رشد برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

- دورهٔ بیست‌وچهارم
- شمارهٔ پی‌درپی ۸۸
- آبان ۱۳۹۴
- شمارهٔ ۲
- ۴۸ صفحه
- ۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

حرف اول / با ما در ارتباط باشید! / حمیدرضا امیری ۲

آموزشی / دو نگاه متفاوت به دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال! / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۳

حدس، کشف، اعلام! / هوشنگ شرقی ۶

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۷) / حمیدرضا امیری ۱۰

اجسام صُلب و ویژگی‌های هندسی آن‌ها / آیدین منظوری ۱۲

ریاضیات در چند دقیقه / غلامرضا یاسی‌پور ۲۲

یک اثبات و یک تعمیم بر قضیهٔ حمار / هوشنگ شرقی ۲۶

پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۳۰

استدلال! / آسیه رضائی‌گرجی ۴۰

ریاضیات در سینمای جهان / قُبَّه‌ای برای جمشید کاشانی / احسان یارمحمدی ۸

برگی از تاریخ ریاضیات / ماجرای پیدایش کتاب‌های درسی ریاضی در ایرانِ عصر قاجار / دکتر فرید قاسملو ۱۸

مجلات ریاضی جهان / Mathematical Spectrum / احسان یارمحمدی ۲۸

گفت‌وگو / مصاحبه با دکتر محمد علی‌آبام / ۳۶

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی / ایستگاه اول: ستارهٔ وفقی! / هوشنگ شرقی ۱۱

ایستگاه دوم: معمای جام شربت و جام زهر! (۲) ۲۴

ایستگاه سوم: لطیفه‌های ریاضی ۳۵

مسائل برای حل / آمادگی برای آزمون‌های مستمر ۱۵

معرفی کتاب / روش سریع تراختِنبِرگ در حساب / احسان یارمحمدی ۴۴

پرسش‌های پیکارجو! / ۷-۱۷-۲۵-۴۳-۴۵

پاسخ‌ها / راهنمای حل مسائل، آمادگی برای آزمون‌های مستمر / ۴۶

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی (ایستگاه دوم) / ۴۷

پاسخ پرسش‌های پیکارجو! / ۴۸

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، دکتر ابراهیم ریحانی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور، دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی
وبگاه: www.roshdmag.ir
پیام‌نگار: Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله: http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفترمجله: تهران، صندوق‌پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲ ـ ۰۲۱
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۰۲۱
۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ ۰۲۱
شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه
چاپ: شرکت افست (سهامی‌عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

توضیح دربارهٔ طرح روی جلد:

ریاضیات و هنر: استفاده از ریاضیات در خلق آثار هنری سابقه‌ای دیرینه داشته و بیانگر جلوه‌های زیبای ریاضی نیز می‌باشد.
نقاشی روی جلد از آثار موریس اشر ریاضی‌دان و نقاش معاصر هلندی است که به کمک تبدیل‌های هندسی آثار ماندگاری را خلق کرد. دربارهٔ روش این هنرمند در شماره‌های ۸۳ و ۸۴ مجله قبلاً مطالبی داشته‌ایم.

با ما در ارتباط باشید!

آیا شمارهٔ ۱ ماه‌نامهٔ برهان را دریافت و مطالعه کرده‌اید؟ از کدام مقاله‌های آن استفاده کردید؟ آیا مایلید با ما ارتباط داشته باشید و برای ما مطالبی ارسال کنید؟ آیا پیشنهادی یا نظری دربارهٔ مطالب شمارهٔ ۱ دارید؟ حتماً راه ارتباط با ما را هم می‌دانید. خب پس چرا معطلید؟! شما با استفاده از تجربه‌های دبیران محترم و مطالعهٔ بیشتر به راحتی می‌توانید مقاله‌هایی (در حداکثر ۴ صفحه) تهیه و تدوین کنید و برای ما بفرستید. حتی حل یک مسئله از روش‌های دیگر و متفاوت با روش کتاب درسی و یا کاربردهای مسائل کتاب درسی می‌تواند برای دوستان شما مفید باشد.

سعی کنید مطالب ارسالی تا حدامکان کوتاه، جدید و با توضیح کافی همراه باشند. حتماً هم قبل از ارسال، مطلب را به دبیر محترم درس ریاضی خود نشان دهید و راهنمایی‌های ایشان را به‌کار بگیرید. راستی اگر خاطره‌ای از کلاس درس ریاضی دارید که فکر می‌کنید جالب و آموزنده است و دوستان شما می‌توانند از آن استفاده کنند، برای ما بفرستید. ان‌شاءالله با همکاری شما دانش‌آموزان فرهیخته و علاقه‌مند و دبیران محترم ریاضی در سراسر کشور، در هر شماره به تنوع و غنای علمی مطالب مجله افزوده شود.

هیئت تحریریه مجلهٔ ریاضی برهان متوسطهٔ ۲ امیدوار است، آن‌قدر مطالب ارسالی از طرف خوانندگان مجله افزایش یابد که همهٔ مقالات چاپ شده از طرف شما باشد و اعضای هیئت تحریریه فقط مطالب و مقالات رسیده به دفتر مجله را داوری و انتخاب کنند و پس از ویرایش در نوبت چاپ قرار دهند.

دوستان عزیز و فرهیخته!

مطالعهٔ ریاضی، و تمرین کردن و ریاضی ورزیدن باعث رشد تفکر منطقی شما می‌شود و کمک خواهد کرد با مسائل برخورد منطقی‌تری داشته باشید و آن‌ها را از بهترین و کوتاه‌ترین راه، حل کنید. در این مسیر دو عاملِ علاقه و پشتکار، بسیار مؤثر و عنصر تمرکز می‌تواند سریع‌تر شما را به هدف برساند.

مؤید و پیروز باشید

سردبیر

دکتر محرم نژاد ایردموسی
عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

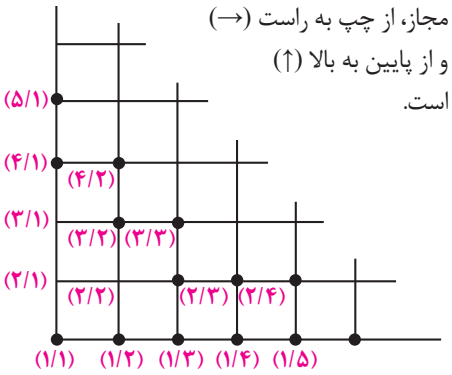
دو نگاه متفاوت به دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال

مقدمه

شـاید برای شـما هم اتفاق افتاده باشـد که در حل یک مسـئله به راه‌حل‌های متفاوتی برخورده باشـید و این راه‌حل‌های متفاوت به بخش‌های مختلفی از ریاضیات تعلق داشـته باشـند. آیا به پیدا کردن و آموختن یک راه‌حل اکتفا می‌کنید، یا اینکه سـعی می‌کنید روش‌های مختلف را بیاموزید؟ مطمئناً یادگیری چند روش حل شـما را قادر می‌سـازد که در مسـائل مشـابه دست بازتری برای حل مسئله داشته باشید. اتحاد دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال یکی از همین مسئله‌هاست. در این مقاله قصد داریم با دو نگاه «جبری» و «ترکیبیاتی» به سراغ این اتحاد مفید برویم.

با ارائه چند مسئله به طرح موضوع می‌پردازیم:

◆ **مسـئلهٔ ۱.** در شهر صدتقاطع، خیابان‌ها یا شمالی ـ جنوبی هسـتند و یا شـرقی ـ غربی و چون این شهر ۱۰ خیابان عمودی و ۱۰ خیابان افقی دارد، به «شهر صدتقاطع» مشـهور شده است. شـهرداری این شهر خیابان افقی iام، خیابان عمودی jام و تقاطع این دو خیابان را به‌ترتیب با اسامی رود iام، سرو jام و تقاطع (i,j) نام‌گذاری کرده اسـت. شـاید برای هر شهروند این شـهر مهم باشـد که بداند چند مسـیر متفاوت برای رفتـن از منزل به محل کارش وجود دارد. برای مثـال، از تقاطع (۱,۱) به تقاطع (۲,۳)، ۳ مسـیر به طـول ۳ وجود دارد (بشـمارید) و از تقاطع (۱,۱) به تقاطع (۳,۳)، ۶ مسـیر به طـول ۴ وجود دارد. چند مسـیر متفاوت از تقاطع (۱,۱) به تقاطع (i+۱,j+۱) وجود دارد؟ دقت کنید که در این شمارش، کوتاه‌ترین مسیرها را می‌خواهیم بشماریم. یعنی تنها حرکت‌های مجاز، از چپ به راست (→) و از پایین به بالا (↑) است.



◆ **مسئلهٔ ۲. علی** می‌خواهد حاصل عبارت $(x+y)^n$ را برای عدد طبیعی n محاسبه کند. او به‌جای n مقادیر ۱،۲،۳،... را جایگزین می‌کند تا بتواند دربارهٔ $(x+y)^n$ حدس بزند. برای n=۱ می‌نویسد: $(x+y)^1=x^1+y^1$ و برای n=۲ می‌نویسد:

$$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x(x+y)+y(x+y)$$
$$=x^2+xy+yx+y^2=x^2+2xy+y^2.$$

برای n=۳ می‌نویسد:

$$(x+y)^3=(x+y)(x+y)^2=x(x+y)^2+y(x+y)^2$$

و از نتیجهٔ قبل استفاده می‌کند:

$$=x^3+2x^2y+xy^2+yx^2+2xy^2+y^3$$
$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

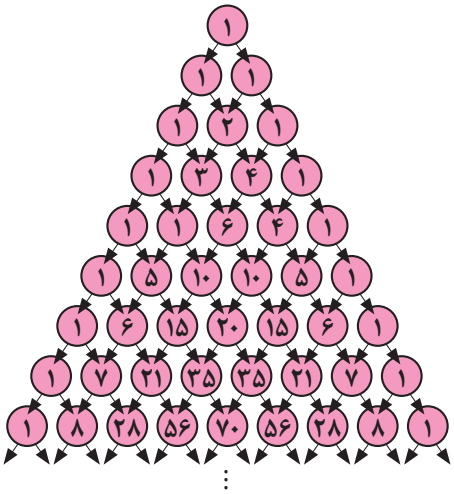
● **تمرین ۱.** حاصل $(x+y)^4$ را از روی $(x+y)^3$ و حاصل $(x+y)^5$ را از روی $(x+y)^4$ به‌دست آورید.

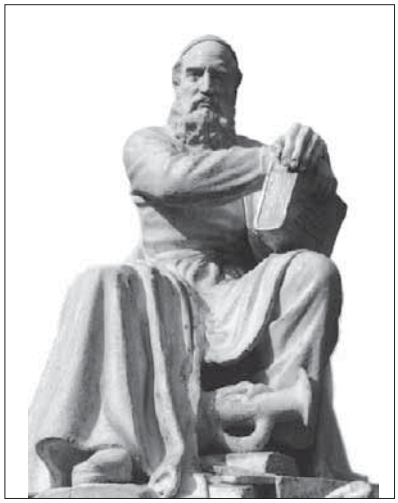
علی به حدس‌های زیر در انتهای این محاسبات می‌رسد:

حدس اول: تعداد جملات $(x+y)^n$ برابر است با n+۱.

حدس دوم: ضرایب جملات x^iy^{n-i} و $x^{n-i}y^i$ یکسان هستند. به‌عنوان مثال، در حاصل عبارت $(x+y)^5$، ضریب جملات x^4y و xy^4 برابر ۵ است.

حدس سـوم: جملات $(x+y)^{n+1}$ را می‌توان از روی جملات $(x+y)^n$ با یک محاسـبهٔ ساده به‌دست آورد. اما سؤال اصلی برای علی این است که ضریب جمله x^iy^j در حاصل عبارت $(x+y)^n$ چه‌قدر است؟ (i+j=n).





◆ **مسئلهٔ ۳.** با استفاده از ارقام صفر و یک می‌توان ۲^n کُد nرقمی تولید کرد (چرا؟). برای مثال چهار کد دو رقمی وجود دارد که عبارت‌اند از ۰۰، ۰۱، ۱۰ و ۱۱. **پارسا** به دنبال کدهایی است که تعداد رقم‌های یک در آن‌ها برابر i و در نتیجه تعداد رقم‌های صفر در آن‌ها برابر j=n–i است. برای مثال، ۶ کد چهار رقمی داریم که دقیقاً ۲ رقم یک دارند: ۰۰۱۱، ۱۰۰۱، ۰۱۰۱، ۰۱۱۰، ۱۰۱۰ و ۱۱۰۰. چند کد nرقمی وجود دارد که هر کدام شامل دقیقاً iرقم یک باشند؟

● **سؤال ۱. آیا ارتباطی بین این سه مسئله وجود دارد؟**

پارسا به دنبال حل مسئله ۳، به این نکته پی برد که در یک کد nرقمی کافی است که جای رقم‌های یک را انتخاب کند. با این‌کار به‌طور یکتایی جای ارقام صفر نیز مشخص می‌شود. بنابراین، پارسا نتیجه گرفت که تعداد کدهای nرقمی شامل iرقم یک برابر است با انتخاب i مکان از n مکان که برابر است با: $\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-۱)!}$.

● **سؤال ۲. آیا پارسا می‌توانست به‌جای انتخاب مکان رقم‌های یک، به سراغ رقم‌های صفر برود و ابتدا مکان رقم‌های صفر را مشخص کند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

علی با دیدن راه‌حل مسئلهٔ ۳، راه‌حلی برای مسئلهٔ ۲ پیدا کرد و به همان جواب $\binom{n}{i}$ رسید.

● **سؤال ۳. علی برای حل مسئله ۲ به کمک راه‌حل مسئله ۳، چه راهی را رفته است؟**

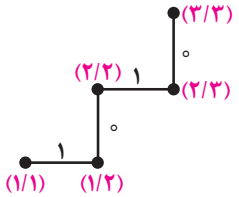
اما علی با توجه به حدس‌های خود نتایج جالب دیگری هم پیدا کرد. او با توجه به حدس سوم خود به این تساوی رسید:

$$\binom{n}{i}=\binom{n-۱}{i}+\binom{n-۱}{i-۱} \qquad (۱)$$

این رابطه، به اتحاد خیام ـ پاسکال معروف است، چرا که این دو ریاضی‌دان معروف، اولین کسانی بودند که به‌درستی این رابطه پی بردند.

● **سؤال ۴. اثبات رابطهٔ فوق به کمک تساوی $(x+y)^n=(x+y)(x+y)^{n-۱}$ انجام می‌شود. راه‌حل علی را پیدا کنید.**

حال فرض کنید شما ساکن شهر صدتقاطع هستید و از راه‌حل‌های علی و پارسا اطلاع دارید. با توجه به شباهت‌های این سه مسئله، شاید بتوانید تعداد مسیرهای موردنظر بین دو تقاطع (۱,۱) و (i+۱,j+۱) را پیدا کنید. اگر هر حرکت افقی را با رقم یک و هر حرکت عمودی را با رقم صفر نمایش دهید، آن‌گاه هر مسیر از (۱,۱) به (i+۱,j+۱)، یک کد به طول i+j را مشخص می‌کند که شامل i رقم یک و j رقم صفر است. برای مثال، کد ۱۰۱۰ مسیر زیر را از تقاطع (۱,۱) به تقاطع (۳,۳) نشان می‌دهد.



بنابراین، تعداد مسیرهای موردنظر برابر است با: $\binom{n}{i}$.

با توجه به راه‌حل‌های سه مسئله فوق برابری زیر به‌دست می‌آید:

$$(x+y)^n=\binom{n}{n}x^n+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y+\dots+\binom{n}{1}xy^{n-1}+\binom{n}{0}y^n \quad (2)$$

این اتحاد (که به ازای هر دو عدد حقیقی x و y برقرار است)، اتحاد دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال نامیده می‌شود. پارسا با توجه به تعداد کدهای به طول n که شامل i رقم یک هستند، به نتیجهٔ زیر رسیده است که خود یک اتحاد ترکیبیاتی است:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n \quad (3)$$

● **سؤال ۵. استدلال پارسا برای این تساوی چیست؟**

اما علی برای اثبات تساوی فوق راه‌حل دیگری دارد و به این موضوع اشاره می‌کند که در اتحاد دو جمله‌ای خیام ـ پاسکال می‌توان به‌جای x و y اعداد دلخواهی قرار داد.

● **سؤال ۶. علی به‌جای x و y در اتحاد (۲) چه اعدادی قرار داده است تا بتواند اتحاد (۳) را نتیجه بگیرد؟**

علی با توجه به روش جبری خود و با تغییر مقدارهای x و y توانسته است اتحاد زیر را هم به‌دست آورد:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\dots\pm\binom{n}{n}=0 \quad (4)$$

(ضریب جملهٔ آخر در سمت چپ یا مثبت است یا منفی که بستگی به n دارد.)

● **سؤال ۷. مقادیر طلایی x و y برای اثبات اتحاد (۴) از روی (۲) چه هستند؟**

● **سؤال ۸. از اتحادهای (۳) و (۴) نتیجه بگیرید:**

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots=2^{n-1} \quad (5)$$

اگر تعداد مسیرها از تقاطع (۱,۱) به تقاطع‌های دیگر را بنویسیم، شکل زیر حاصل می‌شود:

۱					
۱	۵				
۱	۴	۱۰			
۱	۳	۶	۱۰		
۱	۲	۳	۴	۵	
۱	۱	۱	۱	۱	۱

● **سؤال ۹. اتحاد (۳) در این شکل بیانگر چه ویژگی است؟ اتحاد (۱) چه‌طور؟ علی به روش جبری حدس دوم خود را ثابت می‌کند: (i+j=n)**

$$\text{ضریب } x^iy^j=\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!j!}$$

$$=\frac{n!}{j!(n-i)!}=\binom{n}{j}=\text{ضریب } x^jy^i$$

بنابراین: $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}$ (۶).

اما پارسا که به راه‌حل‌های ترکیبیاتی بیشتر علاقه‌مند است، به کمک مسئله ۳، اثباتی ترکیبیاتی برای اتحاد (۶) پیدا می‌کند.

● **سؤال ۱۰. اثباتی ترکیبیاتی برای اتحاد (۶) پیدا کنید. آیا می‌توانید به کمک مسئلهٔ ۱ یا ۳، اثباتی ترکیبیاتی برای اتحاد (۱) پیدا کنید.**

اکنون که به پایان این مقاله نزدیک می‌شویم، مسئله‌ای برای شما مطرح می‌کنیم. بررسی کنید که چه روشی (جبری یا ترکیبیاتی) برای حل این مسئله مفیدتر است؟

◆ **مسئلهٔ ۴.** اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\dots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

مقاله را به پایان می‌بریم در حالی که علی (که به روش جبری علاقه‌مند است)، تساوی زیر را می‌نویسد و شروع به حل مسئله می‌کند:

$(x+y)^n(x+y)^n=(x+y)^{2n}$.

و پارسا که به روش ترکیبیاتی علاقه دارد، به کدهای 2n رقمی که شامل n رقم صفر و n رقم یک هستند، فکر می‌کند.

شما چه‌طور؟ بیایید با هم از تقاطع (۱,۱) به تقاطع (n+۱, n+۱) برویم!

هوشنگ شرقی

مقدمه

اگر بگوییم روزی نیســت که در نقطه‌ای از جهان بزرگ ما، فردی مدعی کشــف یک حکم جدید و راهی تازه و یا اثباتی برای یک حدس ثابت نشــده، نشود، شــاید اغراق نکرده‌ایم! کافی است سری به دنیای مجازی بزنید تا ببینید چه‌قدر از این ادعاها در آنجا اعلام شده است. از این شماره قصد داریم به بعضی از این ادعاها بپردازیم و آن‌ها را نقد کنیم.

پیش از شروع بحث این شماره، یک نکتهٔ مهم را یادآور می‌شویم. هدف ما از این کار به هیچ عنوان تخریب یا اثبات کم‌سوادی دیگران نیست. هدف ما این است که با نقد این ادعاها، بر دانش خودمان بیفزاییم و چه بسا از این نقدها، کشفیات تازه‌ای را بیرون بیاوریم! اما توصیهٔ ما به همهٔ دوستان و به‌خصوص نوجوانان و جوانان دانش‌دوست این است که هرچه کشف می‌کنند و یا هر رابطه‌ای را که حدس می‌زنند، قبل از راستی آزمایی اعلام نکنند.

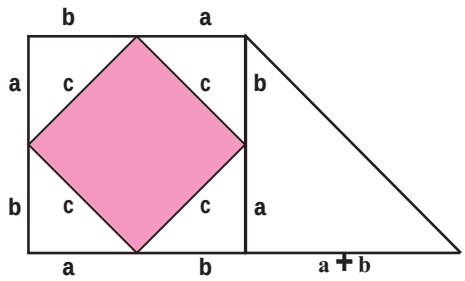
یادمان نرود، اگرچه کشــف کردن در ریاضیات، برخلاف علوم‌تجربی و آزمایشــگاهی، چندان محتاج ابزارهای دقیق و پرهزینه نیست، اما به‌همین سادگی هم نیست. معمولاً کارهای بزرگ به‌صورت گروهی انجام می‌گیرند، و نیز ممکن است آنچه که شما امروزه کشف می‌کنید، سال‌ها قبل به‌دست آمده باشد. پس بیشتر دقت کنید و قبل از اعلام، دربارهٔ آن با متخصصان آن حوزه به اندازهٔ کافی مشورت کنید.

● **یک خبر، یک کشف!**

دانش‌آموز ۱۶ سالهٔ ایرانی، روش جدیدی برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس کشف کرد!

این خبر که بیش از یک سال است در سایت‌های گوناگون آمده، اثبات جدید زیر را برای قضیهٔ فیثاغورس اعلام کرده است:

نحوهٔ اثبات: ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای را در نظر می‌گیریم که قاعدهٔ کوچک آن a+b و قاعدهٔ بزرگ آن ۲a+۲b و همچنین ارتفاع آن a+b باشد. مربعی را در داخل آن به ضلع c محاط می‌کنیم. داریم:



«مساحت ذوزنقه = مساحت مربع + ۴× مساحت مثلث کوچک + مساحت مثلث متساوی‌الساقین»

$$\text{(یک ضلع)}^{۲} + ۴\times\frac{(\text{قاعدهٔ کوچک} + \text{قاعدهٔ بزرگ})(\text{ارتفاع})}{۲} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲} + \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$$

$$\frac{(a+b+a+b+a+b)(a+b)}{۲} = c^{۲} + ۴\times\frac{a\times b}{۲} + \frac{(a+b)^{۲}}{۲}$$

$$\frac{(۳a+۳b)(a+b)}{۲} = c^{۲} + ۲ab + \frac{a^{۲}+۲ab+b^{۲}}{۲}$$

طرفین رابطهٔ بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم و داریم:

$(۳a+۳b)(a+b)=۲c^{۲}+۴ab+a^{۲}+۲ab+b^{۲}$

$۳a^{۲}+۳ab+۳b^{۲}+۳ab=۲c^{۲}+۶ab+a^{۲}+b^{۲}$

پس از ساده کردن طرفین داریم: $۲a^{۲}+۲b^{۲}=۲c^{۲}$

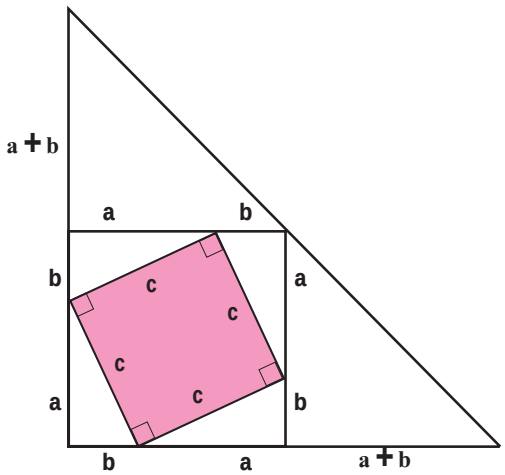
حال طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و داریم: $c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$

یعنی در مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.

نقد اثبات: به‌نظر می‌آید که استدلال فوق بی‌نقص باشد! و همین‌طور هم هست، اما... .

کمی به شکل دقت کنید. مثلث قائم‌الزاویهٔ سمت راست را حذف کنید، مربع به ضلع a+b و مربع به ضلع c محاط در درون آن را ملاحظه کنید (البته توضیح نداده‌اند که این مربع را به چه صورت در مربع بزرگ محاط کرده‌اند و چرا این‌کار همیشه مقدور است.) این شکل برایتان آشنا نیست؟! بله همان اثبات معروف تاریخی قضیهٔ فیثاغورس است که در کتاب درسی هندسهٔ ۱ و در بسیاری منابع دیگر نیز آمده است. پس این اثبات تازه‌ای برای قضیهٔ فیثاغورس نیست. می‌توان به مربع فوق هر شکل دیگری را اضافه کرد و یک روش جدید ابداع کرد! مثلاً روش زیر:

مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر را از دو راه به‌دست آورید و با هم مساوی قرار دهید، تا به تساوی $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$ برسید!



اگرچه کشف کردن در ریاضیات، برخلاف علوم تجربی و آزمایشگاهی چندان محتاج ابزارهای دقیق و پرهزینه نیست، امّا به همین سادگی هم نیست!

پرسش‌های پیکارجو! ۱

$a_{۱}, a_{۲}, ..., a_{۱۳۹۵}$ تعدادی عدد صحیح هستند و $b_{۱}, b_{۲}, ..., b_{۱۳۹۵}$ هم همان عددها هستند ولی به ردیفی دیگر. دربارهٔ عدد $(a_{۱}-b_{۱})(a_{۲}-b_{۲})...(a_{۱۳۹۵}-b_{۱۳۹۵})$ همواره می‌توان گفت:

الف) مربع کامل است. ب) زوج است. ج) فرد است.

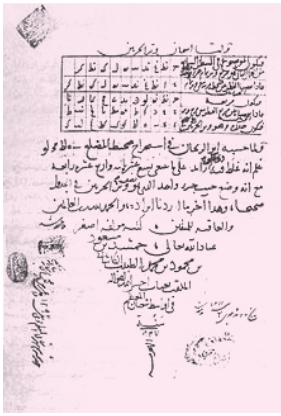
د) منفی است. هـ) مثبت است.

احسان یارمحمدی

قُبّه‌ای برای جمشید کاشانی

* **نام فیلم:** قُبّه‌ای برای جمشید کاشانی
* **طراح و نویسنده:** ایوونه دولد ـ سمپلونیوس[1]
* **تولید شده تحت نظارت و حمایت دانشگاه هِیدِلبِرگ[2] در سال ۱۹۹۵** * **مترجم:** محمد باقری
* **صداگذاری و دوبلاژ:** امین محمدی * **تهیه و توزیع در ایران:** خانهٔ ریاضیات اصفهان در سال ۱۳۸۵

فیلم «قُبّه‌ای[3] برای جمشید کاشانی» به شرح پنج روش ترسیمی ریاضی‌دان پرافتخار ایران، **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** برای احداث گنبدهایی که در دورهٔ اسلامی ساخته شده‌اند و نیز اقدامات تحسین‌برانگیز **الغ بیگ**، فرمانروای دانش‌دوست دورهٔ تیموری در آن دوره، اشاره دارد. علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات



و هندسهٔ کاربردی می‌توانند با تماشای این فیلم با گوشه‌ای از تلاش‌های این دو تن از نام‌داران ایران‌زمین آشنا شوند. بنابراین در ابتدای مقاله به ارائهٔ مطالبی که در این فیلم ویدیویی هم به آن‌ها اشاره شده است، می‌پردازیم تا علاقه‌مندان به تماشای این فیلم با پیش‌زمینه‌ای مناسب‌تر به دیدن آن بنشینند.

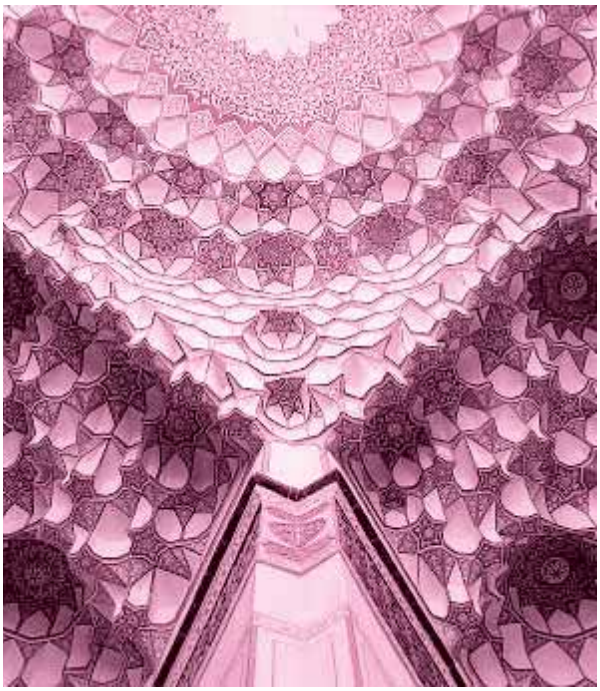
در واقع فیلم قُبّه‌ای برای جمشید کاشانی، برپایهٔ ابداعات ستاره‌شناس و ریاضی‌دان عصر تیموری، غیاث‌الدین کاشانی که در کتاب چهارم (دربارهٔ اندازه‌گیری) از کار اصلی او ـ مفتاح‌الحساب ـ شرح داده شده، تهیه و تدوین شده است. تا آنجا که ما می‌دانیم، قدیمی‌ترین نسخهٔ این کتاب تاریخ ۱۵۵۸ میلادی را دارد و در کتابخانهٔ دانشگاه لیدن در هلند نگهداری می‌شود. علاقه به محاسبهٔ سطح و حجم مربوط به قسمت‌های یک بنا به‌خاطر کاربردهای آن است. در ایتالیای قرون‌وسطا معمول بود که دستمزد استادکار را متناسب با مساحت کاری که انجام می‌داد، می‌پرداختند. رسم مشابهی هم می‌توانست در دورهٔ اسلامی وجود داشته باشد. به‌صورت مشابه مفید است که بدانیم چه‌قدر مصالح نیاز است. برای مثال، مقدار طلای موردنیاز برای طلاکاری، مقدار آجر مورد نیاز برای بنا، یا رنگ و غیره. البته معماری اسلامی توسط این عناصر ویژه مشخص می‌شوند: مُقَرنَس، قُبّه (گنبد) و با اهمیت کم‌تر، کمان‌ها و طاق‌ها.

کتاب چهارم از مفتاح‌الحساب با چند شکل مسطح شروع می‌شود و با محاسبهٔ شکل‌های سه‌بعدی ادامه می‌یابد: از روش‌هایی برای محاسبهٔ حجم استوانه، مخروط، مخروط ناقص، تقاطع مخروطات و کره گرفته تا محاسبات مربوط به اجزای ساختمان. در نهمین (آخرین) فصل کتاب، دربارهٔ ساختارها و بناها، هدف عمل‌گرایانه، محاسبهٔ سطح و حجم نمادهای مشخصهٔ معماری دورهٔ اسلامی است: کمان‌ها، طاق‌ها، گنبدها و مُقَرنَس‌ها. به این منظور غیاث‌الدین جمشید کاشانی، با استفاده از پنج ترسیم هندسی برای کمان‌ها که فقط از خط‌کش و پرگار استفاده می‌کنند، برای این ساختارها ترسیم‌های هندسی تقریبی ارائه می‌دهد. دَوَران یک کمان حول محورش یک گنبد ایجاد می‌کند، که در این فیلم ویدیویی روش‌های ترسیم کمان‌ها و گنبدهای

متناظر توسط رایانه اجرا شده‌اند و برای ساختن طرح مقبره‌ای به افتخار جمشید کاشانی در نزدیکی رصدخانهٔ الغ‌بیگ، جایی که جمشید کاشانی در سال ۱۴۹۲ میلادی فوت کرد، به‌کار رفته‌اند. برای کامل‌کردن مجموعه، یک بازسازی ساده از این رصدخانه (که در بیرون سمرقند واقع بوده)، ارائه شده است. این بازسازی براساس متون معاصر است، چون رصدخانه در ابتدای قرن ۱۶ میلادی کاملاً ویران شد.

۱۵۰ سال پس از شروع فرمانروایی مغول‌ها، شهر سمرقند مجدداً روبه ترقی نهاد. چون سردار مغول، **تیمور لنگ** از ۱۳۶۹ میلادی به قدرت رسید و شهر سمرقند را به‌عنوان پایتخت امپراتوری مرتباً روبه گسترش خود برگزید، زیباسازی شهر سمرقند تحت حکومت تیمور شروع شد و در زمان حکومت نوهٔ او ـ الغ‌بیگ ـ ادامه یافت؛ به‌خصوص با ساخت قصر سلطنتی و رصدخانهٔ معروف وی. خان‌بزرگ (خاقان) الغ‌بیگ (۱۳۹۴-۱۳۴۹ میلادی) در دربار پدربزرگ خود پرورش یافت و از سال ۱۴۰۹ تا ۱۴۴۹ فرمانروایی کرد. برخلاف تیمور، الغ‌بیگ به فتح سرزمین‌ها و کشورگشایی علاقه‌مند نبود، اما به‌عنوان دانشمند مشهور شد و به‌طور ویژه به‌خاطر جدول‌های نجومی (زیج‌هایی) که تحت حمایت او در رصدخانهٔ سمرقند تهیه شدند، شهرت یافت. در سال ۱۴۱۷ او در سمرقند مدرسه‌ای تأسیس کرد که محلی برای مطالعات پیشرفته در علوم الهی، ریاضیات و علوم طبیعی بود و نجوم در آن مهم‌ترین مبحث به‌شمار می‌آمد. این مدرسه از دیگر مدارس زمان خود، چه از نظر محتوای درس‌ها و چه از نظر تدریس متفاوت بود. اندکی بعد از تکمیل مدرسه، الغ‌بیگ ساخت یک رصدخانهٔ سه طبقه را آغاز کرد. برای کار در مدرسه و رصدخانه، الغ‌بیگ تعداد زیادی از دانشمندان را به خدمت خویش درآورد؛ از جمله منجم و ریاضی‌دان سرشناس ایرانی، غیاث‌الدین جمشید کاشانی.

یک ربع قرن قبل از ترور الغ‌بیگ در سال ۱۴۴۹ و شروع حرکت‌های ارتجاعی سیاسی و ایدئولوژیک، سمرقند مهم‌ترین مرکز علمی مشرق‌زمین محسوب می‌شد. جمشید کاشانی فعالانه در مطالعات ریاضی و نجومی آنجا شرکت کرد و نقش مهمی در شکل‌گیری رصدخانه و تجهیز آن با بهترین وسایل داشت. او مهم‌ترین جایگاه را بین دانشمندان دربار الغ‌بیگ به‌دست آورد. جمشید کاشانی از تبحر و توانایی ریاضی الغ‌بیگ بسیار تمجید می‌کند، به‌خصوص از توانایی او در انجام ذهنی محاسبات پیچیده. اما دربارهٔ ۶۰ تا ۷۰ همکار او با تمسخر چنین می‌گوید: «... واقعیت این است که گرچه تعداد آن‌ها زیاد است و با ریاضیات سروکار دارند، اما هیچ‌یک چنان نیستند که جایگاهی واقعی در علوم نظری و علم رصد داشته باشند. چون هیچ‌یک **المجستی** را نمی‌دانند. فقط یک نفر هست که علم المجستی را می‌داند که نامش **قاضی‌زادهٔ رومی** (الرومی) است. ولی او مردی عمل‌گرا نیست و هیچ کاری در رابطه با کاربردها انجام نداده است. با وجود این، او با معلومات‌ترین آن‌هاست.»



قاضی‌زادهٔ رومی (۱۴۳۶-۱۳۶۴ میلادی) بعد از مرگ کاشانی سرپرست رصدخانه شد. جمشید کاشانی مثال‌های متعددی از مسائل نجومی که در نشست‌های متعدد علمی که توسط سلطان ترتیب داده می‌شد، ارائه می‌دهد. این مسائل که برای دیگران بیش از حد دشوار بودند، توسط کاشانی به‌سادگی حل می‌شدند. با خشنودی فراوان، کاشانی برای پدرش دربارهٔ ستایش‌ها و تمجیدی‌های الغ‌بیگ از او (که از طریق دوستانش به او گفته می‌شد) صحبت می‌کند. جمشید کاشانی بر آزادی کامل فضای گفت‌وگوهای علمی که در حضور سلطان برگزار می‌شد، تأکید می‌کند. در ضمن نامه‌های کاشانی شامل اطلاعات جالبی دربارهٔ ساخت ساختمان رصدخانه و وسایل کار در آن است و مشخص می‌سازد که جمشید کاشانی نزدیک‌ترین همکار و مشاور الغ‌بیگ بوده است.

*** پی‌نوشت‌ها**

1. Yvonne Dold-Samplonius
2. University of Heidelberg

۳.در فرهنگ لغت «عمید» دربارهٔ واژهٔ قُبَّه چنین آمده است: گنبد، قباب یا قبب جمع آن است.

حمیدرضا امیری

۷

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

27. Let p be *a* prime number. If p divides the product ab, then p divides either a or b.

Proof. If p does not divide a, then $GCD(a,p)=1$. (Explain why.) Therefore, $1=sa+pt$ for some integers s and p. (See Exercise 26.) Thus

$$\begin{aligned} b &= b(sa+pt) \\ &= (ab)s+bpt \\ &= (kp)s+bpt \\ &= p(ks+bt). \end{aligned}$$

This implies that p divides b.

28. Let p be a prime number. Then $\sqrt{p}$ is an irrational number. ■

Proof. We assume that $\sqrt{p}$ is a rational number, that is

$$\sqrt{p}=\frac{n}{q}$$

with $n\neq 0$, $q\neq 0$, n and q integres, with the fraction written in reduced form. (See the front of the book on rational numbers.) Therefore,

$$p=\frac{n^2}{q^2}.$$

Thus

$$n^2=pq^2.$$

As n^2 is a multiple of p, which is a prime number, then n must be a multiple of p.

۲۷. فرض کنیم p یک عدد اول باشد. اگر p حاصل‌ضرب ab را عاد کند (بشمارد)، آن‌گاه p، a یا b را می‌شمارد.

اثبات: اگر p عاد نکند، a را، در این صورت: $(a,p)=1$ (توضیح دهید چرا). بنابراین، برای اعدادی صحیح چون s و t داریم:

$1=sa+pt$ (تمرین ۲۶ را ملاحظه کنید)

$\Rightarrow b=b(sa+pt)=(ab)s+(bp)t=(kp)s+bpt$
$=p(ks+bt)$.

تساوی اخیر نشان می‌دهد که p، b را عاد می‌کند.

۲۸. فرض کنیم p عدد اول باشد. در این‌صورت $\sqrt{p}$ عددی گنگ است.

اثبات: فرض می‌کنیم که $\sqrt{p}$ یک عدد گویا باشد، به‌طوری که: $\sqrt{p}=\frac{n}{q}$ و $n\neq 0$ و $q\neq 0$. n و q اعدادی صحیح هستند به قسمی که کسر (حاصل از آن‌ها) تحویل‌ناپذیر (به ساده‌ترین صورت نوشته شده) است.

بنابراین: $p=\frac{n^2}{q^2}$ در نتیجه $n^2=pq^2$.

چون n^2 مضرب p و p اول است، پس n باید مضرب p باشد. (تمرین ۲۷ را ملاحظه کنید.). بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $n=pk$. برای عددی صحیح و مثبت مانند k، این نشان می‌دهد: $p^2k^2=pq^2$ یا: $pk^2=q^2$.

حال چون q^2 مضرب p و p اول است، بنابراین q باید مضرب p باشد (تمرین ۲۷ را ملاحظه کنید.) بنابراین برای عددی صحیح و مثبت مانند m می‌توانیم بنویسیم: $q=pm$. پس:

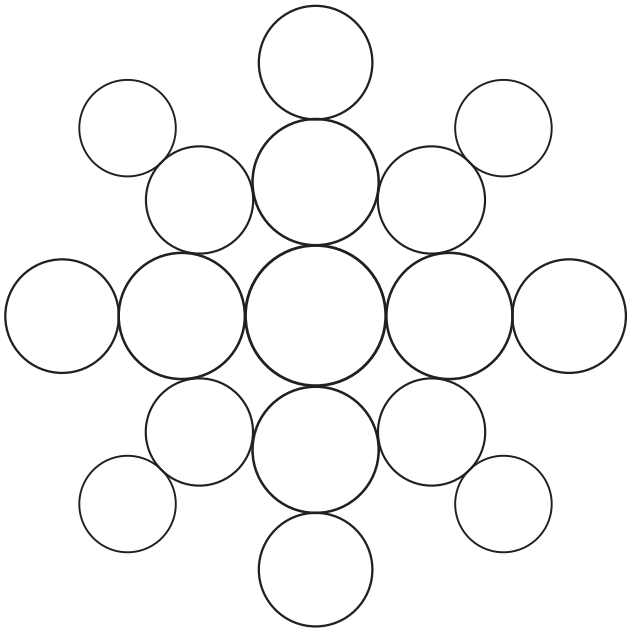
$$\frac{n}{q}=\frac{pk}{pm}=\frac{k}{m}$$

این موضوع با فرض تحویل‌ناپذیر بودن کسر $\frac{n}{q}$ تناقض دارد و لذا ثابت می‌شود که $\sqrt{p}$ عددی گنگ است.

ایستگاه اول:

ستاره مقهی!

برای ایستگاه اول اندیشه می‌خواهیم شما را به یک چالش عددی دعوت کنیم! عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و... و ۱۷ را در هفده خانهٔ شکل زیـر طوری قرار دهید که مجموع اعداد روی هر پنج خانهٔ یک ردیف با هم برابر باشـند. یعنی پنج خانه‌ای که روی یک خط راسـت قرار دارند، دارای مجموع ثابتی باشند. آیا می‌توانید برای این کار یک ایدهٔ ریاضی ارائه دهید؟ یا این کار را با روش سعی و خطا انجام می‌دهید؟ در هر حال اگر به جواب نرسـیدید، برای مشاهدهٔ پاسخ به صفحهٔ ۴۷ مراجعه کنید.



کلمه‌ها و اصطلاحات مهم

1. Prime number عدد اول
2. Divides عاد می‌کند
3. Product حاصل‌ضرب
4. Irrational گنگ، ناگویا
5. Rational number عدد گویا
6. Fraction کسر
7. Multiple مضرب
8. Positive integer صحیحِ مثبت
9. Contradict تناقض

(See Exercise 27.) Therefore we can write $n=pk$ for some positive integer k. This implies

$$p^2k^2=pq^2$$

or

$$pk^2=q^2.$$

As q^2 is a multiple of p, which is a prime number, then q must be a multiple of p. (See Exercise 27.) Therefore we can write $q=pm$ for some positive integer m. Therefore

$$\frac{n}{q}=\frac{pk}{pm}=\frac{k}{m}.$$

This contradicts the fact that the fraction n/q is already in reduced form, and proves that $\sqrt{p}$ is an irrational number.

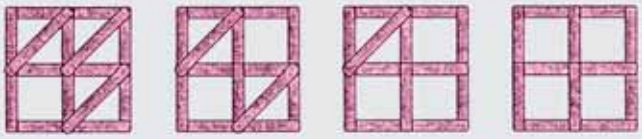
آیدین منظوری
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

اجسام صُلب و ویژگی‌های هندسی آن‌ها

اشاره

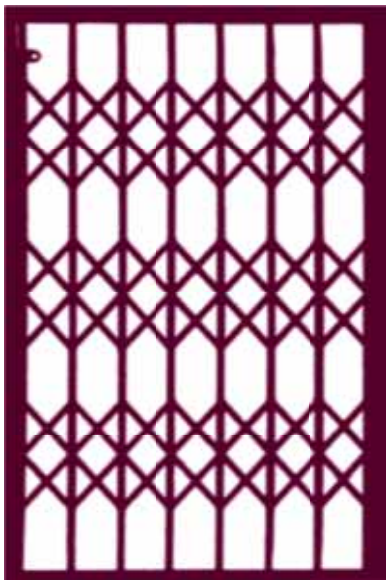
یکی از پرسش‌های آزمون سی‌امین المپیاد ریاضی ایران، مرحلهٔ اول، به‌صورت زیر بود:

فرض کنید با لولاکردن تعدادی قطعهٔ چوبی به طول‌های یک متر و $\sqrt{2}$ متر، چهار شکل زیر را ساخته‌ایم، به‌طوری‌که قطعات می‌توانند آزادانه در صفحه، دور لولاها بچرخند. چندتا از این شکل‌ها می‌توانند با حرکت قطعه چوب‌ها تغییر شکل دهند؟ (سی‌امین المپیاد ریاضی دانش‌آموزی، مرحلهٔ اول، ۵ اسفند ۱۳۹۰، بخش سؤالات پنج‌گزینه‌ای، سؤال ۷.)*



الف) هیچکدام　　ب) ۱　　ج) ۲　　د) ۳　　هـ) ۴

شرح و پاسخ به این پرسش، انگیزهٔ نگارش مقالهٔ حاضر شد. ابتدا مختصری دربارهٔ اجسام صلب و ویژگی‌های آن‌ها توضیح می‌دهیم، سپس با توجه به نتایج به‌دست آمده، پاسخ این پرسش را می‌دهیم.



به بیان ساده، جسم صلب جسمی است که موقعیت ذرات تشکیل‌دهندهٔ آن نسبت به یکدیگر در شرایط متفاوت تقریباً ثابت بماند، و در نتیجه کل جسم همواره شکل ثابت و غیرقابل تغییری داشته باشد. اگر به اطراف خود نگاهی بیندازیم، می‌توانیم مثال‌های زیادی هم از اجسام صلب و هم از اجسام غیرصلب پیدا کنیم. مثلاً، قاشق و چنگال فولادی، در چوبی، پنجرهٔ شیشه‌ای، عصای چوبی و لیوان شیشه‌ای را می‌توانیم نمونه‌هایی از اجسام صلب بدانیم، زیرا سخت و محکم‌اند و همیشه شکل ثابت خود را حفظ می‌کنند. می‌دانید که اگر چنگال فلزی خود را در یک تکه از میوه فرو کنید، دندانه‌های آن خم نمی‌شوند، و این به‌خاطر صلب بودن چنگال است. اما در مقابل، نمونه‌های فراوانی هم از اجسام غیرصلب داریم، مانند پیراهنی که می‌پوشیم، کیسهٔ پلاستیک، یک تکه کاغذ، سیم برق، گوجه‌فرنگی، برگ درخت، آب موجود در یک لیوان، و یا حتی هوای اطراف ما! هیچ‌کدام از این اجسام شکل ثابتی ندارند، بلکه در اثر نیروهای وارده به آن‌ها تغییر شکل می‌دهند. برخی از آن‌ها مانند پارچه و کاغذ، جامداتی هستند که قابلیت انعطاف و تغییر شکل دارند، حال آنکه برخی دیگر از آن‌ها مثل آب و هوا اساساً جامد نیستند، بلکه «سیّال» هستند، و سیّالات نیز خود به دو دستهٔ مایعات و گازها تقسیم می‌شوند.

اکنون بگذارید دربارهٔ خواص اجسام صلب اندکی بیشتر صحبت کنیم. فرض کنید که چند جسم صلب، مثلاً تعدادی قطعهٔ چوبی مکعب مستطیل شکل با ضخامت یکسان و طول‌های متفاوت در اختیار داریم. ابتدا فرض کنید که تعدادی از این قطعات را به‌طور پراکنده روی زمین قرار داده باشیم. واضح است که در این حالت، حرکت هر کدام از قطعه‌ها مستقل از حرکت سایر قطعات است.

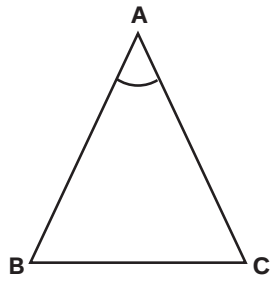
اما می‌توان این قطعه‌ها را به روش‌های گوناگون به یکدیگر متصل کرد. مثلاً یک روش این است که دوتا از آن‌ها را با چسب چوب و یا با کوبیدن دو میخ در دو نقطهٔ متفاوتشان، محکم به‌هم بچسبانیم، طوری که نتوانند نسبت به هم جابه‌جا شوند. در این صورت مجموعهٔ این دو قطعهٔ محکم چسبیده به یکدیگر، تشکیل یک جسم صلب مرکب جدید را خواهد داد.

در حالت سوم، فرض کنید که دو قطعهٔ یکسان را انتخاب کنیم، به نحوی که طول هر دو قطعه مساوی یک متر باشد، و سپس انتهای آن‌ها را به یکدیگر لولا کنیم، به نحوی

که ایــن دو قطعــه بتوانند آزادانــه دور لولا بچرخند (شکل ۱).

شکل ۱

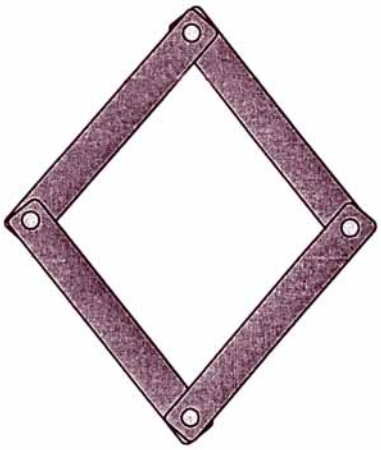
جســم مرکب حاصل، جسمی است که از ترکیب اجســام صلب کوچک‌تری تشکیل شــده، اما خودش دارای مقداری آزادی برای تغییر شــکل اســت. اگر نقطهٔ مرکز لولا را با حرف A و دو سر دیگر این قطعات را به‌ترتیب با حروف B و C نام‌گذاری کنیم، به یک مثلث متساوی‌الساقین به رأس A می‌رسیم که طول ســاق‌های آن برابر با مقــدار ثابت یک متر، و زاویهٔ A در آن متغیر است (شکل ۲).



شکل ۲

مثلــث ABC ثابت نیســت، زیرا اگرچه AB=AC=۱m مقدارهــای ثابتی هســتند، ولــی زاویــهٔ $\hat{A}$ متغیــر اســت، و در نتیجه طــول ضلع BC و اندازهٔ زاویه‌های B و C نیز تغییر می‌کند. در واقع، واضح است که مکان هندسی رئوس B و C عبارت است از دایره‌ای به مرکز A و به شــعاع یک متر. به‌عنوان یک تمرین ســاده این موضــوع را خودتان ثابت کنید. همچنین نشــان دهید که طول قاعدهٔ BC از رابطهٔ $BC = ۲\sin\frac{\hat{A}}{۲}$ به‌دست می‌آید و از آنجــا داریــم: $\hat{A} = ۲\mathrm{Arc}\sin\frac{BC}{۲}$. این بدان معناســت که مقدار عــددی هر کدام از $\hat{A}$ و BC از روی دیگــری به‌طور یکتا تعیین می‌شود و در نتیجه، تناظری یک‌به‌یک میان آن دو وجــود دارد. ایــن موضــوع را به‌خاطر بسپارید، زیرا در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد.

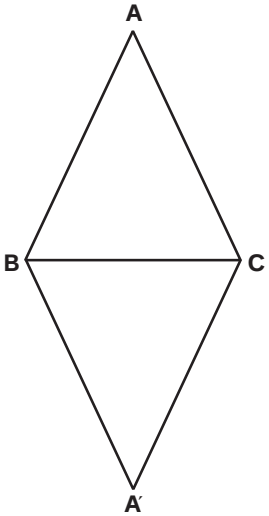
حالا فرض کنیم که چهار تا از قطعه‌های یک متری را طوری به‌هم لولا کرده‌ایم که یک چهارضلعی تشکیل داده‌اند (شکل ۳).



شکل ۳

چهارضلعی حاصل یک لوزی با طول ضلع ثابت یک متر است، زیرا تمام اضلاع آن با هم برابرنــد؛ اما در حالت کلی زاویه‌ها و قطرهای آن تغییر می‌کننــد. برای درک بهتر موضوع، این لــوزی را به‌صورت همان مثلث ABC به همراه بازتاب آن نسبت به قاعدهٔ BC در نظر بگیرید (شکل ۴).

ابتــدا دقت کنید که مثلث A´BC دقیقاً قرینهٔ مثلــث ABC اســت، بنابراین A´BC کامــلاً هماهنگ بــا تغییــرات ABC تغییر



شکل ۴

می‌کند. پس بــرای مطالعهٔ تغییــرات لوزی ABA´C کافــی اســت که تغییــرات مثلث ABC را پیگیری کنیم.

از طرف دیگر، چون تمام لولاها در لوزی ما می‌توانند آزادانه باز و بسته شوند، پس هیچ محدودیتی از قبل روی $\hat{A}$ گذاشــته نشده اســت. به‌علاوه، چون هیچ مانع فیزیکی روی قطرهای لوزی قرار ندارد، پس قطرهای لوزی نیز از قبل محدود نشــده‌اند. نتیجه آنکه هم زاویهٔ A و هم قطر BC در شــکل ۳ مجاز به تغییر هستند. اما توجه داشته باشید که بر طبق روابط طولی که در بالا دیدیم، تغییرات این دو وابسته به یکدیگرند و تناظری یک‌به‌یک بین اندازه‌های $\hat{A}$ و BC وجود دارد؛ یعنی با تغییر کردن یکی، اندازهٔ دیگری به‌طور یکتا تعیین می‌شــود. خلاصه آنکه در لوزی ABA´C با وجود آنکه طول اضلاع ثابت است، اما مقادیر زاویه‌هــا و اندازه‌های قطرهای آن متغیرند، و بنابراین لوزی ما شکل ثابت و معینی ندارد.

شــاید برایتان جالب باشــد کــه بدانید، چنین سیســتمی در زندگــی روزمره کاربرد مهمی دارد. به احتمال زیاد تا به‌حال درهای فلــزی آکاردئونــی را دیده‌ایــد. از ایــن درها به‌عنوان یک پوشــش محافــظ در جلوی در اصلی ســاختمان‌ها استفاده می‌شود. آیا هیچ

دقت کرده‌اید که طرز کار این در چگونه است؟ این درهای آکاردئونی، در واقع از تعداد زیادی عناصر لوزی‌شکل، کاملاً مشابه با آنچه که ما در بالا بررسی کردیم، تشکیل شده‌اند که همگی به‌طور هماهنگ با هم جمع و باز می‌شوند. نکتهٔ کلیدی در مورد طرز کار این درها همان موردی است که ما نتیجه گرفتیم: اینکه این عناصر لوزی‌شکل با وجود آنکه طول ضلع ثابتی دارند (و در حقیقت از قطعات صلب تشکیل شده‌اند)، ولی اندازهٔ زوایا و اقطار ثابتی ندارند، و در نتیجه در آکاردئونی می‌تواند جمع و باز شود.

سرانجام، حالتی را در نظر بگیرید که بخواهیم با قراردادن یک قطعه چوب (به طول دلخواه) روی قطر BC، لوزی ABA´C را مقید کنیم تا نتواند آزادانه تغییر شکل دهد. اول ببینیم که طول قطعهٔ چوبی که قرار است روی قطر قرار دهیم، حداقل و حداکثر چه مقادیری می‌تواند داشته باشد. واضح است که حداقل این مقدار برابر صفر است، یعنی حالتی که دو رأس B و C روی هم منطبق شوند و مقدار زاویهٔ A برابر صفر شود. از سوی دیگر، حداکثر طول ممکن برای قطر عبارت است از مقدار ماکسیمم عبارت $BC = ۲\sin\frac{\hat{A}}{۲}$. این عبارت زمانی ماکسیمم می‌شود که مقدار سینوس برابر یک شود که متناظر است با زمانی که مقدار زاویهٔ $\hat{A}$ برابر ۱۸۰° باشد، و از آنجا:

$$۰ \le BC \le ۲\times\sin\frac{\pi}{۲} = ۲m$$

دقت کنید که این مقدار ماکسیمم در حقیقت برابر است با مجموع اضلاع AB و AC؛ مطلبی که به سادگی از قضیهٔ حمار نتیجه می‌شود. در نتیجه، قطعهٔ چوبی که قرار است در محل قطر قرار داده شود، می‌تواند هر مقداری بین صفر تا دو متر داشته باشد.

تصور کنید که اندازهٔ آن را برابر با یک متر بگیریم. در این حالت هر دوی مثلث‌های ABC و A´BC به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد تبدیل می‌شوند، و خواهیم داشت:

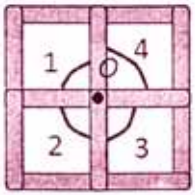
$$\hat{A} = \hat{A}' = ۲\times \text{Arc}\sin\frac{۱}{۲} = ۶۰^\circ$$

آیا می‌توانیم از قطعه‌ای به طول $\sqrt{۲}$ متر استفاده کنیم؟ بله، زیرا داریم: $۰<\sqrt{۲}<۲$. در این حالت مقدار زاویهٔ A برابر خواهد بود با:

$$\hat{A} = ۲\times \text{Arc}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۹۰^\circ$$

ضمناً، مقدار زاویهٔ A را به کمک قانون کسینوس‌ها در مثلث نیز می‌توانستیم محاسبه کنیم. در نتیجه، لوزی ABA´C به یک مربع به ضلع واحد تبدیل می‌شود. این مربع دیگر قابلیت تغییر شکل ندارد، زیرا قطر BC و به دنبال آن زوایای چهارضلعی و همچنین قطر AA´ همگی مقید شده و براساس اندازهٔ BC معین شده‌اند. این مربع را می‌توان مثال دیگری از جسم (مرکب) صلب در نظر گرفت. حالا می‌توانیم به پرسش مطرح شده پاسخ دهیم:

بیایید شکل‌های پرسش آزمون را یکی‌یکی بررسی کنیم. اولین شکل از سمت راست از چهار لوزی تشکیل شده است که در آن هیچ‌یک از زوایا یا اقطار مقید نشده‌اند. در نتیجه، هر چهار لوزی می‌توانند تغییر شکل دهند. (دقت کنید که اگرچه این شکل به‌صورت مربع رسم شده است، اما هیچ الزامی برای وجود زوایای قائمه در آن نیست و زاویه‌های آن آزادانه تغییر می‌کنند.) نکته‌ای که باید به آن دقت داشت، وضعیت لولای مرکزی است؛ یعنی همان نقطهٔ مرکزی‌شکل که فصل مشترک هر چهار لوزی کوچک نیز هست. اگر این نقطه را با حرف O، و زوایای آن را به‌ترتیب با $\hat{O}_۱$، ...، $\hat{O}_۴$ نام‌گذاری کنیم.



شکل ۵

داریم:

$$\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ + \hat{O}_۴ = ۳۶۰^\circ \quad (*)$$

نتیجه می‌شود که تغییر زوایای این چهار لوزی، با تساوی فوق به یکدیگر وابسته است.

در شکل دوم روی یکی از لوزی‌ها یک قطعهٔ مقیدکنندهٔ قطر به طول $\sqrt{۲}$ گذاشته شده و آن لوزی را واقعاً به یک مربع تبدیل کرده است. با همان نمادگذاری شکل اول، علاوه بر شرط (*) در اینجا یک شرط اضافی دیگر هم داریم، و آن هم عبارت است از اینکه $\hat{O}_۱ = ۹۰^\circ$ مقداری ثابت است. این مربع خودش تغییر شکل نمی‌دهد، اما لوزی‌های اطراف آن می‌توانند تغییر کنند. اگر زاویهٔ قائمه و تغییرناپذیر $\hat{O}_۱$ را از تساوی (*) کم کنیم، شرط تغییر سایر زوایا به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ + \hat{O}_۴ = ۲۷۰^\circ$$

وضعیت مشابهی نیز در مورد شکل سوم برقرار است، با این تفاوت که در اینجا دو مربع ثابت و دو لوزی متغیر داریم. در اینجا داریم: $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۳ = ۹۰^\circ$ و در نتیجه:

$$\hat{O}_۲ + \hat{O}_۴ = ۱۸۰^\circ$$

اما وضعیت در شکل آخر متفاوت است. در این شکل سه مربع مقید و یک لوزی دیده می‌شود. یعنی داریم: $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۳ = \hat{O}_۴ = ۹۰^\circ$. پس باید داشته باشیم:

$$\hat{O}_۲ = ۹۰^\circ$$

و این یعنی آنکه تمام لوزی‌های این شکل در واقع مربع‌های تغییرناپذیر هستند. پس شکل چهارم قابلیت تغییر ندارد و کاملاً صلب است.

بنابراین، می‌بینیم که گزینهٔ صحیح گزینهٔ (د) است، یعنی دقیقاً سه تا از این شکل‌ها می‌توانند تغییر شکل دهند.

پی‌نوشت

* سؤال و تصویر مربوط به آن‌را از: www.irysc.com برگرفته‌ایم.

ریاضی ۲

۱. a و b را طوری به‌دست آورید که رابطهٔ زیر یک تابع باشد:

$f=\{(۲a+b,a+b),(-۱,a-b),(a-b,۳),(۳a,۴),(۲,۵),(-۱,۰)\}$

۲. ضابطهٔ تابع خطی f را به‌گونه‌ای بیابید که نمودار آن محورهای مختصات را در دو نقطه A و B با طول و عرض مثبت قطع کند و مساحت مثلث OAB، ۴ واحد سطح باشد (O مبدأ مختصات است و $f(-۱)=۶$).

۳. a، b و c را طوری به‌دست آورید که رابطهٔ f یک تابع وارون‌پذیر باشد. سپس $f^{-۱}$ را به‌دست آورید.

$f=\{(-۱,a+b),(a-۲b,۲),(۲,-۲),(-۱,۲),(a+c,a-b),(۴,۰)\}$

هندسه ۱

۱. در مثلث ABC(BC>AB)، نیم‌ساز زاویهٔ B را رسم می‌کنیم تا ضلع مقابل را در نقطهٔ D قطع کند و آن را تا نقطهٔ E در خارج از مثلث امتداد می‌دهیم، به‌طوری که: BE=BC. سپس E را به A وصل می‌کنیم.

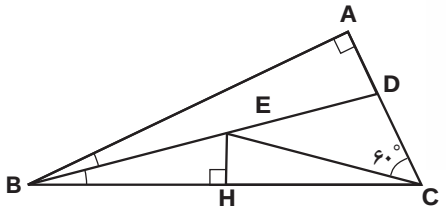
ثابت کنید اگر $A\hat{E}B = A\hat{C}B$، آن‌گاه:

DE=BC-AB.

۲. ثابت کنید هر ذوزنقه‌ای که دو زاویهٔ مجاور به دو ساق آن با هم برابر باشند، متساوی‌الساقین است.

۳. در شکل زیر مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه و BD نیم‌ساز زاویهٔ B است. همچنین، عمودمنصف BC، BD را در E قطع کرده است.

اگر: $E\hat{C}D = ۶۰^\circ$، اندازه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به‌دست آورید.



هندسه ۲

۱. اگر طول‌های اضلاع مثلثی با سه عدد x-y،x+y و xy بیان شده باشند، ثابت کنید: x>۲>y.

۲. ثابت کنید در هر ذوزنقه دارای ساق‌های نابرابر، زاویهٔ حادهٔ مجاور به ساق کوچک‌تر، بزرگ‌تر از زاویهٔ حادهٔ مجاور به ساق بزرگ‌تر است.

۳. از نقطهٔ M واقع بر نیم‌ساز زاویهٔ خارجی رأس A مثلث ABC به رأس‌های B و C وصل می‌کنیم. ثابت کنید محیط مثلث MBC از محیط مثلث ABC بزرگ‌تر است.

حسابان

۱. a و b را طوری بیابید که چندجمله‌ای $2x^3+x^2+ax+b$ بر x^2+x+2 بخش‌پذیر باشد.

۲. تعدادی دانش‌آموز در یک اردوی تفریحی چند روزه شرکت کرده‌اند و ۳۶ عدد کیک به‌عنوان سهمیهٔ تغذیه به آنان داده شده است. اما قبل از خوردن کیک‌ها سه دانش‌آموز دیگر به اردو آمدند. دوباره کیک‌ها را بین آنان تقسیم کردند و این‌بار به هر دانش‌آموز ۲ کیک کمتر رسید. چند دانش‌آموز در اردو بودند؟

۳. فروشندهٔ لوازم برقی، یک رادیوی کوچک را به قیمت ۵۰۰۰ تومان می‌خرد و به قیمت ۱۰۰۰۰ تومان می‌فروشد و با این قیمت در هر ماه ۵۰۰ دستگاه از آن رادیو به فروش می‌رساند. اگر بدانیم که با هر ۲۰۰ تومان تخفیفی که بدهد، ۱۰۰ دستگاه بیشتر می‌فروشد، هر دستگاه را به چه قیمتی بفروشد تا سود او ماکزیمم شود؟

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. الف) ثابت کنید دنبالهٔ $a_n=2^n$ هم‌گرا نیست.

ب) ثابت کنید این دنباله واگرا به $+\infty$ است.

۲. ثابت کنید دنبالهٔ $b_n=2^{-n}$ هم‌گرا به صفر است.

۳. دنبالهٔ a_n با ویژگی‌های $a_1=2$ و $a_n.a_{n-1}+1=2a_{n-1}$ مفروض است. نشان دهید که این دنباله نزولی و هم‌گراست.

جبر و احتمال

۱. با استفاده از «استدلال بازگشتی» نابرابری‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}\ (a,b,c>0)$

ب) $|\sin x+\cos x|\leq\sqrt{2}$

۲. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید که هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به شکل $6q\pm1$ است که در آن: $q\in Z$.

۳. با فرض گنگ بودن $\sqrt{7}$ ثابت کنید $\sqrt[3]{7}+\sqrt{7}$ گنگ است.

هندسه تحلیلی

۱. اگر e_1 و e_2 دو بردار یکهٔ ناهم‌راستا باشند و $|e_1+e_2|=\sqrt{3}$، در این صورت حاصل $(e_1+2e_2).(e_1+e_2)$ را به‌دست آورید.

۲. هرگاه a و b دو بردار هم‌اندازه باشند، ثابت کنید:

الف) $|a+b| = ۲|a|\cos\frac{\theta}{۲}$

ب) $|a-b| = ۲|a|\sin\frac{\theta}{۲}$

۳. فرض کنید ABCD متوازی‌الاضلاع است. اگر M روی BC چنان باشد که: $BM = \frac{۱}{۳}BC$، و N روی DCچنان باشد که: $DN = \frac{۱}{۳}DC$، ثابت کنید:

$\overrightarrow{AC} = \frac{۳}{۴}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$.

ریاضیات گسسته

۱. آیا دنبالهٔ زیر می‌تواند دنبالهٔ درجات رئوس یک گراف باشد؟ چرا؟ آیا این گراف، ساده و هم بند است؟

S: ۴, ۳, ۳, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱

۲. دنبالهٔ درجات رئوسِ درخت T به‌صورت زیر است. اولاً مشخص کنید این گراف چند رأس درجهٔ ۱ دارد و ثانیاً این درخت را رسم کنید.

S: ۵, ۳, ۳, ۲, ۲, ۱, ۱, ..., ۱

۳. ماتریس مجاورت گراف G به‌صورت زیر است.

الف) این گراف را رسم کنید. ب) دنبالهٔ درجات رئوس این گراف را با توجه به ماتریس $A^۲$ بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

ریاضیات عمومی ۱ و ۲

۱. بیشترین مقدار تابع به معادلهٔ $y=-x^۲+۴x-۶$ را به دو روش (مربع کامل و استفاده از مختصات نقطهٔ ماکزیمم) به‌دست آورید.

۲. اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=|x+۴|-x$: الف) ضابطهٔ توابع fog وgof را بنویسید. ب) آیا $fog(-۲) = gof(\frac{۳}{۲})$ است؟

۳. اگر $f(x)=x+۱$ و $g(x) = \frac{۲x-۱}{۱-۳x}$، ثابت کنید gof در دامنهٔ خودش وارون‌پذیر است و ضابطهٔ وارون آن را بیابید.

ریاضی ۳ تجربی

۱. با توجه به مجموعه‌های $A=\{x\in R|-۴\le x\le ۷\}$، $B=\{x\in R|x>۰\}$ و $C=\{x\in R|-۲<x\le ۹\}$ هر یک از مجموعه‌های زیر را در صورت امکان به صورت یک بازه مشخص کنید.

الف) $(A\cap B)$ ب) $(A-B)$

ج) $(B-C)$ د) $(A-C)$

۲. با توجه به فرمول‌های محاسبهٔ $\cos ۲a$، $\sin(a+b)$ و $\sin ۲a$ برای محاسبهٔ $\sin ۳a$ فرمولی را به‌دست آورید.

۳. درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید:

الف) $\cos ۴x\cos x+\sin ۴x\sin x=\cos ۳x$

ب) $\sin ۴x\cos x-\cos ۴x\sin x=۳\sin x-۴\sin^۳ x$

پرسش‌های پیکارجو!

چند سه‌تایی صحیح از (x,y,z) در تساوی $x^۳+۲y^۳=۳z^۳$ صدق می‌کنند؟

الف) ۱ ب) ۰ ج) ۲

د) ۳ هـ) ۴

دکتر فرید قاسملو
عضو گروه تاریخ علم
بنیاد دایرةالمعارف اسلامی

ماجرای پیدایش کتاب‌های درسی ریاضی در ایرانِ عصر قاجار

مقدمه‌ای مطول در تاریخ:

یکی از شیرین‌ترین خاطرات همهٔ ما و مربوط به سال‌های تحصیل، خاطرهٔ خرید کتاب‌های درسی است. همهٔ هم‌سن و سالان من، کسانی که طی سال‌های دههٔ ۱۳۵۰ خورشیدی به دبستان می‌رفتند، خاطرهٔ اعطای کتاب‌های پرنقش و نگار را به‌خاطر دارند و پس از آن، در سال‌های راهنمایی، خاطرهٔ کتاب‌هایی که باید از کتاب‌فروشی‌ها خریداری می‌شدند. و مقارن با سال‌های جنگ تحمیلی، خاطرهٔ دیر رسیدن کتاب‌ها، ثبت‌نام پشت در کتاب‌فروشی‌ها برای دریافت نوبت خرید کتاب و هزار ماجرای دیگر. بلای واقعی وقتی نازل می‌شد که فلک‌زده‌ای به دلیلی یک کتاب درسی خود را از دست می‌داد. مثلاً آن را جایی جا می‌گذاشت یا به هر دلیلی نمی‌توانست از آن نگه‌داری کند. به‌دست آوردن یک کتاب تکی از یک درس خاص، تقریباً به‌سختی معافیت سربازی بود!

با تمام این تفاصیل، وقتی که تاریخ تدوین کتاب‌های درسی را بیشتر می‌کاویم، دست کم یک نکتهٔ مثبت در آن سال‌ها وجود داشت که ما از روی بی‌خبری قدر آن را نمی‌دانستیم: «حداقل می‌دانستیم طرف حسابمان کیست!» به‌عبارت دیگر، اگر کتابی را گم می‌کردیم، می‌دانستیم باید دنبال کتاب فلان درس از سال تحصیلی فلان در پایهٔ فلان بگردیم. اما وقتی در لابه‌لای صفحات تاریخ به دنبال ماجرای تألیف کتاب‌های درسی هستیم و این همه ماجرا (که در سطرهای آینده بخش کوتاهی از آن را توضیح خواهیم داد) را می‌بینیم، باز احساس خوش‌حالی می‌کنیم که انسان آن روزها نیستیم.

در این میان، به‌نظر می‌رسد وضع کودک امروز از همه بهتر است و این در ذات روزگار امروز ماست. دیگر از صبح‌های علی‌الطلوع از خانه بیرون زدن و پشت در کتاب‌فروشی‌ها صف کشیدن خبری نیست. و البته همهٔ کتاب‌ها روی شبکه نیز قرار دارند تا اگر مایل به داشتن نسخهٔ الکترونیک هر کتابی بودید، بتوانید آن را از وب‌سایت «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» وزارت آموزش‌وپرورش دریافت کنید.

این مقدمه را از آن جهت نوشتم که ذهن خوانندگان را به‌سمت موضوع بسیار مهمی سوق دهم و آن، موضوع سابقهٔ نهادهای مدنی مربوط به کتاب‌های درسی است. این موضوع که در یک جامعه «نهادی» وجود داشته باشد که وظیفهٔ خاصی را بر عهده داشته باشد و بر اساس سنت تاریخی وجود خود، درگذشت سالیان، بر اساس آزمون و خطا یا بر اساس چشم‌انداز مطالعاتی، توانسته باشد کار خود را یاد گرفته و به بهترین شکل ممکن به انجام برساند، یکی از موضوع‌هایی است که در بررسی‌های هر جامعه باید به‌دقت مورد توجه قرار گیرد.

همهٔ ما کمابیش واژهٔ «دیوان‌سالاری»[1] به گوشمان خورده است. اولین تصور ما از این کلمه یک دستگاه عریض و طویل اداری است که تنها فایده‌اش ضایع کردن وقت مردمان است. اما این تمام واقعیت نیست. نباید فراموش کنیم که تشکیل دیوان، یا به عبارت دیگر، ترتیب دادن دستگاه اداری یک مملکت، از جمله مهم‌ترین دستاوردهای دولت، جامعهٔ مدنی و سنت تاریخی در هر سرزمین است. ترتیب دادن نوعی دستگاه حکومتی که انتظام امور کشور را در همهٔ شئون، از مالی، اقتصادی، نظامی، آموزشی، بهداشتی، قضایی و... برعهده داشته باشد و بتواند کار خود را به بهترین شکل ممکن به انجام برساند، از جمله عوامل خوش‌بختی هر ملتی است.[2]

نباید زیاد حاشیه برویم. فرض از همهٔ این نوشته‌ها آن است که اگر اکنون در کشور ما دستگاهی مدنی هست که نیاز این همه دانش‌آموز را در همهٔ رشته‌ها و پایه‌ها به کتاب‌های درسی برآورده می‌سازد و می‌کوشد کتاب‌ها به‌موقع و مقارن شروع سال تحصیلی به دست دانش‌آموزان برسد، نتیجهٔ سال‌ها سعی و تلاش، پشت

سر گذاشتن صدها مانع و رشد کردن از دل آزمون‌ها و خطاهاست.

خوش‌بختانه ادبیات علمی دربارهٔ ماجرای تولید کتاب درسی در ایران قدمتی زیاد دارد و بسیاری از پویندگان عرصهٔ تولید کتاب‌های درسی در کشورمان کوشیده‌اند دغدغه‌ها، مشکلات و آرمان‌های خود را به قلم درآورند. بر این اساس مقالات متعددی وجود دارند که هر یک بخشی از تاریخ تدوین کتاب‌های درسی کشورمان و رسیدن به وضع کمابیش متناسب و ثابت کنونی را به بحث گذاشته‌اند.[۳]

بر این اساس و با تکیه بر این پشتوانه، به‌نظر مؤلف این سطور اکنون وقت آن است در حوزهٔ کتاب‌های درسی پا را از تاریخ‌نگاری عام فراتر بگذاریم و به سروقت بخش‌های تخصصی برویم. به‌عبارت دیگر، وقت آن است که شاخه‌های تخصصی تدوین کتاب‌های درسی را مورد پژوهش قرار دهیم و از دل این پژوهش، بخش تاریخ رسمی آموزش علوم در کشورمان را بررسی و واکاوی کنیم. علت اینکه این بخش از پژوهش احتمالی را «تاریخ رسمی آموزش علوم» نام نهادم نیز آن است که در هر صورت مطالعهٔ این دستاوردها تنها بخش «رسمی» و «دولتی» آموزش علوم را در کشور دربرمی‌گیرد و پرداختن به بخش غیردولتی- غیررسمی آموزش علوم در کشورمان، خود ماجرای دیگری است که باید در موقعیتی دیگر بدان پرداخت. پیش از ورود به ماجرای تدوین کتاب‌های درسی ریاضی در کشورمان، لازم است به اصولی کلی دربارهٔ تدوین کتاب‌های درسی نگاهی افکنیم تا درک روابط مربوط به چگونگی تدوین کتاب‌های درسی ریاضی برایمان روشن‌تر شود:

- در هر صورت این یک اصل بدیهی است که تشکیل دیوان‌سالاری ملی و دستگاه اداری مملکت و گرداندن امور آن، به افراد تحصیل‌کرده نیاز دارد. افراد تحصیل‌کرده در مدارس علم می‌آموزند و این انتقال علم به دانش‌آموزان باید با تکیه بر کتاب‌های درسی صورت پذیرد.
- در کنار استفاده از کتاب‌های درسی، مواد آموزشی باید بر اساس یک برنامهٔ درسی (که در ایران قدیم به آن «پروگرام آموزشی» می‌گفتند) به دانش‌آموزان منتقل شود. به عبارت دیگر، متون آموزشی باید در قالب برنامه‌های هدف‌دار آموزشی تدوین و به‌وسیلهٔ معلمان به دانش‌آموزان تدریس می‌شدند.[۴]
- دولت‌ها و نظام‌های آموزشی همواره می‌کوشیده‌اند، با روزآمد کردن برنامه‌های آموزشی، مواد آموزشی جدیدی را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند. بر این اساس، با تغییر برنامه (پروگرام) لازم بوده است، در همهٔ سطح‌های متون آموزشی نیز تغییر کنند و کتاب‌های جدیدی روانهٔ مدارس شوند. در اینجا موضوع صنعت چاپ و چگونگی رساندن این کتاب‌ها و مواد درسی به دانش‌آموزان سراسر کشور نیز خود را نشان می‌دهد.
- اقتصاد نشر همواره عامل بسیار مهم و تأثیرگذاری بر تدوین کتاب‌های درسی بوده است. شمارگان بسیار زیاد چاپ کتاب‌های درسی در دوره‌ای که دولت وظایف را به بنگاه‌های انتشاراتی گوناگون می‌داده، باعث تدابیر مختلفی برای به‌دست آوردن فرصت چاپ کتاب‌های درسی از سوی ناشران می‌شده است. نگاهی به گزارش‌های موجود در این زمینه[۵] نشان می‌دهد، خط سیری که ما را از گذشته به اکنون رسانده و نهاد تدوین کتاب‌های درسی را به دستگاهی دولتی تبدیل کرده، نوعی واکنش اجتماعی ناخواسته و از روی جبر بوده است. موضوع چاپ کتاب‌های درسی در ایران حتی پای سفارت‌های خارجی را هم به این عرصه باز می‌کرده است[امین ریاحی، ۱۳۷۷: ۶۷ به بعد].
- با گسترش نظام‌های آموزشی، رشد جمعیت، اقبال عمومی برای درس خواندن و کوشش دولتی برای محو بی‌سوادی، تعداد دانش‌آموزان کشور رشد می‌کند و در پی آن تعداد عرضهٔ کتاب‌های درسی نیز روزافزون می‌شود. این چرخه خودبه‌خود شبکه‌ای از تولیدکننده- مصرف‌کننده پدید می‌آورد که با توجه به اقتصاد نشر، مجبور به رفع حوائج

ادبیات علمی دربارهٔ ماجرای تولید کتاب درسی در ایران قدمتی زیاد دارد و بسیاری از پویندگان عرصهٔ تولید کتاب‌های درسی در کشورمان کوشیده‌اند دغدغه‌ها، مشکلات و آرمان‌های خود را به قلم درآورند


بدایة الحساب
تألیف
جناب مستطاب
نجم الدوله
حاجی میرزا عبدالغفار
مهندس و معلم سابق کلاس علوم ریاضی
در هر دو مدرسه که نظامیه
دارالفنون و ناصری
چاپ سیم که نسبت باول خیلی فضیلت
دارد چرا که بعضی زوائد افتاده و
مفید لازمه چند افزوده شده
بانضمام بعضی مسائل دیگر
حق طبع محفوظ
طهران
فلسمه ۱۳۲۸

چند دهه پس از تأسیس دارالفنون و از حدود سال ۱۳۲۸ هجری قمری، نهادی به‌نام شورای عالی معارف مسئول سروسامان دادن به امور آموزش و تحصیلات در ایران شد و شروع به تدوین برنامه‌های آموزشی کشور کرد

یکدیگر بوده‌اند.

اکنون با این مقدمات می‌توانیم قدمی دیگر به جلو برداریم. به‌طور کلی و با توجه به دگرگون شدن فضای کشورمان در اواسط حکومت قاجار و درک لزوم دست زدن به اصلاحات در کشور، نیاز به ایجاد مدارس در کشور احساس شد و کوشش برای تأسیس مدارس جدید در کشور آغاز شد که نماد آغازین آن، تأسیس «دارالفنون» در تهران در سال ۱۲۶۸ هجری قمری بود. برپایی دارالفنون تدوین کتب درسی آن را نیز در پی داشت.

با توجه به این موضوع که قرار نیست وارد بازی مرغ و تخم‌مرغ شویم، در پاسخ به این پرسش احتمالی که: بر این اساس، نخستین معلمان دارالفنون کتاب‌های درسی خود را از کجا آورده‌اند؟ باید گفت ماجرای ورود علوم نوین به ایران ماجرایی است که فقط یک سر در مدارس عالی (از جمله دارالفنون) ندارد، بلکه عوامل زیادی دست به دست هم دادند تا علوم جدید وارد کشور ما شوند. یکی از این عوامل اعزام محصل به خارج از کشور بود .بسیاری از کتاب‌های درسی دارالفنون به‌وسیلهٔ این محصلان تألیف یا ترجمه می‌شدند. یک عامل دیگر ورود علوم نوین به کشورمان، معلمان اروپایی بودند که دولت وقت قاجار آن‌ها را برای تدریس در دارالفنون به استخدام خود درآورده بود.[۶]

بسیار خب، شما که توقع ندارید فقط یک مدرسه (دارالفنون) بتواند به تنهایی بار تربیت همهٔ دیوان‌سالاران کشور (اعم از نظامی، پزشک، مهندس، قاضی و...) را بر دوش بکشد؟ هم‌زمان با کوشش ایرانیان برای تغییر در وضع کشور، و تحت‌تأثیر عوامل اجتماعی بسیاری، نهضت تأسیس مدارس جدید در کشور به‌وجود آمد و مدارس متعددی در اقصا نقاط ایران تأسیس شدند.[۷] طبیعی است که این مدارس به کتاب‌های درسی متفاوت نیاز داشتند و در نبود یک دستگاه منظم‌کنندهٔ تدوین کتاب‌های درسی، هر کدام از مناطق کشور خود دست‌اندرکار تدوین کتاب‌های درسی می‌شدند.

از دیگر سو و در ادامهٔ همان رویکرد اصلاحی که پیش از این چند بار بدان اشاره کردیم، چند دهه پس از تأسیس دارالفنون و از حدود سال ۱۳۲۸ هجری قمری، نهادی به‌نام شورای عالی معارف مسئول سروسامان دادن به امور آموزش و تحصیلات در ایران شد و شروع به تدوین برنامه‌های آموزشی کشور کرد. بر این اساس، یک دغدغهٔ دیگر بر شئون مربوط به تدوین کتاب‌های درسی افزوده می‌شود و آن تطبیق کتاب‌های درسی با این برنامه‌هاست. همهٔ این موارد آشفتگی‌های بسیاری به وضع کتاب‌های درسی می‌دادند. گزارشی که ریاحی بیش از نیم‌قرن پیش دربارهٔ این آشفتگی‌ها به دست می‌دهد، به خوبی شمه‌ای از این اوضاع را نشان می‌دهد[ریاحی، ۱۳۴۲: ۷ به بعد)

ریاحی به ویژه روی موضوعی انگشت می‌نهد که در همهٔ علوم باید به آن توجه داشت، و آن موضوع یکسان‌سازی واژگان و اصلاحات علمی هر دانش است.

گـزارش ریاحی به‌ویـژه از این نظر قابل تأمل اسـت که مثال‌هـای او در ایـن حوزه همگی مربـوط به ریاضیات هستند. طبق این گزارش در اواخر قرن چهاردهم هجری قمری چند دسـته کتاب درسـی هم‌زمان در چند نقطهٔ کشـور تدوین می‌شدند که عموماً نویسـندگان آن‌ها از دسـتاوردهای یکدیگر بی‌خبر بودنـد و از منابع متفاوت بهره می‌گرفتند. لذا در کتاب‌های درسی ریاضی آن دوره نابسـامانی خاصی در سـطح واژگانی وجود داشته است. ریاحی می‌نویسد در یک زمان واحد، در جایی نویسندگان واژگانی را در کتاب‌های درسـی ریاضی به‌کار می‌بردند و همان موقع، در جایی دیگر نویسـندگانی دیگر، واژگانی دیگر را که شرح آن در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. کاربرد اصطلاحات متفاوت برای یک مفهوم در کتاب‌های درسی ریاضی اواخر قرن چهاردهم

واژه۱	واژه۲	واژه۱	واژه۲
ضرب	بس‌شماری	زاویه	گوشه
تقسیم	بخش	مثلث	سه‌بر
تفریق	کاهش	قابل قسمت	بخش‌پذیر
کسر	برخه	مقسوم‌علیه	بخش‌یاب

گذشـته از این نابسـامانی واژگانی، رقابت ناشـران برای جـذب خریدار کتاب‌های درسـی، از جمله آنان را وامی‌داشت این‌گونه تبلیغ کنند که تنها کتاب آنان است که با پروگرام‌های درسی (برنامه‌های درسی) تطبیق دارد و کتاب‌هـای دیگر فاقد این ویژگی هسـتند. این رقابت آن‌قدر آش را شور کرد که در سال ۱۳۳٤ هجری قمری، شورای عالی معارف در دستوری همهٔ ناشران را ملزم کرد، فقـط در صورتی مجاز به درج عبـارت «مطابق پروگرام وزارت معارف» در پشـت کتاب‌های خود هستند که این کتاب‌ها را قبلاً به شورای عالی معارف داده باشند و مجوز لازم را نیز از شورا گرفته باشند. سندی[8] که در این زمینه در دست است خود دلیل مهمی بر اثبات هرج‌ومرج نشر کتاب‌های درسی در این دوران است. وزارت معارف همهٔ ناشـران را ملـزم کرده بود گواهی دهند که این دسـتور دولتـی را رؤیت کرده‌اند. در حاشـیه این دسـتور نامه، امضای ۲۲ ناشر دیده می‌شود.

با پایان یافتن عمر سلسـلهٔ قاجار در سـال ۱۳۰٤ شمسـی/ ۱۳٤٤ قمری، اوضاع کشور ایران دگرگون شد و نهادهای دیگری متولی انتشار کتاب‌های درسی ایران شدند که پرداختن به آن‌ها از حوصلهٔ نوشتهٔ حاضر خارج است.

پی‌نوشت‌ها

1. Bureaucracy

۲. بی‌حکمت نیست، کوششی که در دورهٔ قاجار برای اصلاح امور کشور آغاز شد، از جمله نگاهی به تدوین دیوان و دستگاه اداری کشور داشت. چراکه مصلحان اجتماعی دورهٔ قاجار به درستی دریافته بودند که بدون در اختیار داشتن دستگاه اداری مناسب، سر و سامان دادن به امور کشور تقریباً محال است. برای گزارشی دربارهٔ این کوشش دوران قاجار مراجعه کنید به: رینگر، ۱۳۸۱: ۲۶-۲۲.

۳. برای نمونه به این مقالات می‌توان اشاره کرد:

- ریاحی، محمدامین(۱۳٤۲) «داستانی به‌نام کتاب درسی». ماهنامهٔ آموزش‌وپرورش. شمارهٔ ٤. سال ۳۳. خردادماه. (۱۳۷۷).
- «ماجرای کتاب‌های درسی، ورقی از تاریخ فرهنگ ایران». مجلهٔ بخارا. شمارهٔ ۲. مهرماه ۱۳۷۷.
- معتمدی، اسفندیار (۱۳۸۲). «کتاب‌های درسی ایران، از تأسیس دارالفنون تا انقلاب اسلامی» (۱۳۵۷-۱۲۳۰). تاریخ معاصر ایران. سال ۷. شمارهٔ ۲۷. پاییز.
- صادقی، محمدعلی و عسگرانی، محمدرضا (۱۳۸٦). «درآمدی تاریخی بر روند تدوین و چاپ نخستین کتاب‌های درسی». مجلهٔ دانشکده ادبیات و علوم‌انسانی دانشگاه اصفهان. دورهٔ دوم. شمارهٔ ۵۰. پاییز.
- مجیدی، موسـی (۱۳٦٤). «تاریخچهٔ مختصر کتاب‌های درسـی و سیر تطور آن در ایران از دارالفنون تا به امروز». فصل‌نامهٔ تعلیم و تربیت. سال ۱. شمارهٔ ٤. زمستان
- احمدی، محمودطاهر (۱۳۷۳). «نخستین کوشش‌ها برای تدوین کتب درسی». گنجینهٔ اسناد. سال ٤. دفتر ۳. پاییز.

۴. گزارش بسیار خوبی وجود دارد که تغییر این برنامه‌های درسی را در بخش وسیعی از دانش‌آموزان ایران (و از آن میان تغییر در برنامه‌های درسـی ریاضی را) به بحث گذاشته است. برای مطالعهٔ آن مراجعه کنید به: حسینی روح‌الامینی، جمیله‌سادات (۱۳۸۰). سیر تحول برنامه‌های درسی ابتدایی و راهنمایی (۱۳۸۰-۱۳۰۱ شمسی). تهران.

۵. از جمله: امین ریاحی، ۱۳۷۷: ٦٤ به بعد.

۶. برای مطالعهٔ گزارشـی دربارهٔ معلمان دارالفنـون و نیز محصلان اعزامی رجوع کنید به: رینگر، ۱۳۸۱: ٤۳-۳۹ و ۱۲۱- ۸۱.

۷. برای مطالعهٔ گزارشـی دربارهٔ تأسـیس مدارس جدید در ایران رجـوع کنید به: رینگر، ۱۳۸۱: ۲۰٤-۱٦۳.

۸. سند موجود در معاونت اسنادی، سازمان اسناد و کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران به شمارهٔ ۳٦۵۳۷-۲۹۷.

منابع

۱. ریاحی، محمدامین (۱۳٤۲). «داستانی به نام کتاب درسی». ماهنامهٔ آموزش‌وپرورش. شمارهٔ ٤. سال ۳۳. خردادماه

۲. ریاحی، محمدامین (۱۳۷۷). «ماجرای کتاب‌های درسـی، ورقی از تاریخ فرهنگ ایران». مجلهٔ بخارا. شمارهٔ ۲. مهرماه.

۳. پسـندیده، محمد (۱۳۸٦). «آموزش ریاضی در دارالفنون (عصر قاجار)». پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ تاریخ علم. دانشگاه تهران.

۴. درایتی، مصطفی (۱۳۹۰). دست‌نوشته‌های ایران. تهران.

۵. رینگر، مونیکا (۱۳۸۱). آموزش، دین و گفتمان اصلاح فرهنگی در دوران قاجار. ترجمهٔ مهدی حقیقت‌خواه. تهران.

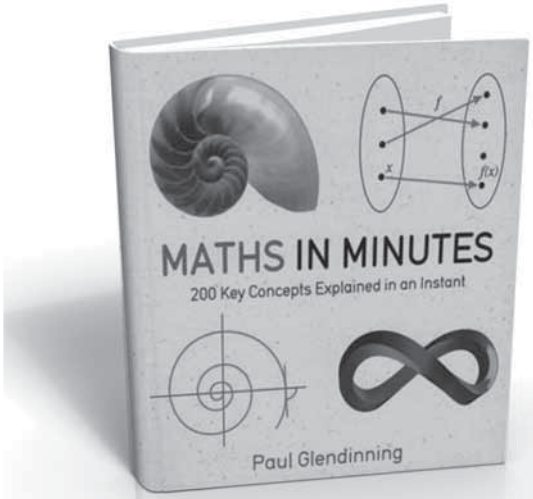
۶. سلطانیفر، صدیقه (۱۳۷٦). فهرست کتب درسی چاپ سنگی موجود در کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران. تهران.

۷. شچگلوا، المپیا پاولونا (۱۳۸۸). تاریخ چاپ سنگی در ایران. ترجمهٔ پروین منزوی. تهران.

۸. شـمس اردکانی، محمدرضا و قاسـملو، فرید (۱۳۸۷). «دربارهٔ نسخه‌ها، شرح‌ها و ترجمه‌های کتاب خلاصة‌الحساب شیخ‌بهایی موجود در کتابخانه‌های ایران». در: مجموعه مقالات به مناسبت بزرگ‌داشت مقام علمی دانشمند فرهیخته استاد دکتر پرویز دوامی. تهران.

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

ریاضیات در چند دقیقه



پارادوکس سلمانی

پارادوکس علی‌الظّاهر گزاره‌ای راست است که خودش را نقض می‌کند، یا به وضعیتی منجر می‌شود که به‌نظر می‌رسد از منطق سرپیچی کرده است. در سال ۱۹۰۱، برتراند راسل[1]، ریاضی‌دان بریتانیایی، از پارادوکس سلمانی برای مطرح‌کردن نقض‌های موجود در نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها استفاده کرد.

جمیع مردان دهکده‌ای یا صورتشان را خودشان اصلاح می‌کنند یا توسط یک سلمانی (که خودش یکی از مردان دهکده است) اصلاح می‌شوند. سلمانی بر این ادعاست که تنها صورت دهکده‌نشین‌های مذکری را اصلاح می‌کند که خودشان صورت خود را اصلاح نمی‌کنند. در این صورت چه کسی صورت خود سلمانی را اصلاح می‌کند؟

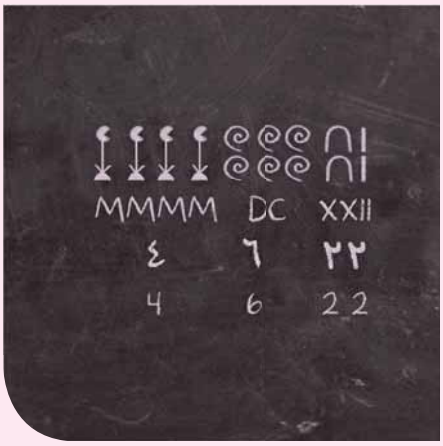
پارادوکس مزبور برحسب مجموعه‌ها از ما می‌خواهد مجموعه‌ای را در نظر بگیریم که دارای جمیع زیرمجموعه‌هایی باشد که خودشان را به‌عنوان عضو ندارند. در این صورت آیا خود این مجموعه یک عضو خودش است؟ راه‌حل فوری چنین پارادوکس‌هایی این بود که نظریهٔ مجموعه‌ها را با یک‌سری قاعده یا «اکسیوم»[2]؛ با ایجاد سلسله‌مراتبی از مجموعه‌هایی که مجازند تنها اعضای مجموعه‌های بالای خودشان در این سلسله‌مراتب باشند، محدود کند. با این همه چنین نیست که ظریف‌ترین راه‌حل‌های نظریه‌های اکسیوماتیک مجموعه‌ها به‌گونه‌ای وسیع مورد پذیرش واقع شده باشند.

اگر سلمانی مورد بحث صورت خودش را خودش اصلاح کند، در این صورت ادعایش که تنها صورت کسانی را اصلاح می‌کند که خودشان صورت خود را اصلاح نمی‌کنند، دروغ است. اما اگر صورت خودش را اصلاح نکند، در این صورت ادعایش این است که صورت خود را اصلاح می‌کند! به این ترتیب به هر طریق آن را مطرح کنید، تناقضی به‌وجود می‌آید.

اعداد

اعداد در ابتدایی‌ترین صورتشان، تنها صفت‌هایی هستند که کمیت را توصیف می‌کنند. به‌عنوان نمونه، می‌توانیم بگوییم «سه صندلی» یا «دو گوسفند». اما حتی به‌عنوان یک صفت، به‌طور غریزی توجه داریم که «دو و نصفی بز» بی‌معنی است. در این صورت، اعداد می‌توانند کاربردها و معانی متفاوت داشته باشند.

اعداد، از آنجا که مردمان باستانی آن‌ها را به طرق مختلف به‌کار می‌بردند، معانی نمادین به خود اختصاص داده‌اند؛ نظیر «نیلوفر آبی» که در هیروگلیف‌های مصری عدد ۱۰۰۰ را توصیف می‌کند. گرچه این شیوهٔ بصری از لحاظ زیبایی‌شناسی خوشایند است، به‌کار عملیات جبری نمی‌آید. پس با بیشتر شدن کاربردهای اعداد، نمادهاشان ساده‌تر می‌شدند. رومی‌ها برای نمایش حوزهٔ وسیعی از اعداد، از حوزهٔ کوچکی از علائم اساسی استفاده می‌کردند. اما انجام محاسبات با استفاده از اعداد بزرگ، همچنان پیچیده بود.



دستگاه مدرن اعداد امروزی‌مان از تمدن‌های مسلمانان هزارهٔ اول بعد از میلاد به ارث رسیده است. استفاده از ۱۰ به عنوان پایه، انجام محاسبات پیچیده را بسیار آسان‌تر می‌کند.

اعداد طبیعی

اعداد طبیعی اعداد شمارش ساده‌اند (۱، ۲، ۳، ۴، ...). مهارت در شمارش به‌گونه‌ای تنگاتنگ با توسعهٔ جوامع پیچیده از طریق تجارت، فناوری و کاربرد مدارک و اسناد مرتبط است. گرچه شمارش به چیزی بیشتر از اعداد نیاز دارد. این عمل شامل جمع و در نتیجهٔ آن تفریق نیز می‌شود.

به مجرد اینکه شمارش را معرفی کردیم، عملیات روی اعداد نیز قسمتی از فرهنگمان می‌شود. یعنی اعداد، دیگر توصیف‌کننده‌ای ساده نیستند و به اشیایی تبدیل می‌شوند که می‌توانند یکدیگر را تغییر دهند. زمانی که عمل جمع درک شود، به دنبال آن ضرب، به‌عنوان راهی برای نگریستن به مجموعات مجموع‌ها، می‌آید. مثلاً اینکه چند شیء در پنج گروه شش‌تایی وجود دارند؟ ـ در حالی‌که تقسیم راهی برای توصیف عمل مقابل ضرب مطرح می‌کند ـ مثلاً اینکه اگر سی شیء به پنج گروه مساوی تقسیم شوند، چند شیء در هر گروه وجود دارند؟

اما در این مورد پرسش‌هایی به‌وجود می‌آیند. تقسیم ۳۱ به ۵ گروه مساوی، به چه معنی است؟ حاصل تقسیم ۱ بر ۱۰ چیست؟ برای معنی دادن به این پرسش‌ها نیاز داریم که به بیرون از «اعداد طبیعی»[3] قدم بگذاریم.

پی‌نوشت‌ها

1. Bertrand Russell
2. axiom
3. natural numbers

چند معمای منطقی
(ادامهٔ ماجرای محکومین به جام زهر یا شربت!)

معماهای منطقی شـمارهٔ قبل را که فراموش نکرده‌اید؟ م یادآوری می‌گوییم که داسـتان ما در یک سـرزمین افسـانه‌ا کاملاً مشابه را که حاوی شربت یا زهر بود، می‌نوشیدند. روی جملات نوشته شده و درستی یا نادرستی آن‌ها توضیحاتی می حاوی زهر باشد. محکومین با توضیحات قاضی می‌توانستند ت و از اعدام رهایی یابند. پنج معما از این دست در شمارهٔ مهرما برای این شماره داریم.

معمای ششم

با ورود ششـمین محکوم، دو جام زهر پیش روی او گذاشـته شـ بکشید!»

روی دومی نوشته شده بود: «در جام دیگر، شربت وجود دارد» و ق معمای پنجم قاضی گفته بود: «اگر جام اول شامل شربت باشد، جملهٔ اما در جام دوم برعکس است. یعنی اگر شامل زهر باشد، جملهٔ روی آ بار هم قاضی همین را گفت. محکوم ششم چه باید بکند؟

معمای هفتم

برای محکوم هفتم نیز دو جام آوردند. روی اولی نوشته شده بود: « بود: «بهتر است، جام دیگر را سر نکشید!» و قاضی همان توضیح را دا

معمای هشتم

برای محکوم هشتم نیز دو جام آوردند. ولی عجیب بود که روی فراموش کرده‌اند نوشته‌ها را بنویسند، ولی اشکالی ندارد، من آن‌ها را «هر دو جام حاوی زهر هستند.» محکوم پرسید: «کدام نوشته مربوط نیست!» ولی مثل محکومین قبل، اگر در جام اول شربت باشد، نوشت و در جام دوم برعکس. حالا محکوم بینوا چه باید بکند؟ آیا راهی برای

معمای نهم

برای محکوم نهم سه جام آوردند! و قاضی گفت در یکی از سه ج «این جام حاوی زهر است»، روی دومی نوشته بود: «این جام حاوی قاضی توضیح داد که حداکثر یکی از سه نوشته درست است. محکوم

معمای دهم

برای محکوم دهم هم سـه جام آوردند و باز هم گفته شـد که فق قاضی گفت که جملهٔ روی جامی که در آن شربت باشد، درست است جام بودند:

جام اول: «در جام دوم زهر ریخته شده است!»

جام دوم: «در این جام زهر وجود دارد!»

جام سوم: «در جام اول زهر وجود دارد!»

محکوم باید کدام جام را بنوشد؟

برای ملاحظهٔ پاسخ معماها به صفحهٔ ۴۷ مراجعه کنید. این را هر ویژهٔ آذرماه ملاحظه کنید و از آن‌ها واقعاً لذت ببرید، چرا که به راستی

ی‌خواهیم چند معمای دیگر در همان قالب معرفی کنیم. برای ی رخ می‌داد که در آن محکومین به اعدام، باید یکی از دو جام هر جام جمله‌ای نوشته شده بود و قاضی برای تکمیل، در مورد ی‌داد. در ضمن ممکن بود که هر دو جام حاوی شربت و یا هر دو نشخیص دهند که جام حاوی شربت کدام است و آن را بنوشند ه داشتیم، و حالا پنج‌تای دیگر که از آن معماها قوی‌تر هستند،

ـد. روی اولی نوشته شده بود: «فرقی نمی‌کند که شما کدام جام را سر

اضی همان توضیح معمای پنجم را داد. برای یادآوری می‌گوییم که در ۀ روی آن درست و اگر شامل زهر باشد، جملۀ روی آن نادرست است. ن درست و اگر شامل شربت باشد، جملۀ روی آن نادرست است.» این

«فرق می‌کند که شما کدام جام را سر بکشید!» روی دومی نوشته شده د. محکوم هفتم چه باید بکند؟

هیچ‌کدام نوشته‌ای نبود! بعد از اعلام محکوم، قاضی گفت: مثل اینکه می‌گویم: یکی این بود: «این جام حاوی زهر است.» و دیگری این بود: به جام اول بود و کدام روی جام دوم؟» قاضی گفت: «این را دیگر یادم ۀ روی آن درست است و اگر زهر باشد، نوشتۀ روی آن نادرست است ی نجات دارد؟!

ام شربت و در دوتای دیگر زهر وجود دارد! روی جام اول نوشته بود: شربت است» و روی سومی نوشته بود: «در جام دوم زهر وجود دارد.» باید کدام جام را بنوشد؟

فط در یکی از آن‌ها شـربت و در دوتای دیگر زهر وجود دارد. به‌جز آن ، و لااقل یکی از دو جملۀ دیگر نادرست است. این‌ها جملات روی سه

م یادآور شویم که معماهای محکومین یازدهم و دوازدهم را در شمارۀ ی چالش‌برانگیز هستند.

پرسش‌های پیکارجو!

معادلـۀ $(۲x^۳ - x)(۸x^۴ - ۸x^۲ + ۱) = \frac{۱}{۸}$ در بـازۀ $[۰,۱]$ چند ریشـۀ حقیقی دارد؟

الف) ۱ ب) ۰ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

هوشنگ شرقی

یک اثبات و یک تعمیم بر قضیهٔ حمار

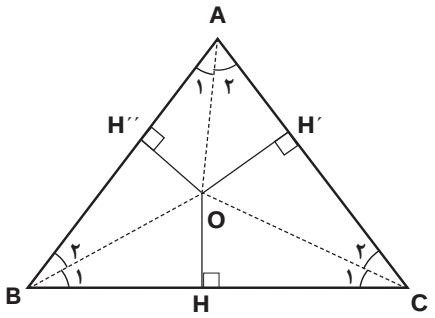
مقدمه

اثباتی که در کتاب درسی هندسهٔ ۲ برای «قضیهٔ حمار» ارائه شده، اثباتی ساده و دقیق است. در اینجا می‌خواهیم اثباتی دیگر از این قضیه ارائه دهیم و نیز تعمیمی از آن را معرفی کنیم که کاربردهایی هم در مسائل هندسهٔ نابرابری‌ها دارد و نمونه‌هایی از آن را نیز ذکر می‌کنیم.

اثبات قضیهٔ حمار

◆ **قضیهٔ حمار:** در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع، از ضلع سوم مثلث بزرگ‌تر است.

● **اثبات:** پیش از این در قضیه‌ای از کتاب درسی دیده‌ایم که نیم‌سازهای زوایای داخلی هر مثلث، در نقطه‌ای واقع در درون مثلث، هم‌رس‌اند و می‌دانیم هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. بنابراین اگر O نقطهٔ هم‌رسی نیم‌سازهای زوایای داخلی مثلث ABC و OH، OH′ و OH″ فواصل O از سه ضلع مثلث باشند، داریم:



$OH=OH'=OH''$,

$\Delta OAH'\cong\Delta OAH''$, $\Delta COH'\cong\Delta COH$, $\Delta BOH\cong\Delta BOH''$

(وتر و یک زاویهٔ حاده)

و بنابراین:

$AH'=AH''$, $CH'=CH$, $BH=BH''$

$\Rightarrow CH'+BH''=CH+BH=BC$

اما واضح است که $CH'<AC$ و $BH''<AB$

پس:

$AB+AC>CH'+BH''=BC$

تمرین: در همین شکل نشان دهید:

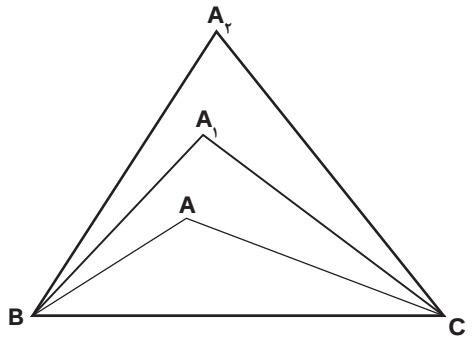
$AB+BC>AC$, $AC+BC>AB$

تعمیم قضیهٔ حمار

هرگاه چند مثلث، در یک ضلع مشترک باشند و دو ضلع دیگر آن‌ها نقطهٔ برخورد دیگری نداشته باشند و رأس دیگر این مثلث‌ها در یک طرف این ضلع مشترک باشد، مجموع اضلاع مثلثی بزرگ‌تر است که رأس آن از این ضلع مشترک دورتر باشد.

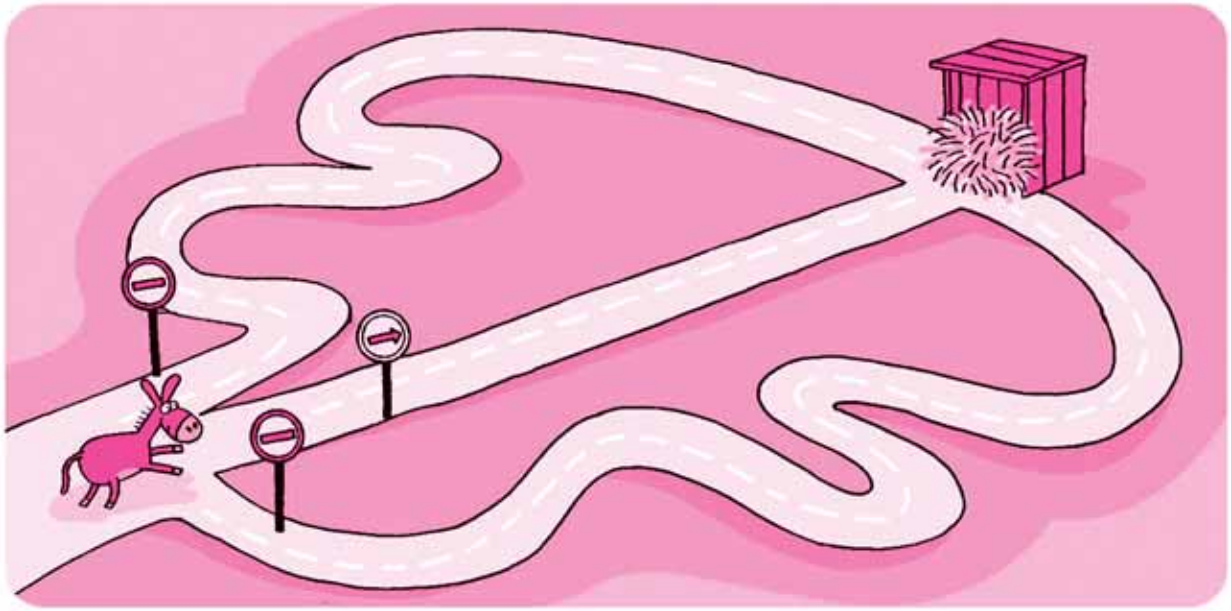
یعنی در شکل زیر داریم:

$\ldots>A_2B+A_2C>A_1B+A_1C>AB+AC$



● **اثبات:** کافی است ثابت کنیم: $A_1B+A_1C>AB+AC$

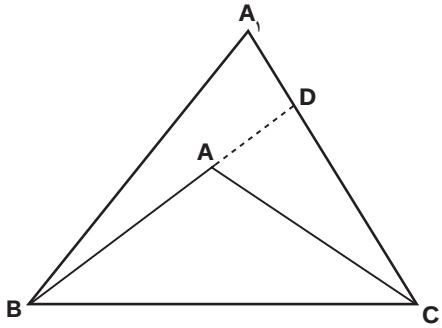
(چرا؟)



به ایـن منظـور AB را امتداد می‌دهیـم تا A_1C را در نقطـهٔ D قطـع کند. حال به کمـک قضیهٔ حمار می‌نویسیم:

$AD+DC>AC \Rightarrow AD+DC+AB>AC+AB$

$\Rightarrow DB+DC>AB+AC \quad (1)$



$A_1B+A_1D>BD \Rightarrow A_1B+A_1D+DC>BD+DC$

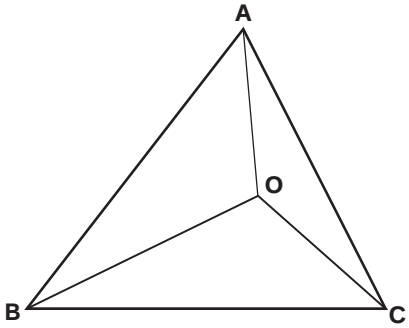
$\Rightarrow A_1B+A_1C>BD+DC \quad (2)$

و از مقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$A_1B+A_1C>AB+AC$

مثال‌هایی از کاربرد تعمیم قضیهٔ حمار

◆**مثـال ۱.** ثابـت کنیـد در هـر مثلـث مجموع فواصـل هـر نقطـه درون مثلـث از سـه رأس آن، از محیـط مثلـث کوچک‌تـر و از نصف محیـط بزرگ‌تر است.



◆ **حل:** نقطهٔ دلخواه O را درون مثلث ABC در نظر می‌گیریـم. اثبات اینکه OA+OB+OC از نصف محیط مثلث بزرگ‌تر اسـت، نیازی به تعمیم قضیهٔ حمار ندارد و به کمک خود این قضیه و به سادگی انجام می‌شود:

$OB+OC>BC,\ OA+OC>AC,\ OA+OB>AB$

اکنـون با جمع کردن ایـن نابرابری‌ها می‌توانید به درسـتی حکم برسـید. اما اثبات اینکه ایـن مجموع از محیط مثلث کوچک‌تر است، باید به کمک تعمیم قضیهٔ حمار و به‌صورت زیر انجام شود:

$OB+OC<AB+AC$

$OA+OB<AC+BC$

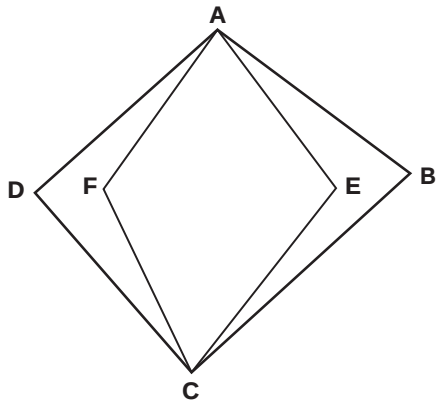
$OA+OC<AB+BC$

و بـا جمـع کردن طرفیـن ایـن نابرابری‌ها نتیجه می‌شود:

$2(OA+OB+OC)<2(AB+AC+BC)$

$\Rightarrow OA+OB+OC<AB+AC+BC$

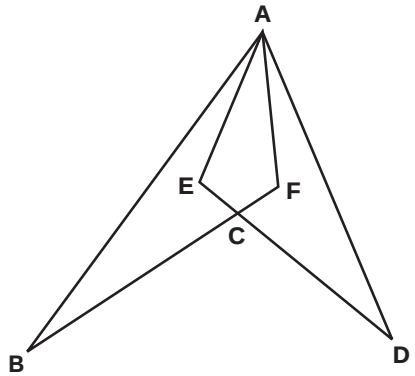
◆**مثال ۲.** در شکل زیر ثابت کنید محیط چهارضلعی ABCD از محیط چهارضلعی AECF بزرگ‌تر است.



◆**حل:** به کمک تعمیم قضیهٔ حمار در مثلث‌های ABC و ACD داریم: AB+BC>AE+EC و AD+CD>AF+CF و با جمع کردن طرفین این نابرابری‌ها به‌سادگی می‌توانید درستی حکم را اثبات کنید.

تمرین

۱. در شکل زیر ثابت کنید: AB+AD از نصف محیط چهارضلعی AECF بزرگ‌تر است.



۲. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، از نقطهٔ دلخواه O درون مثلث عمودهای OM، ON و OP را بر اضلاع مثلث وارد کرده‌ایم. ثابت کنید محیط مثلث MNP از ارتفاع مثلث ABC بزرگ‌تر است.

- **اسم مجله:** Mathematical Spectrum
- **تارنما:** ms.appliedprobability.org
- **ناشر:** Applied Probability Trust
- **مکان انتشار:** دانشگاه شفیلد انگلستان
- **زبان:** انگلیسی
- **سال آغاز انتشار:** ۱۹۶۸
- **نشانی:**

Mathematical Specturm
Applied Probability
School of Mathematics and Statistics
The University of Sheffield
Sheffield S37RH

- **تلفن و فکس:**

Telephone Number: +44-(0)114-222-3920
Fax Number: +44-(0)114-222-3920

فرانک مورلی
(۱۸۶۰-۱۹۳۷)

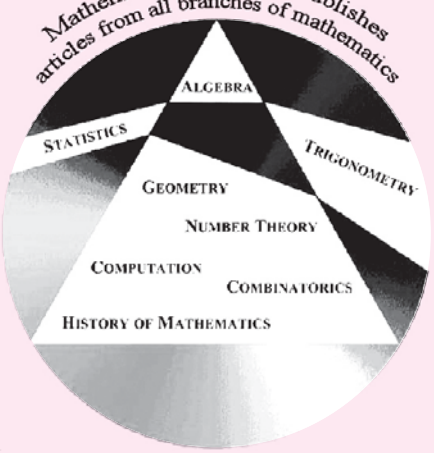
مجلهٔ ریاضی «Mathematical Spectrum» یکی از بهترین و سرشناس‌ترین مجلات ریاضی جهان در عرصهٔ ریاضیات دورهٔ دوم دبیرستان است که در تمام شاخه‌های ریاضی مانند: جبر[۱]، مثلثات[۲]، نظریه اعداد[۳]، ترکیبیات[۴]، هندسه[۵]، آمار[۶]، تاریخ ریاضیات[۷] و... دست به چاپ و انتشار مقاله می‌زند. این مجله از جایگاه برجسته‌ای بین مقاله‌نویسان ریاضی برخوردار

احسان یارمحمدی

Mathematical Spectrum

است و همواره توجه آن‌ها را برای ارائهٔ مقاله به این مجله به خود معطوف می‌کند. دانش‌آموزان، معلمان و علاقه‌مندانی که مایل به ارسال مقاله برای این مجله هستند می‌توانند مقالات خود را از طریق نشانی پستی که در ابتدای مقاله آورده‌ایم، ارسال کنند. البته می‌باید در ابتدای آدرس عبارت The Editor را نیز اضافه کنند تا مقالاتشان به‌دست ویراستار مجله برسد و یا اینکه از طریق رایانامهٔ این مجله که عبارت است از: «E-Mail: spectrum@sheffield.ac.uk» اقدام کنند.

مجلهٔ ریاضی Mathematical Spectrum را می‌توانید هم به‌صورت مُجَلَّد و هم به‌صورت فایل «پی‌دی‌اِف» دریافت کنید. اما از آنجا که دست‌اندرکاران آن بیشتر رویکرد فروش مجله را به علاقه‌مندان به ریاضیات



پیش‌روی خود نهاده‌اند، امکان دارد که به آسانی نتوانید فایل‌های «پی‌دی‌اِف» رایگان متناظر با مقالات گنجانده شده در مجله را در اینترنت به‌دست آورید. اما چون که مطالعهٔ این دست از مجلات ریاضی معتبر و مطرح در عالم ریاضیات می‌تواند افق‌های روشن و جدیدی را پیش‌روی شما قرار دهد، مطالعهٔ آن را به ریاضی‌آموزان پیشنهاد می‌کنیم.

آگستس دمورگن
(۱۸۷۱-۱۸۰۶)

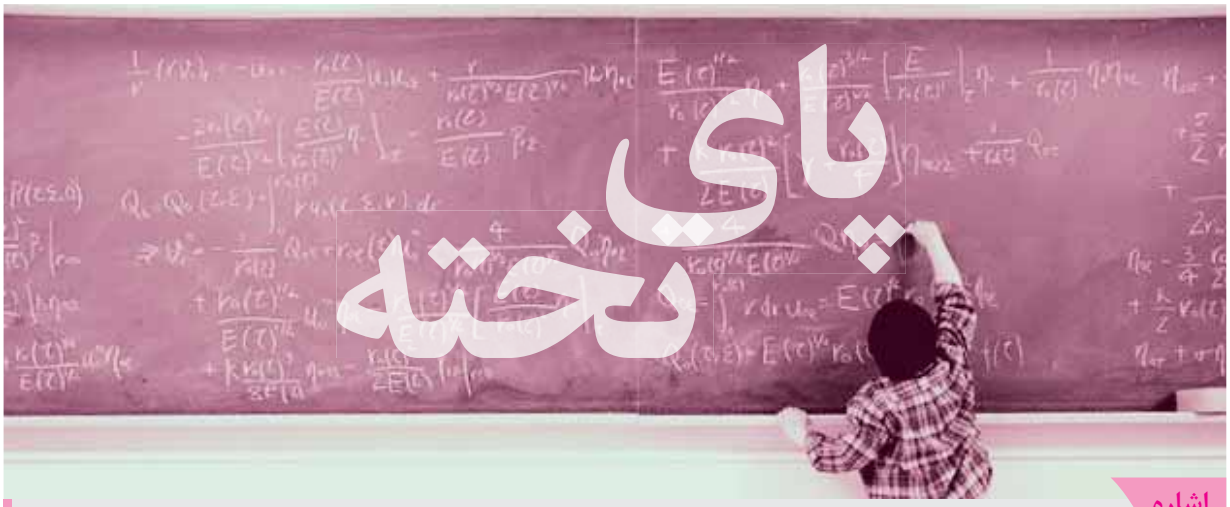
مقاله‌ای با عنوان «دوندگان کُند نیز شانس دارند»[8] به قلم **اِم. اِی. خان**[9] در سال ۲۰۰۴ در این مجله چاپ شده است که ریاضی‌آموزان علاقه‌مند به مباحث «احتمال»[10] می‌توانند این مقاله را پیگیری کنند. همچنین، علاقه‌مندان به **آگوستس دمورگن** و کارهای او می‌توانند مقالهٔ «زندگی و کارهای آگستس دمورگن»[11] اثر **اسکات اِیچ. براُون**[12] را که در سال ۲۰۰۶ منتشر شده است، مطالعه کنند. در سال ۲۰۰۸ مقاله‌ای با عنوان «شمارش توان‌های کامل»[13] نوشتهٔ **اِم. اِی. نیبلِم**[14] در مجله به چاپ رسید که برای علاقه‌مندان به مباحث «نظریهٔ اعداد»[15] جالب توجه است. در سال ۲۰۰۹ مقاله‌ای با عنوان «یک اثبات هندسی ساده از قضیهٔ تثلیث [زاویه] مورلی»[16] به قلم **براین اِستون بریج**[17] در مجله درج شد که می‌تواند برای علاقه‌مندان به هندسه مفید باشد.

هرچند همان‌گونه که اشاره کردیم، بهترین راه دریافت این مجله پرداخت حق اشتراک آن است و نمی‌توان به آسانی به فایل‌های رایگان «پی‌دی‌اف» آن دست یافت، اما از آنجا که مقالات مندرج در این مجله دربرگیرندهٔ مطالب و موضوعات متنوع و ارزنده‌ای هستند، مطالعه و بررسی آن را به منظور ارتقای سطح دانش و بینش ریاضیات به تمامی ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضی پیشنهاد می‌کنیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Algebra
2. Trigonometry
3. Number Theory
4. Combinatorics
5. Geometry
6. Statistics
7. History of Mathematics
8. Slow Runners also Have a Chance
9. M. A. Khan
10. Probability
11. The Life and Works of Augustus De Morgan
12. Scott H. Brown
13. Counting the Perfect Powers
14. M. A. Nyblom
15. Number Theory
16. A Simple Geometric Proof of Morley's Trisector Theorem
17. Brian Stonebridge

دکتر محرم نژاد ایردموسی



پای تخته

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد.

منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

■ بخش اول: مسئله‌ها

۱۴۱. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$$

۱۴۲. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید:

$A=(x+y)^5-(x^5+y^5)$

$B=(x+y)^7-(x^7+y^7)$

۱۴۳. x، y و z سه عدد حقیقی هستند و $x\neq y$ است، به‌طوری‌که داریم: $x^2(y+z)=y^2(x+z)=2$. مطلوب است مقدار عددی $z^2(x+y)$.

۱۴۴. اگر $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ حسابی باشد، بررسی کنید که کدام‌یک از دنباله‌های زیر حسابی است:

(الف) $b_n=a_{n+1}^2-a_n^2$

(ب) $c_n=aa_n+b$

(ج) $d_n=a_n^2$

۱۴۵. ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ حسابی است، اگر و تنها اگر اعداد حقیقی A و B موجود باشند؛ به‌طوری‌که: $S_n=a_1+a_2+...+a_n=An^2+Bn$.

۱۴۶. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای حسابی با جملات مثبت باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt{a_1a_n}\le\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\le\frac{a_1+a_n}{2}$$

۱۴۷. فرض کنید S_n مجموع همهٔ اعداد طبیعی بین 2^n و 2^{n+1} باشد. ثابت کنید S_n مضرب ۳ است.

۱۴۸. خانه‌های جدول زیر را با اعداد طبیعی پر کنید که اعداد هر سطر و اعداد هر ستون یک تصاعد حسابی باشند.

	۷۴			
				۱۸۶
		۱۰۳		
۰				

۱۴۹. تصاعد هندسی $\{a_n\}$ را بیابید، به‌طوری که برای هر $n\geq 1$ داشته باشیم: $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

۱۵۰. برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{3}{4}$$

■ بخش دوم: راه‌حل‌ها

۹۱. (فرستنده: عطا طهوری، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تبریز)

اگر داشته باشیم:

$\log_6^{15}=a$ و $\log_{12}^{18}=b$، **حاصل** $\log_{25}^{24}$ **را برحسب a و b به‌دست آورید.**

$$\log_{25}^{24}=\log_{25}^{144}-\log_{25}^{6}=\log_5^{12}-\frac{1}{\log_6^{25}}=\frac{2\log_6^{12}-1}{2\log_6^5} \quad (1)$$

$$\log_{12}^{18}=\frac{\log_3^2+2}{2\log_3^2+1}\Rightarrow \log_3^2=\frac{b-2}{1-2b}\Rightarrow \log_6^2=\frac{b-2}{-b-1}$$

$$\Rightarrow \log_6^{12}=\frac{3}{b+1} \quad (2)$$

$$\log_6^{15}=\log_6^3+\log_6^5\Rightarrow \log_6^5=a-\log_6^3=a-\log_2^3\times\log_6^2$$

$$=a-\frac{1-2b}{-b-1}\Rightarrow \log_6^5=\frac{a+1+ab-2b}{b+1} \quad (3)$$

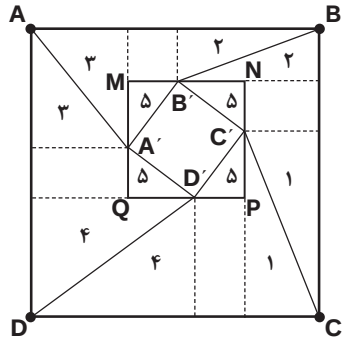
از روابط (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$\log_{25}^{24}=\frac{7-b}{2a+2+2ab-4b}$$

۹۲. (فرستنده: نفیسه آغویی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

مربعی را داخل مربع دیگری انداخته‌ایم. ثابت کنید اگر رئوس متناظر این دو مربع را به‌هم وصل کنیم، از چهار ناحیهٔ حاصل، مجموع مساحت دو ناحیه‌ای که مجاور به دو ضلع روبه‌روی مربع هستند، با مجموع مساحت دو ناحیهٔ دیگر برابر است.

از رئوس مربع کوچک‌تر خطوطی به موازات اضلاع مربع بزرگ‌تر رسم می‌کنیم تا مربع MNPQ ایجاد شود. در شکل، مثلث‌های هم‌مساحت با شمارهٔ یکسان، شماره‌گذاری شده‌اند که اثبات آن‌را به خواننده واگذار می‌کنیم. همچنین، مجموع مساحت‌های دو مستطیل مجاور به دو ضلع AD و BC برابر است با: $A'Q(DC-MN)$ (چون $A'Q=C'N$) و مجموع مساحت‌های دو مستطیل مجاور به دو ضلع AB و CD برابر است با: $B'M(AD-MQ)$. از طرف دیگر: $A'Q=B'M$. در نتیجه حکم ثابت می‌شود.



۹۳. (فرستنده: نفیسه آغویی، دانش‌آموز دبیرستان فرزانگان چهاردانگه)

با فرض $f(x)=x-\frac{1}{x}$، **معادلهٔ** $f(f(x))=0$ **چند ریشه در مجموعه اعداد حقیقی دارد؟**

معادلهٔ $x-\frac{1}{x}=k$ به ازای هر k همواره دو ریشه دارد، چون:

$$x-\frac{1}{x}=k\Rightarrow x^2-kx-1=0\Rightarrow \Delta=k^2+4>0$$

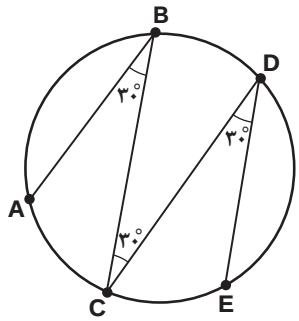
اکنون معادلهٔ $f(f(x))=1$ را در نظر بگیرید.

$$f(f(x))=1\Rightarrow f(x)-\frac{1}{f(x)}=1$$

در نتیجه دو مقدار مانند a و b برای $f(x)$ به‌دست می‌آید. بنابراین با فرض $f(x)=a$ دو ریشه و با فرض $f(x)=b$ دو ریشهٔ دیگر خواهیم داشت. در نتیجه چهار ریشه برای معادلهٔ $f(f(x))=1$ به‌دست می‌آید. چهار ریشهٔ به‌دست آمده متمایز هستند. کافی است جمع و ضرب ریشه‌ها در معادلهٔ $x^2-kx-1=0$ را در نظر بگیرید.

۹۴. (فرستنده: محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران)

مطابق شکل زاویه‌های بین هر دو وتر متوالی برابر است با ۳۰ درجه. ثابت کنید اگر $AB^2+CD^2=BC^2+DE^2$، **آن‌گاه کمان AB، ۹۰ درجه است.**



بنابر قضیه کسینوس‌ها داریم:
$AB^2+BE^2-AB.BE=AE^2$. چون: $BE=CD$،
پس: $AB^2+CD^2-AB.CD=AE^2$.
همچنین: $AD^2+DE^2-AD.DE=AE^2$ که با توجه به $AD=BC$ داریم: $BC^2+DE^2-BC.DE=AE^2$.
پس:
$AB^2+CD^2-AB.CD=BC^2+DE^2-BC.DE$.
از طرف دیگر داریم: $BC^2+DE^2=AB^2+CD^2$. در نتیجه: $AB.CD=BC.DE$ و یا: $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{CD}$. چون: $\angle ABC=\angle CDE=30$، پس دو مثلث ABC و CDE متشابه‌اند و در نتیجه: $\angle ACB=\angle DCE$. حال از آنجا که: $2(A\hat{C}B+D\hat{C}E+30+30+30)=360$، خواهیم داشت: $A\hat{C}B=45^\circ$ که نشان می‌دهد: $\widehat{AB}=90$.

۹۵. (فرستنده: محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی تهران)
مربع ABCD مفروض است. دایرهٔ S را به مرکز B و به شعاع AB، و نیم‌دایرهٔ L را به قطر AB و داخل مربع رسم می‌کنیم. روی نیم‌دایرهٔ L نقطهٔ M را در نظر بگیرید و BM را رسم کنید تا دایرهٔ S را در T قطع کند. ثابت کنید: $\angle DAT=\angle TAM$.

فرض کنید: $\angle BAM=a$ و $\angle TAM=b$. چون AB قطر نیم‌دایرهٔ L است، پس: $B\hat{M}A=A\hat{M}T=90$ و: $A\hat{T}M=90-b$. از طرف دیگر، چون: $AB=BT$، مثلث ABT متساوی‌الساقین است و: $B\hat{A}T=B\hat{T}A$. در نتیجه: $90-b=a+b$ و بنابراین: $2b+a=90^\circ$. همچنین چون: $D\hat{A}B=90$، پس: $D\hat{A}T+b+a=90$ و طبق تساوی مذکور داریم: $D\hat{A}T+a+b=2b+a$ که نتیجه می‌دهد: $D\hat{A}T=b$ و حکم نتیجه می‌شود.

۹۶. در معادلهٔ $5(x^2+y^2+z^2)=1250-2xyz$، همهٔ متغیرها اعدادی اول هستند. معادله را حل کنید.

ابتدا نتیجه بگیرید که $2xyz$ مضرب ۵ است و چون x، y و z اول هستند، پس یکی از آن‌ها باید برابر ۵ باشد. (چرا؟) بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم: $x=5$. با جای‌گذاری و ساده کردن معادله، به تساوی $y^2+z^2=225-2yz$ می‌رسیم. در نتیجه: $(y+z)^2=225$ و یا: $y+z=15$. با توجه به اول بودن y و z تنها جواب ممکن مقادیر ۲ و ۱۳ هستند.

۹۷. در یک ساعت دیجیتالی که ساعت را با h، دقیقه را با m و ثانیه را با s نمایش می‌دهد، در چند زمان متفاوت $h+m=s$ اتفاق می‌افتد؟ ($0\le h\le 23$، $0\le m\le 59$، $0\le s\le 59$)

به ازای هر مقدار h، m می‌تواند در بازهٔ $0\le m\le 59-h$ تغییر کند. پس $60-h$ مقدارهای متفاوت برای m (و در نتیجه برای s) ایجاد می‌شود که تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با: $\sum_{h=0}^{23}(60-h)$. این مقدار پس از ساده کردن برابر است با: ۱۱۶۴.

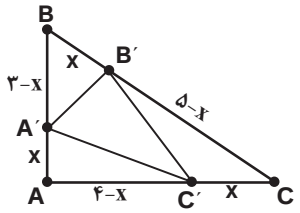
۹۸. بزرگ‌ترین مقدار λ را طوری پیدا کنید که نامساوی زیر به ازای همهٔ مقادیر حقیقی b، c، a، و d برقرار باشد:
$$a^2+b^2+c^2+d^2\ge ab+\lambda bc+cd$$

با فرض $a=d=0$ و $b=c$ داریم: $2b^2\ge\lambda b^2$. در نتیجه: $\lambda\le 2$. ثابت می‌کنیم با فرض $\lambda=2$ نامساوی به ازای همهٔ مقادیر حقیقی a، b، c و d برقرار است.

$$a^2+b^2+c^2+d^2\ge 2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$$
$$\ge|ab+cd|+\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$$
$$\ge ab+cd+\sqrt{c^2b^2}\ge ab+cd+bc$$

۹۹. سه مورچه روی رئوس مثلث ABC هستند و طول اضلاع AB، BC و CA به ترتیب برابر است با ۳، ۵ و ۴. اگر سه مورچه با سرعت یک واحد در ثانیه و در جهت $A\to B\to C\to A$ حرکت کنند، در چه لحظه‌ای از ۳ ثانیهٔ اول، مساحت مثلثی که سه رأس آن توسط مورچه‌ها مشخص می‌شود، مینی‌مم است؟

$$S(A'B'C')=\frac{1}{2}\times 3\times 4-\frac{1}{2}(x.(4-x)$$
$$+x.(3-x).\sin B+x(5-x)\sin C)$$
$$=6-\frac{1}{2}(4x-x^2+\frac{12}{5}x-\frac{4}{5}x^2+3x-\frac{3}{5}x^2)$$
$$=\frac{6}{5}x^2-\frac{47}{10}x+6$$



در نتیجــه در رأس ســهمی $y=\frac{۶}{۵}x^{۲}-\frac{۴۷}{۱۰}x+۶$ مساحـت مثـلث مینی‌مم خواهـد شد، یـعنی در لـحظهٔ

$$t=\frac{\frac{۴۷}{۱۰}}{۲\times\frac{۶}{۵}}=\frac{۴۷}{۲۴}.$$

۱۰۰. مجموعهٔ $S=\{۱, ۲, ..., ۲۰۱۳\}$ مفروض است. چند ســه‌تایی از زیرمجموعه‌هــای S مانند (A,B,C) می‌توان ســاخت به‌طوری کــه: $A\cup B\cup C=S$ و $B\subseteq A\cup C$؟

برای هر عضو a از S، شش حالت وجود دارد، چرا که از $۳^{۳}$ حالت ممکن، دو حالت زیر قابل قبول نیست.

۱. a عضو هیچ‌کدام از سه مجموعهٔ A، B و C نباشد.

۲. a عضو B باشد، اما عضو A و C نباشد. در نتیجه طبق اصل ضرب، کل حالت‌های ممکن برای تمام اعضای S برابر است با: $N=۶^{۲۰۱۳}$.

۱۰۱. اعداد ســه رقمی $\overline{ab۴}$ و $\overline{۴ab}$ در تساوی زیر صدق می‌کنند. عدد دو رقمی $\overline{ab}$ را بیابید.

$$۴۰۰-\overline{ab۴}=\overline{۴ab}-۴۰۰$$

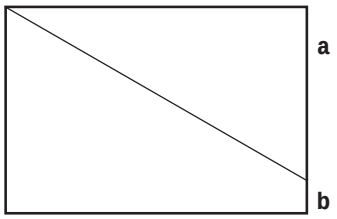
$$۴۰۰-۱۰۰a-۱۰b-۴=۴۰۰+۱۰a+b-۴۰۰$$

$$\Rightarrow ۱۰a+b=۳۶\Rightarrow \overline{ab}=۳۶$$

۱۰۲. عــدد ۲۰۱۳ دارای ایــن خاصیت اســت که ارقام آن چهار رقم متوالی هستند. قبل از سال ۲۰۱۳، نزدیک‌ترین سالی که این خاصیت را داشته، چه سالی بوده است؟

اگر صفر جزو رقم‌ها باشــد، به اعداد ۲۰۱۳، ۲۰۳۱، ۲۱۰۳ و... می‌رسیم که هیچ‌کدام قبل از ۲۰۱۳ نیستند. پس رقم صفر جزو رقم‌ها نیست. در نتیجه سال موردنظر قبل از ۲۰۰۰ اســت و رقم ۱ را حتماً جزو رقم‌ها داریم. بنابراین چهار رقم مورد استفاده ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند که نزدیک‌تریــن آن‌هــا به ۲۰۱۳ و قبل از آن ســال ۱۴۳۲ است.

۱۰۳. با یک خط، مستطیلی را به دو بخش افراز کرده‌ایم، به‌طوری که a>b و نسبت مساحت دو بخش ۸ به ۳ است. اگر a+b=۱۳۲، مقدار a را بیابید.



با توجه به مفروضات مسئله، نسبت مساحت مثلث به مساحت کل مستطیل برابر است با: $\frac{۳}{۱۱}$. در نتیجه اگر ضلع افقی مستطیل را c در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{\frac{۱}{۲}ac}{c(a+b)}=\frac{۳}{۱۱}.$$ چون: a+b=۱۳۲،

پس: a=۷۲ و b=۵۰.

۱۰۴. از دنبالــهٔ اعــداد طبیعــی، مضــارب ۷ را حذف کرده‌ایــم. در دنبالهٔ جدید، جملــه nام را بیابید. بــرای مثال، جملــهٔ هفتم این دنبالــه ۸ و جملهٔ پانزدهم ۱۷ است.

برای به‌دســت آوردن جملهٔ nام کافی اســت تعداد مضارب هفت کوچک‌تر یا مساوی n را به‌دست آوریم که برابر است با: $\left[\frac{n}{۷}\right]$. در نتیجه با حذف این جملات جملهٔ nام بــرابر بــا $n+\left[\frac{n}{۷}\right]$ خواهد بود.

۱۰۵. چنــد مثلث متساوی‌الســاقین وجــود دارد که متســاوی‌الاضلاع نیســت و طول ســاق‌های آن عددی طبیعی، کوچک‌تر یا مســاوی n اســت؟ $(n\in N)$

در این مســئله فــرض طبیعی بــودن همهٔ اضلاع لازم اســت. اگر طول ســاق‌ها برابر k باشد، آن‌گاه برای طــول قاعــده مقادیر ۱ تــا ۲k-۱، به‌جــز k قابل قبول اســت. پس ۲k-۲ مقدار برای طول قاعــده وجود دارد.

در نتیجــه تعــداد کل مثلث‌های مذکور برابر اســت با:

$$\sum_{n=۱}^{n}(۲k-۲)=n(n+۱)-۲n=n(n-۱).$$

۱۰۶. ذوزنقــهٔ متساوی‌الســاقین PQRS دارای دو قاعدهٔ PQ=۶ و RS=۱۰ اســت. فاصلهٔ دو قاعده ۱۲ است. شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که ذوزنقه را می‌پوشاند، چه‌قدر است؟

اگر O مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقه باشد، این نقطه از چهار رأس ذوزنقه به یک فاصله است. بنابراین روی عمودمنصف PQ و QR واقع است. اگر فاصلهٔ O از RS برابر x باشد، خواهیم داشت:

$$OR = OQ \Rightarrow x^{۲} + ۵^{۲} = (۱۲ - x)^{۲} + ۳^{۲} \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳}$$

۱۰۷. عدد طبیعی N را k- ویژه می‌نامیم، هرگاه مجموع ارقام N به‌علاوهٔ k برابر حاصل‌ضرب ارقام N، برابر با خود عدد N باشد. برای مثال، ۲۹، ۱- ویژه است، چون ۲۹=۹×۲+۹+۲.

الف) همهٔ اعداد دو رقمی ۱- ویژه را پیدا کنید.

ب) ثابت کنید (به روش جبری) که رقم اول همهٔ جواب‌های (الف) یکسان است.

ج) نشان دهید هیچ عدد دو رقمی وجود ندارد که ۲- ویژه باشد.

د) برای چه مقادیری از k، عدد دو رقمی k- ویژه وجود دارد؟

(الف) و (ب) $۱۰a+b=a+b+ab \Rightarrow ۱۰a=a+ab$

$\Rightarrow ۱۰=۱+b \Rightarrow b=۹$

در نتیجه همهٔ اعداد دو رقمی با رقم یکان ۹، ۱- ویژه هستند.

(ج) $۱۰a + b = a + b + ۲ab \Rightarrow ۱۰a = a + ۲ab$

$\Rightarrow ۱۰ = ۱ + ۲b \Rightarrow b = \frac{۹}{۲}$

پس b عددی غیرصحیح است و بنابراین هیچ دورقمی ۲- ویژه‌ای وجود ندارد.

(د) $۱۰a+b=a+b+kab \Rightarrow ۱۰a=a+kab \Rightarrow kb=۹$

$\Rightarrow k=۱,۳,۹$

برای مثال ۱۳، ۳- ویژه و ۱۱، ۹- ویژه است.

۱۰۸. ثابت کنید سه عدد حقیقی گنگ نمی‌توان یافت که مجموع هر دوتای آن‌ها گویا باشد.

(برهان خلف) فرض کنید a، b و c سه عدد گنگ باشند که مجموع هردوتای آن‌ها گویاست. در نتیجه چون: $a + b + c = \frac{۱}{۲}((a + b) + (b + c) + (c + a))$، مجموع آن‌ها عددی گویاست. و چون: a=(a+b+c)-(b+c)، پس a نیز گویاست که تناقض دارد.

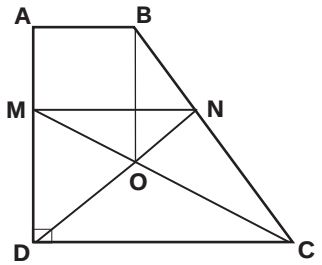
۱۰۹. چهار عدد حقیقی a، b، c و d مفروض‌اند. ثابت کنید حداکثر ۴ زوج مانند {x,y} میان آن‌ها می‌توان یافت، به‌طوری که: ۱<|x-y|<۲. برای ۴ زوج یک مثال از چهار عدد حقیقی پیدا کنید.

گرافی از مرتبهٔ ۴ تعریف می‌کنیم. اعداد a، b، c و d را همان رئوس در نظر بگیرید. اگر دو رأس متناظر با دو عدد با اختلاف بین ۱ تا ۲ بودند، آن دو رأس را به‌هم وصل می‌کنیم. نشان می‌دهیم این گراف مثلث (۳ رأس دوبه‌دو مجاور) ندارد. سه رأس x، y و z را در نظر بگیرید و فرض کنید x<y<z. اگر: ۱<z-y<۲ و ۱<y-x<۲ آن‌گاه: ۲<z-x<۴ که نشان می‌دهد سه رأس دوبه‌دو مجاور وجود ندارند. بنابراین گراف ساخته شده با چهار رأس، هیچ مثلثی ندارد. چنین گرافی حداکثر ۴ یال دارد. (در حالت کلی هر گراف بدون مثلث از مرتبهٔ n، حداکثر $\left[\frac{n^{۲}}{۴}\right]$ یال دارد.)

۱۱۰. (ارائه شده توسط هوشنگ شرقی از اعضای هیئت تحریریه مجله)

در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD، M و N روی AD و BC چنان قرار دارند که MN موازی قاعده‌های ذوزنقه است. اگر O نقطهٔ برخورد DN و CM باشد و BO||AD، ثابت کنید:

$$\frac{AD}{AM} = (\frac{CD}{MN})^{۲}$$



نقطهٔ برخورد BO و امتداد آن را با MN و CD به‌ترتیب P و Q بنامید و از O عمود OH را بر AD رسم کنید. با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث‌های DMN و CDM (OH||MN||CD) نشان دهید: $OH = \frac{MN.CD}{MN + CD}$ و در نتیجه $AB = \frac{MN.CD}{MN + CD}$ (۱) از طرف دیگر داریم:

$$\frac{AD}{AM} = \frac{BQ}{BP} = \frac{CQ}{NP} = \frac{CD - AB}{MN - AB}$$

با جایگذاری AB از رابطهٔ (۱) در تساوی بالا، حکم نتیجه می‌شود.

ایستگاه سوم: لطیفه‌های ریاضی

بعد از چالش با معماهای منطقی، حالا شنیدن چند لطیفه لذت‌بخش است!

لطیفهٔ اول

فقط دو هفته از شروع ترم اول گذشته بود که در کلاس درس حساب دیفرانسیل و انتگرال یک دانشگاه، دانشجویی دستش را بالا برد و پرسید: «استاد، واقعاً در زندگی روزمره، ما چه نیازی به یادگیری این مباحث داریم؟!»

و استاد با لبخند جواب داد: «البته اگر زندگی واقعی شما در همبرگر پیچیدن در یک رستوران زنجیره‌ای خلاصه شود، هیچ نیازی ندارید!»

لطیفهٔ دوم

یک شرکت تجاری و سرمایه‌گذاری بزرگ برای استخدام یک نفر آشنا با ریاضیات و امور مالی، به روزنامه آگهی داد. در پی مراجعهٔ چند نفر و پس از مصاحبه‌های اولیه، سه نفر انتخاب شدند: یک استاد ریاضی محض، یک استاد ریاضی کاربردی، و یک کارشناس حسابداری. برای استخدام نهایی آن‌ها را دعوت کردند تا براساس حقوق پیشنهادی‌شان یک نفر را انتخاب کنند. استاد ریاضی محض حقوق ماهانهٔ سه میلیون تومان را پیشنهاد کرد. استاد ریاضی کاربردی دو برابر این مبلغ، یعنی شش میلیون تومان خواست. وقتی از کارشناس حسابداری سؤال کردند، او گفت که ماهانه ۳۰ میلیون تومان می‌خواهد! رئیس کارگزینی حیرت‌زده از او پرسید: «هیچ می‌دانی که یک استاد ریاضی محض حاضر است با یک‌دهم این حقوق، همین کار را انجام دهد؟!»

کارشناس حسابداری بدون اینکه خود را ببازد و با خونسردی گفت: «چه عالی! پس سیزده و نیم میلیون تومان مال من و سیزده و نیم میلیون تومان مال تو و سه میلیون تومان را هم می‌دهیم به استاد ریاضی محض!»

لطیفهٔ سوم

باز هم یک مجموعه، ولی این‌بار یک مؤسسهٔ آموزشی می‌خواست یک نفر را برای کارهای تحقیقی ریاضی استخدام کند. باز هم سه نفر به مرحلهٔ نهایی رسیدند: اولی استاد ریاضی محض، دومی استاد ریاضی کاربردی و سومی استاد آمار بود. برای آزمون نهایی از آن‌ها پرسیدند که: «$\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳}$ چه می‌شود؟»

استاد ریاضی محض گفت: «۱.» استاد ریاضی کاربردی ماشین‌حساب خود را بیرون آورد و بعد از فشار چند دکمه گفت: «۰/۹۹۹۹۹۹» اما استاد آمار پرسید: «جواب را برای چه می‌خواهید؟»

۱

مصاحبه با دکتر محمدعلی آبام
رئیس کمیتهٔ المپیاد رایانهٔ ایران

المپیاد پلی برای رسیدن به اهداف بعدی است!

مقدمه

در یکی از روزهای پایانی سال ۱۳۹۳، دو تن از اعضای هیئت تحریریهٔ ماه‌نامه، برای گفت‌وگو با یکی از نخبگان این سرزمین راهی «دانشگاه صنعتی شریف» شدند و در طبقهٔ هفتم دانشکدهٔ مهندسی رایانهٔ این دانشگاه، گفت‌وگویی کوتاه، اما صمیمی را با محمدعلی آبام، عضو هیئت علمی این دانشکده و رئیس کمیتهٔ المپیاد رایانهٔ ایران انجام دادند. نکتهٔ جالب توجه آن است که یکی از این دو نفر گفت‌وگوکننده، دکتر محرم نژاد ایردموسی، معلم کلاس‌های آمادگی المپیاد ریاضی دوران دبیرستان آقای آبام بوده است.

محمدعلی آبام در دوران دانش‌آموزی در المپیاد ریاضی کشور شرکت کرد و موفق شد در تیم المپیاد ریاضی کشورمان در المپیاد ۱۹۹۵ کانادا عضو شود.[1] وی از آن رقابت بین‌المللی با مدال برنز به کشور بازگشت. سپس وارد دانشگاه صنعتی شریف شد و در رشتهٔ مهندسی رایانه به ادامهٔ تحصیل پرداخت. آبام پس از اخذ مدرک کارشناسی ارشد برای ادامهٔ تحصیل به کشور هلند عزیمت کرد و در بازگشت به عضویت هیئت علمی همان دانشکده و سپس به ریاست «کمیتهٔ المپیاد کامپیوتر» کشورمان منصوب شد. با هم قسمت اول این مصاحبه را که توسط آقایان هوشنگ شرقی و محرم نژاد ایردموسی، اعضای هیئت تحریریهٔ ماه‌نامهٔ برهان انجام شده است، مرور می‌کنیم.

رشدبرهان: امروز دوشنبه بیست و پنجم اسفندماه ۱۳۹۳، ساعت شش بعدازظهر، در خدمت دکتر محمدعلی آبام، عضو هیئت علمی دانشکدهٔ مهندسی رایانهٔ دانشگاه صنعتی شریف، عضو سابق تیم‌های المپیاد ریاضی کشور و رئیس فعلی کمیتهٔ المپیاد کامپیوتر ایران هستیم. برای شروع مصاحبه اگر موافق باشید، من گریزی به گذشته و حدود ۲۰ سال پیش می‌زنم. در آبان‌ماه ۱۳۷۳ آزمون انتخابی اعضای تیم المپیاد ریاضی ایران (دوازدهمین دوره) برگزار شد که شما یکی از برگزیدگان آن بودید. اعضای آن تیم شش نفر بودند که بعداً در سال ۱۹۹۵ به المپیاد ۱۹۹۵ کانادا اعزام شدند. برای شروع صحبت می‌خواهم به دو نفر از اعضای آن تیم اشاره کنم که اولین آن‌ها زنده‌یاد **رضا صادقی**[2] است. لطفاً اگر خاطره‌ای از ایشان دارید و یا نکتهٔ قابل ذکری هست، بفرمایید.

آبام: من با رضا تا قبل از عضویت در تیم المپیاد آشنایی نداشتم. اما بعداً که از کانادا برگشتیم، من در سفری که به مشهد داشتم، به منزل ایشان در مشهد رفتم و با خانواده‌اش آشنا شدم. خانواده‌اش، خانواده‌ای متوسط و فرهنگی (پدر و مادرش هر دو معلم بودند)، اهل مشهد و ساکن آنجا بود. نکتهٔ قابل توجهی که در مورد شخصیت او می‌توانم بگویم، هوش استثنایی‌اش بود. به جرئت می‌توانم بگویم که هیچ‌یک از اعضای تیم باهوش‌تر از او نبودند. در دوره‌های آمادگی، مسائلی را حل می‌کرد که حتی خانم **مریم میرزاخانی** هم نمی‌توانست حل کند. در این زمینه خاطرهٔ جالبی هم دارم:

«بعد از انتخاب تیم نهایی المپیاد، و در دوره‌های آمادگی قبل از اعزام به کانادا، امتحان‌های متفاوتی از ما گرفته می‌شد. در یکی از این امتحان‌ها مسئله‌ای داده بودند که خلاصهٔ آن چنین بود که با این چهار شرط، آیا عدد $n>n_0$ وجود دارد که در این شرایط صدق کند، یا خیر. من خودم ضمن حل مسئله، به یکی از شروط توجه نکردم و در نهایت نتیجه گرفتم

چنین عددی برای n وجود دارد و آن را به‌دست آوردم. بعد ورقه‌ام را دادم و بیرون رفتم و رضا را دیدم و دربارهٔ آن مسئله بحث کردیم. به او گفتم که من این عدد را پیـدا کرده‌ام. رضا گفت نه چنین عددی وجود ندارد و اثبـات خودش را که کاملاً دقیق و منطقی بود، به من گفت و ثابت کرد که n وجود ندارد.

بعداً که بقیهٔ بچه‌هـا آمدند، همه به اتفاق گفتند که عدد n را به‌دسـت آورده‌اند! حتی خانم میرزاخانی هم با اطمینان همین را می‌گفت، اما من و رضا به هم نگاه می‌کردیم و فقط می‌خندیدیم! فقط یک نفر به‌نام **محمد جواهری** که از استان کردستان آمده بود، ثابت کـرده بود که n وجود نـدارد، ولی جرئت نمی‌کرد که نظرش را بگوید. بعداً که مسئله حل شد، فهمیدیم نظر رضا درسـت بوده اسـت. روز شنبه که همه آمدیم، به خانم میرزاخانی هم گفتیم که راه‌حل او هم نادرسـت بوده است و n به‌دست نمی‌آید.

رشدبرهان: اتفاقـاً دومین فردی که از اعضای آن تیم مدنظر من بود، همین خانم مریم میرزاخانی بود... .

آبام: در مورد رضا گفتم که نقطهٔ مثبت او هوشـش بود، اما نقطهٔ مثبت خانم میرزاخانی، تلاش و پشتکارش بـود. در آن زمان دورهٔ آمادگی ما در همین دانشـگاه شریف، و در دانشکدهٔ ریاضی برگزار می‌شد...

رشدبرهان: سرپرسـت دوره، آقـای دکتر **تابش** بودند؟

آبـام: بلـه و چـون کلاس‌هـا در دانشـکدهٔ ریاضی تشکیل می‌شد، ما می‌توانستیم در کلاس‌های ریاضی دانشگاه هم شرکت کنیم. در ساعت‌های تفریح که ما می‌رفتیم دنبال گـردش و یا فوتبال، خانم میرزاخانی در کلاس‌هـای ریاضی دانشـگاه شـرکت می‌کرد! از جمع ما پسـرها فقط آقای **کیـوان ملاحی** گاهی در این کلاس‌ها شـرکت می‌کرد. همیشه هر وقت که ما خانم میرزاخانی را می‌دیدیم، چشم‌هایش نشان می‌داد که دیشـب تا دیروقت روی مسائل کار می‌کرده است. البته تک‌بعدی هم نبود و مثلاً بعدها در دانشگاه، نمرهٔ درس تربیت‌بدنـی‌اش بالای ۱۹ بـود. اما واقعیتش را بخواهید، ما این‌طور نبودیم. او در عین سخت‌کوشـی، اصلاً خودش را نمی‌گرفت و متواضع بود. البته باهوش هـم بود، ولی رضا باهوش‌تر بـود. رضا بازیگوش بود و خیلی برای ریاضیات وقت نمی‌گذاشت.

رشدبرهان: در مسابقهٔ نهایی (۱۹۹۵ کانادا)، مریم مدال طلا و رضا نقره گرفت؟

محمدعلی آبام در دوران دانش‌آموزی در المپیاد ریاضی کشور شرکت کرد و موفق شد در تیم المپیاد ریاضی کشورمان در المپیاد ۱۹۹۵ کانادا عضو شود. وی از آن رقابت بین‌المللی با مدال برنز به کشور بازگشت

آبـام: رضا هم طلا گرفت، اما طلای خانم میرزاخانی کامل بود و طلای رضا صادقی، طلای آخر بود! کسانی کـه نمره‌ای بین ۳۷ تا ۴۲ بگیرند، مدال طلا کسـب می‌کننـد. خانم میرزاخانی نمـرهٔ ۴۲ و رضا نمرهٔ ۳۷ گرفت.

رشدبرهان: و شما هم که مدال برنز گرفتید.

آبام: بله.

رشدبرهان: نمرهٔ هندسه را کامل گرفتید، اما نمرهٔ نامساوی را نگرفتید!

آبـام: بله نمرهٔ نامسـاوی را به‌طور کامل از دسـت دادم. البته توی دوره که بودیم، یک نامساوی دادند که جایزه‌اش هم یک بستنی بود! و من آن نامساوی را حل کردم. این نامسـاوی شـبیه بـه همان بود و اگر کمی با دقت فکر کرده بودم، می‌توانستم حلش کنم. اما متأسفانه راه‌حلی که داشتم و فکر می‌کردم به جواب می‌رسد، نزدیک یک ساعت وقتم را گرفت و به جواب نرسـید و کم‌کم استرس هم بر من غالب شـد و در نتیجه مجبور شدم که آن را کنار بگذارم.

از راست به چپ:
هوشنگ شرقی،
محرم نژاد ایرد موسی،
دکتر محمدعلی آبام

اما راه‌حلی برای مسئلهٔ هندسه ارائه دادم که بعدها دکتر **کرم‌زاده** به من گفت جزو بهترین راه‌حل‌ها شناخته شد و می‌خواستند به‌خاطر آن، جایزهٔ ویژه را به من بدهند، ولی چون مدال برنز گرفته بودم، آن را به من ندادند.

رشدبرهان: انگیزه‌تان از رفتن به سمت المپیاد ریاضی چه بود؟

آبام: واقعیت این است که من تاحدود زیادی به دنبال‌یافتن راهی برای رفتن به دانشگاه بودم و به‌همین خاطر وقتی مدال طلای کشوری را گرفتم و رفتنم به دانشگاه تضمین شد، تاحدودی انگیزه‌ام را از دست دادم. در حالی‌که تا قبل از آن روزی یازده دوازده ساعت کار می‌کردم و مسئله‌های گوناگون ریاضی را حل می‌کردم. اما خانم میرزاخانی این‌طور نبود و برای او مدال طلای المپیاد ریاضی تازه قدم اول بود!

رشدبرهان: آیا ورود بدون کنکور به دانشگاه می‌تواند امروزه به یک دانش‌آموز برای شرکت در المپیاد انگیزه بدهد؟ آیا کنکور دادن آسان‌تر نیست؟

آبام: بله، الان این‌طور است، ولی زمان ما کنکور دشوارتر بود. البته به لحاظ علمی هم وضع ما خوب بود و این‌طور هم نبود که بی‌گدار به آب زده باشیم. یادم هست که وقتی سال سوم بودیم و من در اولین المپیاد ریاضی خودم شرکت کردم، در مرحلهٔ اول قبول نشدم و چون قبل از آن خیلی تلاش کرده بودم، از این موضوع خیلی سرخورده شدم و تصمیم گرفتم المپیاد را کنار بگذارم. اما بعداً که با مدیر دبیرستان (نمونه رشد)، آقای **زندیه** و با آقای **ایردموسی** مشورت کردیم ـ ما سه نفر بودیم: من، آقای **کثیری** و آقای **شکری** ـ تصمیم گرفتیم المپیاد ریاضی را ادامه دهیم و در سال چهارم در کلاس‌های درس شرکت نکنیم و فقط به المپیاد ریاضی بپردازیم. البته ریسک بالایی داشت و خب احتمال آنکه جزو نه یا ده نفری باشیم که مدال طلا می‌گیرند و از کنکور معاف می‌شوند، خیلی کم بود. الان اگر کسی بخواهد این کار را بکند، من اصلاً چنین توصیه‌ای به او نمی‌کنم، ولی ما این کار را کردیم. ما تاحدودی هم به خودمان اطمینان داشتیم، چون خیلی کار کرده بودیم.

به‌هر حال از تابستان همان سال زیرنظر آقای ایردموسی شروع به‌کار کردیم، تا در آزمون مرحلهٔ اول قبول و در آزمون مرحلهٔ دوم هم، من فکر می‌کنم نفر سوم شدم. از ۴۲ نمرهٔ آزمون، خانم میرزاخانی (که سابقهٔ عضویت در تیم سال قبل را هم داشت) نمرهٔ ۳۵/۲، زنده‌یاد رضا صادقی نمرهٔ ۳۵ و من نمرهٔ ۳۴/۵ گرفته بودم.

رشدبرهان: اصل سؤال من در واقع این بود که اگر ما امروز بخواهیم به دانش‌آموزی انگیزه بدهیم که به دنبال المپیاد برود، با توجه به اینکه شما خودتان المپیادی بوده‌اید و امروز هم سرپرست تیم المپیاد رایانه هستید، به‌نظر شما چه‌طور می‌توانیم این کار را بکنیم؟

اعضای تیم المپیاد ریاضی ایران تورنتو کانادا (۱۹۹۵)

مریم میرزاخانی از همان اول، هدفش مشخص بود. شک نداشت که می‌خواهد در رشته ریاضی تحصیل کند و ریاضی‌دان شود

آبام: در مورد خودم گفتم که در آن دوره انگیزه‌ام دورزدن کنکور بود. در دورهٔ کارشناسی و کارشناسی ارشد هم آن کارها کمک زیادی به من نکرد، چون اهل تحقیق نبودم و باید تعدادی درس (واحد) را می‌گذراندم که این کار را به‌سادگی انجام دادم. اما وقتی وارد دورهٔ دکترا شدم، تجربهٔ المپیاد خیلی به من کمک کرد. در واقع ذهنم آمادهٔ کار تحقیقی بود و سابقه و زمینهٔ این کار را داشتم. از ایده‌هایی استفاده می‌کردم که تقریباً همان ایده‌هایی بودند که در مرحلهٔ المپیاد از آن‌ها استفاده کرده بودم. مثلاً استاد خودم که رشته‌اش رایانه بود و دانش ریاضی خیلی قوی نداشت، مسئله‌ای را به من داد که خودش سال‌ها نتوانسته بود حل کند. اما من که تجربهٔ المپیادی داشتم، توانستم در مدت دو سه هفته آن را حل کنم. او همیشه به این موضوع به مناسبت‌های متفاوت اشاره می‌کرد.

وقتی شما می‌خواهید مسئله‌ای را حل کنید، باید ایده‌های قبلی داشته باشید و از همان‌ها استفاده کنید و یا حداکثر آن‌ها را ارتقا دهید. اما اینکه بخواهید ایدهٔ جدیدی ابداع کنید، معمولاً کار سخت و یا غیرممکنی است. هر قدر در حوزه‌های مختلف مسائل متنوعی را دیده باشید، توانایی برخورد با مسائل جدید در شما افزایش می‌یابد.

رشدبرهان: به‌عبارت دیگر می‌توان گفت که دانش‌آموز المپیادی به لحاظ توانمندی و یا داشتن یک پایهٔ خوب برای آینده‌ای دوردست، بر دیگران مزیت دارد...

آبام: بله باید آینده‌نگر باشند. خب هدف ما از برگزاری المپیاد رایانه چیست؟ اولاً خود مسابقه جاذبهٔ خوبی دارد. ثانیاً اینکه دانش‌آموزان مستعد جذب دانش رایانه شوند. المپیاد رایانه بهانه‌ای برای این منظور است. یکی از اهداف برگزاری المپیاد در هر رشته‌ای جذب دانش‌آموزان مستعد به سمت آن رشته است و دانش‌آموزان کم‌کم متوجه اهمیت این کارها می‌شوند. اما مثلاً خانم میرزاخانی از همان اول هدفش مشخص بود. شک نداشت که می‌خواهد در رشتهٔ ریاضی تحصیل کند و از ابتدا می‌خواست ریاضی‌دان شود. مسیر مشخصی داشت و المپیاد در واقع پلی برای رسیدن به اهداف بعدی‌اش بود. اصلاً هدفش دور زدن کنکور و این حرف‌ها نبود و خب نتیجه‌اش را هم دید. هرچه اهداف انسان عمیق‌تر باشند، نتایج بهتری هم به‌دست می‌آید. مثلاً من هدفم فقط ورود به دانشگاه بود و دوردست‌تر را نمی‌دیدم، در نتیجه وقتی مدال طلای کشور را گرفتم و از کنکور معاف شدم، تقریباً انگیزه‌ام را از دست دادم و به‌همین دلیل در المپیاد جهانی نتیجهٔ خیلی خوبی نگرفتم.

رشدبرهان: شما که این همه در ریاضی فعال بودید، چه‌طور شد که به رشتهٔ رایانه رفتید؟

آبام: واقعیت این است که اطرافیان در انتخاب رشتهٔ دانشگاهی خیلی مؤثرند. آن موقع هم، جوّ غالب در مورد انتخاب رشته، جوّ رایانه بود، و خیلی از نخبگان، رشتهٔ رایانه را به‌عنوان انتخاب اول در نظر می‌گرفتند. اما من بین ریاضی و رایانه مردد بودم و از رایانه وحشت داشتم، چون فکر می‌کردم توانایی برنامه‌نویسی رایانه را ندارم. حتی وقتی هم که انتخاب رشته کردم و وارد دانشگاه شدم، تا سال اول هنوز مردد بودم که آیا انتخاب درستی کرده‌ام یا نه. اما بعداً دیدم که یک رشتهٔ محض دانشگاهی به‌نام «علوم رایانه» یا «computer science» داریم که پس‌زمینهٔ ریاضی دارد و مطالب و بحث‌های خیلی جالبی هم در آن مطرح می‌شود که با ایده‌های ریاضی سروکار دارد و به لحاظ علمی هم اقناع شدم. این رشته مباحث محض علمی هم دارد، ولی به اندازهٔ ریاضی، محض نیست. مثلاً در طراحی الگوریتم‌های مرتبط با حرکات روبات‌ها، مباحثی از هندسه مطرح می‌شود که بسیار جالب هستند و ارتباط نزدیکی هم با ریاضیات دارند. این بحث‌ها مرا کاملاً جذب خود کرد و باعث شد که احساس کنم، انتخاب درستی کرده‌ام.

اعضای تیم المپیاد ریاضی ایران (۱۹۹۵) «نفر اول سمت راست مریم میرزاخانی و نفر اول سمت چپ محمدعلی آبام می‌باشند.

پی‌نوشت‌ها

۱. اعضای تیم المپیاد کشورمان در المپیاد ریاضی ۱۹۹۵ کانادا عبارت بودند از آقایان: رضا صادقی، محمدعلی آبام، محمد جواهری، حسین زیوری پیران، کیوان ملاحی کارای، و خانم مریم میرزاخانی

۲. در اسفند ۱۳۷۶، اتوبوس حامل دانشجویان ریاضی شرکت‌کننده در بیست‌ودومین مسابقهٔ ریاضی کشور، هنگام بازگشت ازشهر اهواز، در یک سانحهٔ رانندگی به دره سقوط کرد و متأسفانه شش تن از دانشجویان نخبهٔ ریاضی که اغلب از برگزیدگان المپیادهای ریاضی بودند به نام‌های فرید کابلی، مرتضی‌رضایی، آرمان بهرامیان، علی حیدری منفرد، علیرضا سایه‌بان، رضا صادقی و دکتر مجتبی لطفی‌زاده مهرآبادی در این سانحه جان باختند.

آسیه رضائی‌گرجی
دبیر ریاضی شهرستان کرج

استدلال

مقدمه

ارسطو **کشف کرد که تمام فعالیت‌های ذهن بشر، علی‌رغم گستردگی و پیچیدگی آن، یا برای این است که تصورات مجهول را با اندوخته‌های تصوری‌اش روشن کند، و یا برای آن است که احکام و قضیه‌ها را آن‌گونه سازمان‌دهی کند که به نتایج جدید برسد و این یعنی «استدلال».**

شیوهٔ دیگر تفکر، استدلال است؛ نعمتی که خداوند بلندمرتبه از ابتدای زندگی انسان در اختیار او قرار داد. نوزاد به تدریج صداهای مختلف را می‌شنود، به اطراف خود می‌نگرد، پدر، مادر و اطرافیان خود را می‌بیند و... این احساسات بر اثر تکرار روی او تأثیر می‌گذارند و در ذهن او باقی می‌مانند.

استدلال کردن و دلیل آوردن عالی‌ترین فعالیت ذهن بشر است. بشر از همان دوران کودکی، پیش از آنکه چیزی را از جایی بیاموزد، با توجه به اطلاعاتی که در اختیار دارد، برای کارهایی که انجام می‌دهد دلیل می‌آورد و با طی‌کردن مسیر تکاملی لازم، می‌تواند استدلال‌های قوی‌تر و پیچیده‌تری را انجام دهد. بنابراین، استدلال فعالیت طبیعی ذهن آدمی است، اما گاهی در روند دلیل آوردن دچار اشتباهاتی می‌شویم که با شناخت دقیق استدلال، می‌توان از اشتباهات کاست و به بهره‌برداری سریع‌تر، درست‌تر و آسان‌تر دست یافت.

در تدریس درس‌هایی مانند «جبر و احتمال» و «هندسه»، مفاهیم مربوط به استدلال مطرح می‌شوند و در حین تدریس سؤالاتی برای دانش‌آموزان پیش می‌آید. بهتر دیدم که برای آشنایی آنان از کتاب‌های گوناگون منطق موجود استفاده کنم و این مفاهیم را برای آنان روشن سازم. به‌دلیل شیوا بودن و بی‌نقص بودن جملات موجود در این کتاب‌ها، سعی کردم که از جملات این کتاب‌ها غالباً بدون تغییر استفاده کنم. فهرست این کتاب‌ها را در پایان مقاله زیر عنوان منابع آورده‌ام.

تعریف استدلال

استدلال آن چیزی است که ذهن انسان در برخورد با دنیای اطراف خود انجام می‌دهد و پاسخ «چراهایی» است که برای او پیش می‌آید. تمام پیشرفت‌های علمی، اجتماعی، فلسفی و دینی به استدلال وابسته‌اند و تابع قوانینی هستند که ذهن انسان به‌طور طبیعی آن‌ها را به کار می‌برد. علم و ادراک انسان به دو دستهٔ «تصور» و «تصدیق» تقسیم می‌شود. نام دیگر تصدیق «قضیه» است. محتوای قضیه ممکن است از راه‌های گوناگونی چون احساس، تجربه، حدس علمی و قرارداد به‌دست آید.

استدلال عبارت‌است از: ترکیب قانونمند قضایای معلوم برای رسیدن به قضیهٔ جدید.

اقسام استدلال

انسان برای رسیدن به معلومات جدید معمولاً از سه نوع استدلال استفاده می‌کند: ۱. تمثیل؛ ۲. استقرا؛ ۳. قیاس.

۱. تمثیل

تمثیل در لغت به‌معنای مثال آوردن و یا تشبیه کردن چیزی به چیزی دیگر است. در تمثیل، حکمی را برای چیزی از راه شباهت آن چیز با چیز دیگر معلوم می‌کنند. به‌عبارت دیگر، وقتی دو چیز وجه اشتراک و یا وجه شباهتی داشته باشند، حکم می‌کنیم که در نتیجهٔ آن وجه اشتراک همانند خواهند بود. بنابراین، تمثیل نوعی استدلال است که در آن فقط به دلیل تشابهی که میان دو موضوع وجود دارد، حکم یکی را به دیگری نسبت می‌دهیم.

نخستین استدلال‌های کودکان از راه تمثیل است. استدلال تمثیلی در بسیاری از موارد مفید است، اما استدلال قابل اطمینانی نیست. زیرا گاهی وقت‌ها ممکن است نتایج غلطی به‌دست آید. در ادامه مثال‌هایی مطرح شده‌اند که بعضی از آن‌ها نتایج درستی نخواهند داشت:

۱. «چون آب و هوای کرهٔ مریخ مانند آب و هوای زمین است، حکم می‌کنیم مریخ هم مانند زمین دارای حیات است.»

۲. «چون دارویی روی میمون اثر خوبی دارد، حکم می‌کنیم که روی انسان نیز اثر خوبی دارد.»

۳. با فرض طبیعی بودن m و n به سادگی داریم: $a^m.a^n=a^{m+n}$ و حکم می‌کنیم:

$$\sqrt{a}.\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{a^7}$$

استدلال استقرایی، استدلالی است که در آن با مشاهده چند مورد جزئی، یک حکم کلی نتیجه می‌شود

مثال دیگری در زمینهٔ ریاضیات مطرح می‌کنیم و با اســتفاده از این استدلال به بررسی آن می‌پردازیم: می‌دانیم که «منفی ضرب در منفی» همواره مثبت اســت. برای اثبات، اگر شخصی عقب عقب راه برود که یک عمل منفی اســت و از او فیلم‌برداری کنیم، سپس فیلم را به صورت عقب‌عقب نشــان دهیم که این هم عملی منفی اســت، می‌بینیم که شخص به جلو حرکت می‌کند که یک عمل مثبت است.

بیشترین و مفیدترین استفاده از استدلال تمثیلی در امر آموزش، محاوره، شــعر و ادبیات است. بنابراین افرادی که در امر آموزش قرار می‌گیرند، تلاش می‌کنند با استفاده از تمثیل مطالب را بهتر و ساده‌تر به‌طرف مقابل خود انتقال و یا آموزش دهند.

تمثیل یعنی ســرایت دادن یک موضوع به موضوع دیگر، به‌دلیل مشابهت آن دو با هم.

در علوم تجربی نیز اســتدلال تمثیلی در القای فرضیه به ذهن عالِم حائز اهمیت اســت. برای مثال، **پاستور** متوجه شد که تخمیر مشروبات الکلی به‌سبب موجودات ریز جان‌دار است. او از راه تمثیل به این فرض رســید که ممکن اســت علــت بیماری‌های عفونی نیز ذرات ریز جان‌داری باشــد و با آزمایش‌های متعدد فرض خود را به اثبات رساند.

استقرا

اســتقرا در لغت به‌معنای جســت‌وجو و کاوش اســت. استدلال استقرایی، استدلالی است که در آن با مشاهدهٔ چند مورد جزئی، یک حکم کلی نتیجه می‌شــود؛ یعنی در آن ذهن انسان از جزئی به کلی سیر می‌کند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

- انسان در چند مورد جزئی آب را حرارت می‌دهد و می‌بیند که آب در صــد درجه به جوش می‌آید. نتیجه می‌گیرد که هر آبی در صد درجه به جوش می‌آید.
- تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید:

۱+۳=۴ و ۱+۳+۵=۹ و ۱+۳+۵+۷=۱۶

فــرد با دیدن این چند مورد جزئی نتیجــه می‌گیرد که مجموع تعدادی عدد فرد متوالی با شروع از ۱، برابر است با مربع تعداد آن‌ها.

بنابرایــن نتیجهٔ یک اســتقرا به‌طور حتم یک قضیهٔ کلی اســت.

استقرا بر دو قسم است:

۱. استقرای ناقص(ضعیف)؛ ۲. استقرای تام (قوی)

۱. استقرای ناقص (ضعیف)

افراد و یا چیزهایی که مورد استدلال قرار می‌گیرند، نامحدودند. ما در این اســتدلال، اگر تعدادی از آن‌ها را متصف به صفتی بیابیم و

آن‌گاه این حکم را تعمیم دهیم و بگوییم کل دارای این صفت است، از استدلال استقرایی ناقص استفاده کرده‌ایم. بنابراین در استقرای ناقص برخی از موارد جزئی را می‌آزمایند و سپس نتیجهٔ به‌دست آمده را به کل موارد سرایت می‌دهند.

در ریاضیات، فرض کنید P(n) ویژگی مشخصی (یا حکم یا گزاره‌ای) در مورد عدد طبیعی (یا حسابی) n باشد؛ برای مثال: $P(n): 2^n \geq n$. این عبارت یعنی P(n) به معنی $2^n \geq n$ باشد.

در ریاضیات این استدلال تحت‌عنوان اصل استقرای ضعیف مطرح می‌شود و به کار می‌رود. در اینجا به بیان این اصل می‌پردازیم:

اصل استقرای ضعیف: اگر m عددی صحیح و P(n) ویژگی مشخصی (یا حکم یا گزاره‌ای) در مورد عدد طبیعی (یا حسابی) n باشد به‌طوری که:

الف) P(m) برقرار است.

ب) اگر $k \geq m$ و P(k) برقرار باشد، آن‌گاه P(k+1) برقرار است.

در این صورت به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$، P(n) برقرار است.

به‌طور معمول m را ابتدای استقرا می‌نامند. در اکثر مسائل m=۱ است و مایلیم برای هر عدد طبیعی n برقراری P(n) را ثابت کنیم. با توجه به اصل استقرای ضعیف دو چیز باید ثابت شود:

۱. برقراری P(۱)؛

۲. نتیجه‌گیری P(k+1) از P(k).

در اصل فوق P(k) را «فرض استقرا» می‌نامند و P(k+1) را «حکم استقرا» می‌نامند. برای اثبات بخش (۲)، معمولاً برقراری P(k) را فرض می‌گیرند و P(k+1) را از آن طی مراحلی و با تمهیداتی نتیجه می‌گیرند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

- دانشمندان دارویی را در چند مورد آزمایش می‌کنند و هنگامی که اثر شفابخش آن را می‌بینند، حکم کلی می‌کنند که آن دارو برای درمان این بیماری مفید است.
- سگ، گربه، خرگوش، شتر، انسان و... هنگام جویدن خوراک، فک زیرین خود را حرکت می‌دهند. سپس این حکم را به نحو کلی عمومیت می‌بخشیم و می‌گوییم: «همهٔ حیوانات هنگام خوردن، فک پایین خود را حرکت می‌دهند.»

دربارهٔ مثال دوم از لحاظ منطقی می‌توان گفت که ممکن است طبیعت استثناهایی داشته باشد و حکم کلی ما درست نباشد. این نوع استدلال کاربرد فراوانی در علوم‌تجربی و ریاضیات دارد و مبنای اعتماد به علوم‌تجربی است. در مثال زیر کاربرد استقرای ضعیف در ریاضیات را مشاهده می‌کنید:

$$۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$P(n): ۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$P(۱): ۱=\frac{۱(۱+۱)}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱$$

$$P(k): ۱+۲+۳+...+k=\frac{k(k+۱)}{۲} \quad \text{(فرض استقرا)}$$

$$P(k+۱): ۱+۲+۳+...+(k+۱) \quad \text{(حکم استقرا)}$$
$$=\frac{(k+۱)((k+۱)+۱)}{۲}$$
$$=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

می‌خواهیم از درستی P(k) درستی P(k+۱) را نتیجه بگیریم. برای این منظور به طرفین برابری فرض عبارت (k+۱) را اضافه می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{اثبات}: \underbrace{۱+۲+۳+...+k}_{\text{طبق فرض استقراء}}+(k+۱)=\frac{k(k+۱)}{۲}+(k+۱)$$
$$=\frac{k(k+۱)+۲(k+۱)}{۲}$$
$$=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

استقرای قهقرایی: این استقرا برگرفته از استقرای ضعیف است. گاهی به سادگی می‌توان از P(k+۱) برقراری P(k) را نتیجه گرفت و ثابت کرد که مجموعهٔ kهایی که P(k) برقرار است، نامتناهی است.

اصل استقرای قهقرایی: فرض کنید P(n) به ازای $n \geq m$ تعریف شده باشد و:

الف) به ازای هر $n \geq m$ اگر P(n) آن‌گاه P(n-۱)؛

ب) مجموعه nهایی که P(n) برقرار است، نامتناهی است.

در این صورت به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$، P(n) برقرار است.

۲. استقرای تام (قوی)

اگر افراد و یا چیزهایی که مورد استدلال قرار می‌گیرند، محصور و معدود باشند و هر یک جداجدا مورد بررسی قرار گرفته باشند و پس از آن حکم کلی صادر شود، استدلال از نوع تام است. دو مثال زیر نمونه‌هایی از کاربرد استدلال استقرای تام است:

- مدار یک‌یکِ ستارگان منظومهٔ شمسی را ملاحظه می‌کنیم و می‌بینیم که بیضی است. آن‌گاه حکم می‌کنیم که همهٔ ستارگان منظومهٔ شمسی دارای مدار بیضی‌اند.

● معلم در کلاس از یک یکِ دانش‌آموزان می‌پرسد که آیا تمرین خود را حل کرده‌اند یا نه، و چون می‌بینند که همه حل کرده‌اند، اعلام می‌کند که «همه تمرین خود را حل کرده‌اند».

این نوع استقرا نتیجهٔ درستی دارد، اما به‌دلیل محدود و کوچک بودن موضوعات کاربرد چندانی ندارد. در ریاضیات نیز گاهی اوقات نتیجه‌گیری $P(k+1)$ تنها با استفاده از $P(k)$ ممکن نیست، بلکه می‌توان از برقراری $P(m)$ تا $P(k)$ نتیجه گرفت که $P(k+1)$ برقرار است.

مانند استقرای ضعیف، اصلی به نام اصل استقرای قوی مطرح می‌شود:

اصل استقرای قوی: اگر m عددی صحیح و $P(n)$ ویژگی مشخصی (یا حکم یا گزاره‌ای) در مورد عدد طبیعی (یا حسابی) n باشد، به‌طوری که:

الف) $P(m)$ برقرار است.

ب) اگر $k \geq m$ و اگر $P(m)$، $P(m+1)$، ... و $P(k)$ برقرار باشند، آن‌گاه $P(k+1)$ برقرار است.

در این صورت به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$، $P(n)$ برقرار است.

قیاس

قیاس مهم‌ترین و قاطع‌ترین شکل استدلال و تنها راه رسیدن به یقین است. این استدلال از کلی به جزئی و مرکب است از حداقل دو قضیه، به نحوی که با دانستن درستی آن دو قضیه، بدون هیچ تردیدی قضیهٔ دیگری به‌نام نتیجه به‌دست می‌آید. قیاس مجموع قضایایی است که هرگاه آن‌ها را قبول کنیم، ناچار باید نتیجهٔ آن‌ها را نیز قبول کنیم؛ چون در غیر این‌صورت گرفتار تناقض خواهیم شد. این نوع استدلال در کتاب‌های جبر و احتمال سال سوم ریاضی، هندسهٔ ۱ و هندسهٔ ۲ زیرعنوان «**استدلال استنتاجی**» مطرح شده است. مشهورترین مثال‌هایی که در منطق دربارهٔ قیاس مطرح می‌شوند، مثال‌های زیر هستند:

● سقراط انسان است، هر انسان فانی است، پس سقراط فانی است.

● هوا جسم است، هر جسمی جرم و وزن دارد، پس هوا جرم و وزن دارد.

بنابراین می‌توانیم استدلال قیاسی را به این صورت تعریف کنیم: «استدلال قیاسی، استدلالی است از کلی به جزئی که اگر مقدمات آن صادق باشد، نتیجهٔ به‌دست آمده حتماً صادق است.»

قیاس دو جنبه دارد: یکی صورت و دیگری ماده. منظور از صورت قیاس، همان قالب‌های منطقی است که شکل و چارچوب استدلال را تشکیل می‌دهند که از این نظر مانند ریاضیات است. برای مثال، فرمول‌ها و روابط ریاضی که در مسائل ظاهر می‌شوند، همان قالب و صورت هستند. اما منظور از ماده در قیاس، مقادیری است که به‌جای متغیرها و مجهولات در معادلات و روابط قرار می‌دهیم. برای مثال، تابع $f(x)=2x-1$ را در نظر بگیرید. این رابطه همان قالب و صورت است و مقادیری که به‌جای x گذاشته می‌شوند، همان مادهٔ این صورت نام دارند. در کل می‌توانیم یکی از مهم‌ترین صورت‌های قیاس را که شکل اول قیاس نام دارد، به این‌صورت بیان کنیم: «هر الف ب است و هر ب پ است، پس هر الف پ است.»

ماده چیزی است که جای الف، ب و ج گذاشته می‌شود که می‌تواند انسان، فانی، هوا و... باشد. در محاوره و در آثار ادبی، غالباً قیاس به معنی تمثیل به‌کار می‌رود؛ مانند اینکه: هر انسانی ناطق است، هر ناطقی میرنده است، پس هر انسانی میرنده است.

همچنان که در ریاضی «$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$» قالب و شکل است و مقادیری که به‌جای a و b گذاشته می‌شوند، مادهٔ آن صورت نام دارند؛ برای مثال: $(2+3)^2=4+9+12=25$.

*** منابع**

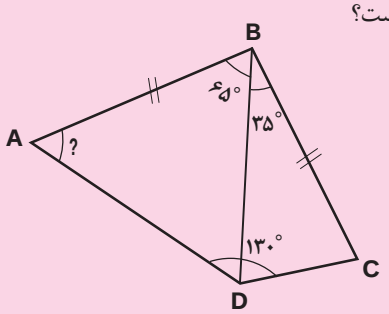
۱. خوانساری، محمد (۱۳۸۳). منطق صوری. آگاه.
۲. مظفر، محمدرضا (۱۳۹۲). منطق. دارالعلم.
۳. عالمی، روح‌الله (۱۳۹۲). منطق. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی.
۴. بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۶). مباحثی در ریاضیات گسسته. مبتکران.

پرسش‌های پیکارجو!

در شکل مقابل داریم:

$AB=BC$، $A\hat{D}C=130^\circ$، $A\hat{B}D=65^\circ$ و $C\hat{B}D=35^\circ$.

اندازهٔ $B\hat{A}D$ چند درجه است؟



الف) 60°

ب) 57°

ج) $57/5^\circ$

د) $67/5^\circ$

هـ) 55°

احسان یارمحمدی

روش سریع تراختِنبِرگ در حساب

- **مؤلف:** یاکوف تراختِنبِرگ[1]
- **مترجمان به انگلیسی:** آن کاتلِر[2] و رودولف مَکَ شَین[3]
- **مترجم به فارسی:** محمد باقری
- **تعداد صفحات:** ۳۱۲
- **ناشران:** دانشمند (چاپ اول: ۱۳۷۱، چاپ دوم: ۱۳۷۱ و چاپ سوم: ۱۳۷۳) و فرهنگان (چاپ چهارم: ۱۳۷۷)

روش تراختنبرگ که خیلی آسان‌تر از حساب معمولی است، به افراد عادی که هیچ سروکاری با ریاضیات نداشته‌اند، امکان دستیابی به چنان نتایجی را می‌دهد که عموماً از نوابغ ریاضی انتظار می‌رود

«نگاه کن و بپرس؛ دوست بدار و گذشت کن؛ یاد بگیر و پیش برو.»
یاکوف تراختِنبِرگ (۱۸۸۸-۱۹۵۱)

آموزگار پسربچهٔ نه‌ساله‌ای را که با گام‌های استوار راه می‌رفت، به‌سوی تختهٔ سیاهی که رویش ستونی از اعداد به ارتفاع یک متر نوشته شده بود، فراخواند. پسرک برای آنکه قدش به اعداد بالایی برسد، روی پنجهٔ پا بلند شد و مجموع آن‌ها را با سرعت برق به‌دست آورد. از دخترکی با گیس‌های روبان بسته شده خواسته شد که حاصل‌ضرب ۷۳۵۳۵۲۳۱۴ در ۱۱ را پیدا کند. او جواب درست را ـ که ۸۰۸۸۸۷۵۴۵۴ باشد ـ در زمانی کوتاه‌تر از زمان لازم برای بر زبان آوردن عبارت «جدول ضرب اعداد»، یافت. به پسربچهٔ لاغراندامی که عینک قاب نقره‌ای به چشم داشت، گفته شد ۵۱۳۲۴۳۷۲۰۱ را در ۴۵۲۷۳۶۵۰۲۷۸۵ ضرب کند. پسرک فوراً کار را آغاز و جواب ۲۳۲۳۶۴۱۶۶۹۱۴۴۳۷۴۱۰۴۷۸۵ را در هفتاد ثانیه محاسبه کرد.

اینجا کلاسی بود که در آن روش ریاضی «تراختِنبِرگ» تدریس می‌شد. آنچه این نمایش شعبده‌بازی ریاضی را شگفت‌انگیزتر می‌کرد، این بود که کودکان مزبور کسانی بودند که بارها در درس حساب رد شده بودند، تا آنکه بالاخره والدینشان در عین ناامیدی آن‌ها را برای یاد گرفتن این روش فرستاده بودند. روش تراختِنبِرگ، افزون‌بر سریع بودن، ساده هم هست. با فراگرفتن دستورهای آن، انجام محاسبات برق‌آسا، به راحتی قصه خواندن خواهد بود. ظاهراً این کار نوعی جادوگری است، ولی دستورهای مذکور از پایهٔ منطقی استواری برخوردارند. تراختِنبِرگ کودکان را دوست داشت و شیوهٔ جدید و سادهٔ خود را برای انجام عملیات حساب نخستین‌بار به آنان آموخت. او همواره بر این اعتقاد بود که هر انسانی با هوش سرشار زاده می‌شود و حالا می‌خواست این نظر را ثابت کند. تعمداً کودکانی را برای این کار برگزید که در مدرسه تنبل به‌شمار می‌آمدند. این بچه‌ها، عموماً وامانده، خجالتی و گوشه‌گیر، یا درست در نقطهٔ مقابل، یعنی پررو و سرکش بودند. به هر حال، همهٔ آن‌ها کودکان ناسازگاری بودند که بدتربیت شده بودند.

واکنش این کودکان نسبت به شیوهٔ آسان محاسبات آنی بود. این روش‌ها به نظر آنان همچون سرگرمی دل‌پذیری جلوه می‌کرد. احساس توانایی ایجاد شده در آن‌ها به زودی موجب شد که خصلت‌های نابهنجار خود را از دست بدهند. تأثیرات جنبی فراگیری روش جدید بر این کودکان نیز به‌همین اندازه مهم بود. ضمن اینکه بچه‌ها مهارتی در کار با اعداد به‌دست می‌آوردند، آرامش و اطمینانی در آنان پدید می‌آمد که شخصیتشان را دگرگون می‌کرد و کم‌کم در سایر درس‌ها هم پیشرفت محسوسی می‌کردند. احساس توانایی، تلاش‌ها و پیروزی‌های بعدی را با خود به دنبال می‌آورد.

تراختِنبِرگ برای آنکه نشان دهد هر کسی قادر است طرز حل سریع و ساده مسائل را فرا گیرد، روش خود را با موفقیت به کودک ۱۰ ساله‌ای که عقب‌افتاده محسوب می‌شد، یاد داد. نه‌تنها این کودک شیوهٔ محاسبه کردن را فراگرفت، بلکه ضریب هوشی او نیز فزونی یافت. چون همهٔ مسائل به‌طور ذهنی حل می‌شد، کودک نیروی حافظهٔ چشم‌گیری به‌دست آورد و قدرت تمرکزش زیاد شد. روش تراختِنبِرگ متکی بر دستورالعمل‌هایی است که با آنچه در روش‌های معمولی وجود دارد، اساساً متفاوت است. از جدول ضرب و از عمل تقسیم خبری نیست. برای یادگیری این روش کافی است شمردن را بلد باشید. این

روش مبتنی بر کلیدهایی است که آن‌ها را باید به‌خاطر سپرد. با یاد گرفتن این‌ها، حساب به‌صورت موضوعی آسان و شیرین درمی‌آید، زیرا شخص خواهد توانست اعداد مطلوب را «بخواند». مزایای مهم این روش عبارت‌اند از سهولت بیشتر، سرعت بیشتر و دقت بیشتر.

مربیان دریافته‌اند که روش تراختِنبِرگ زمان انجام محاسبات ریاضی را ۲۰ درصد کاهش می‌دهد. ارزش عملی این روش جدید در آن است که برخلاف شیوه‌ها و ترفندهایی که در گذشته برای حالت‌های خاص ابداع شده بود، یک روش کامل است. روش تراختِنبِرگ که خیلی آسان‌تر از حساب معمولی است، به افراد عادی که هیچ سروکاری با ریاضیات نداشته‌اند، امکان دستیابی به چنان نتایجی را می‌دهد که عموماً از نوابغ ریاضی انتظار می‌رود. این روش که «تندنویسی ریاضیات» خوانده شده، در پیچیده‌ترین مسائل نیز قابل استفاده است. اما شاید بزرگ‌ترین حسن این روش تازه و انقلابی در آن باشد که دلبستگی‌های تازه‌ای را نسبت به ریاضیات برمی‌انگیزد، در شاگرد اعتمادبه‌نفس پدید می‌آورد و با گشودن پهنهٔ تلاشی پیش‌رویش، او را به فراگرفتن موضوعی فرامی‌خواند که امروزه در مدارس «منفورترین» درس قلمداد می‌شود.

قدرت انجام اعمال اصلی حساب با سهولت چشمگیری که روش تراختِنبِرگ پدید می‌آورد، سبب می‌شود که ترس و تزلزل شاگردان که در مواجهه با زبان کاملاً نمادی و دقت مطلق ریاضیات راه آنان را سد می‌کند، از میان برود. به گفتهٔ کارشناسان، علت واقعی بیزاری اغلب شاگردان از ریاضیات، موانع عاطفی است، نه ضعف یادگیری. با آموختن روش تراختِنبِرگ، زحمت حساب کردن که بخشی از کارهای روزانه هر کسی است، برطرف می‌شود. دانشجویان پزشکی، معماران و مهندسان زوریخی دریافته‌اند که به کمک روش‌های ریاضی آسان تراختِنبِرگ می‌توانند از عهدهٔ گذراندن امتحانات دشواری که برای تکمیل دورهٔ آنان اجباری است، برآیند. یکی از کارشناسان برجستهٔ معماری در سوئیس تنها پس از شرکت کردن در کلاس‌های مؤسسهٔ ریاضی و فراگرفتن روش تراختِنبِرگ توانست در رشتهٔ انتخابی خود ادامه تحصیل دهد.

آنچه که شرح دادیم، گوشه‌ای از رخدادها و تحولاتی بود که کتاب «روش سریع تراختِنبِرگ در حساب» در جهان ریاضیات پدید آورده است. امیدواریم که شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان نیز با مطالعه و یادگیری کتاب مزبور در راستای اعتلای دانش و بینش محاسباتی خود در اعمال اصلی حساب گام‌های استواری بردارید تا هنگام مواجهه با افرادی که در انجام این اعمال برای اعداد دارای مقادیر بزرگ از مهارت ویژه‌ای برخوردارند، دچار تعجب و سردرگمی نشوید. چون ممکن است آن‌ها زودتر از شما به مطالعهٔ این کتاب و یادگیری روش‌های مندرج در آن برای محاسبه دست زده باشند.

پی‌نوشت‌ها

1. Jakow Trachtenberg
2. Ann Cutler
3. Rudolph McShane

پرسش‌های پیکارجو!

با ارقام ۱, ۲, ۳, ..., ۸ چند عدد هشت‌رقمی مضرب ۱۱ می‌توان نوشت؟

الف) ۱۱۵۲ ب) ۲۳۰۴ ج) ۳۴۵۶

د) ۴۶۰۸ هـ) ۵۷۶۰

راهنمای حل مسائل

آمادگی برای آزمون‌های مستمر

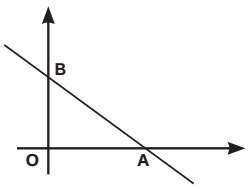
ریاضی ۲

۱.

$(-1,0)\in f, (-1,a-b)\in f \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b \Rightarrow$
$2a+b=3a$
$(2a+b,a+b)\in f, (3a,4)\in f \Rightarrow a+b=4 \Rightarrow a=b=2$

۲.

$x=0 \quad y=b>0$
$y=0 \quad x=-\frac{b}{a}>0$
$f(x)=ax+b \quad S=\frac{OA\times OB}{2}=\frac{-b^2}{2a}=4$
$\Rightarrow b^2+8a=0 \quad f(-1)=-a+b=6 \Rightarrow b=6+a$
$(6+a)^2+8a=0 \Rightarrow a^2+20a+36=0$
$\Rightarrow (a+18)(a+2)=0$
$\Rightarrow a=-2$ یا $a=-18$ و $b=4$ یا $b=-12$
$f(x)=-2x+4$ یا $f(x)=-18x-12$ غیرقابل قبول

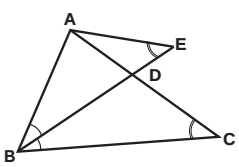


۳.

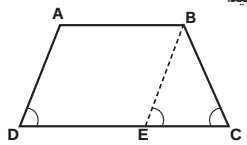
$(-1,a+b)\in f, (-1,2)\in f \Rightarrow a+b=2$
$(a-2b,2)\in f, (-1,2)\in f \Rightarrow a-2b=-1$
$\begin{cases} a+b=2 \\ a-2b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=1 \Rightarrow a-b=0$
$(a+c,0)\in f$ و $(4,0)\in f \Rightarrow a+c=4 \Rightarrow c=3$
$f=\{(-1,2),(2,-2),(4,0)\}$
$f^{-1}=\{(2,-1),(-2,2),(0,4)\}$

پاسخ هندسهٔ ۱

۱. ثابت کنید: $\Delta ABE \cong \Delta BDC$ و از آنجا نتیجه بگیرید: $BD=AB$ و درستی حکم را به‌دست آورید.



۲. با فرض $\hat{E}=\hat{C}$ از B خطی موازی AD رسم کنید. سپس به کمک قضیهٔ خطوط موازی و مورب و فرض نتیجه بگیرید که $\hat{E}=\hat{C}$ و از آنجا به درستی حکم برسید.



۳. با توجه به ویژگی اصلی عمود منصف، نتیجه بگیرید که مثلث EBC متساوی‌الساقین است و از آنجا نتیجه بگیرید که: $\frac{\hat{B}}{2}=\hat{C}-60^\circ$.

با توجه به قائم‌الزاویه بودن مثلث، داریم: $\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$ و از حل معادله‌های حاصل مقادیر $\hat{C}$ و $\hat{E}_1$ را بیابید.

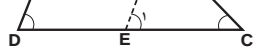
پاسخ هندسهٔ ۲

۱. با توجه به قضیهٔ حمار داریم:

الف) $x+y+x-y>xy$
ب) $x+y+xy>x-y$
ج) $x-y+xy>x+y$

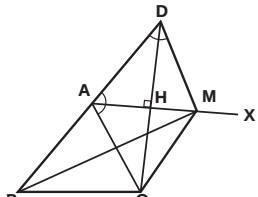
از ترکیب این نابرابری‌ها به‌سادگی به درستی حکم می‌رسید.

۲. با فرض $AD<BC$ از B خطی موازی AD رسم کنید. اکنون با توجه به اینکه ABED متوازی‌الاضلاع است، $BE=AD$. در مثلث BEC با توجه به فرض مسئله داریم: $BC>BE$ و لذا: $\hat{D}>\hat{C}$ پس: $\hat{E}_1=\hat{D}$ و چون: $\hat{E}_1=\hat{D}$ (چرا؟!)



۳. مطابق شکل AB را به اندازهٔ AC از طرف A تا نقطهٔ D امتداد داده‌ایم و D را به C وصل کرده‌ایم. چون: $AD=AC$، پس مثلث ADC متساوی‌الساقین است و در نتیجه نیم‌ساز $\hat{A}$ در این مثلث، ارتفاع و عمودمنصف CD نیز هست. لذا: $DH=CH$ و $\hat{H}=90^\circ$. پس M روی عمودمنصف CD است و در نتیجه: $MD=MC$. حال در مثلث MBD با توجه به قضیهٔ حمار داریم:

$MD+MB>BD=AB+AD$
$\Rightarrow MC+MB>AB+AC$ (زیرا $AD=AC$, $MD=MC$)
$\Rightarrow MC+MB+BC>AB+AC+BC$



حسابان

۱. چون x^2+x+2 تجزیه‌ناپذیر است، فرض می‌کنیم خارج‌قسمت، چند جمله‌ای درجهٔ اول $cx+d$ باشد. بنابراین:

$(2x^2+x^2+ax+b)=(x^2+x+2)(cx+d)$
$=cx^3+(d+c)x^2+(d+2c)x+2d$
$\Rightarrow c=2, d+c=1, d+2c=a, 2d=b \Rightarrow d=-1, a=3, b=-2$

۲. با فرض اینکه x دانش‌آموز در اردو باشند، با توجه به فرض مسئله به معادلهٔ $\frac{36}{x}-2=\frac{36}{x+3}$ می‌رسیم و از حل آن نتیجه می‌شود: $x=6$

۳. اگر فروشنده x تومان تخفیف بدهد، با توجه به فرض، $\frac{x}{2}$ بیشتر می‌فروشد. یعنی با قیمت فروش $10000-x$، به تعداد $500+\frac{x}{2}$ رادیو می‌فروشد و درآمدش می‌شود:

$(500+\frac{x}{2})(10000-x)=-\frac{x^2}{2}+4500x+5000000$

شرایط ماکزیمم شدن این تابع را بررسی کنید. (به ازای $x=4500$، درآمد و سود ماکزیمم می‌شود.)

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. الف) فرض کنیم این دنباله به L هم‌گرا باشد. بنابراین:

$\forall \varepsilon>0 \quad |a_n-L|<\varepsilon \Rightarrow |3^n-L|<\varepsilon$
$\Rightarrow L-\varepsilon<3^n<L+\varepsilon \Rightarrow \log_3^{(L-\varepsilon)}<n<\log_3^{(L+\varepsilon)}$

و این با بی‌کران بودن مجموعهٔ اعداد طبیعی تناقض دارد.

ب) برای اثبات با توجه به تعریف می‌نویسیم:

$\forall k>0 \; \exists M\in N: n\ge m \Rightarrow a_n>k \Rightarrow 3^n>k$
$\Rightarrow n>\log_3^k \Rightarrow M\ge[\log_3^k]+1$

۲. با توجه به تعریف داریم:

$\forall \varepsilon>0 \; \exists M>0: n\ge m \Rightarrow |3^{-n}-L|<\varepsilon$
$\overset{L=0}{\Rightarrow} 3^{-n}<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{3^n}<\varepsilon \Rightarrow 3^n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n>\log_3^{\frac{1}{\varepsilon}}$

پس کافی است $M\ge[\log_3^{\frac{1}{\varepsilon}}]+1$ انتخاب شود تا نتیجه‌گیری درست باشد.

۳.

$a_1=2, a_2a_1+1=2a_1 \Rightarrow a_2=\frac{3}{2}$
$a_3a_2+1=2a_2 \Rightarrow a_3=\frac{4}{3} \quad a_4a_3+1=2a_3$
$\Rightarrow a_4=\frac{5}{4} \Rightarrow$
$a_n=\frac{n+1}{n}$: حدس استقرایی

که درستی این حدس را می‌توان به کمک قضیهٔ استقرای ریاضی اثبات کرد. بعد از اثبات، به کمک تعریف نشان دهید که این دنباله نزولی و هم‌گرا به یک است.

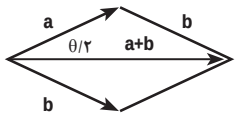
هندسهٔ تحلیلی

۱. چون $|e_1|=|e_2|=1$، بنابراین داریم:

$|e_1+e_2|^2=3 \Rightarrow |e_1|^2+|e_2|^2+2e_1.e_2=3 \Rightarrow e_1.e_2=\frac{1}{2}$
$(e_1+2e_2).(e_1+e_2)=|e_1|^2+|e_2|^2+3e_1.e_2=1+2+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

۲. الف) طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث داریم:

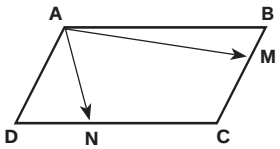
$|b|^2=|a|^2+|a+b|^2-2|a+b||a|\cos\frac{\theta}{2}$
$\Rightarrow |a+b|(|a+b|)-2|a|\cos\frac{\theta}{2})=0$
$\overset{|a+b|\neq 0}{\Rightarrow} |a+b|=2|a|\cos\frac{\theta}{2}$



ب) از دستور $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$ و قسمت الف استفاده کنید.

۳.

$\frac{3}{4}(\vec{AM}+\vec{AN})=\frac{3}{4}\left[(\vec{AB}+\vec{BM})+(\vec{AD}+\vec{DN})\right]$
$=\frac{3}{4}(\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{BC}+\vec{BC}+\frac{1}{3}\vec{AB})$
$=\frac{3}{4}(\frac{4}{3}\vec{AB}+\frac{4}{3}\vec{BC})=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$



ریاضیات گسسته

۱. این دنبالهٔ گرافی ساده ولی غیرهم‌بند است (چون $q<p-1$، لذا گراف ناهم‌بند است).

۲. تعداد رأس‌های درجهٔ ۱ در این درخت برابر است با ۷ که هم با رسم درخت و هم با استفاده از فرمول زیر می‌توانید این تعداد را مشخص کنید:

$\text{تعداد رأس‌های درجهٔ ۱ در درخت‌ها} = \sum_{\deg V_i\ge 3}(\deg V_i-2)+1$

۳. A^2 را به‌دست آورید و درایه‌های روی قطر اصلی آن را به‌صورت نزولی مرتب کنید و دنبالهٔ درجات رئوس را تشکیل دهید.

ریاضی عمومی ۱ و ۲

۱. بیشترین مقدار به ازای $x=2$، $y=-2$ به‌دست می‌آید.

$\begin{vmatrix} -\frac{b}{2a} \\ f(-\frac{b}{2a}) \end{vmatrix}$ مختصات نقطهٔ ماکزیمم

$y=-x^2+4x-6 \Rightarrow f(x)=-(x-2)^2-2$

۲. با توجه به ضابطه‌های f و g داریم:

$fog(x)=[|x+4|-x]$ و $gof(x)=|[x]+4|-[x]$

۳. gof با ضابطهٔ $gof(x)=\frac{2x+1}{-3x-2}$ به‌دست می‌آید و در دامنه‌اش، یعنی $R-\{-\frac{2}{3}\}$ یک‌به‌یک است که وارون‌پذیری آن نتیجه می‌شود.

ریاضی ۳ تجربی

۱. با توجه به تعریف مجموعه‌های A، B و C داریم:

$(A\cap B)=(0,7], \quad (A-B)=[-4,0]$
$(B-C)=(9,+\infty), \quad (A-C)=[-4,-2]$

۲. کافی است بنویسید $\sin 3a=\sin(2a+a)$ و با توجه به دستور محاسبهٔ $\sin(a+b)$ سمت راست تساوی را محاسبه کنید و برحسب Sina بنویسید.

فرمول آخر: $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$

۳. الف) سمت راست تساوی را به‌صورت $\cos(4x-x)$ بنویسید و بسط دهید.

ب) مانند الف عمل می‌کنیم و از فرمول آخر در مسئلهٔ ۲ کمک می‌گیریم.

جبر و احتمال

۱. الف)

$\frac{bc+ac+ab}{abc}\ge\frac{9}{a+b+c}$
$\Leftrightarrow abc+a^2c+a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2+abc\ge 9abc$
$\Leftrightarrow (a^2b+bc^2-2abc)+(a^2c+b^2c-2abc)+(ab^2+ac^2-2abc)\ge 0$
$\Leftrightarrow b(a-c)^2+c(a-b)^2+a(b-c)^2\ge 0$ (همواره برقرار است.)

ب)

$\Leftrightarrow b(a-c)^2+c(a-b)^2+a(b-c)^2\ge 0$
$-\sqrt{2}\le \sin x+\cos x\le\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$

(همواره برقرار است.)

۲. هرگاه $a\in Z$ در این صورت در تقسیم a بر ۶، یکی از حالت‌های زیر را خواهیم داشت.

$a=6q \Rightarrow$ a اول نیست.
$a=6q+1 \Rightarrow$ a ممکن است اول باشد.
$a=6q+2=2(3q+1)=2q_1 \Rightarrow$ a اول نیست.
$a=6q+3=3(2q+1)=3q_2 \Rightarrow$ a اول نیست.
$a=6q+4=2(3q+2)=2q_3 \Rightarrow$ a اول نیست.
$a=6q+5=6(q+1-1)+5$
$=6(q+1)-6+5=6q'-1 \Rightarrow$ a ممکن است اول باشد.

۳. فرض کنید $\sqrt[3]{7}+\sqrt{7}$ گنگ نباشد، پس گویاست و داریم:

$\sqrt[3]{7}+\sqrt{7}=a\in Q \Rightarrow \sqrt[3]{7}=a-\sqrt{7} \Rightarrow \ldots$

◆ایستگاه اول

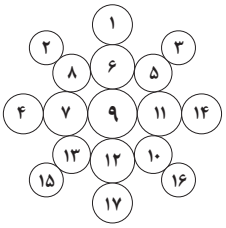
چهار ردیف داریم کــه همه در یک عدد (عدد دایرهٔ مرکز) مشــترک‌اند. اگر مجموع اعداد موجود در چهار خانهٔ دیگر هر یک از این ردیف‌ها را a (این مجموع‌هــا با هم برابرند) و عــدد خانهٔ مرکزی را b بنامیم، به سادگی خواهیم داشت:

$$۴a+b=۱+۲+۳+...+۱۷=\frac{۱۷\times۱۸}{۲}=۱۵۳$$

$$\Rightarrow a=\frac{۱۵۳-b}{۴}=۳۸+\frac{۱-b}{۴}$$

بنابراین باید b-۱ مضرب ۴ باشــد و در نتیجه: b=۴k+۱ و a=۳۸-k.

حال با توجه به اینکه k=۰,۱,۲,۳,۴، پس عدد وســط می‌تواند ۱ یا ۵ یا ۹ یا ۱۳ یا ۱۷ باشد. برای شروع عدد وسط، یعنی ۹ را انتخاب می‌کنیم. پس: b=۹ و a=۳۶. حال باید عددهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ را به چهار قسمت طوری تقسیم کنیم که مجموع هر دســته مساوی ۳۶ شــود. برای این کار راه‌های زیادی وجود دارند. یک راه این است که این اعداد را در چهــار بلــوک (۴ و ۳ و ۲ و ۱)، (۸ و ۷ و ۶ و ۵)، (۱۳ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰) و (۱۷ و ۱۶ و ۱۵ و ۱۴) دســته‌بندی کنیم و با توجه به بزرگی اعداد، از هر بلوک یک عدد برداریــم. مثلاً از اولی ۱، از دومی ۶ و از ســومی ۱۲ و از چهارمی ۱۷ را انتخاب کنیم و به‌همین ترتیب، به‌طوری که مجموع آن‌ها ۳۶ شود. با این ایده یک جواب به‌صورت زیر پیدا می‌شود:



در همین حالت، مســئله جواب‌های دیگری هم ممکن است داشته باشد. علاوه بر آن ممکن است عدد وســط را تغییر داد و به جواب‌های دیگری هم دست یافت. امتحان کنید!

◆ایستگاه دوم

معمای ششم: اگر در جام اول شربت وجود داشته باشد، جملهٔ روی آن درست است. یعنی فرقی نمی‌کند که شما کدام جام را سر بکشید و محتوی دو جام یکی اســت. پس باید در جام دوم هم شــربت باشد. ولی در این صورت باید جملهٔ روی آن نادرســت باشد و نتیجه می‌گیریم که در جام دیگر (یعنی جام اول) شربت وجود ندارد (زهر وجود دارد) و این ایجاد تناقض می‌کند. پس در جام اول شربت وجود ندارد و لذا در آن زهر وجود دارد و بنابراین جملهٔ روی آن هم نادرســت است. در نتیجه محتوای دو جام هم یکسان نیست و در جام دوم شربت وجود دارد (و جملهٔ روی آن نادرست است). پس محکوم باید جام دوم را سر بکشد تا نجات پیدا کند.

معمای هفتم: نوشــتهٔ روی جــام اول معادل با آن اســت که «محتوای دو جام یکســان نیست» و نوشتهٔ روی جــام دوم هم یعنی «جام اول حاوی زهر اســت». حال اگر در جام اول شربت باشد، نوشتهٔ آن درست است و در نتیجــه در جام دوم زهر وجــود دارد و جملهٔ روی آن باید درست باشد و این ایجاد تناقض می‌کند. اما اگر فــرض کنیم در جام اول زهر باشــد، آن‌گاه جملهٔ روی آن نادرســت اســت و لذا محتوای دو جام یکسان است و در نتیجه در جام دوم هم زهر وجود دارد. پس نوشتهٔ روی آن درست است و این ایجاد تناقض نمی‌کند. نتیجه می‌گیریم که هر دو جام حاوی زهر است و محکوم نباید هیچ‌یک را بنوشد و باید تقاضای دو جام دیگر بکند!

معمای هشتم: جملهٔ «این جام حاوی زهر است»، هرگز نمی‌تواند روی جام اول باشد. زیرا اگر در این جام شــربت باشد، جملهٔ روی آن درســت است و در نتیجه ایجاد تناقض می‌شــود. اگر هم در این جام زهر باشــد، جملهٔ روی آن نادرســت اســت (یعنی ایــن جام حاوی زهر نیســت) که باز هم به تناقــض می‌انجامد. پس این جمله روی جام دوم بوده و جملهٔ «هر دو جام حاوی زهر هستند» هم روی جام اول بوده است. حالا اگر جام اول حاوی شربت باشد، جملهٔ روی آن درست است که باز به تناقض منجر می‌شود. پس در جام اول زهر وجود دارد و جملهٔ روی آن هم نادرست است. این یعنی «هر دو جام حاوی زهر نیستند». پس در جام دوم شربت وجود دارد و جملهٔ روی آن (این جام حاوی زهر اســت) نادرســت است. یعنی محکوم می‌تواند با اطمینان جام دوم را سر بکشد و نجات یابد.

معمــای نهــم: اگر جملــهٔ روی جام اول درســت باشــد، پس در این جام زهر وجود دارد و دو جملهٔ دیگر نادرســت‌اند. بنابراین جام دوم هم حاوی زهر است. ولی نادرستی جملهٔ سوم نتیجه می‌دهد که در جام دوم زهر وجود ندارد، و یعنی شــربت وجود دارد و این به تناقض منجر می‌شود. پس جملهٔ روی جام اول نادرست است و در نتیجه، جام اول حاوی شــربت اســت و دو جام دیگر حاوی زهر هستند. بنابراین نوشتهٔ روی جام دوم نادرست و نوشــتهٔ روی جام سوم درست است. پس محکوم باید جام اول را بنوشد و نجات یابد.

معمای دهم: چون جملات روی جام‌های اول و دوم یک‌چیــز را تأیید می‌کنند، پس هر دو درســت و یا هر دو نادرســت‌اند. اگر هر دو جمله نادرست باشند، لاجرم باید جملهٔ ســوم درست باشد و در این جام (جام سوم) شربت باشد. ولی نادرستی دو جملهٔ فوق نشان می‌دهد که در جام دوم هم شــربت اســت و ایــن یعنی دو جام حاوی شربت هستند که با مفروضات مسئله تناقض دارد. پس هر دو جمله درست‌اند. یعنی در جام دوم زهر است. به‌علاوه لااقل یک جملهٔ نادرست داریم و آن جملهٔ روی جام ســوم اســت که نتیجه می‌دهد در جام اول شربت وجود دارد و چون تنها در یک جام شــربت وجود دارد، پس در جام ســوم هم زهر وجــود دارد. لذا محکوم باید جام اول را بنوشد.

۱. واضح است که مجموع این پرانتزها، مساوی صفر است:

$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+...+(a_{1395}-b_{1395})$
$=(a_1+a_2+...+a_{1395})-(b_1+b_2+...+b_{1395})=0$

(مجموع عددها ثابت است)، پس لااقل یکی از این پرانتزها عددی زوج است (زیرا اگر همهٔ آن‌ها فرد باشند، مجموع آن‌ها فرد می‌شود، چرا؟) پس حاصل‌ضرب این پرانتزها همواره زوج است (گزینهٔ ب).

۲. عبارت سمت راست، مضرب ۳ است، پس عبارت سمت چپ هم مضرب ۳ است؛ یعنی: $x^3+2y^3=3k$. اما می‌دانیم که برای هر یک از x و y سه حالت در تقسیم بر ۳ وجود دارد (باقی‌ماندهٔ ۰، ۱ یا ۲) پس ترکیب آن‌ها ۹ حالت متفاوت دارد (هر دو باقی‌ماندهٔ صفر، x باقی‌ماندهٔ صفر، y باقی‌ماندهٔ ۱ و... و هر دو باقی‌ماندهٔ ۲). با امتحانی ساده درمی‌یابیم که فقط در حالتی‌که هر دوی x و y در تقسیم بر ۳ باقی‌ماندهٔ صفر داشته باشند، x^3+2y^3 مضرب ۳ می‌شود. پس: $x=3x'$ و $y=3y'$ و با جای‌گذاری در معادلهٔ اولیه، نتیجه می‌شود:

$27x'^3+54y'^3=3z^3 \Rightarrow 9x'^3+18y'^3=z^3$

و لذا z^3 مضرب ۳ و در نتیجه z هم مضرب ۳ است $(z=3z')$ و از آنجا: $9x'^3+18y'^3=27z'^3 \Rightarrow x'^3+2y'^3=3z'^3$.

این معادله درست مانند معادلهٔ اولیه است و لذا x'، y' و z' هم باید مضرب ۳ باشند و به‌همین ترتیب... پس نتیجه می‌شود که x، y و z باید مضرب همهٔ توان‌های ۳ باشند، و این ممکن نیست مگر آنکه: $x=y=z=0$. پس معادله فقط یک جواب دارد (گزینهٔ الف).

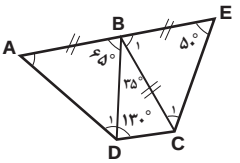
۳. با تغییر شکل معادله به‌صورت $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$ و با توجه به اینکه: $0\le x\le 1$، می‌توان فرض کرد که $x=\cos\alpha$ و $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$. با توجه به اتحادهای مثلثاتی $8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1=\cos 4\alpha$ و $2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$ خواهیم داشت:

$$8\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha=1$$
$$\Rightarrow 8\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha=\sin\alpha$$
$$\Rightarrow 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha=\sin\alpha$$
$$\Rightarrow 2\sin 4\alpha\cos 4\alpha=\sin\alpha$$
$$\Rightarrow \sin 8\alpha=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases}8\alpha=2k\pi+\alpha\\ 8\alpha=2k\pi+\pi-\alpha\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{2k\pi}{7}\\ \alpha=\frac{(2k+1)\pi}{9}\end{cases},\ 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow x_1=\cos\frac{\pi}{9},$$
$$x_2=\cos\frac{2\pi}{7}, x_3=\cos\frac{\pi}{3}$$

لذا معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد (گزینهٔ د).

۴. AB را از طرف B و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم (AB=BE). بنابراین: AB=BE=BC لذا در مثلث متساوی‌الساقین BEC داریم: $\hat{E}=\hat{C}_1=50^\circ$ و $\hat{B}_1=180^\circ-(65^\circ+35^\circ)=80^\circ$ و در نتیجه چهارضلعی AECD محاطی است. (چرا؟) اما بدیهی است که دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BE از نقاط E، C و A می‌گذرد، پس این دایره، همان دایرهٔ محیطی چهارضلعی AECD است (مرکز دایره B است). لذا BD هم شعاع دیگری از این دایره است و در نتیجه: BD=AB و مثلث ABD هم متساوی‌الساقین است و از آنجا:

$$\hat{A}=\hat{D}_1=\frac{180^\circ-65^\circ}{2}=57/5^\circ$$ (گزینهٔ ج)



۵. می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۱، مساوی باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی است که از جمع و تفریق ارقام عدد (از سمت راست) بر ۱۱ به‌دست می‌آید. پس عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام ردیف زوج و مجموع ارقام ردیف فرد آن با هم مساوی باشند. یعنی برای عدد هشت‌رقمی abcdefgh باید داشته باشیم: $g+e+c+a=h+f+d+b$ که مقادیر h, ..., c, b, a مقادیر ۱، ۲، ۳، ..., ۸ را می‌پذیرند. با این توضیح مسئلهٔ ما به این شکل تغییر می‌یابد که به چند طریق می‌توان ارقام ۱، ۲، ۳، ..., ۸ را به دو دسته تقسیم کرد، به‌طوری که مجموع اعداد دو دسته با هم مساوی باشند. اما می‌دانیم که: $0+1+2+...+8=\frac{9\times 8}{2}=36$ پس باید مجموع اعداد هر دسته مساوی ۱۸ باشد. هر گروهی که شامل ۱ باشد، باید مجموع بقیهٔ اعضای آن ۱۷ باشد و از آنجا به چهار گروه زیر می‌رسیم:

$A_1=(1,2,7,8), A_2=(1,3,6,8), A_3=(1,4,5,8),$
$A_4=(1,4,6,7)$

و نظیر هر یک از این گروه‌ها، یک چهارتایی منحصربه‌فرد وجود دارد:

$B_1=(3,4,5,6), B_2=(2,4,5,7), B_3=(2,3,6,7),$
$B_4=(2,3,5,8)$

و به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که چهارتایی دیگری به‌جز این‌ها وجود ندارد. حال باید هر یک از این چهارتایی‌ها را به ردیفی دلخواه در جای زوج و دیگری را در جای فرد نشاند. مثلاً جای‌گذاری A_1 و B_1 به‌ترتیب می‌تواند عدد ۱۴۷۵۲۶۸۳ را ایجاد کند که مضرب ۱۱ است. برای تعیین تعداد این ترکیب‌ها، از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. برای هر جفت گروه A_1 و B_1، طبق اصل ضرب می‌توانیم $8\times 4\times 3\times 3\times 2\times 2\times 1\times 1=1152$

عدد متفاوت بسازیم (چرا؟) و چون چهار گروه متمایز داریم، پس به تعداد $4\times 1152=4608$ عدد متفاوت داریم (گزینهٔ د).