



♦ مدیرمسئول:

محمد ناصری

♦ سردبیر:

حمیدرضا امیری

♦ مدیر داخلی:

هوشنگ شرقی

♦ طراح گرافیک:

شاهرخ خرده‌غانی

♦ تصویرگر:

میشم موسوی

♦ هیئت تحریریه:

حمیدرضا امیری،

محمد هاشم رستمی،

دکتر ابراهیم ریحانی

احمد قندهاری،

میرشهرام صدر،

هوشنگ شرقی،

سید محمدرضا هاشمی موسوی،

غلامرضا یاسی‌پور

و به یاد همکار عزیزمان

زنده‌یاد پرویز شهریاری

♦ ویراستار ادبی:

بهروز راستانی

♦ وبگاه:

www.roshdmag.ir

♦ پیام‌نگار:

Borhanm@roshdmag.ir

♦ پیام‌گیر نشریات رشد:

۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲

♦ نشانی دفتر مجله:

تهران، صندوق پستی:

۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

☎ تلفن دفتر مجله:

۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲

☎ تلفن امور مشترکین:

۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶

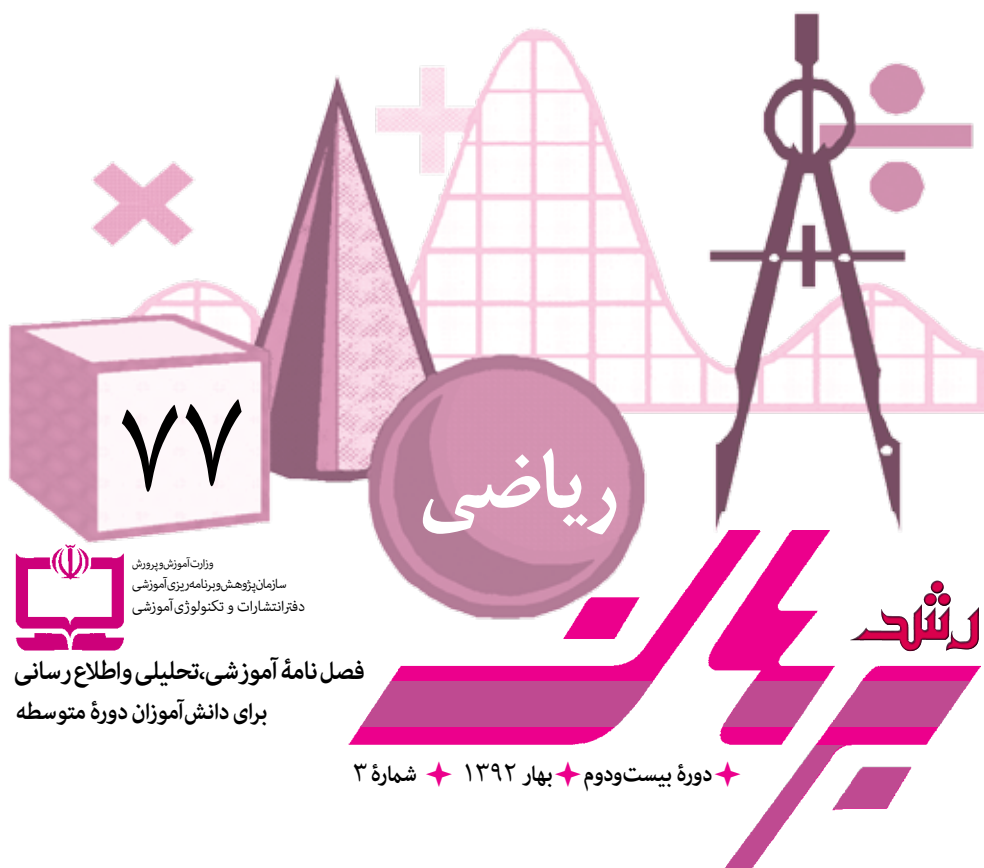
۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۵

♦ شمارگان:

۱۱/۵۰۰ نسخه

♦ چاپ:

شرکت افست (سهامی عام)



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دوره متوسطه

♦ دوره بیست و دوم ♦ بهار ۱۳۹۲ ♦ شماره ۳

حرف اول / هم‌نیمکتی‌ها هوای هم را داشته باشند	۲	سردبیر
ابو ریحان بیرونی، ریاضی‌دان ایرانی	۳	زنده‌یاد پرویز شهریاری
ریاضیات در سینمای جهان - N یک عدد است!	۶	احسان یارمحمدی
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی - ایستگاه اول	۷	هوشنگ شرقی
یافتن دنباله تقریبات اعشاری اعداد گویا و گنگ به روش بزرگ‌نمایی	۸	عنایت‌اله راستی‌زاده
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی - ایستگاه دوم	۱۲	
توابع متناوب و توابع نامتناوب	۱۳	ترجمه ابراهیم دارابی
المپیاد ریاضی در رومانی	۱۶	هوشنگ شرقی
گزارش - دبیری که ریاضی را دوباره معنی کرد!	۲۰	پیام یونسی‌پور
ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی - ایستگاه سوم	۲۳	
تاریخچه مجلات ریاضی ایران	۲۴	غلامرضا یاسی‌پور
خواص نامساوی‌ها	۲۶	احمد قندهاری
ماهیت فرهنگی و اجتماعی اثبات در آموزش ریاضی	۳۰	ابراهیم ریحانی - فهیمه کلاه‌دوز
پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونه گسسته و پیوسته	۳۴	حمیدرضا امیری
بسط دو جمله‌ای و ویژگی‌های آن	۳۹	مصطفی دیداری
پاسخ مسائل مسابقه‌ای رشد شماره ۷۶	۴۶	
پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه همین شماره	۴۴	
پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و... با مخاطبان	۴۷	
مسائل مسابقه‌ای رشد	۴۸	

مجله رشد برهان متوسطه، از همه دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

• نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه) • طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان • طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان • طرح معماهای ریاضی • نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود

• مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. • مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد. • مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. • استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.



هم نیمکتی‌ها هوای هم را داشته باشند

معمولاً هم‌کلاسی‌ها همه با هم دوست هستند و رابطه خوبی بین آن‌ها برقرار است. در این بین، هم‌میزی‌ها و دانش‌آموزانی که در کنار هم قرار می‌گیرند، معمولاً بیشتر با هم دوست هستند و نزدیک‌تر به یکدیگرند. به همین دلیل بهتر یکدیگر را می‌شناسند، با روحیات هم آشنا ترند، نقاط قوت و ضعف یکدیگر را دقیق‌تر شناسایی می‌کنند و بنابراین بهتر می‌توانند به هم کمک کنند. به همه شما دانش‌آموزان عزیز هم‌کلاسی، به خصوص هم‌نیمکتی‌ها توصیه می‌کنم، نقاط قوت یکدیگر را تقویت کنید و نقاط ضعف یکدیگر را به قوت تبدیل کنید و درصدد رفع آن‌ها برآیید.

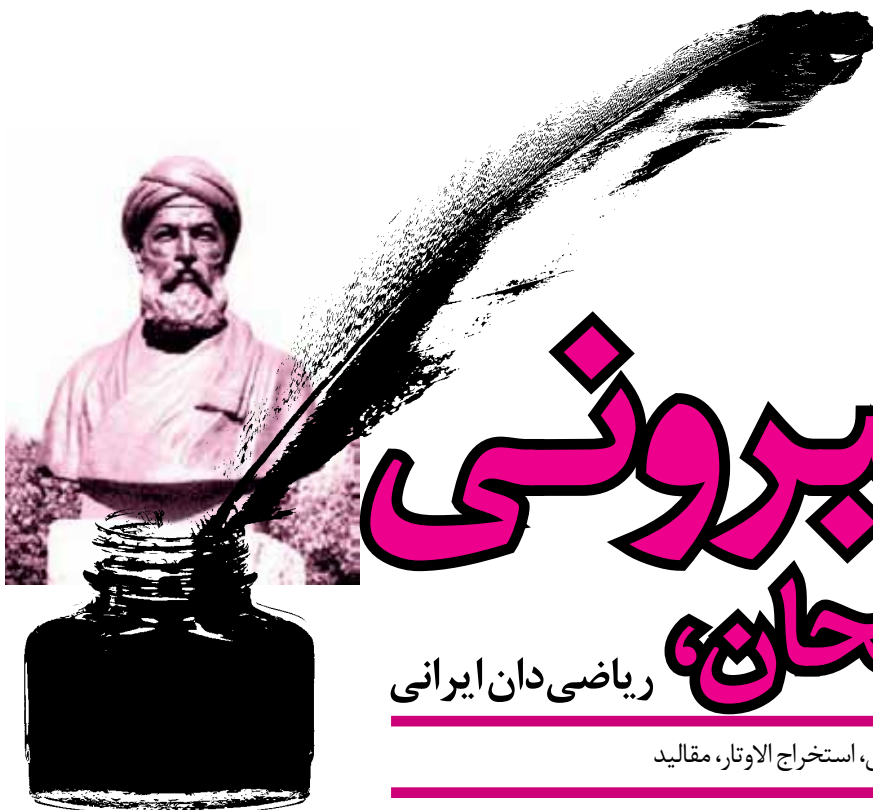
البته این نقاط قوت و ضعف فقط شامل مباحث و مطالب درسی نمی‌شود. دعوت به کارهای خوب و بازداشتن از کارهای بد نیز جزو همین امور است. همان‌طور که برای راهنمایی کردن دوست خودتان در حل یک مسئله ریاضی باید خود شما شناخت کافی و اطلاعات لازم را در مورد حل آن مسئله داشته باشید تا خدای ناکرده پاسخ غلط به او یاد ندهید، در بقیه موارد نیز باید با شناخت و معرفت و مطالعه کافی دوستان خود را راهنمایی کنید.

از طرف دیگر، باید ظرفیت انتقادپذیری و **امر به معروف و نهی از منکر** از طرف دوستانتان را در خود بالا ببرید.

البته دعوت به خوبی‌ها و بازداشتن از بدی‌ها باید به شرایط و ضوابطی انجام گیرد تا تأثیر منفی نگذارد. مثلاً باید با خوش‌رویی و ملایمت همراه باشد. اگر معلم شما با تندی و خدای ناکرده ترش‌رویی ساده‌ترین مطالب را به شما آموزش دهد، آیا همان تأثیر را در یادگیری شما دارد که مطالب را با زبانی نرم و ملایم و با خوش‌رویی آموزش دهد؟ یا اگر شما مطلبی را به دوست خود آموزش دهید، ولی خودتان آن را نفهمیده باشید، چه قدر در این کار موفق هستید؟

بنابراین سعی کنید دوستانتان را به کارهای خوبی دعوت کنید که خودتان عامل به آن‌ها هستید و نسبت به آن‌ها معرفت دارید. اگر در این زمینه سؤالی برایتان پیش می‌آید، از بزرگ‌ترها و معلمان خود یاری بگیرید و خلاصه با دست پر در این زمینه قدم بردارید، تا هم به وظیفه دوستی و هم‌کلاسی و هم به وظیفه دینی خود به نحو احسن عمل کرده باشید. به امید موفقیت و پیشرفت روزافزون همه شما عزیزان دانش‌آموز در تمامی مراحل زندگی، به خصوص تحصیل علم.

سر دبیر



بیرونی ابوریحان، ریاضی دان ایرانی

کلیدواژه‌ها: ابوریحان بیرونی، استخراج الاوتار، مقالید

او بسیار سخت بود. در ری با محمود خجندی و کوشیار گیلی ملاقات داشت. بعد به طبرستان نزد مرزبان، فرزند رستم، فرزند شروین، امیرزاده آل باوند و صاحب کتاب «مرزبان نامه» رفت و در آنجا کتاب «مقالید علم الهیة» را نوشت. مدتی نزد منصور دوم، پسر نوح سامانی بود و سرانجام به زادگاه خود خوارزم بازگشت. ابوالعباس مأمون از مأمونیان خوارزمشاه، بیرونی را با احترام پذیرفت. محمود غزنوی از مأمون خواست دانشمندان را نزد او بفرستد. پورسینا به گرگان رفت، ولی بیرونی در خوارزم ماند.

مأمون در یک شورش داخلی کشته شد (۴۰۷ هجری قمری). محمود غزنوی خوارزم را فتح کرد، بسیاری را کشت، کتابخانه‌ها را سوزاند و پنج هزار نفر را که بیرونی هم بین آنان بود به زنجیر کشید و به غزنین برد. بسیاری از دانشمندان را به جرم قمرطی بودن کشت. می‌خواست ابوریحان بیرونی را هم بکشد، ولی وقتی دانست ابوریحان اخترشناس است، از کشتن او صرف نظر کرد و او را به زندان انداخت که بیرونی شش ماه در آنجا بود. سرانجام از بند آزاد شد. در زمان لشکرکشی

ابوریحان حق تقدم او را در اثبات قضیه سینوس‌ها در مثلث کروی تأیید می‌کند. هنگام لشکرکشی محمود غزنوی، با آن که ابونصر عراق در ملک خود از او و لشکریانش پذیرایی کرد، به این اتهام که در ملک او مسجدی دیده نمی‌شود، به دستور محمود غزنوی کشته شد. یکی دیگر از معلمان ابوریحان به نام عبدالصمد، چون فلسفه یاد می‌داد و محمود با فیلسوفان مخالف بود، به جرم شیعی گری و باطنی گری کشته شد.

ابوریحان بعد از شکست آل عراق به دست مأمون، به استرآباد (گرگان) رفت و در پناه قابوس بن وشمگیر (شمس المعالی) قرار گرفت. آل عراق در سال ۳۸۵ هجری قمری حکومت را از دست داد. پورسینا و فردوسی هم بعد از خشم محمود نزد قابوس رفتند. ابوریحان کتاب «آثارالباقیه» را در گرگان در ۲۰ و ۲۱ سالگی نوشت و به قابوس هدیه کرد. شمس المعالی بعد از ۳۹۰ هجری قمری با ابوریحان سر ناسازگاری می‌گذارد و به قول خود بیرونی: «به راستی سنگدل شده بود» و ابوریحان از نزد او بیرون آمد. چندی در ری بود و در آنجا زندگی

ابوریحان بیرونی، سوم ذی‌الحجه سال ۳۶۲ هجری قمری (۹۷۳ میلادی) در «بیرون» شهر خوارزم به دنیا آمد و در همان کودکی پدر و مادر خود را از دست داد. خود او در این باره می‌گوید: «انا با الحقیقة لاعرف نسبتی ولا اعرف من کان جدی»: من در واقع نسبت خود را نمی‌شناسم و از نیای خود خبری ندارم.

۱۸ سالش نشده بود که در کوهستان دهکده خود به رصد ماه پرداخت. ابوریحان شاگرد ابونصر عراق، ریاضی دان و نقاش مشهور بود. ابونصر منصور، فرزند علی از خانواده آل عراق، ابوریحان را زیر حمایت خود گرفت و با او در زمینه مسئله‌های هندسه مکاتبه داشت. در یکی از نامه‌های خود به ابوریحان نوشته است: «مسئله‌هایی که همراه نامه‌ات بود، به دستم رسید که نوشته بودی یک سوم آن‌ها را ابوسهل کوهی با پرگار نشان داده است... پرسش‌های تو را پاسخ داده‌ام، گرچه مسئله‌ها از نظر دشواری و آسانی متفاوت بود...».

ابونصر عراق که به «جیلی» (یعنی گیلانی) مشهور است، ریاضیات و اخترشناسی را به ابوریحان آموخت.



محمود به هندوستان، همراه لشکریان به فرمان محمود به هند رفت. در آن جا زبان سانسکریت را یاد گرفت و چند کتاب به سانسکریت نوشت و یا از سانسکریت به عربی ترجمه کرد. کتاب جالب «ماللهند» هم محصول همین سفر است.

در این کتاب دربارهٔ رسم‌ها و سنت‌های اجتماعی و علمی، عقیده‌های عرفانی و فلسفی، جامعهٔ مدنی، طبقه‌ها و قشرهای اجتماعی، ادبیات، علوم و شگفتی‌های سرزمین هند و بیش از همه دربارهٔ اخترشناسی آنان صحبت می‌کند. در این کتاب می‌نویسد: «در آغاز کار، چون شاگردی در برابر استاد، نزد آنان می‌ایستادم، زیرا از ماهیت و اندازهٔ دانش آنان بی‌اطلاع بودم. چون اندکی به کارهای آنان وارد شدم و با آنان به گفت‌وگو نشستم و به آنان در برخی زمینه‌ها راهنمایی داشتم، از من شگفت‌زده شدند و می‌پرسیدند که با چه کسی در هند ملاقات



داشته‌ام و از چه کسی این آگاهی‌ها را به دست آورده‌ام. آن وقت مرا دربر گرفتند و از من دربارهٔ مسئله‌های گوناگون می‌پرسیدند ... و مرا نزد بزرگان‌شان به «دریای دانش» توصیف می‌کردند.»

محمود غزنوی در سال ۴۲۱ هجری قمری مرد و بیرونی که در غزنه بود، به خدمت مسعود غزنوی درآمد. کتاب «قانون مسعودی» که بیشتر دربارهٔ مثلثات

و اخترشناسی است در این سال‌ها نوشته شده. شهرت دارد که مسعود غزنوی هدیهٔ بالارزشی از نقره در برابر تألیف این کتاب برای او فرستاد. ولی بیرونی آن را به خزانه برگرداند و پیام داد، زندگی من می‌گذرد و نیازی به آن ندارم.

ابوریحان با درگذشت محمود آزادی بیشتری پیدا کرد و توانست یکی دوبار به خوارزم، زادگاه خود برود و از آن بازدید کند. نتیجهٔ این سفرها کتابی است دربارهٔ تاریخ خوارزم که به ما نرسیده و تنها بیهقی چند سطری از آن را آورده است. بیرونی در سال ۴۴۰ هجری قمری و به ظاهر در غزنین درگذشت.

بیرونی به تقریب در تمام زمینه‌های دانش زمان خود اظهارنظر کرده است. او بیش از ۱۳۰ کتاب در زمینه‌های گوناگون دارد. در فلسفه با پورسینا مکاتبه داشته، کتابی دربارهٔ پزشکی نوشته، در تاریخ، گاه‌شماری، وزن مخصوص اجسام گوناگون، در شناخت گوهرها، در زمین‌شناسی، کیهان‌شناسی، چاه‌های آرتیزین و... کتاب‌هایی دارد. همه‌جا کار خود را با استدلال و آزمایش انجام می‌دهد. دربارهٔ دیدگاه‌های خود به تحقیق می‌پردازد و بسیاری از نظرهای او، هنوز هم ارزش علمی خود را حفظ کرده‌اند.

در این جا تنها بخشی از دیدگاه‌های او را دربارهٔ جابه‌جایی زمین می‌آوریم که نمونه‌ای از دقت علمی اوست (یادآوری می‌کنیم بیرونی به نوعی به گردش زمین و سیاره‌ها اعتقاد داشته است). او در کتاب «تحدید نهایات الاماکن»، بعد از اثبات کرویت زمین، اندازه‌گیری قطر آن و حل مسئله‌های دیگر می‌نویسد: «... هنگامی که پاره‌هایی از زمین از جایی به جای دیگر منتقل می‌شود، سنگینی آن نیز جابه‌جا می‌شود و میان سنگینی سوهای مختلف زمین تفاوت پدید می‌آید... و به همین جهت

است که دوری سرزمین‌ها از مرکز زمین، با گذشت زمان، بر یک اندازه نمی‌ماند. چون برآمدگی زمین در جایی زیاد شود و اطراف خود را پر کند، آب‌ها کم می‌شود و چشمه‌ها گود می‌افتد و دره‌ها ژرف می‌شود و آبادانی دشواری پیدا می‌کند. پس مردمان از آنجا به جای دیگر کوچ می‌کنند و این ویرانی را به پیری زمین نسبت می‌دهند... و چنین است که گرمسیرها سردسیر می‌شود و سردسیرها گرمسیر... این حرکت هر چند اتفاقی و بی‌قاعده و در زمان اندک، اندک باشد ممکن است بر امتداد قطرهای کلی به‌تدریج صورت پذیرد یا به مرکز اتفاق افتد، یا ترکیبی از هر دو حرکت باشد، و سوی آن به طرف هر یک از جهت‌های چهارگانه یا میانهٔ آن‌ها باشد و نیز ممکن است، این حرکت ناگهانی و یا پیدایش سبب آن، اتفاق یکبارهٔ سنگینی‌ها از جایی به جای دیگر است، صورت پذیرد...» «تحدید نهایات الاماکن لتصحیح مسافات الاماکن؛ اندازه‌گیری پایان‌های جای‌ها، برای درست کردن مسافت‌های جایگاه‌ها، برگردان احمد آرام، ۱۳۵۲.ا.

ما در این جا از بحث بیشتر دربارهٔ جنبه‌های گوناگون کارهای علمی بیرونی می‌گذریم و به کوتاهی دربارهٔ شخصیت ریاضی او و کارهایی که در زمینهٔ ریاضیات کرده است، صحبت می‌کنیم.

بیرونی ضمن بحث‌های تاریخی هر جا به مسئله‌ای برمی‌خورد که جنبهٔ ریاضی داشته است، آن را با دقت و استدلال حل می‌کند. از جمله، وقتی در «آثار الباقیه» به مسئله‌ای برمی‌خورد که مربوط به صفحهٔ شطرنج است و به محاسبهٔ مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی (با جملهٔ اول واحد و قدرنسبت ۲ و تعداد جمله‌های ۶۴) برخورد می‌کند، آن را با دقت استدلال ریاضی حل می‌کند و به‌دست می‌آورد:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

$$= 18446744073709551615$$

ابوریحان ابتدا اثبات می‌کند که توان دوم هر جمله از این تصاعد برابر است با جمله‌ای که فاصله آن تا این جمله، برابر فاصله این جمله تا جمله اول است. برای نمونه، اگر عدد خانه پنجم را که ۱۶ است به توان دو برسانیم، ۲۵۶ به دست می‌آید که عدد خانه نهم است. در ضمن فاصله خانه نهم از خانه پنجم برابر است با فاصله خانه پنجم از خانه اول. ابوریحان سپس ثابت می‌کند، اگر یک واحد از عدد خانه‌ها کم کنیم، مجموع عددهای خانه‌های قبل به دست می‌آید. برای نمونه، اگر از خانه پنجم که ۱۶ است، یک واحد کم کنیم، ۱۵ به دست می‌آید که برابر است با مجموع جمله‌های از خانه اول تا چهارم.

$$1+2+4+8=15$$

با توجه به این دو مطلب، ابوریحان نتیجه می‌گیرد که مجموع جمله‌ها از خانه اول تا خانه شصت و چهارم برابر می‌شود با: $1-36$.

اگر ۱۶ را که عدد خانه پنجم است، به توان دوم برسانیم، ۲۵۶ به دست می‌آید که عدد خانه نهم است. توان دوم ۲۵۶، عدد خانه هفدهم است (۶۵۵۳۶). اگر این عدد را به توان دو برسانیم، $4/294/967/296$ به دست می‌آید که عدد خانه سی و سوم است. و اگر این عدد را به توان دو برسانیم، عدد خانه شصت و پنجم پیدا می‌شود که با کم کردن یک واحد از آن، مجموع جمله‌های تا خانه شصت و چهارم به دست می‌آید.

بیشتر رساله‌ها و نوشته‌های ابوریحان مربوط به ریاضیات است. برای نمونه، در کتاب «فی‌الراشیکات الهند» می‌نویسد: «... چون عدد را باید بی‌پایان دانست، باید تناسب‌ها و عمل‌ها هم بی‌پایان باشد، ولی هندیان را دیدم که از حد معینی تجاوز نمی‌کنند... آن‌ها در حساب‌های خود روش عددی به کار می‌برند... چه بهتر که در استدلال از تجزیه و تحلیل هندسی

هم استفاده کنند.» در همین «آثارالباقیه» بیرونی روش‌هایی برای تصویر کردن نقطه‌های واقع بر سطح کره روی صفحه آورده است.

استخراج الاوتار

«استخراج الاوتار» یکی از کتاب‌های ابوریحان است که در آن قضیه‌هایی از هندسه را طرح و آن‌ها را گاه به یاری حساب و جبر و گاه با استدلال هندسی حل کرده است. نام کامل این کتاب «استخراج الاوتار فی الدایره» است که با تألیف دیگری از بیرونی به نام «جمع الطرق السائره فی معرفة الاوتار الدایره»، درباره محاسبه وترهای دایره است و به ظاهر ابوریحان بیرونی آن‌ها را برای پیدا کردن سینوس کمان‌ها آورده است. زنده یاد ابوالقاسم قربانی، این قضیه‌ها و مسئله‌ها را به زبان فارسی و با نمادهای امروزی در کتابی به نام «تحریر استخراج الاوتار» گرد آورده که «انجمن آثار ملی» در سال ۱۳۵۵ هجری خورشیدی آن را چاپ کرده است. این کتاب حاوی چهار قضیه و سی مسئله است. صورت قضیه اول چنین است: اگر خط شکسته‌ای شامل دو وتر نابرابر در دایره‌ای داشته باشیم و از وسط کمانی که این خط شکسته را دربر گرفته است، عمودی بر وتر بزرگ‌تر رسم کنیم، پای عمود، خط شکسته را به دو بخش برابر تقسیم می‌کند. برای این قضیه ۲۲ برهان آورده است.

صورت مسئله اول این است: از مثلث ABC اندازه زاویه B، مجموع طول‌های دو ضلع AB و BC و طول ضلع AC معلوم است. مثلث را رسم کنید. در این مسئله‌ها، با معلوم بودن طول وتر یک کمان، طول وتر دو برابر آن و طول وتر نصف یا $\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{8}$ آن کمان محاسبه شده است. کتاب‌هایی که در آن‌ها ابوریحان به مثلثات پرداخته است عبارت‌اند از: «مقالید

علم الهیة»، «فصل سوم قانون مسعودی» و «ابی‌ریحان الی ابی سعید» در کتاب «مقالید علم الهیة» مثلثات و به‌ویژه مثلثات کروی را جدا از کاربرد آن‌ها مطرح کرده و کتاب را به مرزبان، فرزند رستم، فرزند شروین، مؤلف «مرزبان‌نامه» تقدیم کرده است. این کتاب نشان می‌دهد که خواجه نصیر توسی با نوشتن «کشف‌القناع»، تدوین‌کننده مثلثات به عنوان رشته خاصی از ریاضیات محاسبه‌ای، از ابوریحان تقلید کرده است و آفریننده مثلثات را باید ابوریحان بیرونی دانست. در این کتاب که کوچک است و از ۵۰ صفحه کمتر، ابوریحان درباره مثلث کروی بحث کرده و سپس محاسبه کمان‌های آسمانی را به عنوان کاربرد آن مطرح کرده است.

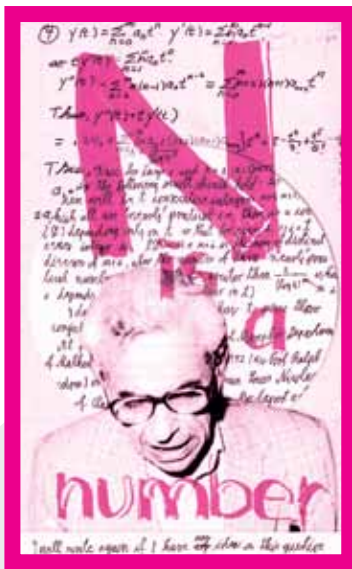
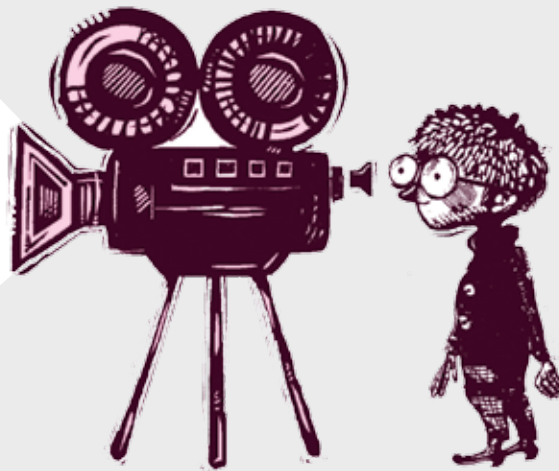
کتاب مقالید

کتاب مقالید از دیدگاه تاریخ ریاضی هم اهمیت دارد. بیرونی در این کتاب از همه کسانی که قبل از او و یا در زمان او روی «قضیه منه لائوس» درباره مثلث کروی کار کرده و جنبه‌هایی از آن را به صورت مثلثاتی درآورده‌اند، صحبت می‌کند. تا زمانی که کتاب «مقالید» پیدا نشده بود، همه گمان می‌کردند که توسی برای نخستین بار مثلثات را بدون توجه به اخترشناسی، به عنوان رشته‌ای مستقل از دانش ریاضی مورد بحث قرار داده است، ولی با کشف کتاب مقالید ابوریحان بیرونی، حق به حق‌دار رسید.

بیرونی کتاب قانون را در سال‌های ۴۲۱ تا ۴۲۷ نوشته که مقاله سوم آن درباره مثلثات است. در این‌جا بیرونی همه چیز را می‌آورد ولی جانب اختصار را نگه می‌دارد. این کتاب دارای ۹ بخش است و به‌ویژه در بخش‌های ششم و هفتم، همه موضوع‌هایی را که ابوریحان بیرونی درباره مثلثات، از جمله آنچه در کتاب‌های دیگر خود آورده، خلاصه کرده است.



"N" is a number!



- اسم فیلم: این یک عدد است ■ کارگردان: جورج پُل چیچری^۱
- هنرپیشه: پُل اِردوش^۲ ■ موسیقی از: مارک آدلر^۳ ■ فیلم بردار: جان نوپ^۴
- محصول: ایالات متحده آمریکا ■ مدت فیلم: ۵۷ دقیقه ■ زبان: انگلیسی

N یک عدد است!

تصویری از پُل اِردوش

ادِنسور لیتلِوود^{۱۵} (۱۸۸۵-۱۹۷۷) اشاره می‌شود. در ضمن در مورد «قضیهٔ چیشِف»^{۱۶}، قضیهٔ گالای - سیلوستر^{۱۷} و «قضیهٔ رمزی»^{۱۸} نیز مطالب جالب توجه و ارزنده‌ای ارائه می‌شود.

از صحنه‌های جالب این فیلم می‌توان به صحنه‌های زیر اشاره کرد:

- گردش دایره‌وار یک سکه به دور یک بشقاب براساس نیروی جانب مرکز.
- شوخی‌ها و مزاح‌های پُل اِردوش در مواجهه با ریاضی‌آموزان در کلاس درس مانند این نمونه: پُل اِردوش معادل نام و نام خانوادگی خود را به زبان انگلیسی روی تختهٔ کلاس می‌نویسد و آن را هم سنگ عبارت

ممکن است در نظر جهانیان جلوه‌گر شوم. اما همین قدر می‌دانم که همچون کودک خردسالی هستم که در ساحل دریا مشغول بازی‌ام و گاه‌گاهی سنگ ریزه‌های صاف‌تر از سنگ‌های دریا یا صدفی زیباتر از صدف‌های دریا می‌یابم؛ در حالی که اقیانوس عظیم حقیقت در مقابل من گسترده است و مرا بر آن آگاهی نیست.

در این فیلم به چند چهرهٔ برجسته علمی، مانند ریاضی‌دان انگلیسی، گادفری هارولد هاردی^{۱۲} (۱۸۷۷-۱۹۴۷)، ریاضی‌دان مجارستانی، تیبور گالای^{۱۳} (۱۹۹۲-۱۹۱۲)، رنی آلفرد^{۱۴} (۱۹۷۰-۱۹۲۱)، پال توران (۱۹۷۶-۱۹۱۰) و ریاضی‌دان بریتانیایی، جان

فیلم مستند «این یک عدد است، تصویری از پُل اِردوش»، زندگی ریاضی‌دان مجارستانی، پُل اِردوش (۱۹۹۶-۱۹۱۳) را به تصویر می‌کشد. اِردوش بیشترین تعداد مقالات را در طول تاریخ ریاضیات در مقایسه با دیگر ریاضی‌دانان منتشر کرده است. وی با بیش از ۱۰۰ ریاضی‌دان دیگر سابقهٔ همکاری و تبادل نظر داشته و روی شاخه‌هایی از ریاضیات مانند ترکیبیات^۵، نظریه گراف^۶، نظریهٔ اعداد^۷، نظریهٔ تخمین^۸، نظریهٔ مجموعه‌ها^۹ و نظریهٔ احتمال^{۱۰} کار کرده است.

فیلم با اشاره به متنی از سر ایزاک نیوتن^{۱۱}، ریاضی‌دان بزرگ انگلیسی آغاز می‌شود: «من نمی‌دانم چگونه

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: معماهای عدد سال نو!



سال نو در راه است!
نوروز ۱۳۹۲ بر همه شما
خوانندگان عزیز مجله مبارک
باد! به این مناسبت در نظر
داریم تعدادی معمای عددی
در ارتباط با عدد این سال،
یعنی ۱۳۹۲ مطرح کنیم.
پاسخ‌ها را در انتهای همین
بخش ملاحظه کنید:

۱. می‌توان دید که:

$۸۷ \times ۲^۴ = ۱۳۹۲$ ، یعنی حاصل ضرب توان چهارم یک عدد اول در یک
عدد اول دیگر است. حداقل چند سال باید صبر کنیم تا دوباره این
وضع به وجود آید؟

۲. حداقل چند سال باید صبر کنیم تا عدد سال به صورت حاصل ضرب
دو عدد اول متمایز دربیاید؟

۳. آیا می‌توانید تعدادی عدد طبیعی متوالی بیابید که مجموع آن‌ها
مساوی ۱۳۹۲ شود؟

۴. تعداد صفرهای سمت راست عدد ۱۳۹۲! چند است؟

۵. رقم سمت راست عدد $۱۳۹۲^{۱۳۹۲}$ چیست؟

۶. عددهای طبیعی متوالی را که حاصل ضرب آن‌ها از ۱۳۹۲
بزرگ‌تر و مجموع آن‌ها مینی‌م مقدار ممکن باشد
مشخص کنید.

۷. آیا جمله‌ای از دنباله $a_n = n^2 - ۳n$ مساوی
۱۳۹۲ است؟ چندمین جمله؟

منطق روشی قاعده‌مند

برای گرفتن نتایج نادرست است...
با تردستی و جلب اعتماد، اما به
یقین، آمار روشی قاعده‌مند برای
گرفتن نتایج نادرست است... با
۹۵ درصد تردستی و جلب اعتماد!

«رافی ماروتیان»



PGOM LD AD LD CD در نظر

می‌گیرد؛ یا به بیان دیگر:

Paul Erdős $\equiv$ PGOM LD AD

LD CD

سپس به توضیح و تفسیر هر یک
از حروف ترکیبی می‌پردازد که
معادل با نام و نام خانوادگی وی
در نظر گرفته شده‌اند و بیانگر
حرف ابتدای کلمه‌ها و واژگانی
هستند. او با استفاده از این روش و
مشخص شدن معنا و مفهوم فکاهی
معادل‌هایی که او برای معرفی خود
به دانشجویان به کار برده است،
باعث خنده و سرگرمی دانشجویان
در کلاس درس می‌شود.

● بازی کردن با خردسالان با یک
قوطی بسیار کوچک که داخل آن
شیئی نسبتاً سنگینی قرار دارد. وی
هنگامی که قوطی را رها می‌کند،
قبل از این که بر اثر نیروی گرانش
با زمین برخورد کند، با حرکتی
سریع آن را در اختیار می‌گیرد و
با انجام این کار توجه کودکان را به
خود معطوف می‌کند.

پی‌نوشت.....

1. George Paul Csicsery
2. Paul Erdős
3. Mark Adler
4. John Knoop
5. Combinatorics
6. Graph Theory
7. Number Theory
8. Approximation Theory
9. Set Theory
10. Probability Theory
11. Sir Isaac Newton
12. Godfrey Harold Hardy
13. Tibor Gallai
14. Renyi Alfred
15. John Edensor Littlewood
16. Chebychev's Theorem
17. Callai - Sylvester Theorem
18. Ramsey Theorem

بزرگ‌نمایی

یافتن دنباله تقریبات اعشاری اعداد گویا و گنگ به روش

آموزشی

عنايت‌الہ راستی‌زادہ

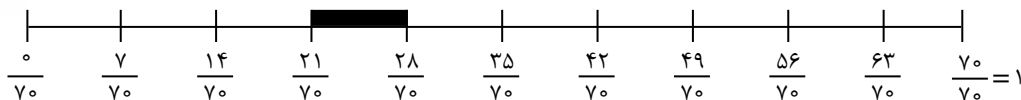
دبير رياضي دبیرستان‌های شیراز

اشاره

برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ می‌توان با انجام عمل تقسیم a بر b و نوشتن اعدادی که در خارج قسمت به‌دست می‌آیند، دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به عدد $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شوند. در ادامه با روشی آشنا خواهیم شد که در آن بدون عمل تقسیم دنباله تقریبات اعشاری عدد را بیابیم.

مثال ۱. به روش بزرگ‌نمایی، دنباله تقریبات اعشاری عدد $\frac{3}{7}$ را (تا ۳ مرحله) بیابید.

۱. ابتدا توجه می‌کنیم که $\frac{3}{7} < 1$ ، اما $\frac{3}{7} > 0$ ، چون می‌خواهیم از روش بزرگ‌نمایی ۱۰ قسمتی استفاده کنیم، فاصله صفر تا ۱ را به صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

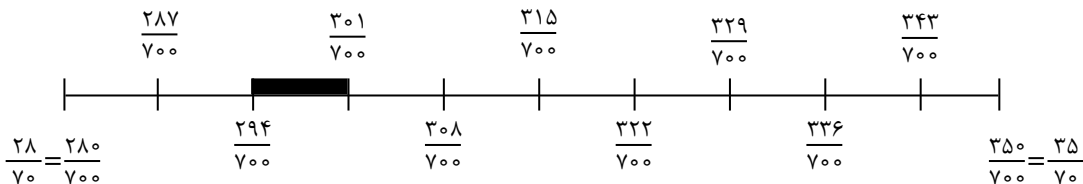


حال باید دید که $\frac{3}{7}$ در کدام یک از زیربازه‌های بالا قرار دارد. توجه می‌کنیم که:

$$\frac{3}{7} = \frac{30}{70} \quad \text{و} \quad 28 < 30 < 35 \quad \text{و} \quad 28 \text{ و } 35 \text{ مضرب‌های مخرج کسر، یعنی } 7 \text{ هستند، در نتیجه: } \frac{28}{70} < \frac{30}{70} < \frac{35}{70} \text{، پس:}$$

$$0.4 < \frac{3}{7} < 0.5$$

۲. حال بازه $[\frac{28}{70}, \frac{35}{70}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{1}{100}$ تقسیم می‌کنیم:

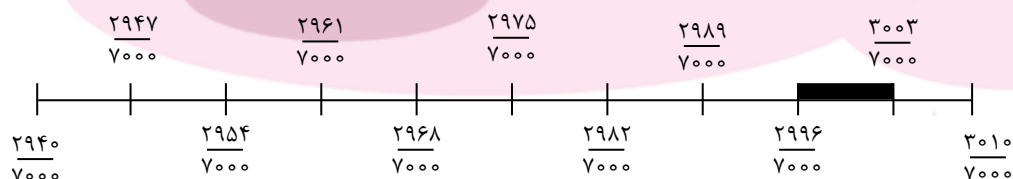


باید دید که $\frac{3}{7}$ در کدام یک از زیربازه‌های اخیر قرار دارد. توجه می‌کنیم که:

$$\frac{3}{7} = \frac{300}{700} \quad \text{و} \quad \frac{294}{700} < \frac{300}{700} < \frac{301}{700} \quad \text{و} \quad 294 \text{ و } 301 \text{ نیز مضرب‌های متوالی } 7 \text{ می‌باشند در نتیجه: } 0.42 < \frac{3}{7} < 0.43$$

۳. در این مرحله می‌خواهیم به سومین جمله دنباله تقریبات اعشاری $\frac{3}{7}$ دسترسی یابیم. بازه $[\frac{294}{700}, \frac{301}{700}]$ را به ۱۰

زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{1}{1000}$ تقسیم می‌کنیم:



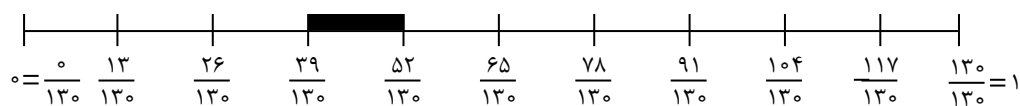
داریم: $\frac{3}{7} = \frac{3000}{7000}$ و $2996 < 3000 < 3003$ ، لذا: $\frac{2996}{7000} < \frac{3}{7} < \frac{3003}{7000}$..

با توجه به مراحل فوق می توان دید که سه جمله نخست دنباله تقریب های اعشاری $\frac{3}{7}$ (به روش بزرگنمایی ۱۰ قسمتی) $0/4, 0/42, 0/428, \dots$ به صورت زیرند:

با ادامه این روش می توان به اندازه دلخواه به $\frac{3}{7}$ نزدیک شد. توجه کنید که در هیچ کدام از مراحل فوق از عمل تقسیم استفاده نشده است.

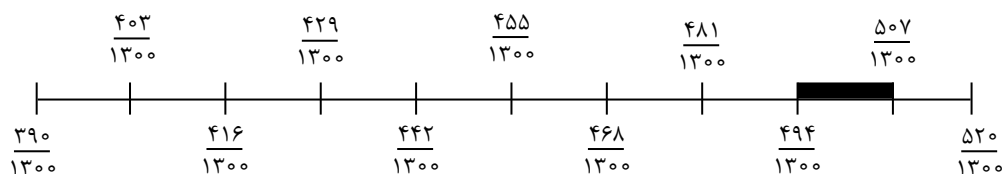
مثال ۲. دنباله تقریبات اعشاری $\frac{5}{13}$ را به روش بزرگنمایی بیابید. پاسخ را به صورت خلاصه می آوریم:

مرحله اول: ابتدا توجه می کنیم که: $0 < \frac{5}{13} < 1$



$$\frac{5}{13} = \frac{50}{130}, 39 < 50 < 52 \Rightarrow \frac{39}{130} < \frac{50}{130} < \frac{52}{130} \Rightarrow \frac{3}{10} < \frac{5}{13} < \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{5}{13} \in \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$$

مرحله دوم: بازه $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$ را به ۱۰ زیربازه با طول های مساوی $\frac{1}{100}$ تقسیم می کنیم:



$$\frac{5}{13} = \frac{50}{130} = \frac{500}{1300}, 494 < 500 < 507 \Rightarrow \frac{494}{1300} < \frac{5}{13} = \frac{500}{1300} < \frac{507}{1300} \Rightarrow \frac{38}{100} < \frac{5}{13} < \frac{39}{100}$$

مرحله سوم: دیدیم که: $\frac{5}{13} \in [\frac{38}{100}, \frac{39}{100}]$. این بازه را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{1}{1000}$ تقسیم می‌کنیم و به

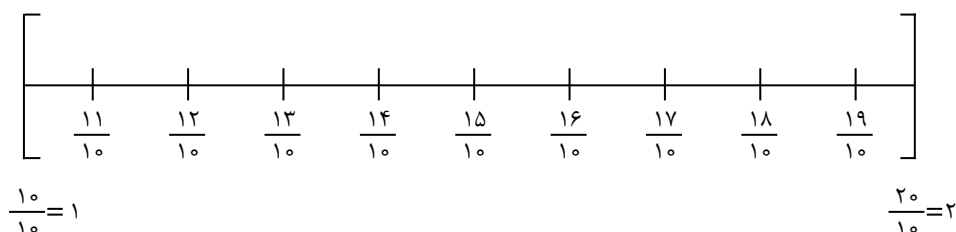
$$\frac{5}{13} \in [\frac{384}{1000}, \frac{385}{1000}]$$

سادگی خواهیم دید که:

پس سه جمله اول دنباله تقریبات اعشاری کسر $\frac{5}{13}$ به صورت مقابلند: $0/3, 0/38, 0/384, \dots$
 اکنون به چند مثال از کاربرد روش بزرگنمایی برای یافتن دنباله تقریبات اعشاری اعداد گنگ توجه فرمایید:

الف) یافتن دنباله‌ای از تقریبات اعشاری که به $\sqrt{3}$ نزدیک می‌شوند

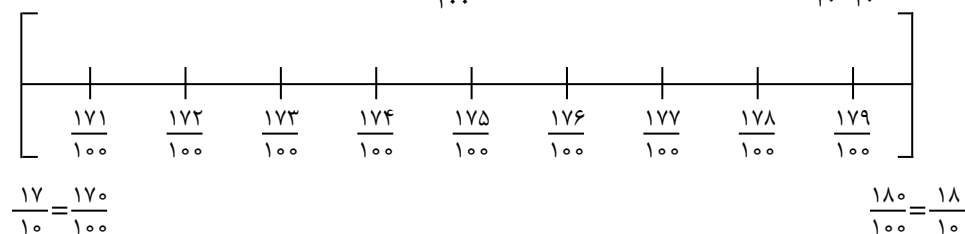
۱. می‌دانیم: $3 < 3^2$ ، بنابراین: $1 < \sqrt{3} < 2$. حال بازه $[1, 2]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی تقسیم می‌کنیم:



حال باید دید که $\sqrt{3}$ در کدام یک از زیربازه‌های فوق قرار دارد.

توجه می‌کنیم که $3 = \frac{300}{100}$ و $\frac{289}{100} < \frac{300}{100} < \frac{324}{100}$. در نتیجه: $\frac{17}{10} < \sqrt{3} < \frac{18}{10}$. پس: $1/7 < \sqrt{3} < 1/8$.

۲. حال بازه $[\frac{17}{10}, \frac{18}{10}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{1}{100}$ تقسیم می‌کنیم:



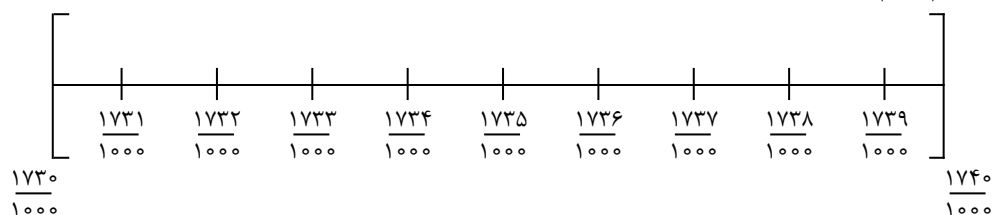
باید دید که $\sqrt{3}$ در کدام یک از زیربازه‌های اخیر واقع است. ناچاریم از مربع کسرهای اخیر استفاده کنیم. توجه می‌کنیم که:

$$\frac{173}{100} < \sqrt{3} < \frac{174}{100}, \text{ در نتیجه: } \frac{(173)^2}{(100)^2} = \frac{29929}{10000} < 3 = \frac{30000}{10000} < \frac{(174)^2}{(100)^2} = \frac{30276}{10000}$$

پس: $1/73 < \sqrt{3} < 1/74$

۳. به سومین مرحله خوش آمدید! در این مرحله می‌خواهیم به سومین جمله دنباله تقریبات اعشاری $\sqrt{3}$ برسیم. برای پرهیز از تکراری شدن محاسبات، به همین مرحله اکتفا خواهیم کرد.

بازه $[\frac{173}{100}, \frac{174}{100}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{1}{1000}$ تقسیم می‌کنیم:



حال ببینیم که $\sqrt{3}$ در کدام یک از زیربازه‌های فوق قرار می‌گیرد. باز هم مانند مرحله قبل از مربع کسرهای استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\left(\frac{1732}{1000}\right)^2 = \frac{2999824}{1000000} < 3 = \frac{3000000}{1000000} < \frac{3003289}{1000000} = \left(\frac{1733}{1000}\right)^2$$

در نتیجه: $\frac{1732}{1000} < \sqrt{3} < \frac{1733}{1000}$ یا: $1/732 < \sqrt{3} < 1/733$.

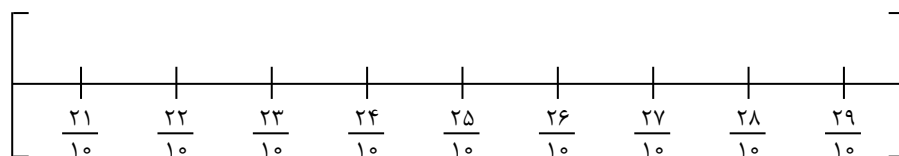
با توجه به مراحل فوق می‌توان دید که سه جمله نخست دنباله تقریب‌های اعشاری $\sqrt{3}$ به صورت زیرند: $1/7, 1/73, 1/732, \dots$

با ادامه این روش می‌توان به اندازه دلخواه به $\sqrt{3}$ نزدیک شد.

ب) یافتن دنباله‌ای از تقریبات اعشاری که به $\sqrt{7}$ نزدیک می‌شوند

به عنوان مثالی دیگر به سراغ $\sqrt{7}$ می‌رویم و سه جمله نخست دنباله تقریب‌های اعشاری آن را پیدا می‌کنیم.

۱. می‌دانیم: $3^2 < 7 < 4^2$ ، بنابراین: $3 < \sqrt{7} < 4$. حال بازه $[2, 3]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{1}{10}$ تقسیم می‌کنیم



$$2 = \frac{20}{10}$$

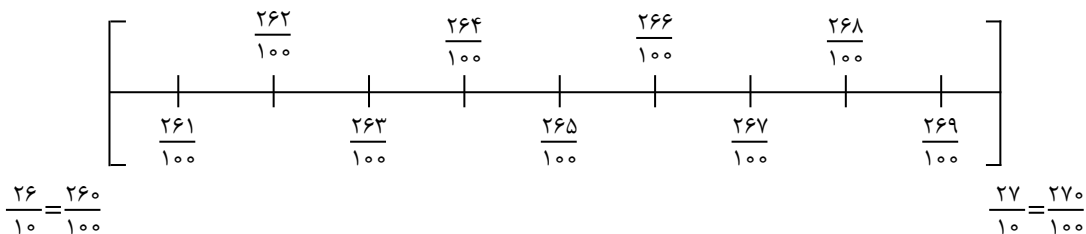
$$3 = \frac{30}{10}$$

باید دید که $\sqrt{7}$ در کدام یک از زیربازه‌های فوق واقع است. به این منظور از مربع کسرهای بالا کمک می‌گیریم.

$$\left(\frac{26}{10}\right)^2 = \frac{676}{100} < 7 = \frac{700}{100} < \frac{729}{100} = \left(\frac{27}{10}\right)^2$$

پس $\frac{26}{10} < \sqrt{7} < \frac{27}{10}$ یا $2/6 < \sqrt{7} < 2/7$

۲. در این مرحله بازه $[\frac{26}{10}, \frac{27}{10}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{1}{100}$ تقسیم می‌کنیم:



مجدداً از مربع کسرهای فوق استفاده می‌کنیم. داریم:

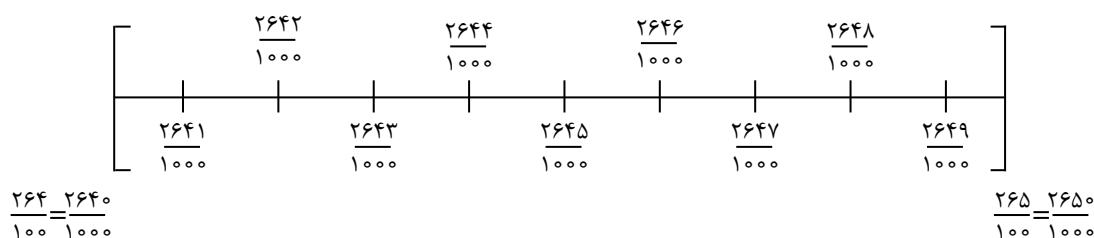
$$\left(\frac{264}{100}\right)^2 = \frac{69696}{10000} < 7 = \frac{70000}{10000} < \frac{70225}{10000} = \left(\frac{265}{100}\right)^2$$

یا $\frac{264}{100} < \sqrt{7} < \frac{265}{100}$ یا $2/64 < \sqrt{7} < 2/65$

۳. در سومین مرحله قصد داریم سومین جمله دنباله تقریب‌های اعشاری $\sqrt{7}$ را پیدا کنیم. با استفاده از مرحله قبل به

سراغ بازه $[\frac{264}{100}, \frac{265}{100}]$ می‌رویم و آن را به ۱۰ زیربازه هر کدام به طول $\frac{1}{1000}$ تقسیم می‌کنیم:





به همین ترتیب لازم است از مربع کسره‌های فوق کمک بگیریم. داریم:

$$\left(\frac{2645}{1000}\right)^2 = \frac{6996025}{1000000} < 7 = \frac{7000000}{1000000} < \frac{7001316}{1000000} = \left(\frac{2646}{1000}\right)^2$$

$$\text{پس: } \frac{2645}{1000} < \sqrt{7} < \frac{2646}{1000} \text{ یا: } \frac{2}{645} < \sqrt{7} < \frac{2}{646}$$

لذا دنباله تقریب‌های اعشاری $\sqrt{7}$ چنین است:

$$2/6, 2/64, 2/645, \dots$$

می‌توان دید که جمله چهارم این دنباله $2/6457$ است که تقریب دقیق‌تر از $\sqrt{7}$ محسوب می‌شود.

دو مثال فوق به وضوح دقت عمل و در عین حال سادگی یک روش مناسب برای محاسبه تقریب اعداد گنگی نظیر $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ را توسط اعداد گویا نمایان می‌کنند. در هر حال این عددهای گویا، شکل ویژه‌ای دارند که مخرج آن‌ها توان‌هایی از ۱۰ هستند.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: یک حکایت خواندنی از زندگی جان نپر



احتمالاً با نام جان نپر آشنا هستید. او مخترع لگاریتم طبیعی و ریاضی‌دان بنام اسکاتلندی است که در فاصله سال‌های ۱۶۱۷-۱۵۵۰ می‌زیست. وی علاوه بر ریاضیات در مهندسی، فیزیک و تردستی نیز مهارت داشت. هم‌عصران وی به دلیل نبوغ خارق‌العاده‌ای که داشت، معتقد بودند که او در جادو و سحر نیز دستی دارد. خود او با کارهایش به این تصور دامن می‌زد. حکایت زیر معرف این وجه از شخصیت اوست.

زمانی نپر احساس کرد که یکی از خدمتکارانش از او دزدی می‌کند. همه خدمتکارانش را گرد آورد و به آن‌ها اعلام کرد که خروس سیاه پرکلاغی‌اش می‌تواند دزد را شناسایی کند. پیش از آن و

دور از چشم خدمتکاران، او پرهای خروسش را به دوده ذغال آغشته کرده بود و او را روی میزی در اتاق تاریکی قرار داده بود. سپس یکی یکی خدمتکاران را به نوبت به داخل اتاق تاریک می‌فرستاد و از آن‌ها می‌خواست که پشت خروس را نوازش کنند تا به زعم او، خروس، دزد را شناسایی کند! وقتی خدمتکاران بیرون می‌آمدند، نپر دست‌های آن‌ها را نگاه می‌کرد. خدمتکار مجرم کسی بود که از ترس پشت خروس را لمس نکرده بود و در نتیجه دست‌هایش تمیز بودند!



توابع متناوب توابع نامتناوب

آموزشی

رای. اسمیرنوا

ترجمه: ابراهیم دارابی

یعنی تابع $f(x)$ نامتناوب نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $T > 0$ عددی مانند $x \in D(f)$ یافت شود؛ طوری که حداقل یکی از شرایط سه‌گانه که در تعریف تابع متناوب آورده شده است، برقرار نباشد.

مثال ۱. ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ متناوب نیست.
اثبات: دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی منهای $x = 0$ است.

فرض کنیم T عدد مثبت دلخواه باشد. چون $T \neq 0$ ، پس $-T = x$ به دامنه تابع تعلق دارد. اما داریم:

$x_1 + T = (-T) + T = 0$ ، $x_1 + T \notin D(f)$
یعنی شرط (۱) در تعریف تابع متناوب نقض شده است.
پس تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ متناوب نیست.

مثال ۲. ثابت کنید تابع $f(x) = x^2$ متناوب نیست.
اثبات:

روش اول: دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی است. بنابراین برای هر T دلخواه نقاط $x + T$ و $x - T$ در دامنه تعریف تابع قرار دارند. پس لازم است ثابت کنیم به ازای هر $T > 0$ حداقل یک مقدار برای x وجود دارد که در ازای آن داشته باشیم:
 $f(x + T) \neq f(x)$

در حالت خاص می‌توان $x = 0$ را در نظر گرفت. در این صورت داریم:
 $f(x) = f(0) = 0$ ، $f(x + T) = f(T) = T^2 > 0$
 $\Rightarrow f(x + T) \neq f(x)$

روش دوم: برای اثبات نامتناوب بودن تابع می‌توان از قضیه زیر استفاده کرد:

تعییه: اگر همه توابع متناوب چند ویژگی داشته باشند، هر تابعی که یکی از این ویژگی‌ها را نداشته باشد، متناوب نیست

در طبیعت و صنعت جریان‌هایی وجود دارند که در زمان‌های معینی متناوباً تکرار می‌شوند. این نوع جریان‌ها را «متناوب» می‌نامند و به کمک توابع متناوب تعریف می‌کنند.
تعریف: فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در دامنه تعریف $D(f)$ مفروض باشد. تابع $f(x)$ را در این دامنه متناوب می‌نامند اگر عدد مثبتی مانند T وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D$ داشته باشیم:

- ۱) $x + T \in D(f)$
- ۲) $x - T \in D(f)$
- ۳) $f(x + T) = f(x)$

هر وقت از توابع متناوب سخن به میان می‌آید، دانش آموزان به درستی از توابع مثلثاتی نام می‌برند. اما آن‌ها باید بدانند که علاوه بر توابع مثلثاتی، توابع غیرمثلثاتی هم وجود دارند که متناوب هستند. در این مقاله با این نوع توابع آشنا می‌شویم.
مثلاً توابع $y = \cos x$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، $y = \{x\}$ متناوب اند. توابع متناوب را غالباً به صورت زیر هم تعریف می‌کنند:

$$y = f(g(x))$$

که در آن g تابع متناوب و f تابع دلخواهی است.
به عنوان مثال توابع زیر متناوب هستند:

$$y = \cos^2 x, y = \log \cos x, y = |\sin 2x|$$

دانش آموزان رشته ریاضی معمولاً با مسائلی مواجه می‌شوند که در آن‌ها از دانش آموز خواسته می‌شود ثابت کنند تابعی متناوب است. در اینجا دانش آموزان ابتدا متناوب بودن تابع را حدس می‌زنند و سپس با استفاده از تعریف تابع متناوب، به اثبات آن می‌پردازند.

برای اثبات نامتناوب بودن تابع، به دو طریق عمل می‌شود:

۱. با استفاده از تعریف تابع متناوب؛

۲. با استفاده از تعریف تابع نامتناوب.

تعریف: تابع نامتناوب تابعی است که تعریف تابع متناوب در آن صدق نمی‌کند.

ویژگی‌های توابع متناوب

۱. اگر نقطه x به دامنه تابع متناوب با دوره تناوب T تعلق داشته باشد، آن گاه همه نقاط $x + nT$ به دامنه تابع تعلق دارد. که در آن n عدد صحیح دلخواه است. این نشان می‌دهد که دامنه توابع متناوب شامل همه اعداد مثبت و منفی از بازه $(-\infty, +\infty)$ هستند.

از آنجا نتیجه می‌شود که مثلاً تابع $y = \log_a x$ متناوب نیست، زیرا هر $x \leq 0$ به دامنه تابع تعلق ندارد.

۲. برای تابع متناوب $f(x)$ در ازای x هایی که از نظر تعداد نامتناهی باشند، مقادیر نظیری پیدا می‌شوند که بین آن‌ها اعداد مثبت و منفی از نظر قدر مطلق هر چه قدر که بزرگ باشند، وجود دارند. این ویژگی از تساوی زیر نتیجه می‌شود که درباره توابع متناوب با دوره $T > 0$ همواره صادق است:

$$f(x + nT) = f(x)$$

و در آن داریم: $T > 0, x \in \mathbb{Z}$

در حالت خاص تابع متناوب در دامنه تعریف خود نمی‌تواند صعودی یا نزولی یکنوا باشد.

مثلاً تابع $y = a^x$ ($a \neq 0$) متناوب نیست، زیرا تابع صعودی یکنوا است.

۳. توابع متناوب در دامنه تعریف خود نمی‌توانند از نقطه نظر تعداد، نقاط انفصال متناهی داشته باشند. مثلاً تابع $y = \frac{1}{x(x-2)}$ متناوب نیست؛ زیرا تنها دارای دو نقطه انفصال است: $x = 0$ و $x = 2$. منظور از نقطه انفصال همان نقطه ناپیوستگی است.

۴. اگر تابع $f(x)$ متناوب و در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده باشد، آن گاه معادله:

$$f(x + T) = f(x)$$

که در آن T به عنوان مجهول و x پارامتر در نظر گرفته می‌شود، دست کم یک ریشه مثبت مانند $T = T$ خواهد داشت که به ازای همه مقادیر پارامتر $x \in \mathbb{R}$ در معادله صدق می‌کند.

مثال ۳. ثابت کنید تابع $f(x) = \{x\} + \sin x$ متناوب نیست.

اثبات: فرض کنیم تابع با دوره تناوب $T > 0$ متناوب باشد (تناقض)، در این صورت به ازای هر x دلخواه تساوی زیر برقرار است:

$$\{x + T\} + \sin(x + T) = \{x\} + \sin x$$

این تساوی به ازای $x = 0$ هم برقرار است:

$$\{T\} + \sin T = 0 \quad (1)$$

به ازای $x = -T$ داریم:

$$\{-T\} - \sin T = 0 \quad (2)$$

از جمع تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\{T\} + \{-T\} = 0$$

جزء اعشاری هر عدد، همواره نامنفی است، پس:

$$\{T\} = \{-T\} = 0$$

یعنی T عدد صحیح است. اگر: $\{T\} = 0$ ، آن گاه از معادله (۲) نتیجه می‌شود: $\sin T = 0$ و یا $T = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. اما اگر $k \neq 0$ ، آن گاه $T = k\pi$ عدد صحیح نیست.

بنابراین معادله‌های (۱) و (۲) تنها یک ریشه مشترک $T = 0$ دارند. پس تابع $f(x)$ متناوب نیست.

۵. اگر در تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب T ، در بازه‌ای مانند $[a, a + T]$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$|f(x)| \leq M$$

آن گاه این نامساوی به ازای همه مقادیر متغیر x برقرار است.

از آنجا نتیجه می‌شود که اگر تابع متناوب $f(x)$ به ازای همه مقادیر حقیقی تعریف شده و پیوسته باشد، آن گاه عددی مانند $M > 0$ وجود دارد که به ازای همه مقادیر $x \in \mathbb{R}$ تساوی زیر برقرار است:

$$|f(x)| \leq M$$

تمرین همراه با حل

مسئله ۱. ثابت کنید تابع $f(x) = |\sin x|$ با دوره تناوب π متناوب است.

حل: دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی است. بنابراین به ازای هر x نقاط $x + T$ و $x - T$ به دامنه تابع تعلق دارند. پس تساوی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$f(x + \pi) = f(x)$$

داریم:

$$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$$

مسئله ۲. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \cos^4 x + \sin x$ را پیدا کنید.

حل: دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی است. پس به ازای هر x از دامنه، اعداد $x + T$ و $x - T$ به دامنه تابع تعلق دارند. عدد 2π دوره تناوب تابع است، زیرا:

$$\cos^4(x + 2\pi) + \sin(x + 2\pi) = \cos^4 x + \sin x$$

از آنجا معلوم می‌شود که این معادله بیش از دو ریشه ندارد. بنابراین تابع $f(x)$ در بیش از دو نقطه نمی‌تواند مقادیر نظیر خود را اختیار کند. پس بنا بر ویژگی ۲ تابع نمی‌تواند متناوب باشد.

مسئله ۵: نامتناوب بودن تابع $f(x) = \text{Arcsin } x$ را ثابت کنید.
حل: تابع در بازه $[-1, 1]$ تعریف پذیر است. بنابراین، بنا بر ویژگی ۱ نمی‌تواند متناوب باشد.

مسئله ۶: نامتناوب بودن تابع $f(x) = 2x \cos(x^2)$ را ثابت کنید

حل: دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی است. از راه تناقض حکم مسئله را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم تابع متناوب و دوره تناوب آن $T > 0$ باشد. چون تابع $f(x)$ در مجموعه اعداد حقیقی تعریف پذیر است و در ازای $x \in [0, T]$ داریم: $|f(x)| \leq 2T$ ، بنا بر ویژگی ۵ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ نامساوی زیر برقرار است:

$$|2x \cos(x^2)| \leq T$$

اما اگر n طوری باشد که داشته باشیم: $\sqrt{2\pi n} > T$ ، آن‌گاه نامساوی بالا به ازای $x = \sqrt{2\pi n}$ برقرار نیست و این تناقض است.

مسئله ۷: ثابت کنید تابع $f(x) = \cos \log|x|$ متناوب نیست.
حل: دامنه تعریف تابع مجموعه اعداد حقیقی به جز $x = 0$ است؛ یعنی: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. اگر تابع $f(x)$ متناوب با دوره $T > 0$ باشد، آن‌گاه چون $T \in D(f)$ است، بنا بر تعریف توابع متناوب باید نتیجه بگیریم: $0 = T - T \in D(f)$ و این درست نیست.

مسئله ۸: ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \sqrt{|x|}$ متناوب نیست.
حل: فرض می‌کنیم تابع، متناوب و دوره تناوب آن T باشد. عدد مثبت x را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرط $\sin \sqrt{x} = 1$ صدق کند. در آن صورت داریم:

$$\sin \sqrt{x+T} = \sin \sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{x+T} - \sqrt{x} = 2\pi k, \quad x \in \mathbb{N}$$

واضح است که: $\sqrt{x+T} \geq \sqrt{x}$ و بنابراین:

$$\sqrt{x+T} \geq 2\pi + \sqrt{x}$$

در هر دو طرف نامساوی اعداد مثبت قرار دارند. بنابراین می‌توانیم طرفین آن را مجذور کنیم. خواهیم داشت:

$$x+T \geq 4\pi^2 + 4\pi\sqrt{x} + x$$

$$\Rightarrow T \geq 4\pi^2 + 4\pi\sqrt{x}$$

که این تناقض است. زیرا $\sqrt{x}$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که هر چه بیشتر بزرگ باشد؛ یعنی به ازای مقدار ثابت T نامساوی اخیر نمی‌تواند برقرار باشد.

ثابت می‌کنیم هیچ عدد مثبتی مانند T کوچک‌تر از 2π دوره تناوب تابع $f(x)$ نیست.

فرض کنیم چنین نباشد (تناقض). عددی مانند T وجود دارد که دوره تناوب تابع است و در ضمن: $0 < T < 2\pi$.

عدد $x = -\frac{T}{2}$ را در نظر می‌گیریم. مقدار $f(-\frac{T}{2})$ باید برابر باشد با:

$$f(-\frac{T}{2} + T) = f(\frac{T}{2})$$

اما داریم:

$$\cos^2(-\frac{T}{2}) + \sin(-\frac{T}{2}) \neq \cos^2(\frac{T}{2}) + \sin \frac{T}{2}$$

زیرا: $\sin(-\frac{T}{2})$ و $\sin(\frac{T}{2})$ متمایز از صفر و از نظر علامت متمایز، اما $\cos(-\frac{T}{2})$ و $\cos(\frac{T}{2})$ همانند هستند و این تناقض است.

مسئله ۳: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = 3 \cos x + \cos 2x$ را پیدا کنید.

حل: دامنه تابع همه اعداد حقیقی هستند. فرض کنیم T دوره تناوب تابع باشد. در این صورت به ازای هر x داریم:

$$3 \cos(x+T) + \cos(2(x+T)) = 3 \cos x + \cos 2x$$

به ازای $x = 0$ تساوی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$3 \cos T + \cos 2T = 4 \quad (1)$$

چون $\cos T \leq 1$ و $\cos 2T \leq 1$ پس داریم:

$$3 \cos T + \cos 2T \leq 4 \quad (2)$$

بنابراین T در دستگاه زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \cos T = 1 \\ \cos 2T = 1 \end{cases}$$

کوچک‌ترین ریشه مثبت دستگاه $T = 2\pi$ است.

با امتحان کردن معلوم می‌شود $T = 2\pi$ دوره تناوب تابع است. زیرا برای هر x اعداد $x+T$ و $x-T$ به دامنه تابع تعلق دارند و داریم:

$$3 \cos(x+2\pi) + \cos(2(x+2\pi)) = 3 \cos x + \cos 2x$$

مسئله ۴: ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{1 \cdot x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ متناوب نیست.

حل: قرار می‌دهیم $a = \frac{1 \cdot x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ که در آن a عددی ثابت متعلق به مجموعه مقادیر برد تابع است. از تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$(1-a)x^2 - (a+1)x + 1 - a = 0$$

پی‌نوشت

* منظور از $\{x\}$ جزء اعشاری x ، یعنی $x - [x]$ است که $[x]$ جزء صحیح x است. مثلاً: $\{1/2\} = 0.5$ و $\{-2/7\} = 0.3$ و دارید که: $[x] \in \mathbb{Z}$ و $\{x\} \geq 0$.

منبع

مجله ریاضیات در مدرسه، شماره ۱۱، سال ۲۰۰۲، چاپ مسکو.

المپیاد ریاضی در رومانی



کلیدواژه‌ها: رومانی، المپیاد ریاضی، تابع یک به یک، پنج ضلعی محدب، نقطه شبکه‌ای

را می‌توان یافت. در این جا منتخبی از مسائل چند سال متفاوت را آورده‌ایم و سعی کرده‌ایم نمونه‌هایی را انتخاب کنیم که سطح متوسطی داشته و برای عموم دانش‌آموزان قابل فهم و استفاده باشند. راه‌حل‌ها در پی آمده‌اند.

صورت مسائل

۱. ثابت کنید، عددهای مثبت و گنگ a و b به گونه‌ای وجود دارند که به ازای آن‌ها، a^b عددی طبیعی باشد (۱۹۷۵).
۲. ثابت کنید برای هر تقسیمی که مجموعه $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ را به دو زیرمجموعه جدا از هم افراز کند، دست کم یکی از زیرمجموعه‌های حاصل شامل سه عدد است که مجموع دو تا از آن‌ها، با دو برابر سومی برابر است (۱۹۷۸).
۳. جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید (۱۹۸۱):

$$x^6 + 3x^2 + 1 = y^4$$
۴. آیا تابع یک به یک $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که در مورد آن برای هر مقدار $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(x^2) - [f(x)]^2 \geq \frac{1}{4}$$
۵. رأس‌های یک پنج ضلعی محدب، مختصاتی صحیح دارند. ثابت کنید مساحت این پنج ضلعی حداقل مساوی ۵ است (۱۹۹۸).
۶. فرض کنید AD نیم‌ساز مثلث ABC باشد. M و N به ترتیب دو نقطه روی AB و AC هستند، به طوری که داریم:
 $\hat{M}DA = \hat{B}CA$ و $\hat{M}DA = \hat{A}BC$
 $\hat{N}DA = \hat{B}CA$ و $\hat{N}DA = \hat{A}BC$
 $AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$ ثابت کنید: $AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$ نیز در P متقاطع‌اند. ثابت کنید: (۱۹۹۹).

اگر چنان که قبلاً گفته‌ایم، مجارستان را می‌توان بنیان‌گذار المپیاد ریاضی دانست، بدون تردید رومانی را می‌توان مهد المپیادهای ریاضی و پایه‌گذار المپیاد بین‌المللی ریاضی دانست. چرا که این کشور از نخستین کشورهای پیشنهاددهنده این رقابت‌ها و میزبان دو دوره نخست آن بوده است. در طول سال‌های برگزاری این مسابقات، رومانی پنج دوره در سال‌های ۱۹۵۹ (نخستین دوره)، ۱۹۶۰، ۱۹۶۹، ۱۹۷۸، ۱۹۹۹ میزبان بوده و در پنج دوره نیز در سال‌های ۱۹۵۹، ۱۹۷۸، ۱۹۸۵، ۱۹۸۷ و ۱۹۹۶ مقام نخست این رقابت‌ها را به دست آورد. در سال‌های دیگر نیز بارها به مقام‌های بالای این مسابقات جهانی دست یافته است.

در رومانی نیز، مانند مجارستان، از سال‌های پایانی قرن نوزدهم مسابقات ریاضی دبیرستانی آغاز شد. از سال ۱۹۰۲ این مسابقات توسط مجله معتبر ریاضی «Gazeta Matematica» برگزار می‌شد.

تا سال ۱۹۴۸ مسابقات در دو مرحله انجام می‌شدند. از سال ۱۹۶۱، کار برگزاری المپیادها به عهده وزارت آموزش و پرورش قرار گرفت که تا امروز هم ادامه دارد. در حال حاضر المپیاد ریاضی رومانی در سه مرحله انجام می‌گیرد و مسائل المپیاد در مجله مزبور چاپ می‌شوند.

در کشور رومانی گروه‌های متعددی دست‌اندر کار برگزاری مسابقه‌های ریاضی هستند و دانشجویان و استادان بسیاری در این زمینه به شدت فعال‌اند که از میان آن‌ها استادان نام‌آوری نیز ظهور کرده‌اند که از جمله معروف‌ترین آن‌ها می‌توان از تیتو آندرسکو نام برد که سال‌ها مدیریت تیم‌های المپیاد ریاضی رومانی را به عهده داشت. وی پس از اخذ تابعیت جدید، مدیریت و هدایت تیم المپیاد ریاضی کشور آمریکا را به عهده گرفت و هنوز هم در این زمینه فعال است. در میان مسائلی که در المپیادهای داخلی کشور رومانی طی سال‌های متمادی طرح شده‌اند، مسائل بسیار خوب و بسیار دشواری

حل مسائل

۱. می‌توانیم دو عدد مثبت $\sqrt{2}$ و $\log_{\sqrt{2}}^x$ را در نظر بگیریم. با توجه به رابطه $a^{\log_a x} = x$ داریم:

$$(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}}^x} = x \in \mathbb{N}$$

می‌دانیم که $\sqrt{2}$ گنگ است و $\log_{\sqrt{2}}^x$ نیز گنگ است، زیرا در غیر این صورت عددهای صحیح و مثبت m و n یافت می‌شوند که:

$$\log_{\sqrt{2}}^x = \frac{m}{n}, n \neq 0$$

و در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^{\frac{m}{n}} &= x \Rightarrow (\sqrt{2})^{\frac{m}{n}} = 9 \Rightarrow ((\sqrt{2})^2)^{\frac{m}{n}} = 9 \\ \Rightarrow 2^{\frac{m}{n}} &= 9 \Rightarrow 2^m = 9^n \end{aligned}$$

که این تساوی غیرممکن است. (چرا؟)

می‌توانستیم عددهای گنگ $2^{\sqrt{2}}$ و $\sqrt{2}$ را نیز در نظر بگیریم: $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$ ولی اثبات گنگ بودن $2^{\sqrt{2}}$ کار ساده‌ای نیست

۲. فرض می‌کنیم: $X = A \cup B$ و $5 \in A$. با برهان خلف درستی حکم را نشان می‌دهیم:

فرض می‌کنیم هیچ یک از دو مجموعه A و B شامل هیچ سه عددی نباشند که مجموع دو تا از عددها مساوی دو برابر سومی باشد. اگر $3 \in A$ باشد، آن‌گاه با توجه به شرط فوق داریم: $(1+5=2 \times 3) 1 \notin A$ ، $(2+4=5+3) 4 \notin A$ و $(7+3=2 \times 5) 7 \notin A$. پس: $1 \in B$ ، $4 \in B$ و $7 \in B$. ولی در این صورت داریم: $7+1=2 \times 4$ و شرط فوق نقض می‌شود. پس لازم است که: $3 \notin A$ و در نتیجه: $3 \in B$. اما اگر: $7 \in A$ ، آن‌گاه: $(7+5=2 \times 6) 6 \notin A$ ، $(7+3=2 \times 5) 3 \notin A$ و $(9+5=2 \times 7) 9 \notin A$. پس: $3, 6, 9 \in B$. ولی در این صورت $9+3=2 \times 6$ و تناقض ایجاد می‌شود. پس لازم است که: $7 \in B$.

همچنین یکی از دو عدد 4 و 6 نیز باید در B باشند، زیرا $5, 4, 6$ نمی‌توانند با هم عضو A باشند ($4+6=2 \times 5$). فرض کنید: $4 \in B$ ، در این صورت نتیجه می‌شود: $2 \notin B$ (زیرا در غیر این صورت $2+4=2 \times 3$ ، $2, 3, 4 \in B$ ، لذا: $2 \in A$ و از آنجا: $8 \notin A$ (زیرا در غیر این صورت $2+4=2 \times 3$ ، $2, 3, 4 \in B$ و نیز: $8 \in B$ و از آنجا: $6 \notin B$ (زیرا در غیر این صورت $4+8=2 \times 6$ ، $4, 8 \in B$ و در نتیجه: $6 \in A$ و در ضمن: $9 \notin B$ (زیرا در غیر این صورت

$9 \in A$. پس داریم: $7+9=2 \times 8$ ، $7, 8, 9 \in B$. حال اگر $1 \in A$ باشد، آن‌گاه: $9 \in A$ ، $1, 5, 9 \in A$ و $9+1=2 \times 5$. یعنی در هر حال یکی از دو زیرمجموعه A یا B دارای یک سه‌تایی به صورت فوق هستند. در حالت دیگر هم، با شرط $6 \in B$ به همین نتیجه می‌رسیم.

۳. فرض کنیم عددهای صحیح x و y در برابری فوق صدق کنند. در این صورت اگر $x > 0$ ، با توجه به اتحادهای $(x^2+2)^2 = x^4 + 4x^2 + 4$ و $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ داریم:

$$\begin{aligned} (x^2+1)^2 &< y^4 = x^4 + 2x^2 + 1 < (x^2+2)^2 \\ \Rightarrow x^2+1 &< y^2 < x^2+2 \Rightarrow y^2 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

همچنین، اگر $x \leq -2$ باشد، آن‌گاه: $x^2+3 < 0$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^2 + 4 &< x^4 + 2x^2 + 1 \\ \Rightarrow (x^2+2)^2 &< y^4 < (x^2+1)^2 \\ \Rightarrow |x^2+2| &< y^2 < |x^2+1| \\ \Rightarrow -(x^2+2) &< y^2 < -(x^2+1) \end{aligned}$$

و باز هم $y^2 \notin \mathbb{Z}$ و در نتیجه: $y \notin \mathbb{Z}$.

پس فقط به ازای $-2 < x \leq 0$ ممکن است معادله جواب داشته باشد. به ازای $x = -1$ نتیجه می‌شود: $y^4 = -1$ که جوابی ندارد و به ازای $x = 0$ نتیجه می‌شود: $y = \pm 1$. بنابراین معادله فقط دو دسته جواب دارد: $(0, 1)$ و $(0, -1)$.

۴. اگر چنین تابعی وجود داشته باشد، با قرار دادن $x = 0$ و $x = 1$ در نابرابری فوق نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow f(0) - [f(0)]^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow [f(0)]^2 - f(0) + \frac{1}{4} \leq 0 \\ \Rightarrow (f(0) - \frac{1}{4})^2 &\leq 0 \Rightarrow f(0) - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{4} \\ x=1 &\Rightarrow f(1) - [f(1)]^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow (f(1))^2 - f(1) + \frac{1}{4} \leq 0 \\ \Rightarrow (f(1) - \frac{1}{4})^2 &\leq 0 \Rightarrow f(1) - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow f(0) &= f(1) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

پس f یک‌به‌یک نخواهد بود و لذا چنین تابعی وجود ندارد.

۵. یک قضیه شناخته شده در ترکیبیات می گوید که اگر پنج نقطه شبکه‌ای (نقطه با مختصات صحیح) داشته باشیم، وسط پاره خط و اصل بین دو تا از این نقاط، یک نقطه شبکه‌ای خواهد بود. اثبات به کمک اصل لانه کبوتری صورت می گیرد. مختصات هر نقطه شبکه‌ای از نظر زوج و فرد بودن چهار حالت دارد: (فرد و فرد)، (زوج و فرد) و (زوج و زوج).

پس وقتی پنج نقطه داشته باشیم، لااقل دو تای آن‌ها از نظر زوج و فرد بودن مختصاتی شبیه هم دارند. یعنی مجموع

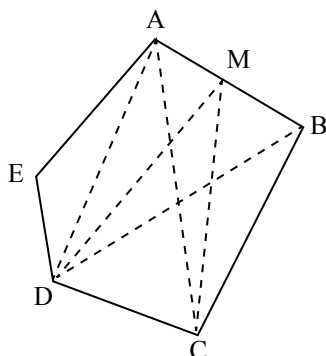
طول‌های آن‌ها و مجموع عرض‌های آن‌ها عددی زوج است و در نتیجه وسط این دو نقطه، مختصاتی صحیح دارد، زیرا:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

لذا در پنج ضلعی فوق وسط یکی از اضلاع یا اقطار نقطه‌ای با مختصات صحیح چون M است.

همچنین قضیه‌ای دیگر می گوید که مساحت هر مثلثی که سه رأس آن سه نقطه شبکه‌ای باشند، مساوی $\frac{m}{2}$ است که: $m \in \mathbb{N}$.





$$S_{ACD} > S_{MCD} > S_{BCD}$$

و چون هر سه مساحت به صورت $\frac{m}{2}$ هستند، پس:

$$S_{BCD} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow S_{MCD} \geq \frac{2}{2}, S_{ACD} \geq \frac{3}{2}$$

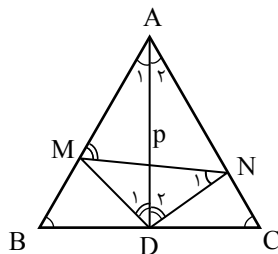
و بنابراین داریم:

$$S_{ABCDE} = S_{ACD} + S_{AED} + S_{ABC} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

۶. مطابق شکل داریم: $\hat{D}_1 = \hat{B}$ و $\hat{D}_r = \hat{C}$ و در نتیجه:

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_r = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{A} + \hat{MDN} = 180^\circ$$

لذا چهارضلعی AMDN محاطی است و از آنجا:



$$\hat{M} = \hat{D}_r, \hat{A}_1 = \hat{A}_r \Rightarrow \triangle AMP \sim \triangle ADN$$

$$\Rightarrow \frac{DN}{MP} = \frac{AD}{AM} = \frac{AN}{AP} \Rightarrow AM \cdot AN = AP \cdot AD(1)$$

همچنین داریم:

$$\hat{D}_r = \hat{C}, \hat{A}_r = \hat{A}_r \Rightarrow \triangle ADN \sim \triangle ADC$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD^2 = AN \cdot AC$$

$$\hat{D}_1 = \hat{B}, \hat{A}_1 = \hat{A}_r \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle ADB$$

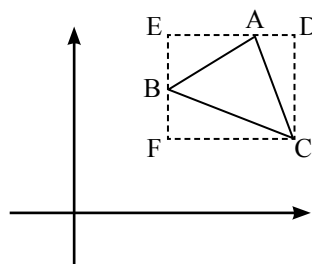
$$\Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD^2 = AM \cdot AB$$

$$\Rightarrow AD^4 = AM \cdot AN \cdot AB \cdot AC(2)$$

و با جای گذاری از رابطه (۱) در رابطه (۲) نتیجه می شود:

$$AD^4 = AP \cdot AD \cdot AB \cdot AC \Rightarrow AD^3 = AP \cdot AB \cdot AC$$

زیرا مطابق شکل زیر داریم:



(DE, CF, CD, EF را موازی محورهای رسم کرده ایم.)

$$S_{ABC} = S_{DCFE} - S_{ACD} - S_{BFC} - S_{ABE}$$

$$= DE \cdot DC - \frac{AD \cdot CD}{2} - \frac{BF \cdot FC}{2} - \frac{AE \cdot BE}{2}$$

$$= \frac{2DE \cdot DC - AD \cdot CD - BF \cdot FC - AE \cdot BE}{2} = \frac{m}{2}$$

ولی بدیهی است که $m \in \mathbb{Z}$ (چرا؟) و در نتیجه درستی این

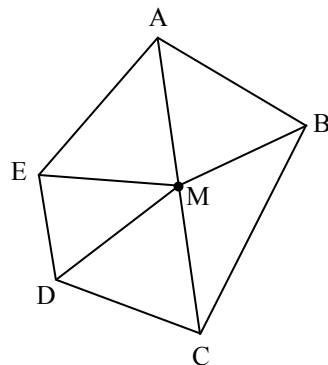
قضیه هم ثابت می شود.

حال به مسئله اصلی برمی گردیم: اگر M وسط یکی از

قطرهای پنج ضلعی ABCDE باشد، پس M درون پنج ضلعی

است و در نتیجه:

$$S_{ABCDE} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{MCD} + S_{MDE} + S_{AME}$$



ولی رئوس همه این پنج مثلث نقاطی با مختصات

صحیح اند، پس مساحت های آنها به صورت $\frac{m}{2}$ و لااقل

مساوی $\frac{1}{2}$ است و در نتیجه:

$$S_{ABCDE} \geq 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

اما اگر M وسط یکی از اضلاع (مثلاً AB) باشد، از M به دو

سر یکی از اضلاع پنج ضلعی که موازی AB نباشد (مثلاً CD)

وصل می کنیم. A و B را نیز به C و D وصل می کنیم.

مثلث های ADC، MDC و BDC در قاعده CD مشترک اند

و چون: $AB \parallel CD$ ، پس مساحت های هیچ دوتای آنها با هم

برابر نیست و به صورت صعودی مثلاً به ترتیب زیر قابل مرتب

کردن هستند:

یک ساعت در نمایشگاه کمک آموزشی میلاد طاها

اشاره

وقتی دبیر ریاضی پای تخته ایستاده و برایت فرمول‌های گوناگون را نوشته است، حتماً از خودت پرسیده‌ای: «خب که چی؟ به چه درد زندگی‌ام می‌خورد؟!» مثلاً هیچ وقت تا امروز متوجه نشده‌ای چرا باید مخرج مشترک گرفت. هیچ وقت در زندگی روزمره برایت پیش نیامده که از نمودارهای سینوسی استفاده کنی. بارها از خودت پرسیده‌ای که چرا باید الگوریتم‌ها را آموخت. بعد شاید سعی کرده‌ای به ریاضیات به چشم یک سرگرمی و یا حتی یک درس حفظ کردنی نگاه کنی. اما شاید اگر در کلاس درس آقای نوروزی نشسته بودی، اصلاً چنین نظری نداشتی؛ معلم ریاضیات دوره‌های راهنمایی و دبیرستان تهران که حالا در آستانه بازنشستگی، ۳۰ سال خدمت متفاوتش به دانش‌آموزان ایرانی را در یک نمایشگاه به نمایش گذاشته است.

دبیری که ریاضی را دوباره معنی کرد!

واقعیت و ریاضیات

می‌گوید: «من فکر می‌کنم هیچ‌کدام! بچه‌ها بین ریاضیات و واقعیت، یک فضای خالی احساس می‌کردند. یعنی بین این دو محدوده هیچ پل ارتباطی محکمی وجود نداشت. برای همین خودم سعی کردم با حداقل امکانات، برای بچه‌های کلاس ابزارهای کمک‌آموزشی درست کنم؛ وسایلی که به آن‌ها نشان می‌داد، ریاضیات چه کاربردی دارد...»

دیدار دوباره با فیثاغورث

روش تدریس این دبیر ریاضی آن قدر وسوسه برانگیز است که حتی می‌تواند یک گزارشگر را هم برای دوباره آموختن ریاضیات تشنه کند. وارد اولین اتاق نمایشگاه می‌شویم. از آقای نوروزی می‌خواهیم که یک نمونه از کارکرد وسایل کمک‌آموزشی‌اش را نشان دهد. او هم از من می‌پرسد که: «می‌خواهی قضیه فیثاغورث را دوباره ببینی؟» بعد تخته‌ای را که روی آن سه مثلث با شیشه و پلاستیک و چسب قرار داده بود، نشان می‌دهد. آقای نوروزی می‌گوید: «شما با حرکت دادن این تخته می‌بینید که آب از رأس یک منشور به منشور دیگر حرکت می‌کند تا فضا و حجم براساس قانون فیثاغورث درست تنظیم شود...»

از همین ابزار دو مدل ساخته است؛ اولی را در دهه ۶۰ با آب و دومی را در دهه ۷۰ با ساچمه. از همه جالب‌تر، اولین ساخته دست‌آورد آقای نوروزی است؛ یک دسته چوب که به شکلی زیبا و منظم برش خورده‌اند و انگار نجاری ماهر هفته‌ها برای طراحی آن‌ها وقت گذاشته است. خودش

اینجا «میدان بهارستان» است. نام بهارستان، هر دانش‌آموزی را یاد درس تاریخ می‌اندازد. اما «کوچه جورکش»، با آن تابلوی بزرگ ورود ممنوع که سر خیابان نصب شده است، می‌تواند شما را کمی در ریاضیات غرق کند. مدرسه «میلاد طاها» در میانه‌های کوچه قرار دارد؛ مدرسه‌ای که بیشتر شبیه به یک موزه تاریخی است تا یک دبیرستان پسرانه. دم در ورودی، چند دانشجوی رشته‌های مکانیک و ریاضیات و حتی فلسفه را می‌بینیم. می‌گویند برای دیدن نمایشگاه آقای نوروزی به اینجا آمده‌اند. خودشان را از شاگردان قدیمی این دبیر باسابقه و خوش نام معرفی می‌کنند. در دبیرستان را خود آقای نوروزی برای ما باز می‌کند و با چهره‌ای خندان خوشامد می‌گوید. با او به سمت نمایشگاه که در دو کلاس دایر شده است حرکت می‌کنیم. اول از همه می‌خواهیم ببینیم این نمایشگاه که می‌گویند محصول ۳۰ سال تدریس این دبیر ریاضی بوده، از چه امکاناتی بهره برده است. خود آقای نوروزی می‌گوید: «من از سال ۱۳۶۱ تدریس را شروع کردم. آن زمان معلم ریاضی دوره راهنمایی بودم. امکانات زیادی نداشتیم و تنها وسیله‌ای که برای تدریس وجود داشت، یک تخته سیاه بود و چند تکه گچ سفید. همان زمان احساس می‌کردم که بچه‌ها به خوبی درس‌ها را متوجه نمی‌شوند...»

از آقای نوروزی می‌پرسیم که دلیل متوجه نشدن بچه‌ها چه بود؟ کمبود استعداد یا مشکل نظام آموزشی؟ آقای نوروزی

لذت ریاضی ورزیدن

آقای نوروزی
و شاگردانش
سرشار از نشاط،
انگیزه و انرژی



پل ارتباطی در اتاق کناری

در طول نمایشگاه، دانش‌آموزان آقای نوروزی به او در راهنمایی بازدیدکنندگان کمک می‌کنند. او ما را به سمت دانش‌آموزانش می‌برد تا آن‌ها هم در مورد ابزارآلات به ما اطلاعات بدهند. اولین نفر، ایمان مفرح است؛ شاگرد اول کلاس‌های آقای نوروزی. ایمان وسایل کمک‌آموزشی دوره‌های راهنمایی را در دست می‌گیرد. او جدول انطباق را به خوبی توضیح می‌دهد و این موضوع را که روی دایره، زوایای مقابل به هم با هم برابر هستند، به ساده‌ترین شکل ممکن نشان می‌دهد. امید داوری، دومین شاگرد آقای نوروزی است که نقش خود او را بازی می‌کند. جالب‌ترین وسیله کمک‌آموزشی بین تمامی وسایلی که به ما نشان می‌دهد، یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه‌بعدی است. در کمتر از پنج ثانیه می‌توانید از روی حرکات دست او با ابزارهای آقای نوروزی متوجه شوید که چرا و چگونه اضلاع مربع و لوزی با هم برابرند. امید در مورد «قضیه حمار»، هم به صورت عملی و هم به صورت فلسفی، توضیح می‌دهد. می‌گوید به این دلیل نامش را قضیه حمار گذاشته‌اند که خرها همیشه کوتاه‌ترین راه را برای رسیدن به مقصد انتخاب می‌کنند. به همین دلیل نام این قضیه، حمار گذاشته شده است.

از آقای نوروزی می‌پرسم که آیا این دانش‌آموزان فقط با ابزارها به بازدیدکنندگان توضیح می‌دهند یا به آن‌ها ساختن این ابزارها را هم آموزش داده‌اید. او ما را کنار میز دیگری که دانش‌آموزی به نام شهاب فرخ‌نژاد ایستاده است، می‌برد. می‌گوید: «این یکی از دانش‌آموزان نمونه من است. او خودش از روی دست من مگنت‌ها را طراحی کرده و ساخته است. حالا خودش هم به شما در مورد مگنت‌ها توضیح می‌دهد...»

می‌گویند این دسته چوب‌ها را به کمک همسرش درست کرده است. آن‌ها جدول ضرب «تپر» را نشان می‌دهند. جدول ضربی که دانش‌آموزان دوره راهنمایی همواره روی تخته کلاس دیده‌اند و شاید به سادگی قدرت حل کردنش را نداشته‌اند، توسط این دبیر ریاضی در کلاس درس به دست بچه‌ها سپرده می‌شد.

روی میزها پر از کارهای دستی و هنرهایی است که سال‌های سال برای درست شدن آن‌ها زحمت کشیده شده است. از پایه اول دوره راهنمایی تا سال آخر دبیرستان. هرچه فرمول ریاضی در کتاب‌ها هست، هرچه در مورد مثلثات، دیفرانسیل و انتگرال آموزش داده می‌شود، اینجا روی میزهای کارگاه کمک‌آموزشی آقای نوروزی به صورت عملی بیان می‌شوند. از او می‌پرسم آیا در تمام این سال‌ها از جایی بودجه‌ای هم به عنوان کمک مالی دریافت کرده یا همه این ابزارها را با هزینه شخصی خود ساخته است. آقای نوروزی می‌گوید: «نه! از لحاظ مالی که هیچ‌کس به من کمکی نکرد. البته همسر من و دانش‌آموزانم همیشه در ساخت این‌ها به من کمک کرده‌اند، ولی همه این ابزارها را با هزینه شخصی‌ام درست کرده‌ام. تازگی‌ها مدیر محترم همین مدرسه میلاد طاهار لطف کردند و بخشی از کارگاه زیرزمینی را به من دادند تا در آن کار کنم. اما قبل از این، همه کارهایم را در خانه می‌کردم.»

آقای نوروزی برای این که بچه‌های کلاسش بهتر با ریاضی انس بگیرند، برای آن‌ها بجز در طول کلاس، روزانه بین هفت تا هشت ساعت هم وقت می‌گذاشته و در خانه وسایل کمک‌آموزشی‌شان را می‌ساخته است. او حالا خوشحال است که توانسته محصول یک عمر تلاش خود را به همراه گروهی از دانش‌آموزان مشتاق در این نمایشگاه جمع کند.



متحمل شده و البته مشکلاتی که در این راه داشته است، می‌پرسم. ایشان می‌گوید: «این کار عشق من بود. خوشحالم که خانواده‌ام هم کنارم بود و مرا کمک کرد. کسی به من یک ریال هم کمک مالی نکرده است؛ اما هیچ‌وقت هم برای درست کردن این ابزارآلات لنگ نماندم!»

ریاضیات را حفظ نکنید

در بخش هنر و ریاضی، می‌توان کاردستی‌های مخصوص آقای نوروزی را دید؛ کاردستی‌هایی که در نوع خود بی‌نظیر و مثال‌زدنی هستند. آقای نوروزی در مورد این کاردستی‌ها هم توضیحات جالبی می‌دهد: «ما سعی کرده‌ایم به بچه‌ها نشان بدهیم که می‌توانند با چند کاغذ رنگی و بدون استفاده از چسب، برای صرفه‌جویی در هزینه‌های خانواده، برای زمانی که می‌خواهند به کسی هدیه بدهند، جعبه‌های رنگی درست کنند. این را به کمک علوم ریاضی، مثلثات و همین‌طور هنر اجرایی کرده‌ایم. الان شما می‌بینید که بچه‌های ما چه کاردستی‌های زیبایی درست کرده‌اند و اینجا از آن‌ها استفاده کرده‌ایم...»

نمایشگاه را با همه زیبایی‌هایش ترک می‌کنیم. آقای نوروزی می‌گوید که می‌خواهد از امسال به بعد هر دو یا سه سال یک‌بار، تجربیات و ساخته‌هایش را طی تمام سال‌های اخیر در چنین نمایشگاه کمک‌آموزشی به نمایش بگذارد. بهترین توصیه برای دانش‌آموزانی که فکر می‌کنند ریاضیات در زندگی کاربرد اجرایی ندارد و یا ریاضی را به چشم یک درس حفظ‌کردنی نگاه می‌کنند این است که هر وقت باز این نمایشگاه‌ها دایر شد، سری به آن بزنند. دیدنی‌ها بسیار است. این نمایشگاه امسال هم طبق روال سال‌های گذشته، در هفته گرامی‌داشت مقام والای معلم در اردی‌بهشت‌ماه ۱۳۹۲ در محل دبیرستان برقرار است.

فرخ‌زاد چند دقیقه‌ای به صورت عملی، روابط سینوسی، زاویه مسطحه فرجه، هم‌نهشتی مثلث‌ها و... را برای بازدیدکنندگان توضیح می‌دهد.

از آقای نوروزی می‌پرسم برای این که به‌روز باشید چه می‌کنید. می‌گوید: «من رابطه خیلی خوبی با اینترنت دارم. همان قدر که به ریاضیات علاقه‌مند هستم، به هنر هم علاقه دارم. برای همین همیشه در اینترنت به دنبال چیزهای جدیدی در مورد علاقه‌مندی‌هایم می‌گردم. بین هنر و ریاضی پل زده‌ام که شما می‌توانید این پل را در اتاق بعدی ببینید...»

در اتاق بعدی، ابزارهای کمک‌آموزشی دوره دبیرستان و همین‌طور بخش ویژه‌ای در مورد هنر ریاضیات وجود داشت؛ بخشی که همه نگاه‌ها را به خود جلب می‌کرد. آقای نوروزی می‌گوید: «من سال‌هاست که به هر چه نگاه می‌کنم، به دنبال ساختن ابزاری برای دانش‌آموزانم هستم. مثلاً چند سال پیش داشتم یک فیلم چینی نگاه می‌کردم. در بخش خیلی کوتاهی از این فیلم، معلم چینی مدرسه داشت مساحت چهار ضلعی را به مثلث تبدیل می‌کرد. این صحنه را که دیدم با خودم گفتم که من از روی تئوری این معلم، همین الان ابزار جدیدی می‌سازم و همین کار را به صورت عملی برای بچه‌ها تکرار می‌کنم. یک هفته بعد، همین وسیله را ساختم و به مدرسه بردم... همیشه دنبال یک ابزار جدید می‌گردم. مثلاً چند روز پیش با یکی از همکاران داشتیم نوشیدنی می‌خوردیم، نگاهم به قوطی نوشیدنی دوستم افتاد. بلافاصله گفتم بعد از این که نوشیدنی‌ات را خوردی، قوطی‌اش را به من بده؛ لازمش دارم. همان شب با همان قوطی باز یک وسیله تازه ساختم!»

از آقای نوروزی در مورد هزینه‌هایی که طی این سال‌ها

من رابطه خیلی خوبی با اینترنت دارم. همان قدر که به ریاضیات علاقه‌مند هستم، به هنر هم علاقه دارم. برای همین همیشه در اینترنت به دنبال چیزهای جدیدی در مورد علاقه‌مندی‌هایم می‌گردم

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: چند بازی و تردستی جالب و سرگرم کننده برای ایام نوروز

۱. ساعت جادویی!

یک ساعت عقربه‌ای دیواری را رو به دوستانتان بگیرید. از یکی از آن‌ها بخواهید یکی از اعداد روی آن را (از ۱ تا ۱۲) در ذهن خود در نظر بگیرد. سپس از او بخواهید که با ضربه‌هایی که شما با انگشتان روی صفحه ساعت می‌زنید، عددهای پس از آن شماره را یکی یکی (با هر ضربه یک عدد) در ذهنش بشمارد و بالا برود (مثلاً اگر عدد ۶ را انتخاب کرده است، با ضربه نخست شما در ذهنش بگوید ۷، با ضربه دوم ۸ و...) و هر وقت به شماره ۲۰ رسید، دستور توقف ضربه زدن را به شما بدهد (مثلاً دستش را بالا ببرد یا حرکتی کند که شما دیگر ضربه نزنید). باور نکردنی است! ولی ضربه آخر شما درست روی همان شماره‌ای است که او در ذهنش انتخاب کرده بود!

*** چگونگی اجرای تردستی:** شما هفت ضربه نخست خود را کاملاً تصادفی و دلخواه می‌زنید و برای آن که کارتان طبیعی جلوه کند و برای ایجاد هیجان، می‌توانید این ضربه‌ها را پراکنده روی صفحه و یا حتی پشت صفحه بزنید. ولی از ضربه هشتم به بعد خود را هدفمند می‌زنید و سعی کنید بدون آن که آن‌ها متوجه شوند، این کار را انجام دهید. ضربه هشتم باید روی عدد ۱۲ فرود آید و ضربه نهم روی عدد ۱۱ و به همین ترتیب ضربات بعدی در جهت خلاف حرکت عقربه‌ها و از ۱۲ به طرف ۶ زده شوند. به این ترتیب وقتی دوست شما دستور توقف می‌دهد (و در ذهن خود به عدد ۲۰ می‌رسد)، انگشت اشاره شما درست روی همان عددی است که او در ذهن داشته است. این کار را امتحان و تمرین کنید. می‌بینید که این حقه به خوبی کار می‌کند! به منطق ریاضی نهفته در این تردستی بیندیشید. این خود



یک مسئله ریاضی خوب است. اگر نتوانستید پاسخ را بیابید، به انتهای همین بخش مراجعه کنید.

۲. پیشگویی حاصل تفریق

از گروهی از دوستان خود بخواهید که هر کدام یک عدد پنج رقمی که رقم‌های آن یکسان نباشند، روی یک کاغذ بنویسند. سپس از آن‌ها بخواهید که مقلوب آن عدد (مقلوب عدد، عددی است که از جابه‌جا و وارونه کردن ارقام آن عدد حاصل می‌شود. مثلاً مقلوب ۱۴۵، عدد ۵۴۱ است) را هم بنویسند و از بین خود عدد و مقلوب آن، عدد بزرگ‌تر را از عدد کوچک‌تر کم کنند و حاصل را که آن هم یک عدد پنج رقمی است، بیابند. سپس یکی از رقم‌های این حاصل تفریق را مشخص کنند و دور آن را کادر بکشند. مثلاً نوشته یکی از دوستان شما می‌تواند چنین باشد:

$$\begin{array}{r} 54311 - \\ 11345 \\ \hline 42966 \end{array}$$

اکنون از تک‌تک آن‌ها بخواهید که به نوبت چهاررقمی را که دور آن‌ها کادر نکشیده‌اند، به شما بگویند (مثلاً این نمونه، عددهای ۶ و ۶ و ۹ و ۴ را می‌گوید). سپس شما پس از کمی مکث (همراه با حرکات نمایشی!) عددی را که دور آن کادر کشیده شده است، به او می‌گویید!

*** روش اجرای تردستی:** شما چهار رقم گفته شده را با هم جمع می‌کنید. مثلاً در مورد این نمونه می‌شود: $4+9+6+6=25$. سپس نخستین عدد مضرب ۹ بزرگ‌تر از این مجموع را پیدا می‌کنید: $3 \times 9 = 27$ و آن را از این مجموع کم می‌کنید: $27 - 25 = 2$ به همین سادگی! فقط یادتان باشد که اگر مجموع عددها مضرب ۹ شود (مثلاً ۱۸ یا ۲۷)، در این صورت مسئله دو جواب دارد: ۰ یا ۹ و ممکن است جواب را در دو مرحله بدهید که البته این را هم می‌توانید با کمی نمایش رفع و رجوع کنید! منطق ریاضی نهفته در این تردستی را در انتهای این بخش می‌توانید ببینید، ولی سعی کنید خودتان آن را کشف کنید.



ایران ریاضی مجلات تاریخچه

آموزشی

غلامرضا یاسی پور



کلیدواژه‌ها:

شرطی»، «گفت‌وگو با استاد احمد قندهاری»، «معادله‌های مثلثاتی»، «اعداد فیبوناتچی» و... همچنان خواندنی و جذاب‌اند. به آوردن چند نکته از این مقالات بسنده و آن‌ها را مشتم نمونه خروار فرض می‌کنیم:

● **دالامیر در مقاله «پیدایش و تکامل دانش»**، به ترجمه استاد شهریار نوشته است: «من به هیچ‌وجه قصد ندارم استفاده از اصل موضوع‌ها را به هیچ شرطی محکوم کنم. تنها می‌خواهم نشان دهم این اصل موضوع‌ها به کجا منجر می‌شوند.»

● **استاد شهریار از قول یکی از بچه‌ها نقل کرده‌اند که به ایشان گفت:** «شما معلم‌ها آخر سال به ما نمره نمی‌دهید، ولی ما شاگردان همان جلسه اول به شما نمره می‌دهیم» (از مقاله گفت‌وگو با استاد).

● **هیچ مطلبی را نفهمیده جلو نروید.** هیچ قانونی وجود ندارد تا بدون فهم مطالب قبلی بتوان مطالب تازه را یاد گرفت (استاد پرویز شهریار).

هیئت تحریریه برهان، با عنوان «ذات ریاضی صداقت است». در گفت‌وگو این سخنان نغز را از استاد می‌شنویم:

«اصولا سر کلاس فقط درس نمی‌دهم، بلکه زندگی می‌کنم. خودم هم معمولا با مطالعه ادبیات و شعر، خستگی ریاضی را درمی‌کنم. اعتقاد دارم که ریاضی پلی است که یک طرفش محاسبات است و یک طرفش هنر. در مجموع، هوش بچه‌های یک کلاس از هوش معلم بالاتر است.»

مجله پر از مطالب متنوع است. برای مثال مقاله «اصل لانه کبوتری» از دکتر محمدعلی فریبرزری عراقی، «اعداد فیبوناتچی» از غلامرضا یاسی پور، «در حاشیه هندسه تحلیلی» از میرشهرام صدر، «احتمال شرطی» از حمیدرضا امیری، «راه‌حل‌های کوتاه برای مسائل شناخته شده ریاضی» از هوشنگ شرقی.

از این شماره می‌گذریم و قدم به شماره ۴۴ می‌گذاریم که در زمستان ۱۳۸۳ انتشار یافته است. در این شماره مقاله‌های از «تاریخ بیاموزیم»، «احتمال

در تورق شماره‌های مجله ریاضی «رشد برهان متوسطه» به شماره ۴۳ رسیده‌ایم. در این شماره در مقاله «ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی» از استاد شهریار این نکته را می‌آموزیم که: «ریاضیات کاربردی بر فعالیت عملی تکیه دارد و از آن نیرو می‌گیرد، در حالی که ریاضیات نظری خودگردان است و با سازوکار درونی و انگیزه درونی خود پیشرفت می‌کند.»

در این شماره بحثی در حل معادله‌های فکری و منطقی از وایلی به ترجمه غلامرضا یاسی پور آمده که در انتهای آن این نکته پرمغز را می‌خوانیم: «ممکن است معما در محتوا تازه و جدید باشد، اما در صورت نمی‌تواند، زیرا طرح معمایی که از لحاظ صورت کاملا تازه باشد، تقریبا غیرقابل تصور است. به‌طور کلی معمایی را فکری - منطقی می‌گوییم که با کمترین اطلاعات لازم و تنها توسط استدلال منطقی قابل حل باشد.»

در این شماره گفت‌وگویی آمده با استاد احمد قندهاری، یکی از اعضای

۲۴

شماره ۳
بهار ۱۳۹۲
دوره بیست و دوم

چون به مشکلات و نیازمندی‌های مردم در مورد علم حساب نگریستم، دریافتیم که تمام آن مشکلات در عدد خلاصه شده است (مقاله مجموعه اعداد گویا، مهدی رحمانی).

در اینجا تنها به پاره‌ای از نکات جالب شماره ۴۵ برهان اشاره می‌کنیم.

چه برای ریاضیات سنتی و چه برای ریاضیات نظری عصر جدید، وارد شدن مفهوم‌های ریاضیات نظری اولیه (که هنوز به اندازه کافی آماده دقیق شدن نبودند)، به بحرانی منجر شد که در برخورد با بی‌نهایت به وجود آمده و پرده‌های عادت‌ها و رسم‌ها را دریده بود (استاد شهریار).

«نظریه اعداد» شامل موضوع‌هایی در ریاضیات است که توانسته‌اند توجه بشر را برای هزاران سال به خود جلب کنند. در این شاخه از ریاضیات، به مسئله‌ها، قضیه‌ها و برهان‌هایی برمی‌خوریم که بیش از دو هزار سال قدمت دارند. برای مثال، حدود سال ۳۰۰ قبل از میلاد مسیح (ع)، اقلیدس برهانی مقدماتی و ساده برای اثبات بی‌نهایت بودن اعداد اول ارائه داد. مسئله‌هایی نیز طرح شده‌اند که برای چند سال عده کثیری از علاقه‌مندان و ریاضی‌دانان را به خود مشغول داشته و باعث پیدایش شاخه‌های جدید و نظریه‌های بدیع شده‌اند.

امروزه نظریه اعداد آن چنان وسعت یافته که تقریباً در تمام شاخه‌های ریاضی رخنه کرده و حتی توانسته در علوم غیرریاضی همچون رایانه، کاربرد بسیار داشته باشد. همچنین در این شاخه از ریاضیات، مسئله‌های لاینحل بسیاری وجود دارند که تا به امروز انسان به حل آن نزدیک هم نشده است. یکی از مسئله‌هایی که حدود ۳۵۰ سال دوام آورد، قضیه بزرگ فرما بود که بالاخره در سال ۱۹۹۴ میلادی توسط اندرو وایلز در بیش از ۲۰۰ صفحه به اثبات رسید و اثری بسیار عظیم در ریاضیات قرن بیستم گذاشت. اما از این موفقیت بسیاری ناخرسند شدند، زیرا قضیه بزرگ فرما که سال‌های سال انگیزه‌ای برای ارائه نظریه‌های جدید ریاضیات

بود، از میان رفت (ترجمه سیدمحمدرضا هاشمی موسوی).

جرج کانتور در سال ۱۸۹۵ در آغاز اثرش به نام «Beiträge zur Begründung der trans-finiten Mengenlehre»، این تعریف را آورده است:

«منظورمان از مجموعه set هر گردایی M از اشیای معین، متمایز m از برداشت یا تصورمان (که عنصرها M elements نامیده می‌شوند) به صورت یک کل است. به این ترتیب، مثال‌های مجموعه‌ها عبارت‌اند از: Z، مجموعه اعداد درست که در این جا اعداد صحیح (integers) نامیده می‌شوند؛ C و R، به ترتیب، مجموعه‌های اعداد گویا (rational numbers)، مجموعه اعداد حقیقی (real numbers) و مجموعه اعداد مختلط (complex numbers)، M مجموعه‌ای شامل جمیع قمرهای مریخ و حتی H، مجموعه جمیع اختاپوس‌های دویابی که اول اردیبهشت گذشته از آبادان دیدن کرده‌اند» (از نظریه مقدماتی مجموعه‌ها، ترجمه غلامرضا یاسی‌پور).

در مقاله «قضیه رول و قضیه مقدار میانگین» از میرشهرام صدر در شرح حال رول چنین می‌خوانیم:

میشل رول (۱۷۱۹-۱۶۵۲) ریاضی‌دان فرانسوی بیشتر ریاضیات را خودآموز فرا گرفته بود. کار او در اصل حسابداری بود، ولی هرگاه وقتی پیدا می‌کرد روی جبر و معادلات دیوفانتی نیز کار می‌کرد.

ژاک اوزانام (۱۷۱۷-۱۶۴۰) یکی از ریاضی‌دانان فرانسوی معاصر با رول بود که مسائل مهمی را در زمینه ریاضیات طرح کرده بود. بعد از این که رول راه حل دقیقی را برای یکی از مسائل ریاضیات تفریحی اوزانام ارائه کرد، دولت وقت از تحقیقات ریاضی او حمایت کرد و به همین سبب در سال ۱۶۹۰ رول کتاب آموزشی «جبر» را انتشار داد. این کتاب شامل مباحث تازه‌ای درباره دستگاه اعداد حقیقی و روش‌هایی برای یافتن ریشه‌های معادلات بود. رول سپس در سال ۱۶۹۱ قضیه مشهور خود

را منتشر کرد. صورت قضیه او که به قضیه رول مشهور شده، این است که: «بین هر دو صفر یک تابع چند جمله‌ای، نقطه‌ای وجود دارد که مشتق تابع در آن نقطه برابر با صفر است.»

در مقاله «نکاتی درباره اعداد گویا و گنگ» از مرتضی بیات و مهدی حسنی، با بعضی از ملاحظات تاریخی در باب اعداد گویا و گنگ آشنا می‌شویم. اعداد گویا و گنگ سابقه‌ای قدیمی دارند. کشف گنگ بودن نسبت قطر مربع به ضلع آن، به فیثاغورسیان منسوب است. **تئودوروس** (اواخر قرن پنجم قبل از میلاد)، استاد افلاطون در ریاضیات، تحقیقات قابل توجهی در این زمینه کرد و گنگ بودن جذر ۳ و سایر اعداد طبیعی غیرمجدور کامل را تا ۱۷ به اثبات رساند. یونانیان، به جای عدد مجرد، عمدتاً به کمیات هندسی نظر داشتند. کارهای آن‌ها در زمینه اعداد گنگ در کتاب «اصول هندسه»، از اقلیدس، به اوج می‌رسد. بحث هندسی از کمیات گنگ، به تدریج منجر به مفهوم عدد شد و میث اعداد گنگ، در کتاب‌های «حساب نظری» قرن ۱۵ میلادی دیده می‌شود.

یکی از مشهورترین اعداد ریاضی، نسبت محیط دایره به قطر آن است که از ایام بسیار قدیم مورد توجه بوده است. این عدد از زمان اوپلر به بعد، به نام « π » خوانده می‌شود. عدد مشهور دیگر، عدد «e» است و سابقه‌اش ظاهراً به پس از کشف لگاریتم می‌رسد. تا اواسط قرن ۱۸ میلادی کسی نمی‌دانست که این اعداد گویا هستند یا گنگ، تا آنکه لامبرت در سال ۱۷۶۱ گنگ بودن آن‌ها را ثابت کرد. گنگ بودن e^2 در سال ۱۸۴۰ به وسیله لیوویل به اثبات رسید. امروزه می‌دانیم که همه قوای طبیعی π ، e و کثیرالجمله‌های صحیح برحسب e با π با ضرایب گویا، اعداد گنگ هستند. گنگ بودن اعداد π^e و $\pi^{\sqrt{2}}$ عدد اوپلر،

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \ln n \right)$$
 هنوز دانسته نیست، ولی می‌دانیم که اعداد $2^{\sqrt{2}}$ و e^{π} گنگ‌اند.

چه برای ریاضیات سنتی و چه برای ریاضیات نظری عصر جدید، وارد شدن مفهوم‌های ریاضیات نظری اولیه (که هنوز به اندازه کافی آماده دقیق شدن نبودند)، به بحرانی منجر شد که در برخورد با بی‌نهایت به وجود آمده و پرده‌های عادت‌ها و رسم‌ها را دریده بود (استاد شهریار)

نامساوی ها

خواص نامساوی ها

کلیدواژه ها: نامساوی ها، خواص نامساوی ها

۱. به طرفین یک نامساوی می توان عددی اضافه کرد یا از آن عددی کم کرد:

$$a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$$

۲. طرفین نامساوی را می توان در عدد مثبتی ضرب یا بر عدد مثبتی تقسیم کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} am > bm \\ \frac{a}{m} > \frac{b}{m} \end{cases}$$

۳. اگر طرفین یک نامساوی را در عدد منفی ضرب یا بر عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می شود:

$$\begin{cases} a > b \\ k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ak < bk \\ \frac{a}{k} < \frac{b}{k} \end{cases}$$

۴. طرفین یک نامساوی را می توان به توان عدد فرد رساند:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n \\ a^{2n-1} > b^{2n-1} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

۵. از طرفین یک نامساوی می توان ریشه فرد گرفت:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[2n]{a} > \sqrt[2n]{b} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

۶. اگر طرفین نامساوی مثبت باشند، می توان آن را به توان عدد زوج رساند:

$$a > b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n \\ a^{2n} > b^{2n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

۷. اگر از طرفین یک نامساوی ریشه زوج بگیریم، باید آن ها را در قدر مطلق قرار دهیم:

$$\begin{cases} a^2 > b^2 \\ a^4 > b^4 \text{ یا } a^{2n} > b^{2n} \Rightarrow |a| > |b| \\ a^6 > b^6 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

۸. اگر طرفین نامساوی مثبت باشند، می توان از دو طرف ریشه زوج گرفت:

$$a > b > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[2n]{a} > \sqrt[2n]{b} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

۹. اگر طرفین نامساوی هم علامت باشند، چنانچه آن ها را معکوس کنیم، جهت نامساوی عوض می شود. چنانچه طرفین نامساوی مختلف علامه باشند، اگر آن ها را معکوس کنیم جهت تغییر نمی کند:

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ 0 > a > b \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$a > 0, b < 0, a > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

۱۰. دو نامساوی هم جهت را فقط و فقط می توان نظیر به نظیر با هم جمع کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

۱۱. اگر طرفین دو نامساوی هم جهت مثبت باشد، می توان آن ها را نظیر به نظیر در هم ضرب کرد.

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

نکات نامساوی ها

۱. اگر $0 < a < 1$ ، آن گاه اگر a را به توان اعداد بزرگتر از یک برسانیم، کوچکتر می شود. چنانچه از آن ریشه بگیریم بزرگتر می شود.

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a > a^2 > a^3 \dots \\ a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \dots \end{cases}$$

مثال:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin x < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x > \sin^2 x > \sin^3 x \dots \\ \sin x < \sqrt{\sin x} < \sqrt[3]{\sin x} \dots \end{cases}$$



چون a و b مختلف‌العلامه‌اند، پس: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$
بنابراین:

$$2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \leq 0 \Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leq 0$$

۶. اگر $a, b \neq 0$ ، آن‌گاه داریم:

$$(a^2 + b^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq 4$$

اثبات:

$$(a^2 + b^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 1 = 2 + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$\frac{a^2}{b^2}$ و $\frac{b^2}{a^2}$ مثبت و عکس یکدیگرند، پس: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2$
بنابراین:

$$2 + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \geq 4 \Rightarrow (a^2 + b^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq 4$$

۷. اگر: $a, b, c \neq 0$ ، داریم:

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9$$

اثبات:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) &= 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + 1 \\ &= 2 + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) \end{aligned}$$

۲. هر عدد مثبت به اضافه عکس آن بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

$$a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$$

اثبات:

فرض می‌کنیم نامساوی $a + \frac{1}{a} \geq 2$ را $a > 0$ همواره درست باشد. دو طرف نامساوی را در $a > 0$ ضرب می‌کنیم:

$$a^2 + 1 \geq 2a \Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

چون نامساوی $(a-1)^2 \geq 0$ همواره درست است، پس فرض ما هم درست بوده است.

۳. هر عدد منفی به اضافه عکس آن کوچک‌تر یا مساوی -۲ است.

$$a < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2$$

اثبات:

فرض می‌کنیم نامساوی $a + \frac{1}{a} \leq -2$ را $a < 0$ همواره درست باشد. دو طرف نامساوی را در $a < 0$ ضرب می‌کنیم:

$$a^2 + 1 \geq -2a \Rightarrow a^2 + 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow (a+1)^2 \geq 0$$

چون نامساوی $(a+1)^2 \geq 0$ همواره درست است، پس فرض ما هم درست بوده است.

۴. اگر a و b دو عدد هم علامت باشند داریم:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

اثبات:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

چون a و b هم علامت‌اند، پس $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ عکس یکدیگر و نامنفی‌اند. بنا به نکته (۲): $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. پس: $2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4$.

$$\text{در نتیجه: } (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

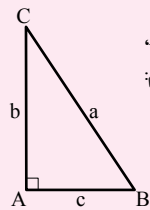
۵. اگر a و b مختلف‌العلامه باشند، داریم:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leq 0$$

اثبات:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$





مسئله ۱. ثابت کنید در مثلث قائم الزاویه ABC، $A = 90^\circ$ به وتر a و اضلاع b و c همواره داریم:
 $a^2 > b^2 + c^2$

حل: دو طرف را در $b^2 > 0$ ضرب می کنیم.
 $a^2 > b^2 + c^2$
 دو طرف را در $c^2 > 0$ ضرب می کنیم.

$$\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab^2 > b^3 \\ ac^2 > c^3 \end{cases}$$

اکنون دو نامساوی را نظیر به نظیر با هم جمع می کنیم:

$$ab^2 + ac^2 > b^3 + c^3 \Rightarrow a(b^2 + c^2) \geq b^3 + c^3$$

$$\Rightarrow a(a^2) > b^3 + c^3 \Rightarrow a^3 > b^3 + c^3$$

مسئله ۲. ثابت کنید: $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

اثبات: فرض می کنیم نامساوی بالا همواره درست باشد، پس:

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2$$

$$\Rightarrow 0 < a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

نامساوی $(a-b)^2 \geq 0$ همواره درست است، پس نامساوی بالا هم همواره درست است.

مسئله ۳. ثابت کنید: $\frac{a^2+b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2$ ، $a, b > 0$

اثبات: فرض می کنیم نامساوی بالا همواره درست باشد، آن گاه

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4b^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab(a+b)$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 3b^2 \geq 2ab(a+b)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq ab(a+b)$$

$$\Rightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b)$$

($a+b$) مثبت است.)

$$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

این نامساوی همواره درست است، پس نامساوی مسئله همواره درست است.

مسئله ۴. اولاً نشان دهید: اگر $a, b > 0$ ، آن گاه $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

ثانیاً اگر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ مثبت و $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = 1$ ثابت کنید:

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\dots(1+x_n) \geq 2^n$$

اثبات: اولاً داریم:

$$a, b > 0: (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

ثانیاً، با توجه به نابرابری اولاً، می توان نوشت:

$$1+x_1 \geq 2\sqrt{x_1}, 1+x_2 \geq 2\sqrt{x_2}, \dots, 1+x_n \geq 2\sqrt{x_n}$$

$$\Rightarrow (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 2^n \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$\Rightarrow (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 2^n$$

هر یک از سه پرانتز بالا بزرگتر یا مساوی ۲ است. پس جمع آن ها بزرگتر یا مساوی ۶ می شود. در نتیجه:

$$3 + (\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}) + (\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}) + (\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}) \geq 9$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) \geq 9$$

۸. همواره داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

اثبات:

می توان نوشت:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \\ c^2 + a^2 - 2ac \geq 0 \end{cases}$$

سه نامساوی را نظیر به نظیر با هم جمع می کنیم:

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

۹. اگر: $a, b, c > 0$ ، آنگاه همواره داریم:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

اثبات:

$$\begin{cases} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \\ b + c - 2\sqrt{bc} \geq 0 \\ c + a - 2\sqrt{ac} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b \geq 2\sqrt{ab} \\ b + c \geq 2\sqrt{bc} \\ c + a \geq 2\sqrt{ac} \end{cases}$$

این سه نامساوی هم جهت مثبت را نظیر به نظیر در هم

ضرب می کنیم:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2 b^2 c^2} \\ \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

۱۰. همواره داریم: $|a^2 \pm ab + b^2| \geq 0$ زیرا:

$$(a^2 + b^2) + (a \pm b)^2 \geq 0$$

که همواره برقرار است.



ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: چند بازی و تردستی جالب و سرگرم کننده برای ایام نوروز

۳. باور نکردنی است!

پشت به جمعی از دوستان خود بنشینید. (قبلاً از آن‌ها معذرت‌خواهی کنید!) سپس از یکی از آن‌ها بخواهید که سه عدد تاس را با هم در حضور جمع پرتاب کند و عددهای رو شده را ببیند. آن‌گاه از او بخواهید که ابتدا عددهای روی دو تاس اول و دوم را با هم جمع کند (تاس‌ها را شماره‌گذاری کند تا عملیات گفته شده را درست انجام دهد) و پنج برابر حاصل جمع را با عدد تاس سوم جمع کند. بعد حاصل جمع اخیر را در ۵ ضرب کند و حاصل را در جایی بنویسد. سپس مجموع عددهای روی دو تاس اول و دوم را ۲۵ برابر کند و در جایی دیگر یادداشت کند. سرانجام ۴۵۰ برابر عدد روی تاس اول را با این دو عدد که قبلاً به دست آورده است، جمع کند و نتیجه را به شما بگوید.

شما پس از کمی مکث و حرکت‌های نمایشی که چاشنی کارتان هستند، در کمال تعجب حاضران، عددهای روی سه تاس را می‌گویید! باور نکردنی است، ولی واقعیت دارد!

*** چگونگی اجرای تردستی:** کافی است عدد حاصل را بر پنج تقسیم کنید. یک عدد سه رقمی به دست می‌آید که سه رقم آن همان عددهای روی سه تاس هستند!

منطق ریاضی این تردستی هم جالب است. اگر آن را نیافتید به انتهای این بخش مراجعه کنید.

فرهنگ ریاضی!

در اینجا می‌خواهیم مفهوم بعضی از اصطلاحات رایج در کتاب‌های ریاضی را شرح دهیم!

۱. می‌توان ثابت کرد که ...

یعنی اثبات این موضوع از چهار ساعت تا حداکثر یک سال طول می‌کشد و ممکن است به حدود پنج بند کاغذ یادداشت و ۱۰۰ عدد قلم نیاز باشد. اگر شما فقط دانشجوی

دوره کارشناسی هستید، نیازی به تلاش

و یا به زحمت انداختن خودتان ندارید،

چون اثبات برایتان غیرممکن است!

۲. می‌توان نشان داد که ...

معمولاً این اصطلاح وقتی به کار

می‌رود که معلم بخواهد از

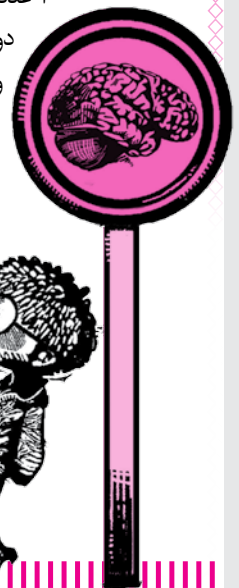
یک ساعت کار روی تخته

اجتناب کند! حالت دیگر آن

است که معلم خودش هم از

اثبات موضوع چیزی

نهمیده باشد!



۳. روشن است که ...

معمولاً وقتی استفاده می‌شود که معلم قبلاً لااقل ۱۰۰ بار مطلب را اثبات کرده باشد!

۴. به آسانی به دست می‌آید که ...

یعنی معلم می‌تواند چیزی را ثابت کند که حتی دانش‌آموزان هم درستی آن را می‌دانند!

۵. بدیهی است که ...

این اصطلاح در مورد اثبات حکمی به کار می‌رود که فقط برای نویسنده کتاب اثبات آن ممکن است و بس!

۶. اثبات این موضوع خارج از محدوده بحث ماست

این اصطلاح فریبی بیش نیست! بدانید که وقتی استفاده می‌شود، خواننده اثبات موضوع را در هیچ کتاب دیگری هم نمی‌تواند پیدا کند!

۷. اثبات به خواننده (دانش‌آموز) واگذار می‌شود.

نویسنده گمان می‌کند که ما هیچ کار بهتری از نشستن بر سر کتاب او و فکر کردن به آن نداریم!

ماهیت فرهنگی و اجتماعی اثبات در آموزش ریاضی



چکیده

محیط اجتماعی و فرهنگی جامعه می‌تواند بر روند آموزش و یادگیری افراد آن مؤثر واقع شود. آموزش ریاضیات نیز از این قاعده مستثنا نیست. به‌طور کلی، ارائه مفاهیم ریاضی و روش آموزش و یادگیری آن‌ها در دوره‌های گوناگون تحصیلی به عوامل متفاوتی از جمله عوامل فرهنگی و اجتماعی غالب بر جامعه موردنظر (برای مثال، جامعه معلمان یا جامعه دانش‌آموزان) بستگی دارد. در آموزش ریاضیات، فرایندهای استدلال و اثبات از جایگاه ویژه‌ای برخوردار هستند. انجام این فرایندها در کلاس درس نیز به عوامل متعددی از جمله درک و فهم معلمان و دانش‌آموزان از اثبات، دوره تحصیلی، سن دانش‌آموزان، توانایی‌های ریاضی آنان و عوامل دیگر وابسته است. توجه داشته باشید که این عوامل خود می‌توانند بر ماهیت استدلال و اثبات در آموزش ریاضی و شکل ارائه آن‌ها در فرایند آموزش تأثیرگذار باشند. هدف این مطالعه، بررسی نظرات و دیدگاه‌های محققان و آموزشگران ریاضی در ارتباط با ماهیت فرهنگی و اجتماعی اثبات در ریاضیات بوده است.

کلیدواژه‌ها:

ماهیت فرهنگی اثبات، ماهیت اجتماعی اثبات، اثبات در آموزش ریاضی

ارائه کرد.

هارل و ساودر^۱ (۲۰۰۷) بیان

می‌کنند که در پاسخ به این سؤال باید چند عامل مهم را در نظر گرفت. اول اینکه ساخت دانش جدید در خلأ رخ نمی‌دهد، بلکه از طریق دانش موجود

مقدمه

بسیاری از نظریه‌پردازان از نقطه نظر آموزشی و معرفت‌شناسی درصدد پاسخ‌گویی به این پرسش بوده‌اند که:

«ماهیت اثبات ریاضی چیست؟» به‌طور

کلی در شاخه‌های متفاوت ریاضی و با توجه به جوامع موردنظر می‌توان تعاریفی با شرایط و ملاک‌های متفاوت برای اثبات



قبول افراد جامعه موردنظر است [Harel & Sowder, 2007; Mueller, 2007]

رامان^۵ (۲۰۰۳) نیز معتقد است که فرایند اثبات، شامل «استدلال‌های شخصی»^۶ و «استدلال‌های عمومی»^۷ است. از نظر او استدلال شخصی، استدلالی است که موجب درک و فهم فرد می‌شود و استدلال عمومی، استدلالی است که با دقت کافی برای یک جامعه خاص در زمینه ریاضیات، ارائه می‌شود [Dee Vanspronsen, 2008]. بسیاری از محققان اثبات را به عنوان فرایندی با ماهیت اجتماعی معرفی می‌کنند [Weber, 2003; Harel & Sowder, 2007; Brodie, 2010; Heinze, 2010].

مانین (۱۹۷۷) معتقد است که یک اثبات فقط پس از پذیرفته شدن در اجتماع به عنوان یک اثبات، اثبات به‌شمار می‌رود [Clements & Ellerton, 1996].

بالاچف (۱۹۸۷) اثبات را توضیحی تعریف می‌کند که توسط یک جامعه معین و در یک زمان مشخص پذیرفته می‌شود [Weber, 2003].

در جامعه آموزشی نیز هنجارها و قوانین اجتماعی و فرهنگی در کلاس درس بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان اثر می‌گذارد. این هنجارها شامل موارد و الگوهایی هستند که توسط معلم و دانش‌آموزان به عنوان یک توضیح و یا توجیه قابل قبول مطرح می‌شوند.

کب و یاکل (۱۹۹۶) اصطلاح «ریاضیات اجتماعی»^۸ را برای بیان تأثیر محیط و شرایط آموزش از قبیل کتاب‌های درسی، عقاید و عملکرد معلمان، و بازخورد آن‌ها از رویکرد دانش‌آموزان، مورد استفاده قرار می‌دهند و معتقدند که عوامل اجتماعی در کنار عوامل شناختی نقش بزرگی را در یادگیری اثبات توسط دانش‌آموزان ایفا می‌کنند [پیشین].

ثابت نمی‌کند، زیرا نتایج حاصل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشد و پایدار نیست [جانسون^۴، ۲۰۰۷، نقل شده در Varghese, 2007].

البته در برخی موارد، بین ریاضی‌دانان نیز نظرات و دیدگاه‌های متفاوتی در مورد نقش و اهداف اثبات و آنچه که یک اثبات را می‌سازد، وجود دارد [Healy & Hoyles, 2000]. هارل و ساودر (۲۰۰۷) معتقدند که معنای اثبات و نقش آن و هر آنچه که اثبات را می‌سازد و همچنین ملاک‌های تأیید و پذیرش اثبات از شخصی به شخص دیگر و از جامعه‌ای به جامعه دیگر متفاوت است. ایگل ویتس و استویل (۱۳۷۰) معتقدند، برخلاف استدلال‌هایی که در بحث‌های روزمره مورد استفاده قرار می‌گیرند، هر مرحله از اثبات ریاضی باید از لحاظ منطقی درست باشد و همین ملاک است که اثبات‌های ریاضی را مشکل می‌کند؛ زیرا هر شخصی به سادگی نمی‌تواند مجموعه‌ای از گزاره‌های معقول را بسازد. هارل (۲۰۰۸) نیز بیان می‌دارد که اثبات ریاضی استدلالی ویژه و خاص است که شخص آن را برای متقاعد کردن خودش یا دیگران در مورد درستی و صحت یک گزاره ارائه می‌دهد. به‌طور کلی می‌توان گفت که «اثبات» یک فعالیت ریاضی است که بررسی ماهیت آن، به عوامل زیادی از جمله عوامل شناختی، ریاضی، تاریخی، معرفت‌شناختی و اجتماعی بستگی دارد.

ماهیت فرهنگی و اجتماعی اثبات در آموزش ریاضی

در اغلب موارد، پذیرش یک استدلال منطقی به عنوان یک اثبات هر چند هم که معتبر باشد، به تجربه و دقت فرد اثبات‌کننده و مخاطب او بستگی دارد. در واقع پذیرش یک اثبات و تعیین اعتبار آن، فرایندی اجتماعی (گروهی) و وابسته به ملاک‌های مورد پذیرش و قابل

شکل می‌گیرد. آنچه که یک شخص در حال حاضر می‌داند، اساس آنچه را که در آینده خواهد دانست، تشکیل می‌دهد. دوم اینکه شخص باید درستی مفهوم اثبات را آن‌گونه که در طول تاریخ ریاضیات فهمیده شده و با آن کار شده است، در نظر بگیرد. سوم اینکه به دلیل وابسته بودن مفهوم اثبات به شرایط و ملاک‌های جامعه موردنظر، شخص باید ماهیت اجتماعی اثبات را بشناسد (در واقع آنچه که به عنوان یک استدلال متقاعد کننده توسط او ارائه می‌شود، باید توسط دیگران نیز پذیرفته شود).

لیدی^۲ (۲۰۰۱) یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین تعاریف اثبات را ارائه می‌دهد. او بیان می‌دارد که اثبات یک استدلال معقول و منطقی از حقایق «قابل قبول»^۳ است [Varghese, 2007]. با وجود این، چنین تعریفی موضوع را پیچیده‌تر می‌کند. برای مثال، حقایقی که برای یک ریاضی‌دان قابل قبول است، ممکن است برای یک فیزیک‌دان قابل قبول نباشد [پیشین]. به‌طور کلی اثبات در زمینه‌های گوناگون برای افراد مختلف، معانی متفاوتی دارد. داروساز ممکن است با استفاده از آزمایش روی چند نفر، خواص داروی موردنظر را برای درمان یک بیماری به اثبات برساند. برای آماردان، اثبات می‌تواند با یک احتمال معین اتفاق بیفتد. برای دانشمند تجربی، اثبات چیزی است که بتوان آن را آزمود. اما ریاضی‌دان با این شواهد و مدارک قانع نمی‌شود [تال، ۱۳۸۵].

ریاضی‌دانان معتقدند که اثبات ریاضی دارای شرایط و ملاک‌های دقیق‌تری است. آن‌ها بر این باورند که استدلال از طریق مشاهده نمی‌تواند ثابت کند، زیرا چشم‌ها می‌توانند ما را منحرف کنند. اندازه‌گیری نمی‌تواند ثابت کند، زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه‌گیری به دقت ابزار اندازه‌گیری بستگی دارد و آزمایش نیز به‌طور قطع



هارل و ساودر (۲۰۰۷) معتقدند، فرایند اثبات فعالیت اجتماعی (جمعی) است که می‌تواند در همه برنامه‌های درسی ریاضیات، از دوره پیش‌دبستانی به تمام دوره‌های تحصیلی نفوذ کند. آن‌ها بیان می‌دارند که اثبات هر گزاره ریاضی، علاوه بر اینکه فرد اثبات‌کننده را در مورد صحت و درستی گزاره و فرایند اثبات متقاعد می‌کند، باید از نظر دقت و اعتبار مورد پذیرش و تأیید جامعه موردنظر نیز باشد. لذا اغلب دانش‌آموزان در تعیین اینکه چه موقع یک اثبات کامل و تمام شده است، مشکل دارند. بسیاری از محققان در زمینه آموزش ریاضی دلایل مهمی را برای تجدیدنظر در ضرورت دقت زیاد در یک اثبات بیان کرده‌اند. تأکید آن‌ها بر این است که برای ارائه اثبات باید به مخاطبین و جامعه مورد نظر توجه داشت [Stylianides & Stylianides, 2008]. برای مثال، اگر یک دانش‌آموز کلاس دوم ابتدایی بخواهد برای هم‌کلاسی‌هایش ثابت کند که حاصل جمع دو عدد، بزرگ‌تر یا مساوی با عدد بزرگ‌تر است، به احتمال زیاد باید گروهی از دانش‌آموزان را متقاعد کند که هنوز با کسرها و اعداد منفی آشنا نیستند.

لدی^۹ (۲۰۰۱) معتقد است، آنچه که به عنوان اثبات برای دانش‌آموزان کلاس پنجم مطرح و مورد قبول واقع شده، ممکن است به عنوان یک اثبات ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی مناسب نباشد [Varghese, 2007].

بیشاب (۱۹۹۸) با ذکر مثالی بیان می‌کند اگرچه بیان این مطلب که جمع زوایای یک مثلث ۱۸۰ درجه است، به منطقه جغرافیایی بستگی ندارد، ولی باز هم یک موضوع فرهنگی - اجتماعی است. او همچنین می‌پرسد: «چرا ۱۸۰ درجه و نه ۲۰۰ درجه؟» در واقع او معتقد است که اثبات بستگی به استفاده و پذیرش آن از سوی جامعه موردنظر

دارد [Clements & Ellerton, 1996]. ویلدر^{۱۰} (۱۹۸۱) معتقد است، همواره باید به این نکته توجه شود که آنچه اثبات را می‌سازد، از فرهنگی به فرهنگ دیگر و همچنین از سنی به سن دیگر متفاوت است. او و برخی از محققان بر این باورند که ریاضیات صرفاً مجموعه‌ای از حقایق مطلق نیست، بلکه حقایق می‌توانند براساس زمینه، مفهوم و کاربرد موردنظر تغییر کنند [Bayazit, 2009].

دت‌لفسن^{۱۱} (۲۰۰۵) بر این باور است که فرایند اثبات صرفاً جنبه منطقی ندارد و موضوعی فرهنگی و اجتماعی به‌شمار می‌رود. در واقع او معتقد است که فرایند اثبات در یک بافت اجتماعی و فرهنگی تکامل می‌یابد و مخاطبان خاص خود را دارد. علاوه بر این، پذیرش اعتبار یک اثبات توسط ریاضی‌دانان، این مطلب را می‌رساند که تأیید و تصدیق اثبات، فرایندی اجتماعی است و معیارهای مورد پذیرش اثبات در یک جامعه ریاضی با گذشت زمان و دانشی که آن‌ها به‌دست می‌آورند، تغییر می‌کند [پیشین].

ویلدر معتقد است، هنگامی که یک اثبات ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرد، می‌توان فرضیه‌ها و عقاید پنهانی منطبق با فرهنگ ریاضی عصر خود را در آن اثبات پیدا کرد. بهترین مثال‌های شناخته شده در این مورد، مثال‌های خوب و ایده‌آل از اثبات‌های دقیق در هندسه هستند که قبلاً تنها بر اصول اقلیدس منطبق بودند، در حالی که هم‌اکنون با توجه به مباحثی همچون هندسه نااقلیدسی، هندسه نتاری و غیره، این نتیجه حاصل می‌شود که ممکن است برخی از اثبات‌های هندسی با استفاده از اصول هندسه اقلیدسی نامعتبر باشند.

عامل زبان نیز به عنوان یکی از عوامل فرهنگی جامعه در نظر گرفته می‌شود و تأثیر آن روی یادگیری مورد تأیید قرار گرفته است. برای مثال، ساختارهای

زبانی که در زبان عامیانه از آن‌ها استفاده می‌شود، می‌تواند از ساختار زبانی که در زمینه‌های رسمی به‌خصوص در ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند، متفاوت باشند. برخی از تحقیقات نشان می‌دهند که معنای عامیانه مفاهیم ریاضی (مثلاً حد و پیوستگی)، می‌تواند بر درک و فهم دانش‌آموزان و یادگیری این مفاهیم آموزش رسمی اثر بگذارد.

در زمینه اثبات نیز این سؤال مطرح است که: «آیا فهم دانش‌آموزان از اثبات، متقاعد شدن^{۱۲} است یا اعتبار^{۱۳} اثبات؟» برخی تحقیقات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان بیشتر به «اثبات‌های متقاعدکننده» تمایل دارند تا «اثبات‌های معتبر» [Healy & Hoyles, 2000; Chin & Lin, 2009].

در تحقیق هیل و هوبلز (۲۰۰۰) معلوم شد که اغلب دانش‌آموزان اثبات‌های تجربی و روایت‌گونه را نزدیک به رویکرد خود می‌دانند، در صورتی که اثبات‌های رسمی (صوری) را برای دریافت نمره خوب از معلمشان انتخاب می‌کنند.

اینگلیس و رماس^{۱۴} (۲۰۱۱) معتقدند که گاهی دانش‌آموز نمی‌تواند بین «متقاعد شدن» و «اعتبار اثبات» تمایز قائل شود. همچنین، آنچه برای یک دانش‌آموز اثبات به‌شمار می‌آید، بستگی به محیط، جامعه و شخص اثبات‌کننده دارد. آن‌ها در مطالعه خود به این نتیجه رسیدند که فهم دانش‌آموزان از کلمه «اثبات»^{۱۵} نسبت به واژه «ثابت کردن»^{۱۶} رسمی‌تر است. برخی از یادگیرندگان در مواجهه با واژه «ثابت کردن» در سؤال مورد نظر، ارزیابی یک اثبات را براساس «متقاعد شدن» در مورد درستی اثبات انجام می‌دهند؛ در صورتی که اغلب آن‌ها در مواجهه با واژه «اثبات»، براساس «اعتبار» اثبات ارئه شده، آن را مورد ارزیابی قرار می‌دهند. به‌طور کلی اینگلیس و رماس به این نتیجه می‌رسند

اجتماعی و فرهنگی اثبات تأکید می‌کنند، معتقدند که معلمان باید در کلاس درس محیطی فراهم آورند که دانش‌آموزان با یکدیگر در مورد آنچه

که یک توجیه ریاضی مورد قبول را می‌سازد، بحث و گفت‌وگو داشته باشند [Weber, 2005].

نتیجه‌گیری

به‌طور کلی اثبات ریاضی فرایندی است که بررسی ماهیت آن، به عوامل متفاوتی از جمله عوامل شناختی، ریاضی، فرهنگی و اجتماعی بستگی دارد. در جامعه آموزشی نیز هنجارها و قوانین اجتماعی و فرهنگی در کلاس درس بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان در فرایند اثبات اثر می‌گذارند. این هنجارها می‌توانند شامل موارد و الگوهای باشند که توسط معلم و دانش‌آموزان به عنوان یک توضیح و یا توجیه قابل قبول مطرح می‌شوند. در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای، معلم باید بداند که فرایند اثبات در جریان ساخته‌شدن با ارائه آن به صورت یک محصول تمام شده که متکی بر دقت است، تفاوت دارد. همچنین، معلمان به منظور انتخاب روش تدریس مناسب به‌ویژه در ارتباط با فرایند اثبات، باید همواره به رشد شناختی دانش‌آموزان، سبک‌های یادگیری آن‌ها و عوامل تأثیرگذار بر یادگیری و باور دانش‌آموزان توجه داشته باشند و براساس آن، بین توانایی آن‌ها و ارائه مفاهیم موردنظر، هماهنگی و تناسب برقرار کنند. علاوه بر این، معلم می‌تواند در کلاس درس، شرایطی را فراهم سازد که دانش‌آموزان بتوانند در یک فضای پویا نظرات خود را بیان و استدلال‌های یکدیگر را نقد و بررسی کنند؛ به گونه‌ای که با محدودیت برخی از استدلال‌ها آشنا شوند و به دنبال روش‌های منطقی برای تأیید و اثبات ادعای خود باشند. در نهایت نیز این بحث و بررسی، و نقد و توجیه باید با هدایت معلم به سمت اثبات‌های معتبر سوق یابد.

که رویکرد برخی از یادگیرندگان در مواجهه با واژه‌های متفاوت اثبات (اسم و فعل)، متفاوت است. آن‌ها معتقدند که تأثیر مفاهیم روزانه بر مفاهیم رسمی مورد استفاده توسط دانش‌آموزان باید در سه مرحله بررسی شود که عبارت‌اند از:

۱. معنای کلمه یا مفهوم موردنظر در زبان عامیانه و نحوه استفاده از آن مشخص شود؛

۲. بررسی شود که این مفاهیم در درس ریاضی چگونه توسط دانش‌آموزان فهمیده می‌شوند؛
۳. باید رابطه بین معانی مفاهیم موردنظر در دو مورد بالا بررسی شود.

آن‌ها براساس یافته‌های تحقیق خود تأکید می‌کنند که باید به دانش‌آموزان کمک کنیم تا مفاهیم رسمی و زبان فنی ریاضیات را در بحث‌های کلاسی‌شان، درست مورد استفاده قرار دهند و بتوانند بین این مفاهیم و مفاهیم مورد استفاده در زبان عامیانه تمایز قائل شوند. علاوه بر این، آموزشگرانی که روی ماهیت

منابع

۱. ایگل ویتس، بوریس و استویل، جودیث (۱۳۷۰). مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی. ترجمه غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه (نشر اثر اصلی ۱۹۷۳). تهران.
۲. تال، دیوید (۱۳۸۵). «ماهیت اثبات ریاضی». ترجمه عرفان صفر. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۸۳.
3. Bayazit, N. (2009). Prospective mathematics teachers? use of mathematical definitions in doing proof. Unpublished doctoral dissertation, Florida state university. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
4. Brodie, Karin (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*, New York: springer, Retrieved May 10, 2011 from <http://www.springer.com>.
5. Chin, E.T. & Lin, F-L. (2009). A Comparative Study on Junior High School Students' Proof Conceptions in Algebra between Taiwan and the UK, *Journal of Mathematics Education*, Vol. 2, No. 2, pp.52-67.
6. Clements, M. A. & Ellerton, N. F. (1996). *Mathematics education research: Past, present and future*. Unesco.
7. Dee Vanspronesn, Hillary (2008). Proof processes of novice mathematics proof writers, Unpublished doctoral dissertation, university of Montana, USA. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
8. Detlefsen, Michael (2005). *Proof and knowledge mathematics*. London and New York: Routledge.
9. Harel, Guershon (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education*. 40, 487-500.
10. Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
11. Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
12. Heinze, Aiso (2010). Mathematicians' Individual Criteria for Accepting Theorems and Proofs: An Empirical Approach. In Hanna, Gila, Niels Jahnke, Hans & Pulte, Helmut (Ed.), *Explantion and Proof in Mathematics* (chap. 8, pp. 101-111). New York: Springer Science.
13. Inglis, Matthew & Pablo Mejia-Ramos (2011). Semantic contamination and mathematical proof: Can a non-proof prove?. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 19-29.
14. Mueller, Mary (2007). A study of the development of reasoning in sixth grade students, Unpublished doctoral dissertation, the state university of new Jersey, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
15. Stylianides, Gabriel J. & Stylianides, Andreas J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 103-133.
16. Varghese, Thomas, (2007). *Students teachers conception of mathematical proof*. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.
17. Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. MAA Online: Research Sampler, Cited from http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html, in 27.7.2010.
18. Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 351-360.

بخش دوم

پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونه گسسته و پیوسته

پیشامدهای مستقل و وابسته

(این قضیه با استفاده از فرمول احتمال شرطی به اثبات می‌رسد.)

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر مستقل یا وابسته بودن پیشامدهای داده شده را بررسی کنید:

(I) ریختن ۲ تاس با هم یا یک تاس ۲ بار $S =$

پیشامد آنکه تاس اول ۵ بیاید $A =$

پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۹ باشد $B =$

حل: عدم رخداد A در بعضی از حالت‌ها مانع رخداد B می‌شود. مثلاً اگر تاس اول ۱ یا ۲ بیاید، امکان اینکه مجموع دو تاس ۹ باشد، وجود ندارد. پس دو پیشامد وابسته هستند. حال از طریق قضیه این نتیجه را تأیید می‌کنیم:

$$n(B) = 4 \text{ و } n(A) = 6 \text{ و } (A \cap B) = \{(5, 4)\}$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

تعریف: دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را مستقل از هم می‌نامیم هرگاه وقوع یا عدم وقوع هر یک روی وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. (A رخ بدهد یا رخ ندهد، B بتواند رخ بدهد.)

تذکر مهم: اگر A و B در دو فضای نمونه‌ای متفاوت مانند S_1 و S_2 تعریف شده باشند، همواره مستقل هستند و واضح است که رخداد یا عدم رخداد هر یک هیچ تأثیری بر رخداد دیگری ندارد. مثلاً انداختن یک تاس و یک سکه با فضاهای نمونه‌ای $S_1 = \{1, 2, \dots, 6\}$ و $S_2 = \{H, T\}$ دو پیشامد مستقل از هم هستند.

تعییه: شرط لازم و کافی برای آنکه دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S مستقل باشند آن است که:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

تذکره: تعریف فوق برای n پیشامد $A_1, A_2, \dots, A_n$ از فضای نمونه‌ای S قابل تعمیم است. یعنی اگر پیشامدهای A_1 تا A_n دوه‌دو مستقل باشند و داشته باشیم:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

در این صورت این پیشامدها مستقل از یکدیگرند.

تذکره: دو پیشامد A و B از فضای S می‌توانند:

- (I) سازگار و مستقل باشند.
- (II) سازگار و وابسته باشند.
- (III) ناسازگار $((A \cap B) = \emptyset)$ و مستقل باشند که در این صورت: $P(A) = 0$ یا $P(B) = 0$.
- (IV) ناسازگار و وابسته باشند.

تذکره: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، در این صورت A' و B' مستقل‌اند، A' و B مستقل‌اند و A و B' نیز مستقل‌اند.

نکته مهم: اگر $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد، همواره داریم:

$$1) \forall 1 \leq i \leq n; 0 \leq P(\{a_i\}) \leq 1$$

$$2) \sum_{i=1}^n P(\{a_i\}) = 1$$

یا $P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \dots + P(\{a_n\}) = 1$

(برای راحتی در نگارش از این به بعد به جای $P(\{a_i\})$ می‌نویسیم: $P(a_i)$).

تعریف: اگر $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و در این فضای نمونه‌ای داشته باشیم: $P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n) = \frac{1}{n}$

در این صورت فضای S را فضای نمونه‌ای هم‌شانسی و در غیر این صورت آن را فضای غیرهم‌شانسی می‌نامیم. (اگر در یک فضای نمونه‌ای حداقل ۲ برآمد ساده، احتمال نابرابر داشته باشند، آن فضا غیرهم‌شانسی است.)

مثال: یک تاس طوری ساخته شده که احتمال وقوع هر وجه آن متناسب است با دو برابر عدد حک شده روی همان وجه. اگر این تاس را بیندازیم چه قدر احتمال دارد عدد حاصل فرد باشد؟

حل: طبق فرض داریم:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{و } P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \text{ و } P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \times \frac{1}{9}$$

$$P(A) = \frac{P(A)}{S} = \frac{P(A)}{S}$$

(II) ریختن دو تاس با هم یا یک تاس، دو بار $S =$

پیشامد آنکه تاس اول ۵ بیاید $A =$

پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۷ باشد $B =$

حل: A رخ بدهد یا رخ ندهد، همواره B می‌تواند رخ بدهد. پس دو پیشامد مستقل هستند و از طریق قضیه داریم:

$$n(S) = 36 \text{ و } n(A) = 6 \text{ و } n(B) = 4 \text{ و } n(A \cap B) = 1$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{و } P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \text{ و } P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \times P(B)$$

تعریف: ۳ پیشامدهای A, B, C از فضای نمونه‌ای S را مستقل از یکدیگر می‌نامیم هرگاه: اولاً دوه‌دو مستقل باشند، ثانیاً داشته باشیم:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

تذکره: ممکن است سه پیشامد A, B, C از فضای نمونه‌ای S طوری تعریف شوند که شرط دوم را داشته باشند، ولی دوه‌دو مستقل نباشند (در واقع شرط دوم شرط اول را نتیجه نمی‌دهد).

مثال: فرض کنیم: $S = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ و $C = \{4, 8, 7, 6\}$. در این صورت داریم:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ و } P(B) = \frac{1}{2} \text{ و } P(C) = \frac{1}{2}$$

شرط دوم برقرار است:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{4\}) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$(A \cap B) = \{4\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8} \neq P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(A \cap C) = \{4\} \rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{8} \neq P(A) \times P(C) = \frac{1}{4}$$

$$(B \cap C) = \{4, 6, 7\}$$

$$\rightarrow P(B \cap C) = \frac{3}{8} \neq P(B) \times P(C) = \frac{1}{4}$$

باشند، بیشتر از $\frac{1}{3}$ باشد؟

حل: اگر A را پیشامد مورد نظر فرض کنیم، متمم A یا A' آن است که روز تولد هر k نفر متمایز باشد.

$$P(A) > \frac{1}{3} \rightarrow 1 - P(A') > \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow P(A') < 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{8-k}{7} < \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow k_{\min} = 3$$

مثال: در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۳ مهره سبز وجود دارد. سه مهره به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه:

(I) هر سه مهره آبی باشند.

(تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان سه مهره را از بین ۱۰ مهره انتخاب کرد: $n(S) = \binom{10}{3} = 120$)

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

(II) هر سه مهره هم‌رنگ باشند (یا هر سه قرمز یا هر سه آبی یا هر سه سبز).

$$P(A) = \frac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1+4+1}{120} = \frac{1}{20}$$

(III) هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشند (۱ مهره قرمز، ۱ مهره آبی و ۱ مهره سبز).

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$$

(IV) حداقل ۱ مهره سبز باشد.

پیشامد آنکه هیچ مهره‌ای سبز نباشد $A' =$

$$\rightarrow n(A') = \binom{7}{3} = 35$$

$$P(A') = \frac{35}{120} \rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{35}{120} = \frac{85}{120} = \frac{17}{24}$$

(V) حداکثر ۲ مهره آبی باشد.

پیشامد آنکه هر سه مهره آبی باشند $A' =$

$$\rightarrow P(A') = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{4}{120} = \frac{29}{30}$$

(VI) فقط ۲ مهره قرمز باشد (دو مهره قرمز و ۱ مهره

$$P(1) = 2x \text{ و } P(2) = 4x \text{ و } P(3) = 6x$$

$$\text{و } P(4) = 8x \text{ و } P(5) = 10x \text{ و } P(6) = 12x$$

$$\sum_{i=1}^6 P(i) = 1 \rightarrow 2x + 4x + \dots + 12x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{42}$$

$$P(\{1, 3, 5\}) = P(1) + P(3) + P(5)$$

$$= \frac{2}{42} + \frac{6}{42} + \frac{10}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

پیشامدهای مربوط به تولد

به دنیا آمدن و تولد اشخاص پیشامدهایی مستقل از یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند. برای مثال، احتمال آنکه دو نفر در روز شنبه به دنیا آمده باشند برابر است با:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$$

مثال: در یک تیم ۵ نفری، چه قدر احتمال دارد:

(الف) هر پنج نفر روز شنبه به دنیا آمده باشند؟

(ب) هر پنج نفر در یک روز از هفته به دنیا آمده باشند؟

(ج) روز تولد هر پنج نفر متمایز باشد (تولد در یکی از روزهای هفته).

(د) حداقل ۲ نفر در یک روز از ایام هفته متولد شده باشند؟

حل:

$$(الف) P(A) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7^5}$$

$$(ب) P(B) = 7 \times \frac{1}{7^5} = \frac{1}{7^4}$$

$$(ج) P(C) = \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{360}{7^4}$$

$$(د) P(D) = 1 - \frac{360}{7^4}$$

تذکره: احتمال آنکه n نفر ($n \leq 365$) همگی در یک روز

$$\text{از سال متولد شده باشند برابر است با: } \frac{365}{365^{n-1}} \text{ یا: } \frac{365}{365^n}$$

و احتمال آنکه روز تولد هیچ دو نفری در سال یکی نباشد،

از این رابطه به دست می‌آید:

$$P(A) = \frac{P(365, n)}{365^n}$$

یا:

$$P(A) = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - (n-1))}{365^n}$$

مثال: در جمعی k نفره حداقل مقدار برای k کدام است

تا احتمال اینکه حداقل ۲ نفر در یک روز از هفته متولد شده

غیرقرمز).

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{7}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$

(VII) هیچ مهره‌ای سبز نباشد.

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

مثال: دو تاس را با هم می‌ریزیم. مطلوب است احتمال آنکه:

(I) هر دو تاس زوج باشند.

$$n(S) = 6^2$$

$$A = \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\} \rightarrow n(A) = 3 \times 3 = 9$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

(II) هر دو تاس بزرگ‌تر از ۲ باشند.

$$n(S) = 6^2 \text{ و } A = \{3, 4, 5, 6\} \times \{3, 4, 5, 6\}$$

$$\rightarrow n(A) = 4 \times 4 = 16 \rightarrow P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

(III) تاس اول ۲ بیاید.

$$A = \{(2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6)\} \rightarrow n(A) = 6$$

$$\text{و } P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(IV) هر دو با هم اول نباشند.

$$A' = \{2, 3, 5\} \times \{2, 3, 5\}$$

$$\rightarrow n(A') = 3 \times 3 = 9 \text{ و } P(A') = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{و } P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(V) هیچ کدام از دو تاس مضرب ۳ نباشند.

$$A = \{1, 2, 4, 5\} \times \{1, 2, 4, 5\} \rightarrow n(A) = 4 \times 4 = 16$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

(VI) مجموع دو تاس بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

$$A = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\} \rightarrow n(A) = 4$$

$$\text{و } P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(VII) حاصل ضرب دو تاس بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد.

$$A = \text{حاصل ضرب دو تاس } 10 \text{ یا } 20 \text{ یا } 30 \text{ باشد}$$

$$\rightarrow A = \{(2, 5), (5, 2), (4, 5), (5, 4), (6, 5), (5, 6)\}$$

$$n(A) = 6 \rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال: ۳ تاس را با هم می‌ریزیم. مطلوب است احتمال آنکه:

(I) هر سه بر ۳ بخش‌پذیر باشند.

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

$$A = \{3, 6\} \times \{3, 6\} \times \{3, 6\} \rightarrow n(A) = 2^3 = 8$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$$

(II) مجموع سه تاس بزرگ‌تر از ۵ باشد.

پیشامد آنکه مجموع ۳ تاس کوچک‌تر یا مساوی ۵ باشد A'

$$A' = \{(1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3)\}$$

$$\rightarrow n(A') = 10$$

$$\text{و } P(A') = \frac{10}{216} = \frac{5}{108} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{5}{108} = \frac{103}{108}$$

(III) سه عدد رو شده یک دنباله هندسی صعودی با

قدرنسبت صحیح تشکیل بدهند.

$$A = \{(\underbrace{1, 1, 1}_{\text{قدرنسبت 1}}, \dots, \underbrace{6, 6, 6}_{\text{قدرنسبت 2}})\}$$

$$\rightarrow n(A) = 7 \text{ و } P(A) = \frac{7}{216}$$

(V) سه عدد رو شده بتوانند یک دنباله عددی با قدرنسبت

صحیح تشکیل بدهند.

توجه داریم که اگر قدرنسبت، $d = 0$ باشد، هر سه عدد با هم برابر هستند که ۶ حالت امکان دارد. همچنین اگر $d = 1$ ، اعداد ۱، ۲ و ۳ یا ۲، ۳ و ۴ یا ۳، ۴ و ۵ یا ۴، ۵ و ۶ می‌توانند تشکیل دنباله عددی یا حسابی بدهند که در هر حالت دارای $3! = 6$ جایگشت هستند. اگر $d = 2$ باشد، اعداد ۱، ۳ و ۵ تشکیل دنباله عددی می‌دهند که $3! = 6$ جایگشت دارند و نیز اعداد ۲، ۴ و ۶ که آن‌ها نیز $3! = 6$ جایگشت دارند. اگر هم $d \geq 3$ فرض شود، اعداد نمی‌توانند دنباله عددی تشکیل بدهند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$n(A) = 4 \times 6 + 6 + 6 + 6 = 36 \rightarrow P(A) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

مثال: در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. ۱ مهره به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم و بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار می‌گذاریم. سپس مهره دیگری از جعبه خارج می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد مهره دوم آبی باشد؟

نکته مهم و عجیب: اگر در جعبه‌ای n مهره از رنگ‌های متفاوت وجود داشته باشد و ۱ مهره یا ۲ مهره ... یا $(n-1)$ مهره به تصادف از جعبه خارج کرده و بدون نگاه کردن به رنگشان آن‌ها را کنار بگذاریم و سپس مهره دیگری به تصادف خارج کنیم، در این صورت احتمال آنکه مهره برداشته شده در مرحله دوم از رنگ خاصی از رنگ‌های موجود در جعبه باشد، با احتمال آنکه ابتدا مهره‌ای از جعبه خارج کنیم که از همان رنگ باشد، برابر است.

در مثال فوق، احتمال آنکه مهره‌ای از جعبه خارج کنیم و رنگ آن آبی باشد برابر است با تقسیم تعداد مهره‌های آبی بر تعداد کل مهره‌های جعبه؛ یعنی: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = P(\text{آبی})$. اگر بخواهیم از این نکته استفاده نکنیم، برای مهره خارج شده باید دو حالت در نظر بگیریم: یکی اینکه مهره اولی آبی نباشد و دومی آبی باشد، و حالت دیگر اینکه مهره اولی آبی باشد و دومی نیز آبی باشد. جمع این دو احتمال باید همان $\frac{2}{5}$ شود:

$$P(\text{مهره دوم آبی}) = \underbrace{\frac{6}{10} \times \frac{4}{9}}_{\text{اولی غیر آبی و دومی آبی}} + \underbrace{\frac{4}{10} \times \frac{3}{9}}_{\text{اولی آبی و دومی آبی}} = \frac{24}{90} + \frac{12}{90} = \frac{36}{90} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

مثال: در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۳ مهره سفید وجود دارد. ۳ مهره از این جعبه به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد:

(I) اولی سفید، دومی آبی و سومی قرمز باشد؟

$$P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{20}$$

(II) مهره اول آبی و مهره دوم قرمز باشد؟

$$P(A) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{2}{15}$$

(توجه دارید که مهره سوم تأثیری بر مهره‌های اول و دوم ندارد و هر مهره‌ای باشد، مطلوب است.)

(III) مهره اول آبی و مهره سوم سفید باشد؟

روش اول: برای مهره دوم که روی سومی تأثیرگذار است، دو حالت در نظر می‌گیریم: دومی یا سفید بوده یا سفید نبوده است:

$$P(A) = \left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \right) = \frac{2}{15}$$

روش دوم: چون روی مهره دوم قیدی گذاشته نشده

است، می‌توانیم پس از برداشت مهره اول یک مهره به تصادف برداریم و بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار بگذاریم که در این صورت طبق نکته قبل برای مهره سوم فضای نمونه تغییری نکرده است. در واقع مهره سوم را می‌توان در حکم مهره دوم فرض کرد و در این صورت خواهیم داشت:

$$P(A) = \left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \right) = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

(IV) مهره دوم قرمز و مهره سوم سفید باشد. چون روی مهره اول قید گذاشته نشده است، پس یک مهره برمی‌داریم و بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار می‌گذاریم که در این صورت مهره‌های دوم و سوم در حکم اول و دوم به حساب می‌آیند و داریم:

$$P(A) = P(\text{اولی قرمز و دومی سفید}) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{10}$$

اگر بخواهیم مسئله را به روش معمول حل کنیم، باید برای مهره اول سه حالت در نظر بگیریم:

$$P(A) = \left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} \right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{3}{8} \right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \right) = \frac{1}{10}$$

اولی سفید اولی آبی اولی قرمز

تمرین

۱. سکه سالمی را ده بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است

تعیین احتمال آنکه:

(الف) دقیقاً پنج بار رو بیاید.

(ب) دقیقاً شش بار رو بیاید.

(ج) حداقل شش بار رو بیاید.

۲. چهار دانش‌آموز کلاس دوم و هفت دانش‌آموز کلاس

سوم داوطلب بازی در تیم والیبال مدرسه شده‌اند، در

صورتی که بازی در تیم برای ۶ نفر از آن‌ها امکان دارد.

مطلوب است تعیین احتمال آنکه حداقل ۳ نفر از کلاس

سوم باشند.

۳. در کیسه‌ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره سفید وجود دارد. ۳

مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. مطلوب است

تعیین احتمال آنکه:

(الف) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

(ب) فقط دو مهره هم‌رنگ باشند.

(ج) لااقل دو مهره هم‌رنگ باشند.

بسط دو جمله‌ای و ویژگی‌های آن



چکیدہ

در این مقاله در پی آن هستیم که بسط دو جمله‌ای
غیاث‌الدین جمشید کاشانی و مثلث خیام - پاسکال را
معرفی و ویژگی‌های آن‌ها را بیان کنیم.

کلیدواژه‌ها:

بسط دو جمله‌ای، مثلث خیام - پاسکال،
غیاث الدین حمشید کاشانی

به اتحادهای زیر توجه کنید:

$$(a + b)' = a + b$$

$$(a + b)^r = a^r + r ab + b^r$$

$$(a + b)^{\mathfrak{r}} = a^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}a^{\mathfrak{r}}b + \mathfrak{r}ab^{\mathfrak{r}} + b^{\mathfrak{r}}$$

$$(a + b)^f = a^f + f a^{f-1} b + \frac{f(f-1)}{2} a^{f-2} b^2 + \frac{f(f-1)(f-2)}{6} a^{f-3} b^3 + b^f$$

$$(a + b)^\Delta = a^\Delta + \Delta a^f b + 1 \cdot a^r b^r + 1 \cdot a^r b^r + \Delta a b^f + b^\Delta$$

هر عبارت به صورت $(a + b)^n$ را که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است، «دو جمله‌ای جمشید کاشانی» و بسط آن

را به صورت چند جمله‌ای از a و b، «بسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی» می‌نامیم.

این چند جمله‌ای $n+1$ جمله دارد و هر جمله آن به صورت مضربی است از: $a^k b^{n-k}$ (یا $a^{n-k} b^k$). معمولاً جمله‌ها بر حسب توان‌های نزولی a مرتب می‌شوند. مجموع توان‌های a و b در هر جمله نیز برابر با n است.

ضرایب بسط دوجمله‌ای را می‌توان در مثلی به شکل‌های زیر مرتب کرد. به این مثلث، «مثلث خیام - پاسکال» گفته می‌شود.

(الف)

سطر صفرم	$(a+b)^0$	۱
سطر یکم	$(a+b)^1$	۱ ۱
سطر دوم	$(a+b)^2$	۱ ۲ ۱
سطر سوم	$(a+b)^3$	۱ ۳ ۳ ۱
سطر چهارم	$(a+b)^4$	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
سطر پنجم	$(a+b)^5$	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
سطر ششم	$(a+b)^6$	۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

(ب)

سطر صفرم	$(a+b)^0$	۱
سطر یکم	$(a+b)^1$	۱ ۱
سطر دوم	$(a+b)^2$	۱ ۲ ۱
سطر سوم	$(a+b)^3$	۱ ۳ ۳ ۱
سطر چهارم	$(a+b)^4$	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
سطر پنجم	$(a+b)^5$	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
سطر ششم	$(a+b)^6$	۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

نمودار فوق‌العاده جالبی است که به شما نشان می‌دهد که چگونه می‌توانید از یک سطر به سطر بعدی در مثلث پاسکال بروید. هر عدد در سطر n ، مجموع دو عدد در سطر $n-1$ است که در دو سطر قبلی قرار دارند. به عنوان مثال، عدد ۶ در سطر ۴، مجموع دو عدد ۳ و ۳ در سطر ۳ است. این قانون برای همه اعداد در مثلث پاسکال صادق است.

دو ستون کناری مثلث همواره عدد یک و هر درایه از جمع دو درایه سطر قبل به صورتی که در شکل‌ها نشان داده شده است، به دست می‌آید.

مثال ۱. حاصل بسط‌های زیر را با استفاده از مثلث خیام-پاسکال به دست آورید.

$$\text{الف) } (2a + b)^5 \quad \text{ب) } \left(x + \frac{1}{x}\right)^4$$

$$\text{ج) } (x^2 + 1)^6 \quad \text{د) } (x - 1)^5$$

جواب: با توجه به سطرهای پنجم، چهارم و ششم مثلث داریم:

$$\begin{aligned} \text{الف) } (2a + b)^5 &= (2a)^5 + 5(2a)^4(b) + 10(2a)^3b^2 \\ &\quad + 10(2a)^2b^3 + 5(2a)b^4 + b^5 = 32a^5 + 80a^4b \\ &\quad + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 20ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 &= x^4 + 4x^3\left(\frac{1}{x}\right) + 6x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4x\left(\frac{1}{x}\right)^3 \\ &\quad + \left(\frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } (x^2 + 1)^6 &= (x^2)^6 + 6(x^2)^5 + 15(x^2)^4 + 20(x^2)^3 \\ &\quad + 15(x^2)^2 + 6(x^2) + 1 = x^{12} + 6x^{10} + 15x^8 \\ &\quad + 20x^6 + 15x^4 + 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د) } (x - 1)^5 &= (x + (-1))^5 = x^5 + 5x^4(-1) + 10x^3(-1)^2 \\ &\quad + 10x^2(-1)^3 + 5x(-1)^4 + (-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 \\ &\quad - 10x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

در تمامی مثال‌ها به تعداد جملات و رابطه آن با توان، در قسمت ب به جمله فاقد x و چگونگی به دست آمدن آن، در مثال ج به توان x و در مثال آخر به علامت جمله‌ها دقت کنید

مثال ۲. تعداد جمله‌های حاصل عبارت $(x+1)^{12} + (x-2)^{18}$ را (پس از ساده کردن) به دست آورید.

همان گونه که قبلاً بیان کردیم، $(a+b)^n$ دارای $n+1$ جمله است. بنابراین بسط اول دارای ۱۳ جمله و بسط دوم دارای ۱۹ جمله خواهد بود. با یک قضاوت سریع ممکن است گفته شود حاصل دارای ۳۲ جمله خواهد بود. اما تمامی جمله‌های بسط $(x+1)^{12}$ دارای جمله‌های متشابه در بسط $(x-2)^{18}$ هستند. بنابراین با آن‌ها ساده خواهند شد. یعنی بسط فوق دقیقاً دارای ۱۹ جمله خواهد بود.

بررسی ویژگی‌های مثلث خیام-پاسکال

۱. عددهای هر سطر نسبت به جمله وسط (اگر n زوج باشد) یا دو جمله وسط (اگر n فرد باشد) تقارن دارند.

۲. مجموع اعداد در سطر n برابر است با 2^n . در واقع مجموع ضریب‌های بسط $(a+b)^n$ برابر است با 2^n . دلیل این مطلب آن است که برای به دست آوردن مجموع ضریب‌های هر چند جمله‌ای کافی است به جای متغیرها عدد یک را قرار دهیم. با همین استدلال می‌توان گفت اگر اعداد هر سطر را به طور متناوب کم و زیاد کنیم، حاصل برابر با صفر خواهد بود؛ چون: $(1-1)^n = 0$.

مثال ۳. مجموع ضریب‌های عددی هر بسط را به دست آورید.

$$\text{الف) } (2a + 3b)^4 \quad \text{ب) } (2x - y + 3z)^4$$

جواب:

$$\text{الف) } (2a + 3b)^4 \xrightarrow{a=1, b=1} \Delta^4 = \text{مجموع ضرایب}$$

$$\text{ب) } (2x - y + 3z)^4 \xrightarrow{x=y=z=1} \Delta^4 = \text{مجموع ضرایب}$$

مثال ۴. مجموع ضریب‌های جمله‌های فاقد y را در بسط $(3x - y - z)^4$ به دست آورید.

جواب: کافی است به جای x و z عدد یک و به جای y عدد صفر را قرار دهیم: $2^4 = 16 = (3 - 0 - 1)^4$

۳. اگر در هر سطر جمله‌ها را یک در میان با یکدیگر جمع کنیم، حاصل یکسان خواهد بود. برای نمونه در سطر ششم داریم:

$$1 + 15 + 15 + 1 = 6 + 20 + 6$$

به عبارت دیگر، در بسط $(a+b)^n$ ، مجموع ضرایب جمله‌هایی که توان a در آن‌ها فرد است با مجموع ضرایب جمله‌هایی که توان a در آن‌ها زوج است، برابر خواهد بود.

۴. اگر آرایه مثلثی را به صورت شکل الف در نظر بگیریم، مجموع اعداد هر ستون برابر است با عددی که در سطر و ستون بعدی قرار دارد؛ برای نمونه: $1 + 3 + 6 = 10$ یا $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

۵. همان گونه که در ابتدای کتاب حسابان ملاحظه کردید، مجموع n جمله نخست دنباله هندسی از رابطه $S_n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$ به دست می‌آید که a ، جمله اول و q قدرنسبت است. بنابراین: $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

با توجه به مطلب اخیر، مجموع اعداد هر سطر یک واحد از مجموع اعداد سطرهای قبلی بیشتر خواهد بود.

۶. عدد به دست آمده از کنار هم قراردادن اعداد سطر n م برابر است با 11^n ؛ برای نمونه:

$11^1 = 1$	۱					
$11^2 = 11$	۱	۱				
$11^3 = 1۲1$	۱	۲	۱			
$11^4 = 1۳۳1$	۱	۳	۳	۱		
$11^5 = 1۴۶۴1$	۱	۴	۶	۴	۱	
$11^6 = 1۶1۰۵1$	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱

برای توجیه عدد به دست آمده در سطر پنجم به شکل زیر دقت کنید:

۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱
۱	۶	۱	۰	۵	۱

۷. در کتاب هندسه ۲ با مثلث‌های سرپینسکی آشنا شدید. اعداد زوج در مثلث را رنگ آمیزی و با این مثلث‌ها مقایسه کنید.

بسط دو جمله‌ای و ترکیب‌ها

در کتاب ریاضی سال دوم دبیرستان مشاهده کردید که تعداد انتخاب‌های k شیء از n شیء متمایز از رابطه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \binom{n}{1} = 1, \binom{n}{0} = 1$$

با اینکه با استفاده از مثلث خیام - پاسکال می‌توان ضرایب بسط دو جمله‌ای را به دست آورد، اما این روش دارای یک ایراد اساسی است. برای به دست آوردن هر سطر باید سطر قبلی (و در نتیجه تمامی سطرهای قبلی) را به طور کامل به دست آورده باشیم. در نتیجه این روش به دست آوردن ضرایب‌ها، برای n های بزرگ به محاسباتی پرحوصله نیاز دارد.

به اتحادهای زیر توجه کنید:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

می‌توان ثابت کرد که در هر بسط ضریب جمله $a^{n-k}b^k$ برابر است با: $\binom{n}{k}$. بنابراین:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

مثال ۵. ضریب جمله هفتم را در بسط $(2x+y)^9$ به دست آورید.

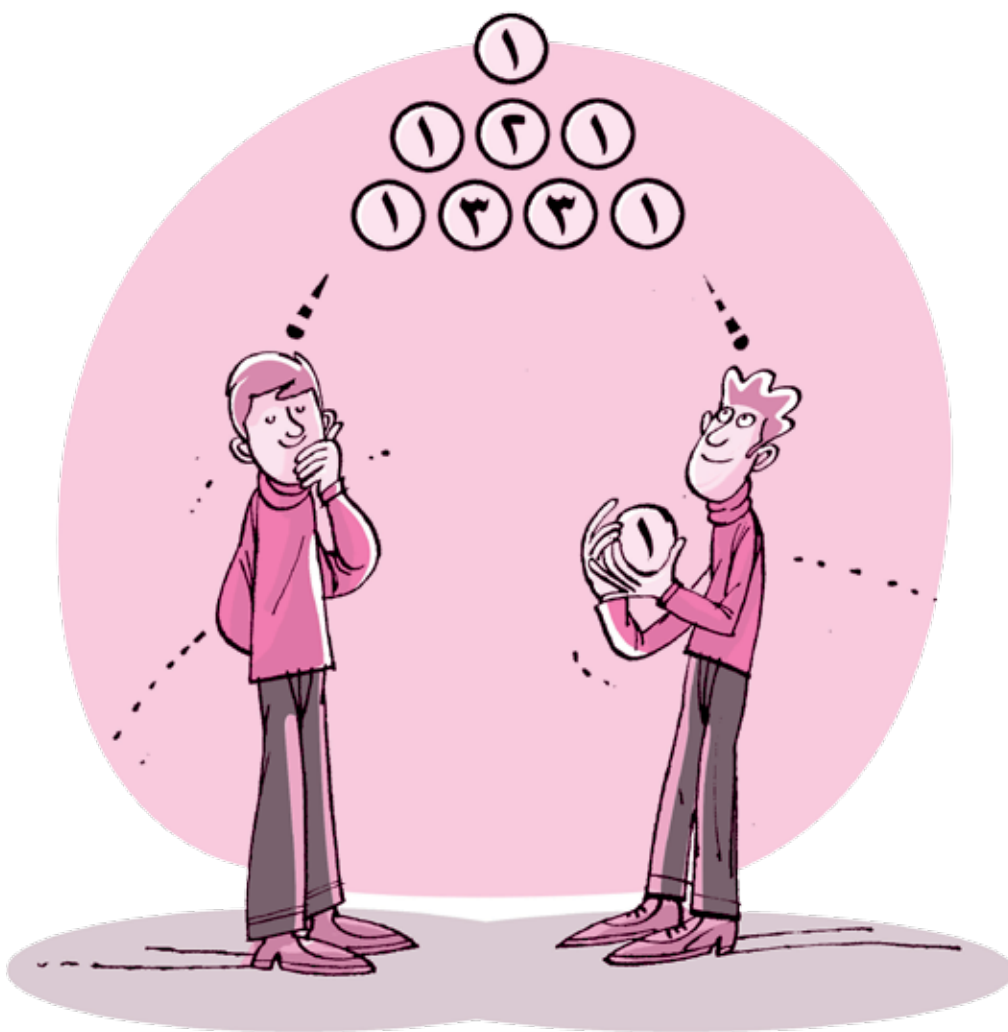
جواب: دقت کنید ضریب جمله $(k+1)$ ام (جمله دارای $a^{n-k}b^k$) برابر است با: $\binom{n}{k}$. بنابراین جمله هفتم برابر است با: $\binom{9}{6}(2x)^{9-6}(y)^6$. در نتیجه ضریب جمله هفتم برابر است با: $8 \cdot \binom{9}{6}$.

مثال ۶. ضریب جمله ششم را در بسط $(3x-y)^{12}$ به دست آورید.

جواب: جمله ششم به صورت $\binom{12}{5}(3x)^7(-y)^5$ است. بنابراین ضریب آن عدد $\binom{12}{5} \cdot 3^7$ خواهد بود.

مثال ۷. ضریب x^3 را در بسط $x^3(2x+1)^8 + x^2(1-x)^5$ به دست آورید.

جواب: در جمله شامل $(1-x)^5$ ضریب x^2 و در جمله دارای $(2x+1)^8$ ضریب x را به دست می‌آوریم. این ضرایب به ترتیب $\binom{5}{2}$ و $2 \cdot \binom{8}{1}$ هستند. بنابراین ضریب x^3 برابر است با: $2 \cdot \binom{8}{1} + \binom{5}{2} = 16 + 10 = 26$



مثال ۱۰. بزرگ‌ترین ضریب عددی را در بسط $(a+b)^{15}$ به‌دست آورید.

جواب: با توجه به تقارن مثلث خیام - پاسکال و یک استدلال بازگشتی برای نامساوی $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$ که $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ می‌توان گفت ضریب جمله وسط (یا دو جمله وسط) از سایر جملات بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین کافی است ضریب جمله هشتم یا نهم را به‌دست آورید. لذا جواب $\binom{15}{8}$ خواهد بود.

*** سؤال:** بزرگ‌ترین جمله بسط $(1+\sqrt{2})^{50}$ چیست؟
(مخصوص دانش‌آموزان علاقه‌مند)

مثال ۱۱. جمله فاقد x را در بسط $(x + \frac{1}{x})^{12}$ به‌دست آورید.

مثال ۸. ضریب جمله هفتم، با ضریب کدام جمله دیگر در بسط $(x+y)^{38}$ برابر است؟

جواب: به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر ضریب جمله‌های p و q در بسط $(a+b)^n$ برابر باشند، داریم: $p+q = n+2$. بنابراین: $7+q = 40$ و لذا: $q = 33$. بنابراین ضریب جمله هفتم با ضریب جمله سی‌وسوم برابر است.

مثال ۹. ضریب جمله وسط را در بسط $(a-3b)^{20}$ به‌دست آورید.

جواب: در بسط $(a+b)^n$ اگر n زوج باشد، تعداد جملات فرد و $(\frac{n}{2}+1)$ امین جمله، جمله وسط خواهد بود. بنابراین جمله یازدهم، جمله وسط خواهد بود. جمله یازدهم برابر است با: $\binom{20}{10} a^{10} (-3b)^{10}$ و بنابراین ضریب آن $\binom{20}{10} \times 3^{10}$ خواهد بود.

سؤال: به دست آوردن ضرایب با استفاده از فرمول ترکیب نیز برای مقادیر تا حدی بزرگ، وقت گیر است. آیا روشی وجود دارد که بتوان ضرایب را آسان تر محاسبه کرد؟

حل: خوش بختانه پاسخ این سؤال مثبت است:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \dots$$

بنابراین برای به دست آوردن $(a+b)^n$ می توان از این قاعده نیز استفاده کرد: «روشن است که جمله اول بسط همواره به صورت a^n خواهد بود. از اینجا به بعد برای به دست آوردن ضریب هر جمله، ضریب جمله قبلی را در توان a ضرب و حاصل را بر تعداد جمله هایی که تا قبل از آن نوشته شده اند، تقسیم می کنیم.»

بررسی چند مثال خاص

مثال ۱۱. برای هر عدد طبیعی n نشان دهید $5^n - 4n - 1$ بر ۱۶ بخش پذیر است.

جواب: راه اثبات این مسئله استفاده از استقرا است، اما راه حل دوم در اینجا مدنظر ماست:

$$(4+1)^n = 4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}4 + 1$$

$$\Rightarrow 5^n - 4n - 1 = 4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \dots + 16\binom{n}{n-2} = 16k$$

مثال ۱۲ (تمرین کتاب درسی). اگر $(2+\sqrt{3})^n = 362 + b\sqrt{3}$ باشد، b را به دست آورید.

جواب: با اندکی تأمل داریم: $(2-\sqrt{3})^n = 362 - b\sqrt{3}$ (چرا؟). بنابراین با ضرب دو رابطه خواهیم داشت:

$$1^n = 362^2 - 3b^2 \rightarrow b^2 = \frac{362^2 - 1}{3} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{362^2 - 1}{3}}$$

مثال ۱۳. مجموع ضرایب جمله های فرد را در بسط $(2a+1)^{13}$ به دست آورید.

جواب: باید عملی انجام دهیم تا جمله های زوج از بین بروند. بنابراین بسط $(2a+1)^{13}$ را با $(2a-1)^{13}$ جمع می کنیم. حال کافی است $a=1$ قرار دهیم و حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم (چرا؟):

$$(2a+1)^{13} + (2a-1)^{13} \xrightarrow{a=1} \frac{3^{13} + 1}{2} = \text{مجموع ضرایب جمله های فرد}$$

جواب: با توجه به فرمول بسط دو جمله ای، تمامی جمله ها به شکل $\binom{12}{k}x^{12-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$ هستند. بنابراین باید $12-k=k$ و لذا $k=6$ باشد. در نتیجه پاسخ $\binom{12}{6}$ خواهد بود.

در حالت کلی، اگر n زوج باشد ضریب جمله فاقد x در بسط $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ برابر است با: $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ (اگر n فرد باشد چه طور؟)

مثال ۱۲. تعداد جمله های گویا در بسط دو جمله ای $(1+\sqrt[3]{2})^{20}$ را به دست آورید.

جواب: جمله های بسط فوق به صورت $\binom{20}{k}(\sqrt[3]{2})^k$ هستند که در آن ها $0 \leq k \leq 20$ و صحیح است.

بنابراین باید $(\sqrt[3]{2})^k = 2^{\frac{k}{3}}$ گویا و لذا $\frac{k}{3}$ عددی صحیح باشد. در نتیجه k باید متعلق به مجموعه مضارب عدد ۳ باشد و داشته باشیم: $k = 3, 6, 9, 12, 15, 18$. یعنی بسط دارای شش جمله گویا (جمله های چهارم، هفتم و...) خواهد بود.

مثال ۱۳. چند جمله گویا در بسط $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})^{100}$ وجود دارد؟

جواب: همانند مسئله قبلی، جمله ها به صورت $\binom{100}{k}(\sqrt{2})^{100-k}(\sqrt[3]{5})^k$ هستند. بنابراین $\frac{100-k}{2}$ و $\frac{k}{3}$ باید صحیح باشند. در نتیجه k باید متعلق به مجموعه مضرب های عدد ۶ از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 100\}$ باشد. لذا به تعداد $\left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ عدد گویا وجود دارد.

بار دیگر ویژگی های مثلث خیام - پاسکال را مرور کنید.

ویژگی اول رابطه $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ خواهد بود. ویژگی دوم چیزی نیست جز رابطه معروف $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ و $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$ و توجه به ویژگی سوم داریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

شما نیز می توانید با بررسی مثلث - خیام پاسکال اتحاد های ترکیباتی دیگری کشف کنید!

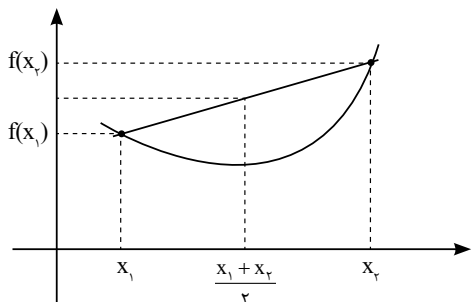




مسائل مسابقه‌ای رشد

شماره ۷۶

پی‌نویس: نامساوی ین‌سن: اگر f تابعی باشد که در بازه $[a, b]$ تعریف شده و در این بازه دارای تقعر رو به بالا باشد (یعنی در این بازه، هر خط مماس بر منحنی تابع، زیرمنحنی باشد و در این صورت برای هر x متعلق به این بازه: $f''(x) > 0$ ، آن‌گاه برای هر $x_1, x_2 \in [a, b]$ داریم:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$


و براساس تعمیم این قضیه برای هر $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ داریم:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

و اگر f دارای تقعر رو به پایین باشد داریم:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

برای اطلاع بیشتر درباره نامساوی ین‌سن و نتایج آن به کتاب «المپیاد ریاضی در مجارستان»، مرکز نشر دانشگاهی، جلد دوم، صفحات ۷۸-۷۲ مراجعه کنید.

۲. ثابت کنید هرگاه اندازه‌های زوایای یک n ضلعی محدب، جملاتی از یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه یا یکی از زوایا مقدار ثابتی دارد و یا همه زوایا را می‌توان به صورت

۱. ثابت کنید اگر x, y, z و چنان در نظر گرفته شوند که:

$$\sin x + \sin y + \sin z \geq \sqrt{5}, \quad \text{آن‌گاه: } \cos x + \cos y + \cos z \leq \sqrt{5}$$

حل: از فرض مسئله نتیجه می‌شود: $x, y, z \in [0, \pi]$ (زیرا در غیر این صورت مجموعشان کمتر از ۲ می‌شود). اگر یکی

از سه کمان x, y, z متعلق به بازه $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ باشد، مجموع کسینوس‌های آن‌ها از $\sqrt{4}$ (و در نتیجه از $\sqrt{5}$) کمتر یا مساوی می‌شود. (چرا؟) بنابراین می‌توان فرض کرد: $x, y, z \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

تابع f با ضابطه $f(x) = \sin x$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به نمودار این تابع (و یا مشتق دوم آن) روشن است که تقعر این منحنی در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ همواره رو به پایین است. پس طبق «نامساوی ین‌سن» (به یادداشت پی‌نویس رجوع کنید) خواهیم داشت:

$$\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{5}{9} \Rightarrow 1 - \cos^2\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{4}{9} \Rightarrow \cos\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{2}{3}$$

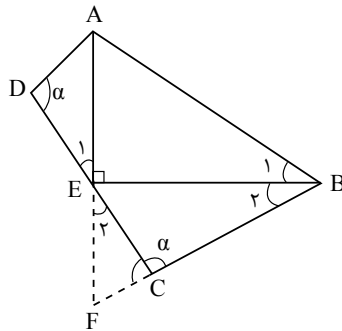
حال با توجه به همان قضیه (نامساوی ین‌سن) درباره تابع $f(x) = \cos x$ (با تقعر رو به پایین) داریم:

$$\cos\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3}$$

$$\cos\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3} \leq \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos x + \cos y + \cos z \leq \sqrt{5}$$



در مثلث ABF، نیم‌ساز $\hat{B}$ ارتفاع هم هست، لذا این مثلث «متساوی الساقین» است: $AB = BF$ و $AE = EF$.
در نتیجه: $AB = BC + CF$ (*)
حال در مثلث‌های ADE و CEF قضیه سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\Delta ADE : \frac{AD}{\sin E_1} = \frac{AE}{\sin \alpha}, \Delta CEF : \frac{CF}{\sin E_2} = \frac{EF}{\sin(\pi - \alpha)}$$

و چون $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ و $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ بنابراین:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{CF}{EF}$$

با توجه به برابری AE و EF نتیجه می‌شود:

$$AD = CF$$

و با جای‌گذاری در تساوی (*) نتیجه می‌شود:

$$AB = BC + AD$$

۴. قطار مسافری تهران - مشهد، تهران را رأس ساعت x و y دقیقه ترک کرد و رأس ساعت y و z دقیقه وارد مشهد شد. این مسافرت z ساعت و x دقیقه طول کشید. همه مقادیر ممکن برای x، y و z را به دست آورید.

حل: با توجه به صحیح بودن مقادیر x، y و z، اگر مبدأ زمان را صفر در نظر بگیریم، این مسافرت از ساعت x و y دقیقه، یعنی $60x + y$ دقیقه پس از مبدأ شروع شده و $60y + z$ دقیقه پس از مبدأ پایان یافته است. پس مدت مسافرت، $(60y + z - 60x - y)$ دقیقه بوده که معادل $60z + x$ است. بنابراین:

$$60y + z - 60x - y = 60z + x \Rightarrow 59y - 59z = 61x$$

$$\Rightarrow 59(y - z) = 61x$$

با توجه به اول بودن 61 و 59 نتیجه می‌شود که: $59 | x$ و $61 | y - z$

و چون: $0 \leq y$ و $z < 60$ ، پس: $y - z = 0$ و در نتیجه: $y = z$ و از آنجا: $x = 0$.

پس این مسافرت رأس ساعت y دقیقه بامداد شروع شده، رأس ساعت y و y دقیقه پایان یافته و y ساعت به طول انجامیده است و: $y = 1, 2, \dots, 12$. البته با توجه به مسافت بین تهران و مشهد، احتمالاً فقط پاسخ‌های $y = 10, 11, 12$ می‌توانند قابل قبول باشند!

تعدادی جفت دسته‌بندی کرد، به‌طوری که مجموع همه جفت‌ها مقدار ثابتی باشد. از آنجا نتیجه بگیرید که هرگاه اندازه‌های زوایای یک چهارضلعی محدب جملات یک دنباله حسابی باشند، چهارضلعی محاطی است. آیا عکس این موضوع هم درست است؟

حل: اگر تعداد اضلاع (و زاویه‌های) n ضلعی، عددی فرد باشد، $n = 2k + 1$ و در نتیجه می‌توان زوایا را به صورت زیر مشخص کرد:

$$\alpha - kd, \dots, \alpha - 2d, \alpha - d, \alpha, \alpha + d, \alpha + 2d, \dots, \alpha + kd$$

و مجموع زوایا برابر است با: $n\alpha$ که با توجه به دستور مجموع زوایای داخلی n ضلعی نتیجه می‌شود: $n\alpha = (n-2)180^\circ$

$$\alpha = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

پس α مقدار ثابتی دارد.

اما اگر n زوج باشد، آن‌گاه زوایا را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$\alpha, \alpha + d, \alpha + 2d, \dots, \alpha + (n-1)d$$

و مجموع زاویه اول و n ام، با مجموع زوایای دوم و (n-1) ام ... برابر است و مساوی $(n-1)d + 2\alpha$ خواهد بود. با توجه به دستور مجموع زوایای داخلی n ضلعی و نیز مجموع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S = \frac{n}{2}[2\alpha + (n-1)d] = (n-2)180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha + (n-1)d = \frac{(n-2)360^\circ}{n}$$

و این مقداری ثابت است. بنابراین همه زوایا را می‌توان به دسته‌های دوتایی تقسیم کرد، به‌گونه‌ای که مجموع هر دسته مقداری ثابت باشد. حال اگر تعداد زوایا، چهار زاویه باشد و مجموع اولی و چهارمی، با مجموع دومی و سومی برابر باشد، یعنی:

$$\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$$

با توجه به مجموع همه زوایا (360°) نتیجه می‌شود:

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_4 = \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 = 180^\circ$$

در نتیجه چهارضلعی محاطی است. بدیهی است که عکس مطلب درست نیست، زیرا برابری $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$ نتیجه نمی‌دهد که $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ جملات یک دنباله حسابی باشند.

۳. در چهارضلعی محدب ABCD می‌دانیم: $\hat{D} = \hat{C}$. نیم‌ساز زاویه B، CD را در نقطه E قطع کرده است و داریم: $BE \perp AE$. ثابت کنید:

$$AB = BC + AD$$

حل: مطابق شکل، BE نیم‌ساز $\hat{B}$ ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2$) است و داریم: $AE \perp BE$. امتدادهای AE و BC نیز یکدیگر را در F قطع کرده‌اند و مطابق فرض مسئله: $\hat{D} = \hat{C} = \alpha$



پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه همین شماره

پاسخ معماهای سال نو

۱. ۳۲ سال بعد: $2^4 \times 89 = 1424$

۲. یک سال بعد: $1393 = 7 \times 199$

۳. فرض می‌کنیم این اعداد $m+1$ و $m+2$ و ... و $m+n$ باشند. در این صورت داریم:

$$m+1+m+2+\dots+m+n=1392$$

$$\Rightarrow mn + \frac{n(n+1)}{2} = 1392 \Rightarrow 2mn + n(n+1) = 2784$$

$$\Rightarrow n(2m+n+1) = 2^5 \times 87 \Rightarrow n = 32, 2m+33 = 87$$

$$\Rightarrow m = 27 \Rightarrow 28+29+30+\dots+59 = 1392$$

۴. تعداد صفرهای سمت راست $n!$ از دستور

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{125} \right\rfloor + \dots$$

$$\left\lfloor \frac{1392}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1392}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1392}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1392}{625} \right\rfloor$$

$$= 278 + 55 + 11 + 2 = 346$$

یعنی ۳۴۶ رقم صفر در سمت راست عدد $1392!$ وجود

دارد.

۵. برای پیدا کردن رقم سمت راست عدد کافی است

باقی‌مانده تقسیم آن را بر ۱۰ به‌دست آوریم:

$$1392!^{1392} \equiv 2^{1392} \equiv (2^5)^{278} \times 2^2 \equiv 2^{278} \times 2^2 = 2^{280}$$

$$2^{280} \equiv (2^5)^{56} \equiv 2^{56} \equiv (2^5)^{11} \times 2^1 \equiv 2^{55} \equiv (2^5)^2 \times 2^1 \equiv 2^8$$

یعنی رقم سمت راست آن مساوی ۸ است.

۶. می‌دانیم که: $1392 > 5040 = 7!$. بنابراین عددهای

متوالی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ حداقل عددهای

طبیعی متوالی‌اند که حاصل ضرب آن‌ها

از 1392 بیشتر و مجموع آن‌ها مساوی

۲۷ است.

۷. اگر جمله n ام این دنباله مساوی

1392 باشد، داریم:

$$n^2 - 3n = 1392 \Rightarrow n^2 - 3n - 1392 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 9 - 4(-1392) = 5577$$

و چون Δ مربع کامل نیست،

پس این معادله ریشه گویا

(طبیعی) ندارد و در نتیجه



چنین جمله‌ای وجود ندارد.

توضیح در مورد سرگرمی‌های ایستگاه سوم

۱. وقتی شما ضربه هشتم را روی ۱۲، ضربه نهم را روی

۱۱، ضربه دهم را روی ۱۰ و... می‌زنید، پس ضربه k ام خود را

روی عدد $20-k$ می‌زنید. اگر عددی که دوست شما در ذهن

خود تصور کرده است، x باشد، با اولین ضربه شما، عدد $x+1$

و با دومین ضربه شما $x+2$ و... و با $(20-x)$ امین ضربه شما به

عدد ۲۰ می‌رسد و دستور توقف می‌دهد. در اینجا طبق آنچه

دیدیم، انگشت شما روی عدد $20-k = 20 - (20-x) = x$

است!

۲. از این قضیه که اثبات آن را به شما واگذار می‌کنیم (!)

استفاده می‌شود: حاصل تفاضل هر عدد پنج رقمی (و در حالت

کلی هر عدد n رقمی) و مقلوب آن، همواره مضرب ۹ است.

بنابراین مجموع ارقام آن نیز مضرب ۹ است.

۳. اگر عددهای روی سه تاس به ترتیب a ، b و c باشند،

آنچه که دوست شما انجام می‌دهد محاسبه زیر است:

$$5(5(a+b)+c) + 25(a+b) + 45 \cdot a$$

$$= 25a + 25b + 5c + 25a + 25b + 45 \cdot a$$

$$= 50 \cdot a + 50 \cdot b + 5c = 5(10 \cdot a + 10 \cdot b + c) = 5abc$$

و با توجه به ارزش مکانی ارقام، اگر این عدد را بر ۵ تقسیم

کنیم، ارقام آن همان a ، b و c هستند.

پاسخ جدول واژه‌های «ایستگاه اندیشه و ادب

ریاضی» شماره ۷۶:

واژه نهایی جدول دکتر احمد بیرشک بود. زنده‌یاد، استاد احمد بیرشک، از استادان بنام معاصر کشورمان بود که زندگی‌نامه مختصر وی را در صفحه دوم جلد این شماره مجله می‌توانید ملاحظه کنید.

ا	ظ	ن	ی	ر	ی	ز	ی	ر	د
ل	ب	س	د	ا	ز	ه	ب	ج	م
د	ر	ن	ج	ع	ی	و	ل	و	م
ی	ی	ا	س	ک	ظ	س	ن	م	ن
ب	د	ی	ع	ی	ب	ا	ر	ا	ف
ظ	ن	ی	م	ی	ن	ب	ر	ی	ر
ف	ج	ی	ر	ی	ح	ا	خ	د	د
ا	خ	و	ا	ر	ز	م	ی	ر	و
ح	ن	ظ	ا	م	ی	ا	ک	م	س
ی	ی	ک	و	ش	ی	ا	ر	ع	ی



می‌کنیم که به سمت نگارش مقاله برای دانش‌آموزان بروید و به مشکلات آنان بیشتر توجه کنید. منتظر مطالب دیگران هستیم.

از دوستان و همکاران عزیزی که در میزگرد مجله برهان در حاشیه کنفرانس آموزش ریاضی سمنان حضور بهم رساندند و اعضای هیئت تحریریه را مورد محبت خود قرار دادند، سپاس‌گزاریم. در پایان به دلیل کمبود جا، فقط به ذکر اسامی تان قناعت می‌کنیم و امیدواریم که باز هم به مجله خودتان توجه و التفات کنید.

خانم‌ها و آقایان: طیبه ابراهیمی، فاطمه میرداماد، فهیمه تقوی، سمانه بهادری، فهیمه کلاهدوز، اعظم صالحی، سوسن پناهنده، هما طرحی، آزاده حیدری، راضیه باب‌الخوانجی، شمسی آراسته، فاطمه کرمی، صدیقه علوی، مریم رشتچی، رباب افشاری، حمیده عبداللہی، سینا نعمتی، سیدحسین عبداللہی، غلامرضا طحانیان، سعیدفلاح تفتی، چنگیز تیموریان، اقبال‌رضا حیدری، کوروش جعفریان، سیدعلی اکبر طهماسبی، محمود حجتی، حمید خاکشور، علی مؤمن‌زاده، علی زمندی، البرز فراهانی، محمدرضا بهرامی.

همکار گرامی، آقای محمدمهدی کاوه یزدی از شهرستان یزد

با سپاس فراوان از مقاله ارسالی تان تحت عنوان «تعمیم تقسیم مصنوعی و...» منتظر کارهای دیگر تان می‌مانیم.

همکار عزیز آقای قاسم حسین قنبری از دانشگاه فرهنگیان سمنان

با تشکر فراوان از همکاری صمیمانه شما با مجله برهان که به چاپ مقاله تان در شماره ۷۶ انجامید، مقاله دیگر شما به نام «این مسئله‌ها واقعی هستند یا روزمره؟» دریافت شد. اگرچه نقد کتاب‌های درسی از اهداف مجله ما نیست، با این حال تلاش خواهیم کرد به نوعی از مطلب ارسالی تان استفاده کنیم. ارتباط خوب و سازنده تان را با ما قطع نکنید.

خانم مریم شفیعی از آموزش و پرورش ناحیه یک شهرری
با سپاس فراوان از کار خوب شما که با مشارکت دانش‌آموزان «پژوهش‌سرای دانش‌آموزی محمدبن زکریای رازی» انجام گرفته بود، مقاله تان را در یکی از شماره‌های آینده به چاپ می‌رسانیم. اما توصیه می‌شود که تلاش کنید خود دانش‌آموزان را نیز به نوشتن مقاله و مطلب و ارسال آن برای ما تشویق کنید. به آنان اطمینان بدهید که برهان از این موضوع استقبال خواهد کرد.

همکار گرامی آقای فرزاد حمزه‌پور از شهرستان بانه
لطف شما همکار گرامی پیش از این هم شامل حال دوستانتان در مجله شده است. سپاس از شما به خاطر ارسال مقاله «ترکیبیات». ان‌شاءالله بتوانیم در یکی از شماره‌های آینده از آن استفاده کنیم. باز هم با ما در تماس باشید.

همکار گرامی خانم سیده صدیقه علوی از شهرستان ساری
با تشکر از مقاله ارسالی تان با عنوان «ریاضی، دانشی زیبا، شیرین و دوست‌داشتنی». با امید به آنکه مورد استفاده قرار گیرد، انتظار داریم مقالات تحلیلی بیشتری از شما دریافت کنیم.

همکار عزیز، آقای اقبال رضا حیدری از شهرستان شاهرود
مقاله «ریاضیات دانش کامل» را دریافت کردیم. پیشنهاد



برگ اشتراک مجله‌های رشد

نحوه اشتراک:

شما می‌توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۱۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سدره از آزمایشی کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

- ۱- مراجعه به وبگاه مجلات رشد: نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات قبض واریزی.
- ۲- ارسال اصل قبض بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی (کمی قبض را نزد خود نگه دارید).

نام مجلات درخواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان:

شماره قبض:

پلاک:

در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شماره اشتراک خود را ذکر کنید:

امضا:

نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۳۵۵/۱۱
وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir
اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۳۳۳۳۳۳/۷۷۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳-۱۴

• هزینه اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۱۳۰۰۰۰ ریال
• هزینه اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۸۰۰۰۰ ریال



مسائل مسابقه‌ای رشد

۱. همه اعداد حقیقی p را بیابید که به ازای آن‌ها، معادله $x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4 + 4p^3 - 1)x - 3p^3 = 0$ سه ریشه حقیقی داشته باشد که طول‌های اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند.
۲. فرض کنید m و n اعدادی طبیعی باشند و داشته باشیم: $(m, n) + [m, n] = m + n$. ثابت کنید یکی از دو عدد m و n بر دیگری بخش‌پذیر است.
۳. در چهارضلعی محدب $ABCD$ می‌دانیم: $\angle CAB = 40^\circ$ ، $\angle CAD = 30^\circ$ ، $\angle DBA = 75^\circ$ و $\angle DBC = 25^\circ$. مطلوب است تعیین اندازه زاویه BDC .
۴. در سرزمینی همه انسان‌ها یکی از دو نوع A یا B هستند. آن‌ها که از نوع A هستند، هنگام بیداری کاملاً دقیق و هنگام خواب کاملاً نادقیق هستند. یعنی هرچه هنگام بیداری باور کنند، درست و هرچه در خواب باور کنند، نادرست است. اما آن‌ها که از نوع B هستند، درست برعکس‌اند. یعنی هرچه در بیداری باور می‌کنند، نادرست و هرچه در خواب باور کنند، درست است. ثابت کنید در این سرزمین:
 - (الف) هر گاه در یک زمان معین، شخصی باور داشته باشد که بیدار است، آن گاه او از نوع A است.
 - (ب) اگر در یک زمان معین، شخصی گمان کند که از نوع A است، آن گاه او باید در آن زمان بیدار باشد!



با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش‌آموزی

(به صورت فصلنامه و هفت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند)

رشد کودک

(برای دانش‌آموزان ابتدایی و پایه اول دوره دبستان)

رشد نوجوان

(برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره دبستان)

رشد دانش‌آموز

(برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره دبستان)

رشد نوجوان

(برای دانش‌آموزان دوره راهنمایی تحصیلی)

رشد جوان

(برای دانش‌آموزان دوره متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماه‌نامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد آموزش ابتدایی: رشد آموزشی، رشد تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی
- رشد مدرسه فردا: رشد مدیریت مدرسه، رشد معلم

مجله‌های بزرگسال و دانش‌آموزی تخصصی

(به صورت فصلنامه و چهار شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد برهان ریاضی (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره راهنمایی تحصیلی)
- رشد برهان متوسطه (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه) - رشد آموزش قرآن
- رشد آموزش معارف اسلامی: رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش هنر
- رشد آموزش مشاور مدرسه: رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش علوم اجتماعی
- رشد آموزش تاریخ: رشد آموزش جغرافیا، رشد آموزش زبان، رشد آموزش ریاضی
- رشد آموزش فیزیک: رشد آموزش شیمی، رشد آموزش زیست‌شناسی
- رشد آموزش زمین‌شناسی: رشد آموزش فنی و حرفه‌ای، رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جوینان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

• نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۱۶۶، دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی.

• تلفن و نمابر: ۸۸۳۰ - ۱۴۷۸ - ۰۲۱