اتحاد جماهیر شوروی با شمارگان ۲۰۰ هزار نسخه در انتشارات "Nauka" چاپ می‌شد. اما ایده ایجاد و تأسیس چنین مجله‌ای توسط فیزیکدان برجسته روسی، پیوتر لئونیدوویچ کاپیتسا مطرح شد. او که ایده‌های بزرگی در سر داشت و از جایگاه علمی ممتازی نیز در جامعه جهانی برخوردار بود، به منظور افزایش سطح توانمندی و پرورش استعداد‌های فیزیک و ریاضی در آن دوران اتحاد جماهیر شوروی، دست به ارائه دیدگاهش درباره مجله kvant زد. این مجله از چنان جایگاه ارزشمندی در جامعه

- اسم مجله: kvant
- تارنما: <http://kvant.mccme.ru> - <http://www.kvant.info>
- ناشر: Applied Probability Trust
- مکان انتشار: مسکو، واقع در فدراسیون روسیه
- زبان: روسی
- سال آغاز انتشار: ۱۹۷۰
- تعداد چاپ و توزیع در هر سال: ۱۲ شماره

واژه "Kvant" که نگارش روسی آن به صورت "KBaHT" است، معادل کلمه "Quantum" در زبان انگلیسی است. مجله kvant یک مجله عمومی علمی درباره فیزیک و ریاضیات است که برای افزایش سطح دانش و آگاهی‌های دانش‌آموزان مدارس و نیز معلمان در سال ۱۹۷۰ در اتحاد جماهیر شوروی آغاز به کار کرد و پس از تکمیل فدراسیون روسیه در سال ۱۹۹۱، همچنان به کار خود ادامه می‌دهد و به جامعه ریاضیات عرضه می‌شود. مقالات ارائه شده در این مجله از چنان جایگاه بالایی علمی برخوردار است که مجموعه‌ای



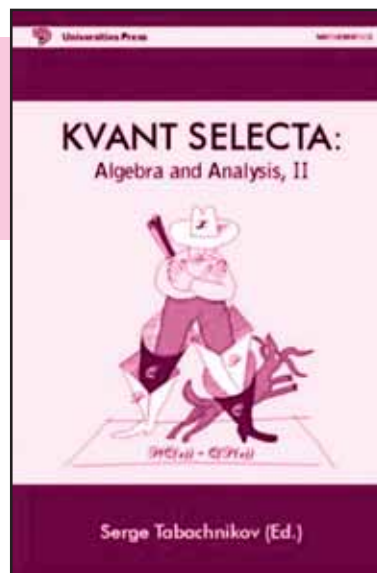
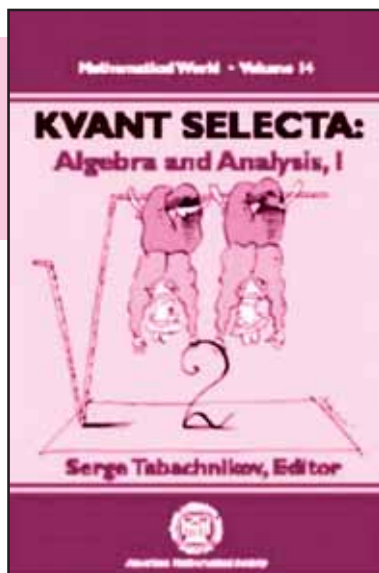
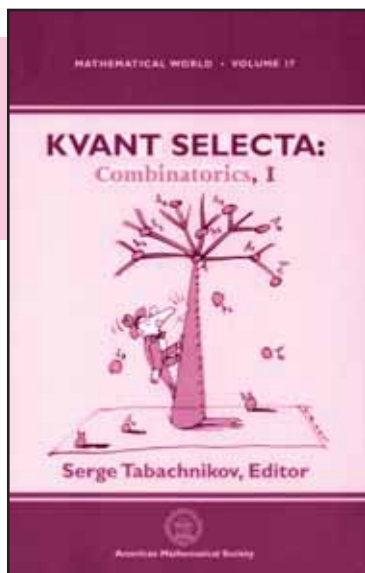
آندری کولموگروف



ایساک کنستانینوویچ کیوکین



پیوتر لئونیدوویچ کاپیتسا



**واژه "Kvant"**  
**که نگارش روسی**  
**آن به صورت**  
**"KBaHT"**  
**است، معادل کلمه**  
**"Quantum"**  
**در زبان انگلیسی**  
**است.**

آمریکا<sup>۱</sup> در سال ۱۹۹۹ ترجمه انگلیسی تعدادی از مقالات برگزیده آن را درباره جبر و آنالیز ریاضی در دو جلد در مجموعه "Mathematical World" منتشر کرد. اما اهمیت مقالات این مجله باعث شد تا جلد دیگری از مقالات منتخب ترجمه شده به انگلیسی این مجله درباره «ترکیببات» در سال ۲۰۰۱ منتشر شود. علاقه‌مندان به مطالعه این سه جلد می‌توانند با مراجعه به تارنماهای معتبر و بین‌المللی فروش کتاب در اینترنت، آن‌ها را خریداری کنند. برای آگاهی بیشتر شما، تصاویر جلد این سه کتاب که به وسیله **سیرگئی تاباچینکوف**<sup>۲</sup> تدوین شده‌اند، تقدیم شده است.<sup>۳</sup>

ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان شوروی برخوردار شد که برای نخستین سردبیر بخش ریاضی آن، ریاضی‌دان بزرگ جهان، **آندری کولموگروف**<sup>۴</sup> و برای نخستین سردبیر بخش فیزیک آن، فیزیک‌دان مشهور، **ایساک گنستانتینوویچ کیوکین**<sup>۵</sup> را برگزیدند. این مجله تا جایی اهمیت پیدا کرد که در سال ۱۹۸۵، شورای برنامه‌ریزی و کارشناسی آن مشتمل بر ۱۸ عضو برجسته دانشگاهی و نیز تعداد زیادی از شخصیت‌های علمی دیگر، از آکادمی علوم شوروی و آکادمی آموزش و پرورش این کشور بود. مقالات مجله kvant به قدری جالب و ارزنده بود که «انجمن ریاضی

**\* پی‌نوشت‌ها**

1. USSA (Russia) Academy of Science

۲. انتشارات Nauka یکی از بزرگ‌ترین و مطرح‌ترین ناشران دوران اتحاد جماهیر شوروی در این کشور بود. این انتشارات تا سال ۱۹۶۳ با نام «انتشارات آکادمی علوم اتحاد جماهیر شوروی» فعالیت می‌کرد. عمده فعالیت آن چاپ و نشر کتاب‌ها و مجلات علمی و پژوهشی است و از آن به‌عنوان اصلی‌ترین ناشر محصولات آکادمی علوم شوروی (روسیه فعلی) و شاخه‌های مرتبط با آن یاد می‌شود. علاقه‌مندان می‌توانند با مراجعه به دو تارنمای زیر به‌صورت مستقیم محصولات و تولیدات علمی این انتشارات را پیگیری کنند.

<http://www.naukaran.ru>

<http://www.maik.rssi.ru>

3. Pyort Leonidovich Kapitsa (1894-1984)

4. Andrey Kolmogrov (1903-1987)

5. Isaak Konstantionvich Kiokin (1908-1984)

6. American Mathematical Society

7. Sergei Tabachinkov

۸. نام و مشخصات این سه کتاب به شرح زیر است:

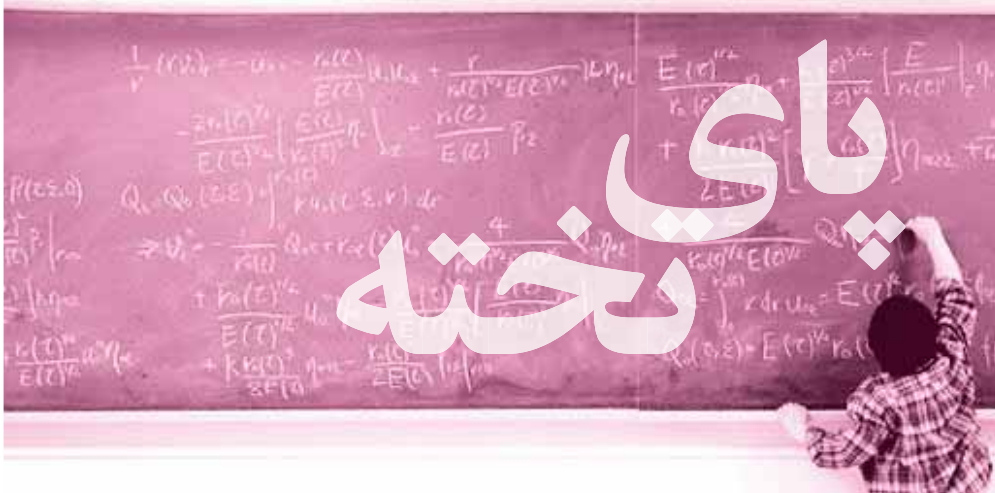
Kvant Selecta: Algebra and Analysis I (Mathematical World)

Kvant Selecta: Algebra and Analysis II (Mathematical World)

Kvant Selecta: Combinatorics (Mathematical World)



سیرگئی تاباچینکوف



# پای تخته

## اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طبقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

## بخش اول: مسئله‌ها

۱۸۸.  $a, b, c$  سه عدد طبیعی هستند، به طوری که  $a^2 + b^2 = c^2$ . ثابت کنید  $ab$  مضرب ۳ است.

۱۸۹. ثابت کنید  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  (با  $n \geq 2$ ) هیچ‌وقت صحیح نیست.

۱۹۰. اگر  $p$  و  $p+2$  هر دو اول باشند، ثابت کنید  $p^2+2$  نیز اول است.

## بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۵۱. اگر ریشه‌های معادلهٔ  $x^2 + ax + b + 1 = 0$  طبیعی باشند، ثابت کنید  $a^2 + b^2$  عددی مرکب است.

اگر  $r$  و  $s$  ریشه‌های معادله باشند، داریم  $r+s = -a$  و  $rs = b+1$ . نتیجه:

$$a^2 + b^2 = (r+s)^2 + (rs-1)^2 = (r^2+1)(s^2+1).$$

۱۵۲. همهٔ جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$$m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$$

می‌توان معادله را به فرم  $(m - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} = (n + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$  تبدیل

۱۸۱. برای هر عدد طبیعی  $n$  ثابت کنید  $n! \geq 2^{n-1}$ .

۱۸۲. برای هر عدد طبیعی  $n$  ثابت کنید  $2^{2^n} - 1$  بر ۳ بخش پذیر است.

۱۸۳.  $r$  عددی حقیقی است، به طوری که  $r + \frac{1}{r}$  عددی صحیح است.

ثابت کنید  $r^n + \frac{1}{r^n}$  به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  عددی صحیح است.

۱۸۴.  $n$  خط راست، صفحه را به حداکثر چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

۱۸۵. ثابت کنید در بسط عبارت  $(1+x+x^2)^n$ ، حداقل یکی از ضرایب زوج است.

۱۸۶. با فرض  $a, b, c > 0$  ثابت کنید:

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$$

۱۸۷. با فرض  $a, b, c \geq 0$  ثابت کنید:

$$\sqrt{3(a+b+c)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

کرد. در نتیجه:  $(m+n-1)(m-n-2)=0$ . چون  $m$  و  $n$  طبیعی هستند، پس  $m+n-1 > 0$  و در نتیجه  $m-n-2=0$ . بنابراین،  $(m,n)=(a+2,a)$  که در آن  $a \in \mathbb{N}$ .

**۱۵۷.** با فرض  $a < b$  ثابت کنید:

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} \geq \binom{a+1}{2} + \binom{b-1}{2}$$

پس از ساده کردن جملات مشترک به نامساوی  $b \geq a+1$  می‌رسیم.

**۱۵۴.** ضرایب تابع  $p(x)=ax^2+bx+c$  اعدادی حقیقی هستند و

مقادیر  $p(0)$ ،  $p(1)$  و  $p(-1)$  صحیح‌اند. ثابت کنید  $p(n)$  به ازای همه مقادیر صحیح  $n$  صحیح است.

چون  $p(1)=a+b+c$  و  $p(0)=c$ ،  $p(-1)=a-b+c$  صحیح هستند، در نتیجه اعداد  $2a$ ،  $2b$  و  $c$  صحیح هستند. برای هر عدد زوج  $n=2m$  داریم:

$$p(n)=4am^2+2bm+c=2m^2 \times 2a+m \times 2b+c \in \mathbb{Z}$$

و اگر  $n=2m+1$  آنگاه

$$p(n)=a(2m+1)^2+b(2m+1)+c \\ = (2m^2+2m)(2a)+m(2b)+(a+b+c)$$

که نشان می‌دهد در این حالت نیز  $p(n)$  صحیح است.

**۱۵۴.**  $p(x)$  یک چندجمله‌ای است، به طوری که:  $p(x^2+1)=x^4+4x^2$ .

مطلوب است:  $p(x^2-1)$ .

با توجه به فرض مسئله  $p(x)$  یک چندجمله‌ای درجه دوم است. با فرض  $p(x)=x^2+bx+c$  داریم:  $p(x^2+1)=x^4+4x^2$  و  $(x^2+1)^2+b(x^2+1)+c=x^4+4x^2$ . در نتیجه، با متحد قرار دادن دو طرف به روابط  $2+b=4$  و  $1+b+c=0$  می‌رسیم. در نتیجه:  $b=2$  و  $c=-3$  و  $p(x)=x^2+2x-3$  و در نتیجه:  $p(x^2-1)=x^4-4$ .

**۱۵۵.**  $a, b, c$  و  $d$  اعدادی طبیعی هستند، به طوری که:  $a+b=c+d$

و  $a^2+b^2=c^2+d^2$ . ثابت کنید دو تا از این اعداد با هم برابر هستند.

داریم  $(a+b)(a^2-ab+b^2)=(c+d)(c^2-cd+d^2)$ . در نتیجه، چون  $a+b=c+d \neq 0$  پس  $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$  از طرف دیگر،  $(a+b)^2=(c+d)^2$  از دو رابطه آخر نتیجه می‌شود:  $ab=cd$ . در نتیجه،  $\{a,b\}$  و  $\{c,d\}$  ریشه‌های معادله  $Z^2-(a+b)Z+ab=0$  هستند. در نتیجه:  $\{a,b\}=\{c,d\}$ .

**۱۵۶.** با فرض  $n > r > 0$  ثابت کنید:

$$\binom{n}{r} > \binom{n}{r+1} \binom{n}{r-1}$$

پس از ساده کردن جملات مشترک در دو طرف نامساوی، به نامساوی زیر می‌رسیم:  $\frac{1}{n-r} > \frac{1}{n-r+1}$  که برقرار است.

**۱۵۸.** سیزده نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض‌اند.

ثابت کنید چهار نقطه در میان آن‌ها وجود دارند که مرکز ثقل این چهار نقطه مختصاتی صحیح دارد (مختصات مرکز ثقل  $k$  نقطه برابر است با میانگین مختصات آن نقطه).

چهار حالت برای مؤلفه‌های یک نقطه در تقسیم بر ۲ وجود دارد:  $(1,1)$ ،  $(1,0)$ ،  $(0,1)$  و  $(0,0)$ . در نتیجه، در میان هر پنج نقطه، حداقل ۲ نقطه از لحاظ زوجیت مؤلفه‌ها یکسان هستند. بنابراین، با تکرار این ۵ تایی‌ها، به ۵ زوج از نقاط می‌رسیم که یکسان هستند. برای مجموع مؤلفه‌های هر دو نقطه چهار حالت وجود دارد:  $(0,2)$ ،  $(2,2)$ ،  $(2,0)$  و  $(0,0)$ . در نتیجه، در میان این پنج زوج نقطه، دو زوج نقطه وجود دارند که مجموع مؤلفه‌های آن‌ها یکسان است. در نتیجه، مجموع مؤلفه‌های این ۴ نقطه مضرب ۴ خواهد بود که نشان می‌دهد مرکز ثقل آن‌ها نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

**۱۵۹.** اعداد  $1$  تا  $n$  روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. می‌خواهیم

برای این اعداد علامت مثبت یا منفی بگذاریم، به طوری که مجموع اعداد حاصل صفر شود. به ازای چه مقادیری از  $n$  این کار امکان‌پذیر است؟

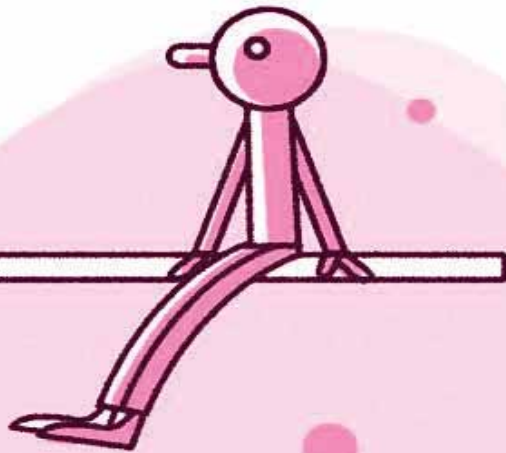
این کار در صورتی امکان‌پذیر است که مجموع اعداد  $1$  تا  $n$  یعنی  $\frac{n(n+1)}{2}$  زوج باشد. پس  $n(n+1)$  باید مضرب ۴ باشد. در نتیجه،  $n$  باید به فرم  $4k-1$  یا  $4k$  باشد. در حالی که  $n=4k$ ، اعداد را به دو دسته  $A=\{1,2,\dots,k,3k,3k+1,3k+2,\dots,4k\}$  و  $B=\{k+1,k+2,\dots,3k\}$  افزایش می‌کنیم و در حالی که  $n=4k-1$ ، عدد  $4k$  را از مجموعه  $A$  حذف و از مجموعه  $B$ ،  $2k$  را به  $A$  اضافه می‌کنیم.

**۱۶۰.** ثابت کنید تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد مانند

$n$ ، فرد است، اگر و تنها اگر  $n$  مربع کامل باشد.

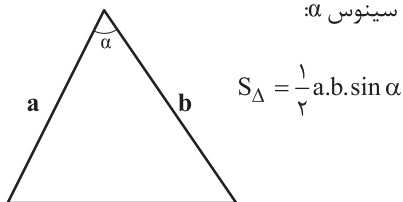
اگر  $n$  را به عامل‌های اول تجزیه کنیم و به صورت  $n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$  بنویسیم، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی  $n$  برابر است با  $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$ . این تعداد فرد است، اگر و تنها اگر  $\alpha_i$ ها همگی زوج باشند که در این حالت  $n$  مربع کامل خواهد بود.

# قضیه و کاربردی از آن



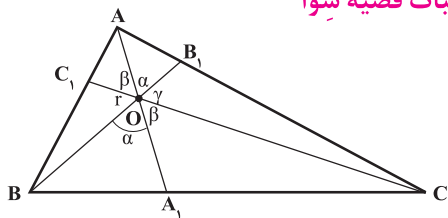
حسین کریمی  
دبیر ریاضی تهران

(ب) مساحت مثلث با زاویه  $\alpha$  برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع مجاور به زاویه  $\alpha$  در سینوس  $\alpha$ :



شکل ۳

## اثبات قضیه سیوا

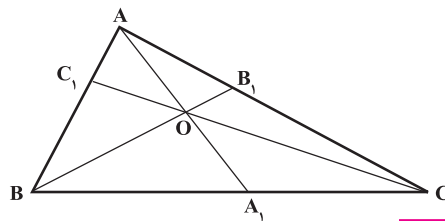


شکل ۴

$$\begin{aligned} \Delta OBA_1, \Delta OCA_1: \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{OBA_1}}{S_{OCA_1}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA_1 \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot OC \cdot OA_1 \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{OB \cdot \sin \alpha}{OC \cdot \sin \beta} \\ \Delta OCB_1, \Delta OAB_1: \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{OCB_1}}{S_{OAB_1}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot OC \cdot OB_1 \cdot \sin \gamma}{\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB_1 \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{OC \cdot \sin \gamma}{OA \cdot \sin \alpha} \end{aligned}$$

**قضیه:** اگر O نقطه دلخواهی در درون مثلث ABC باشد و امتداد AO ضلع BC را در  $A_1$  و امتداد BO ضلع AC را در  $B_1$  و امتداد CO ضلع AB را در  $C_1$  قطع کند، داریم:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

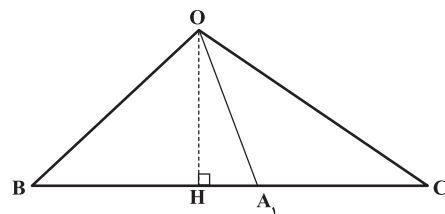


شکل ۱

قبل از آنکه به اثبات قضیه بپردازیم، دو مطلب را یادآوری می‌کنیم.

الف) نسبت مساحت‌های دو مثلث با ارتفاع یکسان برابر است با نسبت قاعده‌های دو مثلث:

$$\frac{S_{OBA_1}}{S_{OCA_1}} = \frac{BA_1}{A_1C}$$



شکل ۲



# عکس سوا ن در مکانیک



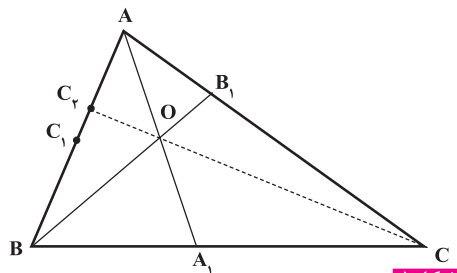
مقایسه آن با فرض قضیه  $(\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1)$

داریم:  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_1}{C_1B}$

پس:  $\frac{AC_1 + C_1B}{C_1B} = \frac{AC_1 + C_1B}{C_1B}$  در نتیجه:

و از آنجا:  $\frac{AB}{C_1B} = \frac{AB}{C_1B}$  که نشان می‌دهد

دو نقطه  $C_1$  و  $C_1$  برهم منطبق‌اند، لذا امتداد  $CO$ ، ضلع  $AB$  را در همان نقطه  $C_1$  قطع می‌کند.



شکل ۵

تذکره: اگر  $AA_1$  میانه  $(BA_1 = A_1C)$  و  $BB_1$  میانه

$(AC_1 = C_1B)$  و  $CC_1$  میانه  $(CB_1 = B_1A)$

باشند، داریم:  $\frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{AC_1}{C_1B} = 1$  که

نشان می‌دهد سه میانه مثلث در یک نقطه

یکدیگر را قطع می‌کنند و آن نقطه را مرکز ثقل

و یا گرانیگاه گویند.

$$\Delta OAC_1, \Delta OBC_1 : \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{OAC_1}}{S_{OBC_1}} = \frac{\frac{1}{2} OA \cdot OC_1 \cdot \sin \beta}{\frac{1}{2} OB \cdot OC_1 \cdot \sin \gamma}$$

$$= \frac{OA \cdot \sin \beta}{OB \cdot \sin \gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{OB \cdot \sin \alpha}{OC \cdot \sin \beta} \times \frac{OC \cdot \sin \gamma}{OA \cdot \sin \alpha} \times \frac{OA \cdot \sin \beta}{OB \cdot \sin \gamma} = 1$$

## عکس قضیه سوا

اگر نقاط  $A_1$  روی ضلع  $BC$  و  $B_1$  روی ضلع  $AC$  و

$C_1$  روی ضلع  $AB$  از مثلث  $ABC$  چنان واقع باشند که:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

آن گاه  $AA_1$ ،  $BB_1$  و  $CC_1$  در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

**اثبات:** نقطه تلاقی  $AA_1$  و  $BB_1$  را  $O$  می‌نامیم. اگر

امتداد  $CO$  از  $C_1$  بگذرد که قضیه اثبات شده است.

فرض کنیم امتداد  $CO$ ،  $AB$  را در  $C_1$  قطع کند. پس

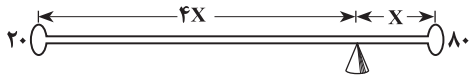
طبق قضیه سوا داریم:  $\frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{AC_1}{C_1B} = 1$  که از

همان ابتدا، اتفاقی رخ می‌دهد که در شکل ۹ می‌بینید و بازی ادامه پیدا نمی‌کند.



شکل ۹

اما علم مکانیک شکل بازی پدر و پسر را حل کرده است و راه حل زیر را ارائه می‌دهد: اگر وزن پدر ۴ برابر وزن پسر است، تکیه‌گاه را طوری قرار دهید که فاصله‌اش تا پسر، ۴ برابر فاصله‌اش تا پدر باشد (مانند شکل ۱۰).



شکل ۱۰

در واقع در مکانیک ثابت می‌شود که نسبت فاصله‌ها برابر با عکس نسبت وزن‌ها است (شکل ۱۱).

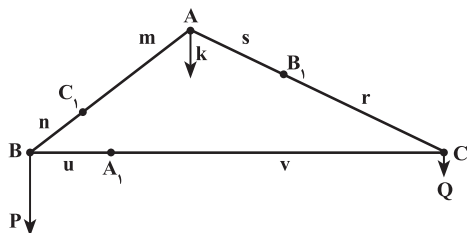
$$\frac{u}{v} = \frac{Q}{P}$$



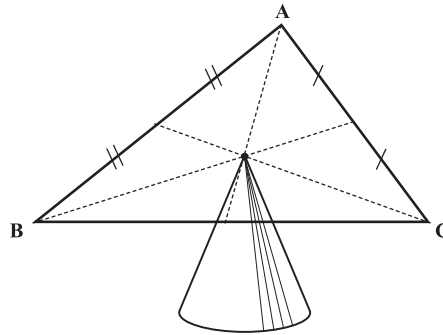
شکل ۱۱

به عبارت دیگر، اگر فاصله‌های نقطه O از وزنه‌های P و Q را با u و v نشان دهیم، ترازمندی تنها هنگامی است که حاصل ضرب نیروی P در بازوی u برابر با حاصل ضرب نیروی Q در بازوی v باشد؛ یعنی:  $P \cdot u = Q \cdot v$ .  
حال با توجه به مقدمه گفته شده به حل مسئله لوستر می‌پردازیم که کاربردی از قضیه سوا در مکانیک است.

برای به‌دست آوردن نقطه  $A_1$ ، محل گرانیگاه پاره خط BC، که از B وزنه P و از C وزنه Q آویزان است به صورت زیر عمل می‌کنیم:

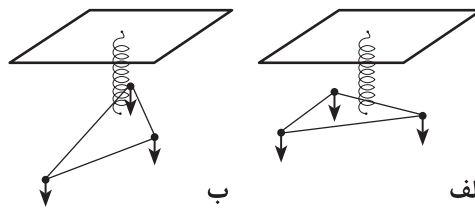


شکل ۱۲



شکل ۶

مسئله: می‌خواهیم یک لوستر سه قسمتی را که هر قسمت آن از یک گوشه صفحه مثلثی آویزان است و جرم هر قسمت، متفاوت با قسمت دیگر است، از سقف آویزان کنیم. نقطه اتصال زنجیر آویز از سقف به مثلث را چنان تعیین کنید تا صفحه مثلث به موازات کف (یا سقف) اتاق قرار گیرد (شکل ۷- الف رخ دهد و شکل ۷- ب رخ ندهد).



شکل ۷

### مقدمه

بدیهی است که اگر وزن سه جسم آویزان شده از سه رأس مثلث، یکسان باشد، باید صفحه مثلث را از مرکز ثقل آن (گرانیگاه) یعنی از محل تلاقی سه میانه آویزان کنیم (مانند شکل ۶).

در پارک‌های بازی، الاکلنگ‌های کار گذاشته شده برای دو نفر هم‌وزن ساخته شده‌اند، از این رو تکیه‌گاه را در وسط الاکلنگ قرار می‌دهند (مانند شکل ۸).

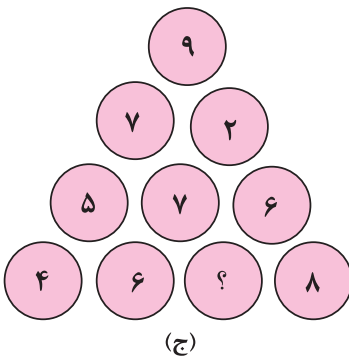
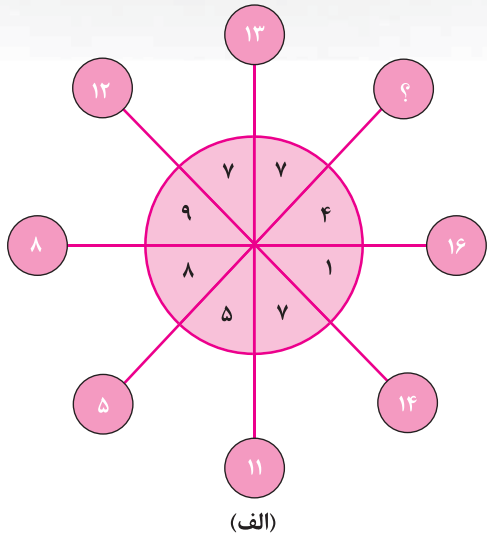


شکل ۸

حال اگر قرار باشد پدری با وزن ۸۰ کیلوگرم با پسرش به وزن ۲۰ کیلوگرم، الاکلنگ بازی کنند، در



با توجه به الگوهای عددی که در نمودارهای زیر پیدا می‌کنید، عددی را که باید در خانه با علامت سؤال قرار گیرد، مشخص کنید. تلاش خود را بکنید و اگر موفق نشدید، پاسخ و راه‌حل را در صفحه ۴۸ ببینید.



			۱۴	
	۲۲			
			۳۴	
۴۱				
		۵۳		؟

$$\begin{cases} u.P = v.Q \\ u + v = BC \end{cases} \Rightarrow u.P = (BC - u).Q$$

$$\Rightarrow u = \frac{BC.Q}{P+Q}, v = \frac{BC.P}{P+Q}$$

یعنی  $A_1$  به فاصله  $\frac{BC.Q}{P+Q}$  از رأس  $B$ ، روی  $BC$  قرار دارد و همچنین داریم:

$$\frac{u}{v} = \frac{Q}{P}$$

به همین ترتیب محل نقطه  $B_1$  را به عنوان گرانیگاه پاره‌خط  $AC$  که از رأس  $A$  وزنه  $k$  و از رأس  $C$  وزنه  $Q$  آویزان است تعیین می‌کنیم و داریم:

$$\frac{r}{s} = \frac{k}{Q}$$

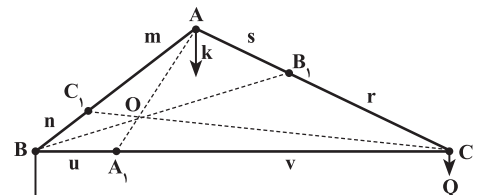
با مشخص کردن محل نقطه  $C_1$  روی  $AB$  به عنوان گرانیگاه که در آن از رأس  $A$  وزنه  $k$  و از رأس  $B$  وزنه  $P$  آویز است، داریم:

$$\frac{m}{r} = \frac{P}{k}$$

با توجه به برقراری تساوی  $\frac{Q}{P} \times \frac{k}{Q} \times \frac{P}{k} = 1$  داریم:

$$\frac{u}{v} \times \frac{r}{s} \times \frac{m}{r} = 1$$

به استناد عکس قضیه سیوا، هم‌رسی  $AA_1$ ،  $BB_1$  و  $CC_1$  را داریم که نقطه تلاقی یعنی همان  $O$  نقش مرکز ثقل مثلث  $ABC$  را خواهد داشت. توجه داشته باشیم که  $A_1$ ،  $B_1$  و  $C_1$  وسط‌های اضلاع مثلث نیستند، ولی به دلیل متفاوت بودن جرم وزنه‌های آویزان شده از  $A$ ،  $B$  و  $C$  نقاط  $A_1$ ،  $B_1$  و  $C_1$  همان نقش تکیه‌گاه الاکلنگ با وزن‌های متفاوت در دو سر را ایفا می‌کنند و به همین دلیل،  $O$  مرکز ثقل صفحه مثلث لوستر است (شکل ۱۳).



شکل ۱۳

\* منبع

الهام گرفته شده از کتاب: اوسپنسکی، و. (۱۳۶۱). برخی کاربردهای مکانیک در ریاضیات. ترجمه دکتر کاظم ابهری. نشر گستره. تهران.



برگزاری مسابقه ریاضی خيام به صورت گروهی در آرامگاه خيام

فرشته بیاتی  
دبیر ریاضی نیشابور

معرفی

اهداف

و  
فعالیت‌های

# خانه ریاضیات نیشابور

رئیس شورای اسلامی شهر، رؤسای مراکز آموزش عالی نیشابور و... و اشخاص حقیقی از جمله پروفیسور والد اشمیت (رئیس سابق انجمن ریاضی فرانسه)، دکتر مهدی بهزاد، دکتر ناصر ارقامی و عده‌ای از استادان و دبیران نیشابور می‌توان نام برد.

## اهداف خانه ریاضیات نیشابور

۱. عمومی کردن ریاضیات؛
۲. آشنایی جوانان و نوجوانان با تاریخ ریاضی و کاربردهای آن؛
۳. زیبا و مفهومی کردن آموزش ریاضی؛
۴. از بین بردن ترس از درس ریاضی و امتحان؛
۵. پرورش و شکوفایی بیش از پیش استعدادها و خلاقیت‌ها.

## گوشه‌ای از فعالیت‌های خانه ریاضیات نیشابور

- فعالیت در جهت ترویج دانش ریاضی برای عموم با برپایی سمینارها و همایش‌های علمی.
- آموزش ریاضی برای دوره‌های متفاوت تحصیلی به صورت کار گروهی و بازی با ریاضی.
- آموزش ریاضی برای معلمان با برگزاری کلاس‌های ضمن خدمت و همایش‌ها با حضور مؤلفان کتاب‌های درسی.

## مقدمه

خانه ریاضیات نیشابور در سال جهانی ریاضیات، سال ۱۳۷۹، هم‌زمان با کنگره جهانی بزرگداشت نهمصدمین سال وفات حکیم عمر خیام با حضور وزیر وقت علوم، رؤسای انجمن‌های ریاضی و آمار ایران، استادان شرکت‌کننده در کنگره و مقامات محلی افتتاح شد. این خانه تاکنون در قسمت‌های مختلف آموزش ریاضی در چارچوب اهداف اساسی نام فعالیت‌های چشمگیری را به انجام رسانده و موفقیت‌ها و دستاوردهای قابل توجهی را به دست آورده است. از جمله اینکه سال ۱۳۹۰ جایزه نهاد برگزیده مروج علم را از طرف «انجمن ترویج علم ایران» به خود اختصاص داد.

## تشکیلات

طبق اساسنامه، خانه ریاضیات به صورت هیئت امنایی اداره می‌شود و فرماندار وقت رئیس این هیئت است. تعداد اعضای هیئت امنای آن ۲۸ نفر است که از اعضای حقوقی، مانند رئیس آموزش و پرورش، شهردار،

## برگزاری مسابقات

خانه ریاضیات نیشابور، به همت دبیران ریاضی شهرستان از سال ۱۳۸۳، به مناسبت روز ریاضی و خیام، در ۲۸ اردیبهشت ماه هر سال، یک مسابقه ریاضی به صورت گروهی بین دانش آموزان شهرستان در محل آرامگاه خیام با حضور بیش از هزار دانش آموز برگزار می کند. در مراسم بزرگداشت خیام نیز جوایز نفیسی به برگزیدگان اهدا می شود. امیدواریم با حمایت مسئولان بتوانیم این مسابقه را در سطح کشور برگزار کنیم.

## مجری بنیاد علمی و فرهنگی طرح عتر (عام ترویج ریاضی)

خانه ریاضیات نیشابور به منظور اجرای طرح های ترویج علوم ریاضی برای دانش آموزان مناطق محروم و زمینه سازی برای بروز استعدادها، استادان خود را همراه با وسایل آموزشی و کتاب های لازم به صورت کاروانی به روستاها می فرستد و برنامه های خود را در محل انجام می دهد.



اجرای طرح عتر در روستای بار نیشابور

## بوستان ریاضیات

از جمله اقدامات خانه ریاضیات پیشنهاد احداث بوستان ریاضیات در نیشابور است که برای اولین بار در جهان به عنوان بزرگ ترین بوستان ریاضیات طراحی شده است. زمینی به مساحت ۳۰ هکتار از طرف شهرداری در شمال مسیر جاده نیشابور - مشهد به این کار اختصاص داده شده و تاکنون بیش از سه و نیم میلیارد تومان برای ۱۰ هکتار از آن هزینه شده است.

- برگزاری مسابقات ماهانه از طریق سایت و بخش نامه و مسابقات کانگورو و مسابقه حل مسئله خیام.
- برپایی نمایشگاه دائمی وسایل آموزشی ساخته شده توسط همکاران در کارگاه فناوری خانه ریاضیات.
- برگزاری همایش ها و سمینارهای علمی با حضور استادان برجسته داخل و خارج کشور.



سخنرانی دکتر مهدی بهزاد در جمع دبیران ریاضی نیشابور

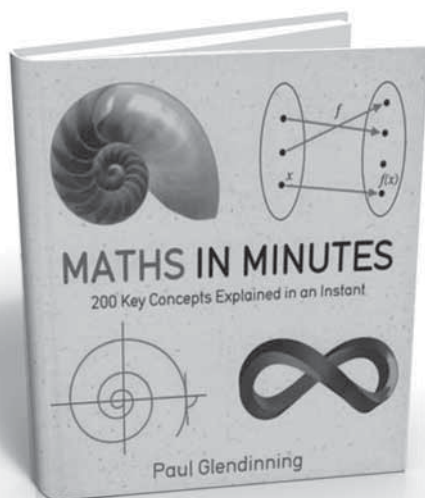


به ترتیب از چپ به راست: آقایان دکتر بهزاد، بهرامی زاده، خسروی راد، طالبی

- برگزاری کارگاه آموزشی با حضور همکاران ریاضی.
- همکاری در برگزاری همایش کشوری مدرسان کلاس های چندپایه در مردادماه ۱۳۹۴.
- راه اندازی کتابخانه با بیش از ۳۰۰۰ جلد کتاب ریاضی و رایانه.
- راه اندازی کارگاه رایانه و ارائه کلاس های "ICDL" و ارائه خدمات اینترنتی به دانش آموزان و دانشجویان به صورت رایگان.
- آموزش محاسبه سریع ذهنی برای گروه های سنی ۵ تا ۷ و ۸ تا ۱۳ سال و کودکان نابینا.



آموزش محاسبه با چرتکه و رایانه به کودکان نابینا



### اعداد اول

اعداد اول اعداد صحیح مثبتی هستند که تنها بر خودشان و ۱ بخش پذیرند. یازده عدد اول نخستین عبارت‌اند از: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱. اما بی‌نهایت عدد اول موجودند. بنابر قرارداد، ۱ عدد اول در نظر گرفته نمی‌شود، در حالی که ۲ تنها عدد اول زوج است. عددی که نه ۱ و نه اول است، به «عدد مرکب» (composite number) موسوم است.

هر عدد مرکب را می‌توان به گونه‌ای یکتا به صورت حاصل ضربی از عوامل اولی نوشت که در هم ضرب شده باشند. برای مثال:  $۱۲=۲ \times ۲ \times ۳$ ،  $۲۱=۳ \times ۷$ ،  $۲۷۰=۲ \times ۳^۳ \times ۵$

از آنجا که خود اعداد اول نمی‌توانند تجزیه شوند، می‌توان آن‌ها را به‌عنوان بلوک‌های ساختمانی و بنیانی اعداد صحیح مثبت در نظر گرفت. اما تعیین اینکه عددی اول است یا نه، و یافتن عوامل اول آن، در صورتی که اول نباشد، می‌تواند بسیار مشکل باشد. بنابراین، این فرایند مبنای ایده‌آلی برای دستگاه‌های رمزبندی است.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

الگوهای پیچیده بسیاری در مورد اعداد اول موجودند، و یکی از فرض‌های برجسته بزرگ ریاضیات، یعنی «فرض ریمان» (Riemann hypothesis)، در مورد توزیع آن‌هاست.

\* جدول اعداد ۱ تا ۱۰۰ که در آن اول‌ها به‌صورت روشن نمایش داده شده‌اند

## الگوریتم اقلیدس

الگوریتم روش یا دستورالعملی برای حل یک مسئله، با انجام مجموعه‌ای از قواعد است. «الگوریتم اقلیدس» (Euclid's algorithm) یکی از قدیمی‌ترین مثال‌هایی است که در حدود سال ۳۰۰ ق.م تنظیم شده است. این الگوریتم برای یافتن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، یعنی ب.م.م، دو عدد طرح شده است. الگوریتم‌ها در علوم رایانه‌ای نقشی اساسی دارند و اغلب ابزارهای الکترونیکی، برای تولید خروجی مفید، از آن‌ها استفاده می‌کنند. ساده‌ترین صورت الگوریتم اقلیدس از این واقعیت استفاده می‌کند که ب.م.م، دو عدد برابر ب.م.م، عدد کوچک‌تر و تفاضل بین آن‌هاست. این موضوع مجازمان می‌کند که به‌طور مکرر عدد بزرگ‌تر واقع در جفت موردنظر را برداریم و بدین ترتیب اندازه اعداد مضمول را تا صفر شدن یکی، کاهش دهیم. در این صورت عدد ناصفر آخری ب.م.م، جفت اولیه است.

این روش می‌تواند تا رسیدن به پاسخ، تکرارهای زیادی داشته باشد. روش کارتر، یعنی الگوریتم استاندارد، طریقی است که در آن به‌جای عدد بزرگ‌تر، باقی‌مانده‌ای را قرار می‌دهد که از تقسیم آن بر عدد کوچک‌تر به‌دست آمده است. این عمل را تا زمانی که دیگر باقی‌مانده‌ای موجود نباشد، ادامه می‌دهد.

## پیدا کردن ب.م.م. ۵۸۵ و ۴۴۲

صورت ساده الگوریتم اقلیدس: ۱۵ مرحله  
 $143 = 442 - 585$ ، بنابراین ۴۴۲ و ۱۴۳ را در نظر می‌گیریم.  
 $299 = 442 - 143$ ، پس ۲۹۹ و ۱۴۳ را در نظر می‌گیریم.  
 $156 = 299 - 143$ ، پس ۱۵۶ و ۱۴۳ را در نظر می‌گیریم.  
 $13 = 143 - 156$ ، پس ۱۴۳ و ۱۳ را در نظر می‌گیریم.  
 $130 = 143 - 13$ ، پس ۱۳۰ و ۱۳ را در نظر می‌گیریم.  
 (پاسخ در این مرحله واضح است، اما تفریق نه بار دیگر به ۱۳ منجر می‌شود...)

$13 - 13 = 0$ ، بنابراین ب.م.م، موردنظر ۱۳ است.

صورت استاندارد الگوریتم اقلیدس: ۳ مرحله

$$1 = \frac{585}{442} \text{ (باقی‌مانده ۱۴۳)}$$

$$3 = \frac{442}{143} \text{ (باقی‌مانده ۱۳)}$$

$$11 = \frac{143}{13} \text{ (بدون باقی‌مانده)}$$

بنابراین فرایند متوقف می‌شود، و ب.م.م، ۱۳ است.

## مقسوم‌علیه‌ها و باقی‌مانده‌ها

عددی «مقسوم‌علیه» (divisor) عدد دیگری است اگر دقیقاً و بدون باقی‌مانده در آن عدد شمرده شود. بنابراین ۴ مقسوم‌علیه ۱۲ است، زیرا می‌تواند دقیقاً سه بار در ۱۲ شمرده شود. در این نوع عمل، عددی که در آن شمرده شده، یعنی ۱۲، به‌عنوان «مقسوم» (dividend) شناخته می‌شود.

اما در مورد ۱۳ چون توسط ۴ شمرده شود، چه می‌توان گفت؟ در این حالت، ۴ مقسوم‌علیه ۱۳ نیست، زیرا این عدد سه بار در ۱۳ شمرده می‌شود، اما ۱ واحد باقی می‌ماند. یک راه بیان پاسخ به‌صورت سه، باقی‌مانده یک بیان می‌شود. این طریق راه دیگری برای گفتن این مطلب است که ۱۲، که  $3 \times 4$  است، بزرگ‌ترین عدد صحیح کمتر از مقسوم (۱۳) است که بر چهار بخش‌پذیر است، و اینکه:  $12 + 1 = 13$ . اکنون چون باقی‌مانده یک توسط چهار شمرده می‌شود، نتیجه کسر  $\frac{1}{4}$  است. بنابراین، پاسخ پرسش اولیه‌مان  $3\frac{1}{4}$  است. ۳ و ۴ هر دو مقسوم‌علیه‌های ۱۲ اند (همان‌طور که ۱، ۲، ۳ و ۱۲ نیز چنین‌اند). اگر عددی طبیعی، مثلاً  $p$  را توسط عدد دیگری، مثل  $q$ ، بشماریم که مقسوم‌علیه  $p$  نیست، در این صورت همواره باقی‌مانده  $r$  موجود است که کمتر از  $q$  است. این موضوع به این معنی است که در حالت عمومی داریم:  $p = kq + r$  که در آن،  $k$  عددی طبیعی، و  $r$  عددی طبیعی و کمتر از  $q$  است.

به‌ازای دو عدد  $p$  و  $q$ ، «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، ب.م.م.» (greatest common divisor, GCD) و نیز مشهور به «بزرگ‌ترین عامل مشترک» (greatest common factor) بزرگ‌ترین عددی است که مقسوم‌علیه  $p$  و  $q$ ، هر دو است. از آنجا که به‌طور واضح ۱ مقسوم‌علیه هر دو عدد است، ب.م.م، همواره بزرگ‌تر از یا برابر با ۱ است. اگر ب.م.م برابر ۱ باشد، در این صورت اعداد را «متباین» (coprime) می‌گویند. آن‌ها به استثنای ۱، مقسوم‌علیه مثبت مشترک ندارند.

مقسوم‌علیه‌ها خانواده جالبی از اعداد موسوم به «اعداد کامل» (perfect numbers) را تولید می‌کنند. این اعداد عددهایی هستند که مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبتشان، غیر از خودشان، به اندازه خود عدد است. اولین و ساده‌ترین عدد کامل ۶ است، که برابر مجموع مقسوم‌علیه‌های خود، یعنی ۱، ۲، و ۳ است. دومین عدد کامل ۲۸ است که برابر است با:  $1 + 2 + 4 + 7 + 14$ . باید برای یافتن سومین عدد کامل، یعنی ۴۹۶، صبر بیشتری داشته باشیم. این عدد برابر است با:  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$ .

اعداد کامل بسیار کمیاب‌اند و یافتنشان چالشی محسوب می‌شود. ریاضی‌دان‌ها همچنان باید پاسخ‌هایی قطعی برای پرسش‌های مهمی در این زمینه بیابند؛ از قبیل اینکه: آیا تعداد نامتناهی از این اعداد موجودند؟ یا: آیا جمیع آن‌ها زوج‌اند یا نه؟

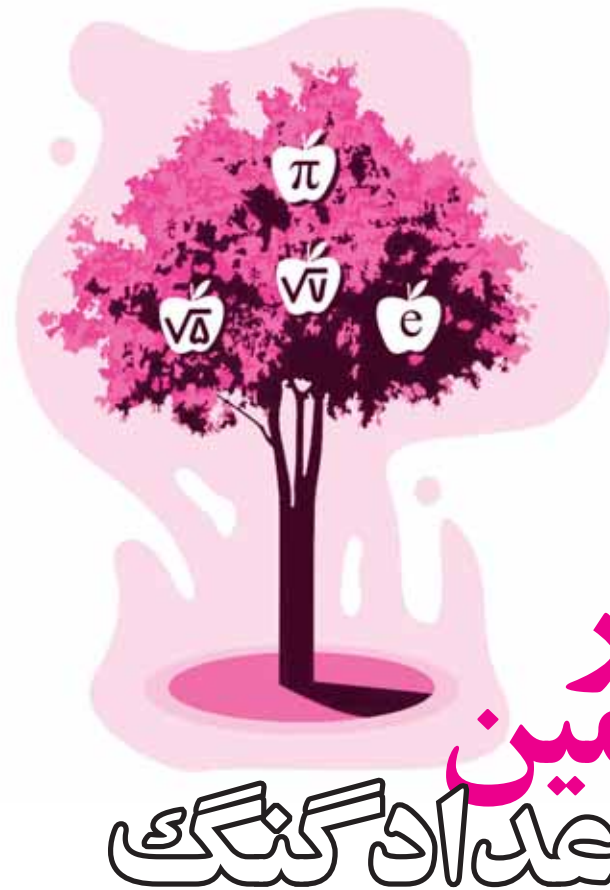


محمود داورزنی

پژوهش‌سرای دانش‌آموزی  
ذکریای رازی، ناحیه ۱  
شهری

نصیر فلاح

دانش‌آموز سال سوم ریاضی  
دبیرستان شهید بهشتی،  
ناحیه ۱ شهری



# گشتی در سرزمین اعداد گنگ

## اشاره

اعداد حقیقی به دو دسته گویا و گنگ تقسیم می‌شوند. مثلاً  $\frac{2}{5}$  گویا و  $\sqrt{5}$  گنگ است. در این تقسیم‌بندی اثبات گنگ بودن بسته به نوع مسئله تغییر می‌کند. برای مثال، روشی که به منظور اثبات گنگ بودن  $\sqrt[3]{5}$  به کار می‌رود با روشی که برای اثبات گنگ بودن  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$  به کار می‌رود، متفاوت است. در این مقاله، ابتدا اعداد حقیقی را به دو بخش اعداد جبری و غیرجبری (متعالی) تقسیم می‌کنیم. سپس رابطه بین این اعداد را با اعداد گویا و گنگ بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان گنگ بودن بسیاری از اعداد حقیقی جبری را به روش واحدی بیان کرد.

می‌شوند. برای مثال، اگر  $r = \frac{a}{b}$  که  $a, b \in \mathbb{Z}$  و  $b \neq 0$  و  $ra$

گنگ نباشد، پس گویاست یعنی  $ra = r' \in \mathbb{Q}$  و در نتیجه  $\alpha = \frac{r'}{r} \in \mathbb{Q}$  که متناقض با فرض گنگ بودن  $\alpha$  است. پس  $ra$  گنگ است.

**نتیجه ۱.** اگر  $\alpha$  یک عدد گنگ باشد،  $-\alpha$  و  $\alpha^{-1}$  نیز گنگ هستند.

**اثبات:** در قضیه بالا و در  $ra$  و  $\frac{r}{\alpha}$  به ترتیب قرار می‌دهیم:  
 $r = 1$  و  $r = -1$

البته مجموعه اعداد گنگ نسبت به عمل جمع بسته نیست. مثلاً داریم:  $\sqrt{2} + (\sqrt{-2}) = 0$  که صفر یک عدد گنگ نیست. به کمک قضیه بالا گنگ بودن بسیاری از اعداد ثابت می‌شود؛ برای مثال،  $\sqrt{2} - 3$  و  $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ؛ البته به شرطی که ثابت شود  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{3}$  گنگ هستند.

## ۱. اعداد گویا و گنگ

هر عدد حقیقی به شکل  $\frac{a}{b}$  که  $a, b \in \mathbb{Z}$  و  $b \neq 0$  گویا و بقیه اعداد حقیقی، گنگ نامیده می‌شوند. مثلاً  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$ ،  $5\sqrt{2} - \sqrt{3}$ ،  $\log 2$ ،  $\sin 1$ ،  $\pi$  و  $2\sqrt{2}$  گنگ هستند، ولی روش اثبات گنگ بودن این اعداد یکسان نیست و برای بعضی از آن‌ها مثل  $\pi$  و  $2\sqrt{2}$ ، باید از ابزارهای پیشرفته‌ای استفاده کرد تا بتوان نشان داد این اعداد گنگ هستند. در ادامه چند خاصیت ساده اعداد گویا و گنگ را مرور می‌کنیم.

**قضیه ۱.** اگر  $\alpha$  یک عدد گنگ و  $r$  یک عدد گویا مخالف صفر باشد،  $ra$ ،  $r + \alpha$  و  $\frac{r}{\alpha}$  گنگ هستند.

**اثبات:** به کمک برهان خلف به راحتی همه آن‌ها اثبات



در ادامه با حل چند مثال، گنگ بودن اعدادی مانند  $\sqrt{3}$  و  $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$  را نشان می‌دهیم.

◆ **مثال ۱.** ثابت کنید که  $\sqrt{3}$  گنگ است.

**اثبات:** از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $\sqrt{3}$  گنگ نباشد. پس:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

می‌توانیم فرض کنیم کسر  $\frac{a}{b}$  تحویل‌ناپذیر است، یعنی تا جایی ساده شده که دیگر  $a$  و  $b$  به هیچ عدد طبیعی دیگری ساده نمی‌شوند. در این حالت می‌گوییم  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول‌اند؛ یعنی  $(a, b) = 1$ . از رابطه  $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$  می‌توان تساوی  $a^2 = 3b^2$  را نتیجه گرفت. بنابراین  $a^2$  مضرب ۳ است و در نتیجه  $a$  نیز مضرب ۳ است، پس:  $a = 3k$  که  $k \in \mathbb{Z}$ . با جای‌گذاری این مقدار در  $a^2 = 3b^2$  رابطه  $9k^2 = 3b^2$  یا  $3k^2 = b^2$  نتیجه می‌شود. بنابراین مشابه قبل باید  $b^2$  مضرب ۳ باشد و در نتیجه  $b$  نیز مضرب ۳ خواهد بود؛ یعنی  $b = 3k'$  که  $k' \in \mathbb{Z}$ . با توجه به نتایج بالا  $a$  و  $b$  هر دو مضرب ۳ هستند و این به معنای آن است که کسر  $\frac{a}{b}$  حداقل به ۳ ساده می‌شود که خلاف فرض است. پس  $\sqrt{3}$  گنگ است.

◆ **مثال ۲.** اگر  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{5}$  گنگ باشند، ثابت کنید  $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$  نیز گنگ است.

**اثبات:** باز هم از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم  $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$  گنگ نباشد. پس گویاست. با توجه به اینکه:

$$(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) = 20 - 18 = 2$$

پس:  $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} = \frac{2}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$  و در نتیجه  $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$  نیز گویاست. از طرف دیگر:

$$(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}) + (2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) = 4\sqrt{5}$$

و چون جمع دو عدد گویا نیز عددی گویاست، پس  $4\sqrt{5}$  و در نتیجه  $\sqrt{5}$  نیز گویاست که متناقض با فرض است. بنابراین  $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$  گنگ است.

در مثال زیر نیز گنگ بودن  $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$  خواسته شده، ولی فرض سؤال متفاوت است و این راه‌حل متفاوتی را ایجاد می‌کند.

◆ **مثال ۳.** اگر  $\sqrt{10}$  گنگ باشد، ثابت کنید  $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$  نیز یک عدد گنگ است.

**اثبات:** فرض کنیم  $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$  گنگ نباشد، پس:

$$2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} = r \quad r \in \mathbb{Q}$$

$$2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} = r \Rightarrow (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 20 + 18 - 12\sqrt{10} = r^2 \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{38 - r^2}{12}$$

و چون  $r \in \mathbb{Q}$  پس:  $\frac{38 - r^2}{12}$  و در نتیجه  $\sqrt{10}$  نیز گویاست که متناقض با فرض است.

از سه مثال بالا به راحتی می‌توان دریافت که روش‌های اثبات گنگ بودن اعداد رادیکالی متفاوت با یکدیگرند.

## ۲. معادلات جبری و ریشه‌های گویای آن‌ها

هر عدد رادیکالی را می‌توانیم ریشه یک معادله چندجمله‌ای با ضرایب صحیح در نظر بگیریم. مثلاً  $x = \sqrt{2}$  یک ریشه از معادله  $x^2 - 2 = 0$  است و یا برای  $x = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$  به راحتی می‌توانیم معادله‌ای بسازیم:

$$x = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 12 + 2 - 4\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 14)^2 = (-4\sqrt{6})^2 \Rightarrow x^4 - 28x^2 + 196 = 96$$

$$\Rightarrow x^4 - 28x^2 + 100 = 0$$

همان‌طور که در بالا مشاهده می‌شود،  $\sqrt{2}$  ریشه معادله  $x^2 - 2 = 0$  و  $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$  نیز ریشه‌ای از معادله  $x^4 - 28x^2 + 100 = 0$  است. به چنین اعدادی که ریشه یک معادله با ضرایب صحیح هستند، جبری می‌گوییم و به اعداد حقیقی دیگر غیرجبری می‌گوییم. مثلاً  $\log 2$  غیرجبری است که اثبات آن نیز کار نسبتاً دشواری است. اگر بتوانیم ثابت کنیم که این معادلات ریشه گویایی ندارند، بنابراین اعداد  $\sqrt{2}$  و  $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$  گویا نیستند و باید گنگ باشند. برای اثبات این مطلب ذکر مفاهیم زیر لازم است.

**لم اقلیدس:** اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد صحیحی باشند و  $a|bc$  و  $(a, b) = 1$ ، آنگاه:  $a|c$ .

اثبات این قضیه در کتاب درسی «ریاضیات گسسته» آمده است. بیان دیگری از این قضیه به این صورت است که اگر  $a$  یک مقسوم‌علیه  $bc$  باشد و  $a$  و  $b$

**نکته:** در قضیه بالا، اگر  $c_n = 1$  و این معادله یک ریشه گویا داشته باشد، این ریشه یک عدد صحیح و این عدد یک مقسوم علیه  $c$  است. به کمک قضیه بالا گنگ بودن چند عدد را نشان می دهیم.

◆ **مثال ۵.** ثابت کنید  $\sqrt{3}$  گنگ است.

**حل:** عدد  $\sqrt{3}$  ریشه معادله  $x^2 - 3 = 0$  است. اگر ثابت کنیم که این معادله ریشه گویا ندارد،  $\sqrt{3}$  گنگ خواهد بود. با توجه به نکته بالا هر ریشه گویای این معادله یک عدد صحیح و این عدد صحیح یک مقسوم علیه  $3$  است. بنابراین اگر معادله بالا ریشه های گویا داشته باشد، این ریشه ها در بین عددهای زیرند:

$$\pm 1, \pm 3$$

با جای گذاری به سادگی درمی یابیم که هیچ کدام از این عددها ریشه معادله نیستند. پس این معادله هیچ ریشه گویایی ندارد و چون  $\sqrt{3}$  ریشه این معادله است، قطعاً گنگ خواهد بود.

◆ **مثال ۶.** ثابت کنید  $\sqrt[3]{7}$  گنگ است.

**حل:** عدد  $\sqrt[3]{7}$  ریشه معادله  $x^3 - 7 = 0$  است و می دانیم هر ریشه گویای این معادله یک عدد صحیح و این عدد صحیح یک مقسوم علیه  $7$  است. بنابراین ریشه های گویای این معادله فقط از بین اعداد زیر می توانند باشند:

$$\pm 1, \pm 7$$

که با جای گذاری آن ها در معادله بالا هیچ کدام ریشه نیستند. پس  $\sqrt[3]{7}$  که ریشه این معادله است، گنگ خواهد بود.

◆ **مثال ۷.** ثابت کنید  $\sqrt{2} - \sqrt{5}$  گنگ است.

ابتدا معادله ای با ضرایب صحیح به دست می آوریم که این عدد ریشه آن باشد:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} - \sqrt{5} \Rightarrow x + \sqrt{5} = \sqrt{2} \Rightarrow (x + \sqrt{5})^2 = 2 \\ &\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = 2 \\ &\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{5}x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow (x^2 + 2\sqrt{5}x - 3)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x^4 + 4\sqrt{5}x^3 + (5 - 6)x^2 - 12\sqrt{5}x + 9 = 0 \\ &\Rightarrow x^4 + 4\sqrt{5}x^3 - x^2 - 12\sqrt{5}x + 9 = 0 \end{aligned}$$

هیچ مقسوم علیه مشترکی به جز  $1$  نداشته باشند،  $a$  یک مقسوم علیه  $c$  است. قضیه زیر اساس مطالب بعدی است.

**قضیه ۲.** اگر  $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c = 0$  یک معادله با ضرایب صحیح و  $\frac{a}{b}$  ریشه گویای تحویل ناپذیر این معادله باشد،  $a$  یک مقسوم علیه  $c$  و  $b$  یک مقسوم علیه  $c_n$  خواهد بود.

**اثبات:** اگر  $x = \frac{a}{b}$ ، ریشه این معادله و همچنین یک کسر تحویل ناپذیر باشد، در این معادله صدق می کند. بنابراین:

$$c_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + c_1 \left(\frac{a}{b}\right) + c = 0$$

با ضرب طرفین در  $b^n$  داریم:

$$c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} b + \dots + c_1 a b^{n-1} + c b^n = 0$$

بنابراین:

$$c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} b + \dots + c_1 a b^{n-1} = -c b^n$$

در معادله بالا  $a$  یک مقسوم علیه سمت چپ تساوی است، بنابراین  $a$  یک مقسوم علیه سمت راست، یعنی  $c b^n$  نیز هست و چون  $(a, b) = 1$ ، طبق لم اقلیدس  $a$  یک مقسوم علیه  $c$  است. به طور مشابه داریم:

$$c_{n-1} a^{n-1} b + \dots + c_1 a b^{n-1} + c b^n = -c_n a^n$$

در این معادله  $b$  یک مقسوم علیه سمت چپ است، پس یک مقسوم علیه سمت راست، یعنی  $c_n a^n$  نیز هست و چون  $(a, b) = 1$ ، طبق لم اقلیدس  $b$  یک مقسوم علیه  $c_n$  خواهد بود.

◆ **مثال ۴.** تمام ریشه های گویای معادله زیر را پیدا کنید.

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$$

**حل:** اگر  $x = \frac{a}{b}$ ، ریشه گویا و تحویل ناپذیر این معادله باشد، طبق قضیه بالا  $a$  یک مقسوم علیه  $3$  و  $b$  یک مقسوم علیه  $2$  است. بنابراین انتخاب های ممکن  $a$  و  $b$  عبارتند از:

$$a = \pm 1, \pm 3, b = \pm 1, \pm 2$$

پس حالت های مختلف  $\frac{a}{b}$  به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{a}{b} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}$$

که با جای گذاری در معادله، فقط عددهای  $1$  و  $\frac{1}{2}$  در آن صدق می کند و بنابراین ریشه های آن به شمار می روند.

دیگر، هر عدد گنگی لزوماً یک عدد متعالی نیست. مثلاً  $\sqrt{2}$  گنگ است، ولی متعالی نیست، در حالی که  $\log 2$  هم گنگ است و هم متعالی. در حقیقت بسیاری از اعداد حقیقی گنگ، متعالی هستند. از توضیحات بالا می‌توانیم تصویر زیر را از اعداد حقیقی در ذهن داشته باشیم:

اعداد متعالی		اعداد جبری	
اعداد گنگ		اعداد گویا	
$\log 2$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{5}$	

از جمله عددهای متعالی  $\log 2$  و  $\pi$  هستند. در حالت کلی می‌توان ثابت کرد که  $\log n$  برای هر  $n$  که مخالف  $10^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) باشد، غیر جبری است، ولی اثبات متعالی بودن آن‌ها مفصل‌تر و عمیق‌تر از آن است که بتوان در اینجا بیان کرد.

اثبات متعالی بودن  $\pi$  در سال ۱۸۸۲ کشف شد، ولی اثبات متعالی بودن اعدادی مانند  $\log 2$  و  $2\sqrt{2}$  سال‌ها بعد و در سال ۱۹۳۴ انجام شد. در سال ۱۹۰۰،

ریاضی‌دان بزرگ، دیوید هیلبرت، فهرست مشهوری از ۲۳ مسئله متفاوت را عرضه کرد که هر کدام از آن‌ها

سؤال‌های ریاضی حل نشده مهمی بودند که تا آن زمان حل نشده بودند. مسئله هفتم به این صورت بود: «اگر  $\alpha$

و  $\beta$  جبری باشند، آیا  $\alpha^\beta$  جبری است و یا غیر جبری؟»

البته حالت‌های  $\alpha=0$  و  $\alpha=1$  و یا وقتی که  $\beta$  گویا باشد،

از این حکم مستثنا شده‌اند. در سال ۱۹۳۴ متعالی بودن

این عدد توسط گلفند<sup>۱</sup> و به‌طور جداگانه توسط شنیدر<sup>۲</sup>

اثبات شد. متعالی بودن  $2\sqrt{2}$  حالت خاصی از این حکم

است. همچنین با کمک این قضیه متعالی بودن  $\log 2$  نیز

به راحتی اثبات می‌شود، چرا که:

$$\alpha^\beta = 10^{\log \alpha^\beta} = 2$$

در حالت کلی این قضیه ثابت می‌کند که اگر  $r$  گویا

و  $\log r$  گنگ باشد،  $\log r$  متعالی خواهد بود.

با توجه به اینکه هر ریشه گویای این معادله یک عدد صحیح، و این عدد صحیح یک مقسوم‌علیه ۶۱- و ۶۱ نیز یک عدد اول است، ریشه‌های گویا (در صورت وجود) در میان اعداد زیر خواهند بود:

$$\pm 1, \pm 61$$

با جای‌گذاری معلوم می‌شود، هیچ کدام ریشه معادله نیستند. پس این معادله ریشه گویا ندارد و با توجه به اینکه  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$  ریشه این معادله است، پس این عدد گنگ خواهد بود.

♦ مثال ۸. ثابت کنید  $\sin 10^\circ$  گنگ است.

با توجه به اتحاد مثلثاتی

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

و با قرار دادن  $\theta = 10^\circ$  داریم:

$$3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ = \frac{1}{4} 3x - 4x^3$$

و با جای‌گذاری  $\sin 10^\circ = x$ ، معادله  $\frac{1}{4} 3x - 4x^3$  و یا

$$-8x^3 + 6x - 1 = 0$$

است. اکنون اگر معادله اخیر ریشه گویای  $\frac{a}{b}$  داشته

باشد، باید  $a$  مقسوم‌علیه ۱- و  $b$  مقسوم‌علیه ۸- باشد.

پس ریشه‌های گویای این معادله به شکل زیر خواهند بود:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$$

که با جای‌گذاری در معادله هیچ کدام ریشه آن

نیستند. پس این معادله ریشه گویا ندارد و در نتیجه

$\sin 10^\circ$  (که ریشه این معادله است) گویا نیست.

### ۳. اعداد جبری و غیر جبری

همان‌طور که قبلاً گفته شد، هر عدد حقیقی که

ریشه معادله‌ای با ضرایب صحیح باشد، جبری نامیده

می‌شود و در غیر این صورت آن را غیر جبری یا متعالی

می‌نامیم. هر عدد گویا یک عدد جبری است، چرا که اگر

$x = \frac{a}{b}$  یک عدد گویا باشد،  $bx - a = 0$  معادله‌ای با ضرایب

صحیح است که  $\frac{a}{b}$  ریشه‌ای از آن است. بنابراین اعداد

گویا زیرمجموعه سره‌ای از اعداد جبری هستند. از سوی

#### \* پی‌نوشت‌ها

1. Gelfond

2. Schneider

#### \* منابع

1. Ian Anderson,

*A first course in discrete mathematics*, Springer Verlag, 2001.

2. J. H. van Lint and

R. M. Wilson,

*A course in combinatorics*.

Cambridge

University Press.

1992.



# روش بازگشتی

## اسنادی پرمند

## مقدمه

«اثبات بازگشتی» روشی است که بیشتر برای اثبات درستی ناهمبندی‌ها از آن استفاده می‌شود. در این روش درستی حکم را می‌پذیریم و با انجام محاسبات لازم و کمک گرفتن از ویژگی‌ها و خواص مرتبط با مسئله، ناهمبندی یا گزاره حکم را تا آنجا ساده می‌کنیم که به گزاره‌ای برسیم که بدیهی است، یا درستی آن را از قبل می‌دانیم. در صورتی که مراحل انجام شده برگشت پذیر باشند، درستی روش اثبات تأیید شده است.

در این مقاله نمونه‌های مسائلی متنوعی از جبر، مثلثات و به‌ویژه هندسه که جای خالی آن بیشتر احساس می‌شود، طرح و حل شده‌اند تا فراگیر بودن استفاده از این روش در اغلب شاخه‌های ریاضیات دبیرستانی نشان داده شود.

● **مثال ۲.** ثابت کنید:

$$\frac{1}{4}(\sqrt{46} - \sqrt{2}) = \sqrt{12} - \sqrt{23}$$

◀ **اثبات:** درستی تساوی را می‌پذیریم و دو طرف را به توان دو می‌رسانیم:

$$\frac{1}{4}(\sqrt{46} - \sqrt{2})^2 = 12 - \sqrt{23}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(46 + 2 - 2\sqrt{92}) = 12 - \sqrt{23}$$

$$\Rightarrow 48 - 2\sqrt{92} = 48 - 4\sqrt{23} \Rightarrow 2\sqrt{92} = 4\sqrt{23}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{4 \times 23} = 4\sqrt{23} \Rightarrow 4\sqrt{23} = 4\sqrt{23}$$

مراحل بازگشت پذیرند، لذا تساوی اولیه برقرار است.

● **مثال ۳.** ثابت کنید:

$$(\tan \theta + \cot \theta)^2 \geq 4; \theta \neq \frac{k\pi}{2}$$

◀ **اثبات:** فرض کنیم  $\tan \theta = a$  در این صورت  $\cot \theta = \frac{1}{a}$  پس باید نشان دهیم:

$$(a + \frac{1}{a})^2 \geq 4$$

فرض کنیم این نامساوی درست باشد، پس:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \geq 4 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \geq 0$$

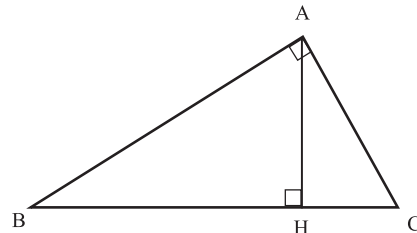
$$\Rightarrow (a - \frac{1}{a})^2 \geq 0$$

درستی رابطه اخیر واضح است و روابط همگی برگشت پذیرند. لذا طبق روش اثبات بازگشتی حکم مسئله برقرار است.

اینک به چند نمونه دیگر از مسائل هندسی که پیرامون خواص مثلث برقرار است، می‌پردازیم و درستی آن‌ها را به روش اثبات

● **مثال ۱.** مثلث ABC در رأس A قائمه است. اگر ارتفاع وارد بر وتر باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$



◀ **اثبات:** درستی حکم را می‌پذیریم و به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{AB^2 \cdot AC^2}, AC^2 + AB^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2} \Rightarrow BC^2 \cdot AH^2 = AB^2 \cdot AC^2$$

$$\Rightarrow BC \cdot AH = AB \cdot AC \Rightarrow \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

تساوی اخیر بدیهی است (زیرا هر دو طرف برابر S مساحت مثلث ABC هستند) و تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیرند. لذا طبق روش اثبات بازگشتی، حکم مسئله برقرار است.

بازگشتی، مطرح می‌کنیم.

پس:  $c-a > 0$  و  $c-b > 0$  و جمع دو مقدار مثبت، مثبت است. روابط همگی برگشت پذیرند و لذا حکم برقرار است.

● **مثال ۴.** ثابت کنید اگر مثلثی با طول اضلاع  $a$ ،  $b$  و  $c$  وجود داشته باشد، مثلثی با طول ضلع‌های  $\sqrt{a}$ ،  $\sqrt{b}$  و  $\sqrt{c}$  نیز وجود دارد. **اثبات:** کافی است نشان دهیم که نابرابری‌های زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} &> \sqrt{c} \\ \sqrt{b} + \sqrt{c} &> \sqrt{a} \\ \sqrt{c} + \sqrt{a} &> \sqrt{b} \end{aligned}$$

یکی از سه نابرابری را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیه مشابه است. از روش اثبات بازگشتی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم:  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$  در این صورت:

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &> (\sqrt{c})^2 \\ a + b + 2\sqrt{ab} &> c \end{aligned}$$

نابرابری آخر درست است، زیرا در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است؛ یعنی:  $a+b > c$ . پس:

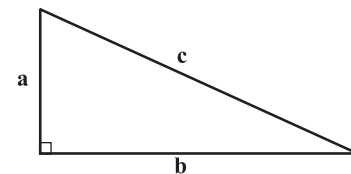
$$a + b + 2\sqrt{ab} > c + 2\sqrt{ab} > c$$

بنابراین نابرابری  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$  درست است و حکم ثابت شده است.

● **مثال ۵.** ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، مکعب طول وتر از مجموع مکعبات دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

● **اثبات:** اگر  $a$  و  $b$  طول دو ضلع و  $c$  طول وتر باشند، ثابت می‌کنیم:

$$c^3 > a^3 + b^3$$



درستی حکم را می‌پذیریم. با توجه به رابطه فیثاغورس که:

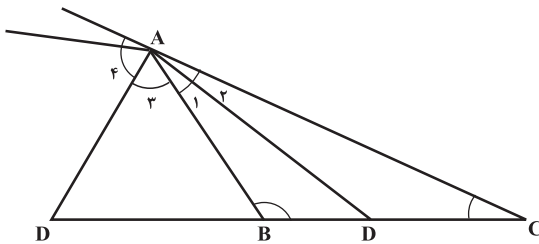
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} c \times c^2 &> a^3 + b^3 \\ \Rightarrow (a^2 + b^2)c &> a^3 + b^3 \Rightarrow a^2c + b^2c > a^3 + b^3 \\ \Rightarrow a^2c - a^3 + b^2c - b^3 &> 0 \\ \Rightarrow a^2(c-a) + b^2(c-b) &> 0 \end{aligned}$$

درستی رابطه اخیر از آنجا ناشی می‌شود که در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه وتر از طول دو ضلع بزرگ‌تر است؛ یعنی:  $c > a$  و  $c > b$ .

● **مثال ۶.** مثلث  $ABC$  را که در آن فرض کرده‌ایم:  $\hat{B} > \hat{C}$  و  $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$  (و یا با فرض  $\hat{C} > \hat{B}$  و  $\hat{C} - \hat{B} = 90^\circ$ ، یعنی در حالت کلی  $|\hat{B} - \hat{C}| = 90^\circ$ )، مثلث شبه‌قائمه در رأس  $A$  می‌نامیم. ثابت کنید در این مثلث طول‌های نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی رأس  $A$  با هم برابرند.

● **اثبات:** مطابق شکل در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$  و  $AD'$  و  $AD$  نیمسازهای داخلی و خارجی  $A$  هستند ( $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$ ). می‌خواهیم ثابت کنیم:  $AD = AD'$ .



با پذیرفتن درستی حکم، و با توجه به اینکه نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس در هر مثلث، همواره بر یکدیگر عمودند (چرا؟)، پس مثلث  $DAD'$  قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. در نتیجه:  $\hat{D} = \hat{D}' = 45^\circ$  و در مثلث  $ABD$  داریم:

$$\begin{aligned} \hat{B} + \hat{A}_1 + \hat{D} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2} + 45^\circ = 180^\circ \\ \Rightarrow 2\hat{B} + \hat{A} &= 270^\circ \Rightarrow 2\hat{B} + 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 270^\circ \\ \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} &= 90^\circ \end{aligned}$$

این نتیجه هم معادل با فرض مسئله است. تمام مراحل برگشت پذیر هستند و استدلال اصلی را با طی مسیر عکس، خودتان انجام دهید. امیدواریم مثال‌های فوق آن قدر متنوع بوده باشند که فراگیربودن این روش را در اثبات‌ها نشان دهند. اکنون اگر به حل مسئله‌های خاص علاقه‌مند هستید، پیشنهاد می‌شود مسائل زیر را هم ببینید که دو مسئله ویژه از هندسه هستند.

● **مسئله ۱.** (نامساوی فینسلر - هادویگر) در هر مثلث به اضلاع  $a$ ،  $b$  و  $c$  و مساحت  $S$ ، نشان دهید نامساوی زیر برقرار است:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

● **اثبات:** با فرض اینکه  $2p = a+b+c$  محیط مثلث باشد، قرار می‌دهیم:

$$x = p-a, y = p-b, z = p-c$$

$$\Rightarrow (y - x \cos A - z \cos B)^2 + (x \sin A - z \sin B)^2 \geq 0$$

درستی نامساوی اخیر بدیهی است و همه روابط برگشت پذیرند. در نتیجه براساس روش اثبات بازگشتی حکم مسئله برقرار است.

### تمرین‌ها

۱. نشان دهید در هر مثلث قائم الزاویه با اضلاع  $a$  و  $b$  وتر  $c$  داریم:

$$a + b \leq c\sqrt{2}$$

۲. ثابت کنید در هر مثلث دلخواه، نصف محیط مثلث، از طول هر ضلع آن بزرگ‌تر است.

۳. مثلث  $ABC$  با طول اضلاع  $a$ ،  $b$  و  $c$  و مساحت  $S$  مفروض است. ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S \quad (\text{الف})$$

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S \quad (\text{ب})$$

۴. در هر مثلث با طول اضلاع  $a$ ،  $b$  و  $c$  و نصف محیط  $P$  ثابت کنید:

$$\frac{a}{P-a} + \frac{b}{P-b} + \frac{c}{P-c} \geq 6$$

۵. ثابت کنید:

$$\frac{\delta^n}{1+\delta^{2n}} \geq \frac{\delta^{n+1}}{1+\delta^{2n+2}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

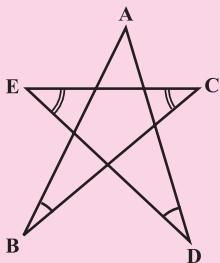
۶. ثابت کنید:

$$\sin^{\frac{1}{\alpha}} \alpha + \cos^{\frac{1}{\alpha}} \alpha \geq \frac{1}{\alpha} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

۷. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{8 - \sqrt{15}}$$

۸. در شکل زیر می‌دانیم:  $\hat{C} = \hat{E}$ ،  $\hat{B} = \hat{D}$  و  $DE = BC$ . ثابت کنید:  $AB = AD$ .



لذا داریم:  $p = x + y + z$ . فرض کنیم نامساوی حکم درست باشد.

طبق فرمول هرون داریم:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{و لذا:}$$

$$S = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$

اکنون نامساوی حکم مسئله را برحسب متغیرهای

$x$ ،  $y$  و  $z$  بازنویسی می‌کنیم:

$$(y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2 \geq 4\sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$+(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$$

$$\Rightarrow xy + yz + xz \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 + 2x^2yz + 2y^2xz$$

$$+ 2z^2xy \geq 3x^2yz + 3y^2xz + 3z^2xy$$

$$\Rightarrow (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 \geq xyz(x+y+z)$$

قرار می‌دهیم  $A = xy$ ،  $B = yz$  و  $C = xz$  و خواهیم داشت:

$$A^2 + B^2 + C^2 \geq AB + BC + AC$$

که درستی آن بدیهی است! (اگر اثبات آن را نمی‌دانید دو طرف

را در ۲ ضرب کرده و عبارت‌ها را به سمت چپ نابرابری ببرید) روابط

همگی برگشت پذیرند و بنابراین طبق روش اثبات بازگشتی حکم برقرار

است. توجه کنیم که حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که  $x=y=z$  و یا

$a=b=c$ ؛ یعنی مثلث، متساوی‌الاضلاع باشد.

**مسئله ۲.** اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  اندازه زاویه‌های یک مثلث دلخواه و  $x$ ،  $y$  و

$z$  اعداد حقیقی مثبت و دلخواه باشند، ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy \cos A + 2yz \cos B + 2zx \cos C$$

◀ **اثبات:** با پذیرش حکم و توجه به اینکه:

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\cos C = -\cos(A+B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

با جای‌گذاری این رابطه در نامساوی فوق و دسته‌بندی مناسب

به شرح زیر داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy \cos A + 2yz \cos B$$

$$+ 2xz \sin A \sin B - 2xz \cos A \cos B$$

و

$$\left\{ \begin{aligned} & x^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + y^2 + z^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) \\ & = x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow (y^2 - 2xy \cos A - 2yz \cos B + 2xz \cos A \cos B$$

$$+ x^2 \cos^2 A + z^2 \cos^2 B) + (x^2 \sin^2 A + z^2 \sin^2 B$$

$$- 2xz \sin A \sin B) \geq 0$$

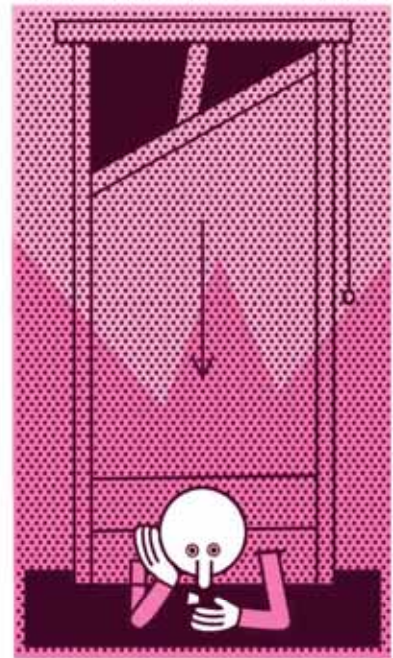


آوردی. پس می‌توانی بروی!»  
 شیمی‌دان گفت: «شانسی در کار نیست.  
 این به‌خاطر فعل و انفعال شیمیایی است که  
 سبب زنگ زدن تیغه و گیر کردن آن  
 در ریل شد.» و با خوش‌حالی منتظر  
 سرنوشت ریاضی‌دان نشست.  
 ریاضی‌دان به‌طرف گیوتین رفت و  
 کمی مکث کرد. ابتدا بادقت به تیغه نگاه  
 کرد و بعد فریاد زد: «یافتم! اشکال هیچ یک  
 از این‌ها نبود»، و یک تکه سنگریزه را از ریل  
 حرکت تیغه بیرون آورد و گفت: اشکال از  
 اینجاست. حالا می‌توانی کارت را به‌درستی  
 انجام دهی!»

### لطیفه دوم

حالا نیمی از شرکت‌کنندگان بدون جا مانده  
 بودند. چاره چه بود؟  
 یکی از شرکت‌کنندگان در کنفرانس  
 که ریاضی‌دان بزرگی بود، راه‌حلی پیدا کرد:  
 همه مهمانانی را که در هتل سالم هستند،  
 تغییر اتاق بدهند. به این صورت که هرکسی  
 که در اتاق شماره  $n$  ساکن است، به اتاق  
 شماره  $2n$  تغییر جا بدهد. مثلاً مهمان اتاق  
 ۱۰۱ به اتاق ۲۰۲ و مهمان اتاق ۳۴۵ به  
 اتاق ۶۹۰، و... برود. حالا تمام اتاق‌های  
 دارای شماره فرد خالی می‌شوند و بقیه  
 مهمان‌ها را به این اتاق‌ها منتقل کنید!

در شهری دوردست به نام «ناکجا آباد»  
 قرار بود کنفرانس بسیار عظیمی درباره  
 ریاضیات برگزار شود. بی‌نهایت ریاضی‌دان در  
 این کنفرانس شرکت کرده بودند و دو هتل  
 در دو طرف خیابان محل برگزاری کنفرانس  
 پذیرای شرکت‌کنندگان بود. از قضا هتل‌ها  
 هم که متعلق به دو برادر بودند، گنجایش  
 بی‌نهایت مهمان را داشتند! مهمان‌ها در این  
 دو هتل مستقر شدند، ولی درست در همان  
 زمان که کنفرانس در حال برگزاری بود، یکی  
 از هتل‌ها کاملاً در آتش سوخت و از بین رفت!



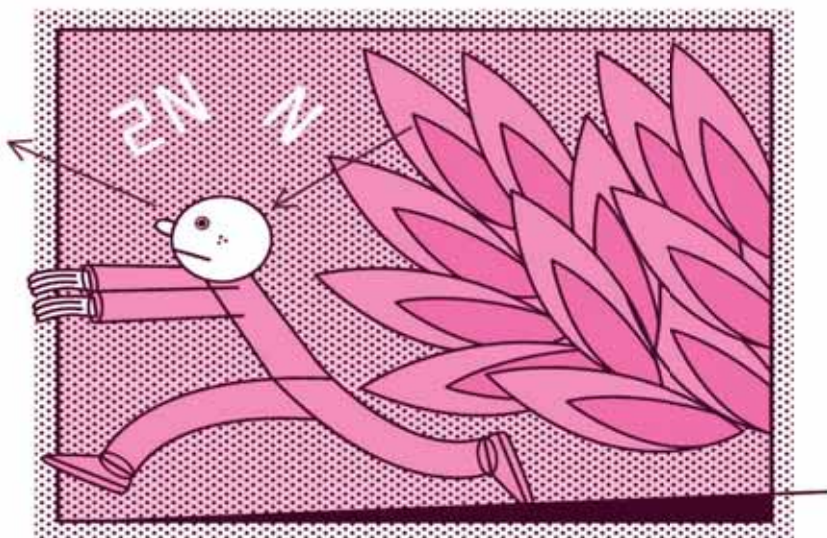
### لطیفه اول

احتمالاً با نام «گیوتین» آشنایی دارید.  
 همان ابزار مخوف اعدام که تیغه برنده آن سر  
 معدوم‌نگون بخت را می‌برد. گفته می‌شود این  
 دستگاه به‌وسیله شخصی به همین نام اختراع  
 شد و در دوران انقلاب فرانسه بسیار مورد  
 استفاده قرار گرفت.

در همان دوران، روزی سه نفر، یک  
 ریاضی‌دان، یک فیزیک‌دان و یک شیمی‌دان  
 را برای اعدام با این وسیله بردند. ابتدا نوبت  
 فیزیک‌دان بود. او سرش را در جای مخصوص  
 گذاشت و جلاد اهرم گیوتین را کشید. تیغه  
 پایین آمد و در یک وجبی سر او ایستاد! جلاد  
 گفت: «این از شانس تو بوده است. پس آزاد  
 هستی و می‌توانی بروی!»

فیزیک‌دان گفت: «شانس در کار نیست.  
 این از نیروی اصطکاک سرچشمه گرفت  
 که باعث توقف تیغه در ریل آن شد» و با  
 خوش‌حالی منتظر سرنوشت دوستانش شد.

بعد نوبت شیمی‌دان شد. او هم سرش را  
 در جای مخصوص گذاشت و جلاد اهرم را  
 کشید و تیغه پایین آمد. اما باز در یک وجبی  
 سر او ایستاد! جلاد گفت: «تو هم شانس



# واریانس

## جملات دنباله حسابی

اشاره

با توجه به فرمول پیچیده واریانس (انحراف معیار) که استفاده از آن برای داده‌های زیاد، مثلاً  $n$  داده، وقت‌گیر و طاقت‌فرساست، اگر حالت خاصی از داده‌ها که از نظم خاصی پیروی کنند (تشکیل دنباله حسابی دهند) را در نظر بگیریم، یک فرمول ساده و جالب برای به‌دست آوردن واریانس وجود دارد که به اثبات آن می‌پردازیم.

هرگاه  $n$  داده آماری داشته باشیم، به طوری که این داده‌ها تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت  $d$  دهند، میانگین و انحراف معیار آن با استفاده از فرمول‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2}, \quad \sigma = d\sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

**اثبات:**  $n$  داده زیر که تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت  $d$  می‌دهند را در نظر می‌گیریم:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d$$

ابتدا مجموع این داده‌ها را با استفاده از دستور محاسبه مجموع جملات دنباله حسابی، به صورت زیر می‌نویسیم.

$$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{n(a + a_n)}{2n} = \frac{(a + a_n)}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{(a + a_n)}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{(2a + (n-1)d)}{2} = a + \frac{(n-1)}{2}d \quad (1)$$

می‌دانیم فرمول واریانس که در کتاب درسی آمار و مدل‌سازی آمده به صورت زیر است و با جاگذاری (1) به جای میانگین داریم:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(x_k - \left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right)\right)^2$$

با توجه به فرمول  $x_k = a + (k-1)d$  داریم:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + (k-1)d - \left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\left(k - \frac{n+1}{2}\right)d\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d^2 \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{n} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{d^2}{n} \sum_{k=1}^n \left[k^2 - 2k \frac{(n+1)}{2} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{d^2}{n} \left[\sum_{k=1}^n k^2 - (n+1) \sum_{k=1}^n k + n \frac{(n+1)^2}{4}\right] \end{aligned}$$

می‌دانیم مجموع مجزورات  $n$  عدد طبیعی متوالی برابر است با:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و مجموع  $n$  عدد طبیعی متوالی برابر است با:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d^2}{n} \left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - (n-1) \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n-1)^2}{4}\right] \\ &= d^2 \left[\frac{(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-1)^2}{4}\right] \\ &= d^2 (n-1) \left[\frac{2n-2-3n+3+n-1}{12}\right] = d^2 (n-1) \frac{(n+1)}{12} \\ &= \frac{d^2 (n^2 - 1)}{12} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{d^2 (n^2 - 1)}{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma = d\sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

**مثال:** میانگین و واریانس داده‌های آماری زیر را

به‌دست آورید:

$$2, 5, 8, \dots, 89$$

**حل:** داده‌های فوق جملات دنباله  $a_n = 3n - 1$  و

$n \leq 30$  هستند. بنابراین به کمک دستور فوق داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{2 + 89}{2} = 45.5$$

$$\sigma = d\sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} = 3\sqrt{\frac{899}{12}}$$



مسلم نادری  
دبیر ریاضی آموزش و پرورش  
استان کرمانشاه منطقه  
ثلاث باباجانی





# گزارشی از مسابقه شهر ریاضی

## شهر مشهد - استان خراسان رضوی

مقدمه

مشکلاتی که در شیوه سنتی تدریس و آزمون‌های مدرسه‌ای وجود دارند، غالباً باعث کاهش انگیزه دانش‌آموزان برای تحصیل و به خصوص علاقه‌مندی آنان به درس ریاضی شده است. وجود مشکلات عدیده مرتبط با آزمون‌های پایان سال‌های تحصیلی و از همه مهم‌تر آزمون ورودی دانشگاه‌ها (کنکور سراسری) و حتی المپیادهای ریاضی باعث انجام مجموعه پژوهش‌هایی شد که در نهایت به تعریف و تدوین مسابقه‌ای به نام «شهر ریاضی» انجامید. در اینجا به معرفی مختصر این مسابقه می‌پردازیم.

دکتر مجید  
میرزاویری  
استاد گروه ریاضی  
محض دانشگاه فردوسی  
مشهد



- تجربه انجام کار تیمی و مدیریتی برای شرکت‌کنندگان.
- هیجان و نشاط در تمام لحظات شرکت در مسابقه.
- امکان شرکت در مسابقه به صورت خانوادگی.
- ایجاد علاقه به ریاضی در دانش‌آموزان متوسط به پایین.
- امکان استفاده از منابع علمی، و کتاب‌ها و سایت‌های اینترنتی در طول مسابقه.

مسابقه شهر ریاضی در دانشگاه استنفورد آمریکا معرفی شد و مورد استقبال استادان آن دانشگاه قرار گرفت.

### مزایا

- امکان یادگیری حل مسائل از دیگر شرکت‌کنندگان در حین مسابقه.
- افزایش تصاعدی امتیاز حل مسائل متناسب با گذشت زمان.

### تاریخچه

این مسابقه از حدود سال ۱۳۸۶ با ایده گرفتن از کتاب «با ذره تا بی‌نهایت مهر» و با عنوان «مسابقه ریاضی‌دانان جوان» در دبیرستان‌های مشهد برگزار شد. پس از چند سال این مسابقه برای مدارس راهنمایی و نیز در شهرهای دیگر استان خراسان رضوی هم به اجرا درآمد. از حدود سال ۱۳۸۸ آن را با عنوان «شهر ریاضی» در سطح کشور برگزار کردند و معروف شد. در سال ۱۳۹۲

## جوایز

در سال‌هایی که مسابقه برگزار شده، جوایز ارزشمندی، از جمله لوح تقدیر از طرف دانشگاه فردوسی مشهد، مدال، هارد دیسک، تبلت، جایزه نقدی (تا سقف ۱۵ میلیون ریال) و... به شرکت‌کنندگان اهدا شده است. علاوه بر آن، برندگان نهایی این مسابقه غالباً در مسابقات کشوری و جهانی درخشیده‌اند و هم‌اکنون در دانشگاه‌های معتبر دنیا مشغول به تحصیل هستند.

## شیوه‌نامه اجرایی

با توجه به توضیحات بخش قبل و ایده‌ای که در کتاب با ذره تا بی‌نهایت مهر آمده بود، طرحی برای مسابقه‌ای ریاضی تهیه گردید که مورد استقبال دانش‌آموزان نیز قرار گرفت.<sup>۲</sup> تجربه برگزاری مسابقه در چهار سال متوالی در مدارس راهنمایی و دبیرستان‌های شهر مشهد و برخی شهرستان‌های استان، و همچنین تجربه برگزاری این مسابقه در سطحی وسیع‌تر در نمایشگاه هفته پژوهش سال ۱۳۹۰ با همکاری مرکز پژوهشی شیوه‌های آموزش ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد، باعث شد تا قوانین این مسابقه به پختگی مطلوب خود برسد و ایرادات آن برطرف شود. آنچه در ادامه می‌آید ملزومات مورد نیاز برای برگزاری مسابقه و قوانین اجرای آن است.



## ۱. وسایل لازم

این مسابقه با حداقل ۲۵ تیم سه‌نفری در فضایی به مساحت حدود ۱۵۰ مترمربع قابل اجراست. فضای مورد نیاز برای مسابقه برای تعداد تیم‌های بیشتر به همین نسبت افزایش خواهد یافت. نیروی اجرایی برای انجام مسابقه، تیمی چهار تا شش‌نفری است که با افزایش تیم‌های شرکت‌کننده به همین میزان افزایش می‌یابد. هیچ‌گونه وسیله‌ای برای انجام مسابقه لازم نیست مگر سه میز کوچک و شش صندلی.

## ۲. قوانین مسابقه

- هر تیم شامل سه نفر است که یکی از افراد به‌عنوان سرپرست تیم به کمیته برگزاری مسابقه معرفی خواهد شد. تیم‌ها می‌توانند یک نام نیز برای خود انتخاب کنند.
- در ابتدای مسابقه از طرف کمیته برگزاری مسابقه ۹۰۰ امتیاز به سرپرست هر تیم داده می‌شود.
- اعضای تیم پنج دقیقه فرصت دارند تا با یکدیگر برای خرید سؤال مشورت کنند. پس از آن سرپرست تیم باید به کمیته برگزاری مسابقه مراجعه کند و سؤال بخرد. سؤال‌ها از سه نوع ساده (۱۰۰ امتیازی)، متوسط (۳۰۰ امتیازی) و سخت (۵۰۰ امتیازی) هستند. در ۴۰ دقیقه اول هیچ تیمی نمی‌تواند بیش از پنج سؤال از یک نوع بخرد.
- تیم‌ها حق ندارند روی برگه‌های سؤال چیزی بنویسند یا آن‌ها را تا کنند.
- در صورتی که سؤال حل شود، سرپرست تیم وظیفه دارد پاسخ را به کمیته برگزاری اعلام کند. البته او می‌تواند شخص دیگری از تیم خود را برای پاسخ دادن معرفی کند. اگر حل سؤال توسط داور درست تشخیص داده شود، دو برابر ارزش سؤال به سرپرست تیم تحویل داده می‌شود.
- در صورتی که تیمی سؤالی را دریافت کند و نتواند آن را حل کند، می‌تواند آن را به کمیته برگزاری یا تیم دیگری بفروشد. قیمت سؤال با توافق طرفین خواهد بود. در هر صورت

مبلغ سؤال فروخته شده باید به اطلاع کمیته برگزاری برسد.

- تیم‌ها می‌توانند حل سؤال را به تیم‌های دیگر بفروشند. قیمت حل سؤال با توافق سرپرست‌ها تعیین می‌شود.
- به دلیل تورم، به ازای هر ۴۰ دقیقه ارزش سؤال‌ها به دو برابر ارزش قبلی آن افزایش خواهد یافت. زمان تغییر ارزش براساس تورم، توسط کمیته برگزارکننده به اطلاع شرکت‌کنندگان خواهد رسید.
- سرپرستان تیم‌ها می‌توانند امتیازهای اضافی خود را به‌طور امانت نزد کمیته برگزاری قرار دهند. در این صورت در ازای هر ۱۰ دقیقه ۱۰ درصد به مبلغ امانت گذاشته شده اضافه خواهد شد. مبلغ امانت گذاشته شده مشمول قانون تورم نمی‌شود.
- سرپرستان تیم‌ها می‌توانند تا دو برابر موجودی نهایی خود وام دریافت کنند. برای بازپرداخت وام به ازای هر ۱۰ دقیقه ۱۰ درصد سود دریافت خواهد شد.
- هیچ تیمی حق ندارد خارج از دلایل فوق امتیازهای خود را به تیم دیگری واگذار کند.
- زمان پایان مسابقه توسط کمیته برگزاری اعلام خواهد شد. پس از آن نه پاسخی پذیرفته می‌شود و نه سؤالی پس‌گرفته می‌شود. بنابراین بعد از اعلام پایان مسابقه، سؤال‌ها و پاسخ‌هایی که نزد تیم‌ها باقی مانده باشند، از بین می‌روند و هیچ‌گونه امتیازی به آن‌ها تعلق نخواهد گرفت.
- استفاده از تلفن همراه در طول مسابقه ممنوع است، اما تیم‌ها می‌توانند از کتاب، جزوه و ماشین حساب استفاده کنند.
- در صورتی که تیمی قوانین مسابقه را رعایت نکند، توسط کمیته برگزاری از مسابقه حذف خواهد شد.
- تیم‌ها می‌توانند اعتراض خود را به نظر داور یا کمیته برگزاری، توسط سرپرست خود به «کمیته ناظر» مسابقه اطلاع دهند. تصمیم‌گیری نهایی در مورد اعتراض با کمیته ناظر است.

روش‌هایی را برای بهبود این تصمیم آزمایش کنند. انجام مسابقات علمی زیر نظر دانشگاه‌ها برای دانش‌آموزان، شاید بهترین ضامن برای صحت این روش‌های بهبودیافته باشد. نتایج برگزاری مسابقه شهر ریاضی نشان می‌دهد که ما به آنچه انجام می‌دهیم، واقفیم و افقی دورتر را در به ثمر رساندن این بازی به ظاهر کودکانه و هیجان‌انگیز مدنظر داریم.

امید است با حمایت مسئولانی که دستی در هدایت کشتی علم دارند و درایت دانش‌آموختگانی که برای به مقصد رسیدن این کشتی دل می‌سوزانند، بتوانیم به نتیجه‌ای مطلوب برسیم که جز این، وظیفه‌ای نزد پروردگار متعال نداریم.

**توجه:** علاقه‌مندان برای دریافت اطلاعات بیشتر درباره این مسابقه و نمونه سؤالات آن و فعالیت‌های دیگر نویسنده به نشانی اینترنتی زیر مراجعه کنند:  
mirzavaziri.ir/arithland/

**\* پی‌نوشت‌ها**  
۱. مجید میرزاویری، انتشارات پارس سینا، چاپ ۱۳۷۸.  
۲. این مسابقه با شکلی مشابه در دانشگاه صنعتی شریف نیز برگزار می‌شود؛ گرچه قوانین برگزاری آن تا حدودی متفاوت است.



آزمون‌های سراسری دارد.

آنچه امروزه در نظام آموزشی کشور در مورد حذف کنکور و آزمون‌های ورودی مشابه مطرح می‌شود، نتیجه بحث‌های کارشناسی در مورد عدم موفقیت این‌گونه آزمون‌هاست و همین موضوع نشان می‌دهد که شیوه موجود برای انتخاب نخبگان و افراد مستعد چندان مقبول طبع صاحب‌نظران قرار نگرفته است. حذف یکباره کنکور و جایگزینی معدل به جای آن، بدون توجه به پیشینه علمی دانش‌آموزان، می‌تواند موجب وارد شدن خسارات دیگری شود و شاید دلیل تعلق در حذف کنکور همین نکته مهم باشد. ما گمان می‌کنیم، آنچه باعث می‌شود که این تصمیم به صورتی کارشناسانه‌تر گرفته شود، آن است که افراد زبده، دانشگاهی، تحصیل کرده و پژوهشگر در زمینه آموزش و سنجش استعداد تحصیلی، از گوشه و کنار وارد کار شوند و در یک بازه زمانی چند ساله،

این مسابقه زیر نظر «مرکز پژوهشی شیوه‌های آموزش ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد» انجام می‌شود و هرگونه کپی‌برداری از آن ممنوع است.

## نتایج برگزاری

دانش‌آموزانی که علاقه چندانی به شرکت در مسابقه‌های علمی از خود نشان نمی‌دادند، از جمله افرادی هستند که در این چند سال پیگیر برگزاری مسابقه‌اند و به دنبال منابعی برای قوی‌تر کردن خود برای شرکت در مسابقه می‌گردند. کسانی که در این مسابقه شرکت می‌کنند، انگیزه بالایی برای مطالعه بیشتر یافته‌اند، در طول مسابقه حل بسیاری از سؤالات ریاضی را یاد می‌گیرند، شیوه‌های یادگیری یک مطلب علمی را با دوستان خود تجربه می‌کنند و با مطالب ریاضی استدلالی از نوعی که بیشتر در دوره‌های دانشگاهی آموزش داده می‌شوند، آشنا می‌شوند. آن‌ها تجربه حضور در محیط‌های دانشگاهی را پیدا می‌کنند و رغبت بیشتری برای آماده‌سازی خود به منظور ورود به دانشگاه‌های رده بالاتر نشان می‌دهند.

از سوی دیگر، کسانی که در این مسابقه رتبه‌های خوبی را کسب می‌کنند، معمولاً همان افرادی هستند که در مسابقه‌های استandar دی که در سطح کشوری نیز برگزار می‌شوند، رتبه‌های خوبی به دست می‌آورند. این نشان می‌دهد که مسابقه جدا از ایجاد هیجان و انگیزه، در یادگیری ریاضی به شکلی قابل قبول می‌تواند دانش‌آموزان توانمند را بیابد. این موضوع البته از اهداف مسابقه نبوده است، اما خوش‌حالی که الگوهای ما در این مسابقه بر آنچه در معیارهای عمومی آزمون‌های سنجش استعداد تحصیلی مورد توجه است، منطبق شده و نزدیکی قابل‌قبولی با نتایج

## پرسش‌های پیکار جو!

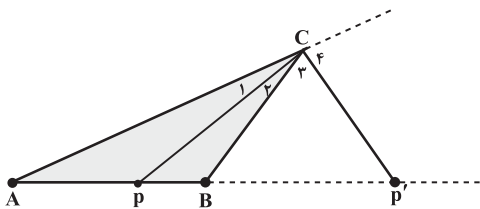


اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $p(x)$  بر  $(x-1)^3$  برابر  $x^2+x+1$  باشد، باقی‌مانده تقسیم  $p(x)$  بر  $(x-1)^2$  کدام است؟

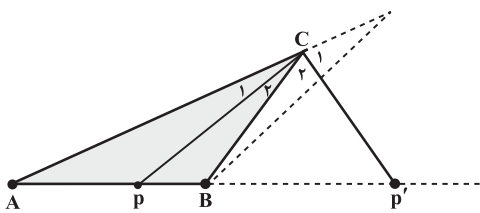
(الف)  $3x$  (ب)  $3x-1$  (ج)  $3x+1$  (د)  $3x-2$  (ه)  $3x+2$

# عکس قضیه نیمساز و معرفی یک مکان هندسی

$$\frac{PA}{PB} = \frac{P'A}{P'B} = \frac{CA}{CB} = k \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C}_P \\ \hat{C}_3 = \hat{C}_F \end{cases}$$



**برهان:** از نقطه B خطی موازی CP رسم می‌کنیم تا امتداد AC را قطع کند. با استفاده از قضیه خطوط موازی و فرض خواهیم داشت:  $\hat{C}_1 = \hat{C}_P$ . بار دیگر از نقطه B خطی موازی CP' رسم می‌کنیم تا ضلع AC را قطع کند. به کمک قضیه خطوط موازی و فرض:  $\hat{C}_3 = \hat{C}_F$ .



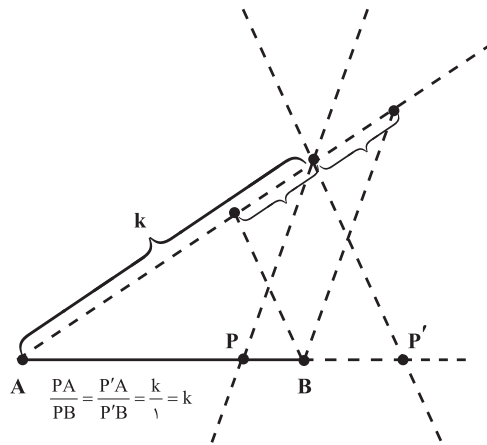
بنابراین نقطه‌ای مانند C جواب دیگر مسئله است که روی خط AB نیست و با دو نقطه A و B یک مثلث می‌سازد. همچنین P و P' پای نیمسازهای داخلی و خارجی متناظر آن هستند. از آنجا که نیمساز داخلی و خارجی متناظر یک زاویه برهم‌عمودند، پاره خط PP' از نقطه C همواره به زاویه ۹۰ درجه دیده می‌شود و

**مسئله:** مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که نسبت فاصله این نقاط از دو نقطه مفروض A و B: الف) برابر عدد معین ( $k \neq 1$  باشد) ب) برابر یک باشد.

**حل الف:**

**نکته ۱:** روی پاره خط مفروض AB یک نقطه و در امتداد آن نیز تنها یک نقطه وجود دارد که نسبت فواصل آن‌ها به ترتیب از A و B به اندازه معین  $k \neq 1$  است.

بنابراین نقاط منحصر به فرد P و P' دو جواب از جواب‌های مسئله هستند که روی خط AB قرار دارند.



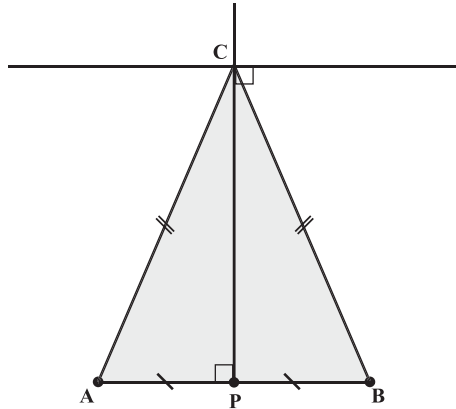
**نکته ۲ (عکس قضایای نیمساز داخلی و**

**خارجی):** اگر در مثلث ABC نقطه‌هایی مانند P و P' روی ضلع AB و امتداد آن، قطعات متناسب با اندازه اضلاع زاویه C به وجود آورند، P پای نیمساز زاویه داخلی C و P' پای نیمساز زاویه خارجی C است.

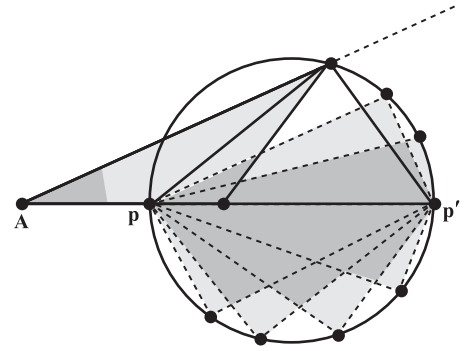


سیمین افروزان  
دبیر ریاضی منطقه ۲ تهران

اگر به قسمت ب به عنوان حالت خاصی از الف نگاه کنیم، نقطه C رأس مثلث متساوی الساقینی است که P پای نیم‌ساز داخلی زاویه C وسط ضلع AB قرار دارد و نیم‌ساز خارجی متناظر C موازی AB است.



در نتیجه نقطه C روی دایره‌ای به قطر PP' قرار دارد (کمان درخور زاویه ۹۰ درجه وابسته به پاره خط PP'). این دایره موسوم به دایره آپولونیوس<sup>۱</sup> است. دایره آپولونیوس مکان هندسی موردنظر مسئله است.



**حل ب:**

تنها یک نقطه روی خط AB مانند P در وسط پاره خط AB وجود دارد، به طوری که:  $\frac{PA}{PB} = 1$ . نقاط دیگری مانند C که روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارند نیز جواب‌های دیگر مسئله هستند.

$$\frac{CA}{CB} = 1 \Rightarrow CA = CB$$

پس عمودمنصف AB مکان هندسی موردنظر است.

\* بی‌نوشت‌ها

1. Apollonius

\* منبع

اسمارت، جیمز. ار. (۱۳۷۶). هندسه‌های جدید. ترجمه غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.

## پرسش‌های پیکار جو!



در یک گروه ۱۳۹۵ نفری، در هر دسته ۴ نفری دلخواه، لااقل یک نفر هست که سه نفر دیگر را می‌شناسد. حداقل چند نفر در این گروه وجود دارند که همه دیگران را می‌شناسند؟ (رابطه شناسایی دوطرفه است.)

الف) هیچ (ب) ۳ نفر (ج) ۱۳۹۲ نفر  
د) ۱۳۹۳ نفر (ه) ۱۳۹۴ نفر



آیا می‌دانستید که:  
 $\frac{5}{4}$  مردم دنیا با کسرهای  
متعارفی آشنایی ندارند؟!

# راهنمای حالت مسائل

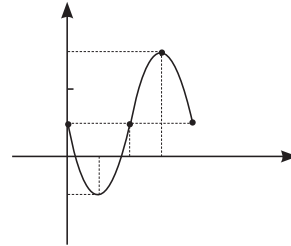
## آمادگی برای آزمون‌های مستمر

۲

ریاضی

$$T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3 \quad .1$$

x	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{9}{4}$	2
y	1	-1	1	3	1
		min		max	



۲. در شش ضلعی منتظم روبه‌رو، شش قطر کوچک (AE, AC, ..., BF) و سه قطر بزرگ (AD, BF, CE) با هم برابرند. (چرا؟) بنابراین باید نسبت یکی از قطرهای بزرگ (مثلاً AD) را به یکی از قطرهای کوچک (مثلاً BF) بدست آوریم:

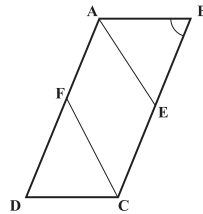
$$\begin{aligned} \Delta ABF: \hat{A} = 120^\circ, AB = AF = a \\ \Rightarrow BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2AB \cdot AF \cdot \cos \hat{A} \\ = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow BF = \sqrt{3}a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{ABD} = 90^\circ \\ \Rightarrow AD^2 = AB^2 + BD^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \\ \Rightarrow AD = 2a \Rightarrow \frac{AD}{BF} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

۳. اگر حصارها را AE و CF بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} \hat{B} = 60^\circ, AB = 100, AE = EC = CF = AF = x, \\ BE = 300 - x \\ \Delta ABE: AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE \cdot \cos 60^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 = 100^2 + (300 - x)^2 - 2(100)(300 - x) \times \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x^2 = 10000 + 90000 - 600x - 30000 + 100x \\ \Rightarrow 50 \cdot x = 70000 \Rightarrow x = 1400 \end{aligned}$$



یعنی باید طول ضلع لوزی (طول حصار) ۱۴۰ متر باشد. برای یافتن مساحت باغچه می‌توان مساحت دو مثلث ABE و DFC را (که با هم برابرند) از مساحت متوازی‌الاضلاع کم کرد.

$$\begin{aligned} S_{ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times 100 \times 140 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3500\sqrt{3} \\ (\text{ارتفاع متوازی‌الاضلاع}) h = AD \cdot \sin \hat{D} = 300 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3} \\ \Rightarrow S_{ABCD} = h \times DC = 15000\sqrt{3} \\ \Rightarrow S_{AEFC} = 15000\sqrt{3} - 2(3500\sqrt{3}) = 8000\sqrt{3} \end{aligned}$$

۱

هندسه

۱. اگر ابعاد مکعب مستطیل b و a و c باشند، طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} = r, \sqrt{a^2 + c^2} = 2\sqrt{2}, \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{6} \\ \Rightarrow a^2 + b^2 = 4, a^2 + c^2 = 8, b^2 + c^2 = 6 \end{aligned}$$

و با جمع زدن طرفین این سه تساوی خواهیم داشت:  
 $2(a^2 + b^2 + c^2) = 18 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 9$   
 $\Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3$

$$\begin{aligned} 2. \quad h = 10, S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 112\pi \Rightarrow r^2 + 10r = 56 \\ r^2 + 10r - 56 = 0 \Rightarrow (r+14)(r-4) = 0 \Rightarrow r = 4 \\ V = \pi r^2 h = \pi \times 16 \times 10 = 160\pi \end{aligned}$$

۳. مساحت قاعده از دستور  $S = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$  مساوی  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  بدست می‌آید. برای پیدا کردن ارتفاع هرم توجه می‌کنیم که پای ارتفاع، مرکز شش ضلعی است (نقطه H) و AH نصف قطر بزرگ شش ضلعی است که مساوی 2a است (به حل مسئله ۲ از بخش ریاضی ۲ همین شماره توجه کنید). بنابراین: AH=a=1  
قضیه فیثاغورس در مثلث OAH داریم:

$$\begin{aligned} OH^2 = OA^2 - AH^2 = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1 \Rightarrow OH = 1 \\ V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

۲

هندسه

$$\begin{aligned} T(x, y) = (-2x, y+1) = (X, Y) \\ \Rightarrow x = -\frac{X}{2}, y = Y-1, y = 2x+1 \\ \Rightarrow Y-1 = 2(-\frac{X}{2})+1 \Rightarrow L': Y = -X+2 \end{aligned} \quad .1$$

۲. هر بردار که مبدأ آن روی  $L_1$  و انتهای آن روی  $L_2$  باشد، می‌تواند بردار این انتقال باشد. بنابراین سه جفت نقطه دلخواه روی  $L_1$  و  $L_2$  در نظر می‌گیریم و برداری را که هر دو نقطه را بهم وصل می‌کند، می‌کشیم و انتقال نظیر آن را می‌نویسیم. برای مثال،  $A(0, -3)$  روی  $L_1$  و  $B(4, 0)$  روی  $L_2$  →  
 $\vec{AB} = (4, 3) \Rightarrow T_1(x, y) = (x+4, y+3)$   
دو انتقال دیگر را به همین روش بنویسید.

۳. دو نقطه دلخواه A و B، مثلاً  $A(0, 0)$  و  $B(1, 0)$  را در نظر می‌گیریم:

$$AB=1 \text{ و } T(A) = A'(0, 0) \text{ و } T(B) = B'(\frac{a}{\delta}, -\frac{4}{\delta})$$

$$\begin{aligned} A'B' = \sqrt{\frac{a^2}{\delta^2} + \frac{16}{\delta^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + 16}{\delta^2}} = 1 \\ \Rightarrow a^2 + 16 = \delta^2 \Rightarrow a = \pm \delta \end{aligned}$$

حسابان

۱. با فرض  $\alpha = \sin^{-1}(\frac{3}{5}) = \alpha$  نتیجه می‌شود:  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  و ما مقدار  $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$  را می‌خواهیم:

$$\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2 \tan \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

با توجه به اتحاد  $1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow 3 \tan^2 \frac{\alpha}{2} - 10 \tan \frac{\alpha}{2} + 3 = 0 \\ \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = 3 \text{ یا } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

اما با توجه به اینکه:  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ،  $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$  در نتیجه:  $\tan \frac{\alpha}{2} < 1$  و لذا پاسخ  $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$  غیرقابل قبول است. بنابراین:

$$\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{k(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x^2+x-2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{k(x-1)(\sqrt{x^2+x+2})}{(x^2+x-2)(\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{k(x-1)(\sqrt{x^2+x+2})}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{k(\sqrt{x^2+x+2})}{(x+1)(\sqrt{x+1})} = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k[2x]+2x}{k+[x]} = \frac{k+2}{k}$$

## انترچیکل شتر

نحوه اشتراک:

پس از واريز مبلغ اشتراك به شماره حساب ۴۹۶۲۱۲۰۰ بانک تجارت، شعبه شماره آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر، مشترک جکله شوید:

- ۱- مراجعه به وبگاه مجلات رفاه به نشانی: [www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir) و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات قبضه واريزی؛
- ۲- ارسال اصل قبضه پانکی به همراه برگ اشتراک شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۹۲۰۷۲۳۳۳۱۹۲. لطفاً قبضه را نزد خود نگه دارید.

عنوان مجلات درخواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان:

شهرستان:

شماره پستی:

پلاک:

شماره قبضه بانکی:

مبلغ پرداختی:

اگر قبلاً مشترک مجله رفاه بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

امضا:

نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۶۵۹۵۱۱۱  
تلفن: امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۳۳۱۱۰ و ۷۷۳۳۳۱۱۰۳

☛ هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رفاه (هفت شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال  
☛ هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رفاه (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

و برای آنکه  $f$  در  $x=1$  حد داشته باشد، لازم است که حد راست و حد چپ آن در این نقطه با هم برابر باشند:

$$\frac{k+\sqrt{k}}{k} = k \Rightarrow k^2 - k - \sqrt{k} = 0$$

$$\Rightarrow (k-\sqrt{k})(k+\sqrt{k}) = 0 \Rightarrow k = \sqrt{k} \text{ یا } k = -\sqrt{k}$$

۳.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin^2 x - 6 \sin x}{\sqrt{2} \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} \sin^2 x - 6 \sin x)}{\sqrt{2} \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6 \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin^2 x (\cos^2 x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6 \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin^2 x (-2 \sin^2 x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6}{-2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

## حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. مشتق تابع را در این نقطه به دست می‌آوریم:

$$y = \tan^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$y = \tan^{-1}(e^{2x}) \Rightarrow y' = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$$

$$x = \ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \ln x$$

$$\Rightarrow e^{2x} = e^{\frac{2}{3} \ln x} = (e^{\ln x})^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$e^{4x} = e^{\frac{4}{3} \ln x} = x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow y'(x) = \frac{2\sqrt[3]{x}}{1+x^{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$f(x) = f(\ln \sqrt[3]{x}) = \tan^{-1}(e^{\frac{1}{3} \ln x}) = \tan^{-1} \sqrt[3]{x} = \frac{\pi}{3}$$

$$y - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{1}{3}}}(x - \ln \sqrt[3]{x})$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{1}{3}}} x - \frac{\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{1}{3}}} \ln x + \frac{\pi}{3}$$

۲.  $f'(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2} \sin x \cos x - a \sin x = 0$

$$\Rightarrow \sin^2 x = a \sin x \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} = a \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = 0$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} + a \cos \frac{\pi}{4} + b = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۳. طول قایق:  $AB=L$

$$L=OA+OB$$

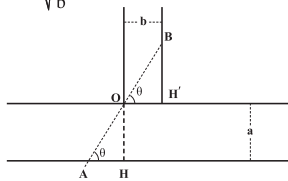
$$\sin \theta = \frac{OH}{OA} = \frac{a}{OA} \Rightarrow OA = \frac{a}{\sin \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{OH'}{OB} = \frac{b}{OB} \Rightarrow OB = \frac{b}{\cos \theta}$$

$$L = \frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta} \Rightarrow L' = \frac{-a \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{b \sin \theta}{\cos^2 \theta} = 0$$

$$\Rightarrow a \cos^3 \theta = b \sin^3 \theta \Rightarrow \tan^3 \theta = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$



با داشتن مقدار  $\tan \theta$ ، مقادیر  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  و از آنجا مقدار ماکزیمی  $L$  را به دست آورید.

## سوالات جبر و احتمال

۱. فضای نمونه‌ای برای این آزمایش تصادفی  $2 \times 2 = 4$  عضو دارد و تعداد اعضای پیشامد مطلوب (حداقل یک بار پشت) ۳ حالت است.

۲. الف)  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  که  $n(S) = 45$  و  $n(A) = 10$

ب) در این قسمت، چون ۲ مهره به تصادف برمی‌داریم،

$$\text{پس } n(S) = \binom{45}{2} \text{ و } n(A) = \binom{10}{1} \times \binom{35}{1} \text{ است.}$$

۳. هر بار که تاس ریخته شود، احتمال اینکه فرد باشد  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  است. لذا با توجه به این که آزمایش مورد نظر ۱۵ بار تکرار شده

و در هر بار احتمال فرد آمدن  $\frac{1}{2}$  است، برای یافتن احتمال اینکه ۶ بار فرد بیاید، از احتمال دو جمله‌ای استفاده کنید.

## ریاضیات گسسته

۱. ابتدا از گل نوع دوم ۲ شاخه و از گل نوع سوم سه شاخه برمی‌داریم. گل نوع سوم را کنار می‌گذاریم.  $7-5=2$  و سپس ۷ گل باقی‌مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم. تعداد این انتخابها  $\binom{10}{3}$  است.

۲. با شرایط داده شده در مسئله، فقط  $x_1, x_2, x_3$  سه جواب به این صورت برای معادله حاصل می‌شود:

$x_1$	$x_2$	$x_3$
۲	۴	۲
۲	۵	۱
۳	۴	۱

۳. وقتی سه تاس ریخته می‌شود،  $16 = 2^4 = 6^2 = n(S)$  است و برای محاسبه تعداد حالت‌هایی که مجموع اعداد سه تاس کمتر از ۱۶ است، از متمم این پیشامد، یعنی اینکه مجموع اعداد سه تاس بزرگ‌تر یا مساوی ۱۶ باشد، استفاده می‌کنیم. حالت‌های زیر برای متمم به دست می‌آیند:  $(6, 6, 6), (6, 6, 5), (6, 5, 6), (5, 6, 6), (6, 4, 6), (6, 4, 6), (4, 6, 6), (5, 5, 6), (5, 6, 5), (6, 5, 5)$

## ریاضیات ۳ (علوم تجربی)

۱. اگر فرض کنیم  $P(x) = x^2 + 2ax^2 - bx + 4$  طبق فرض باید  $P(1) = 0$  و  $P(-1) = 12$  یعنی باید  $2a - b = 5$  و  $2a + b = 9$  که از آنجا  $a = 1$  و  $b = 7$  به دست می‌آید.

۲. الف) از  $x^2$  در صورت و در مخرج فاکتور می‌گیریم و  $x$  را به سمت  $+\infty$  میل می‌دهیم. حاصل حد ۳ به دست می‌آید.

ب) صورت و مخرج را ابتدا در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شود. سپس  $(x-2)$  را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم و در نهایت  $x$  را به سمت ۲ میل می‌دهیم. در نهایت به عدد ۳۲ می‌رسیم.

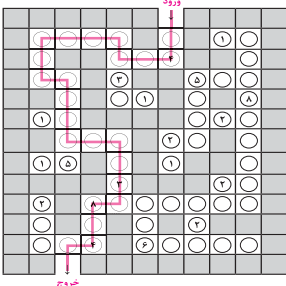
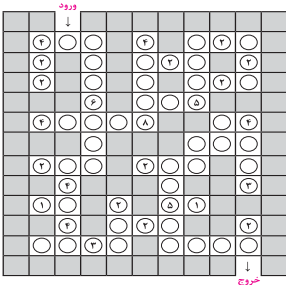
۳. چون  $f(-2) = 6$ ، پس باید  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 6$  و

$$b = -\frac{4}{3} \text{ که در این صورت } a = 1 \text{ و به دست می‌آید.}$$



## پاسخ معمای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

### ایستگاه اول



### ایستگاه دوم

الف) جواب: ۱۷. برای رسیدن به عدد هر خانه، کافی است خط راستی را که از آن خارج شده است، امتداد دهیم تا دایره را در نقطه دوم برخورد، قطع کند. سپس در امتداد حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره حرکت کنیم و عددهای دو خانه اول را با هم جمع کنیم. (ب) جواب: ۵۵. در واقع عدد هر خانه معرف مختصات آن خانه است! (رقم دهگان شمار در دایره و رقم یکان شماره ستون را مشخص می‌کند.) (ج) جواب: صفر. به الگوی زیر توجه کنید:  
 $9 \times 8 = 72$  و  $72 \times 8 = 576$  و  $576 \times 8 = 4608$



## پاسخ پرسش‌های پیکار جو!

$$\left(\frac{S_{MA,C}}{S_{ABC}}\right)^2 = \left(\frac{MC_1}{BC}\right)^2, \left(\frac{S_{MA,B}}{S_{ABC}}\right)^2 = \left(\frac{MB_1}{BC}\right)^2,$$

$$\left(\frac{S_{MB,C}}{S_{ABC}}\right)^2 = \left(\frac{B_1C_1}{BC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_{MA,C}}}{\sqrt{S_{ABC}}} + \frac{\sqrt{S_{MA,B}}}{\sqrt{S_{ABC}}} + \frac{\sqrt{S_{MB,C}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{MC_1 + MB_1 + B_1C_1}{BC} = \frac{C_1C + B_1B + B_1C_1}{BC}$$

$$= \frac{BC}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{S}} + \frac{2}{\sqrt{S}} = 1 \Rightarrow \sqrt{S} = 3 + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S = (3 + \sqrt{3})^2 = 12 + 6\sqrt{3} = 6(2 + \sqrt{3}) \quad (\text{گزینه ج})$$

۴. با توجه به فرض مسئله داریم:  
 $p(x) = (x-1)^2 Q(x) + (x^2 + x + 1)$   
 $= (x-1)^2 R(x) + ax + b$

اگر در اتحاد بالا به جای  $x$ ،  $1$  قرار دهیم، نتیجه می‌شود:  
 $a + b = 3$   
 و اگر از طرفین آن مشتق بگیریم و دوباره به جای  $x$ ،  $1$  قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$2(x-1)Q(x) + (x-1)Q'(x) + 2x + 1 = 2(x-1)R(x) + (x-1)R'(x) + a, x + 1$$

$$\Rightarrow a = 3, b = 0$$

و باقی‌مانده تقسیم مساوی  $3x$  خواهد شد (گزینه الف).

۵. فرض کنیم دو نفر مانند  $P_1$  و  $P_2$  در این گروه باشند که یکدیگر را نشناسند. حال دو نفر دلخواه دیگر مانند  $P_3$  و  $P_4$  را انتخاب می‌کنیم. باید این دو نفر یکدیگر را بشناسند (زیرا در غیر این صورت فرض مسئله نقض می‌شود)، اما ممکن است یکی از این دو نفر (مثلاً  $P_3$ ) نه  $P_1$  را بشناسد و نه  $P_2$  را. یعنی  $P_3$  است که هر سه نفر دیگر را می‌شناسد. پس در بدترین حالت  $P_1, P_2$  و  $P_3$  دو به دو یکدیگر را نمی‌شناسند، ولی هر فرد دلخواه  $P_4$  سه آن‌ها را می‌شناسد. بنابراین، تمام افراد گروه همدیگر و این سه نفر را می‌شناسند. لذا در بدترین حالت فقط سه نفر هستند که بقیه را نمی‌شناسند و  $1292$  نفر هستند که همه دیگران را می‌شناسند (گزینه ج).

۱. روشن است که  $p \neq 2$  و در نتیجه  $p$  عددی فرد است. اما همچنین داریم:  $2p \equiv (-1)^p = -1 \pmod{3}$ . حال اگر  $p$  مضرب ۳ نباشد، داریم:  $2p \equiv 1 \pmod{3}$  و در نتیجه:  $p \equiv 2 \pmod{3}$  و  $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$  و  $q = p^2 + 2p = 3$  و  $q = 3$  است. پس  $q = 3$  و در نتیجه  $p = 1$  که غیر قابل قبول است. پس باید  $p$  مضرب ۳ باشد و در نتیجه  $p = 3$ . از آنجا داریم:  $q = 17$  که تنها جواب قابل قبول است (گزینه ب).

۲. با قرار دادن  $n = 2, 3, 4, \dots$  در رابطه فوق خواهیم داشت:

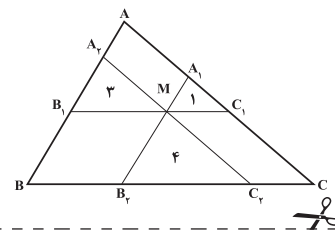
$$n = 2: a_1 a_1 + 1 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{2a_1 - 1}{1} = \frac{3}{2}$$

$$n = 3: a_1 a_2 + 1 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{2a_2 - 1}{a_1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 4: a_1 a_3 + 1 = 2a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{2a_3 - 1}{a_1 a_2} = \frac{5}{4}$$

و به کمک قضیه استقرای ریاضی می‌توانید ثابت کنید:  
 $a_n = \frac{n+1}{n}$  (انجام دهید!) و در نتیجه:  
 $a_{1395} = \frac{1396}{1395}$  (گزینه د).

۳. واضح است که سه مثلث فوق با مثلث اصلی (ABC) متشابه‌اند. بنابراین نسبت مساحت هر یک از آن‌ها به مساحت مثلث اصلی، توان دوم نسبت تشابه آن‌هاست:



## با مجله‌های رشد آشنا شوید

به صورت ماهنامه و نه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

**رشد کو دک**  
 برای دانش آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی

**رشد نوجوان**  
 برای دانش آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

**رشد دانش آموزان متوسط**  
 برای دانش آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

بصورت ماهنامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

**رشد نوجوان**  
 برای دانش آموزان دوره آموزش متوسط اول

**رشد پسران**  
 برای دانش آموزان دوره آموزش متوسط اول

**رشد زنان**  
 برای دانش آموزان دوره آموزش متوسط دوم

**رشد پسران**  
 برای دانش آموزان دوره آموزش متوسط دوم

به صورت ماهنامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

**مجله‌های بزرگسال عمومی**  
 رشد آموزش ابتدایی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا، رشد معلم

به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

**مجله‌های بزرگسال تخصصی:**  
 رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش هنر، رشد آموزش مشاوره مدرسه، رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش جغرافیا، رشد آموزش زبان‌های خارجی، رشد آموزش ریاضی، رشد آموزش فیزیک، رشد آموزش شیمی، رشد آموزش زیست‌شناسی، رشد مدیریت مدرسه، رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار دانش، رشد آموزش پیش‌دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و... تهیه و منتشر می‌شود.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶.

◆ تلفن و نمابر: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۷۸

◆ وبگاه: www.roshdmag.ir