برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

ISSN: 1735-4951

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

- دورهٔ بیست‌وپنجم
- شمارهٔ ۹۱
- بهمن ۱۳۹۴
- ۴۸ صفحه
- ۱۰۰۰۰ ریال

سالگرد دهه فجر
انقلاب اسلامی
۲۲ بهمن
مبارک باد

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۰۶

موسی نثری همدانی

(۱۲۶۰–۱۳۳۲)

ریاضی‌دانان معاصر ایران

موسی دستجردی، فرزند ملاعبدالله معروف به موسی نثری در سال ۱۲۶۰ شمسی در روستای دستجرد کبودرآهنگ همدان متولد شد. تحصیلات مقدماتی را نزد پدرش آموخت و در جوانی به همدان آمد. وی ضمن اشتغال به معلمی، به تحصیل علوم ریاضی، فلسفه، منطق و عرفان پرداخت و در این علوم به کمال رسید. نثری که چندین سال ریاست «دبیرستان نصرت» را در همدان به عهده داشت، بعدها به ریاست فرهنگ کرمانشاه، کردستان، همدان و قزوین منصوب شد و مدارس زیادی را در این مناطق تأسیس کرد. وی سپس به تهران رفت و بازرس عالی وزارت فرهنگ شد.

موسی نثری علاوه بر ریاضیات در ادبیات و تاریخ نیز تبحر فراوانی داشت. روزگاری مدیر «روزنامهٔ اتحاد» بود و مقالات متعدد سیاسی و اجتماعی را در این روزنامه به چاپ رساند. همچنین چند سال قبل از شروع سده ۱۳۰۰، یعنی در سال ۱۲۹۷ رمانی تاریخی با عنوان «عشق و سلطنت» نوشت و منتشر کرد که داستانی تاریخی و مستند از زندگی کورش، مؤسس سلسلهٔ هخامنشی بود و شاید بتوان آن را از نخستین رمان‌های زبان فارسی دانست. وی همچنین در سال ۱۳۲۴ ترجمه‌ای از «قرآن مجید» را به زبان فارسی روان آغاز کرد که بخش‌هایی از آن منتشر شد و در سال ۱۳۲۶ به نثر درآوردن «مثنوی» مولوی را آغاز کرد که در اواخر عمر شریفش آن را در شش مجلد به پایان رساند.

کارهای او در ریاضیات در زمان خودش کم‌نظیر بوده‌اند. از جملهٔ آن‌هاست کتاب «قوانین نثری در حل معادلات درجهٔ سوم» که در سال ۱۳۱۱ به چاپ رسید و گویا برای آکادمی علوم فرانسه نیز ارسال شده بود. «قواعد نثری در جبر و مثلثات» نام کتاب دیگر اوست. همچنین اختراعاتی هم داشت که از آن جمله می‌توان به ساخت ساعت آفتابی و نصب آن در مسجد جامع همدان و اختراع نوعی بیضی‌نگار در فروردین ۱۳۳۱ شمسی اشاره کرد.

این استاد فرزانه در دوم شهریورماه ۱۳۳۲ در سن ۷۲ سالگی بدرود حیات گفت و در ابن‌بابویه شهرری آرام گرفت. زنده‌یاد موسی نثری معدود غزلیاتی هم داشت که با یکی از آن‌ها این بخش را با درود به روان پاکش به پایان می‌بریم:

معلم بوده‌ام عمری، ولی در مکتب عشق — کنون کمتر ز اطفال دبستان نیستم، هستم

آنکه استادی دانشکده‌ها عارش بود — شادمان است که شاگرد دبستان تو شد

دانش‌آموز دبستان غم عشق توام — گرچه در مجمع دانشکده‌ها استادم

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد

برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وپنجم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۹۱
■ بهمن ۱۳۹۴
■ شمارهٔ ۵
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۰۰۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی،
دکتر ابراهیم ریحانی،
احمد قندهاری،
میرشهرام صدر،
هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی‌پور،
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی،
محمدعلی قربانی،
حسین کریمی،
محمود داورزنی،
احسان یارمحمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفترمجله:
roshdmag:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶

شمارگان:
۱۲۰۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نـگارش مقاله‌هـای کمـک درسـی (شـرح و بسـط و رفع مشـکلات مباحـث کتاب‌هـای ریاضـی دورهٔ متوسـطه ۲) ○ طرح مسـائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسـائل مسـابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طـرح معماهـای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومـی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّـه در حـک، اصـلاح، حـذف و اضافـهٔ مقاله‌هـا آزاد اسـت. ● مقاله‌هـای دریافتی، بـایـد خوانا و تا حـدّ امکان، کوتاه باشـد. ● مقاله‌های رسـیده، مسـترد نمی‌شـود. ● اسـتفاده از مطالـب مجلّه در کتاب‌ها یـا مجله‌های دیگر، بـا ذکر دقیق مأخـذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسـال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسـال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشـانی پسـتی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:

شـما می‌توانید قصه‌ها، شـعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷ـ۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱ـ۸۸۳۰۵۷۷۲

تجزیه و تحلیل و عملکرد خوب

در آستانهٔ آغاز نیم‌سال دوم هستیم. همیشه نیم‌سال دوم در هر سال تحصیلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. شما در این نیم‌سال که در نهایت به امتحانات پایان سال منتهی خواهد شد، با تجربه‌ای که کسب کرده‌اید و با توجه به شناختی که از خودتان و درس‌هایتان پیدا کرده‌اید، خیلی بهتر و شفاف‌تر می‌توانید به حرکت و راه خود ادامه دهید.

وقتی امتحانات مستمر برگزار می‌شدند، برای آزمون پایان نیم‌سال آماده می‌شدید و زمانی که در آزمون پایان نیم‌سال اول شرکت کردید، در هر درس و پس از اعلام نتیجه، به نقاط قوت و ضعف خود پی برده‌اید و الآن می‌دانید در کدام درس و کدام مبحث وضعیت خوبی دارید و در چه مباحثی نیاز دارید که مطالعه و تمرکز بیشتری داشته باشید.

توجه دارید که نیم‌سال دوم مشابه نیمهٔ دوم بازی فوتبال است که مربیان با توجه به بازی بازیکنان در نیمهٔ اول و شناختی که از تیم حریف به‌دست آورده‌اند، برای بازی در نیمهٔ دوم راهبرد دقیق‌تر و شفاف‌تری را تعریف می‌کنند. شما در وضعیتی قرار گرفته‌اید که به وضوح می‌دانید در کدام مبحث از ریاضی عملکرد خوبی داشته‌اید و دلیل این عملکرد خوب را نیز می‌دانید و به راحتی می‌توانید این دلایل و موفقیت‌ها را به مباحث و درس‌های دیگر تعمیم دهید. کافی است با دقت بیشتری به نتایج امتحانات خود نگاه کنید و روش مطالعه و حضور در کلاس را برای هر درس در نیم‌سال اول تجزیه و تحلیل کنید!

مؤید و پیروز باشید
سردبیر

آموزشی

سیمین افروزان، دبیر ریاضی شهر تهران

مشتق‌گیری ضمنی از روابطی که تابع نیستند

مقدمه

مقدمهٔ ورود به حساب دیفرانسیل و انتگرال، تابع‌ها هستند که در کتاب حسابان به آن‌ها پرداخته شده است. شناسایی تابع‌ها مبحث مهمی در این کتاب اسـت و در این زمینه سـؤالات و تسـت‌های متنوعی طراحی شده‌اند. در کتاب‌های «حسابان» و «حساب دیفرانسیل و انتگرال»، روند کار برای رسیدن به یکی از اهداف درس چنین است: شناخت تابع‌ها، به دست آوردن حد تابع‌ها، محاسبهٔ مشتق آن‌ها به عنوان نوع خاصی از حد و کاربرد مشتق در مسائل بهینه‌سازی تابع‌هایی که در مسائل مختلف اقتصاد، فیزیک، هندسه و غیره مطرح می‌شوند. بنابراین شناخت تابع‌های حقیقی یک متغیره که موضوع مباحث مذکور هستند، از اهمیت بسیاری برخوردار است. در کتاب حسـاب دیفرانسـیل و انتگرال روابطی در مبحث مشـتق‌گیری ضمنی مطرح شـده‌اند که هیچ کدام تابع نیستند. این درس سؤالات و ابهامات بسیاری را در ذهن خواننده ایجاد می‌کند. چه‌طور از روابطی که تابع نیستند، مشتق می‌گیریم؟ برخی از این‌گونه روابط مانند دایره را نمی‌توان حتی در قسـمتی از دامنه‌شـان تابع در نظر گرفت. آیا همان‌طور که در کتاب دیفرانسیل ذکر شده است، می‌توانیم همواره در معادله داده شده y را به طور ضمنی تابع مشتق‌پذیری از x فرض کنیم و در هر نقطهٔ دلخواه مشتق بگیریم؟ چرا بحث مشتق‌گیری ضمنی که نتیجهٔ قاعدهٔ زنجیره‌ای است و تنها به این‌گونه رابطه‌ها اختصاص ندارد، در این مبحث مطرح شده است؟ چگونه و با چه مجوزی می‌توان از این رابطه‌ها مشتق گرفت؟

قاعدهٔ زنجیره‌ای و مشتق تابع‌های ضمنی

معادلهٔ یک تابع حقیقی به شکل $y=f(x)$ در صفحهٔ xy، معادله‌ای است که به‌طور صریح رابطهٔ y را بر حسب متغیرش (x) بیان می‌کند. این معادله را می‌توان به شکل ضمنـــی $F(x,f(x))=F(x,y)=y-f(x)=۰$ نیـــز بیان کرد. همچنین تابع‌هایی وجود دارند که نمی‌توان و یا به سختی می‌توان آن‌ها را به‌طور صریح برحسب متغیر بیان کرد.

برای به‌دسـت آوردن مشـتق توابعی کـه به‌صورت ضمنی $F(x,y)=۰$ بیان می‌شـود، باید از طرفین تساوی مشتق بگیریم و برای مشتق ترکیبات y، چون y تابعی از x است، از قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده کنیم.

$$(y^n)' = ny^{n-۱}y', (\sin y)' = y'\cos y,$$

$$\sin^n y = ny'\cos y.\sin^{n-۱} y, (\frac{۱}{y})' = -\frac{y'}{y^۲},...$$

مشتق‌گیری ضمنی از تابع‌های ضمنی مطلبی است که بهتر است به‌عنوان مثال‌هایی برای قاعدهٔ زنجیره‌ای در کتاب حسابان مطرح شود تا تکلیف مشتق تابع‌هایی که نمی‌توان و یا به سـختی می‌توان y را برحسب x نوشت، مشخص شود. از قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توان برای محاسبهٔ مشـتق تمام معادلاتی که یک تابع را معرفی می‌کنند، استفاده کرد.

● **مثال۱**. مشتق تابع $y-x^۳=۲x$ عبارت است از:

$$y'-۳x^۲=۲ \to y'=۳x^۲+۲$$

● **مثال۲**. مشتق تابع $y^۳+y-۳x^۲=۰$ عبارت است از:

$$۳y^۲y' + y' - ۶x = ۰ \to y'(۳y^۲+۱) = ۶x$$

$$\to y' = \frac{۶x}{۳y^۲+۱}$$

● **مثال۳**. مشتق تابع $xy+۵x^۲=۱$ عبارت است از:

$$y + xy' + ۱۰x = ۰ \to y' = -\frac{y+۱۰x}{x}$$

به‌عنوان مثالی برای کاربرد مشـتق‌گیری ضمنی از توابع ضمنی، می‌توان به‌دست آوردن مشتق تابع وارون را ذکـر کرد. اگر دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشـند، ترکیب آن‌هـا در زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ g، تابع همانی است:

$$fog(x) = x \to g'(x)f'(g(x)) = ۱$$

$$\rightarrow g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\quad (*)$$

بنابراین، به‌عنوان مثال، مشـــتق تابع نمایی طبیعی را می‌توان پس از محاسبهٔ مشتق تابع لگاریتم طبیعی با اســـتفاده از تعریف مشتق، به کمک فرمول (*) به‌دست آورد. اگر: $f(x)=\ln x$ و $g(x)=e^x$، در این صورت:

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\xrightarrow{f'(x)=\frac{1}{x}}g'(x)=\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}$$
$$=g(x)=e^x$$

همچنین با اســـتفادهٔ مســـتقیم از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$(y=e^x)'=?\xrightarrow{y=e^x\Leftrightarrow x=\ln y}(x=\ln y)'=?$$
$$\rightarrow 1=\frac{y'}{y}\rightarrow y'=y=e^x$$

یا بر عکس، با استفاده از تعریف مشتق، ابتدا می‌توان مشـــتق تابع نمایی طبیعی را به‌دســـت آورد و سپس به کمک فرمـــول (*) مشـــتق تابع لگاریتمـــی طبیعی را محاسبه کرد. همچنین، بدون استفاده از فرمول مذکور با مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$(y=\ln x)'=?\xrightarrow{y=\ln x\Leftrightarrow x=e^y}(x=e^y)'=?$$
$$\rightarrow 1=y'e^y\rightarrow y'=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

مشتق روابط ضمنی که تابع نیستند

رابطهٔ ضمنی $F(x,y)=0$ همواره شامل یک تابع یک متغیره نیســـت که به طور غیرصریح تعریف شده است. برای مثال، رابطهٔ $F(x,y)=x^2+y^2-4=0$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شـــعاع ۲ اســـت. این رابطه به هـــر x در دامنـــهٔ $(-2\le x\le 2)$ دو y، $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ را متناظـــر می‌کند. به‌طـــور کلی، معادلـــهٔ $F(x,y)=0$ یک منحنی مســـطح در صفحه را مشخص می‌کند. هرچند این منحنی ممکن است تابع نباشد، ولی وجود مماس در نقاط هموار آن امری بدیهی و انکارناپذیر اســـت و وجود مماس غیرعمودی به معنی مشـــتق‌پذیری در آن نقاط است. برای محاسبهٔ شیب مماس در این نقاط لازم است مشتق تابع‌هایی را بیابیم که در این‌گونه روابط نهفته‌اند و وجود چنین مماس‌هایی را تضمین می‌کنند.

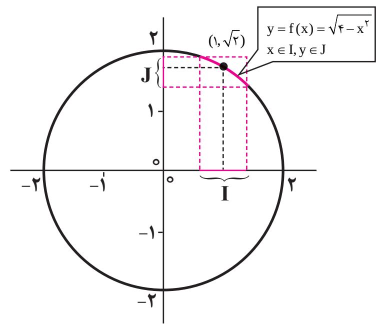
حالـــت خاص قضیهٔ تابع ضمنی در کتاب‌های آنالیز دانشگاهی شرایطی را بیان می‌کند که تحت آن شرایط می‌توان رابطهٔ $F(x,y)=0$ را به‌طور موضعی به صورت یک تابع یکتای مشتق‌پذیر توصیف کرد. چون ابزارهای لازم در دبیرســـتان برای بیان این قضیه وجود ندارد، به علت نیاز به مشـــتق‌گیری از این روابط، به‌خصوص در مبحث مقاطع مخروطی، لازم اســـت به بیان شهودی این قضیه اکتفا کنیم تا به ســـؤالات و ابهامات به‌وجود آمده پاسخ گوییم.

معادلـــهٔ دایـــرهٔ $F(x,y)=x^2+y^2-4=0$ را در نظـــر بگیرید. این معادله، یک تابع نیست و حتی اگر محدوده خاصـــی برای x در دامنـــه- $D=\{x\in R|-2\le x\le 2\}$ - در نظر بگیریم، yهای متناظر، تابعی از x نخواهند بود. دایره منحنی مسطح هموار است که در هر نقطهٔ دلخواه آن می‌توان یک خط مماس رسم کرد. دایره در تمام نقاطش غیـــر از دو نقطه از آن‌که خط ممـــاس موازی محور yها است، مشتق‌پذیر است.

تغییر نگرش و نگاه موضعی به رابطهٔ دایره

وقتـــی بـــه دایـــرهٔ $F(x,y)=x^2+y^2-4=0$ به‌عنـــوان رابطه‌ای برحســـب متغیـــر x نگاه کنیـــم، $y^2=4-x^2$ که $D=\{x\in R|-2\le x\le 2\}$، حتی در زیرمجموعه‌ای از دامنه، یک تابع نخواهیم داشت. اگر بخواهیم از مشتق‌پذیری و شـــیب مماس در یک نقطـــه از دایره صحبت کنیم، باید معادلهٔ دایره را به‌صـــورت یک رابطهٔ دو متغیره ببینیم. در

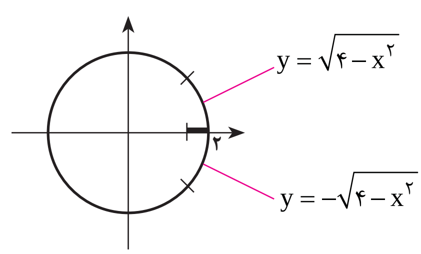
این صورت، دامنه $D=\{(x,y)\in R\times R|-۲\le x\le ۲,-۲\le y\le ۲\}$ خواهد بود. با محدود کردن دامنه حول یک نقطه از آن می‌توان به‌طور موضعی از رابطهٔ دایره به تابعی از x رسید. در واقع، هم x و هم y را محدود می‌کنیم تا قسمتی از دایره را به‌عنوان یک تابع یک متغیره در مجاورت یک نقطه معرفی کنیم.



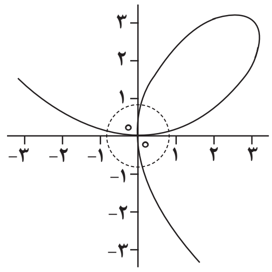
به‌طور کلی، معادلهٔ دو متغیره $F(x,y)=۰$ معادلهٔ یک منحنی مسطح است و وجود مماس در نقطهٔ هموار $(x_۰,y_۰)$ از دامنهٔ آن ایجاب می‌کند که بخش مناسبی از منحنی را که حول نقطهٔ مذکور قرار دارد، به عنوان تابعی از x (یا y) جدا کنیم و نگاهی موضعی به معادله داشته باشیم.

لازم به ذکر است که بر خلاف آنچه در کتاب «حساب دیفرانسیل و انتگرال» سال چهارم ذکر شده است، در معادلات ضمنی همواره نمی‌توانیم در معادله داده شده y را به طور ضمنی تابع مشتق‌پذیری از x فرض کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

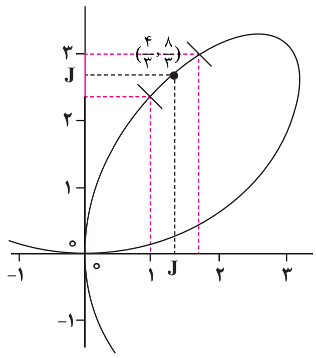
● **مثال ۱.** معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴=۰$ در مجاورت نقطهٔ $(۲,۰)$ حاوی یک تابع یکتای مشتق‌پذیر نیست.



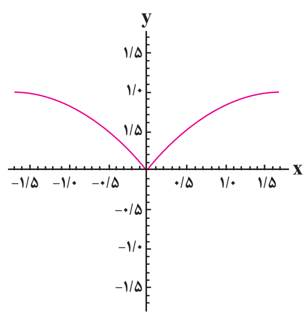
● **مثال ۲.** $(۰,۰)$ یک جواب معادلهٔ $x^۳+y^۳-۶xy=۰$، (منحنی برگی **دکارت**) است. این رابطه در مجاورت مبدأ حاوی یک تابع یکتا نیست.



اما حول بقیهٔ نقاط دامنه، مانند نقطهٔ $(\frac{۴}{۳},\frac{۸}{۳})$، متضمن یک تابع یکتای مشتق‌پذیر است.



● **مثال ۳.** فرض کنید: $F(x,y)=x^۲-y^۳=۰$.



این معادله به‌عنوان یک رابطهٔ یک متغیره برحسب x معادلهٔ یک تابع است و همچنین به‌عنوان یک رابطهٔ دو متغیره در مجاورت هر نقطهٔ دلخواه در دامنه، یک تابع یکتا را توصیف می‌کند، اما در مبدأ مشتق‌پذیر نیست. توابعی که در برخی از نقاط دامنه‌شان مشتق‌پذیر نیستند، اگر به صورت ضمنی بیان شوند، مثال‌های نقض دیگری بر این مطلب هستند که: «همواره معادله داده شده y را به طور ضمنی بر حسب تابعی مشتق‌پذیر از x تعریف می‌کند.» (کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال سال چهارم، مبحث مشتق‌گیری ضمنی).

کاربرد لگاریتم در حل مسائل شیمی

حسین میرزایی،
دبیر ریاضی شهرستان پلدختر

سیدمحمد حسینی،
دانشجوی دکترای شیمی تجزیه و دبیر شیمی شهرستان پلدختر

چکیده

اختـراع لگاریتم در دنیا شـگفتی کاملی بوده اسـت. هیچ یک از کارهای پژوهشـی قبلی به کشـف لگاریتـم کمک نکـرده و یـا ورود آن را پیش‌بینی نکرده بودنـد. لگاریتم بدون آنکـه از کارهای دیگر اندیشـمندان بهره گیرد، یا آنکه مسـیرهای شناخته‌شـدۀ تفکر ریاضی را دنبال کنـد، به تنهایی افکار انسان را به صورت ناگهانی متوجه خود ساخت. برای لگاریتم کاربردهای فراوانی وجود دارد، اما باید گفت پرکاربردترین علمی که از لگاریتم استفاده می‌کند، شیمی تجزیه است.

کلیدواژه‌ها: لگاریتم، عرصه دانش، تفکر ریاضی، شیمی تجزیه

مقدمه

شاید برای بیان ارزش علم ریاضیات اشاره به جملۀ به یاد ماندنی **لئوناردو داوینچی** خالی از لطف نباشد: «هیچ دانســتۀ بشری را نمی‌توان علم نامید، مگر اینکه از طریق ریاضیات توضیح داده و اثبات شود.»

با کشف نظریه‌های ریاضی آن‌ها هستی پیدا می‌کنند، امــا دیر یا زود کاربرد خود را در زندگی و ســایر دانش‌ها می‌یابند. شــاید در حــدود چهار قرن پیش کســی فکر نمی‌کرد لگاریتــم که در رابطه با نیاز محاســبات علمی کشف شده است، در آینده کاربردهای وسیعی پیدا کند؛ به‌طوری‌که **لاپلاس** گفته اســت: «لگاریتم طول زندگی اخترشناســان را چند برابر و طول محاسبات را کم کرده است.»

لگاریتم از واژۀ یونانی **«لوگوس»** به معنای «نسبت» و **«ارتیوس»** به معنای «عدد» گرفته شده است. بی‌تردید هیچ علمی به اندازۀ شــیمی تجزیه از لگاریتم اســتفاده نمی‌کنــد، زیرا در این علم به کرات با عمل لگاریتم‌گیری مواجه می‌شویم. از جمله می‌توان به استفاده از لگاریتم در اندازه‌گیــری pH، pK_a، pK_b و p_c (c: غلظت‌گونه) و غیره اشاره کرد.

فرایند لگاریتم‌گیری درک و تجزیه و تحلیل اعداد و رسم نمودارهای آماری را آسان‌تر می‌کند و باعث می‌شود که کار با اعداد بســیار بزرگ یا بسیار کوچک، محدودتر و قابل دسترس‌تر شود.

در این مقاله برای بیان چند کاربرد لگاریتم در شیمی به تشــریح توابعی مانند pH و pK_a و مســائل مربوط به آن خواهیم پرداخت. در ســؤالات مربوط به توابع مذکور، مانند گذشــته مقادیر لگاریتم‌هایی که روند نیستند، در اختیار دانش‌آموزان قرار نمی‌گیرند و آن‌ها در درس‌های ریاضیات اصول محاســبات را می‌آموزند. از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که بتوانند به خوبی عمل لگاریتم‌گیری را انجام دهند.

pH معیاری برای تعیین میزان اسیدی یا قلیایی‌بودن یک محلول اســت که بــرای محاســبۀ آن از این رابطۀ لگاریتمی استفاده می‌شود: $pH=-\log_{۱۰}[H_۳O^+]$

به عبارت دیگر، برای محاسبۀ pH باید از غلظت مولی یون هیدرونیوم لگاریتم گرفته شود.

با توجه به اینکه pH در دمای ۲۵°C در گسترۀ ۰ تا ۱۴ تغییر می‌کند، پس محدودۀ غلظتی یون هیدرونیوم از ۱ تا $۱۰^{-۱۴}$ مولار متغیر اســت. اگر به گســترۀ غلظتی یون هیدرونیوم و اعداد بسیار کوچک آن دقت کنیم، به خوبــی ارزش فرایند لگاریتم‌گیری را برای محدود کردن این گسترۀ غلظتی وسیع درک خواهیم کرد.

بی‌شک محاسبۀ لگاریتمی بســیاری از اعداد، بدون ماشین حســاب برای ما مقدور نیست. لیکن در سؤالات مربوط به توابع لگاریتمی در درس شــیمی، ســؤالات به گونه‌ای طراحی می‌شوند که با دانستن لگاریتم دو عدد ۲ و ۳ ($\log_{۱۰}۲\approx۰/۳$ و $\log_{۱۰}۳\approx۰/۴۷$) و با استفاده از قواعد

لگاریتم‌گیری محاسبات به سادگی انجام می‌گیرند.

از طرف دیگـر، طبق قاعدهٔ لگاریتمـی: $\log_{۱۰}x=a$، می‌توان برای محاسبهٔ تابع x نوشت: $x=۱۰^{a}$.

لذا با داشـتن pH برای محاسـبهٔ غلظت مولی یون هیدرونیوم می‌توان بیان کرد: $[H_۳O^+]=۱۰^{-pH}$.

برای درک بهتر موضوع به بررسی و حل چند مسئله می‌پردازیم:

● **مثـال۱.** غلظت یون هیدرونیوم در یک محلول حاوی اسـید HCl برابر $۲×۱۰^{-۳}M$ است. pH این محلول را به دست آورید؟

پاسخ: در این مسـئله با توجه به اینکه غلظت یون هیدرونیـوم به‌صورت عدد $۲×۱۰^{-۳}$ آمده اسـت و بین دو عـدد ۲ و $۱۰^{-۳}$ علامـت ضـرب قـرار دارد، طبق قواعد لگاریتم‌گیری (در لگاریتم، جمع به ضرب تبدیل می‌شود) می‌توان نوشت:

$$pH=-\log ۲×۱۰^{-۳}=-(\log_{۱۰}۲+\log_{۱۰}۱۰^{-۳})$$

طبق نکتهٔ گفته شـده، می‌دانیم که لگاریتم عدد ۲ برابر با ۰/۳ و همچنین لگاریتم $۱۰^{-۳}$ برابر (۳-) است.

پس:

$$pH=-(\frac{۳}{۱۰}-۳)=-(-\frac{۲۷}{۱۰})=۲/۷$$

● **مثال۲.** غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید HBr برابر $۵×۱۰^{-۲}$ است. pH این محلول را بیابید.

پاسخ: برای محاسـبهٔ لگاریتم عدد ۵ می‌توان آن را به‌صورت $\log_{۱۰}\frac{۱۰}{۲}$ نوشت:

طبق قواعد لگاریتم (در لگاریتم، تقسـیم به تفریق تبدیل می‌شود) داریم:

$$pH=-\log_{۱۰}۵×۱۰^{-۲}=-(\log_{۱۰}۵+\log_{۱۰}۱۰^{-۲})$$
$$=-(\log_{۱۰}\frac{۱۰}{۲}+\log_{۱۰}۱۰^{-۲})$$
$$=-(\log_{۱۰}۱۰-\log_{۱۰}۲-۲\log_{۱۰}۱۰)$$
$$=-(۱-۰/۳-۲)=-(-۱/۳)=۱/۳$$

● **مثال۳.** pH یک محلول اسـید HCl برابر ۲/۷ است. غلظت یون هیدرونیوم را در این محلول به‌دست آورید.

پاسخ: طبق رابطهٔ لگاریتمی داریم: $[H_۳O^+]=۱۰^{-pH}$

و می‌توان نوشت: $[H_۳O^+]=۱۰^{-۲/۷}$.

ظاهر این عدد به گونه‌ای است که ممکن است تصور شود فقط با ماشین‌حساب قابل محاسبه است، حال آنکه با دانستن لگاریتم عدد ۲ و یک قاعدهٔ لگاریتمی می‌توان آن را بدون ماشین حساب به‌دست آورد.

قاعده لگاریتمی: $۱۰^{\log_{۱۰}a}$ برابر با عدد a است.

بنابرایـن به جای عـدد ۲/۷- ما عبـارت جایگزین (۳/۰+۳-) را می‌نویسیم:

$$[H_۳O^+]=۱۰^{-۲/۷}=۱۰^{(-۳+۰/۳)}=(۱۰^{-۳})×(۱۰^{۰/۳})$$
$$=(۱۰^{-۳})×۱۰^{\log ۲}=۱۰^{-۳}×۲=۰/۰۰۲M$$

● **مثـال۴.** در یـک محلـول بافری بـا pH=۳/۷۶ و pK_a=۴/۷۶، غلظـت A^- در محلول چند برابر غلظت اسید HA است؟

پاسخ: برای محاسبهٔ pH یک محلول بافر داریم:

$$pH=pK_a+\log\frac{[A^-]}{[HA]}$$

$$۳/۷۶=۴/۷۶+\log_{۱۰}\frac{[A^-]}{[HA]}\rightarrow -۱=\log_{۱۰}\frac{[A^-]}{[HA]}$$

اگر نسبت $\frac{[A^-]}{[HA]}$ را برابر x در نظر بگیریم، داریم:

$$-۱=\log_{۱۰}x\rightarrow x=۱۰^{-۱}=\frac{۱}{۱۰}\rightarrow x=\frac{[A^-]}{[HA]}=\frac{۱}{۱۰}$$

یعنی $[A^-]$ برابر $\frac{۱}{۱۰}$ غلظت اسید HA است.

نتیجه‌گیری

لگاریتـم می‌تواند درک و تفسـیر داده‌ها را در شـیمی آسـان‌تر کند. از طـرف دیگر، با توجه بـه اینکه در آموزش ریاضیـات دبیرسـتان تأکید زیـادی روی یادگیری اصول و قواعد آن شـده اسـت، با کاربرد این اصول و قواعد در علوم شـیمی و فیزیـک دورهٔ متوسـطه، درک و یادگیری آن‌ها برای دانش‌آموزان جذاب‌تر می‌شود و به‌نوعی درمی‌یابند که ریاضیات در توسعهٔ علوم گوناگون نقشی حیاتی و کلیدی دارد.

لگاریتم از واژهٔ یونانی «لوگوس» به معنای «نسبت» و «ارتیوس» به معنای «عدد» گرفته شده است

منابع

۱. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی (۱۳۹۱). شیمی ۳ و آزمایشگاه.
۲. مصحفی، عبدالحسین (۱۳۹۰)، تصاعد و لگاریتم. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ چهاردهم.
۳. مندلسون، الیوت (۱۳۷۴). مسائل اساسی ریاضی. ترجمهٔ عادل ارشقی. تهران. نشر نی.
۴. شهریاری، پرویز (۱۳۸۵). تاریخ ریاضیات. انتشارات فاطمی. تهران.

احسان یارمحمدی

اَدای احترام به اویلر

■**نام فیلم:** ادای احترام به اویلر[1] ●براساس سخنرانی ویلیام دانهام در مرکز علوم دانشگاه هاروارد[2]
●**تحت حمایت و نظارت:** مرکز مؤسسهٔ ریاضیات کِلِی[3] ●**مدت فیلم:** ۵۵ دقیقه

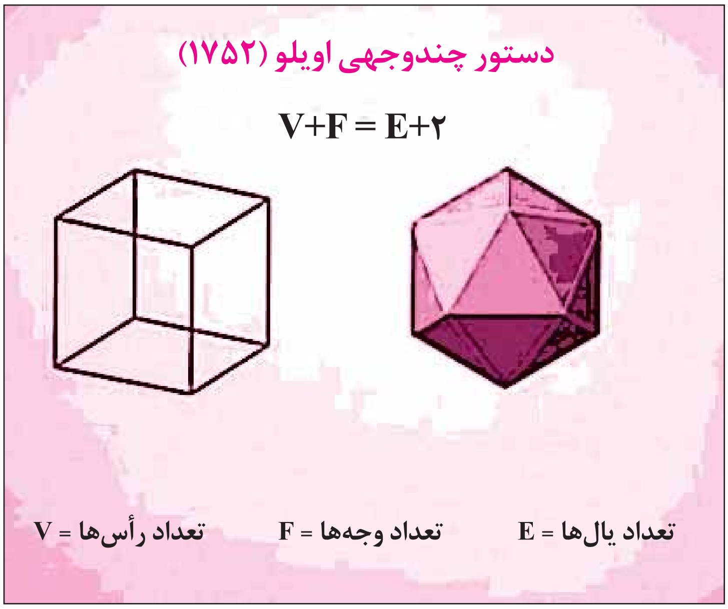
ویلیام وِید دانهِم[4] ریاضیدانی آمریکایی است که مدرک کارشناسی خود را در سال ۱۹۶۹ از «دانشگاه پیتزبورگ»[5] و مدارک کارشناسی ارشد و دکترای خود را به ترتیب در سال‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۷۴ از دانشگاه ایالتی اُهایو[6] دریافت کرده است. اساساً موضوع اصلی تحقیقات ویلیام دانهِم، «توپولوژی»[7] بوده است، اما وی بعد از مدتی به «تاریخ ریاضیات»[8] و به‌ویژه کارها و دستاوردهای ریاضی‌دان برجستهٔ سوئیسی، **لئونارد اویلر**[9] (۱۷۰۷-۱۷۸۳) علاقه‌مند شد و توانست در این زمینه کتاب‌های ارزنده‌ای را به جامعهٔ جهانی ریاضیات عرضه کند. او چند جایزهٔ ارزنده ریاضی، مانند «جایزهٔ جورج پولیا»[10] (۱۹۹۲)، «جایزهٔ تِرِور ایوِنس»[11](۱۹۹۷)، «جایزهٔ لِستِر آر.فورد»[12] (۲۰۰۶) و «پاداش بِکِنباخ»[13] (۲۰۰۸) را در زمینهٔ تألیف و تدریس تاریخ ریاضیات از آن خود کرد.

در صحنه‌های نخستین فیلم ویدیویی ادای احترام به اویلر، صحنه‌ای وجود دارد که به معرفی آثار ویلیام دانهِم می‌پردازد. بنابراین در ادامه نام و مشخصات آثار او را به زبان انگلیسی تقدیم می‌کنیم تا علاقه‌مندان به پژوهش در زمینهٔ تاریخ ریاضیات، به منابع جدید و ارزنده‌ای دسترسی داشته باشند و نیز مترجمان زبردست و علاقه‌مند نیز با آگاهی از این کتاب‌ها دست به ترجمه آن‌ها بزنند تا جامعهٔ ریاضیات ایران نیز از این آثار بهره‌مند شوند:

- Dunham, William (1990). Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics (1st sd). Johm Wiley and Sons. ISBN 0-471-50030-5.
- Dunham, William (1994). The Mathematical Universe (1sted.). John Wiley and Sons. ISBN 0-471-53656-3.
- Dunham, William (1999). Euler: The Master of Us All (1sted.). Mathematical Association of America. ISBN 0-88385-328-0.
- Dunham, William (2007). "Euler and the Fundamental Theorem of Algebra" in The Genius of Euler: Reflections on his Life and Work. Mathematical Association of America. ISBN 0-88385-558-5.
- Dunham, William (2008). The Calculus Gallery (1sted.). Princton University Press. ISBN 0-691-13626-2.
- Dunham, William (2010). Great Thinkers, Great Theorems (Video Lecture Series). The Teaching Company. ISBN 159803690-4.

در ابتدای این فیلم ویدیویی، به نقل از ویلیام دانهِم به تفصیل می‌شنویم و می‌بینیم که لئونارد اویلر:

- در سال ۱۷۰۷ در بازل چشم به جهان گشود.
- در سال ۱۷۲۰ به مطالعه با **یوهان برنولی**[14] پرداخت.
- در سال ۱۷۲۷ از دانشگاه بازل فارغ‌التحصیل شد.
- در سال ۱۷۲۷ به «آکادمی علوم



سن‌پترزبورگ»[۱۵] رفت.

- در سال ۱۷۴۱ به آکادمی علوم برلین رفت.
- در سال ۱۷۶۶ مجدداً به آکادمی علوم سن‌پترزبورگ برگشت.
- در سال ۱۷۸۳ چشم از جهان فروبست.

در این فیلم خواهید دید که لئونارد اویلر دارای زندگی شخصی و علمی بسیار عجیب و متفاوتی نسبت به سایر دانشمندان و ریاضی‌دانان بوده است. برای مثال، او با **کاترینا سِل**[۱۶] ازدواج می‌کند و این دو صاحب ۱۳ فرزند می‌شوند. در این بین، اویلر حتی با اینکه مشغله‌های کاری بسیار داشته است، اما برای تربیت فرزندان و بودن در کنار خانواده نیز وقت بسیاری صرف کرده است. در ضمن ملاحظه خواهید کرد که اویلر حافظه‌ای خارق‌العاده و از آن مهم‌تر پشتکار فراوانی داشته است. او گرچه در سال ۱۷۳۰ بینایی یکی از چشمانش و در سال ۱۷۷۱ بینایی چشم دیگرش را نیز از دست می‌دهد و به صورت کامل نابینا می‌شود، هیچ‌گاه از انجام پژوهش و کارهای علمی دست برنمی‌دارد.

لئونارد اویلر بین تمامی ریاضی‌دانان به‌عنوان پرکارترین ریاضی‌دان در موضوع‌های گوناگون ریاضی شناخته می‌شود، به‌گونه‌ای که مقالات و مطالب او، هم از نظر کیفیت و هم از نظر کمیت، از جایگاه برجسته‌ای برخوردارند. برای مثال، مطالب ارائه شده توسط اویلر تا اندازه‌ای زیاد بودند که ۲۲۸ مقالهٔ او بعد از مرگش به چاپ رسیدند. در ضمن اگر بخواهیم او را با ریاضی‌دانان برجستهٔ دیگری مانند **کارل فردریش گاوس**[۱۷] و **اگوستین لوئی کوشی**[۱۸] که برای وارد کردن نمادها و عبارت‌های ریاضی جزو سرامدان هستند، مقایسه کنیم، باز هم لئونارد اویلر با ارائهٔ ۹۶ نماد و عبارت، در مقابل ۷۰ نماد و عبارت گاوس و نیز ۳۳ نماد و عبارت ریاضی کوشی در مقام نخست قرار دارد!

در ادامهٔ این فیلم به چند دستاورد برجستهٔ لئونارد اویلر در آن روزگار پرداخته می‌شود که از این قرارند:

- **عدد e (۱۷۴۸):**

$$۱+\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۱\times۲\times۳}+\frac{۱}{۱\times۲\times۳\times۴}+\ldots\approx ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵$$

- **اتحاد اویلر (۱۷۴۸):**

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad \text{و} \quad i=\sqrt{-۱}$$

- **رابطهٔ چندوجهی اویلر (۱۷۵۲):**

در هر چندوجهی محدب با تعداد رأس‌های |V|، تعداد یال‌های |E| و تعداد وجه‌های |F| همواره رابطهٔ زیر برقرار است:

$$|V|+|F|=|E|+۲$$

- **مسئلهٔ بازل:**

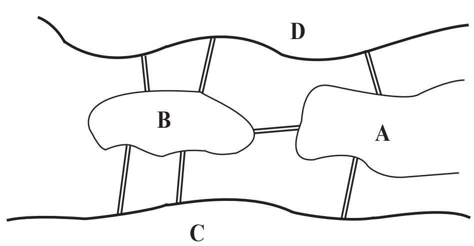
$$\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۱}{n^۲}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\ldots+\frac{۱}{n^۲}\right)$$

مسئلهٔ بازل نخستین‌بار در سال ۱۶۴۴ توسط

ریاضی‌دان ایتالیایی، **پیترو مِنگولی**[19](۱۶۲۶-۱۶۸۶) مطرح شد و لئونارد اویلر برای نخستین مرتبه در سال ۱۷۳۴ آن را حل کرد و با قرائت آن در سال ۱۷۳۵ در آکادمی علوم سن‌پترزبورگ، برای این مسئله راه‌حلی مستدل ارائه کرد.

مسئلهٔ پل‌های کونیگسبِرگ (۱۷۳۶):

در قرن هیجدهم میلادی شهر کونیگسبرگ از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره (داخل رودخانه) تشکیل شده بود. در آن زمان هفت پل این چهار منطقه را به هم وصل می‌کردند. این مسئله که: «آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق در شهر گشتی زد، از هر پل یک بار و تنها یک بار گذشت، و به مکان نخست بازگشت؟» سال‌های زیادی ذهن اهالی شهر را متوجه خود ساخته بود.



لئونارد اویلر با حل این مسئله در سال ۱۷۳۶، شاخهٔ نظریهٔ گراف را در ریاضیات پایه‌ریزی کرد.

البته در ادامهٔ فیلم ویدیویی (ادای احترام به اویلر) در مورد دیگر دستاوردهای لئونارد اویلر، مانند خط اویلر، پی بردن به بیشتر از ۵۸ جفت از اعداد دوست (متحابه)، نمودار اویلر (نمودار وِن) و افراز اعداد نیز مطالب ارزنده‌ای ارائه می‌شوند که شما ریاضی‌آموزان را به مشاهده و ملاحظهٔ این موارد هم تشویق می‌کنیم.

در ضمن در قسمتی از این فیلم ویدیویی یک مسئلهٔ جالب توجه در مورد تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها وجود دارد که توسط **نیکلاس برنولی**[20] ارائه شده و از نظر وی غیرقابل تجزیه بوده، اما اویلر با مهارت تمام آن را تجزیه کرده است. بنابراین از آنجا که مبحث تجزیه یکی از موارد پراهمیت ریاضیات دورهٔ آموزش متوسطه است، این مسئله را به همراه پاسخ آن در ادامه بیان می‌کنیم تا مورد استفادهٔ ریاضی‌آموزان باشد.

$$x^4-4x^3+2x^2+4x+4=[x^2-(2+\sqrt{4+2\sqrt{7}})x+(1+\sqrt{4+2\sqrt{7}})][x^2-(2-\sqrt{4+2\sqrt{7}})x+(1-\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7})]$$

*** پی‌نوشت‌ها**

1. A Tribute to Euler
2. Harvard University

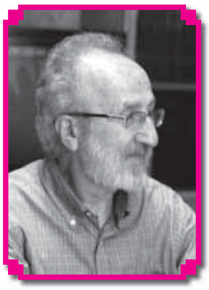
برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این دانشگاه به تارنمای آن به نشانی: http://www.harvard.edu مراجعه کنید.

3. Clay Mathematics institute

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این مؤسسه به تارنمای آن به نشانی: http://www.claymath.org مراجعه کنید.

4. William Wade Dunham
5. University of Pittsburgh
6. Ohio State
7. Topology
8. History of Mathematics
9. Leonhard Euler
10. George Polya Award
11. Trevor Evans Award
12. Lester R. Ford Award
13. Beckenbach Prize
14. Johann Bernolli
15. Saint Petersburg Academy of Sciences
16. Katharina Gsell
17. Carl Friedrich Gauss
18. Augustin-Louis Cauchy
19. Pietro Mengoli
20. Nicholas Bernolli

ساده‌ترین اثبات قضیهٔ فیثاغورس!



غلامرضا یاسی‌پور

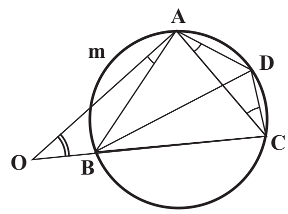
از قضیهٔ بطلمیوس تا قضیهٔ فیثاغورس

نخست قضیهٔ زیر را که به «قضیهٔ **بطلمیوس**» معروف است، اثبات می‌کنیم[1]:

صورت قضیهٔ بطلمیوس: در هر چهارضلعی محاطی، حاصل‌ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل‌ضرب اضلاع روبه‌روی آن.

اثبات: اگر ABCD چهارضلعی محاطی باشد، فرض می‌کنیم:

AB=a و BC=b و CD=c و DA=d و AC=x و BD=y



از A خط m را طوری رسم می‌کنیم که قرینهٔ ضلع AD نسبت به نیم‌ساز زاویهٔ BAC باشد و BC را امتداد می‌دهیم تا m را در O قطع کند و زاویهٔ OBA مساوی زاویهٔ ADC می‌باشد (چرا؟) دو مثلث AOB و ACD متشابه‌اند و داریم:

AO: AC=AB: AD=OB: CD (۱)

همچنین، دو مثلث OAC و BAD متشابه‌اند، زیرا: $O\hat{A}C = B\hat{A}D$ و اضلاع این دو مثلث متناسب‌اند در نتیجه:

OC: BD=AC: AD (۲)

از روابط (۱) و (۲) داریم:

OB=ac: d و OC=xy: d

با جایگذاری این مقادیر در رابطهٔ OC=OB+BC نتیجه می‌شود:

xy=ac+bd

نتیجه: اگر ABCD محاطی نباشد، داریم: OC<OB+BC و در نتیجه: xy<ac+bd.

یعنی در هر چهارضلعی غیرمحاطی حاصل‌ضرب دو قطر از مجموع حاصل‌ضرب‌های اضلاع مقابل آن کمتر است. و در نتیجه معلوم می‌شود که هرگاه در یک چهارضلعی رابطهٔ xy=ac+bd برقرار باشد، آن چهارضلعی محاطی است. (عکس قضیهٔ بطلمیوس) زیرا اگر محاطی نباشد، باید داشته باشیم: xy<ac+bd که خلاف فرض است.

حال با توجه به قضیهٔ بطلمیوس درستی قضیهٔ فیثاغورس واضح است. رابطهٔ قضیهٔ بطلمیوس را در مستطیل به ابعاد b و c و قطر a که یک چهارضلعی محاطی است، بنویسید!

*پی‌نوشت

۱. کتاب قضایا و مسائل هندسه، غلامرضا یاسی‌پور، ۱۳۴۸.

پرسش‌های پیکارجو!

مثلثی با اضلاع به طول‌های ۱۰ و ۸ و ۴ واحد را حول کوچک‌ترین ضلع آن دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه‌قدر است؟

الف) ۶۶π
ب) ۷۷π
ج) ۷۲π
د) $\frac{۱۰۱\pi}{۳}$
هـ) $\frac{۲۳۳\pi}{۴}$

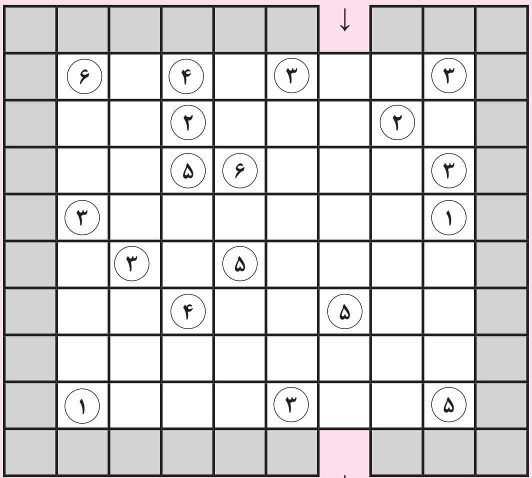
هوشنگ شرقی

دوستان سلام! بیایید با «لابیرنت»ها شروع کنیم! احتمالاً با اصطلاح لابیرنت آشنایی دارید. لابیرنت که در زبان فارسی، گاهی به آن «هزار تو» گفته می‌شود، به مسیرهای تودرتوی مرتبط با هم گفته می‌شود که انسان‌ها در آن گم می‌شدند و برای خارج شدن از آن، باید معمای آن را حل می‌کردند. لابیرنت‌ها تاریخ مفصلی دارند که علاقه‌مندان را به مطالعهٔ آن تشویق می‌کنم[۱].

اما امروزه از ایدهٔ لابیرنت‌ها برای طرح معماهایی برای تفریح و سرگرمی بسیار استفاده می‌شود. البته آنچه که ما در اینجا داریم، با همهٔ آن‌هایی که تا به حال دیده‌اید متفاوت است! حل معمای ما به ایجاد یک لابیرنت منجر می‌شود! به جای هر توضیحی، ترجیح می‌دهم که مستقیماً شما را به اصل مطلب ببرم.

به جدول ۱ دقت کنید:

ورود



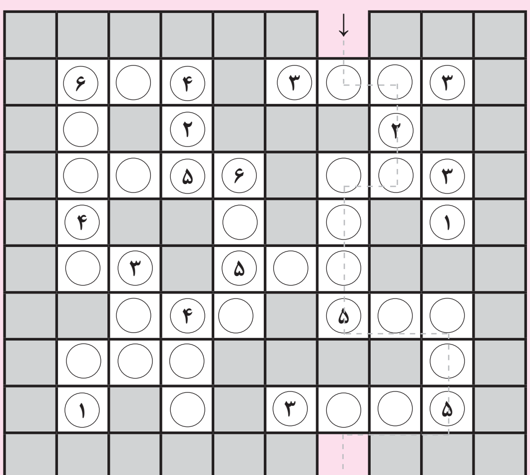
خروج

جدول ۱

خانه‌هایی از جدول که در آن‌ها دایره‌ها قرار دارند، خانه‌های خالی هستند. اما عددهای درون آن‌ها چه می‌گویند؟ بله، این عددها سرنخ‌های حل معمای ما هستند! در واقع هر یک از این عددها به ما می‌گویند که با حرکت از این خانه، به چهار طرف آن (بالا، پایین، چپ و راست) بدون واسطه، چند خانهٔ خالی (غیر از خود آن خانه) وجود دارد. اما خانه‌های غیرخالی (پر) چه خانه‌هایی هستند؟ آن‌ها خانه‌هایی هستند که باید سیاه شوند و در واقع دیوارهای لابیرنت ما را می‌سازند و بدیهی است که با توجه به عددهای درون دایره‌ها می‌توان جای آن‌ها را پیدا کرد.

بنابراین ما باید با توجه به این عددها، خانه‌های خالی را پیدا کنیم و آن‌ها را با علامت دایره (و یا علائم دیگر) مشخص کنیم و خانه‌های توپر را هم سیاه کنیم تا لابیرنت ما شکل بگیرد. مسیر ورود و خروج نیز به این ترتیب پیدا می‌شود و آن معمایی دیگر است! حالا به پاسخ معمای فوق توجه کنید!

ورود



خروج

جدول ۲

حتماً می‌پرسید ایدهٔ این کار و یافتن راه‌حل چه بوده است؟ کمی راهنمایی می‌کنم. به همان جدول ۱ برگردیم و این بار با دقت بیشتری آن را ببینیم:

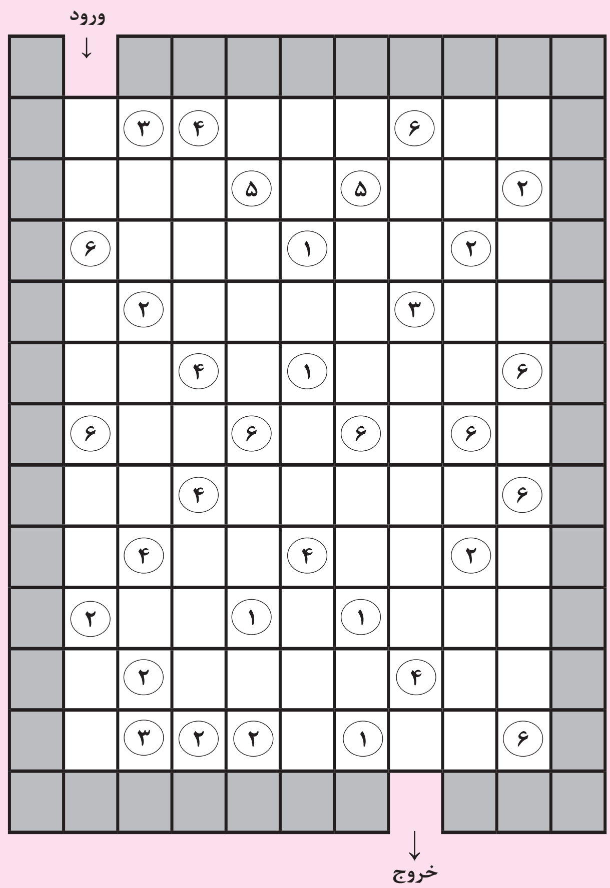
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
A											A
B		۶		۴		۳	○	○	۳		B
C				۲				۲			C
D				۵	۶				۳		D
E		۴							۱		E
F			۳		۵						F
G				۴			۵				G

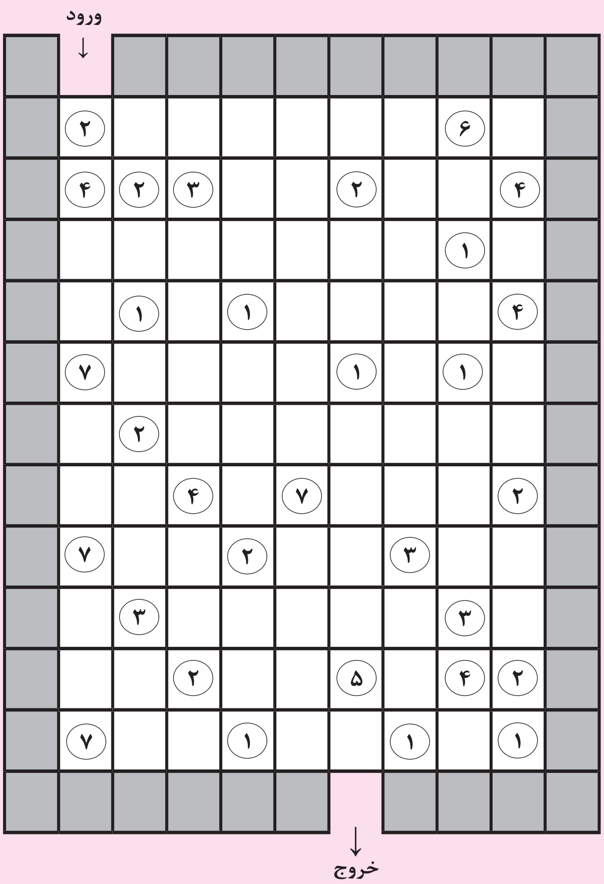
جدول ۳

عدد ۱ در خانهٔ E۹ به ما چه می‌گوید؟ بله، فقط یک خانهٔ خالی در اطراف این خانه هست، و آن همان خانهٔ D۹ (خانهٔ بالایی) است که در آن دایره‌ای با عدد ۳ قرار دارد (زیرا همان‌طور که گفتیم، این خانه‌ها که دایرهٔ عددی دارند، خانهٔ خالی هستند). پس دو خانهٔ E۸ و F۹ باید سیاه شوند. علاوه بر آن‌ها، خانهٔ C۹ هم باید سیاه شود، زیرا در مسیر بالای خانهٔ E۹ قرار دارد. به این ترتیب سه خانهٔ سیاه را یافتیم.

حالا به خانهٔ B۹ دقت کنید! عدد ۳ درون آن نشان می‌دهد که سه خانهٔ خالی در مجاورت آن وجود دارد. از سمت راست و بالا و پایین که راه بسته است! پس باید سه خانهٔ سفید در سمت چپ آن باشد. آن‌ها را با دایره مشخص می‌کنیم و خانهٔ بعدی را سیاه می‌کنیم (خانهٔ B۵). اگر این مسیر را ادامه دهید، لابیرنت کامل می‌شود و بقیهٔ کار را به خودتان واگذار می‌کنیم.

اکنون به‌عنوان تفریح و سرگرمی این لابیرنت‌ها را خودتان کامل کنید و مسیر خروجی را هم مشخص کنید:





جدول ۴

برای شمارهٔ بعد، برایتان باز هم از این معماهای لابیرنت داریم!

*** پی‌نوشت**

۱. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد موضوع لابیرنت‌ها، به مقاله‌ای از نگارنده با عنوان «لابیرنت‌ها و مازها در گذرگاه تاریخ» در مجلهٔ دانش و مردم شمارهٔ فروردین ۱۳۸۳، و یا به سایت www.ensani.ir که همین مقاله در آن موجود است، مراجعه کنید.

دیگر نگران رسم نمودارهای ریاضی در Word نباشید

کلیدواژه‌ها: Word، Efofex FX Graph، رسم نمودار معادلات و توابع ریاضی، راهنمای استفاده از نرم‌افزار

محمد مهدوی*
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شهرستان میانه

مقدمه

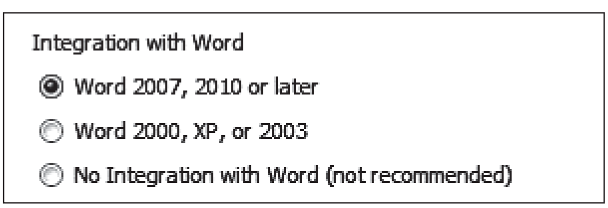
شاید بارها اتفاق افتاده باشد که هنگام تایپ مسئله‌های امتحان ریاضی، برای رسم دستگاه مختصات یا یک نمودار ریاضی با مشکل مواجه شده یا حداقل اعداد محورهای مختصات را با دست وارد کرده باشید. شاید این سؤال برایتان پیش آمده باشد که نمودارهای کتاب‌های ریاضی را چگونه رسم کرده‌اند. شاید از نرم‌افزاری استفاده کرده باشید که بعد از رسم نمودار، آن‌را به شکل تصویر ذخیره کرده‌اید و سپس در داخل مطالب تایپ شده خود قرار داده باشید که موجب به‌هم ریختن و یا کیفیت نامطلوب نمودار شده است. یا در صورتی که بعداً خواسته باشید، شکل یا اندازهٔ نمودار را عوض کنید، برای شما مشکل و یا کسل‌کننده شده باشد. از این به بعد با همهٔ مشکلات تایپ مطالب ریاضی خداحافظی کنید. چرا که بعد از خواندن این مقاله شما قادر خواهید بود هر نمودار دلخواه را در داخل مطالبتان وارد کنید و هرگاه که خواستید، با یک کلیک، اندازه و یا حتی شکل نمودار را تغییر دهید.

یکی از نرم‌افزارهای فوق‌العاده مفید «FX Graph 4» است که برای رسم تمامی نمودارهای دوبعدی کاربرد دارد. البته برای وارد کردن ضابطهٔ توابع باید چند نکته را رعایت کنید که این نکات را بیان خواهیم کرد.

ابتدا برای دانلود این نرم‌افزار عبارت «دانلود نرم‌افزار Efofex FX Graph4.004.4» را در موتور جست‌وجو بزنید و به ورژن نوشته شده دقت کنید. البته کار با ورژن‌های بالاتر نیز دقیقاً مشابه همین ورژن است.

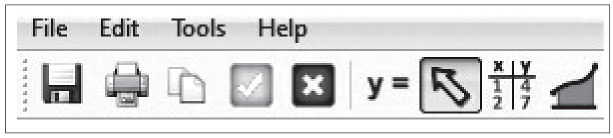
این نرم‌افزار بعد از نصب به‌طور خودکار در نوار ابزار «word» قرار خواهد گرفت. دقت کنید که در مراحل نصب، نوع word را انتخاب کنید. ضمناً نگارنده با word2007 کار کرده‌ام. (به دو تصویر ۱ و ۲ نگاه کنید.)

تصویر ۱



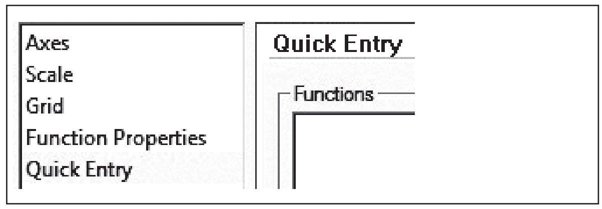
تصویر ۲

بعـد از کلیک روی Efofex یـا Add-ins و انتخاب نرم‌افزار وارد محیط نرم‌افزار می‌شویم (تصویر ۳)



تصویر ۳

برای وارد کـردن ضابطهٔ یک یا چند تابع، یا می‌توانید در صفحهٔ سـفید، کنار دستگاه مختصات کلیک راسـت کنید و یا روی y = کلیـک کنید تا پنجره‌ای باز شـود که قسـمتی از آن‌را در تصویر ۴ می‌بینیـد. در ادامـهٔ مطالب به شـرح هـر کدام از قسـمت‌های آن می‌پردازیم.

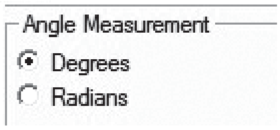


تصویر ۴

❖ functions (توابع)

در اینجا می‌توانید ضابطهٔ توابع را وارد کنید. برای واردکردن توابع به نکات زیر دقت کنید:

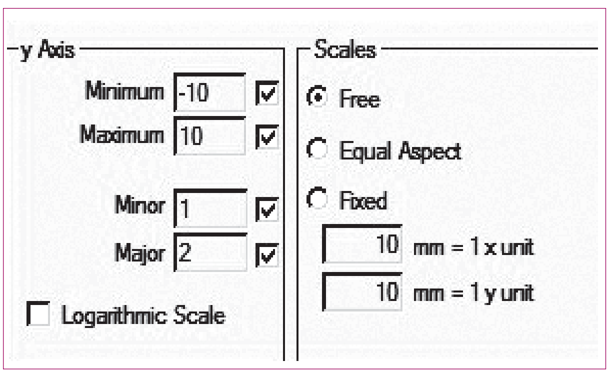
- برای نوشتن توان، شیفت را بگیرید و در صفحهٔ کلید علامت ^ را بزنید؛ مثل: y=x^۲.
- اگـر علامـت توان نزنیـد، نرم‌افزار عدد قبـل از x را ضریب و عدد بعد از آن را توان حسـاب می‌کند. در اعداد کسری از پرانتز استفاده کنید.
- برای نوشـتن $\sqrt{u}$ باید بنویسـید: sqrt(u) و یا برای نوشتن $\sqrt[n]{u^m}$ باید بنویسید: $u \wedge (\frac{m}{n})$.
- بـرای وارد کـردن $y=\log_n u$، ابتدا بایـد log را و بدون فاصله مبنا را بنویسـید و سـپس یک فاصله بدهید و u را داخل پرانتز وارد کنید. مثلاً برای وارد کردن $y=\log_2(x+1)$ باید بنویسـید: y=log۲(x+۱).
- در صورتی که مبنای لگاریتم کسری باشد، احتمالاً نرم‌افزار قبول نکند. در این‌صورت مثلاً برای واردکردن $y=\log_{\frac{2}{3}}(x+1)$ باید شکل دیگر آن، یعنی $(\frac{2}{3})\wedge y=(x+1)$ را وارد کنید.
- برای رسـم توابع مثلثاتی کافی اسـت کمـان را داخل پرانتز بنویسید. مثلاً: y=sin(x+۱).
- البتـه بـرای رسـم توابـع مثلثاتـی بایـد در قسـمت «Quick Entry»، روی کلیک کنید. و سپس در قسمت



درجـه (Degree) یـا رادیـان (Radian) را انتخاب کنید.
- برای رسـم توابع چندضابطه‌ای، ضابطه‌ها را زیر هم و بازهٔ هر تابع را جلوی آن بنویسید.
- برای وارد کردن توابع جز صحیح، مثل y=[x+۱]، باید آن‌را به شکل y=gint(x+۱) وارد کنید.
- پرانتز کمک فراوانی در وارد کردن معادله‌ها به محیط نرم‌افزار می‌کند. مثلاً بـرای وارد کردن معادلهٔ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ می‌توانید آن‌را به شکل (۱/۴)x^۲+(۱/۹)y^۲=۱ وارد کنید.
- در قسمت Axes می‌توانید تنظیمات مربوط به محورها از جمله شـکل، رنگ، فونت و ضخامت محورها را تغییـر دهید. مثلاً با انتخاب ۲۵pt یا ۲pt ضخامت محورها تغییر می‌کند. البته بعضی از تنظیمـات به‌صورت پیش‌فرض فعال‌اند و گاهی نیاز به تغییر نیست. با امتحان هر قسمت می‌توانید عملکرد آن را ببینید.
- برای نوشـتن π باید بنویسید pi. مثلاً برای نوشتن y=sinπx باید آن‌را به شکل y=sin(pix) وارد کنید.

❖ Scale (مقیاس)

بعد از کلیک روی این قسمت صفحه‌ای باز می‌شود که قسمتی از آن را در تصویر ۵ می‌بینیم.

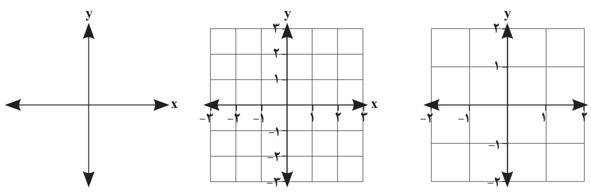


تصویر ۵

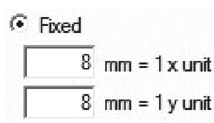
ابتدا Equal Aspect را انتخاب کنید و در قسمت y Axis و x Axis همهٔ تیک‌ها بردارید و مقادیر حداقل و حداکثر روی محورها را بنویسید. همچنین، در قسـمت Major و Minor اعداد مربوط به تقسیم‌بندی

دستگاه مختصات به شکل شطرنجی را به‌صورت زیر بنویسید:

- اگر همهٔ قســمت‌ها را صفر قرار دهید، یک دستگاه مختصات ساده بدون شماره‌گذاری خواهید داشت.
- اگر همهٔ قســمت‌ها را یک قرار دهید، یک دستگاه مختصات با شماره‌گذاری به اندازهٔ یک واحد خواهید داشت و با انتخاب اعداد بزرگ‌تر این شماره‌گذاری نیز افزایش خواهد یافت که برای ۰، ۱ و ۲ به صورت تصویر ۶ خواهد بود.



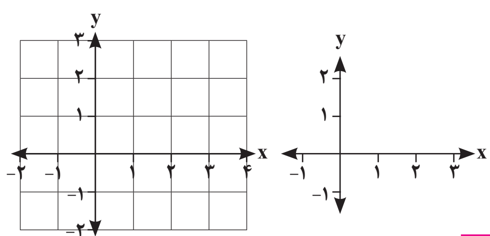
تصویر ۶



بعد از این تنظیمات، قســمت روبه‌رو را انتخــاب کنید و با تغییــر دادن عدد، اندازهٔ تصویر نمــودار را بزرگ‌تر یا کوچک‌تر کنید و اندازهٔ مناسب نوشتهٔ خود را انتخاب کنید.

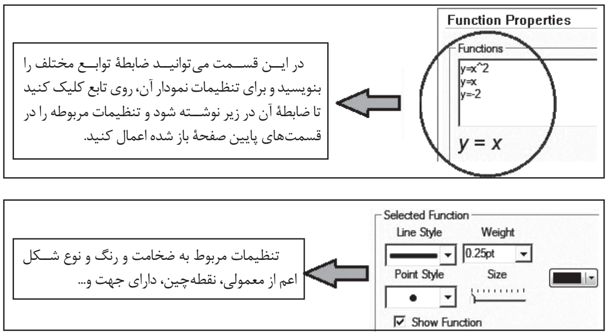
❖ Gride (شطرنجی)

این قسمت مربوط به همان کادرهای شطرنجی‌شکل و تنظیمات خطــوط آن اســت که بــا انتخاب ☑ Show Grid این خطــوط دیده می‌شوند و با برداشــتن تیک، دستگاه مختصات به شکل ساده نشان داده می‌شــود. در قسمت پایین آن ضخامت و رنگ‌های خطوط را نیز می‌توان تغییر داد که در تصویر ۷ دو حالت متفاوت نمایش داده شده است.



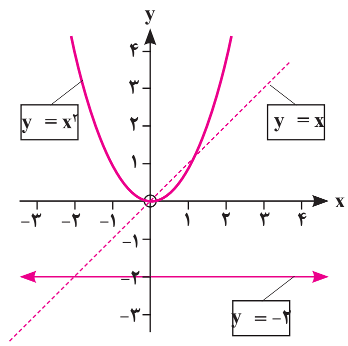
تصویر ۷

حال با کلیــک روی قســمت «Function properties» (ویژگی توابع) صفحه‌ای باز می‌شــود کــه می‌توانید توابع دلخــواه خود را در قســمت مربوطه بنویسید. البته برای نوشــتن تابع بعدی، اگر با زدن «کلید اینتر» نمی‌توانید به ســطر بعدی بروید، کافی اســت نشــانگر موشــواره را به ســطر بعدی ببرید و چپ کلیک کنید. همچنین برای تنظیمات هر تابع، روی ضابطهٔ آن کلیک و تنظیمات مربوطه را اعمال کنید. مثلاً ممکن اســت بخواهید ضخامت نموداری بیشــتر باشد یا نموداری به‌صورت نقطه‌چین باشــد یا برای هر نموداری رنگ دلخواه انتخاب کنید (تصویر ۸).



تصویر ۸

در قســمت‌های پایینی آن، با قرار دادن و برداشتن تیک تغییرات جزئــی در نمودار اعمال می‌شــود که خودتان می‌توانید به ســادگی امتحان کنید. در تصویر ۹ انواع توابع با ساختارهای متفاوت را مشاهده می‌کنید.



تصویر ۹

برای نوشتن نام تابع، روی نمودار تابع کلیک راست کنید و سپس در کادر باز شده «Add annotation» (افزودن یادداشت) را انتخاب کنید تا صفحه‌ای باز شود. در صفحهٔ باز شده می‌توانید فونت نوشته‌ها و ضخامت و رنگ مســتطیل‌ها را تغییر دهیــد و یــا «Add blank annotation» را انتخاب کنید و با توجه به قســمت قبلی، ضابطهٔ تابع یا توضیحات دلخواه خود را بنویسید. البته توضیحات باید به زبان انگلیسی باشد.

ســرانجام، بــرای اینکــه راحــت بتوانیــد نمــودار و یــا عکس‌هــا را داخــل نوشــته‌ها جابه‌جــا کنیــد، ابتدا روی نمــودار چــپ کلیــک کنیــد و ســپس از نمــودار ابــزار word، قسمت «page layout» را انتخــاب کنیــد و از قســمت بــاز شــده، «text warpping» را برگزینیــد. اکنــون از زبانه‌هــای بــاز شــده نحــوهٔ قــرار گرفتــن عکــس و نوشــته را انتخــاب کنیــد (مثــلاً in front of یعنی در مقابل). در این‌صورت به‌راحتی می‌توان عکس و نمودار را بدون به‌هم ریختن مطالب جابه‌جا کرد.

* math24@chmail.ir

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

لغات و اصلاحات جدید

1. Prime number	عدد اول
2. Counting number	عدد شمارشی
3. Odd	فرد
4. Negative	منفی
5. Continuos functions	تابع‌های پیوسته
6. Interval	بازه
7. Differentiable functions	تابع‌های مشتق‌پذیر
8. Consider	در نظر گرفتن
9. Claim	ادعا

مثال ۱. فرض کنیم:

A={همهٔ اعداد شمارشی فرد بزرگ‌تر از ۲}

و

B={همهٔ اعداد اول بزرگ‌تر از ۲}

آیا این دو مجموعه مساوی‌اند؟

برهان: پاسخ خیر است. ما قبلاً دیده‌ایم که همهٔ اعداد اول بزرگ‌تر از ۲ فرد هستند. بنابراین: $B\subseteq A$. آیا همهٔ اعداد فرد بزرگ‌تر از ۲، اول هستند؟ پاسخ منفی است، زیرا عدد ۹ فرد است ولی اول نیست. بنابراین: $A\not\subseteq B$. پس دو مجموعه برابر نیستند. ■

مثال ۲. فرض کنیم:

C={همهٔ توابع پیوسته روی بازهٔ [۱,۱-]}

و

D={همهٔ توابع مشتق‌پذیر روی بازهٔ [۱,۱-]}

آیا این دو مجموعه مساوی‌اند؟

برهان: پاسخ خیر است. تمام تابع‌های مشتق‌پذیر، پیوسته هستند (کتاب حسابان ممکن است برای بررسی این ادعا مفید باشد)، اما همهٔ توابع پیوسته مشتق‌پذیر نیستند. تابع $f(x)=|x|$ را در نظر بگیرید. این (تابع) پیوسته است، ولی در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. ■

EXAMPLE 1. Let A={all odd counting numbers larger than 2} and B={all prime numbers larger than 2}. Are these two sets equal?

Proof. The answer is: no.

We have already seen that all prime numbers larger than 2 are odd. Therefore $B\subseteq A$.

Are all odd numbers larger than 2 prime numbers? The answer is negative, because the number 9 is odd, but it is not prime. Therefore, $A\not\subseteq B$. Thus, the two sets are not equal. ■

EXAMPLE 2. Let C={all continuous functions on the interval [-1,1]} and D={all differentiable functions on the interval [-1,1]}. Are these two sets equal?

Proof. The answer is: no.

All differentiable functions are continuous (a Calculus book might be helpful for checking this claim), but not all continuous functions are differentiable.

Consider the function $f(x)=|x|$. This is continuous, but it is not differentiable at $x=0$. ■

شما ترجمه کنید

EXAMPLE 1. Let $A\subset U$ and $B\subset U$. Then

$(A\cap B)'=A'\cup B'$.

(This is known as one of De Morgan's laws. The proof of the other law, namely $(A\cup B)'=A'\cap B'$, is left as an exercise. August De Morgan [1806-1871] was one of the first mathematicians to use letters and symbols in abstract mathematics).

Proof

Part 1. $(A\cap B)'\subseteq A'\cup B'$

Let $x\in(A\cap B)'$. This implies that $x\notin(A\cap B)$. Therefore, either $x\notin A$ or $x\notin B$. Indeed, if x was an element of both A and B, Then it would be an element of their intersection. But we cannot exclude that x belongs to one of the two sets. Therefore, either $x\in A'$ or $x\in B'$. This implies that $x\in A'\cup B'$.

Part 2. $A'\cup B'\subseteq(A\cap B)'$

Let $x\in A'\cup B'$. Then either $x\in A'$ or $x\in B'$. Then either $x\notin A$ or $x\notin B$. This implies that x is not a common element of A and B; that is, $x\notin(A\cap B)$. Thus, we can conclude that $x\in(A\cap B)'$.

As both inclusions are true, the two sets are equal. ■

۱

مصاحبه با استاد جعفر نیوشا
معلم پیشکسوت درس هندسه

معلم باید شخصیت به‌خصوصی داشته باشد

مقدمه

جعفر نیوشا متولد سال ۱۳۱۰ در تبریز است. تحصیلات ابتدایی و متوسطه را در این شهر به پایان رساند و برای ادامهٔ تحصیل به تهران آمد. پس از فارغ‌التحصیل شدن از دانش‌سرای عالی در رشتهٔ ریاضی، از سال ۱۳۳۴ به شغل شریف معلمی ریاضی مشغول شد و برای خدمت به زادگاهش بازگشت. ۹ سال بعد، وی به تهران منتقل شد و در «دبیرستان مروی» به تدریس ریاضیات و به‌خصوص هندسه پرداخت. در سال ۱۳۶۱ نیز بازنشسته شد. اما فعالیت‌های استاد در اینجا متوقف نشد و او به کار معلمی و تحقیق و تألیف ادامه داد.

در سال‌های بعد نیوشا به عضویت دفتر تألیف کتب درسی وزارت آموزش‌وپرورش درآمد و جزو مؤلفان کتاب‌های هندسهٔ نظام جدید آموزشی بود. وی همچنین در «دبیرستان فرزانگان» تهران به تدریس درس هندسه پرداخت و در آنجا معلم و راهنمای بسیاری از نخبگان و المپیادی‌ها بود که از جمله می‌توان به خانم‌ها مریم میرزاخانی و رؤیا بهشتی‌زواره اشاره کرد. استاد نیوشا همچنین از ابتدای تأسیس گروه المپیادهای وزارت آموزش‌وپرورش و بعدها باشگاه دانش‌پژوهان جوان، به عضویت آن‌ها درآمد و در سال ۱۹۹۱، به‌عنوان سرپرست تیم المپیاد ریاضی ایران به کشور سوئد اعزام شد.

استاد نیوشا هم‌اکنون در سن ۸۴ سالگی همچنان به کار تألیف و تحقیق مشغول است و آخرین کتاب ایشان، با عنوان «مسائلی در هندسهٔ مسطحه»، در سال ۱۳۹۳ توسط «انتشارات فاطمی» به چاپ رسید. پیشینهٔ درخشان استاد نیوشا بهانه‌ای کافی برای انجام گفت‌وگویی با ایشان بود. بنابراین از مدت‌ها قبل ایشان را برای مصاحبه برگزیده بودیم تا اینکه در مردادماه امسال فرصت این کار فراهم شد و استاد برای گفت‌وگو به دفتر مجله آمد. در این گفت‌وگوی صمیمی، آقایان هوشنگ شرقی و حمیدرضا امیری، مدیرداخلی و سردبیر مجلهٔ برهان، محمدهاشم رستمی، عضو هیئت تحریریهٔ مجله، حسین کریمی، عضو هیئت تحریریه مجله، و ابراهیم دارابی، دبیر پیشکسوت هندسه، مؤلف کتاب‌های کمک‌درسی متعدد در ریاضیات و عضو سابق هیئت تحریریهٔ «مجلهٔ رشد ریاضی» و دفتر تألیف کتب درسی نیز در گفت‌وگو شرکت داشتند. مشروح این گفت‌وگو را با هم بخوانیم.

رشد برهان: اجازه بدهید صحبتمان را از ۲۴ سال پیش شروع کنیم. در المپیاد ریاضی سال ۱۹۹۱ (۱۳۷۰ خورشیدی)، تیم المپیاد ریاضی ایران برای شرکت در این رقابت‌ها به شهر «سیگتونا»ی سوئد اعزام شد. این تیم برای نخستین‌بار توانست به مدال طلا برسد و در مجموع هم درخشش خوبی داشت. دو نفر از اعضای تیم، آقایان **بهرنگ نوحی** و **پیمان کسایی** موفق به کسب مدال طلا شدند و تیم کشورمان در مجموع به مقام هشتم رسید. این تیم سه سرپرست داشت که عبارت بودند از آقایان دکتر **رضوی**، دکتر **کرم‌زاده** و جناب‌عالی. می‌خواستم از شما بپرسم که چه‌طور شد به‌عنوان سرپرست آن تیم برگزیده شدید و اگر از آن دوره خاطره‌ای هم دارید، بفرمایید.

استاد نیوشا: کمیتهٔ المپیاد ریاضی در سال ۱۳۶۶ تأسیس شد و من از سال ۱۳۶۷ عضو آن بودم. سه چهار نفر بودیم، آقای دکتر **نجفی** بود که بعداً وزیر آموزش‌وپرورش شدند، آقای دکتر **کرم‌زاده** بود که از اهواز می‌آمد، آقای دکتر **حداد عادل** بود و من بودم. بعدها هم چند نفر دیگر اضافه شدند؛ از جمله آقایان

دکتر **رضوی**، دکتر **تابش**، دکتر **جلالی** و... . معمولاً هر سال دو نفر به‌عنوان سرپرست انتخاب می‌شدند که یکی از آن‌ها از طرف کمیتهٔ برگزاری مسابقه به اتاق سؤالات برده می‌شد و به مدت یک هفته در قرنطینه بود.

آن سال که من اعزام شدم، تصمیم گرفته شد که یک نفر دیگر هم به‌عنوان همراه برده شود. چون یک نفر که به اتاق سؤالات می‌رفت و نفر دوم هم به جلسات دعوت می‌شد و در نتیجه بچه‌های تیم تنها می‌شدند. برای آنکه بچه‌ها تنها نباشند و سرپرستی داشته باشند، قرعه به نام من افتاد و همراه تیم به شهر سیگتونا رفتیم. سیگتونا قبل از «استکهلم»، پایتخت قدیم سوئد بوده است و شهر بسیار کوچک و زیبایی است. محل مسابقات در دانشگاهی بود که حالا اسم آن به خاطرم نیست. در آن مسابقات همان‌طور که گفتید، بچه‌های ما دو مدال طلا و دو مدال نقره و دو مدال برنز آوردند. من در سال ۱۹۹۸ که به آمریکا رفته بودم، بهرنگ نوحی و پیمان کسایی هر دو در دانشگاه MIT و در دورهٔ دکترای ریاضی تحصیل می‌کردند و وقتی فهمیدند که من آنجا هستم، استقبال بسیار خوبی هم از من کردند و چند روزی مهمان آنان بودم.

کمیتهٔ المپیاد ریاضی در سال ۱۳۶۶ تأسیس شد و من از سال ۱۳۶۷ عضو آن بودم

رشد برهان: آیا شما با گروهی از المپیادی‌ها که خانم مریم میرزاخانی هم جزو آن‌ها بود، تدریس هندسه داشتید؟

استاد نیوشا: خیر من به آن‌ها تدریس نکردم. در زمان آن‌ها روش تدریس عوض شده بود و آن‌ها در دانشگاه صنعتی شریف و توسط استادان آنجا آموزش دیدند. ولی من در دبیرستان فرزانگان معلم هندسهٔ کلاسی بودم که خانم میرزاخانی و رویا بهشتی‌زواره در آن بودند. یک‌بار در برخوردی که با آقای دکتر **محمودیان** داشتم، ایشان گفتند که ما در تابستان در دانشگاه کلاسی برای دانش‌آموزان

همراه با اعضای تیم المپیاد ریاضی ایران در مقابل ساختمان سفارت ایران در سوئد. بعضی از کارکنان سفارتخانه نیز در عکس حضور دارند.

در کنار اعضای تیم المپیاد ریاضی ایران (سوئد ـ ۱۳۷۰)

مجلهٔ یکان تأثیرات مهم در پیشبرد اطلاعات ریاضی بچه‌ها داشت. بچه‌ها همیشه سراغ آن را می‌گرفتند و هر ماه منتظر انتشار آن بودند

مستعد مدارس داشتیم و تعدادی دانش‌آموز از دبیرستان فرزانگان بودند که یکی از آن‌ها که اسمش مریم بود، استعداد فوق‌العاده‌ای دارد و به من توصیه کرد که مراقب او باشم تا استعدادش شکوفا شود. بعد از پرس‌وجویی که کردم، متوجه شدم که این دانش‌آموز مریم میرزاخانی است که می‌خواست به اصرار پدرش به رشتهٔ تجربی برود و من مانع شدم و او را به رشتهٔ ریاضی هدایت کردم!

امیری: ببینید تأثیر یک توصیهٔ معلم چه‌قدر و تا کجا می‌تواند باشد! البته اگر ایشان به رشتهٔ تجربی می‌رفت، قطعاً باز هم موفق بود و مثلاً می‌توانست پزشک موفقی شود، ولی مسلماً دیگر «مدال فیلدز» را نمی‌گرفت!

استاد نیوشا: بله همین‌طور است. به هر حال آن‌ها- مریم میرزاخانی و رؤیا بهشتی- هر دو به رشتهٔ ریاضی رفتند و کلاس دوم که بودند، من معلم هندسه‌شان بودم و آن‌ها را از بقیه جدا می‌کردم و به آن‌ها مسئله‌های خاص می‌دادم تا روی آن‌ها کار کنند. دیگر به آن‌ها تکلیف‌های معمولی نمی‌دادم. اینها چون المپیادی شده بودند، کلاس‌های سوم و چهارم را دیگر به مدرسه نیامدند.

رشد برهان: بله، خانم میرزاخانی در المپیادهای ریاضی سال‌های ۱۹۹۴ و ۱۹۹۵ دو دوره پیاپی عضو تیم المپیاد ریاضی ایران بود و در هر دو دوره مدال طلا گرفت. جالب اینجا بود که در سال ۱۹۹۴ که ایشان سال سوم بود، امتیاز ۴۱ (از ۴۲) و در سال ۱۹۹۵ امتیاز کامل (۴۲) را گرفت و در واقع مدال طلای برتر- Supergold- را دریافت کرد که از ایرانی‌ها فقط سه نفر تاکنون موفق به دریافت آن شده‌اند.

خُب اگر از آن زمان سه دهه به عقب برگردیم، می‌رسیم به دههٔ چهل شمسی که شما تازه کارتان را به‌عنوان معلم هندسه در تهران و در دبیرستان مروی شروع کرده بودید. در «مجلهٔ ریاضی یکان» هم که آن زمان زنده‌یاد **عبدالحسین مصحفی** منتشر می‌کرد، چند جا اسم شما هست و شاگردانتان مسئله‌های طرح‌شدهٔ شما را به مجله می‌فرستادند. آیا این‌ها را می‌دیدید، و اصولاً نظرتان دربارهٔ مجلهٔ یکان و تأثیر آن در ترویج ریاضیات بین دانش‌آموزان آن دوره چیست؟

استاد نیوشا: بله آقای مصحفی، خدا رحمتشان کند. هم‌دوره‌ای ما بود و جزو ۳۰ نفری بود که آن موقع برای تحصیل به تهران آمده بودند. دو نفر از هم‌دوره‌ای‌های ما بسیار شاخص بودند. یکی آقای دکتر **محمدعلی قینی**، معلم ریاضی بود که بعداً ادامهٔ تحصیل داد و جزو شاگردان ممتاز دکتر **افضلی‌پور** بود و دانشیار دکتر افضلی‌پور و دستیار ایشان شد و به استادی دانشگاه تهران رسید. دیگری هم آقای مصحفی بود که مجلهٔ یکان را درآورد که ما هم آن را می‌خواندیم و مسائلی را برای آن می‌فرستادیم و دوره‌هایی از آن را هم داشتم. مجلهٔ یکان تأثیرات مهم در پیشبرد اطلاعات ریاضی بچه‌ها داشت. بچه‌ها همیشه سراغ آن را می‌گرفتند و هر ماه منتظر انتشار آن بودند تا قبل از آنکه تمام شود، آن را بخرند.

شرقی: من خودم خاطره‌ای دارم از آقای دکتر تابش که می‌گفت در سال‌های ۱۳۴۷ و ۱۳۴۸ که در دبیرستان هدف تحصیل می‌کردیم، به محض اینکه زنگ تفریح ساعت نهار می‌خورد، می‌دویدیم

به طرف دکهٔ روزنامه‌فروشی تا ببینیم مجلهٔ یکان درآمده است یا نه.

استاد نیوشا: کاملاً درست است. مسائل خوبی می‌نوشت، مقاله‌های خوبی داشت و روی دانش‌آموزان واقعاً تأثیر می‌گذاشت.

رشد برهان: غیر از دانش‌آموزان، یک نسل معلم‌ها هم بودند که یک تفاوت عمده با معلم‌های این دوره داشتند. کسانی همچون زنده‌یادان **مصحفی**، **غیور**، **شهریاری**، **باقر امامی**، **غلامرضا عسجدی** و... که ویژگی‌های منحصربه‌فردی داشتند و به معنی واقعی کلمه فرهیخته بودند. فرهیختگی به این معنی که یک نفر خودش را وقف معلمی کند، به‌خاطر کارش، به خاطر ترویج علم، و به‌خاطر کمک به جوانان کشور، فداکاری کند و از کارش لذت ببرد. کسی مانند مرحوم مصحفی که تمام زندگی‌اش را وقف انتشار مجله یکان کرد. او اصلاً به فکر مادیات نبود و به ترویج ریاضی پرداخت. متأسفانه امروزه دیگر این روحیات را کمتر می‌بینیم. به‌عنوان کسی که متعلق به آن نسل بوده‌اید و آن دوره را تجربه کرده‌اید، نظرتان چیست؟ چه تفاوتی باعث این موضوع شده است؟

استاد نیوشا: سؤال جالب و عجیبی است. من فکر می‌کنم تربیت دانشگاه‌ها، آن زمان، آن‌ها را آن‌گونه بارآورده بود. مثلاً استادان خود ما در دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران، آقایان دکتر **هشترودی**، دکتر **آل‌بویه**، دکتر **افضلی‌پور**، پروفسور **فاطمی** و... طوری تدریس کردند که دانشجویان علاوه بر درس ریاضی، از این‌ها درس زندگی و اخلاق هم می‌گرفتند. من خودم همیشه می‌خواستم به دکتر افضلی‌پور برسم و از خودم می‌پرسیدم که چرا و چگونه دکتر افضلی‌پور به این درجه از محبوبیت رسیده است و من چگونه می‌توانم به پای او برسم. شخصیت آن‌ها روی شاگردانشان که معلم‌های بعدی بودند، تأثیر بسیاری داشت. از معلمان، مثلاً از آقای غیور نام بردید. خب غیور یک دریا بود. نه‌تنها ریاضی‌دان، بلکه شاعر و ادیب بود. اخلاق خوبی داشت وقتی با آن متانت با انسان حرف می‌زد، مخاطب لذت می‌برد.

رشد برهان: بله در مصاحبه‌ای که با آقای دکتر **پاشا** داشتیم، از ایشان یاد کردیم. دکتر پاشا می‌گفت که در حین صحبت با استاد غیور، انسان محو شخصیت او می‌شد.

امیری: به نکتهٔ بسیار مهمی اشاره کردید. همان‌طور که فرموده‌اید استادانی که روی شاگردانشان تأثیرگذار بودند، همین تأثیر را از طریق معلمانی که پروردهٔ آن‌ها بودند، به دانش‌آموزان منتقل می‌کردند. این موضوع حلقهٔ مفقودهٔ امروز ماست. وقتی امروز چنان معلم‌هایی نداریم، طبیعی است که دانش‌آموزان ما هم آن‌گونه نخواهند شد. راه چاره چیست؟

استاد نیوشا: دو مسئله هست: یکی اینکه باید بپذیریم که سواد عمومی دانش‌آموزان امروز (به دلیل دسترسی بیشتر به اطلاعات) بیشتر از دانش‌آموزان آن موقع است، اما اخلاق، منش و شخصیت دانش‌آموزان نسبت به گذشته و آن احترام و ارتباط اخلاقی بین دانش‌آموز و معلم نسبت به آن زمان خیلی دگرگون شده است. معلم باید شخصیت به‌خصوصی داشته باشد. من نمی‌گویم که معلم نباید بخندد و همیشه عبوس باشد، ولی باید دانش‌آموزان به لحاظ اخلاقی از معلمشان حساب ببرند و تحت‌تأثیر او باشند.

در دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران، آقایان دکتر هشترودی، دکتر آل‌بویه، دکتر افضلی‌پور، پروفسور فاطمی و... طوری تدریس کردند که دانشجویان علاوه بر درس ریاضی، از این‌ها درس زندگی و اخلاق هم می‌گرفتند

(ادامه در شمارهٔ آینده)

معرفی کتاب

غلامرضا یاسی‌پور

علم در عمل

- **نویسنده:** جان لینهان[۱]
- **مترجم:** منیژه مدبر
- **ناشر:** مازیار

در کتـــاب و در فصل «*حماقـت و غرور*» آن چنین آمده است که:

«هر کســـی با یـــک قلـــم و ماشین‌حســـاب جیبی به‌راحتی می‌تواند رشـــته‌ای از تصادف‌هـــای خارق‌العاده به‌دســـت آورد. حاصـــل تقســـیم تعـــداد روزها در ســـال منجمـــان ۳۶۵/۲۴۲ بـــر مربع عدد π، ۳۷ اســـت ـ و این دمای بدن در مقیاس ســـانتی‌گراد اســـت. درازای دریاچهٔ «لاخنـس» ۲۲/۷۵ مایـــل یـــا ۴۰۰۴۰ یـــارد اســـت که نشـــان می‌دهد ۱۰ هیولا از آغـــاز آفرینش در آنجا وجود داشـــته‌اند. اگر به هر حرف انگلیســـی بنا بر جایی که در حروف الفبا دارد، عددی نسبت دهیم و سپس این مقادیر را بـــرای حـــروف موجـــود در «Archbishop Ussher» (خادم سراسقف)، «Peter Lemesurier» (پیتر لمه‌سوریر) و «Inverness-Shire Monster» (هیـــولای اســـتان اینورنس) جمـــع کنیم، عدد ۶۶۶ حاصل می‌شـــود که نشان می‌دهد، حیوان بارکشی ـ شاید هم دجالی ـ اعماق دریاچهٔ لاخنس را اشغال کرده است. سفرهای خارجی پرهزینه اســـت؛ بهتر اســـت تحقیق دربـــارهٔ خردمندی پیشینیان نزدیک کشور ادامه یابد!»

فصل‌های کتاب عبارت‌اند از:

- **چرا چیزها کار می‌کنند؟**
- **تاریخ، علم و جامعه**
- **زمین، خورشید و ستارگان**
- **حساب و موضوعاتی از این دست**
- **دنیای زندگان**
- **آدم‌ها**
- **حماقت و غرور**

در پیشـــگفتار کتاب این نکتهٔ جالب آمده است که: «علم برخلاف ورزش، سیاست، ادبیات یا نمایش به‌ندرت مـــردم را به هیجان می‌آورد. یک دلیلش این اســـت که دانشـــمندان از رسانه‌ها واهمه دارند و راضی نیستند که دیدگاهشـــان بیش از حد بزرگ جلوه داده شود یا اینکه به‌صورت مســـئله‌ای پیش‌پا افتاده مطرح شـــود. اغلب دانشـــمندان از رسانه‌ها روی‌گردانند و مسلم است که ما نمی‌توانیم آن‌ها را به زور به همکاری وادار کنیم، اما اگر گهگاه رسانه‌ها خود را به آنان نزدیک کنند، نتیجه بسیار جذاب می‌شود.»

تمام فصل‌های کتاب جالب و جذاب‌اند. در کتاب با مطالبی آشنا می‌شویم که کمتر با آن‌ها مواجه بوده‌ایم، و در اینجا تنها به ذکر پاره‌ای از مطالب فصل حســـاب و موضوعاتی از آن بســـنده می‌کنیم. این فصل چنین آغاز می‌شود:

«دو تـــا عدد دلخواه بنویســـید. آن دو را با هم جمع کنید و جواب را به‌عنوان عدد ســـوم بنویســـید. بعد عدد ســـوم را با دوم جمع کنیـــد و به‌همین ترتیب مدتی این کار را ادامه دهید. همین‌طور که این رشـــته اعداد ادامه می‌یابد، نســـبت اعداد متوالی به مقدار معینی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شـــود. این مقدار به تقریب $\frac{۱}{۶}$ (یا به تدقیق $\frac{۱}{۶/۱۸۰۳۳۹۸...}$) می‌شـــود. حدود سال ۱۲۰۰ میلادی، ساده‌ترین شکل این رشته با استفاده از اعداد

...، ۱۳، ۸، ۵، ۳، ۲، ۱، ۱

برای ریاضی‌دان بزرگ سدهٔ میانه، **لئوناردوی پیزایی،** آشنا بود. گاهی این رشته را فیبوناتچی نامیده‌اند که طبق معمول پس از درگذشت او به این نام خوانده شده است. کتاب «چرتکهٔ فیبوناتچی» اولین کتاب درسی طرفدار استفاده از اعداد عربی بود که امروزه برایمان آشناست. پیش از این نوآوری بنیادین، علم حساب کار توان‌فرسایی بود. ضرب کردن XIX (۱۹) در VII (۷) را امتحان کنید! فیبوناتچی عالمان اروپایی را با ایده‌های هندوها و اعراب (مسلمانان) آشنا و تحصیل جبر را پایه‌گذاری کرد.»

در مورد ریاضی‌دان‌ها نیز چنین می‌گوید:

«برخی ریاضی‌دان‌ها وقت خود را صرف موضوع‌هایی می‌کنند که مفید بودن آن‌ها از ابتدا معلوم است. آنان با به‌کار گرفتن نمادها و ایده‌های انتزاعی مدل‌هایی براساس واقعیت می‌سازند و نتایجی به‌دست می‌آورند که دارای ارزش علمی در علوم و مهندسی است. عده‌ای دیگر موضوع‌هایی را برمی‌گزینند که الزاماً در رابطه با عالم محسوس نیست و به‌عنوان شاخه‌ای از منطق تلقی می‌شود. معدودی نیز خود را وقف موضوع‌هایی به ظاهر بی‌اهمیت، اما در واقع کاملاً پرمحتوا می‌کنند؛ یعنی کار روی خواص خود اعداد.»

آیا تمام ریاضیات کاربرد عملی دارند؟ پاسخ این سؤال منفی است. کتاب در این مورد می‌گوید: «استاد فیزیکی که اخیراً از انجمن تحقیقات علمی کمک ۲۵۰ هزار پوندی دریافت کرد، با صداقت مخصوص به خود اظهار داشت که آزمایش‌هایی که این کمک مالی را جذب کرده‌اند، هیچ استفادهٔ عملی ندارند.

اینکه قضاوت او از روی غرور بود یا تواضع، صِرف آن اظهارنظر چیزی را معلوم نمی‌کند. با وجود این، نهادهای علمی به نتیجه‌گیری او آفرین گفتند؛ و حق هم داشتند. چون علم، به معنی دقیق کلمه، به خودی خود بی‌فایده است. فناوری که اغلب علم را همراهی می‌کند یا منبع الهام آن است (و گاه جداگانه پیشرفت می‌کند)، داستان دیگری است.

طبعاً، **به درد نخور بودن** درجاتی دارد که گاه حتی حامیان گشاده دست را هم به مرز تردید و ناباوری می‌کشاند. دانشمندان وقتی تحت فشار شدید قرار بگیرند، گاهی اذعان می‌کنند که کارشان می‌تواند در شرایط به‌خصوصی، آن هم تاحدودی، به‌کار کسی بیاید.»

کتاب از نداشتن ویراستار رنج می‌برد، و اگرچه مطالعهٔ آن برای همه، به‌خصوص دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی، سودمند است، رواست که در چاپ بعدی، این اثر به ویراستاری نیرومند سپرده شود.

*پی‌نوشت

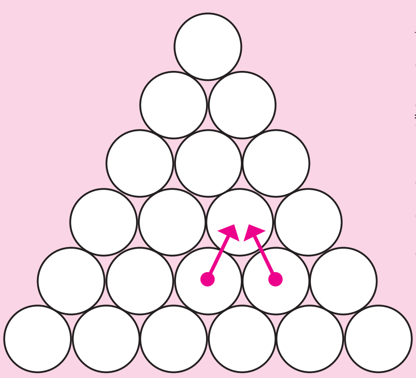
1. John Lenihan

پرسش‌های پیکارجو!

در نمودار مقابل، می‌خواهیم در دایره‌ها عددهای حقیقی را به‌گونه‌ای قرار دهیم که اولاً هر عدد با مجموع دو عدد زیرین آن برابر باشد، ثانیاً مجموع اعداد هر سطر با مجموع اعداد سطر زیرین آن برابر باشد، برای این کار باید حداقل چند عدد صفر در دایره‌ها قرار دهیم؟

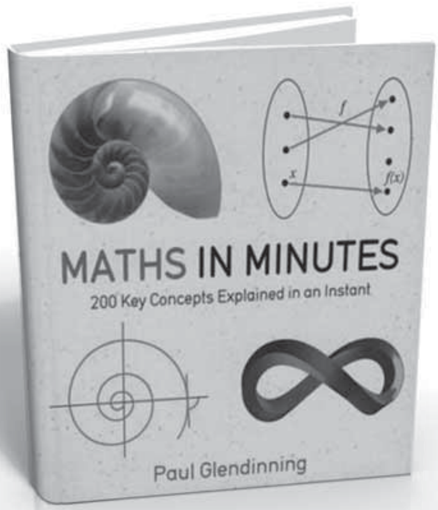
الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲

د) ۳ هـ) ۴



تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

ریاضیات در چند دقیقه



یک

عدد یک همراه با صفر در قلب کل حساب قرار دارد. «یک» صفت یک شیء منفرد است؛ یعنی، با جمع یا تفریق مکرر این عدد، جمیع «اعداد تمام»، چه مثبت و چه منفی، یعنی اعداد «صحیح» (integers) را می‌توان ایجاد کرد. این عمل پایه و اساس محاسبات، و شاید قدیمی‌ترین دستگاه شمارش بود که مبدأش را می‌توان تا دوران پیش از تاریخ پی‌گرفت. «یک» نقشی ویژه در ضرب نیز دارد: ضرب هر عدد معلوم در «یک»، صرفاً عدد نخستین را به‌دست می‌دهد. این ویژگی با استفاده از «*همانی ضربی*» (multiplicative identity) بیان می‌شود.

عدد یک دارای ویژگی‌های یگانه‌ای است، به این معنی که به طرق غیرمعمول رفتار می‌کند. این عدد عامل جمیع اعداد تمام دیگر، اولین عدد ناصفر و اولین عدد فرد است. همچنین استانداردی مفید در مقایسهٔ اندازه‌گیری‌ها به‌دست می‌دهد، به‌طوری که بسیاری از محاسبات در ریاضیات و علوم برای اینکه پاسخ‌های بین صفر و یک را به‌دست دهند، تحت قاعده و قانون درآمده‌اند.

صفر

صفر مفهومی پیچیده است، و برای مدتی طولانی اکراه فلسفی قابل‌ملاحظه‌ای برای شناختن و قرار دادن نامی بر آن وجود داشت. قدیمی‌ترین نمادهای صفر تنها بین ارقام دیگر، مشخص‌کنندهٔ غایب بودن به‌حساب می‌آمدند. به‌عنوان نمونه، دستگاه عددی بابلی‌ها، برای صفر زمانی که بین ارقام دیگر قرار می‌گرفت، اما نه در آخر یک عدد، از یک جانگه‌دار استفاده می‌کرد. قدیمی‌ترین کاربرد قطعی صفر به‌عنوان عددی مشابه هر عدد دیگر، از طریق ریاضی‌دان‌های هندی در حدود قرن نهم مطرح شده است.

غیر از نگرانی‌های فلسفی، ریاضی‌دان‌های اولیه نیز بـرای پذیرش صفر اکراه داشـتند، چرا که این شیء همیشه مانند اعداد دیگر رفتار نمی‌کرد. برای مثال، تقسیم بر صفر عملی بی‌معنی است، و ضرب هر عدد در صفر صرفاً صفر را به‌دسـت می‌دهد. اما صفـر در جمع همان نقشـی را ایفا می‌کند که یک در ضـرب دارد. صفـر به‌عنـوان «*همانی جمعی*» (additive identity) شناخته می‌شود، زیرا جمع هر عدد با صفر به عدد اصلی منجر می‌شود.

بی‌نهایت

بی‌نهایت (که از لحاظ ریاضی با ∞ نمایش داده می‌شـود)، صرفاً مفهوم بی‌پایان اسـت. یک شیء بی‌نهایت، شیئی نامحدود است. اعمال ریاضی بدون برخـورد با صورت‌های گوناگون بی‌نهایت، مشـکل است. بسـیاری از استدلال‌های ریاضیات و فنون یا شامل انتخاب چیزی از یک فهرست بی‌نهایت است، یا قرار است تشخیص دهد که اگر فرایندی مجاز به *میل به بی‌نهایت* باشد، یعنی به‌طور مداوم به طرف حد نامتناهی خویش ادامه دهد، چه اتفاقی می‌افتد.

گردایه‌هـای نامتناهی اعداد یا اشـیای دیگر، موسوم به مجموعه‌های نامتناهی یا بی‌نهایت، بخشی کلیدی از ریاضیات‌اند. توصیف ریاضی مجموعه‌هایی چنین، به این نتیجهٔ زیبا منجر می‌شود که بیش از یک نوع مجموعهٔ نامتناهی وجود دارد، و از این نظر انواع متفاوتی از بی‌نهایت موجود می‌شوند.

در واقـع، بی‌نهایت نـوع، بزرگ‌تر و بزرگ‌تر، از مجموعه‌های نامتناهی وجـود دارند، و این موضوع در حالی‌که ممکن اسـت ضدشهود به‌نظر برسد، از منطق تعاریف ریاضیات به دست می‌آید.

دکتر محرم نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۱۷۱. درون چهارضلعی محدب ABCD، نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌هایش از رئوس، کمترین مقدار ممکن باشد.

۱۷۲. ثابت کنید فاصلهٔ دو نقطهٔ دلخواه درون هر مثلث از نصف محیط این مثلث بزرگ‌تر نیست.

۱۷۳. دو بازیکن به نوبت سکه‌های هزار ریالی (هم‌اندازه) را روی میزی گرد می‌گذارند، بی‌آنکه هیچ سکه‌ای روی دیگری قرار گیرد. بازیکنی که نتواند دیگر سکه‌ای روی میز بگذارد بازنده است. چه کسی راهبرد برد دارد؟

۱۷۴. آیا درست است که در میان هر ۱۰ پاره‌خط همیشه ۳ پاره‌خط وجود دارند که می‌توان با آن‌ها یک مثلث رسم کرد؟

۱۷۵. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی $n\geq 3$، یک nضلعی محدب وجود دارد که دقیقاً سه زاویهٔ حاده دارد.

۱۷۶. ثابت کنید نمی‌توان پنج خط راست در صفحه رسم کرد، به‌طوری که دقیقاً سه نقطهٔ تقاطع داشته باشند.

۱۷۷. ثابت کنید $2^{3^{1394}}+1$ بر 3^{1395} بخش‌پذیر است.

۱۷۸. خانه‌های جدولی $m\times n$ را با اعداد حقیقی طوری پر کرده‌ایم که مجموع اعداد هر سطر و همچنین مجموع اعداد هر ستون برابر با ۱ شده است. ثابت کنید: $m=n$.

۱۷۹. ثابت کنید: $4^{79} < 2^{100}+3^{100} < 4^{80}$

۱۸۰. کدام عدد بزرگ‌تر است: 123456785^2 یا $123456789\times 123456781$

■ بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۴۱. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد: $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$ (به توان برسانید و ساده کنید). در نتیجه: $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\le[\sqrt{4n+2}]$. حال فرض کنید این دو عدد برابر نباشند. در نتیجه عدد طبیعی q به‌طوری وجود دارد که:

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<q\le\sqrt{4n+2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{4n^2+4n}<q^2-2n-1\le 2n+1$$
$$\Rightarrow 4n^2+4n<(q^2-2n-1)^2\le(2n+1)^2$$

اما $4n^2+4n$ و $(2n+1)^2$ دو عدد صحیح متوالی هستند. پس:

$$q^2-2n-1=2n+1\Rightarrow q^2=4n+2$$

اما مربع هر عدد طبیعی در تقسیم بر ۴ نمی‌تواند باقی‌ماندهٔ ۲ داشته باشد (چرا؟) که تناقض است. پس: $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$. حال ثابت می‌کنیم: $[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$.

اگر: $m=[\sqrt{4n+1}]<m+1=[\sqrt{4n+2}]$، آن‌گاه: $m\le\sqrt{4n+1}<m+1\le\sqrt{4n+2}$.

در نتیجه: $m^2\le 4n+1<(m+1)^2\le 4n+2$.

اما $4n+1$ و $4n+2$ دو عدد طبیعی متوالی هستند، در نتیجه: $(m+1)^2=4n+2$ که تناقض است. پس: $[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ و به‌طور مشابه ثابت می‌شود: $[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$.

۱۴۲. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید:

$A=(x+y)^5-(x^5+y^5)$

$B=(x+y)^7-(x^7+y^7)$

$$(x+y)^5-(x^5+y^5)=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$
$$(x+y)^7-(x^7+y^7)=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

۱۴۳. x، y و z سه عدد حقیقی هستند و $x\neq y$ است، به‌طوری‌که داریم: $x^2(y+z)=y^2(x+z)=2$. مطلوب است مقدار عددی $z^2(x+y)$.

داریم:

$$0=x^2(y+z)-y^2(x+z)=xy(x-y)+(x^2-y^2)z$$
$$=(x-y)(xy+yz+zx)$$

چون: $x\neq y$، پس: $xy+yz+zx=0$. در نتیجه:

$$(x-z)(xy+yz+zx)=0\Rightarrow x^2(y+z)=z^2(x+y)$$
$$\Rightarrow z^2(x+y)=2$$

۱۴۴. اگر $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ حسابی باشد، بررسی کنید که کدام‌یک از دنباله‌های زیر حسابی است:

الف) $b_n=a_{n+1}^2-a_n^2$

ب) $c_n=aa_n+b$

ج) $d_n=a_n^2$

الف)
$$b_{n+1}-b_n=(a_{n+2}^2-a_{n+1}^2)-(a_{n+1}^2-a_n^2)$$
$$=(a_{n+2}-a_{n+1})(a_{n+2}+a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)$$
$$=d(a_{n+2}+a_{n+1}-a_{n+1}-a_n)=2d^2$$

$\Rightarrow$ $\{b_n\}$ یک دنبالهٔ حسابی است

ب)
$$c_{n+1}-c_n=aa_{n+1}+b-aa_n-b=ad$$

$\Rightarrow$ $\{c_n\}$ یک دنبالهٔ حسابی است

ج)
$$d_{n+1}-d_n=a_{n+1}^2-a_n^2=d(a_{n+1}+a_n)$$
$$=d(2a_1+(2n-1)d)$$

بنابراین این دنباله حسابی نیست.

۱۴۵. ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ حسابی است، اگر و تنها اگر اعداد حقیقی A و B موجود باشند؛ به‌طوری‌که: $S_n=a_1+a_2+...+a_n=An^2+Bn$.

اگر $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ حسابی باشد، آن‌گاه:

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n$$
$$=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$$

همچنین اگر $S_n=An^2+Bn$، آن‌گاه:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = An^2+Bn-(A(n-1)^2+B(n-1))$$
$$= A(2n-1)+B = (A+B)+2A(n-1)$$
$$= a_1+2A(n-1)$$

در نتیجه $\{a_n\}$ دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $2A$ است.

۱۴۶. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای حسابی با جملات مثبت باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt{a_1a_n} \le \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \le \frac{a_1+a_n}{2}$$

به کمک نامساوی واسطه‌ها داریم:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$$
$$= \frac{1}{n}\times\frac{a_1+a_n}{2}\times n = \frac{a_1+a_n}{2}$$

برای اثبات نامساوی دیگر از تساوی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

داریم:

$$a_1a_2 = \frac{n-1}{\frac{1}{a_1a_2}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}} \le \sqrt[n-1]{(a_1a_2)(a_2a_3)\dots(a_{n-1}a_n)}$$

در نتیجه: $(a_1a_n)^{n-1} \le a_1(a_2\dots a_{n-1})^2 a_n$.

بنابراین:

$$(a_1a_n)^n \le (a_1a_2\dots a_n)^2 \Rightarrow \sqrt{a_1a_2} \le \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

۱۴۷. فرض کنید S_n مجموع همهٔ اعداد طبیعی بین 2^n و 2^{n+1} باشد. ثابت کنید S_n مضرب ۳ است.

اعداد بین 2^n و 2^{n+1} یک دنبالهٔ حسابی هستند با جملهٔ اول 2^n+1 و قدرنسبت ۱. در نتیجه مجموعشان برابر است با:

$$S_n = \frac{2^n+1+2^{n+1}-1}{2}\times(2^{n+1}-1-2^n)$$
$$= 3\times2^{n-1}(2^n-1)$$

۱۴۸. خانه‌های جدول زیر را با اعداد طبیعی پر کنید که اعداد هر سطر و اعداد هر ستون یک تصاعد حسابی باشند.

	۷۴			
				۱۸۶
		۱۰۳		
۰				

فرض کنید a_{ij}، عددی است که در سطر iام و ستون jام قرار دارد. عدد سمت راست صفر را x_0 و عدد بالای صفر را x_1 می‌نامیم. در نتیجه اعداد سطر آخر ۰، x_0، $2x_0$، $3x_0$ و $4x_0$ هستند و اعداد ستون اول برابر $4x_1$، $3x_1$، $2x_1$، x_1 و ۰ هستند. سعی کنید به کمک اعداد نوشته شده در جدول نتیجه بگیرید: $2x_0+x_1=113$ و $4x_0-3x_1=161$. با حل این دو معادله نتیجه می‌شود: $x_0=50$ و $x_1=13$.

۱۴۹. تصاعد هندسی $\{a_n\}$ را بیابید، به‌طوری که برای هر $n\ge1$ داشته باشیم: $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

با فرض $a_n=a_1r^{n-1}$ داریم: $a_0r^{n+1}=a_0r^n+a_0r^{n-1}$.

چون $a_0\neq0$ و $r\neq0$ در نتیجه: $r^2=r+1$. بنابراین: $r=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

۱۵۰. برای هر عدد طبیعی $n\ge2$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<\frac{3}{4}$$

یک نامساوی قوی‌تر را با استقرا ثابت می‌کنیم:

$$S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\le\frac{3}{4}-\frac{1}{n}$$

برای n=2 حکم برقرار است، چون: $\frac{1}{4}\le\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

با فرض درستی حکم برای n=k، ثابت می‌کنیم حکم برای n=k+1 نیز برقرار است:

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{3}{4}-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{k+1}\times\frac{k^2+k+1}{k^2+1}<\frac{3}{4}-\frac{1}{k+1}$$

یکی از دوستان من چندی پیش برای سیاحت و گردش به جزیرهٔ پرسشگران رفته بود! همانجا که بود با من تماس گرفت و از زیبایی‌های آنجا برایم گفت و اضافه کرد: حتماً باید بیایی و اینجا را ببینی. به جز جاذبه‌های گردشگری مردم عجیبی هم دارد! آن‌ها فقط سؤال می‌کنند و به‌جز این چیز دیگری نمی‌گویند، و به همین ترتیب هم با هم ارتباط برقرار می‌کنند! عجیب آنکه آن‌ها دو نوع مختلف هم هستند: نوع A و نوع B.

وقتی از دوستم خواستم در مورد این دو نوع توضیح دهد، گفت: آن‌ها که نوع A هستند، فقط سؤال‌هایی می‌پرسند که پاسخ آن بله باشد و آن‌ها که نوع B هستند، فقط سؤال‌هایی می‌پرسند که پاسخ آن خیر باشد. مثلاً اگر کسی از شما بپرسد: «آیا آب مایع است؟» می‌فهمید که از نوع A است. اما اگر کسی از شما بپرسد: «آیا ۲ به اضافهٔ ۲ می‌شود ۵؟» و یا بپرسد: «آیا ۲ به اضافهٔ ۲ می‌شود ۶؟» می‌فهمید که او از نوع B است، زیرا پاسخ هر دوی این سؤالات خیر است.

گفتم: عجب! جالب است، باید خودم بیایم و ببینم!

معمای اول

دوستم گفت: ببین همین الان یک نفر آمده و به من می‌گوید: «آیا من از نوع B هستم؟» و من مانده‌ام چه بگویم! به نظر تو او از چه نوعی است؟

حالا خوانندهٔ عزیز، نظر شما چیست؟ او از چه نوعی است؟!

معمای دوم

دوستم بعد از توضیح من، حرفش را تصحیح کرد و گفت: بله ببخشید، او از من پرسید: «آیا من از نوع A هستم؟» حالا چه می‌گویی؟ شما بگویید او از چه نوعی است؟

***

بعد از خداحافظی با دوستم، هیجان‌زده بودم و می‌خواستم این مردم عجیب و غریب را ببینم. پس فوراً اقدام کردم و با اولین تور مسافرتی خودم را به این جزیرهٔ عجیب رساندم.

معمای سوم

به محض ورود به جزیره، یک زوج جوان را ملاحظه کردم که در حال قدم زدن بودند. آقا رو به من کرد و گفت: «آیا من و همسرم هر دو از نوع B هستیم؟»

شما بگویید، او و همسرش هر کدام از چه نوعی هستند؟

معمای چهارم

کمی بعد به دو برادر برخوردم. یکی از آن‌ها از دیگری پرسید: «آیا درست است که لااقل یکی از ما از نوع B است؟»

شما بگویید: این دو برادر هر یک از چه نوعی هستند؟

معمای پنجم

بعد از آن یک زوج دیگر را دیدم. آقا رو به همسرش گفت: «آیا ما از دو نوع متفاوت هستیم؟»

دربارهٔ نوع این دو نفر چه می‌توانید بگویید؟

معمای ششم

بعد از آن شهروند دیگری را ملاقات کردم. او از من پرسید: «آیا من از نوعی هستم که می‌تواند بپرسد: «آیا من از نوع B هستم؟»» این شهروند از چه نوعی بود؟

محمود داورزنی
کارشناس ارشد ریاضی و
دبیر ریاضی شهر ری

قضیهٔ تقسیم

اشاره

قضیهٔ تقسیم به شکل $a=bq+r$ که در آن $a,b,q\in Z$ و $r\in N$ و $۰\leq r<|b|$، در بسیاری از مسائل دیده می‌شود و تقریباً برای حل تمامی این مسائل باید دربارهٔ پارامترهای این قضیه شناخت کافی داشت. در این مقاله ابتدا این قضیه را اثبات می‌کنیم و سپس چند مسئله برای درک بیشتر آورده می‌شود.

از تقسیم یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر و تعیین خارج‌قسمت و باقی‌مانده، هر دانش‌آموزی در محاسبات خود بارها استفاده می‌کند. البته می‌توانیم یک عدد صحیح منفی را نیز بر یک عدد ناصفر دیگر تقسیم کنیم. قضیهٔ مشهور زیر که به قضیه یا الگوریتم تقسیم معروف است، این ادعا را ثابت می‌کند.

قضیهٔ تقسیم: فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند و $b\neq ۰$. در این صورت اعداد صحیح و یکتای r و q وجود دارند، به‌طوری که: $a=bq+r$ ؛ $۰\leq r<|b|$.

اثبات: دنبالهٔ زیر از اعداد صحیح را در نظر بگیرید:

$..., -۲|b| , -|b|, ۰ , |b|, ۲|b|,...$

عدد صحیح a بین دو عضو متوالی این دنباله قرار دارد. به عبارت دیگر، عدد صحیح q وجود دارد به‌طوری که:

$q|b|\leq a<(q+۱)|b| \quad (۱)$

قرار دهید: $r=a-q|b|$، بنابراین طبق نامساوی (۱): $۰\leq r<|b|$. اگر: $b>۰$، سپس: $a=bq+r$ و $۰\leq r<b$. و اگر $b<۰$، آن‌گاه: $a=b(-q)+r$ و $۰\leq r<|b|$. بنابراین وجود r و q اثبات می‌شود.

برای اثبات یکتایی r و q، فرض کنید ´r و ´q دو عدد صحیح باشند که:

$a=bq'+r' \;;\; ۰\leq r'<|b|$

از مقایسهٔ این تساوی با تساوی بالا داریم:

$$\begin{cases} a=bq+r \\ a=bq'+r' \end{cases} \Rightarrow bq+r=bq'+r' \Rightarrow b(q-q')=r'-r$$

$$\Rightarrow |b||q-q'|=|r-r'| \qquad (۲)$$

با توجه به اینکه: $r'<|b|$ و $۰\leq r$، پس: $|r-r'|<|b|$. بنابراین تساوی (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$|b||q-q'|=|r-r'|\Rightarrow|b||q-q'|<|b|\Rightarrow|q-q'|<۱$

و چون q و ´q اعداد صحیح‌اند، باید: $q=q'$ و در ادامه داریم: $r=a-bq=a-bq'=r'$. بنابراین r و q یکتا هستند.

نکته: با توجه به قضیهٔ تقسیم، خارج‌قسمت تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b عبارت است از q که: $q=\left[\frac{a}{b}\right]$، زیرا:

$$a=bq+r\Rightarrow\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}$$

$$\Rightarrow\left[\frac{a}{b}\right]=\left[q+\frac{r}{b}\right]=q+\left[\frac{r}{b}\right]=q+۰=q, (۰\leq\frac{r}{b}<۱)$$

مسئلهٔ ۱. اگر $a=-۲۰$ و $b=۳$، خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم a را بر b پیدا کنید.

حل: ابتدا خارج‌قسمت را از نکتهٔ بالا پیدا می‌کنیم:

$$q=\left[\frac{a}{b}\right]=\left[-\frac{۲۰}{۳}\right]=-۷$$

و سپس باقی‌مانده را از فرمول $a=bq+r$ محاسبه می‌کنیم: $-۲۰=۳(-۷)+r\Rightarrow r=۱$.

مسئلهٔ ۲. در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۱۷ و خارج‌قسمت ۲۵ است. اگر a مضرب ۶ باشد، کمترین مقدار ممکن برای a را به‌دست آورید.

حل: شکل مسئله را از قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

$a=bq+r\Rightarrow a=۲۵b+۱۷;\; ۰\leq ۱۷<b$

بنابراین برای تعیین مقادیر a می‌توانیم مقادیر b را از نامساوی بالا به‌ترتیب قرار دهیم: $b=۱۸,۱۹,۲۰,...$. برای اینکه a کوچک‌ترین عدد مضرب ۶ باشد، کافی است قرار دهیم: $b=۱۹$ و از آنجا داریم: $a=۲۵(۱۹)+۱۷=۴۹۲$.

مسئلهٔ ۳. در تقسیم عدد a بر ۵۹ باقی‌مانده برابر ۱۵ است. اگر ۵۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت چه تغییری می‌کنند؟

حل: شکل مسئله را قبل و بعد از انجام تغییرات، از قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = 59q+15 \\ a+50 = 59q+15+50 = 59q+65 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ۶۵ نمی‌تواند باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a+۵۰ بر ۵۹ باشد، از عدد ۶۵، ۵۹ واحد کم می‌کنیم:

$$a+50 = 59q+65 = \underbrace{59q+59}+6 = 59(q+1)+6 = 59q'+6$$

و چون: ۵۹>۶≥۰، پس تساوی بالا یعنی a+۵۰=۵۹q´+۶ می‌تواند شکلی از قضیهٔ تقسیم باشد. بنابراین خارج‌قسمت یک واحد اضافه شده و باقی‌مانده ۹ واحد کم شده است.

مسئلهٔ ۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۱۵ به‌ترتیب ۷ و ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳a−۷b بر ۱۵ را به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} a = 15q+7 \\ b = 15q'+4 \end{cases} \Rightarrow 3a-7b = 3(15q+7)-7(15q'+4)$$
$$= 15(3q-7q')-7 = 15q''-7$$

تساوی ۳a−۷b=۱۵q˝−۷ نمی‌تواند باقی‌مانده را از قضیهٔ تقسیم به‌دست آورد، زیرا باقی‌مانده هیچ‌گاه منفی نیست. برای اینکه باقی‌مانده مثبت شود، به عدد ۷- مضارب ۱۵ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$3a-7b = 15q''-7 = \underbrace{15q''-15}+15-7$$
$$= 15(q''-1)+8 = 15q_1+8$$

پس باقی‌ماندهٔ ۳a−۷b بر ۱۵ برابر ۸ است.

مسئلهٔ ۵. در تقسیم a بر b باقی‌مانده ۶۵ و خارج‌قسمت ۱۷ است. حداکثر چند واحد می‌توانید به مقسوم‌علیه اضافه کنید بدون آنکه مقسوم و خارج‌قسمت تغییر کنند؟

حل: صورت مسئله را قبل و بعد از تغییرات به شکل قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = 17b+65 \\ a = 17(b+x)+r \end{cases}$$

اکنون باید بیشترین مقدار ممکن برای x را به‌دست آوریم. از اختلاف این دو تساوی داریم:

$$0 = 17x+r-65 \Rightarrow r = 65-17x \overset{r\geq 0}{\Rightarrow} 65-17x \geq 0$$
$$\Rightarrow x \leq \frac{65}{18}$$

و بنابراین بیشترین مقدار x برابر است با: x=۳.

مسئلهٔ ۶. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ و ۳ به ترتیب برابر با ۴ و ۱ است. باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۵ را به دست آورید.

حل: شکل قضیهٔ تقسیم را برای تقسیم a بر ۵ و ۳ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = 5q+4 \Rightarrow 3a = 15q+12 \\ a = 3q'+1 \Rightarrow 5a = 15q'+5 \end{cases} \Rightarrow 5a-3a = 15(q'-q)-7$$
$$\Rightarrow 2a = 15q''-7$$

برای رسیدن به جواب با کمک قضیهٔ تقسیم، باید در تساوی بالا ۲a را به a تبدیل کنیم.

برای این‌کار ابتدا ۷- را به یک عدد زوج تبدیل می‌کنیم:

$$2a = 15q''-7 = 15q''-15+8 = 15(q''-1)+8$$
$$\Rightarrow 2a = 15q_1+8$$

در تساوی بالا، ۲a و ۸ زوج هستند، پس $15q_1$ و در نتیجه q_1 باید زوج باشد:

$$2a = 15(2k)+8 = 30k+8 \overset{\div 2}{\Rightarrow} a = 15k+4$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۵، ۴ است.

مسئلهٔ ۷. در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ است. چند عضو از مجموعه جواب‌های a مضرب ۵ است؟

حل: مسئله را به شکل قضیهٔ تقسیم می‌نویسیم:

a=۲۱b+۳۷; ۳۷<b

با توجه به اینکه a<۱۰۰۰ داریم:

$$21b+37<1000 \Rightarrow 21b<963 \Rightarrow b<\frac{963}{21} \Rightarrow b<45/6$$

پس: ۳۷<b<۴۵/۶. اکنون باید تمام مقادیر ممکن برای b را در تساوی a=۲۱b+۳۷ قرار داد تا همهٔ اعداد مضرب ۵ برای a به‌دست آید. البته با توجه به اینکه: a=(۲۰+۱)b+۳۷، بنابراین b باید به شکل ۵k+۳ باشد (رقم یکان a باید مضرب ۵ باشد) و از نامساوی ۳۷<b<۴۵/۶ فقط دو عدد ۳۸ و ۴۳ به شکل ۵k+۳ هستند.

آموزشی

هوشنگ شرقی

از روابط طولی در دایره‌ها بیشتر بدانیم!

اشاره

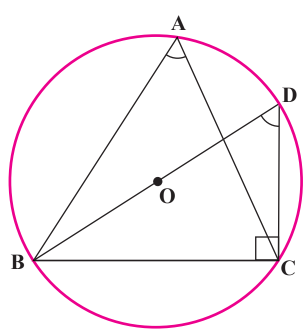
در کتاب درسی هندسهٔ ۲ به تعدادی از رابطه‌های طولی در دایره اشاره شده است که مربوط به طول‌های قطعه‌ها و مماس‌ها در دایره می‌شوند. اما برخی رابطه‌های طولی دیگر در ارتباط با مثلث‌ها در دایره وجود دارند که به‌طور غیرمستقیم به بعضی از آن‌ها اشاره‌هایی شده است. چون آگاهی بیشتر از این رابطه‌ها، در حل بسیاری از مسائل به ما یاری می‌رساند، بر آن شدیم که به این رابطه‌ها اشاره‌هایی داشته باشیم. توصیه می‌کنیم که در حل تمرین‌های متن، قدم‌به‌قدم با ما همراه شوید تا در انتهای کار، به نتیجهٔ مطلوب مقاله برسید.

الف) شعاع دایرهٔ محیطی مثلث

می‌دانیم که از سه رأس هر مثلث، یک و فقط یک دایره می‌گذرد، به‌طوری‌که مثلث در آن محاط شود و آن را دایرهٔ محیطی مثلث می‌گوییم. (**سؤال:** مرکز این دایره چگونه به‌دست می‌آید؟) حال اگر قطر گذرنده از یک رأس دلخواه (مثلاً B) را رسم کنیم (قطر BD) و D را به C وصل کنیم، مطابق شکل داریم:

(چرا؟) $\hat{C}=90^\circ \Rightarrow \Delta BDC: \sin D=\frac{BC}{BD}$ و $\hat{D}=\hat{A}$ (چرا؟)

$$\Rightarrow \sin A=\frac{a}{2R} \Rightarrow a=2R\sin A$$



یعنی در مثلث ABC، طول ضلع BC(a) برابر است با حاصل‌ضرب قطر دایرهٔ محیطی مثلث در سینوس زاویهٔ روبه‌رو به این ضلع، و این استدلال قابل تعمیم به همهٔ اضلاع مثلث نیز هست؛ یعنی:

$$b=2R\sin B, c=2R\sin C$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

سؤال:

اگر زاویهٔ A منفرجه باشد، آیا استدلال فوق دچار اشکال نمی‌شود؟ با رسم یک شکل مشابه و استدلالی دیگر نشان دهید که در این حالت هم همین حکم برقرار است.

رابطهٔ بالا که به «قضیهٔ سینوس‌ها» هم معروف است، بین اضلاع و زاویه‌های یک مثلث رابطه‌ای مستقیم برقرار می‌سازد.

● **مثال۱.** در مثلث ABC داریم: $\sin^{۲} A = \sin^{۲} B + \sin^{۲} C$. این مثلث چه نوع است؟

حل: به کمک قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\sin A = \frac{a}{۲R}, \sin B = \frac{b}{۲R}, \sin C = \frac{c}{۲R}$$

و با توجه به فرض مسئله نتیجه می‌شود:

$$\frac{a^{۲}}{۴R^{۲}} = \frac{b^{۲}}{۴R^{۲}} + \frac{c^{۲}}{۴R^{۲}} \Rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$

یعنی مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.

● **مثال۲.** در مثلث ABC، a=۸ و $\hat{A} = ۶۰^{\circ}$ مساحت دایرهٔ محیطی مثلث چه‌قدر است؟

حل:

$$۲R = \frac{a}{\sin A} = \frac{۸}{\sin ۶۰^{\circ}} = \frac{۸}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱۶}{\sqrt{۳}} \Rightarrow R = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

$$S = \pi R^{۲} = \frac{۶۴\pi}{۳}$$

■ **تمرین ۱.** اگر در مثلث ABC بین BC=a و AC=b رابطهٔ a=۲bcosC برقرار باشد، نشان دهید که مثلث در رأس A متساوی‌الساقین است. (راهنمایی: a و b را به sinA و sinB و سمت راست رابطهٔ حاصل را به مجموع تبدیل کنید.)

■ **تمرین ۲.** می‌دانیم که مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب هر دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها. با توجه به این موضوع نشان دهید شعاع دایرهٔ محیطی هر مثلث از دستور $R = \frac{abc}{۴S}$ نیز به‌دست می‌آید.

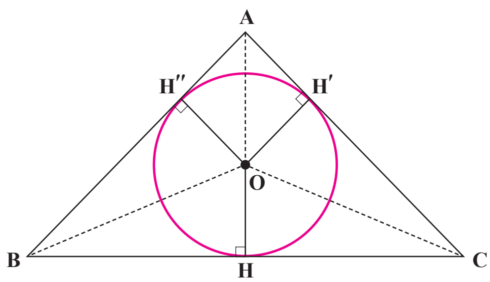
■ **تمرین ۳.** به کمک دستور تمرین ۲، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را برحسب a به‌دست آورید.

ب) دایره‌های محاطی مثلث و روابط طولی آن‌ها

۱. دایرهٔ محاطی داخلی

می‌دانیم که در هر مثلث، یک و تنها یک دایره قابل محاط شدن است و این دایره بر اضلاع مثلث در سه نقطه مماس می‌شود. (**سؤال:** مرکز این دایره چه نقطه‌ای است؟) از آنجا که شعاع دایره بر مماس بر آن در نقطهٔ تماس عمود می‌شود، لذا در شکل بالا داریم:

$$OH = OH' = OH'' = r$$



برای محاسبهٔ اندازهٔ شعاع این دایره، از O به A، B و C وصل می‌کنیم. به کمک مساحت‌ها داریم:

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}OH''.AB + \frac{۱}{۲}OH'.AC + \frac{۱}{۲}OH.BC$$

$$= \frac{۱}{۲}c.r + \frac{۱}{۲}b.r + \frac{۱}{۲}a.r = \frac{۱}{۲}(a+b+c)r$$

و با فرض a+b+c=۲P نتیجه می‌شود: S=Pr و یا $r = \frac{S}{P}$.

یعنی: «اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث برابر است با حاصل تقسیم مساحت مثلث بر نصف محیط آن.»

● **مثال۳.** طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه‌ای را بیابید که طول‌های اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۳ و ۴ سانتی‌متر باشد.

حل: b=۳ و c=۴. به کمک قضیهٔ فیثاغورس $(a^{۲} = b^{۲} + c^{۲})$ وتر مثلث را به‌دست می‌آوریم: a=۵ بنابراین:

$$۲P = a + b + c = ۱۲,\ P = ۶$$

$$S = \frac{bc}{۲} = ۶ \Rightarrow r = \frac{S}{P} = ۱$$

● **مثال۴.** طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را برحسب a به‌دست آورید.

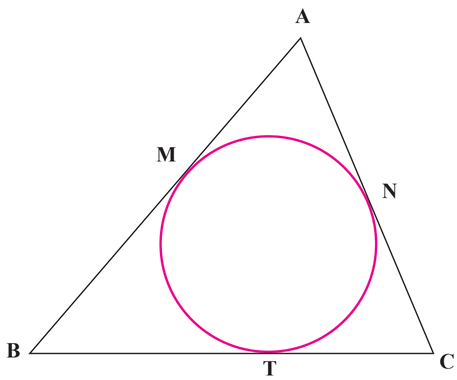
حل: می‌دانیم: $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$، $۲P = a + a + a$ و $P = \frac{۳a}{۲}$. در نتیجه:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{۳a}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

این نتیجه را به روش هندسی هم می‌توان به دست آورد (با رسم شکل امتحان کنید)، اما مسلماً این روش آسان‌تر است.

■ **تمرین ۴.** در مثلث متساوی‌الساقینی که طول قاعدهٔ آن ۱۲ واحد و طول ساق‌های آن ۱۰ واحد است، طول شعاع دایرهٔ محاطی را به‌دست آورید.

در ادامه یک ویژگی مهم دیگر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را شرح می‌دهیم. با توجه به ویژگی برابری مماس‌هایی که از هر نقطهٔ خارج از دایره بر آن رسم می‌شوند، در شکل زیر داریم:



$$AM = AN,\ CN = CT,\ BT = BM$$

با جمع کردن طرفین این تساوی‌ها به ترتیب زیر نتیجه می‌شود:

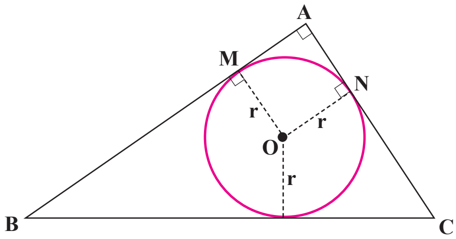
$$AN + CN + BM = AM + CT + BT$$
$$\Rightarrow AC + BM = AM + BC \Rightarrow AM = AC + BM - BC$$
$$= AC + AB - AM - BC \Rightarrow 2AM = AB + AC - BC$$
$$\Rightarrow 2AM = (AB + AC + BC) - 2BC = 2P - 2a$$
$$\Rightarrow AM = AN = P - a$$

نتیجه: در هر مثلث، طول‌های قطعات مماس بر دایرهٔ محاطی مثلث برابر است با نصف محیط مثلث منهای ضلع مقابل به هر قطعه؛ یعنی داریم:

$$AM = AN = P - a, CN = CT = P - c, BM = BT = P - b$$

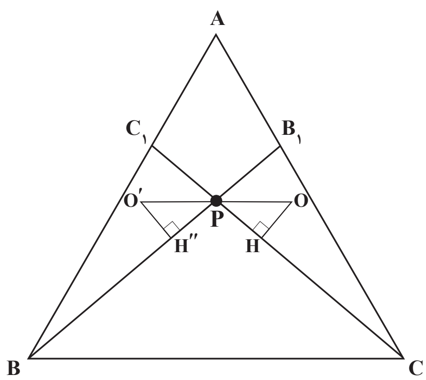
● **مثال ۵.** ثابت کنید مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه با وتر a و نصف محیط p برابر است با: $S=P(P-a)$.

حل: مطابق شکل، دایرهٔ $C(O,r)$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC محاط شده است. چون داریم: $\hat{A} = \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$ و $AM=AN$ و $OM=ON$، پس ANOM مربع است و $ON=AN$. بنابراین: $r=p-a$ و $\frac{S}{p} = p - a$ و از آنجا: $S=P(P-a)$.



● **مثال ۶.** نقطهٔ P را درون مثلث ABC اختیار می‌کنیم. خطوط راست BP و CP اضلاع روبه‌رو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می‌کنند. اگر بدانیم هم مساحت‌ها و هم محیط‌های دو مثلث PBC_1 و PCB_1 با هم برابرند، ثابت کنید P روی نیم‌ساز درونی A قرار دارد (المپیاد ریاضی ایران- ۱۳۷۲).

حل: اگر محیط و مساحت مثلث PCB_1 را با $2P$ و S و محیط و مساحت مثلث PBC_1 را با $2P'$ و S' نمایش دهیم، طبق فرض: $S=S'$ و $P=P'$.



در نتیجه: $\frac{S}{P} = \frac{S'}{P'}$ و لذا: $r=r'$. با فرض اینکه O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث PB_1C و O' مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث PC_1B باشد، چون O و O' نقطهٔ همرسی نیم‌سازهای زوایای داخلی دو مثلث‌اند، پس PO و PO' نیم‌سازهای دو زاویهٔ متقابل به رأس و روی یک خط هستند. لذا: $\angle OPH=\angle O'PH'$ و چون $r=r'$، پس: $OH=O'H'$. در نتیجه مثلث‌های OHP و $O'H'P$

هم‌نهشــت‌اند (زض‌ز) و: PH=PH´. اما طبق آنچه که در مــورد طول‌های مماس‌ها گفتیم (بــه دایره‌های محاطی مثلث‌های PBC_1 و PCB_1 که رســم نشده‌اند و در نقاط H و H´ بر PC و PB مماس هستند، دقت کنید) داریم:

$$P - B_1C = P' - BC_1,\ P = P' \Rightarrow B_1C = BC_1$$

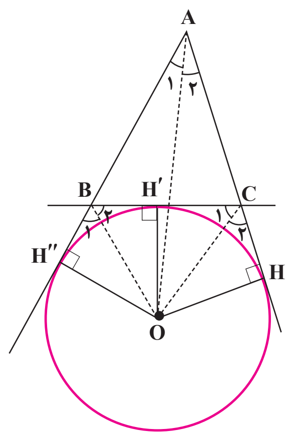
حــال اگــر ارتفاع‌هــای رأس P دو مثلــث را h و h´ بنامیم، نتیجه می‌شود:

$$S = S' \Rightarrow \frac{1}{2}B_1C.h = \frac{1}{2}BC_1.h' \Rightarrow h = h'$$

یعنی P از AB و AC به یک فاصله و در نتیجه روی نیم‌ساز زاویهٔ A است.

۲. دایرهٔ محاطی خارجی

در هــر مثلث، نیم‌ســازهای هر دو زاویــهٔ خارجی و نیم‌ســاز زاویهٔ داخلی سوم، در یک نقطه همرس‌اند. مثلاً در شــکل روبه‌رو، نیم‌ســاز زاویهٔ A و دو نیم‌ساز زوایای خارجــی B و C در یک نقطه همرس‌اند (چرا؟) با توجه به ویژگی نیم‌ســازها (هر نقطه روی نیم‌ساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است)، اگر نقطهٔ همرسی این سه نیم‌ساز O باشد، داریم: OH=OH´ و OH´=OH˝ و لذا: OH=OH´=OH˝.



پس دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OH، در نقاط H و H´ و H˝ بــر امتدادهــای AB و AC و بر BC مماس است. این دایره را دایرهٔ محاطی خارجی رأس A می‌نامیم (این دایره بر BC مماس است و روبه‌رو به رأس A است) و شــعاع آن را با r_a نمایش می‌دهیم. برای محاسبهٔ r_a به کمک مساحت‌ها می‌نویسیم:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} - S_{OBC}$$

با تکمیل راه حل، درستی رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

به طریقهٔ مشابه داریم: $r_b = \frac{S}{P-b}$ و $r_c = \frac{S}{P-c}$

■ **تمریــن ۵.** دوایــر محاطی خارجــی متناظر با رأس‌های A، B و C را در یک شکل رسم کنید.

ویژگی مهم دیگری نیز در شکل فوق قابل تشخیص است. با توجه به برابری مماس‌ها داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AH = AC + CH, CH = CH' \\ AH'' = AB + BH'', BH'' = BH' \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AH = AC + CH' \\ AH'' = AB + BH' \end{cases}$$

$$AH = AH'' \Rightarrow 2AH = AB + AC + BC = 2P$$

$$\Rightarrow AH = AH'' = P$$

یعنی: «مماس‌های رســم شــده بر دایــرهٔ محاطی خارجی هر رأس برابر با نصف محیط مثلث است.»

نتیجه: با تغییر مکان H´ روی کمان HH˝ و تغییر طــول BC و جای B و C، محیــط مثلث ABC تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند. (چرا؟)

۳ پرسش‌های پیکارجو!

همهٔ ســه‌تایی‌های صحیح (x,y,z) که در معادلهٔ ۲ˣ+۲ʸ=۲ᶻ صدق می‌کنند، روی کدام صفحهٔ زیر واقع‌اند؟

الف) x+y=z   ب) x+y=۲z-۱   ج) x+y=۲z-۲

د) x+۲y=۲z-۱   هـ) x+۲y=۳z-۳

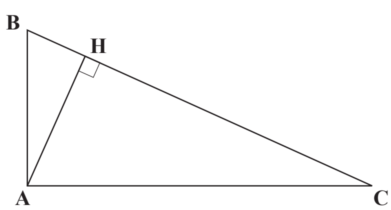
حسین کریمی
دبیر ریاضی شهر تهران

هندسه ۱

کاربردی از تشابه در واسطه‌های هندسی و توافقی

در کتاب درسی با واسطهٔ هندسی آشنا شدیم و دیدیم که x را واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b گویند، هرگاه داشته باشیم: $x^2=a\times b$. با استفاده از تشابه، کاربردهایی از واسطهٔ هندسی را در مسئله‌های ۱۲ و ۱۵ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی هندسه ۱ مشاهده کردیم که در آن‌ها داشتیم:

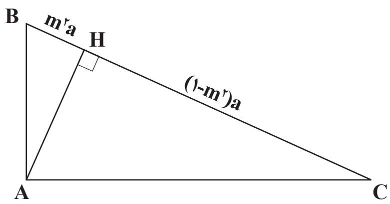
الف) ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، واسطهٔ هندسی است بین دو قطعه‌ای که آن ارتفاع روی وتر جدا می‌کند: $AH^2 = BH.HC$.



ب) اندازهٔ هر ضلع در مثلث قائم‌الزاویه، واسطهٔ هندسی است بین اندازهٔ وتر و تصویر قائم آن ضلع روی وتر: $AB^2 = BH\times BC$ و $AC^2 = CH\times BC$.

اکنون به طرح و حل چند مسئلهٔ هندسی دربارهٔ واسطهٔ هندسی می‌پردازیم.

مسئلهٔ۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه‌های دو پاره خطی که ارتفاع نظیر رأس قائمه بر وتر جدا می‌کند، m^2a و $(1-m^2)a$ هستند ($|m|<1$). اندازه‌های سه ضلع مثلث و ارتفاع وارد بر وتر را برحسب a و m به‌دست آورید.

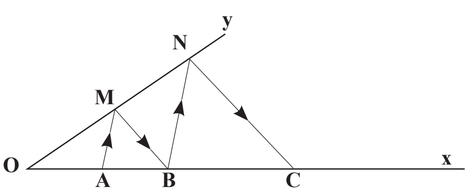


حل:

$$BC = BH + HC = m^2a + (1-m^2)a = a$$
$$AH^2 = BH\times HC = m^2a^2(1-m^2)$$
$$\Rightarrow AH = ma\sqrt{1-m^2}$$

$$AB^2 = BH\times BC = m^2a\times a \Rightarrow AB = ma$$
$$AC^2 = CH\times BC = (1-m^2)a\times a$$
$$\Rightarrow AC = a\sqrt{1-m^2}$$

مسئلهٔ۲. زاویه‌ی xoy را در نظر بگیرید. نقاط دلخواه A و B را روی ox انتخاب و از آن نقاط دو خط موازی رسم کنید تا oy را به ترتیب در نقاط M و N قطع کنند. از N به موازات MB، خطی رسم کنید تا ox را در C قطع کند، ثابت کنید OB واسطهٔ هندسی است بین OA و OC: $OB^2 = OA\times OC$.



حل:

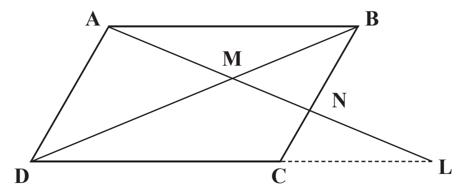
$$\Delta OBN(AM \parallel BN) \Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OM}{ON} \quad (۱)$$

$$\Delta OCN(BM \parallel NC) \Rightarrow \frac{OB}{OC}=\frac{OM}{ON} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OC} \Rightarrow OB^{۲}=OA \times OC$$

مسئلهٔ ۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD، از نقطهٔ A خطی رسم می‌کنیم تا قطر BD و خطوط BC و CD (و یا امتداد آن‌ها) را به‌ترتیب در نقاط M، N و L قطع کند.

ثابت کنید: $AM^{۲}=MN.NL$.



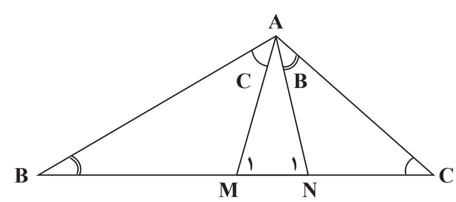
حل:

$$\Delta AMD \sim \Delta BMN \Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{MD}{MB} \quad (۱)$$

$$\Delta AMB \sim \Delta DML \Rightarrow \frac{MD}{MB}=\frac{ML}{AM} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{ML}{AM} \Rightarrow AM^{۲}=MN.ML$$

مسئلهٔ ۴. در مثلث ABC، زاویهٔ A از دو زاویهٔ B و C بزرگ‌تر است. بر ضلع BC نقاط M و N را چنان اختیار می‌کنیم که AM و AN به ترتیب با اضلاع AB و AC زاویه‌های مساوی C و B تشکیل دهند. ثابت کنید: $AN^{۲}=AM^{۲}=BM.CN$.



حل:

$$\Delta AMB : \hat{M}_{۱}=\hat{B}+\hat{C}, \Delta ACN : \hat{N}_{۱}=\hat{B}+\hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_{۱}=\hat{N}_{۱} \Rightarrow AM=AN \ (۱)$$

$$\Delta AMB \sim \Delta ANC \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{NC}{AN}$$

$$\Rightarrow AM.AN=BM.CN \ (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow AN^{۲}=AM^{۲}=BM.CN$$

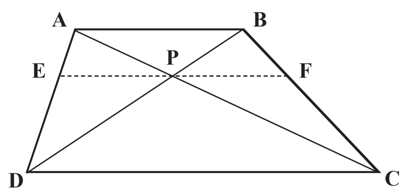
اکنون با واسطهٔ دیگری به‌نام «واسطهٔ توافقی» آشنا می‌شویم: عدد x را واسطهٔ توافقی بین a و b گویند. هرگاه: $\frac{۲}{x}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$.

مسئلهٔ ۵. واسطهٔ توافقی بین دو عدد ۳ و ۷ را بیابید.

حل:

$$\frac{۲}{x}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷} \Rightarrow \frac{۲}{x}=\frac{۱۰}{۲۱} \Rightarrow x=\frac{۴۲}{۱۰}=۴/۲$$

مسئلهٔ ۶. در ذوزنقهٔ ABCD، از نقطهٔ P محل تلاقی اقطار، خطی بـه موازات AB و CD رسـم می‌کنیم تـا سـاق‌ها را در نقاط E و F قطـع کند. ثابت کنید: $\frac{۲}{EF}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}$.



حل:

$$\Delta ABP \sim \Delta PCD \Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{BP}{PD}=\frac{AB}{CD} \quad (۱),$$

$$\frac{CP}{CA}=\frac{DP}{DB} (۲)$$

$$\Delta ABC(PF \parallel AB) \Rightarrow \frac{CP}{CA}=\frac{PF}{AB} (۳)$$

$$\Delta ABD(PE \parallel AB) \Rightarrow \frac{DP}{DB}=\frac{PE}{AB} (۴)$$

$$(۲),(۳),(۴) \Rightarrow PE=PF (۵)$$

$$(۴) \Rightarrow \frac{AB}{PE}=\frac{BD}{PD} \Rightarrow \frac{AB}{PE}=\frac{PD+PB}{PD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PE}=۱+\frac{PB}{PD} \overset{(۱)}{\Rightarrow} \frac{AB}{PE}=۱+\frac{AB}{CD}$$

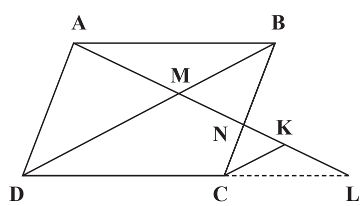
حال بـا تقسـیم طرفین تسـاوی بـر AB داریم:

$\frac{1}{PE}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$ که با توجه به (۵)، داریم: $PE=\frac{1}{2}EF$.

بنابراین: $\frac{2}{EF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$.

تذکر: در واقع اندازهٔ پاره‌خط گذرا از محل تلاقی قطرهای ذوزنقه و موازی با دو قاعده و محدود به سـاق‌ها، واسطهٔ توافقی است بین اندازهٔ دو قاعدهٔ ذوزنقه.

مسـئلهٔ ۷. در متوازی‌الاضـلاع ABCD از نقطهٔ A خطی رسم می‌کنیم تا قطر BD و خطوط BC و CD (و یـا امتداد آن‌ها) را به ترتیـب در نقاط M، N و L قطع کند (تا اینجا همان مشـخصات مسئلهٔ ۳ بیان شد). از C به موازات BD خطی رسم می‌کنیم تا AL را در K قطع کند. ثابت کنید AK واسطهٔ توافقی بین AN و AL است.



حل:

$$\Delta ABM \sim \Delta MDL \Rightarrow \frac{BM}{MD}=\frac{AB}{DL}$$

$$\overset{AB=CD}{\Rightarrow} \frac{BM}{MD}=\frac{CD}{DL} \quad (1)$$

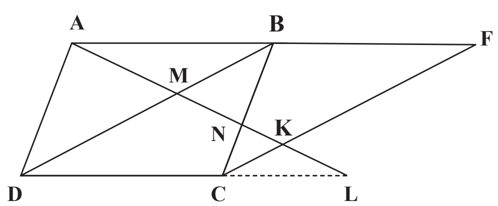
$$CN \parallel AD \Rightarrow \frac{CD}{DL}=\frac{AN}{AL} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{BM}{MD}=\frac{AN}{AL} \quad (2)$$

$$\Delta AMD \sim \Delta BMN \Rightarrow \frac{BM}{MD}=\frac{MN}{AM} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{MN}{AM}=\frac{AN}{AL}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{MN}{AM}=1+\frac{AN}{AL} \Rightarrow \frac{AN}{AM}=1+\frac{AN}{AL}$$

که بـا تقسـیم طرفیـن تسـاوی بـر AN داریم: $\frac{1}{AM}=\frac{1}{AN}+\frac{1}{AL}$ و چـون: $AK=2\times AM$، پـس: $\frac{2}{AK}=\frac{1}{AN}+\frac{1}{AL}$.

توجه داشـته باشـید که اگر CK را امتداد دهیم تا امتـداد AB را در F قطع کند، BFCD متوازی‌الاضلاع خواهـد بود: BF=CD، یعنی AB=BF. پس در مثلث AFK، B وسـط AF و: BM||FK که نشان می‌دهد M وسط AK است.



پرسش‌های پیکارجو!

عدد ۳۰۰۳۰ را به چند طریق می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب سـه عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ نوشت؟

الف) ۱۲۰　ب) ۹۰　ج) ۱۰۰　د) ۱۸۰　هـ) ۴۵

مسئله‌ها،
رگ‌هایی هستند که به بدن
ریاضیات خون می‌رسانند.

زنده‌یاد دکتر محسن هشترودی

لطیفهٔ اول

در یکی از شهرهای انگلستان و در یکی از مدارس ابتدایی، خانم معلم از یکی از دانش‌آموزان پرسید: نصف عدد هشت چه عددی می‌شود؟ و دانش‌آموز گفت: ببخشید خانم، افقی یا عمودی؟!

معلم با تعجب گفت: منظورت چیه؟ و دانش‌آموز گفت: اگر منظورتان نصف افقی باشد، جواب صفر است، ولی اگر منظورتان نصف عمودی باشد، جواب ۳ است!

لطیفهٔ دوم

اما در همان کلاس درس، خانم معلم که از پاسخ آن دانش‌آموز حیرت‌زده بود، یکی دیگر از بچه‌ها را پای تخته برد و برای آنکه مفهوم عدد و محاسبه را به دانش‌آموزان یاد بدهد، به او گفت: ببین عزیزم، این یک سبد خالی است. حالا بگو ببینم چند تا تخم‌مرغ می‌توانیم توی آن بگذاریم؟ و دانش‌آموز گفت: یکی!

معلم با تعجب گفت: فقط یکی، چرا؟ و دانش‌آموز گفت: آخر بعد از اینکه یک تخم‌مرغ توی آن گذاشتیم، دیگر سبدِ خالی نیست!

لطیفهٔ سوم

در یک مسابقهٔ تلویزیونی از یک ریاضی‌دان پرسیدند: «فرض کنید در یک خیابان در حال حرکت هستید و ناگهان می‌بینید که خانهٔ آن طرف خیابان در حال سوختن در آتش است و ماشین آتش‌نشانی بدون راننده و سرنشین در سمت مقابل متوقف است و شیلنگ شیر آب آن در همان نزدیکی جدا از مخزن روی زمین افتاده است. چه می‌کنید؟»

ریاضی‌دان گفت: «شیلنگ را به سرعت به مخزن آب وصل می‌کنم و با فشار آب، آتش را مهار می‌کنم.»

مجری گفت: «بسیار خب، حالا فرض کنیم در همان خیابان در حال عبور هستید، همان ماشین همان‌جاست. شیلنگ آب در جای خود وصل است و خانهٔ مقابل هم در حال سوختن در آتش نیست. حالا چه می‌کنید؟»

ریاضی‌دان گفت: «شیلنگ را از جای خود درمی‌آورم و خانه را آتش می‌زنم. حالا مسئلهٔ ما، همان مسئلهٔ قبلی است!»

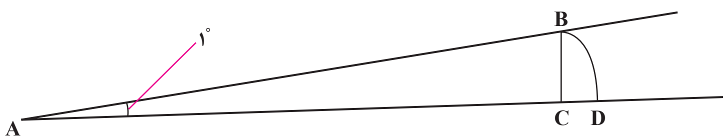
روشی برای محاسبهٔ سینوس

سعدالله قصابی
دبیر ریاضی شهرستان بانه

اشاره
در این مقاله روشی برای محاسبهٔ سینوس زوایای دلخواه ارائه می‌شود که به کمک آن می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی را نیز به‌دست آورد.

سینوس یک زاویهٔ حاده چیست؟ در مثلث قائم‌الزاویه، سینوس زاویهٔ حاده برابر است با: نسبت ضلع روبه‌رو به این زاویه به وتر. یک روش محاسبه برای زاویه‌های خیلی کوچک این است که نسبت قوس را به شعاع حساب کنیم. مثلاً برای زاویهٔ ۱ درجه داریم:

$$\sin 1^\circ \approx \frac{\overset{\frown}{BD}}{AB} \quad (\text{شکل ۱})$$



شکل۱

که داریم: $\overset{\frown}{BD} = \frac{2\pi R}{360}$ و در آن: ...$\pi = 3/14159$ و AB=R.

پس:

$$\sin 1^\circ \approx \frac{2\pi R}{360 R} = \frac{\pi}{180} \approx 0/0175$$

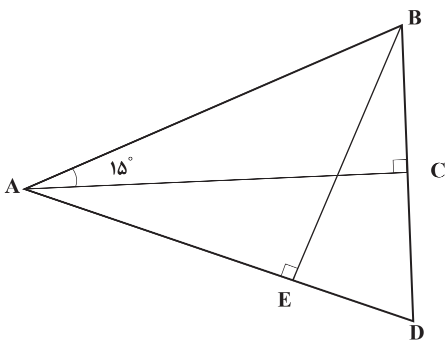
و به‌همین ترتیب می‌توان به‌دست آورد:

$$\sin 2^\circ \approx 0/0349 \qquad \sin 3^\circ \approx 0/0524$$

$$\sin 4^\circ \approx 0/0698 \qquad \sin 5^\circ \approx 0/0873$$

حال اگر سینوس ۳۰ درجه را با روش فوق محاسبه کنیم، عدد ۰/۵۲۴ را به‌جای ۰/۵۰۰ به‌دست می‌آوریم که خطای حاصل $\frac{24}{500}$، یعنی نزدیک ۵ درصد خواهد بود و این بیش از اندازه زیاد است. برای اینکه بتوانیم مرزی برای روش فوق پیدا کنیم، سینوس زاویهٔ ۱۵ درجه را با دقت محاسبه می‌کنیم:

با توجه به شکل ۲ داریم: $\sin 15^\circ = \frac{BC}{AB}$.



شکل۲

BC را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم و سپس D را به A وصل می‌کنیم. در این صورت دو مثلث همنهشت ADC و ABC و زاویهٔ BAD مساوی ۳۰ درجه به‌دست می‌آید. عمود BE را بر AD فرود می‌آوریم؛ مثلث قائم‌الزاویهٔ BAE با زاویهٔ ۳۰ درجه (زاویهٔ BAE) به‌دست می‌آید و بنابراین $BE = \frac{AB}{2}$ می‌شود.

حال AE را از مثلث ABE طبق رابطهٔ **فیثاغورث** به‌دست می‌آوریم:

$$(AE)^2 = (AB)^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}(AB)^2$$

$$AE = \frac{AB}{2}\sqrt{2} \approx 0/866AB$$

$$\Rightarrow ED = AD - AE \approx AB - 0/866AB \approx 0/124AB$$

حال در مثلث BED طول BD را محاسبه می‌کنیم:

$$(\mathrm{BD})^۲ = (\mathrm{BE})^۲ + (\mathrm{ED})^۲ \approx (\frac{\mathrm{AB}}{۲})^۲ + (۰/۱۲۴\mathrm{AB})^۲$$
$$\approx ۰/۲۶۸(\mathrm{AB})^۲$$
$$\Rightarrow \mathrm{BD} \approx \sqrt{۰/۲۶۸(\mathrm{AB})^۲} \approx ۰/۵۱۸\mathrm{AB}$$
$$\Rightarrow \mathrm{BC} = \frac{\mathrm{BD}}{۲} \approx \frac{۰/۵۱۸\mathrm{AB}}{۲} \approx ۰/۲۵۹\mathrm{AB}$$
$$\sin ۱۵^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \approx \frac{۰/۲۵۹\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}} \approx ۰/۲۵۹$$

اگر به سه رقم اعشار اکتفا کرده باشیم، این عدد همان عددی است که در جدول‌ها برای $\sin ۱۵^\circ$ ثبت شده است. حالا اگر مقدار آن را با روش نسبت قوس بر شعاع محاسبه کنیم، به عدد ۰/۲۶۲ می‌رسیم. با مقایسهٔ دو عدد ۰/۲۶۲ و ۰/۲۵۹ می‌بینیم که اگر هر دو را تا دو رقم اعشار گرد کنیم، به عدد ۰/۲۶ می‌رسیم. خطای حاصل از تبدیل مقدار دقیق‌تر ۰/۲۵۹ به ۰/۲۶ مساوی $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ است؛ یعنی قریب ۰/۴ درصد که این مقدار خطا برای محاسبه‌های عادی مانعی ندارد.

برای زاویه‌های بین ۱۵ درجه و ۳۰ درجه می‌توانیم از تناسب استفاده کنیم. به این ترتیب استدلال می‌کنیم که اختلاف بین $\sin ۳۰^\circ$ و $\sin ۱۵^\circ$ برابر است با:

۰/۵۰−۰/۲۶=۰/۲۴

با اضافه شدن یک درجه به زاویه، سینوس آن به اندازهٔ $\frac{۱}{۱۵}$ این اختلاف، یعنی به اندازهٔ $\frac{۰/۲۴}{۱۵} = ۰/۰۱۶$ زیاد می‌شود. خطای این روش $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ است که در محاسبات تقریبی خود از آن صرف‌نظر می‌کنیم.

به این ترتیب با اضافه کردن ۰/۰۱۶ به سینوس ۱۵ درجه به‌طور متوالی سینوس زاویه‌های ۱۶ درجه، ۱۷ درجه و غیره به‌دست می‌آید:

$$\sin ۱۶^\circ \approx ۰/۲۶ + ۰/۰۱۶ = ۰/۲۸$$
$$\sin ۱۷^\circ \approx ۰/۲۶ + ۰/۰۳۲ = ۰/۲۹$$
$$\sin ۲۵^\circ \approx ۰/۲۶ + ۰/۱۶ = ۰/۴۲$$

به‌همین ترتیب می‌توان سینوس زاویه‌های بین ۳۰ درجه و ۴۵ درجه را محاسبه کرد.

$$\sin ۴۵^\circ - \sin ۳۰^\circ \approx ۰/۷۰۷ - ۰/۵ = ۰/۲۰۷$$
$$\rightarrow \frac{۰/۲۰۷}{۱۵} = ۰/۰۱۴$$

اگر این مقدار را مرتباً به سینوس ۳۰ درجه اضافه کنیم به‌دست می‌آید:

$$\sin ۳۱^\circ \approx ۰/۵ + ۰/۰۱۴ = ۰/۵۱$$
$$\sin ۳۲^\circ \approx ۰/۵ + ۰/۰۲۸ = ۰/۵۳$$

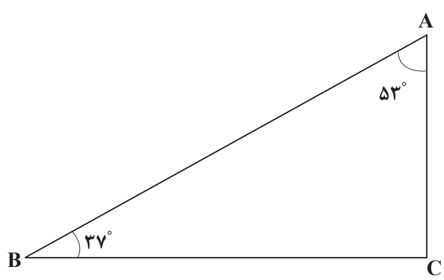
.

.

$$\sin ۴۰^\circ \approx ۰/۵ + ۰/۱۴ = ۰/۶۴$$

حال به محاسبهٔ سینوس زاویه‌های حادهٔ بزرگ‌تر از ۴۵ درجه می‌پردازیم. به این منظور می‌توان از قضیهٔ فیثاغورث استفاده کرد.

فرض می‌کنیم که بخواهیم سینوس زاویهٔ ۵۳ درجه را محاسبه کنیم. باید نسبت $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ را به‌دست آوریم (شکل ۳).



شکل ۳

چون داریم: $\hat{\mathrm{B}} = ۳۷^\circ$، پس می‌توان سینوس آن را به روش قبل محاسبه کرد:

$$\sin ۳۷^\circ \approx ۰/۵ + (۷ \times ۰/۰۱۴) \approx ۰/۶$$

از طرف دیگر داریم: $\sin \hat{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$

بنابراین: $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \approx ۰/۶ \Rightarrow \mathrm{AC} \approx ۰/۶\mathrm{AB}$ و لذا داریم:

$$(\mathrm{AB})^۲ = (\mathrm{AC})^۲ + (\mathrm{BC})^۲$$
$$\Rightarrow \mathrm{BC} = \sqrt{(\mathrm{AB})^۲ - (\mathrm{AC})^۲} \approx \sqrt{(\mathrm{AB})^۲ - (۰/۶\mathrm{AB})^۲}$$
$$\approx \mathrm{AB}\sqrt{۱ - ۰/۳۶} \approx ۰/۸\mathrm{AB}$$
$$\Rightarrow \sin ۵۳^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \approx \frac{۰/۸\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}} \approx ۰/۸$$

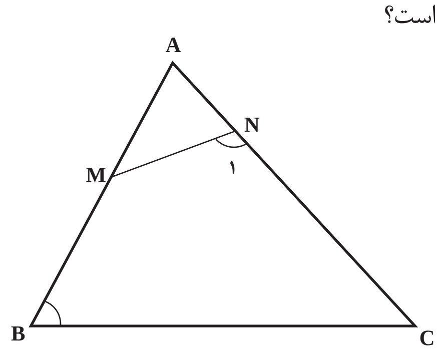
مسائل برای حل

هوشنگ شرقی، محمدرضا امیری

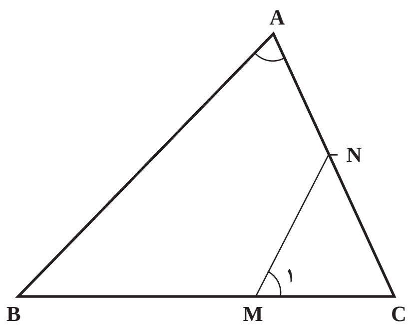
۱ هندسه

۱. مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند و: AB>AC. در مثلث ABC، AD و AH به ترتیب نیم‌ساز و ارتفاع رأس A و در مثلث $A'B'C'$، $A'D'$ و $A'H'$ نیم‌ساز و ارتفاع رأس A' هستند. ثابت کنید مثلث‌های AHD و $A'H'D'$ متشابه‌اند.

۲. در شکل زیر دو زاویهٔ N_1 و B مکمل یکدیگرند. اگر AM=۴cm و AC=۱۲cm باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMN است؟



۳. در شـــکل زیر داریم: $\hat{M}_1 = \hat{A}$ و N وســـط AC است. ثابت کنید: $AC^2 = 2MC.BC$



۲ هندسه

۱. مثلث ABC را با داشـــتن اندازه‌های BC، $\hat{A}$ و S (مساحت) رسم کنید.

۲. دایره‌ای در نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB، بر این پاره‌خط مماس شده اســـت. از نقطهٔ T روی دایره بـــه A و B وصل کرده‌ایم، به‌طوری‌که TA و TB دایره را در نقاط P و Q قطع کرده‌اند و داریم: AP=BQ. ثابت کنید: $\overset{\frown}{MP} = \overset{\frown}{MQ}$

۳. دایره‌های $C(O,2)$ و $C'(O', 2\sqrt{2})$ در نقاط A و B متقاطع‌اند. اگر $AB = 2\sqrt{2}$ باشـــد، مســـاحت ناحیـــهٔ محدود بـــه دو دایره را بیابید.

۲ ریاضی

۱. معادلهٔ $\log(2^{x+2}-1) = (x+1)\log 4$ را حل کنید.

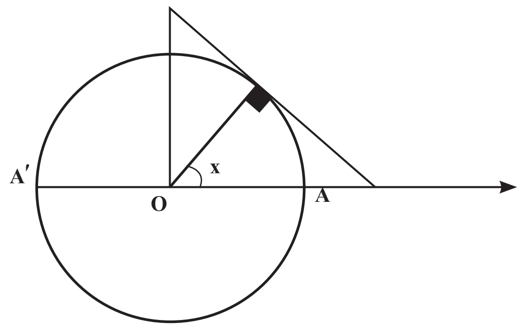
۲. فقـــط با اســـتفاده از دایرهٔ مثلثاتی و رســـم، مقـــدار x را از معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌دست آورید.

۳. مقدار عددی A را به‌دست آورید:

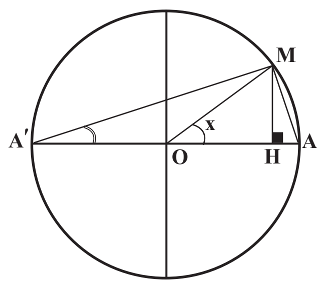
$$A = \sin\frac{13\pi}{7}.\cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{13\pi}{7}.\sin\frac{5\pi}{14}$$

حسابان

۱. عکس تابع کسینوس را تابع سکانت می‌نامیم؛ یعنی: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ در شکل زیر نشان دهید مقدار secx از طریق محوری که در امتداد محور کسینوس‌ها در خارج دایره رسم می‌شود، به‌دست می‌آید. سپس با توجه به این موضوع جدول تغییرات تابع سکانت را در یک دورهٔ تناوب رسم کنید.



۲. با استفاده از شکل زیر نشان دهید: $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ و با استفاده از این دستور، مقدارهای $\tan 15^\circ$ و $\tan 22/5^\circ$ را به‌دست آورید.



۳. ثابت کنید:

الف) $\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha = 8\cos 8\alpha \cos^3\alpha$

ب) $4\cos^3\alpha \sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha \cos 3\alpha = 3\sin 4\alpha$

دیفرانسیل و انتگرال

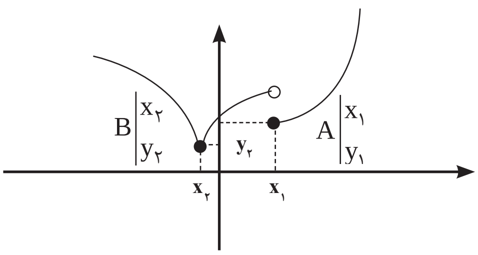
۱. مشتق‌پذیری تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ را در مبدأ مختصات بررسی کنید.

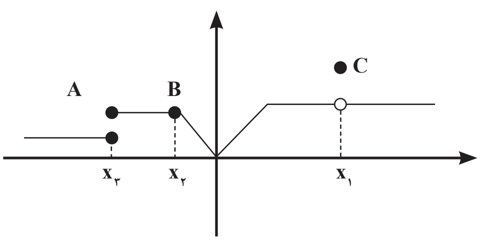
۲. اگر خط مماس بر منحنی تابع f، در نقطهٔ A به عرض ۳ واقع بر آن با محور xها زاویهٔ 60° بسازد و: $\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = -2$ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع gof نسبت به x در نقطهٔ A را به‌دست آورید.

۳. اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq 1 \\ \sin\frac{\pi x}{2} & x < 1 \end{cases}$ در R مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم باشد، c را به‌دست آورید.

ریاضیات ۳

۱. با توجه به نمودار داده شده، حد هر تابع را در نقاط به طول‌های داده شده بررسی کنید:





۲. اگر $\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-4x^2+3x-2}{5x^2-7x+2} = a$ و $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x^2-3x-4}} = b$ حاصل a+b را بیابید.

۳. اگر $\frac{1-\cos 2x}{2} \leq f(x) \leq \frac{\tan 4x}{2x}$ در این صورت $\lim_{x\to 0} f(x)$ را به‌دست آورید.

ریاضیات گسسته

۱. چه تعداد جواب صحیح و نامنفی برای معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=13$ با شرط‌های $x_1>2$ و $x_2\geq 4$ وجود دارد؟

۲. می‌خواهیم از بین پنج نوع غذا ۱۱ پرس غذا سفارش دهیم. این عمل به چند طریق انجام‌پذیر است. هرگاه بخواهیم از هر نوع غذا حداقل یک پرس سفارش دهیم؟

۳. چند رابطه می‌توان روی مجموعهٔ $\{2,4,6\}$ تعریف کرد که انعکاسی نباشند؟

جبر و احتمال

۱. رابطهٔ R روی مجموعهٔ ۶ عضوی A، دو کلاس هم‌ارزی پدید آورده است. این رابطه حداکثر چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

۲. در مجموعهٔ $A=\{2,4,6,\dots,10\}$ رابطهٔ $R=\{(x,y)|x,y\in A, x|y\}$ تعریف شده است. R را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و دامنه و برد R را تعیین کنید.

۳. در پرتاب یک تاس، اگر ۶ ظاهر شود، مجاز به پرتاب دوم هستیم. در غیر این صورت دو سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

ریاضی عمومی تجربی

۱. ماکزی‌مم و مینی‌مم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ را در فاصلهٔ $[0,\pi]$ پیدا کنید.

۲. در نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x(x-1)(x+2)(x+1)+2$ چند نقطهٔ عطف وجود دارد؟

۳. فاصلهٔ بین دو مجانب مایل تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+2|x|+7}{x}$ را بیابید؟

هندسهٔ تحلیلی

۱. نقطهٔ $A(x,y)$ با مختصات مثبت در صفحهٔ مختصات چنان حرکت می‌کند که مربع فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(-2,1)$، چهار برابر فاصلهٔ آن از محور عرض‌هاست. در مکان هندسی نقطهٔ A بیشترین فاصلهٔ دو نقطه از یکدیگر را بیابید.

۲. نقطهٔ $A(2\sqrt{5},b)$ در ربع اول و مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادله‌های $y=2x$ و $y=\frac{1}{2}x$ مماس است. مساحت این دایره را پیدا کنید.

۳. از نقاط واقع بر منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2=1$، مماس‌هایی بر مقطع مخروطی به معادلهٔ $x^2+y^2-6y+5=0$ رسم کرده‌ایم.

الف) طول بزرگ‌ترین مماس رسم شده را بیابید.

ب) طول مماس مشترک خارجی این دو دایره را پیدا کنید.

ج) معادله مماس مشترک داخلی این دو دایره را بنویسید.

پرسش‌های پیکارجو!

تابع $f:N\to R$ مفروض است و داریم:
$f(m+n)=f(m)+f(n)+f(mn)$. مقدار $f(1395)$ کدام است؟

الف) -1 ب) 0 ج) 1 د) 2 هـ) 2×1395

هر ریاضی‌دان وقتی کامل است که تا اندازه‌ای هم شاعر باشد!

وایر اشتراوس

راهنمای حل مسائل

آمادگی برای آزمون‌های مستمر

هندسه ۱

۱. ابتـدا ثابت کنیـد زاویهٔ بین نیمسـاز و ارتفاع رأس $\hat{A}$ برابر اسـت با: $\frac{\hat{C}-\hat{B}}{۲}$ و در نتیجه: $D\hat{A}H=D'\hat{A}'H'$. و نیز می‌دانیم که در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها و نسبت نیمسـازها مساوی نسبت تشـابه است، پس: $\frac{AH}{A'H'}=\frac{AD}{A'D'}=k$ و لـذا دو مثلث DAH و D´A´H´ متشابه‌اند.

۲. چـون $\hat{N}_۱$ و $\hat{B}$ مکمل‌انـد، پـس: $\hat{B}=A\hat{N}M$ و در نتیجـهٔ مثلث‌هـای ABC و AMN دو زاویـهٔ برابر دارند و متشـابه‌اند. نسـبت تشـابه آن‌ها برابر است با: $\frac{AM}{AC}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه نسـبت مسـاحت مثلث ABC به AMN مساوی ۹ است.

۳. نشان دهید مثلث‌های CMN و ABC متشابه‌اند. از آنجا نسـبت تشابه را بنویسـید و با استفاده از $CN=\frac{AC}{۲}$ حکم را ثابت کنید.

هندسه ۲

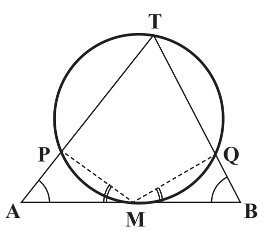
۱. بـا داشـتن S و BC، ارتفاع رأس A به دسـت می‌آید: $AH=\frac{۲S}{BC}$. حـال بـرای یافتن A، ابتدا BC را رسـم می‌کنیم و سپس دو خط موازی آن به فاصلهٔ $\frac{۲S}{BC}$ از آن رسـم می‌کنیم و کمان درخور زاویهٔ A تحت BC را نیز می‌کشیم. محل برخورد این دو مکان هندسی نقطهٔ A است و از آنجا مثلث ABC رسم می‌شود. (بحث کنید.)

۲.

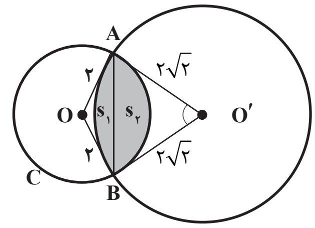
$$\left.\begin{array}{l} MB^۲=BQ.BT \\ MA^۲=AP.AT\end{array}\right\} \xRightarrow{MB=MA}$$

$$BQ.BT=AP.AT,\ BQ=AP \Rightarrow BT=AT \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}$$

$$\Rightarrow \Delta BMQ \overset{(ض‌زض)}{\cong} \Delta MAP \Rightarrow P\hat{M}A=Q\hat{M}B \Rightarrow \widehat{MP}=\widehat{MQ}$$



۳. بـا توجه به اینکـه: $O'A=O'B=AB=۲\sqrt{۲}$، پس: $\hat{O'}=۶۰^\circ$ و لذا مساحت قطاع O´AB، $\frac{۱}{۶}$ مساحت دایرهٔ C´ و مساوی $\frac{۱}{۶}\pi\times(۲\sqrt{۲})^۲$ یا $\frac{۴\pi}{۳}$ است و مساحت مثلث متسـاوی‌الاضلاع O´AB نیز مسـاوی $\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲\sqrt{۲})^۲$ یا $۲\sqrt{۳}$ است. پس مساحت ناحیهٔ $S_۱$ مساوی $\frac{۴\pi}{۳}-۲\sqrt{۳}$ خواهد بود. در مثلـث OAB نیز داریم: OA=OB=۲ و $AB=۲\sqrt{۲}$. پـس: $A\hat{O}B=۹۰^\circ$ و در نتیجه مسـاحت قطاع AOB مسـاوی $\frac{۱}{۴}$ مسـاحت دایرهٔ C و مساوی $\frac{۱}{۴}\pi(۲)^۲$ یا π است و مساحت مثلث OAB نیز مساوی $\frac{OA\times OB}{۲}=۲$ خواهد بود. در نتیجه مساحت ناحیهٔ $S_۲$ مساوی π-۲ است. بنابراین مساحت ناحیهٔ محدود به دو دایره برابر است با: $S_۱+S_۲=\frac{۷\pi}{۳}-۲\sqrt{۳}-۲$.

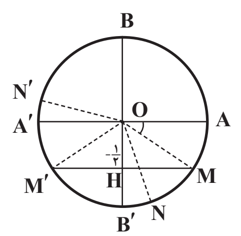


ریاضی ۲

۱.

$$\log(۲^{x+۲}-۱)=\log(۴^{x+۱})$$
$$\Rightarrow ۲^{x+۲}-۱=۴^{x+۱}=۲^{۲x+۲}=(۲^x)^۲\times ۴$$
$$\Rightarrow ۲^x\times ۴-۱=(۲^x)^۲\times ۴$$
$$۲^x=t \Rightarrow ۴t-۱=۴t^۲ \Rightarrow ۴t^۲-۴t+۱=۰$$
$$\Rightarrow (۲t-۱)^۲=۰ \Rightarrow t=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲^x=\frac{۱}{۲}=۲^{-۱}$$
$$\Rightarrow x=-۱$$

۲. روی محور سـینوس‌ها به انـدازهٔ $-\frac{۱}{۲}$ جدا و عمودی از آن خـارج می‌کنیم. در مثلث‌هـای قائم‌الزاویهٔ OMH و OMH´، طـول OH نصف وترهای OM و OM´ اسـت. لذا زوایای M و M´، مساوی ۳۰° و در نتیجه، کمان‌های MB´ و M´B´ مسـاوی ۶۰° هستند. حالا کافی است از نقـاط M و M´ و در جهت‌های منفی، به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ تغییر مکان دهیم تا انتهای کمان‌های مسـاوی x به‌دست آید (نقاط N و N´). بنابراین:
x=۱۶۵° یا x=-۷۵°.



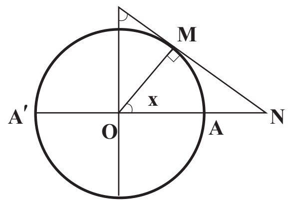
۳.

$$A=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۷})\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۷})+\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۷}).$$
$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۷})=(-\sin\frac{\pi}{۷})(-\sin\frac{\pi}{۷})+(\cos\frac{\pi}{۷})(\cos\frac{\pi}{۷})$$
$$=\sin^۲\frac{\pi}{۷}+\cos^۲\frac{\pi}{۷}=۱$$

حسابان

۱.

$$\Delta OMN: \cos x=\frac{OM}{ON}=\frac{۱}{ON}$$
$$\Rightarrow ON=\frac{۱}{\cos x}=\sec x>۱$$



بنابراین بـرای یافتن مقـدار secx، از انتهای کمان x مماسی بر دایرهٔ مثلثاتی رسم می‌کنیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد ایـن مماس و امتداد محور کسـینوس‌ها، از مرکز دایره، با در نظـر گرفتن جهت، مقدار secx را مشـخص می‌کند و چون ا ین نقطه همواره در خارج دایره اسـت، لذا همواره داریـم: secx≥۱ یا secx≤-۱. این موضوع با توجه به اینکه -۱≤cosx≤۱ نیز روشن است. جدول تغییرات secx نیز با توجه به دایرهٔ مثلثاتی به این صورت خواهد بود:

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
sec x	۱	↗	+∞ ‖ -∞	↗	-۱	↘	-∞ ‖ +∞	↘	۱

۲. در مثلـث قائم‌الزاویهٔ AMH، با توجـه به ویژگی زاویهٔ محاطـی داریم: $\hat{A}=\frac{x}{۲}$. اکنـون tanA را از روی تعریف بنویسید و با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ x، در دایرهٔ مثلثاتی، درستی تساوی را نتیجه بگیرید. سپس در اتحاد $\hat{A}=\frac{x}{۲}$، به جای x مقادیر ۳۰° و ۴۵° را قرار دهید. (جـواب: $\tan ۲۲/۵^\circ=\sqrt{۲}-۱$ و $\tan ۱۵^\circ=۲-\sqrt{۳}$)

۳. **الف)**

$$\text{سمت چپ}=(\cos ۱۱\alpha+\cos ۵\alpha)+۳(\cos ۹\alpha+\cos ۷\alpha)$$
$$=(۲\cos ۸\alpha\cos ۳\alpha)+۳(۲\cos ۸\alpha\cos\alpha)$$
$$=۲\cos ۸\alpha(\cos ۳\alpha+۳\cos\alpha)$$
$$=۲\cos ۸\alpha(۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha+۳\cos\alpha)$$
$$=۸\cos ۸\alpha\cos^۳\alpha$$

ب)

$$\text{سمت چپ}=۴\cos^۳\alpha(۳\sin\alpha-۴\sin^۳\alpha)+۴\sin^۳\alpha(۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha)=۱۲\cos\alpha\sin\alpha(\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha)$$
$$=۶(۲\sin\alpha\cos\alpha)(\cos ۲\alpha)$$
$$=۶\sin ۲\alpha\cos ۲\alpha=۳\sin ۴\alpha$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. f در مبدأ پیوسته است و:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\times\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-(1-x^2)}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{2}$$

بنابراین: $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ و f در صفر پیوسته است، اما مشتق‌پذیر نیست (نقطهٔ زاویه‌دار).

۲. با توجه به فرض مسئله، مشتق f در A (f(x)=۳) مساوی $\tan 60^\circ$ و یا $\sqrt3$ است. و نیز $g'(3)=-2$. آهنگ لحظه‌ای تغییر gof نسبت به x همان مشتق آن در A است:

$$gof'(x)=f'(x).g'(f(x))=\sqrt3\times g'(3)=-2\sqrt3$$

۳. با توجه به فرض مسئله، باید تابع f در نقطهٔ مرزی x=۱ پیوسته و مشتق‌های اول و دوم راست و چپ آن با هم برابر باشند. بنابراین:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)$$

$$\Rightarrow a+b+c=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 2ax+b=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2},x=1$$

$$\Rightarrow 2a+b=0\Rightarrow b=-2a$$

$$f''_+(1)=f''_-(1)\Rightarrow 2a=\frac{-\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2},x=1$$

$$\Rightarrow 2a=-\frac{\pi^2}{4},a=-\frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow b=\frac{\pi^2}{4},c=1-(a+b)=1-\frac{\pi^2}{8}$$

ریاضیات گسسته

۱. **راهنمایی:** تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+...+x_k=n$ با شرط‌های $x_i>\alpha$ و $x_j\geq\beta$ مساوی است با جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $(x_1+x_2+...+x_k=n-(\alpha+1)-\beta)$

۲. **راهنمایی:** استفاده از قضیهٔ گل‌ها، صفحهٔ ۶۷ کتاب درسی.

۳. **راهنمایی:** تعداد رابطه‌های انعکاس روی A $(2^{(n^2-n)})$ را از کل رابطه‌های روی A $(2^{(n^2)})$ بردارید.

جبر و احتمال

۱. **راهنمایی:** بیشترین تعداد عضو برای R وقتی ایجاد می‌شود که دو کلاس هم‌ارزی یکی تک‌عضوی و دیگری (p-۱) عضوی باشد.

۲. **راهنمایی:** همانند تمرین‌های فصل دوم کتاب درسی در صفحهٔ ۶۴.

۳. **راهنمایی:** استفاده از اصل ضرب و نمودار درختی، صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی.

هندسهٔ تحلیلی

۱.

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4x\Rightarrow(x-3)^2+(y+2)^2=8$$

مکان هندسی نقطهٔ A دایره‌ای به مرکز (۲- و ۳) به شعاع $r=2\sqrt2$ است و بیشترین فاصلهٔ دو نقطهٔ این مکان هندسی برابر با قطر دایره یعنی $4\sqrt2$ است.

۲. فاصلهٔ نقطهٔ A از دو خط برابر است. بنابراین داریم:

$$\frac{|4\sqrt5-b|}{\sqrt5}=\frac{|2\sqrt5-2b|}{\sqrt5}\Rightarrow b=\pm2\sqrt5$$

چون A در ربع اول است، پس $b=2\sqrt5$ قابل قبول است. برای محاسبهٔ شعاع دایره کافی است فاصلهٔ مرکز دایره یعنی $A(2\sqrt5,2\sqrt5)$ را از خط به معادلهٔ ۲x-y=۰ پیدا کنیم.

$$r=\frac{|4\sqrt5-2\sqrt5|}{\sqrt5}=2\Rightarrow S=\pi(2)^2=4\pi$$

۳. الف) ابتدا دو دایره رسم می‌کنیم:

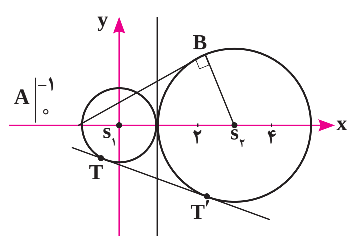
$$(C_1):x^2+y^2=1;\ S_1(0,0),r_1=1$$

$$(C_2):x^2+y^2-6y+5=0;S_2(0,3),r_2=2$$

با توجه به شکل، بزرگ‌ترین مماس از روی دایرهٔ C_1 که بر دایرهٔ C_2 رسم می‌شود، از نقطهٔ A است. بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{ABS_2}:AB^2=AS_2^2-BS_2^2=4^2-2^2=12$$

$$\Rightarrow AB=2\sqrt3$$



ب) طول مماس مشترک خارجی:

$$TT'=\sqrt{S_1S_2^2-(r_1-r_2)^2}=\sqrt{3^2-(1-2)^2}=2\sqrt2$$

ج) با توجه به شکل، چون دو دایره مماس خارج‌اند، پس خط x=۱، معادلهٔ مماس مشترک داخلی آن‌هاست.

ریاضی عمومی تجربی

۱. به این منظور ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)-(-\sin x)\sin x}{(2+\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 1+2\cos x=0\Rightarrow\cos x=-\frac12$$

$\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}\in(0,\pi)$ نقطهٔ بحرانی

$f'(x)\to\infty\Rightarrow 2+\cos x=0$ امکان ندارد

$$\begin{cases}f(\frac{2\pi}{3})=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{\frac{\sqrt3}{2}}{2+(-\frac12)}=\dfrac{\sqrt3}{3}\\ f(0)=0\\ f(\pi)=0\end{cases}$$

ماکزیمم مطلق تابع برابر با $\frac{\sqrt3}{3}$ و مینیمم مطلق آن ۰ است.

۲. در تابع y=f(x)، نقطهٔ $c\in D_f$ نقطهٔ عطف است، هرگاه $f''(x)$ در c تغییر علامت دهد.

$$f(x)=[(x-1)(x+1)][x(x+2)]+2$$

$$\Rightarrow f(x)=(x^2-1)(x^2+2x)+2$$

$$\Rightarrow f(x)=x^4+2x^3-x^2+2x+2$$

$$\Rightarrow f'(x)=4x^3+6x^2-2x+2$$

$$\Rightarrow f''(x)=12x^2+12x-2=0$$

$$\Rightarrow 6x^2+6x-1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{15}}{6}$$

چون $f''(x)=0$ دارای دو ریشهٔ ساده است، پس تابع y=f(x) دو نقطهٔ عطف دارد.

۳. چون در این تابع وقتی $x\to\infty$، $y\to\infty$، آن‌گاه پس مجانب مایل موجود است و داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+7}{x} & x>0\\ \dfrac{x^2-2x+7}{x} & x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=x+2+\dfrac{7}{x} & x>0\\ f(x)=x-2+\dfrac{7}{x} & x<0\end{cases}$$

چنانچه $x\to+\infty$، آن‌گاه y=x+۲ مجانب مایل و هرگاه $x\to-\infty$، آن‌گاه y=x-۲ مجانب مایل دیگر است. فاصلهٔ بین این دو مجانب مایل، همان فاصلهٔ بین دو خط موازی است.

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt2$$

ریاضی ۳

۱. از تعریف حد چپ و راست استفاده کنید و اینکه اگر در یک نقطه حد چپ و حد راست با هم برابر نباشند، تابع در آن نقطه حد ندارد.

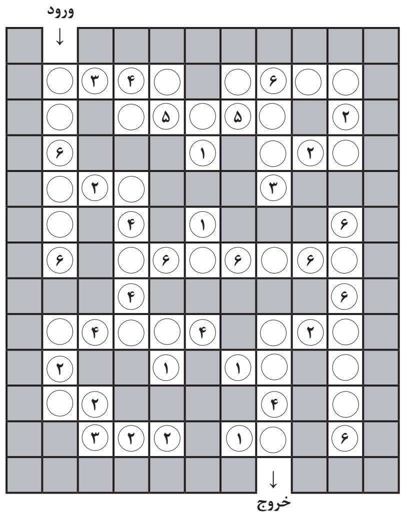
۲. برای محاسبهٔ a توجه دارید که مجموع ضرایب چندجمله‌ای صورت و مخرج صفر است، پس بر (x-۱) بخش‌پذیرند و.... برای محاسبهٔ b از اتحادها استفاده کنید و $\sqrt{x-4}$ را از صورت و مخرج حذف کنید و...

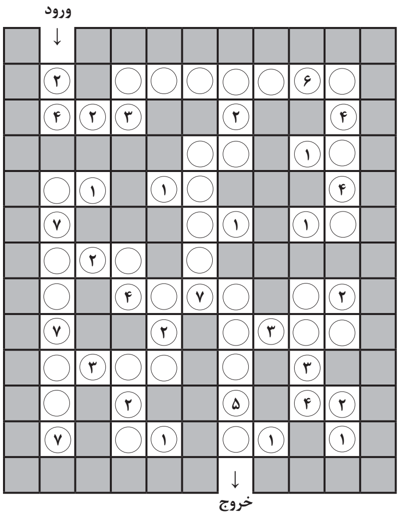
۳. با محاسبهٔ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}$ و $\lim_{x\to0}\frac{\tan4x}{2x}$ و استفاده از قضیهٔ فشردگی $\lim_{x\to0}f(x)$ به‌دست می‌آید.

پاسخ‌ها

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول





ایستگاه دوم

معمای اول

دوستم اشــتباه می‌کرد! امکان ندارد که هیچ‌یک از شهروندان این جزیره چنین چیزی بگویند. زیرا اگر آن‌ها از نوع B باشــند، این سؤال را نمی‌پرسند، چون در این صورت پاسخ بله است. (ولی آن‌ها نباید چنین ســؤالاتی بپرسند.) اما اگر از نوع A باشند، پاسخ خیر است. (و باز هم آن‌ها نباید چنین سؤالی بپرسند.)

معمای دوم

حالا خود داستان واقعیت دارد، اما نمی‌توان گفت کــه او از چه نوعی اســت. زیرا همهٔ شــهروندان این جزیره، صرف‌نظر از آنکه نوع A یا B باشند، می‌توانند چنین ســؤالی بکنند! اگر آن‌ها از نوع A باشند، پاسخ این سؤال بله و اگر از نوع B باشند، پاسخ خیر است و هیچ تناقضی هم به‌وجود نمی‌آید.

معمای سوم

اگر آقا از نوع A باشد، پاسخ این سؤال خیر است، در حالــی که در ایــن صورت، او نباید چنین ســؤالی بپرســد. پس آقا نمی‌تواند از نوع A باشــد و از نوع B اســت. پس پاسخ سؤال او باید خیر باشد. بنابراین او و همســرش هر دو از نوع B نیستند و در نتیجه خانم از نوع A است.

معمای چهارم

فرض کنید برادری که سؤال را پرسیده است، از نوع B باشــد. در این صورت پاسخ سؤال او بله خواهد بود و این ایجاد تناقض می‌کند. (کسی که از نوع B است، نباید چنین ســؤالی بپرسد.) پس او از نوع A است. لذا پاسخ این ســؤال باید بله باشد و در نتیجه برادر دیگر از نوع B است.

معمای پنجم

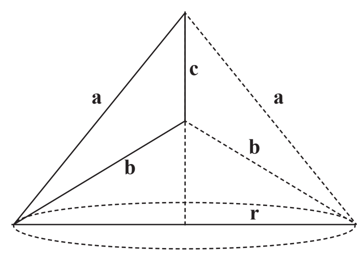
آقا یا از نوع A اســت و یا از نــوع B. فرض کنید او از نوع A باشــد. آن‌گاه باید جواب این ســؤال او بله باشــد و این یعنی آن‌ها از دو نوع متفاوت هســتند و در نتیجــه خانم از نوع B اســت. اما اگــر آقا از نوع B باشــد، باید پاسخ ســؤال او خیر باشد و این یعنی او و همســرش از دو نوع متفاوت نیستند و از یک نوع‌اند و در نتیجــه باز هم خانم از نوع B اســت. پس می‌توان گفت: خانم از نوع B اســت، ولی در مورد آقا نمی‌توان نتیجهٔ قطعی گرفت.

معمای ششم

در معمای اول دیدیم که هیچ شهروندی نمی‌تواند این ســؤال را بپرسد. پس پاسخ این سؤال خیر است و لذا این شهروند از نوع B است.

پاسخ‌ها

۱. اولاً با فرض: $a=۱۰$ و $b=۸$ و $c=۴$، روشن است که زاویهٔ روبه‌رو به A منفرجه است. (چرا؟)



حال با توجه به شکل، حجم موردنظر عبارت است از حاصل اختلاف حجم دو مخروط با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع‌های h_1 و h_2، به‌طوری که داشته باشیم: $h_1-h_2=c=۴$. بنابراین:

$$V=V_1-V_2=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h_1-\frac{۱}{۳}\pi r^۲h_2$$
$$=\frac{۱}{۳}\pi r^۲(h_1-h_2)=\frac{۱}{۳}\pi r^۲\times ۴$$

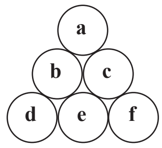
و r ارتفاع وارد بر c در مثلث است که به کمک مساحت مثلث محاسبه می‌شود:

(دستور هرون)

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$=\sqrt{۱۱\times۱\times۳\times۷}=\sqrt{۲۳۱} \qquad p=\frac{a+b+c}{۲}=۱۱$$
$$\Rightarrow r=\frac{۲}{c}\times S=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۳۱}$$
$$\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\pi\times\frac{۱}{۴}\times۲۳۱\times۴=۷۷\pi$$

(گزینهٔ ب)

۲. مثلث بالای این شکل را در نظر بگیرید.



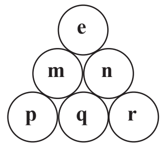
مطابق فرض مسئله باید داشته باشیم:

$d+e+f=b+c=a,\ d+e=b,\ e+f=c$

و از جمع روابط آخر نتیجه می‌شود:

$(d+e+f)+e=b+c\Rightarrow e=۰$

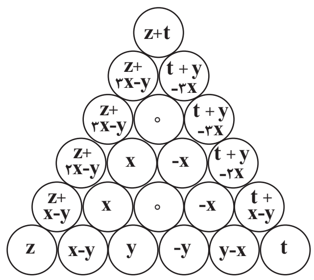
حال مثلث درون مثلث اصلی را در نظر بگیرید.



دایرهٔ رأس این مثلث، همان دایره‌ای است که با حرف e مشخص کردیم و: $e=۰$. بنابراین داریم:

$m+n=p+q+r=e=۰,\ p+q=m,\ q+r=n$

و با استدلالی مشابه نتیجه می‌شود که: $q=۰$. بنابراین دوتا از خانه‌ها مساوی صفر هستند و بقیهٔ خانه‌ها می‌توانند صفر نباشند (گزینهٔ ج). با حل سایر معادلات می‌توانید صورت کلی جواب را هم به شکل زیر به‌دست آورید.



۳. با تقسیم طرفین معادله، بر ۲^z نتیجه می‌شود: $۲^{x-z}+۲^{y-z}=۱$ و این برابری تنها و تنها وقتی برقرار است که: $x-z=y-z=-۱$. در نتیجه: $x=y$ و $z=x+۱$. یعنی بی‌شمار سه‌تایی به‌صورت $(a, a, a+۱)$ در این رابطه صدق می‌کنند که همگی روی صفحهٔ $x+y=۲z-۲$ واقع‌اند (گزینهٔ ج).

۴. داریم: $۳۰۰۳۰=۲\times۳\times۵\times۷\times۱۱\times۱۳$

اگر این شش عدد را a، b، c، d، e و f بنامیم، حال برای نوشتن این عدد به‌صورت حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی، روش‌های زیر وجود دارند:

(ab) (cd) (ef)

(a) (bc) (def)

(a) (b) (cdef)

و به کمک اصول آنالیز ترکیبی، تعداد راه‌های هر یک از این روش‌ها برابر است با:

$$n_1=\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۳!}=۱۵$$
$$n_2=\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}=۶۰$$
$$n_3=\frac{\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۴}}{۲!}=۱۵$$

و در نتیجه تعداد همهٔ راه‌ها برابر است با: $n_1+n_2+n_3=۹۰$ (گزینهٔ ب).

۵. با فرض $m=n=۲$ داریم:

$f(۴)=f(۲)+f(۲)+f(۴)\Rightarrow ۲f(۲)=۰\Rightarrow f(۲)=۰$

و با فرض $n=۱$ و $m=۱$ داریم:

$f(۲)=f(۱)+f(۱)+f(۱)=۰\Rightarrow ۳f(۱)=۰\Rightarrow$
$f(۱)=۰$

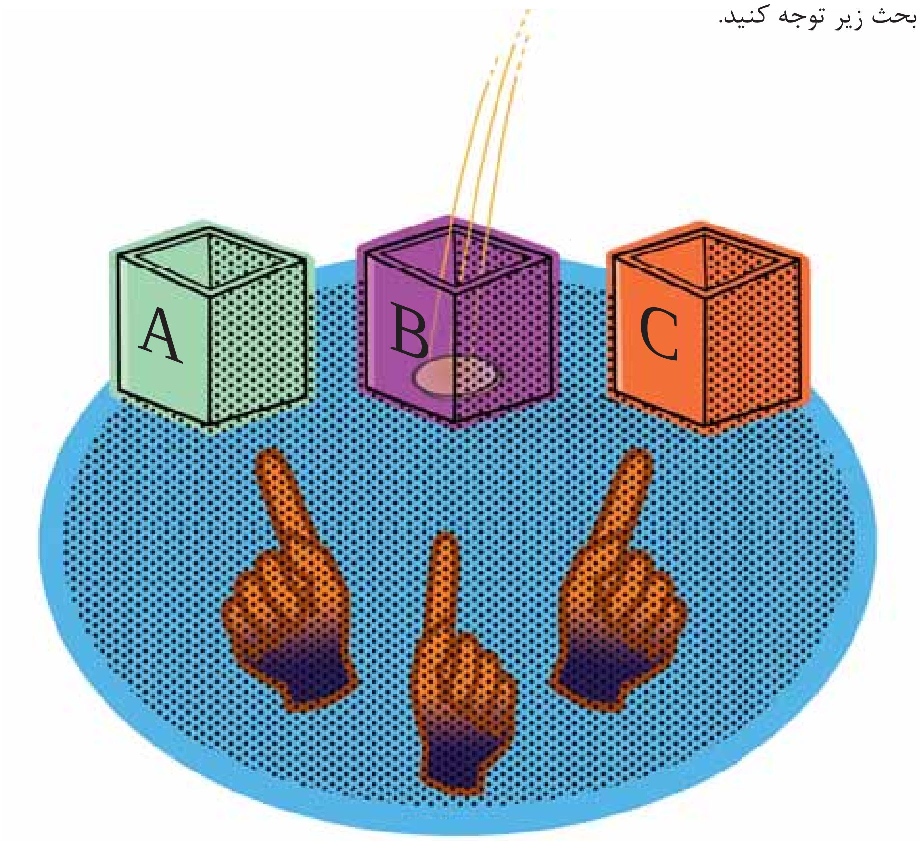
و با فرض $m=۲$ و $n=۱$ داریم:

$f(۳)=f(۲)+f(۱)+f(۲)=۰$

و به‌صورت استقرایی حدس می‌زنیم، برای هر عدد طبیعی n، $f(n)=۰$ و به کمک قضیهٔ استقرای ریاضی درستی این حکم را می‌توان اثبات کرد (اثبات به‌عهدهٔ خواننده است). بنابراین: $f(۱۳۹۵)=۰$ (گزینهٔ ب).

پارادوکس یا سفسطه؟!

فرض کنید سه جعبهٔ A ، B و C را پیش روی ما گذاشته‌اند و به ما گفته‌اند که فقط در یکی از آن‌ها یک سکهٔ طلا وجود دارد! و ما می‌توانیم با انتخاب یکی از جعبه‌ها شانس خودمان را برای تصاحب سکه امتحان کنیم. اگر یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد که سکه در آن باشد؟ حتماً می‌گویید $\frac{1}{3}$! ولی به بحث زیر توجه کنید.



اگر کسی به ما بگوید که جعبهٔ B خالی است، در این صورت با انتخاب جعبهٔ A، چه‌قدر شانس داریم که سکه را ببریم؟ بدیهی است که احتمال این امر، در این صورت مساوی $\frac{1}{2}$ است. حالا فرض کنیم کسی به ما بگوید که جعبهٔ C خالی است، در این صورت با انتخاب جعبهٔ A، چه‌قدر احتمال دارد، سکه را صاحب شویم؟ روشن است که باز هم پاسخ $\frac{1}{2}$ است. ولی همچنین واضح است که همیشه یکی از دو جعبهٔ B و C خالی است، پس در هر حال احتمال آنکه سکه را ببریم $\frac{1}{2}$ است!!

نظرتان چیست؟ اگر اشکالی در استدلال فوق وجود دارد، کجاست؟ منتظر نظراتتان در این زمینه می‌مانیم.

ریاضیات در استان کردستان*

استان کردستان پیشینهٔ فرهنگی غنی دارد و در یک قرن اخیر فعالیت‌های بسیاری نیز در زمینهٔ ریاضیات در آن خطهٔ سرسبز انجام گرفته است. معلمان و استادان فرهیختهٔ ریاضی این استان تاکنون منشأ خدمات بسیاری در این زمینه بوده‌اند که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به افراد شاخصی همچون زنده‌یاد حیدر محیی (متولد ۱۲۹۲ در سنندج، دبیر ریاضی و بازنشسته به سال ۱۳۴۲ و متوفی به سال ۱۳۸۰)، عباس عزتیار (متولد ۱۲۹۹، دبیر ریاضی و مؤلف کتاب‌های ۴۰۰ مسئلهٔ حساب و هندسه و حساب عزتیار)، همایون دهقان، پرویز فرهودی‌مقدم (متولد ۱۳۱۵ در سنندج، عضو شورای برنامه‌ریزی ریاضی و دفتر تألیف کتاب‌های ریاضی، مؤلف کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی تحصیلی و کتاب‌های کمک‌درسی)، دکتر فرهاد جنتی (متولد ۱۳۲۹ در سنندج، شاگرد مرحوم غلامحسین مصاحب و عضو هیئت علمی دانشگاه کردستان، مترجم و مؤلف کتاب‌های ریاضی)، مظفر غربی (دبیر نمونهٔ ریاضی و پژوهشگر فعال استان و مؤلف کتاب‌های ریاضی) و دکتر ارسلان شادمان (متولد ۱۳۱۷ در سنندج، فارغ‌التحصیل دورهٔ دکترای ریاضی از دانشگاه سوربن فرانسه و استاد ممتاز دانشگاه‌های تهران و کردستان، همکار دفتر تألیف کتاب‌های درسی ریاضی، مؤلف و مترجم چند کتاب ریاضی) اشاره کرد. دانش‌آموزان استان کردستان همواره در مسابقات ریاضی کشور و المپیادها فعالانه شرکت کرده‌اند که از آن جمله عضویت دو تن از آنان در تیم‌های المپیاد ریاضی ایران است (افشین عبداللهی در سال ۱۹۹۳ با کسب مدال نقره و محمد جواهری در سال ۱۹۹۵ با کسب مدال نقره).

در سال‌های اخیر دبیران و استادان و علاقه‌مندان ریاضیات در این استان غربی کشور فعالیت‌های زیادی انجام داده‌اند که از جمله می‌توان موارد زیر را برشمرد:

- برگزاری همایش زیبایی‌های ریاضی در شهرستان پاوه (سال ۱۳۸۹- با سخنرانی دکتر زهرا گویا و آقای مظفر غربی).
- برگزاری جشنوارهٔ دنیای شگفت‌انگیز ریاضی در سروآباد کردستان.
- برگزاری همایش گرامی‌داشت روز ملی ریاضیات در سنندج (سال ۱۳۸۹- با سخنرانی دکتر ارسلان شادمان).
- برگزاری جشنوارهٔ «آشتی با ریاضی» در ناحیهٔ ۱ سنندج (سال ۱۳۹۰)
- برگزاری یادوارهٔ استاد پرویز شهریاری در سال‌روز تولد حکیم عمر خیام در سنندج (سال ۱۳۹۱- با سخنرانی دکتر زهرا گویا و دکتر ارسلان شادمان)
- برگزاری جشنوارهٔ روز جهانی عدد پی توسط انجمن معلمان ریاضی استان کردستان (اسفندماه ۱۳۹۱ و اسفند ۱۳۹۲).

* تهیهٔ منابع این مطلب، مرهون همکاری بی‌شائبهٔ دبیر فعال و علاقه‌مند ریاضی شهرستان بانه، آقای **فرزاد حمزه‌پور** بوده است. پیش از این هم در مجلهٔ برهان مطالبی از ایشان به چاپ رسیده است.