



وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی  
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصل نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی  
برای دانش آموزان دوره متوسطه

## در این شماره می‌خوانید:

♦ دوره بیست و یکم ♦ پاییز ۱۳۹۰ ♦ شماره ۱

♦ مدیر مسئول: محمدناصری

♦ سردبیر: حمیدرضا امیری

♦ مدیر داخلی: میرشهرام صدر

♦ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی

♦ هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمدقندهاری،

میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمد رضا هاشمی موسوی،

غلامرضا یاسی پور و با تشکر از همکاری ارزنده استاد پرویز شهریاری

♦ ویراستار ادبی: مرتضی حاج علی فرد

♦ وبگاه: [www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir)

♦ رایانامه: [Borhan@roshdmag.ir](mailto:Borhan@roshdmag.ir)

♦ پیام گیر نشریات رشد: ۸۳۰۱۴۸۲ - ۰۲۱

♦ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۵۸۵

♦ تلفن دفتر مجله: ۵۸۶۲ - ۸۳۰ - ۰۲۱

♦ تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۷۳۳۶۶۵۵ - ۰۲۱

♦ شمارگان: ۱۱/۰۰۰ نسخه

♦ چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

|    |                                                           |                             |
|----|-----------------------------------------------------------|-----------------------------|
| ۲  | حرف اول                                                   | سردبیر                      |
| ۳  | مسئله چیست و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟               | محمد هاشم رستمی             |
| ۸  | تابع                                                      | حمیدرضا امیری               |
| ۱۶ | تابان تر از خورشید                                        | فاطمه حرقانیان              |
| ۲۰ | آهنگ‌آنی و کمیت‌های وابسته                                | سیمین اکبری زاده            |
| ۲۶ | اتحادهای مثلثاتی                                          | احمد قندهاری                |
| ۳۰ | آشنایی با بسته نرم‌افزاری متمتیکا                         | دکتر محمدعلی فریبرز ی عراقی |
| ۳۵ | وبگاه Cool Math                                           | احسان یارمحمدی              |
| ۳۶ | تعیین علامت عبارت‌های جبری و حل نامعادله‌ها و دستگاه توأم | سید محمد رضا هاشمی موسوی    |
| ۴۲ | خیاط در کوزه (۲) - تاریخچه مجله ریاضی برهان               | غلامرضا یاسی پور            |
| ۴۶ | مسائل مسابقه ریاضی اسکاتلند در سال ۲۰۰۱-۲۰۰۲              | هوشنگ شرقی                  |
| ۴۹ | وبگاه: Free Math Help                                     |                             |
| ۵۰ | ریاضیات در سینمای جهان                                    | احسان یارمحمدی              |
| ۵۲ | اعداد فیبوناچی                                            | غلامرضا یاسی پور            |
| ۵۵ | رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$         | احسان یارمحمدی              |
| ۶۰ | چند مسئله کاربردی در نامعادله‌ها                          | میرشهرام صدر                |
| ۶۴ | وبگاه: Quick Math                                         |                             |

مجله رشد برهان متوسطه، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (تشریح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آنها برای دانش آموزان
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آنها برای دانش آموزان
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه علمی و اجتماعی دانشمندان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشند.
- مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.

# حرف‌اول

یادگیری مؤثر مباحث مختلف ریاضی به عوامل متعددی بستگی دارد. یکی از این عوامل موضوع و سافت‌ار مباحثی است که تدریس می‌شود. در حالی که بسیاری از موضوعات ریاضی به لحاظ سافت‌اری به یکدیگر شبیه‌اند، و در بسیاری از آنها نیز تفاوت‌های ماهوی و سافت‌اری کلی وجود دارد که باعث می‌شود معلم و دانش‌آموز، هر دو، در فرآیند یاددهی - یادگیری مؤثر با نگاه متفاوتی به آن‌ها بنگرند. اجازه بدهید این نکته را به صورت پرسش درآوریم و از شما سؤال کنیم:

آیا همان‌گونه که دبیر ریاضی مبحث «تابع» یا «حد و پیوستگی» را در درس حسابان تدریس می‌کند مبحث «احتمال» در درس جبر و احتمال را نیز باید همان‌طور تدریس کند؟ آیا شما به همان صورت که «حد و پیوستگی» یا «مشتق» را مطالعه می‌کنید فلان مبحث هندسه را هم همان‌طور مطالعه می‌کنید؟ آیا در کلاس درس حسابان همان‌گونه حضور دارید و به درس گوش می‌دهید و سؤال می‌پرسید که در کلاس درس جبر و احتمال یا هندسه؟ آیا تعداد تمرین‌هایی که حل می‌کنید تا مطلب برای شما تثبیت شود برای این دروس یکسان است؟

آیا دبیر ریاضی شما برای تدریس همهٔ مباحث ریاضی روشی یکسان اتخاذ کرده است؟

احتمال می‌دهم شما تاکنون به این سؤالات فکر نکرده بودید و روی این موضوع‌ها حساس نشده بودید. آیا این‌طور نیست؟

من فکر می‌کنم برای تدریس بعضی از موضوعات ریاضی، معلم شما بیشتر «می‌نویسد»، تمرین حل می‌کند و «مثال می‌زند» تا این‌که صحبت کند یا موضوعی را توصیف کند، برعکس معلم گاهی اوقات برای تدریس بعضی موضوعات و مباحث، بیشتر سعی می‌کند حرف بزند و با کلام و توصیف مطلب را برای شما بآیداندازد و سپس به حل تمرین و مثال بپردازد، آیا همین‌طور است؟

اگر این‌طور است این مباحث و موضوع‌ها چه تفاوت‌های موجود بین مباحث ریاضی را که در نحوهٔ تعلیم و تعلم و به‌طور کلی آن‌ها استفاده‌کنم به همین دلیل موضوع، یعنی بحث تفاوت‌های موجود بین مباحث ریاضی را که در نحوهٔ تعلیم و تعلم و به‌طور کلی آموزش ریاضی تأثیرگذار است به شمارهٔ بعد مگویم تا در این فاصله نظرات و تجربیات شما نیز به دستم برسد. لذا از شما در خواست می‌کنم نسبت به این بحث با دقت بیشتری بپندیشید؛ حتی با معلمین خود مشورت کنید و نتیجه را برای ما ارسال فرمایید.

از ضمن شروع سال تحصیلی جدید را به شما عزیزان دانش‌آموز و دبیران محترم شما تبریک و تهنیت می‌گویم و سال تحصیلی پر و مورد تأییدات حضرت ولی عصر (عج) باشید.

مؤید و پیروز باشید

سر دبیر

# مسئله چیست؟ و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟



محمد هاشم رستمی

## اشاره

در شماره قبل قسمت اول مقاله مسئله چیست؟ و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟ را دیدید. در این مقاله پس از تبیین مسئله چیست؟ الگوی حل مسئله توسط پولیا (در ۴ مرحله) را دیدیم که بعداً درباره آن بیشتر خواهیم نوشت. همچنین به روش حل مسئله به‌ویژه حل مسئله‌های هندسه توسط عبدالجلیل سجزی ریاضیدان ایرانی سده چهارم هجری پرداختیم و ۷ رهنمود حل مسئله سجزی را دیدیم؛ اینک برای درک عظمت کار انجام شده توسط سجزی از این موارد، که در «رساله سجزی در روش‌های حل مسئله‌های هندسی» توسط انتشارات فاطمی چاپ شده است، نمونه‌هایی از حل مسئله‌ها توسط سجزی را در زیر می‌آوریم.

## جمع‌بندی متن از زبان خود سجزی

در خلاصه‌ای که در پی می‌آید، عده‌های داخل کروش (مثل [۲]) ارجاع به بندهایی است که ترجمه رساله با آن‌ها تقسیم‌بندی شده است.

هدف رساله در آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شکل‌های هندسی به گفته خود سجزی چنین است [۱]: برشمردن قوانینی که... به دست آوردن ترسیم‌های هندسی مورد نظر پژوهشگر را بر وی آسان می‌کند. سجزی رساله خود را به یک مقدمه با توضیح کلی درباره قانون‌های خود در [۱۱]-[۲] و سپس مثال‌هایی در [۲۲]-[۵۰] تقسیم کرده است. در [۲۰] وی برای جمع‌بندی بحث «هفت شیوه برای کشف در این

فن» برمی‌شمارد. اکنون این شیوه‌ها را از زبان خود سجزی همراه با اظهارنظرهایی از خودم و نقل‌قول‌هایی از کتاب معروف چگونه مسئله را حل کنیم پولیا می‌آورم.

## ۱. مهارت و تیزهوشی و توجه به

شرایطی که نظم مناسب (مسئله) ایجاد می‌کند. جنبه‌ی دوم مرتبط است با مرحله نخست در طرح پولیا برای حل مسئله‌ها (مقدمه، ص بیست و چهار):

«اول باید مسئله را بفهمید. مجهول چیست؟ داده‌ها کدام است؟ شرط چیست؟ آیا تحقق یافتن شرط مسئله امکان‌پذیر است؟ آیا شرط مسئله برای تعیین مجهول

کفایت می‌کند؟ یا کافی نیست؟ شرط اضافی چه‌طور؟ یا متناقض است؟»

## ۲. تسلط عمیق بر قضایا و

مقدمات (مرتبط با شکل). مقایسه کنید با گفته پولیا در ص ۱۰، «اگر از موضوع مورد نظر شناخت کمی داشته باشیم، دریافت درون‌مایه آن دشوار است و در صورتی که هیچ شناختی نداشته باشیم، اصلاً درک درون‌مایه آن امکان‌پذیر نیست. دریافت درست بر شالوده تجربه گذشته و شناختی که از پیش به دست آمده، بنا شده است.»

## ۳. ... بلکه همراه با آن‌ها (شماره ۲)

از هوش و گمان و شگردها نیز بهره گیرد. عامل اصلی در این فن، استفاده از شگردهاست و نه فقط ذهن (خود) بلکه هم‌چنین اندیشه (ریاضی‌دانان) باتجربه و افراد ماهر و آشنایان به شگردها.

مقایسه کنید با گفته پولیا در ص ۶: «حل کردن مسائل، مثل شناگری، یک مهارت تمرینی و عملی است. هر مهارت

## کلیدواژه‌ها:

سجزی، پولیا، ابوسهل کوهی، دوپاره خط، متناسب.

عملی را از راه تقلید و تمرین به دست می آوریم. برای آموختن فن شنا از کاری که دیگران با دست و پای خود انجام می دهند تا سر خود را در هنگام شنا بیرون از آب نگاه دارند، تقلید می کنید و سرانجام با تمرین کافی، شنا کردن را فرامی گیرید. برای حل مسائل، باید آنچه را که دیگران می کنند رعایت کنید و سرانجام با حل مسائل می آموزید که چگونه آن ها را حل کنید.»

#### ۴. آگاهی از وجوه مشترک شکل ها،

##### تفاوت ها و ویژگی های خاص آن ها.

در این نحوه برداشت، ویژگی های خاص، مشابهت ها و تضادها بدون احتساب قضایا و مقدمات (فی نفسه در نظر گرفته می شوند). ظاهراً دو نگرش در اینجا مطرح شده است. سجزی در [۷] می افزاید که، بعضی شکل ها در یک یا چند ویژگی خاص اشتراک دارند و بعضی دیگر هیچ وجه مشترکی ندارند و برخی بسته به شکل، تناسب و جنس آن ها وجه اشتراک دور یا نزدیک با هم دارند. واژه ی جنس در این جا این احتمال را پیش می کشد که سجزی به شیوه ارسطو در صدد دسته بندی فلسفی شکل ها به جنس هایی بود که هریک به گونه هایی تقسیم می شوند. شاید سجزی معتقد بود که اگر دو شکل (یعنی دو مسئله یا دو قضیه) با هم ارتباط فلسفی داشته باشند، ترسیم یا براهین آن ها هم با هم مرتبط اند.

از دیدگاه سجزی، یکی از ویژگی های ذاتی هر مسئله آسانی یا دشواری آن است. وی در [۲۲] اشاره به شکلی می کند که به دست آوردن آن دشوار است. وی می افزاید: این حدس همان

است که قبلاً (یعنی در [۲۰]) آن را معلوم کردن میزان آسانی و دشواری آن ها خواندم؛ اگر در شکلی تعداد مجهول ها زیاد باشد، یافتن آن ها به کمک معلومات دشوار است. پس از جنبه فلسفی، مسئله ها را می توان چنین تقسیم کرد: مسئله های آسان، مسئله های دشوار که به مقدمات زیادی نیاز دارند، و حتی مسئله هایی که بذاته و بالطبع امکان پذیرند، ولی ما به آن ها واقف نیستیم یا به دست آوردن آن ها به علت نبود مقدمات ناممکن است، مثل تربیع دایره [۱۴].

پولیا هم درباره دشواری مسئله صحبت می کند، ولی موضوع را به فلسفه ربط نمی دهد: «تا چه اندازه دشوار است؟... برای پاسخ گفتن به این پرسش، باید بیش تر به «غریزه» و «احساس» متوسل شد تا به استدلال روشن. گاهی هم می توانیم میزان دشواری مسئله ای را دقیقاً روشن کنیم.»

##### ۵. نقل. منظور سجزی از نقل، نوع خاصی

از تبدیل مسئله ای به یک مسئله جدید است، چنان که یک یا چند داده از مسئله اصلی در مسئله جدید مجهول به شمار آیند و یک یا چند مجهول از مسئله اصلی در مسئله جدید معلوم فرض شوند. این روش خاص را پولیا ذکر نکرده است.

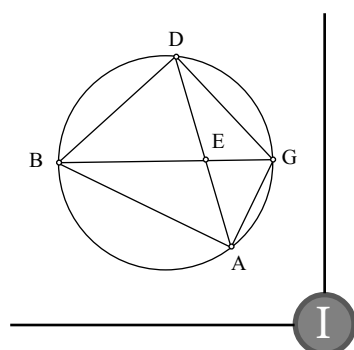
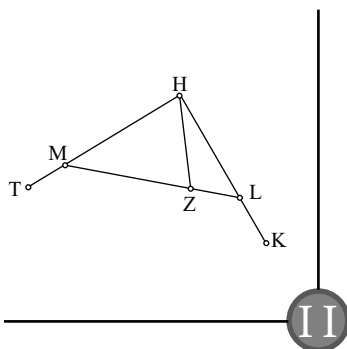
سجزی مثالی از نقل را در [۲۲]- [۲۴] آورده است. در این جا مثالی از رساله المناظر ابن هیثم (قضیه ۳۴ مقاله پنجم) می آورم. مسئله اصلی و نقل این مسئله را به مسئله جدید بیان می کنم، ولی حل مسئله جدید را که با مقاطع مخروطی انجام می شود، ذکر نمی کنم.

مسئله اصلی بدین قرار است. فرض کنید BG و C دو پاره خط راست مفروض اند و A نقطه مفروضی است واقع بر دایره ای که BG قطر آن است (شکل I، مسئله اصلی). می خواهیم خط راست AED را از A چنان رسم کنیم که قطر مذکور را در E و دایره را در D قطع کند چنان که  $|DE| = c$ .

ابتدا به نکات زیر توجه می کنیم. اگر فرض کنیم  $\angle BGA = \gamma$  و  $\angle GBA = \beta$ ، زاویه های  $\gamma$ ،  $\beta$  معلوم اند و براساس خاصیتی از دایره داریم  $\angle EDB = \gamma$  و  $\angle EDG = \beta$ .

اکنون مسئله جدید را چنین مطرح می کنیم: پاره خط  $HZ = c$  را بکشید و دو خط HT و HK را چنان رسم کنید که طبق شکل II داشته باشیم  $\angle ZHT = \gamma$  و  $\angle ZHK = \beta$ . می خواهیم پاره خط MZL را از نقطه Z چنان رسم کنیم که نقطه M روی HT و نقطه L روی HK باشد و  $|ML| = |BG|$ .

دو شکل مربوط به مسئله اصلی و مسئله جدید یکی هستند و نقطه های Z



M, H, و L در مسئله جدید متناظرند با نقطه‌های B, D, E و G در مسئله اصلی. در مسئله اصلی، محل BG معلوم است و محل DE خواسته شده است. در مسئله جدید، محل HZ، متناظر با DE، مفروض است و محل ML، متناظر با BG خواسته شده است. پس جای مجهول با یکی از معلومات مسئله عوض شده است.

در این مثال، شکل اصلی و شکل جدید با یکدیگر مساوی‌اند. سجزی در [۲۲]-[۲۴] موردی را ذکر می‌کند که در آن شکل‌های اصلی و جدید مساوی نیستند، بلکه متشابه‌اند. از دیدگاه امروزی، تکیه بر مفهوم تبدیل هندسی از شکل اصلی به شکل جدید امری طبیعی است، اما مفهوم امروزی نگاشت بین دو شکل را نه سجزی ذکر کرده و نه در هیچ اثری از هندسه‌دانان دوره اسلامی آمده است.

روش نقل را ابوسهل کوهی، ابن‌هیثم و آپولونیوس نیز به کار برده‌اند. تا آن‌جا که می‌دانم، بیان صریح سجزی از این روش و به کار بردن اصطلاح نقل برای آن از سوی وی در عهد باستان و دوره اسلامی منحصر به فرد بوده است.

**۶. تحلیل.** این همان روش تحلیل و ترکیب یونان باستان است که پولیا آن را در مقاله «پاپوس» (ص ۹۴-۱۰۰) براساس عبارتی از مقاله هفتم مجموعه ریاضی پاپوس اسکندرانی شرح داده است. این اثر برای ریاضی‌دانان دوره اسلامی شناخته شده نبود، اما روش‌های تحلیل و ترکیب از طریق متن‌های دیگر از آثار یونانی به آثار دوره اسلامی راه یافت. ابراهیم بن سنان، رساله مفصلی به نام رساله در روش تحلیل و ترکیب در مسئله‌های هندسی راجع به آن نوشت. این رساله را ا. س. سعیدان در مجموعه رسائل ابن سنان منتشر کرده که رساله

مورد بحث از سجزی را نیز در همان مجموعه به صورت پیوست انتشار داده است.

**۷. استفاده از شگردها** چنان که هرون به کار می‌برد. سجزی در [۱۹] موضوع را با تفصیل بیش‌تر بیان کرده است: هندسه‌دانانی از دوران باستان بوده‌اند که وقتی کشف چیزهای مطلوب برایشان دشوار بود شگردهای ظریفی به کار می‌بردند، مثل آن هندسه‌دان که چیزهای مطلوبش به نسبت مربوط می‌شد و در آن‌ها از اعداد و ضرب استفاده می‌کرد یا آن (هندسه‌دان) که مسئله‌اش اندازه‌گیری (مساحت) یک شکل یا تساوی (بین شکل‌ها) بود و در این کار از ترسیم آن‌ها بر پارچه نازک یا کاغذ و وزن کردن آن‌ها استفاده می‌کرد یا شگردهای مشابه دیگری به کار می‌برد.

احتمالاً سجزی این مطالب را از نوشته‌های باستانی که اکنون مفقود شده‌اند، نقل می‌کند.

پولیا این «شگردها» را ذکر نمی‌کند. نشانه‌ای در دست نداریم از این که سجزی (یا هیچ هندسه‌دان دیگری از دوره اسلامی) کتاب روش‌های ارشمیدس را می‌شناخته است. ارشمیدس در این کتاب، روشی برای تخمین حجم برخی اجسام از طریق تقسیم آن‌ها به برش‌های بسیار نازک و سپس وزن کردن این برش‌ها با یک ترازوی فرضی بیان کرده است. متن یونانی این اثر را هایبرگ (Heiberg) در سال ۱۹۰۶ کشف کرده است.

نکات جالب رساله سجزی به هفت قانون مذکور محدود نمی‌شود و خواننده علاقه‌مند می‌تواند علاوه بر آنچه من آورده‌ام خود نیز شباهت‌های دیگری بین رساله سجزی و کتاب‌های پولیا درباره حل مسئله‌ها بیابد. مقدمه خود را با چند

اشاره کلی در زمینه مقایسه آثار این دو مؤلف به پایان می‌رسانم.

کتاب پولیا با در نظر داشتن مقاصد آموزشی نوشته شده است، ولی سجزی رساله خود را برای پژوهشگران و اهل علم نوشته است. این تفاوت توجه‌کننده بسیاری از جنبه‌های کتاب پولیاست که در رساله سجزی دیده نمی‌شود. برای مثال، بیان مشروح روش‌های حل مسئله که باید به وسیله آموزگار تدریس شود و دانش‌آموز آن‌ها را فرا گیرد.

کتاب پولیا حدود ده قرن بعد از رساله سجزی نوشته شده و در این مدت ریاضیات دستخوش تغییرات زیادی شده است. با این حال، چون پولیا به چیزی می‌پردازد که اکنون ریاضیات مقدماتی خوانده می‌شود و به‌خصوص بر هندسه تأکید می‌کند، موضوع بحث وی با سجزی اشتراک دارد. پولیا در حل مسئله‌های هندسی از نمادهای جبری (x, y و غیره) استفاده می‌کند که در دوره نوزایی پدید آمدند و رنه دکارت در سال ۱۶۷۳ آن‌ها را در هندسه به کار گرفته است. بدیهی است که سجزی تصویری از این نمادها

نداشته است و بنابراین در رساله او فصلی به عنوان «تنظیم و نوشتن معادلات» وجود ندارد.

سجزی، برخلاف پولیا، ذکری از مسئله‌های حساب و جبر به میان نیاورده است، هر چند که این‌گونه مسائل در زمان وی مطالعه می‌شده و لابد روش‌هایی برای حل آن‌ها نیز وجود داشته است.

سجزی در مقایسه با پولیا توجه صریح‌تری به ساختار اساسی ریاضیات دارد. بنابراین توضیح‌های مشروح سجزی

**اول باید مسئله را بفهمید.**

**مجهول چیست؟**

**داده‌ها کدام**

**است؟ شرط**

**چیست؟ آیا**

**تحقق یافتن**

**شرط مسئله**

**امکان‌پذیر**

**است؟ آیا شرط**

**مسئله برای**

**تعیین مجهول**

**کفایت می‌کند؟**

**یا کافی نیست؟**

**شرط اضافی**

**چه‌طور؟ یا**

**متناقض است؟**





دربارهٔ ساختار استنتاجی ریاضیات [۳۲]  
در کتاب پولیا دیده نمی‌شود. علت امر دو  
چیز می‌تواند باشد: اولاً سجزی در مقایسه  
با پولیا، فرض را بر وجود آشنایی کم‌تری  
با ریاضیات می‌گذارد.

ثانیاً چون مخاطبان سجزی اهل علم  
بودند، وی توجه بیش‌تری به رویکرد اصل  
موضوعی نسبت به ریاضیات، چنان‌که  
به‌وسیلهٔ اقلیدس بیان شده، داشته است.  
پولیا کتابش را برای آموزگاران و دربارهٔ  
نوع غیررسمی‌تری از ریاضیات که در  
دبیرستان‌های امروزی تدریس می‌شود،  
نوشته است.

کتاب چگونه مسئله را حل کنیم  
پولیا متن کوتاهی است، ولی او کتاب  
پر حجم‌تری در ۶۸۶ صفحه (فارسی) با  
عنوان خلاقیت ریاضی نوشته است. این  
کتاب برای درک، فراگیری و آموزش حل  
مسئله نوشته شده و شامل مطالب خیلی  
بیش‌تری از رسالهٔ سجزی است.

به نظر من، با در نظر گرفتن فاصلهٔ  
زمانی عظیم بین پولیا و سجزی، موارد  
همسانی بین آن‌ها خیلی چشمگیرتر  
از تفاوت‌های آن‌هاست. بی‌شک پولیا از  
دانستن این‌که ده قرن پیش از وی یک  
ایرانی به همان مطالب مورد توجه وی  
پرداخته است، بسیار ذوق‌زده می‌شد. در  
خاتمهٔ این پیشگفتار قطعه‌ای از مقدمهٔ  
چگونه مسئله را حل کنیم پولیا را نقل  
می‌کنم که در مورد رسالهٔ سجزی نیز  
صادق است: «آری، ریاضیات دو چهره  
دارد، علم دقیق اقلیدس است، ولی چیز  
دیگری نیز هست. ریاضیاتی که به شیوهٔ  
اقلیدس معرفی می‌شود، علمی نظام‌مند و  
قیاسی یا استنتاجی است. ولی ریاضیات  
در حال ساخته شدن، همچون علمی  
آزمایشی و استقرایی به نظر می‌رسد. هر  
دو جنبه به اندازهٔ خود ریاضیات عمر دارد  
و قدیمی است؛ ولی جنبهٔ دوم از یک لحاظ  
جدید است. ریاضیات در حال تکوین و

پیدایش، قبلاً هرگز این‌گونه به‌طور کامل  
به دانشجویان یا به خود استاد یا به عامهٔ  
مردم عرضه نشده بوده است.»

برای روشن شدن بهتر این روش‌های  
حل مسئله، یعنی روش حل مسئلهٔ جورج  
پولیا و روش حل مسئلهٔ عبدالجلیل سجزی  
به ذکر نمونه‌هایی بسنده می‌کنیم.

### مثال ۱، دربارهٔ نقل

#### مسئله‌ای دربارهٔ ترسیم یک شکل

چگونه می‌توانیم دو پاره‌خط متناسب  
با دو پاره‌خط مفروض بیابیم چنان‌که یکی  
از آن‌ها بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد و  
دیگری با دایره برخورد کند، به‌طوری‌که  
اگر آن را درون دایره (مستقیماً) امتداد  
دهیم از مرکز بگذرد.

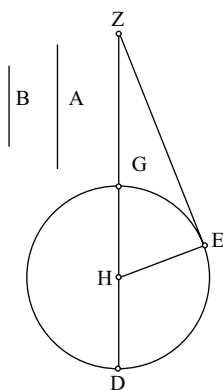
#### حل مسئله

به شیوهٔ تحلیل، فرض می‌کنیم  
که شکل رسم شده است، چنان‌که به  
جست‌وجوی مقدماتش برمی‌آییم. مثلاً  
(در شکل ۱)، فرض می‌کنیم که نسبت  
مذکور، نسبت A به B باشد و دایره، دایرهٔ  
GD باشد خط‌های ZE و ZG به نسبت  
A به B و همان پاره‌خط‌های مطلوب  
باشند. فرض می‌کنیم که (شکل) قبلاً  
رسم شده و آن را داریم، چنان‌که قبلاً  
گفتیم. چنان‌که اگر ZG درون دایره به  
سمت D امتداد یابد، GD قطری از آن  
باشد. سپس می‌پرسیم: از چه ترسیمی و  
چه مقدماتی شکل آن یافته می‌شود؟

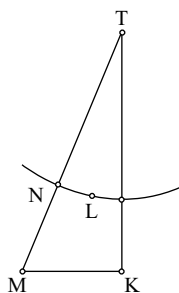
(۳۴۶) چون نقطهٔ Z و خط‌های ZG  
و ZE و محل تماس (دایرهٔ) DG در نقطهٔ  
E، همگی بر ما مجهول‌اند و هم‌چنین  
میزان میل زاویهٔ Z نامعلوم است، به  
دست آوردن آن شکل دشوار است. این  
حدس همان است که قبلاً آن را معلوم  
کردن میزان آسانی و دشواری آن‌ها  
خواندم: اگر در شکلی تعداد مجهول‌ها  
زیاد باشد، یافتن آن‌ها به کمک معلومات

دشوار است. به‌ویژه اگر شکل طوری باشد  
که بین اجزای شکل، چنان‌که قبلاً گفتیم،  
ارتباطی موجود نباشد.

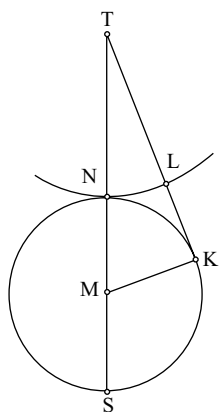
در این شکل، رابطهٔ نزدیکی بین  
خط‌های ZE، ZG و محیط دایره، و



۱



۲



۳

بین زاویه Z و کمان GE وجود ندارد. بنابراین به گمان و ذهن نیز متوسل می‌شویم و ترسیم آن را به کمک نقل انجام می‌دهیم، زیرا چنان که گفتیم این روش، به دست آوردن شکل‌های دشوار را آسان می‌کند.

پس می‌گوییم: چگونه می‌توانیم پاره‌خط‌های ZG و ZE را طوری در این شکل بگذاریم که اگر دایره‌ای رسم شود، بر ZE مماس شود و با ZG برخورد کند؟ این کار تنها با فرض معلوم بودن (مقدار) زاویه Z ممکن است. پس باید در پی یافتن زاویه Z باشیم، اما یافتن آن فقط با جست‌وجوی چیز دیگری از همان جنس یعنی زاویه ممکن است. چگونه می‌توانیم (این را) از ترکیب [قرار دادن] دو خط ZG و ZE یا ZE و ZH یا ZE و ZD جست‌وجو کنیم، زیرا در این شکل نمی‌توانیم (این زاویه را) از ترکیب [قرار دادن] خط دیگری بجویم. در این جاست که باید گمان و ذهن را به کار گیریم. اگر E را (با خط راست) به G وصل کنیم یافتن آن (زاویه) آسان نمی‌شود و چه‌بسا که از این طریق نتوان آن را یافت، زیرا زاویه‌هایی که در این جا ایجاد می‌شوند در این شکل هم با این مقدمات مجهول‌اند. پس E را به H وصل می‌کنیم. از این جا دریافته‌ایم که از این سه زاویه، زاویه E معلوم است. سپس باید شکل مثلث ZEH را از ترکیب [قرار دادن] پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها بیابیم.

اکنون با یافتن این‌ها (یعنی با این برداشتها)، (حل) مسئله دیگری را جست‌وجو می‌کنیم. اگر این مسئله (تازه) را یافتیم مسئله (اصلی) به کمک آن حل می‌شود (مسئله تازه) این است که: شکل مثلث ZEH چنین مشخص می‌شود: این مثلث قائم الزاویه است که نسبت یکی از ضلع‌هایش به وتر منهای ضلع دیگر، نسبت مفروضی است. پس با استفاده از روشی که اکنون به کار بردیم مسئله اول به این

مسئله تحویل شده است، برای آن که جواب خواسته شده در مسئله (اول) را می‌دهد.

پس فرض می‌کنیم مثلث به صورت عادی رسم شده است (شکل ۲): مثلث TKM قائم‌الزاویه است و زاویه قائمه آن K است، اما NM برابر است با KM و نسبت TN به TK مثل نسبت B به A است. در این جا باید مهارت و ذهن را به کار گرفت، زیرا هر بار که (حل) مسئله اولیه (یعنی جدیدی) را جست‌وجو می‌کنیم، باید ذهن و گمان را به کار گیریم نه معلوماتمان را.

باید بپرسیم چگونه N را اختیار کنیم تا نسبت TK به TN مثل نسبت A به B باشد. KM را به طور نامحدود امتداد می‌دهیم، سپس TL را در ذهن خود (طوری) رسم می‌کنیم (که) اگر آن را تا خط KM امتداد دهیم، تفاضل بین پاره‌خط متحرک TL و امتداد آن تا خط KM برابر باشد با پاره‌خط بین نقطه K و نقطه اتصال واقع بر خط KM. پس این جا مسئله‌ای دومجهولی داریم.

پس دایره‌ای رسم می‌کنیم به مرکز T و به شعاع TL، زیرا فرض کردیم پاره‌خط TL حول نقطه T حرکت می‌کند، چنان که می‌توانیم مطمئن باشیم سر L از پاره‌خط TL در حرکت فرضی خود همیشه بر محیط دایره واقع می‌شود. اما شکل مثلث جلوی ماست، چنان که هنگام ترسیم آن را به صورت درست می‌بینیم. مرکز دایره‌ای را می‌خواهیم که (آن مرکز) روی هر دو خط TM و KM واقع باشد. در این جا به کارگیری حدس و ذهن به جا خواهد بود.

به علاوه، این کار را تنها به وسیله یک ترسیم اضافی می‌توانیم انجام دهیم. پس ترسیم را به این صورت در نظر می‌گیریم. چگونه TN را تا S امتداد دهیم به صورتی که پاره‌خط KM آن را نصف کند و کل (پاره‌خط) NS دو برابر KM باشد. پس

مسئله را به شکل دیگری بدل می‌کنیم و آن، چنین است (شکل ۳):

سپس قدری در این باره تأمل می‌کنیم و طبق معمول تصور می‌کنیم مقصود حاصل شده است. یعنی TNS را چنان فرض می‌کنیم که NS دو برابر KM باشد و NM با KM برابر باشد. به مرکز M و به شعاع MK دایره KS را رسم می‌کنیم. روشن است که TK بر این دایره مماس است. ولی (اکنون) به حدس و ذهن متوسل می‌شویم. اگر چنین باشد، باید در این شکل ویژگی خاصی جست‌وجو کنیم که به تماس مربوط باشد؛ (ویژگی خاصی) که اقلیدس در کتاب اصول ثابت کرده است. ساده‌ترین ویژگی این شکل آن است که: مربع TK برابر است با حاصل ضرب TS در TN. به این ترتیب از این خاصیت موجود در این ترسیم کمک گرفتیم (به صورت یک ترسیم فرعی): NS را پاره‌خطی در نظر می‌گیریم، چنان که مربع TK برابر باشد با حاصل ضرب TS در TN. با انجام این کار، بقیه ترسیم آسان خواهد بود. یعنی پاره‌خط‌های TN، TK و TS را یافته‌ایم و آنچه باقی می‌ماند یافتن جای TS است به طوری که KM پاره‌خط NS را نصف کند. بنابراین ابتدا NS را در M نصف می‌کنیم و در ذهن خود TS را حول نقطه T حرکت می‌دهیم (تا) KM پاره‌خط NS را نصف کند. این ترسیم آسان است به این صورت که به مرکز T و به شعاع TM دایره‌ای رسم می‌کنیم که KM را در M قطع کند. TMS را رسم می‌کنیم و کمان SKN را می‌کشیم. پس شکل را چنان که می‌خواستیم ترسیم کردیم.

سپس آن را با استفاده از تشابه و نسبت به دایره مفروض انتقال می‌دهیم و (درستی) آن را ثابت می‌کنیم. این همان چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.



#### منابع.....

۱. کتاب چگونه مسأله را حل کنیم. تألیف جورج بولیا
۲. رساله سجزی در روش‌های حل مسائل هندسه، انتشارات فاطمی، ترجمه محمد باقری
۳. مقاله‌هایی از آموزش ریاضیات

## تابع

## برای دانش آموزان سال دوم

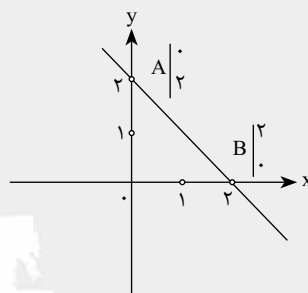
حمیدرضا امیری

## چکیده

در این مقاله کوشیده‌ایم تا مفهوم تابع از دو دیدگاه مجموعه‌ای و ماشینی را بررسی کنیم. به همین دلیل مقاله براساس مسئله و مثال در جهت تثبیت مفاهیم مربوط به تابع پیش می‌رود و در ادامه، تابع معکوس و یک‌به‌یک بررسی شده‌اند. برای ورود به مطلب و تعریف تابع به صورت مجموعه، نیاز به تعریف زوج مرتب است که به آن می‌پردازیم.

## ۱. زوج مرتب

اگر خط به معادله  $y = -x + 2$  را در نظر بگیریم و آن را رسم کنیم، نمودار زیر به دست می‌آید.



برای رسم:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ y = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

این خط از دو نقطه  $A(0, 2)$  و  $B(2, 0)$  می‌گذرد. $(0, 2)$  و  $(2, 0)$  را مختصات نقاط  $A$  و  $B$  گوییم.

گرچه در داخل هر پرانتز، عدد ۰ و عدد ۲ نوشته شده است، ولی در پرانتز اول ۰ اول نوشته شده است و در پرانتز دوم ۲ اول نوشته شده است.

• طول نقطه  $A$  و ۲ عرض نقطه  $A$  است. همچنین ۲ طول نقطه  $B$  و ۰ عرض نقطه  $B$  است. بنابراین، ترتیب قرار گرفتن ۰ و

## کلیدواژه‌ها:

زوج مرتب، تابع، وارون تابع خطی، رابطه، قرینه، تابع معکوس، تابع یک‌به‌یک، بازه.

۲ در داخل پرانتز اهمیت دارد. چون دو عدد داخل هر پرانتز است، آن را زوج گویند.

نظر به این که عضو اول، طول نقطه و عضو دوم،

عرض نقطه است، این پرانتزها را

زوج مرتب گویند.

در حالت کلی،

زوج مرتب را به

صورت  $(x, y)$  نشان

می‌دهیم که مؤلفه

اول، طول نقطه و

مؤلفه دوم، عرض

نقطه است.

با این توضیحات،

متوجه می‌شویم که در

حالت کلی اگر  $x \neq y$  در

این صورت، دو زوج

مرتب  $(x, y)$  و  $(y, x)$

مساوی نیستند.

چنانچه دو

زوج مرتب

**مثال:** اگر دو زوج مرتب  $(x^2 - 3x, x^2 + 2y - 5)$  و  $(x - 4, 3)$  مساوی باشند،  $x$  و  $y$  کدامند؟

**حل:**

$$\begin{cases} x^2 - 3x = x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x^2 + 2y - 5 = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 2y - 5 = 3 \Rightarrow 4 + 2y = 8 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$$

## ۲. رابطه

ارتباط بین هر دو عضو متمایز را یک رابطه گویند. برای مثال، رابطه مادر و فرزند، رابطه تساوی بین دو مقدار، رابطه بین سرعت جسم متحرک و زمان و رابطه بین  $x$  و  $y$ ...

**مثال:** فرض کنید مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، می‌خواهیم همه زوج‌های مرتبی را بنویسیم که طول آن‌ها کمتر از عرض آن‌ها باشد و عضوهای این زوج‌ها در مجموعه  $A$  باشند؛ یعنی:

$$R_1 = \{(x, y) | x, y \in A, x < y\}$$

$$\Rightarrow R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

**مثال:** حال می‌خواهیم در مجموعه  $A$  همه زوج‌های مرتبی را بنویسیم که طول آن‌ها مساوی عرضشان باشند؛ یعنی:

$$R_2 = \{(x, y) | x, y \in A, x = y\}$$

$$\Rightarrow R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

به این دو مجموعه زوج‌های مرتب  $R_1$  و  $R_2$ ، رابطه گویند. علت انتخاب حرف  $R$  برای بیان مجموعه زوج‌های مرتب رابطه، این است که کلمه رابطه در زبان انگلیسی «Relation» است.

**مثال:** مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مفروض است. مجموعه زوج‌های مرتبی که طول آن‌ها دو واحد از عرضشان بیش تر باشد، چند عضو دارد؟

**حل:**

$$R = \{(x, y) | x, y \in A, x = y + 2\}$$

$$\Rightarrow R = \{(5, 3), (4, 2), (3, 1)\}$$
 این مجموعه سه عضو دارد.

## ۳. تابع

تا این‌جا با مفهوم رابطه آشنا شدیم. اکنون به تعریف تابع می‌پردازیم.

**تعریف تابع:** یک تابع، رابطه‌ای است از زوج‌های مرتب که

$(x, y)$  و  $(2, 5)$  مساوی باشند، حتماً  $x=2$  و  $y=5$  است. زوج مرتب  $(x, y)$  را ممکن است به صورت‌های  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  یا  $[x, y]$  هم نشان داد.

**مثال:** اگر زوج مرتب  $(2x - 3, 2y - 5)$  برابر  $(5, 7)$  باشد،  $x$  و  $y$  را بیابید.

**حل:** برای آن‌که این دو زوج مرتب مساوی باشند، باید

$$\begin{cases} 2x - 3 = 5 \\ 2y - 5 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$
 آن‌گاه

**مثال:** اگر دو زوج مرتب  $(2x - y, x + 2y)$  و  $(5, 10)$  مساوی باشند،  $x$  و  $y$  کدامند؟

**حل:**

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow 4 + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

هیچ دو عضو متمایز آن، دارای مختص‌های اول (xهای) مساوی نباشند. چنان‌چه دو زوج متمایز دارای مختص‌های اول مساوی باشند، حتماً مختص‌های دوم آن‌ها نیز برابرند.

برای مثال، اگر:

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 6)\}$$

$$g = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$$

$$h = \{(1, 1), (2, 5), (3, 2)\}$$

باشند، f و h تابع نیستند، ولی g تابع است.

**توجه:** در یک تابع، مجموعه عضوهای اول زوج‌های مرتب را دامنه تابع و مجموعه عضوهای دوم زوج‌های مرتب را برد تابع گوئیم.

**مثال:** رابطه  $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$  را در نظر

می‌گیریم.

ملاحظه می‌کنیم که این رابطه، یک تابع است. آیا می‌توان

یک ضابطه برای این تابع نوشت؟

پاسخ به این سؤال مثبت است، زیرا هر زوج مرتب تابع f به

صورت  $(x, 2x+1)$  است که  $x \in \mathbb{N}$  و  $x < 5$  پس ضابطه تابع بالا

به صورت زیر است:

$$f = \{(x, y) | x \in \mathbb{N}, x < 5, y = 2x + 1\}$$

معادله  $x < 5$  و  $x \in \mathbb{N}$  را معادله تابع f گویند.

گاهی معادله تابع بالا را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$f = \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{N}, x < 5, f(x) = 2x + 1\}$$

به طور کلی، می‌توان این تابع را به صورت زیر بیان کرد:

$$x \xrightarrow{f} 2x + 1 \quad x \in \mathbb{N}, x < 5$$

یعنی هر x عضو N و کوچک‌تر از 5 تحت تأثیر f به صورت

$(2x + 1)$  درمی‌آید.

**مثال:** تابع  $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), \dots, (15, 225)\}$  را در

نظر می‌گیریم. با توجه به توضیحات مثال قبل می‌توان نوشت:

$$x \xrightarrow{f} x^2 \quad x \in \mathbb{N}, x < 16$$

یا می‌توان نوشت:

$$y = f(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{N}, x < 16$$

حال می‌خواهیم  $f(9)$ ،  $f(11)$ ،  $f(12)$  و  $f(14)$  را پیدا کنیم.

$$f(9) = 9^2 = 81$$

$$f(11) = 11^2 = 121$$

$$f(12) = 12^2 = 144$$

$$f(14) = 14^2 = 196$$

$f(9)$  یعنی مقدار تابع در  $x=9$  و  $f(11)$  یعنی مقدار تابع در

$x=11$  و  $f(12)$  یعنی مقدار تابع در  $x=12$  و  $f(14)$  یعنی مقدار

تابع در  $x=14$ .

**مثال:** فرض کنید  $x \in \mathbb{R}^+$  و  $y = f(x) = x^2 - 4x$

مطلوب است محاسبه  $f(1)$ ،  $f(\sqrt{3})$  و  $f(\frac{5}{4})$ .

$$f(1) = (1)^2 - 4(1) = 1 - 4 = -3$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3}) = 3 - 4\sqrt{3}$$

$$f(\frac{5}{4}) = (\frac{5}{4})^2 - 4(\frac{5}{4}) = \frac{25}{16} - 5 = -\frac{79}{16}$$

### تعریف دیگر تابع

یک رابطه بین x و y به صورت  $y = f(x)$ ،  $x \in \mathbb{R}$  را وقتی

ضابطه تابعی چون f از x به y گوئیم که:

به ازای هر x، حداکثر یک مقدار برای y به دست آید.

**مثال ۱:** آیا رابطه  $y = f(x) = x^2$ ،  $x \in \mathbb{R}$  یک تابع از x

به y است؟

**جواب:** بلی، زیرا به x هر عدد حقیقی نسبت دهیم،  $x^2$  یک

عدد خواهد شد و برای y فقط و فقط یک عدد به دست می‌آید.

**مثال ۲:** آیا رابطه  $y^2 = x$ ،  $x \in \mathbb{R}$  یک تابع از x به y

است؟

**جواب:** خیر؛ در مورد اثبات این که یک رابطه برحسب x و y

یک تابع نیست، یک مثال نقض کافی است:

$$x = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

ملاحظه شد که اگر به x، عدد ۱ را نسبت دهیم، برای y دو

مقدار  $\pm 1$  به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

**مثال ۳:** آیا رابطه  $y = \sqrt{2x-1}$ ،  $x \in \mathbb{R}$  یک تابع است؟

**جواب:** بلی، زیرا داریم:

$$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

اگر به x اعدادی حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی  $\frac{1}{2}$  نسبت دهیم،

برای y فقط و فقط یک عدد به دست می‌آید.

**برای مثال:**

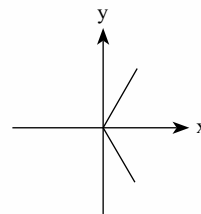
$$x = 3 \Rightarrow y = \sqrt{2(3)-1} = \sqrt{5}$$

$$y = 5 \Rightarrow y = \sqrt{2(5)-1} = \sqrt{9} = 3$$

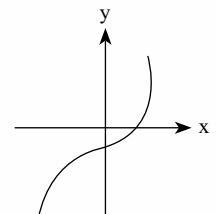


اگر نمودار یک تابع رسم شود و خطوطی موازی محور  $y$  ها رسم کنیم، نباید این خطوط نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند، زیرا در غیر این صورت دو نقطه روی خطی موازی با محور  $y$  ها همواره دارای طول‌های برابرند و در این صورت چنین نموداری نمی‌تواند متعلق به یک تابع باشد.

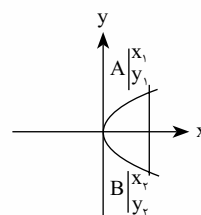
**مثال:** کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند متعلق به یک تابع باشد؟



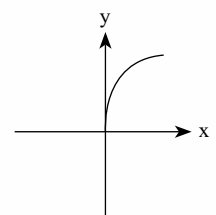
(ب)



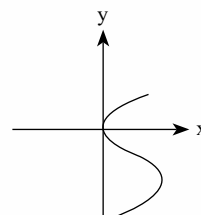
(الف)



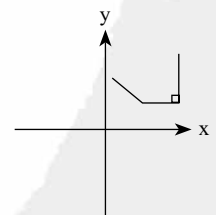
(د)



(ج)



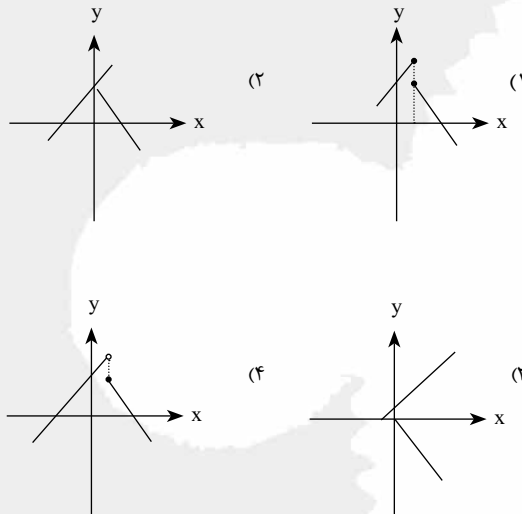
(و)



(ه)

**حل:** اگر در نمودارهای (ب) و (د) و (ه) و (و) خطوطی موازی محور  $y$  ها رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند و نمی‌توانند نمودار تابع باشند.

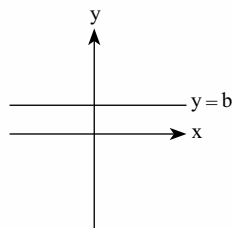
**مثال:** کدام یک از نمودارهای زیر، می‌تواند نمودار یک تابع از  $x$  به  $y$  باشد؟



در شماره‌های ۱، ۲ و ۳، بعضی از خط‌های عمود بر محور  $x$  ها نمودار را در دو نقطه قطع می‌کنند.

### توابع خطی

هر تابع که ضابطه آن به صورت  $f(x) = y = ax + b$  باشد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.  
توجه دارید که در توابع خطی متغیر  $x$  از درجه ۱ و نمودار  $y = ax + b$  همواره یک خط است که با توجه به مقادیر  $a$  و  $b$  این خطوط به صورت‌های زیر رسم می‌شوند:



I)  $a = 0 \Rightarrow y = b$

II)  $b = 0 \Rightarrow y = ax$  خطی که از مبدأ عبور می‌کند

III)  $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow y = ax + b$  خطی که هر دو محور را قطع می‌کند

**مثال:** آیا خط به معادله  $x = 5$  ضابطه یک تابع خطی است؟  
**حل:** خیر، زیرا نمودار خط  $x = 5$  موازی محور  $y$  ها و دارای بی‌شمار نقطه است که مؤلفه اول همه آن‌ها ۵ است!

### وارون یک رابطه

اگر  $R$  یک رابطه باشد وارون رابطه  $R$  رابطه‌ای است که اعضای آن

**در نتیجه:** اگر  $A(x,y)$  باشد، آن گاه قرینه  $A$  نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم نقطه  $A'(x,y)$  است.

**مثال:** دو نقطه  $A \left( \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$  و  $A' \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix} \right)$  نسبت به خط  $y=x$  قرینه یکدیگرند.

**مثال:** اگر دو نقطه  $A \left( \begin{smallmatrix} m-2 \\ n+1 \end{smallmatrix} \right)$  و  $A' \left( \begin{smallmatrix} m+2 \\ -n+3 \end{smallmatrix} \right)$  نسبت به خط  $y=x$  قرینه یکدیگر باشند،  $m$  و  $n$  کدام اند؟

$$\begin{cases} x_A = y_{A'} \\ y_A = x_{A'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-2 = -n+3 \\ n+1 = m+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=5 \\ n-m=1 \end{cases} \Rightarrow n=3, m=2$$



اگر  $R^{-1}$  وارون رابطه  $R$  باشد، همواره هر زوج مرتب در  $R$  اگر نسبت به خط  $y=x$  (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه شود، نقطه‌ای در  $R^{-1}$  حاصل می‌شود. لذا می‌توان گفت که دو نمودار  $R$  و  $R^{-1}$  نسبت به خط  $y=x$  قرینه یکدیگرند.

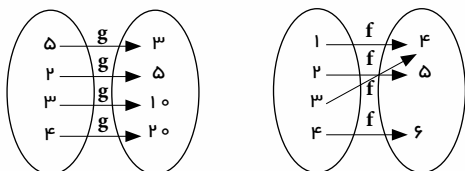
### تابع یک به یک

دو تابع  $f$  و  $g$  را با زوج مرتب نشان داده‌ایم:

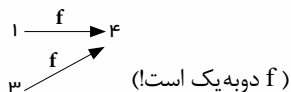
$$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$$

$$g = \{(5, 3), (2, 5), (3, 10), (4, 20)\}$$

همان‌طور که می‌دانید  $f$  و  $g$  هر دو تابع‌اند، ولی تابع  $g$  ویژگی خاصی دارد و آن این است که در کلیه زوج‌های این تابع، مختص دوم تکراری نیست، در حالی که در تابع  $f$  عدد ۴ در مختص دوم دو زوج مرتب قرار دارد.



تابع  $g$  را تابع یک به یک گوئیم. به شکل توجه کنید.



با عوض کردن مؤلفه‌های اول و دوم اعضای  $R$  به‌دست می‌آیند و آن را با  $R^{-1}$  نمایش می‌دهند. در حالت کلی:

$$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}$$

**مثال:**

$$I) R_1 = \{(2, 3), (3, 5), (4, -1), (7, \frac{1}{7})\}$$

$$R_1^{-1} = \{(3, 2), (5, 3), (-1, 4), (\frac{1}{7}, 7)\}$$

$$II) R_2 = \{(4, 2), (4, 7), (3, 5), (0, 1)\}$$

$$R_2^{-1} = \{(2, 4), (7, 4), (5, 3), (1, 0)\}$$

$$III) R_3 = \{(1, 2), (3, 2), (5, 1), (15, 2)\}$$

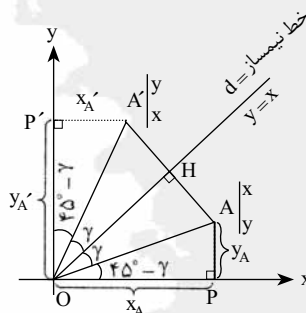
$$R_3^{-1} = \{(2, 1), (2, 3), (1, 5), (2, 15)\}$$

**تذکر:** اگر  $R^{-1}$  وارون رابطه  $R$  باشد، در این صورت همواره داریم:

$$\text{دامنه } R^{-1} = \text{برد } R \text{ و برد } R^{-1} = \text{دامنه } R$$

### قرینه یک نقطه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم

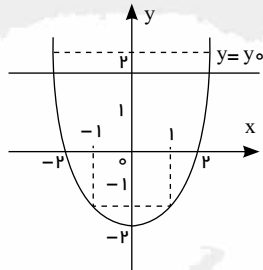
فرض می‌کنیم  $A(x,y)$  یک نقطه در صفحه مختصات باشد. قرینه نقطه  $A$  را نسبت به خط  $y=x$ ،  $(d)$  رسم می‌کنیم. نقطه  $A'$  به‌دست می‌آید. می‌خواهیم نشان دهیم که مختصات نقطه  $A'$ ،  $(x,y)$  است. مثلث  $OAA'$  متساوی‌الساقین است، زیرا  $AH=A'H$  و  $AA' \perp d$  پس  $OA=OA'$ .



دو مثلث قائم‌الزاویه  $OPA$  و  $OP'A'$  (به حالت وتر و یک زاویه حاده مساوی) مساوی‌اند، پس  $OP = OP' \Rightarrow x_A = y_{A'}$  و  $AP = A'P' \Rightarrow y_A = x_{A'}$ .

نتیجه بگیرید که تابع  $f$  به معادله  $f(x) = x^2 - 2$  یک به یک نیست.

| $x$     | $g(x)$ |
|---------|--------|
| 0       | -2     |
| $\pm 1$ | 1      |
| $\pm 2$ | 2      |



**حل:** ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار، ملاحظه می‌شود که خط  $y = y_0$  عضو برد تابع (نمودار تابع را در دو نقطه قطع کرده است، پس این تابع یک به یک نیست.

حال به روش محاسبه:

فرض کنیم  $f(x_1) = f(x_2)$   $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x_1^2 - 2 = x_2^2 - 2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

تابع  $f$  یک به یک نیست.

**مثال:** آیا تابع به معادله  $f(x) = \sqrt{2x+3}$  یک به یک است؟

**حل:** فرض می‌کنیم  $x_1$  و  $x_2 \in \mathbb{R}$  و داریم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{2x_1+3} = \sqrt{2x_2+3}$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع یک به یک است.



**تعریف:** اگر  $f: A \rightarrow B$  یک تابع باشد، چنانچه هر عضو از برد  $f$  فقط و فقط با یک عضو از دامنه تابع متناظر باشد، آن گاه تابع  $f$  را یک به یک گوئیم. به عبارت دیگر، اگر برای هر  $x_1, x_2 \in D_f$  و  $x_1 \neq x_2$ ، آن گاه نتیجه بگیریم فقط  $f(x_1) \neq f(x_2)$  و یا به عبارت معادل، برای هر  $x_1, x_2 \in D_f$  و  $f(x_1) = f(x_2)$  آن گاه نتیجه بگیریم،  $x_1 = x_2$ .

**مثال:** آیا تابع به معادله  $f(x) = 2x + 5$  یک به یک است؟

**حل:** فرض می‌کنیم  $x_1$  و  $x_2$  عضو دامنه  $f$  باشند و داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس این تابع، یک به یک است.

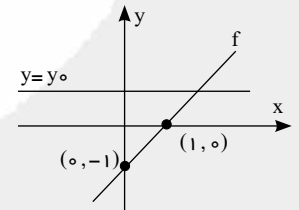
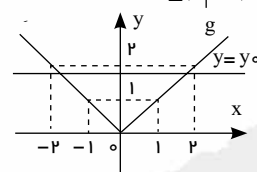
**توجه:** نمودار یک تابع، وقتی نمودار تابع یک به یک است که هر خط موازی محور  $x$ ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

**مثال:** دو تابع با ضابطه‌های  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = x - 1$  و  $g(x) = |x|$

را در نظر می‌گیریم. نمودارهای دو تابع  $f$  و  $g$  را رسم می‌کنیم.

| $x$ | $f(x)$ |
|-----|--------|
| 0   | -1     |
| 1   | 0      |

| $x$     | $g(x)$ |
|---------|--------|
| 0       | 0      |
| $\pm 1$ | 1      |
| $\pm 2$ | 2      |



ملاحظه می‌کنیم تابع  $f$  یک به یک است، ولی تابع  $g$  یک به یک نیست.

**مثال:** به کمک نمودار تابع و هم به کمک تساوی

$$f(x_1) = f(x_2)$$



## تمرین

۱. اگر دو تابع  $f = \{(1, 2a + b), (a, 3)\}$  و  $g = \{(1, a + 3b), (2, 4b + c)\}$  برابر باشند، آن گاه مقدار عددی  $5a + 2b + c$  را بیابید.

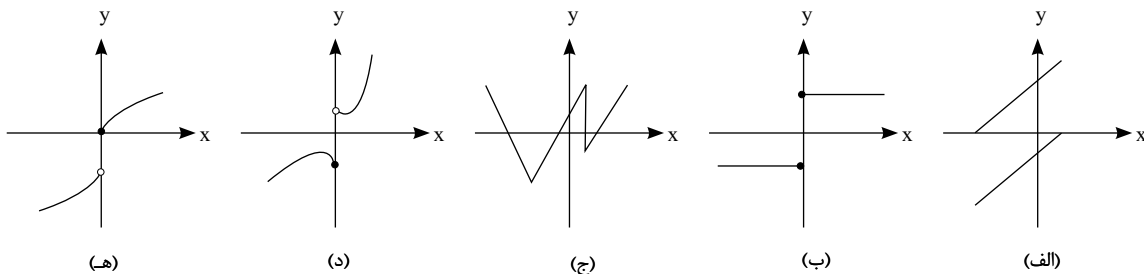
جواب:  $a = 2, b = 1, c = -1$  و  $5a + 2b + c = 11$ .

۲. کدام یک از رابطه‌های زیر در  $R$  ضابطه یک تابع است و کدام یک تابع نیست؟

(الف)  $y = |x + \sqrt{x}|$  (ب)  $|x| + |y| = 0$  (ج)  $|y| = -x' + 4$  (د)  $y = \pm \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$  (ه)  $x = y^2$

جواب: (الف) و (ب) و (د) تابع هستند و (ج) و (ه) تابع نیستند.

۳. کدام یک از نمودارهای زیر، تابع از  $x$  به  $y$  است؟



جواب: اشکال مربوط به (الف) و (ب) و (ج) تابع نیستند.

۴. اگر  $f(x) = \begin{cases} -2x + a, & x \geq 1 \\ 4x - 2a, & x \leq 1 \end{cases}$  ضابطه یک تابع باشد،  $a$  کدام است؟

جواب: ۲

۵. اگر رابطه زیر تابع باشد، مقادیر  $x$  و  $y$  را بیابید.

$$f = \{(x-1, 2), (5, x-2), (x-2, y+3), (3, 5), (5, 3)\}$$

راهنمایی: در مجموعه‌های شامل زوج مرتب، نباید زوج مرتب‌های با مؤلفه‌های اول برابر یافت شود  $(5, x-2) \in f$  و  $(5, 3) \in f$  پس  $x-2=3$  یا  $x=5$  و...

جواب:  $x=5$  و  $y=2$

۶. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

I)  $f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 4)\}$

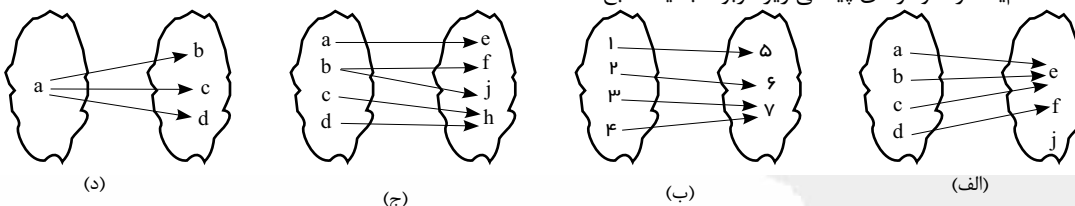
II)  $g = \{(0, 0), (4, 0), (5, 0), (0, 4)\}$

III)  $h = \{(2, -1), (3, -1), (4, -1)\}$

IV)  $i = \{(-1, 5), (-1, 6), (-1, 7)\}$

جواب: رابطه‌های شماره (I) و (III) تابع هستند.

۷. کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر مربوط به یک تابع است؟



**جواب:** (الف) و (ب) تابع هستند.

۸. دامنه و برد هر یک از توابع زیر را معین کنید.

$$I) f = \left\{ (2, 3), (5, 3), (-1, 3), (4, 3), \left(\frac{1}{2}, 3\right) \right\}$$

$$II) g = \{(4, 5), (5, 4), (6, 2), (2, 6)\}$$

$$III) h = \{(1, 1)\}$$

**جواب:**  $D_f = \{2, 5, -1, 4, \frac{1}{2}\}$  و  $R_f = \{3\}$  ،  $D_g = \{4, 5, 6, 2\}$  و  $R_g = \{4, 5, 2, 6\}$  و  $R_h = D_h = \{1\}$ .

۹. توابعی مثال بزنید که:

(الف) دامنه آن نامتناهی، ولی برد آن مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد. (ب) دامنه و برد آن نامتناهی باشد.

**جواب:** (الف)  $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots\}$  که  $D_f = \mathbb{N}$  و  $R_f = \{1\}$  (ب)  $g = \{(1, 1), (2, 2), \dots\}$

۱۰. کدام یک از رابطه‌های زیر در مجموعه اعداد حقیقی یک تابع از  $x$  به  $y$  نیست؟

(الف)  $y = |2x - 1|$  (ب)  $y^3 - x^2 = 0$  (ج)  $x = |y|$  (د)  $y = \pm \sqrt{-(x-1)^2}$

(ه)  $y^4 = x$

**جواب:** روابط (ج) و (ه)

۱۱. کدام یک از مجموعه‌های زیر تابعی از  $x$  به  $y$  نیستند؟

(الف)  $g = \{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$  (ب)  $f = \{(2, -1), (3, 5), (4, 5)\}$  (ج)  $h = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$

**جواب:** مجموعه  $h$

۱۲. اگر  $D_f = \{2, 4, 6, \dots, 40\}$ ،  $f = \{(2, 10), (4, 12), \dots\}$  و زوج مرتب  $(2x + y, 2x - y)$  برابر دوازدهمین زوج مرتب  $f$  باشد،  $(x - y)$  برابر است با:

**جواب:** ۱۸

۱۳. اگر  $x, y \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟

(الف)  $A = \{(x, y) | x < y\}$  (ب)  $B = \{(x, y) | x \geq y\}$

(ج)  $C = \{(x, y) | y = 5\}$  (د)  $D = \{(x, y) | x = 5\}$

**جواب:** مجموعه  $C$

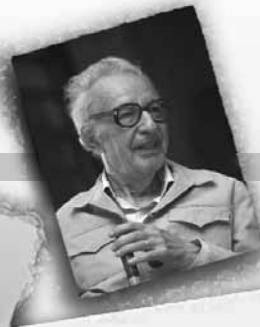
۱۴. آیا رابطه  $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, |x - 2| + |y + 3| = 0\}$  یک تابع است؟ چرا؟

**راهنمایی:** مجموع دو مقدار مثبت وقتی صفر است که هر دو صفر باشند.

**جواب:** بله، تابع است.



# تابان تر از خورشید



گزارشی از  
مراسم نکوداشت بیستمین سال انتشار  
مجله ریاضی رشد برهان متوسطه

گزارش:  
فاطمه خرقانیان

گزارش

## اشاره

دفتر انتشارات کمک آموزشی به تازگی اقدام به برگزاری همایش هایی کرده است که به پاس قدردانی از انتشار طولانی مدت و مفید یک مجله یا خدمات ارزنده افرادی صورت می گیرد که تمامی زندگی و تمرکز خویش را معطوف شکوفایی علمی این مرز و بوم کرده اند. بیست سالگی مجله برهان ریاضی و نیز حضور مؤثر، بی دریغ و بی بدیل پرویز شهریاری در بالندگی مجله برهان بهانه ای شد تا این بار قرعه تجلیل از مجلات به نام

برهان ریاضی و پرویز شهریاری رقم خورد.

... پرویز شهریاری دوم آذر ۱۳۰۵ در شهر کرمان متولد شد. به رغم فوت

پدر در اوایل دوران نوجوانی، و مرارت های فراوان، موفق شد سال ۱۳۳۲ در رشته ریاضی از دانشکده علوم فارغ التحصیل شود.

او از آن پس به تدریس در دانشکده فنی دانشگاه تهران مشغول شد. سپس به

انتشار مجلات متعدد و سردبیری نشریات گوناگون اقدام کرد. همزمان با تألیف و ترجمه صدها کتاب و مقاله، توانست نقش مهمی در پرورش فکری دانش آموزان و دانشجویان ایفا کند. او با تأسیس دبیرستان های خوارزمی و مرجان سعی کرد محیطی

مناسب برای رشد جوانان کشور فراهم آورد. پرویز شهریاری در سال ۱۳۴۵ موفق

به دریافت نشان درجه یک علمی از وزیر آموزش و پرورش وقت شد و در سال ۱۳۸۴ به

عنوان چهره ماندگار ریاضیات معرفی شد. از آغاز به کار مجله برهان تاکنون، همواره اولین مقاله برهان به قلم استاد شهریاری نگاشته شده است.

مراسم نکوداشت استاد پرویز

شهریاری، عضو هیئت تحریریه برهان

ریاضی و چهره ماندگار ریاضیات و

همچنین بیستمین سال انتشار برهان

ریاضی متوسطه، بیستم خردادماه در سالن

اجتماعات سازمان پژوهش و برنامه ریزی

برگزار شد.



### نیم‌نگاهی به گذشته

در ابتدای این نشست، معاون دفتر انتشارات کمک‌آموزشی آقای نادری هدف از برگزاری این گردهمایی را چنین تشریح کرد: «ما این جلسات را به دو منظور تشکیل می‌دهیم، از دیدگاه حرفه‌ای و رسانه‌ای به این اعتقاد داریم که هر رسانه‌ای از جمله رسانه‌های مکتوب، بهتر است بعد از حداقل دو دهه، به راه رفته‌ای که طی شده و به راهی که باید رفت بیندیشند. نکته دوم نگاه اخلاقی و فرهنگی است که دفتر کمک‌آموزشی به دست اندرکاران رسانه‌ها دارد. این نشست تبلور حس قدرشناسی و ارادت قلبی مدیران و جامعه نسبت به دوستانی است که حداقل دو دهه از

عمرشان و بیش از ۱۱۶۰ مقاله را به عنوان گنجینه‌ای افتخارآمیز تقدیم جامعه ریاضی ایران کرده‌اند.»

آقای محمدهاشم رستمی، سخنران دوم این گردهمایی بود که درخصوص ضرورت وجود مجلاتی نظیر برهان متوسطه چنین گفت: «من فعالیت جدی‌ام را از حدود ۳۲ سال پیش در دفتر تألیف و برنامه‌ریزی کتاب‌های درسی شروع کردم. بعد از انقلاب، یک گروه ۳۱ نفری در دفتر شکل گرفت و در آنجا بود که من فهمیدم نیاز دانش‌آموزان ما چیست. کتاب درسی محدود است، زیرا ساعات آموزشی محدود هستند و لذا بسیاری از مفاهیم به‌صورت فشرده گفته می‌شود. در ارتباط با روش‌های آموزشی هم مجبوریم یک یا دو روش را بیان کنیم. بنابراین کتاب، به تنهایی برای دانش‌آموز کافی نیست. وجود مجلاتی لازم است تا دانش‌آموزان را راهنمایی کنند که یکی از این مجلات، رشد برهان متوسطه است.»



در این مراسم که با حضور مدیرکل دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، آقای ناصری، معاونت سازمان پژوهش، آقای فاضلی، اعضای هیئت تحریریه مجله برهان متوسطه و تنی چند از سردبیران و کارشناسان مجلات رشد برگزار شد، به پاس هفت دهه پیشگامی و پیشتازی استاد پرویز شهریاری در آموزش ریاضیات، آفرینش صدها کتاب و مقاله و حضور مداوم و مؤثر در مجله برهان ریاضی از ایشان تجلیل به عمل آمد و لوح زرین رشد که تنها به مدیران سابق مجله تقدیم می‌شد، به وی اهدا شد. همچنین به پاس دو دهه تولید و انتشار مجله برهان ریاضی از تمامی کسانی که در تولید این نشریه همکاری و حضور مؤثر داشتند، تقدیر شد.



اگر دستگاه

خردورزی انسان

را به درختی

تشبیه کنیم،

استدلال و

حسابگری در

حکم ریشه آن

است. انسان

از لحظه‌ای که

چشم‌باز می‌کند

از یک سو در

حال محاسبه

و حسابرسی

است و از یک سو

مدام به حسابش

رسیدگی می‌شود

## درک واقعیت‌ها، ظهور رفاقت‌ها!

خانم دکتر زهرا گویا از دیگر سخنرانان مراسم نکوداشت بود که با استخراج ویژگی‌های مثبت مجلهٔ برهان متوسطه به تشریح آن برای حاضران پرداخت و تصریح کرد:

آن چه در بررسی هفتاد شماره این مجله، توجهم را جلب کرد این بود که مجله با واقعیت زمانش دوست شده بود. برای مثال، مجله در سال دوم ویژه‌نامهٔ کنکور داشت. مجله پذیرفته بود که بچه‌ها می‌خواهند کنکور دهند، پس باید بدانند چطور کنکور دهند. یا سال سوم روی یکی از جلدها تصویر پاسخ‌نامهٔ کنکور را گذاشتند. چون در سال ۷۰ هنوز ما کتاب‌های رنگارنگ کمک‌آموزشی و کلاس‌های متعدد کنکور نداشتیم. این عمل خیلی واقع‌بینانه بود. یکی دیگر از ویژگی‌های برهان این است که از دلش چند کتاب خوب درآمده است. برهان برای من تا مدت‌ها مثل کتاب ماه یا کتاب هفته بود. یک عده آدم ثابت، خوش ذوق و علاقه‌مند شروع به نوشتن کردند و ۳ ماه به ۳ ماه ادامهٔ موضوع را می‌نوشتند. تقریباً تسلسل مطالب این‌گونه شاکلهٔ اصلی مجله را تا دو سه ماه اخیر شکل داده است.

یکی از مهم‌ترین کتاب‌هایی که از دل برهان درآمده، کتاب آقای شهریار با عنوان «شما هم می‌توانید در درس ریاضی موفق شوید» است.

وی در ادامه سخنانش خاطرنشان کرد: «یک کار جالب دیگر در برهان، ترجمهٔ متون ریاضی به همت آقای امیری و با کمک آقای یاسی‌پور بوده است. جای یک مهارتی خالی بود که مجلات کمک کردند تا مهارت ترجمه به‌وجود آید. نکته مثبت، پشت جلد‌های مجله بود. پشت جلد‌ها اغلب به حل مسئله به‌دست یک ریاضی‌دان ایرانی و اسلامی اختصاص داشت. مسئله و حلش را می‌دادند و بعد داخل مجله دربارهٔ زندگی‌نامهٔ آن ریاضی‌دان توضیحاتی داده می‌شد.

و آخرین نکته، ارتباط مجله با مخاطبش بود. گاهی مسئله‌ای برای حل داده بودیم، جواب می‌دادند، گاهی دعوا می‌کردند که چرا جواب نمی‌دهید. من پی‌گیری کردم ببینم از دانش‌آموزان

قدیمی که برای برهان نامه می‌نوشتند کسی هست که از نویسندگان برهان شده باشد که به دو نفر رسیدم، یکی آقای حسین روح‌الامینی و دیگری دکتر جهانی‌پور.

## خلقتی سرشته با صفات؛ چه زندگی، چه مرگ!

مدیرکل دفتر انتشارات، آقای ناصری نیز طی سخنانی درخصوص اهمیت خردورزی و پرورش مهارت تعقل در انسان گفت: «اگر دستگاه خردورزی انسان را به درختی تشبیه کنیم، استدلال و حسابگری در حکم ریشهٔ آن است. انسان از لحظه‌ای که چشم‌باز می‌کند از یک سو در حال محاسبه و حسابرسی است و از یک سو مدام به حسابش رسیدگی می‌شود. درک نسبت‌های هندسی، کشف مجهول از معلومات موجود، درک ریتم و موسیقی و خلاصه فهم تمامی روابط پیچیدهٔ طبیعی و انتزاعی با قوهٔ حسابگری صورت می‌گیرد. گویی ذات این عجب‌خلق را با حساب سرشته‌اند و اشرف مخلوقات است که زندگی و مرگش حساب و کتاب دارد...»

وی در ادامه، هدف رشد برهان راهنمایی و متوسطه را ارتقای مهارت خردورزی و اندیشهٔ ریاضی در میان فرزندان این مرز و بوم دانست و افزود: «جازه می‌خواهم به نمایندگی از همهٔ بزرگواران دست دو مهربان را به گرمی بفشارم. اول سر تعظیم فرود آورم در مقابل چهرهٔ ماندگار ریاضیات این مرز و بوم که یکه‌تاز و پیش‌تاز اندیشه‌ورزی برای خردورزان ایران عزیز بود. معلم بزرگی که «آشنایی با ریاضیات» و «آشتی با ریاضیات» را به دانش‌آموزان این سرزمین آموخت و برای معلمان ریاضی کشور، مرجعی محبوب و مطمئن و قابل اتکاست. استاد پرویز شهریار که چراغ روشن این انجمن است و در تحریریهٔ مجلهٔ برهان، از آغاز تاکنون و به لطف یزدان پاک برای همیشه چون خورشیدی است که همواره می‌درخشد و نور و گرمی می‌بخشد. و دیگر، سردبیر سخت‌کوش و نازنین مجلهٔ برهان، حمیدرضا امیری که با سعهٔ صدر کم‌نظیر و ستودنی خود، محفلی از اساتید درد آشنا و معلمان و مؤلفان گران‌قدر را بیش از دو دهه گرد هم آورد تا این چراغ فروزان همواره



روشن بماند و بتابد. اگر جوانی خود را خرج این راه کرد، نور و روشنی و برهان را به دانش‌آموزان این مملکت هدیه داد.»

### سیاسی به بلندای همتان!

آخرین سخنران مراسم نکوداشت، سردبیر مجلهٔ برهان ریاضی، آقای امیری بود. او که از فراز و فرودهای مجله، دلوپسی‌ها و دلگرمی‌ها سخن می‌گفت، دربارهٔ شکل‌گیری برهان چنین گفت: «شاید وقتی برای اولین شمارهٔ مجلهٔ ریاضی به دنبال یک اسم با معنا و در عین حال مرتبط با ریاضی می‌گشتم به هفتادمین شمارهٔ مجله فکر نمی‌کردم. آن زمان فقط یک مجلهٔ ریاضی آن هم به دست پرتوان استاد شهریار چاپ می‌شد؛ مجلهٔ ریاضی با نام «آشنایی با ریاضیات». اما چیزی نگذشت که مجلهٔ ریاضی برهان در این کشور پنهان برای دانش‌آموزان منحصربه‌فرد شد. رشد و تعالی مجله از بدو تولد تاکنون مدیون زحمات، ایثارگری‌ها و عشق و علاقه‌مندی زایدالوصف همهٔ دست‌اندرکاران و به‌خصوص اعضای هیئت تحریریه بوده و هست. صحبت از یک سال و دو سال نیست. صحبت از بیست سال عمر مفید هر یک از شما بزرگواران است که در کنار هم بودیم و گفتیم و شنیدیم و هر یک سهمی در گسترش علم ریاضی در میان دانش‌آموزان داشتیم. آیا شیرین‌تر از این چیزی هست؟!»

وی در ادامه افزود:

«استاد شهریار عزیز دست شما را می‌بوسم و همیشه توصیه‌های کوتاه اما مفید شما را آویزهٔ گوشم کرده و خواهم کرد. ساعت‌هایی که در منزل شما و در جمع هیئت تحریریه در کنارتان فیض می‌بردم و روزهایی که با شما در مدرسهٔ فیروز بهرام کلاس مشترک داشتیم، هیچ‌گاه از یاد نخواهم برد.»

سردبیر مجلهٔ برهان در ادامهٔ سخنانش از تک‌تک اعضای هیئت تحریریه، همچون استاد رستمی، استاد یاسی‌پور، استاد قندهاری، استاد شرف‌الدین، آقای هاشمی، آقای شرقی و آقای صدر سپاس و قدردانی کرده و زحمات چندین سالهٔ آنان را پاس داشت.

### معلم نمی‌تواند دروغ بگوید

آقای امیری که مهم‌ترین انگیزهٔ گردهمایی را نکوداشت دکتر شهریار عنوان کرد، به بیان خاطراتی از فعالیت‌های گذشتهٔ این استاد بی‌بدیل ریاضیات پرداخت و گفت: «تقریباً همهٔ اعضای خانوادهٔ ایشان خارج از کشور زندگی می‌کنند و بنابراین ایشان هر از گاهی یکی دو ماه به خارج سفر می‌کردند. یک بار نقل کردند که از دانشگاه آن شهر به ایشان پیشنهاد کرده بودند، موضوع «تاریخ ریاضیات» را تدریس کنند، با دستمزدی بالا و مترجمی که داخل کلاس هنگام تدریس مطالب را ترجمه کند. من از ایشان پرسیدم که چرا قبول نکردید؟ حقوق خوب، کنار خانواده و جایگاه مناسب؟ ایشان فرمودند: اگر قبول کرده بودم الآن در این جمع (اعضای هیئت تحریریه) نبودم و استفاده نمی‌کردم.

ایشان به جمعی که با آن همکاری می‌کنند، به آب و خاک کشورشان چنین علاقه‌ای دارند.»

وی با نقل خاطرهٔ دیگری از استاد شهریار یادآور شد:

«یک بار از استاد پرسیدم که چه ویژگی‌هایی در شغل معلمی می‌بینید که این قدر شیفتهٔ این شغل هستید؟ ایشان پاسخ دادند: معلمی یک پرورندهٔ زنده است، در جامعه حرکت می‌کند و می‌تواند نتیجهٔ کار خود را ببیند. دیگر اینکه معلم در دو نسل زندگی می‌کند، یکی نسل خودش و دیگری نسل بچه‌هایی که با آن‌ها کار می‌کند. یک نکتهٔ خیلی مهم دیگر که اشاره کردند این بود که پرسیدند، شما در روز چند ساعت تدریس می‌کنی؟ گفتم، ۸ ساعت. گفتند: در حقیقت ۸ ساعت دروغ نمی‌گویی. چه شغلی را سراغ داری که ۸ ساعت کار کنی، اما توان دروغ گفتن نداشته باشی!!»

در خاتمهٔ این نشست استاد شهریار طی سخنان کوتاهی اظهار داشت:

«مجلهٔ برهان را خیلی دوست دارم، زیرا بیست سال با مجله همکاری کردم و همین برآیم گران‌قدر است. به خودم و دیگران توصیه می‌کنم که وقتی معلم ریاضی هستند بدانند که معلم ریاضی یعنی چه و برای چه کاری معلم شده‌اند.»

معلمی یک

پرورندهٔ زنده

است، در جامعه

حرکت می‌کند و

می‌تواند نتیجهٔ

کار خود را ببیند.

دیگر اینکه

معلم در دو نسل

زندگی می‌کند،

یکی نسل

خودش و دیگری

نسل بچه‌هایی

که با آن‌ها کار

می‌کند

# آهنگ آنی و کمیت‌های وابسته

برای دانش‌آموزان سال  
سوم و چهارم

سیمین اکبری زاده  
دبیر ریاضی ناحیه یک اراک

## تعریف

اگر متحرکی روی یک محور براساس تابع حرکت  $x(t)$  حرکت کند، سرعت متوسط آن بین دو لحظه  $t$  و  $t+h$  برابر با:  $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$  و سرعت آن در هر لحظه  $t$  برابر است با  $x'(t)$ .

**مثال ۱:** اتومبیلی با سرعت ثابت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند. راننده با دیدن کودکی در جلوتر، ناگهان ترمز می‌کند ( $t=0$  و  $x=0$ ). فاصله طی شده ( $x$ ) از لحظه ترمز تا توقف کامل از رابطه  $x(t) = 100t - 50t^2$  بر حسب زمان به دست می‌آید. در این صورت، اتومبیل با توقف کامل چند متر می‌پیماید؟

$$x'(t) = 100 - 100t = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow x(1) = 100(1) - 50(1)^2 = 50$$

**حل:** زمان توقف، یعنی زمانی که سرعت صفر می‌شود؛ پس یعنی اتومبیل تا توقف کامل ۵۰ متر می‌پیماید.

## تعریف

فرض کنیم دو کمیت مثل  $A$  و  $r$  داشته باشیم و کمیت  $A$  تابعی از کمیت  $r$  باشد و این تابع را به صورت  $A(r)$  نشان دهیم. اگر مقدار کمیت  $r$  برابر  $r$  باشد و آن را  $h$  واحد افزایش دهیم، مقدار تابع  $A$  از  $A(r)$  به  $A(r+h)$  تغییر می‌کند، یعنی مقدار تغییرات تابع  $A$  که آن را با  $\Delta A$  نمایش می‌دهیم برابر است با  $A(r+h) - A(r)$  و نسبت افزایش مقدار  $A$  به افزایش مقدار  $r$  که با نماد  $\frac{\Delta A}{\Delta r}$  نمایش می‌دهیم، برابر است با  $\frac{A(r+h) - A(r)}{h}$  این کسر را **آهنگ تغییرات متوسط کمیت  $A$  به کمیت  $r$  در دو مقدار  $r$  و  $r+h$  می‌نامند.** حد این کسر در  $h=0$  را **آهنگ یا آهنگ لحظه‌ای کمیت  $A$  به کمیت  $r$  در  $r=r$  می‌نامند** که همان مشتق تابع  $A(r)$  در  $r$  یعنی  $A'(r)$  است.

**مثال ۲:** در تابع با ضابطه  $f(t) = \frac{240}{t}$ ، آهنگ آنی تغییر  $f$  در لحظه  $t=4$ ، چه قدر از آهنگ متوسط تغییر  $f$  از لحظه ۳ تا ۵ بیش تر است.

**حل:**

$$f'(t) = \frac{-240}{t^2}, \quad (t=4) \quad f'(4) = \frac{-240}{16} = -15$$

$$\text{آهنگ متوسط } f \text{ از } 3 \text{ تا } 5 = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{\frac{240}{5} - \frac{240}{3}}{2} = -16$$

$$\text{اختلاف} = (-15) - (-16) = 1$$

کلیدواژه‌ها:  
آهنگ آنی،  
آهنگ تغییرات،  
مشتق و  
کمیت‌های  
وابسته.



**مثال ۳:** میزان آب موجود در یک مخزن بر حسب گالن،  $t$  دقیقه بعد از آن که تخلیه مخزن شروع شده برابر است با:  $Q(t) = 200(30 - t)^2$ . الف) آهنگ خروج آب از مخزن در پایان دقیقه دهم چه قدر است؟ ب) آهنگ متوسط خروج آب از مخزن در خلال ۱۰ دقیقه اول چه قدر است؟

**حل: الف)**  $Q'(t) = 200(-2)(30 - t) = -12000 + 400t$ ,  $Q'(10) = -8000$   $\frac{\text{گالن}}{\text{دقیقه}}$

**ب)**  $\frac{Q(10) - Q(0)}{10 - 0} = \frac{80000 - 180000}{10} = -10000$   $\frac{\text{گالن}}{\text{دقیقه}}$

**مثال ۴:** محیط هر دایره‌ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت  $\pi$  حساب کنید.

**حل:** فرض می‌کنیم  $S$  مساحت و  $P$  محیط دایره باشد. آهنگ تغییرات محیط دایره نسبت به مساحت یعنی  $P'(S)$  برای  $S = \pi$  مجهول است. **روش اول:** ابتدا  $P$  را بر حسب  $S$  می‌نویسیم و سپس از طرفین نسبت به  $S$  مشتق می‌گیریم. داریم:

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{S}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad *$$

$$P = 2\pi r \xrightarrow{*} P = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow P = 2\sqrt{\pi} \sqrt{S} \Rightarrow P(S) = 2\sqrt{\pi} \sqrt{S} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } S} P'(S) = 2\sqrt{\pi} \times \frac{1}{2\sqrt{S}}$$

$$\Rightarrow P'(S) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}} \quad S = \pi \Rightarrow P'(\pi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$$

**روش دوم:** استفاده از قضیه مشتق تابع مرکب:

$$\left. \begin{array}{l} S = \pi r^2 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } r} S'(r) = 2\pi r \\ P = 2\pi r \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } r} P'(r) = 2\pi \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} P'(S) = \frac{P'(r)}{S'(r)} = \frac{2\pi}{2\pi r} = \frac{1}{r} \\ S = \pi r^2 = \pi \Rightarrow r = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P'(\pi) = \frac{1}{1} = 1$$

**مثال ۵:** یک بادکنک کروی با تلمبه‌ای در لحظه  $t = 0$  شروع به باد شدن می‌کند. هر ثانیه ۴ سانتی‌متر مکعب هوا وارد بادکنک می‌شود، حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می‌کند  $4500\pi$  سانتی‌متر مکعب است.

**الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه  $t$  چه قدر است؟**

**حل:** با توجه به فرض مسئله بعد از گذشت  $t$  ثانیه، حجم بادکنک  $4t$  سانتی‌متر مکعب افزایش می‌یابد ( $V = 4t$ ). با گذشت زمان، شعاع و مساحت سطح و حجم بادکنک افزایش می‌یابد، یعنی  $R$  و  $S$  و  $V$  تابعی از  $t$  هستند. در قسمت الف آهنگ تغییرات  $R$  نسبت به  $t$  مجهول است، لذا با کمک فرض  $V = 4t$  ابتدا  $R$  را بر حسب  $t$  به دست می‌آوریم و سپس  $R'(t)$  را با مشتق‌گیری نسبت به  $t$  محاسبه می‌کنیم.

$$V = 4t, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow 4t = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 = \frac{3t}{\pi} \Rightarrow R(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \times \sqrt[3]{t} \quad * \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} R'(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \times \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$$

**ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چه قدر است؟**

**حل:** آهنگ تغییرات  $S$  نسبت به  $t$  یعنی  $S'(t)$  مجهول است. بنابراین ابتدا با توجه به قسمت \*،  $S$  را بر حسب  $t$  می‌نویسیم، سپس از طرفین نسبت به  $t$  مشتق می‌گیریم؛ داریم:

$$S = 4\pi R^2 \xrightarrow{*} S(t) = 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\right)^2 \times \sqrt[3]{t^2} \Rightarrow S(t) = 4 \times \sqrt[3]{9\pi} t^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} S'(t) = 4\sqrt[3]{9\pi} \times \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow S'(t) = \frac{8\sqrt[3]{9\pi}}{3\sqrt[3]{t}}$$

ج) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک (در هر مقداری از سطح بادکنک) چه قدر است؟

حل: با تغییر سطح بادکنک، شعاع نیز تغییر می کند، یعنی شعاع بادکنک تابعی از مساحت آن است (تابع معکوس). آهنگ تغییرات R نسبت به S یعنی  $R'(S)$  مجهول است. بنابراین، ابتدا R را برحسب S به دست می آوریم، سپس از طرفین نسبت به S مشتق می گیریم. داریم:

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{S}{4\pi} \Rightarrow R(S) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{S} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به S}} R'(S) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{S}}$$

روش دوم: استفاده از قضیه مشتق تابع معکوس

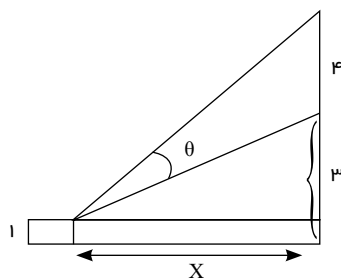
$$R'(S) = \frac{1}{S'(R)} = \frac{1}{8\pi R} \quad (\text{طبق د})$$

د) در آخرین لحظه که بادکنک می ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چه قدر است؟

حل: با توجه به فرض مسئله، در لحظه ترکیدن  $V = 450 \cdot \pi$  پس  $\frac{4}{3}\pi R^3 = 450 \cdot \pi$ ، لذا  $R = 15$ . آهنگ تغییرات S نسبت به R یعنی

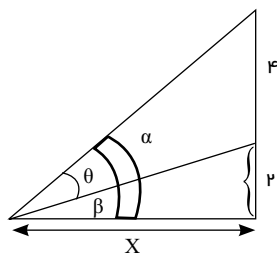
$S'(R)$  برای  $R = 15$  مجهول است. پس S را برحسب R می نویسیم و از طرفین نسبت به R مشتق می گیریم:

$$S = 4\pi R^2 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به R}} S'(R) = 8\pi R \xrightarrow{R=15} S'(15) = 8\pi(15) = 120\pi \text{ cm}^2$$



(شکل ۰ - الف)

مثال ۶: در اتوبانی یک تابلوی ۴ متری روی یک دکل ۳ متری نصب شده است. راننده یک ماشین که از سطح زمین یک متر فاصله دارد، این تابلو را تحت زاویه  $\theta$  می بیند. این زاویه تابعی از فاصله ماشین تا دکل و تابلو است.  $\theta$  را به صورت تابعی از x بنویسید. آهنگ تغییرات  $\theta$  را نسبت به x بیابید.



(شکل ۰ - ب)

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

حل:

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\frac{6}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{6}{x} \times \frac{2}{x}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{12}{x^2}} = \frac{4x}{x^2 + 12}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{4x}{x^2 + 12} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به x}} \theta'(x) = \frac{-4x^2 + 48}{(x^2 + 12)^2 [1 + (x^2 + 12)^2]}$$

### کمیت های وابسته.....

در بحث آهنگ آنی، دو کمیت داشتیم که یکی تابع و دیگری متغیر بود و آهنگ تغییر تابع نسبت به متغیرش مجهول بود. لذا ارتباط بین آن دو را می نوشتیم و از طرفین نسبت به متغیر مشتق می گرفتیم.

در کمیت های وابسته، نه تنها چند کمیت (متغیر) به هم مربوط اند، بلکه همه آن ها تابعی از متغیر دیگری (در اغلب موارد، زمان) هستند. در این گونه مسائل، مقدار بعضی یا همه این متغیرها و نیز آهنگ تغییرات بعضی از آن ها نسبت به زمان در لحظه ای خاص داده می شوند و آهنگ تغییرات یک یا تعداد بیش تری از متغیرها نسبت به زمان در همان لحظه، مجهول است. در چنین مواردی، رابطه ای می نویسیم شامل متغیرهایی که آهنگ تغییراتشان نسبت به زمان در صورت مسئله داده شده یا مجهول است (گاهی مجبوریم برای یافتن چنین معادله ای دو یا چند معادله را با هم ترکیب کنیم)، سپس با توجه به آن که متغیرهای به کار رفته در این معادله تابعی برحسب زمان هستند از طرفین معادله، به کمک نتیجه قضیه مشتق تابع مرکب نسبت به زمان مشتق می گیریم. در نهایت، مفروضات مسئله را جاگذاری می کنیم تا مجهول به دست آید.



### نکات قابل توجه:

۱. در صورت امکان رابطه بین متغیرها را تا جایی که می‌توانیم ساده می‌کنیم تا مشتق‌گیری راحت‌تر انجام شود.
  ۲. در صورت لزوم، مقادیر ثابت را می‌توان قبل از مشتق‌گیری در رابطه بین متغیرها جاگذاری کرد، ولی متغیرها در لحظه خاص و نیز آهنگ تغییرات متغیرها را حتماً بعد از مشتق‌گیری جایگزین می‌کنیم.
  ۳. گاهی لازم است برای یافتن مجهول مسئله به کمک رابطه بین متغیرها، مقدار متغیر دیگری را نیز در لحظه خاص به دست آوریم. در زیر به نتیجه قضیه مشتق تابع مرکب و چند مثال در مورد آن اشاره می‌شود.
- اگر  $y$  تابعی بر حسب  $u$  باشد و مشتق  $y$  نسبت به  $u$  موجود باشد و  $u$  تابعی بر حسب  $x$  باشد و مشتق  $u$  نسبت به  $x$  موجود باشد، آن‌گاه  $y$  تابعی از  $x$  است و مشتق  $y$  نسبت به  $x$  موجود خواهد بود و داریم:

$$y'_x = y'_u \times u'_x \quad \text{یا} \quad y'(x) = y'(u) \times u'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{با توجه به نماد لایپ نیتز} \quad y'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{تساوی بالا را به شکل}$$

$$y'(u) = \frac{y'(x)}{u'(x)} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{du} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}$$

نیز می‌نویسند. می‌توان از تساوی‌های بالا نتیجه گرفت:

مثال:

$$1) y(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{با فرض } x \text{ بر حسب } t]{\text{مشتق نسبت به } t} y'(t) = y'(x) \times x'(t) \Rightarrow y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x}} x'(t)$$

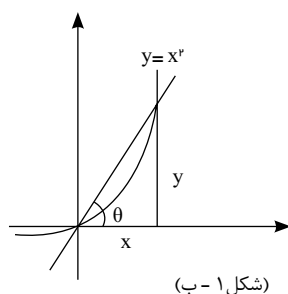
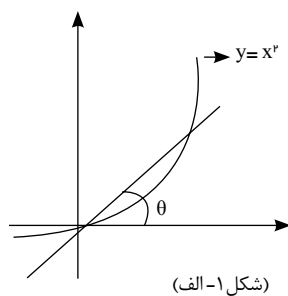
$$2) y(\theta) = \tan \theta \xrightarrow[\text{با فرض } \theta \text{ بر حسب } t]{\text{مشتق نسبت به } t} y'(t) = y'(\theta) \times \theta'(t) \Rightarrow y'(t) = (1 + \tan^2 \theta) \theta'(t)$$

$$3) V(h) = c h \xrightarrow[\text{با فرض } h \text{ بر حسب } t]{\text{مشتق نسبت به } t} V'(t) = V'(h) \times h'(t) \Rightarrow V'(t) = c h'(t)$$

عدد

$$4) S(R) = c R^2 \xrightarrow[\text{با فرض } R \text{ بر حسب } t]{\text{مشتق نسبت به } t} S'(t) = S'(R) \times R'(t) \Rightarrow S'(t) = 2RcR'(t)$$

عدد



**مثال ۱:** ذره‌ای روی منحنی  $y=x^2$  در ربع اول چنان حرکت می‌کند که مؤلفه  $x$  آن در نقطه  $P$  روی منحنی با آهنگ ۱۰ متر بر ثانیه افزایش می‌یابد. زاویه  $\theta$  وقتی  $x=3$ ، با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

حل:

- I. با توجه به شکل ۱-ب، وقتی ذره حرکت می‌کند، هم مؤلفه افقی آن ( $x$ ) و هم مؤلفه قائم آن ( $y$ ) و هم زاویه  $\theta$  تغییر می‌کنند و نه تنها این سه متغیر به هم مربوطاند، بلکه هر سه آن‌ها به زمان بستگی دارند و با گذشت زمان تغییر می‌کنند؛ لذا متغیرها عبارتند از:  $y, x, t$  و  $\theta$ .
  - II. طبق فرض، مؤلفه  $x$  با آهنگ  $10 \frac{m}{s}$  افزایش می‌یابد. از واحد آن مشخص است که آهنگ افزایش مؤلفه  $x$  نسبت به زمان  $10 \frac{m}{s}$  است، یعنی:  $x'(t) = 10$ .
- در لحظه خاص  $x = 3$  مفروضات:

III.  $\theta'(t) = ?$  مجهول

IV. چون  $x'(t)$  را داریم و  $\theta'(t)$  مجهول است، باید معادله‌ای بنویسیم که در آن  $\theta$  و  $x$  به کار رفته باشند.

ب.  $\tan \theta = x$  : ارتباط  $\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x} \Rightarrow \tan \theta = \frac{y}{x}$  : طبق شکل ۱ - ب

V.  $\theta$  و  $x$  توابعی بر حسب  $t$  هستند. حال از طرفین نسبت به  $t$  مشتق می‌گیریم.

$$(1 + \tan^2 \theta) \theta'(t) = 1 \times x'(t)$$

VI. در لحظه خاص  $\tan \theta = x = 3$ ، مفروضات را در تساوی بالا جاگذاری می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$(1 + 9) \theta'(t) = 1 \times 10 \Rightarrow \theta'(t) = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

یعنی پس از گذشت یک ثانیه، زاویه  $\theta$  یک رادیان افزایش می‌یابد.

**توجه:** وقتی می‌گویند آهنگ افزایش مؤلفه  $y$ ، ۶ متر در ثانیه است، به این معناست که پس از گذشت یک ثانیه مؤلفه  $y$ ، ۶ متر افزایش یافته است. گاهی به جای این عبارت می‌گویند  $y$  با سرعت ۶ متر در ثانیه افزایش یافته است، یعنی  $y'(t) = +6$ .

مثال ۲. اگر ذره‌ای روی مسیر  $\frac{xy^2}{1+y^2} = \frac{4}{5}$  حرکت کند و مؤلفه آن با سرعت ۶ متر در ثانیه افزایش یابد، هنگامی که ذره در نقطه (۱،۲) قرار دارد:

الف) مؤلفه  $x$  با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

ب) ذره به محور  $x$  ها نزدیک می‌شود یا دور؟

متغیرها:  $\begin{cases} t: & \text{زمان} \\ x: & \text{مؤلفه افقی ذره} \\ y: & \text{مؤلفه قائم ذره} \end{cases}$  ; مفروضات:  $\begin{cases} y'(t) = +6 \text{ m/s} \\ x = 1, y = 2 \end{cases}$  در لحظه خاص ;  $x'(t) = ?$  : مجهول

روش اول (الف)

مشتق از طرفین نسبت به  $t$ :  $f = \frac{xy^2}{1+y^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{xy^2}{1+y^2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{4}{5} \right) = 0$  : ارتباط

جاگذاری  $\Rightarrow 8(2)(6) - 5[x'(t)(2)^2 + 2(2)(6)] = 0 \Rightarrow x'(t) = \frac{-24}{20} = \frac{-6}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

ب) چون  $x'(t) < 0$ ، یعنی  $x$  بر حسب  $t$  تابع نزولی است و با افزایش  $t$ ،  $x$  کم می‌شود. پس ذره به محور  $x$  ها نزدیک می‌شود.

### سخنی با دانش آموزان کم‌دقت

۱. طرف اول مشتق را همیشه  $y'$  می‌نویسند، در حالی که اگر طرف اول تابع  $y$  باشد، در هنگام مشتق‌گیری طرف اول را  $y'$  می‌نویسیم.

۲. مشتق  $xy^2$  را به صورت  $x'(t) \times 2yy'(t)$  می‌نویسند، در حالی که باید از قضیه مشتق حاصل ضرب دو تابع استفاده کرد.

۳. از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنند، در حالی که با این روش  $y'(x)$  به دست می‌آید مگر:

روش دوم: برای (الف) طبق مشتق‌گیری ضمنی داریم  $-5 = \frac{20}{16-20} = \frac{\Delta y^2}{\Delta y - 10xy} = \frac{\Delta y^2}{f' y} = \frac{f x'}{f' y}$  و طبق مشتق تابع مرکب

نیز داریم:

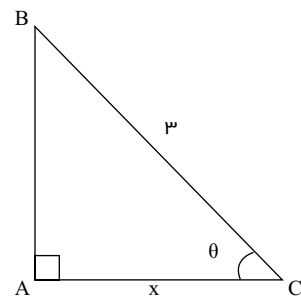
$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Rightarrow -5 = \frac{6}{x'(t)} \Rightarrow x'(t) = \frac{-6}{5}$$

مثال ۳: در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،  $\angle A = 90^\circ$  و اندازه وتر ۳ متر است. اگر آهنگ تغییر یک زاویه حاده  $0.2$  متر در ثانیه باشد، آهنگ

تغییر ضلع مقابل آن زاویه را، وقتی اندازه زاویه  $\frac{\pi}{3}$  است، بیابید.

حل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{عدد ثابت} = BC = 3 = \text{وتر} \\ \theta'(t) = 0.2 \text{ m/s} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \text{ در لحظه خاص} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \text{زمان: } t \\ \text{متغیرها: } \theta : \text{زاویه حاده} \\ \text{ضلع مقابل به زاویه } \theta : x \end{array} \right.$$

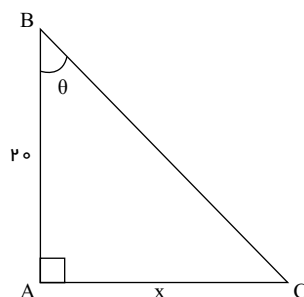


(شکل ۲)

$$\text{مشتق نسبت به } t \Rightarrow \sin \theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \cos \theta \times \theta'(t) = \frac{1}{3} x'(t) \quad ; \quad x'(t) = ? \text{ مجهول}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} \frac{2}{10} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} x'(t) \Rightarrow x'(t) = \frac{3}{10}$$

**مثال ۴:** در مثلث قائم الزاویه که یک ضلع زاویه قائمه ۲۰ واحد است، اگر آهنگ تغییر زاویه حاده  $\theta$  مقابل به ضلع دیگر زاویه قائمه ۰/۰۴ واحد در ثانیه باشد، در زمانی که وتر ۶۰ واحد باشد، آهنگ تغییر ضلع مقابل به زاویه  $\theta$  چه قدر است؟



(شکل ۳)

حل:

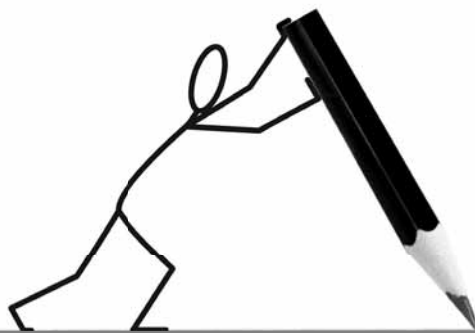
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{عدد ثابت} = AB = 20 = \text{ضلع دیگر زاویه قائمه} \\ \theta'(t) = 0.04 \\ BC = 60 = \text{وتر} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \text{زمان: } t \\ \text{متغیرها: } x : \text{یک ضلع زاویه قائمه} \\ \theta : \text{زاویه مقابل به آن ضلع} \end{array} \right.$$

$$\text{مشتق نسبت به } t \Rightarrow \tan \theta = \frac{x}{20} \Rightarrow (1 + \tan^2 \theta) \theta'(t) = \frac{1}{20} x'(t) \quad ; \quad x'(t) = ? \text{ مجهول}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری و *}} 9 \times \frac{4}{100} = \frac{1}{20} x'(t) \Rightarrow x'(t) = 7/2$$

$$(*) \text{ در لحظه خاص داریم: } \cos \theta = \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}, 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

ادامه دارد ...



# مثلاثی های اتحاد

برای دانش آموزان سال  
سوم

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها:  
اتحادهای  
مثلاثی،  
برگشت پذیری.

**تعریف:** هر برابری بین یک یا چند نسبت مثلاثی که به ازای  
جميع مقادير متغير يا متغيرهای تعريف شده در آن همواره برقرار  
باشد، یک اتحاد مثلاثی نامیده می‌شود.

## روش اثبات اتحادهای مثلاثی

**روش اول:** یک طرف اتحاد مثلاثی را که شامل عبارت‌های  
بزرگ‌تر و مفصل‌تر است با استفاده از فرمول‌ها و روابط مثلاثی آن قدر  
ساده می‌کنیم تا برابر طرف دیگر اتحاد مسئله مورد نظر شود.

**مثال ۱:** درستی اتحاد  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 - \tan^4 \alpha = 2 \tan^2 \alpha$  را  
ثابت کنید.

**حل:** عبارت سمت چپ را ساده می‌کنیم تا به عبارت سمت  
راست برسیم:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)^2 - 1 - \tan^4 \alpha = (1 + \tan^2 \alpha)^2 - 1 - \tan^4 \alpha \\ \text{عبارت سمت چپ} &= 1 + \tan^4 \alpha + 2 \tan^2 \alpha - 1 - \tan^4 \alpha \\ &= 2 \tan^2 \alpha \end{aligned}$$

**روش دوم:** فرض می‌کنیم که تساوی اتحاد درست باشد. در این  
صورت دو طرف تساوی را به کمک فرمول‌ها و روابط مثلاثی آن قدر  
ساده می‌کنیم تا به دو عبارت برابر برسیم.

**مثال ۲:** درستی اتحاد  $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 - \sin 2\alpha}{2}$  را  
ثابت کنید.

**حل:** فرض می‌کنیم تساوی بالا درست باشد. برای حل  
ابتدا عبارت  $(\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha)$  را با استفاده از اتحاد  
 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$  بسط می‌دهیم.

پس:

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \\ \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)} \\ &= 1 - \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت راست} &= \frac{2 - \sin 2\alpha}{2} = \frac{2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} \\ &= \frac{2(1 - \sin \alpha \cos \alpha)}{2} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

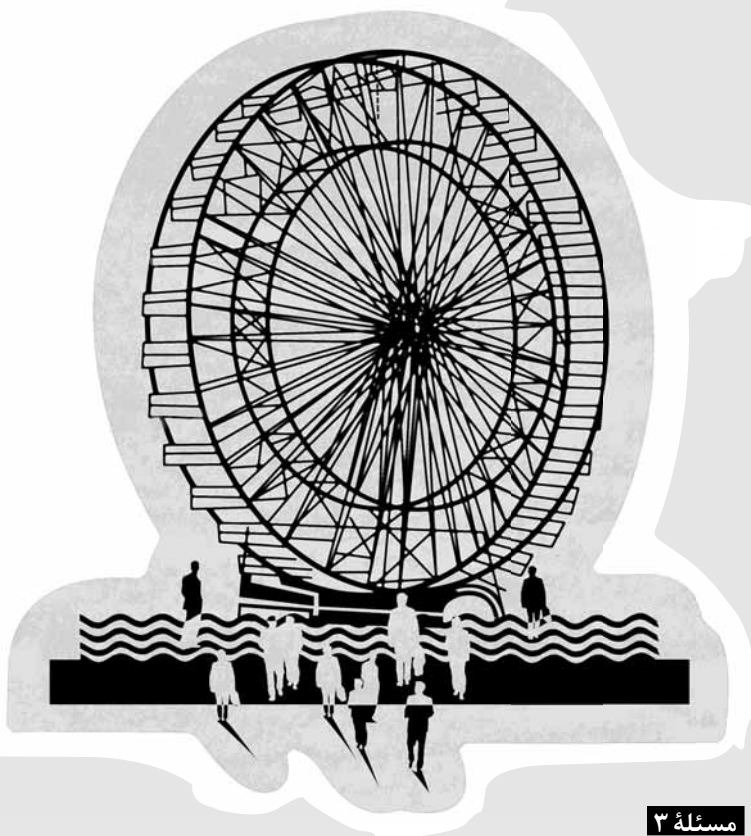
ملاحظه می‌کنیم که پس از ساده کردن عبارت‌های سمت راست  
و سمت چپ به عبارت‌های برابر رسیدیم.

**روش سوم:** با نوشتن روابط متناسب و با به کارگیری فرمول‌ها  
و روابط مثلاثی، صورت اصلی اتحاد را می‌سازیم (این روش در واقع  
برگشت پذیری روش دوم است).

**مثال ۳:** درستی اتحاد  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$  را ثابت کنید.

**حل:** به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2 \sin x = 2 \sin x$$



دو طرف را بر  $1 - \cos x \neq 0$  تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2 \sin x}{1 - \cos x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

حال، عبارت سمت چپ را در  $\frac{\sin x}{\sin x}$  ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\sin x} \times \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

$$\frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

حال کسر سمت چپ را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} + \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} \begin{cases} 1 - \cos x \neq 0 \\ \Rightarrow \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \cos x}{1 - \cos x}$$

**توجه:** این روش معمول نیست، ولی در اتحادهای مثلثاتی مسائلی داریم که راحت‌تر است، از این روش برای اثبات آن‌ها استفاده شود.

**حال به حل چند مسئله می‌پردازیم:**

#### مسئله ۱

درستی اتحاد  $(\cot \alpha - 1)^2 + (\cot \alpha + 1)^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$  را ثابت کنید.

**حل:** به روش اول مسئله را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= (\cot \alpha - 1)^2 + (\cot \alpha + 1)^2 \\ &= \cot^2 \alpha - 2 \cot \alpha + 1 + \cot^2 \alpha + 2 \cot \alpha + 1 \\ &= 2 \cot^2 \alpha + 2 = 2(1 + \cot^2 \alpha) = 2\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

#### مسئله ۲

درستی اتحاد  $\frac{\sin \theta}{\frac{1}{\sin \theta} - 1} + \frac{\sin \theta}{\frac{1}{\sin \theta} + 1} = 2 \tan^2 \theta$  را ثابت کنید.

**حل:**

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\sin \theta}{\frac{1 - \sin \theta}{\sin \theta}} + \frac{\sin \theta}{\frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta}} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta(1 + \sin \theta) + \sin^2 \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \sin^3 \theta + \sin^2 \theta - \sin^3 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \tan^2 \theta \end{aligned}$$

#### مسئله ۳

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

**حل:**

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha \\ &= 1 + \sin^2 \alpha(1 + \tan^2 \alpha) = 1 + \sin^2 \alpha\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) \\ &= 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

#### مسئله ۴

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos \alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ + \alpha) = 0$$

**حل:**

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha + \cos(120^\circ - 60^\circ + \alpha) + \cos(120^\circ + 60^\circ + \alpha) \\ &= \cos \alpha + \cos(\pi + \alpha - 60^\circ) + \cos(\pi + \alpha + 60^\circ) \\ &= \cos \alpha - \cos(\alpha - 60^\circ) - \cos(\alpha + 60^\circ) \\ &= \cos \alpha - \cos \alpha \cos 60^\circ - \sin \alpha \sin 60^\circ \\ &\quad - \cos \alpha \cos 60^\circ + \sin \alpha \sin 60^\circ \\ &= \cos \alpha - 2 \cos \alpha \cos 60^\circ = \cos \alpha - 2\left(\frac{1}{2}\right) \cos \alpha \\ &= \cos \alpha - \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

### مسئله ۵

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin(2\pi - \alpha) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(2\pi + \alpha) \tan(\pi + \alpha)} = 1$$

حل:

$$\begin{aligned}\sin(2\pi - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cot \alpha \\ \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha, \quad \cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{-\sin \alpha (-\cot \alpha) \cdot \tan \alpha}{\cos \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{\sin \alpha (\tan \alpha \cdot \cot \alpha)}{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = 1\end{aligned}$$

### مسئله ۶

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{(a^x - b^x) \cot(\pi - \alpha)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} + \frac{(a^x + b^x) \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cot(\pi - \alpha)} = -2a^x$$

حل:

$$\begin{aligned}\cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{(a^x - b^x)(-\cot \alpha)}{\cot \alpha} + \frac{(a^x + b^x) \cot \alpha}{-\cot \alpha} \\ &= \frac{-(a^x - b^x) \cot \alpha - (a^x + b^x) \cot \alpha}{\cot \alpha} \\ &= \frac{-(a^x - b^x + a^x + b^x) \cot \alpha}{\cot \alpha} \\ &= \frac{-2a^x \cdot \cot \alpha}{\cot \alpha} = -2a^x\end{aligned}$$

### مسئله ۷

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 31^\circ + \cos 34^\circ \cdot \cos 50^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل:

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ &= \sin(18^\circ + 2^\circ) = \sin(\pi + 2^\circ) = -\sin 2^\circ \\ \sin 31^\circ &= \sin(36^\circ - 5^\circ) = \sin(2\pi - 5^\circ) = -\sin 5^\circ \\ \cos 34^\circ &= \cos(36^\circ - 2^\circ) = \cos(2\pi - 2^\circ) = \cos 2^\circ \\ \text{عبارت سمت چپ} &= (-\sin 2^\circ)(-\sin 5^\circ) + (\cos 2^\circ)(\cos 5^\circ) \\ &= \cos 5^\circ \cdot \cos 2^\circ + \sin 5^\circ \cdot \sin 2^\circ = \cos(5^\circ - 2^\circ) \\ &= \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

### مسئله ۸

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\begin{aligned}\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan(\alpha + \beta)} + \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan(\alpha - \beta)} &= 2 \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}}{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}} + \frac{\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}}{\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}} \\ &= 1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta + 1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta = 2\end{aligned}$$

### مسئله ۹

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\begin{aligned}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} &= \sin 2\alpha \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \alpha} - \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \alpha}}{\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \alpha} + \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \alpha}}, \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\ &= \frac{\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} - \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}}{\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}} \\ &= \frac{1 + \tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha - 1 - \tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha}{(1 - \tan \alpha)(1 + \tan \alpha)} \\ &= \frac{4 \tan \alpha}{2(1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha\end{aligned}$$

### مسئله ۱۰

درستی اتحاد  $1 - \frac{1}{4} \sin^2 \beta - \cos^4 \beta = \sin^2 \beta$  را ثابت کنید  
حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= 1 - \frac{1}{4} (\sin^2 \beta)^2 - \cos^4 \beta \\ &= 1 - \frac{1}{4} (\sin \beta \cos \beta)^2 - \cos^4 \beta \\ &= 1 - \frac{1}{4} (\sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta) - \cos^4 \beta \\ &= 1 - \sin^2 \beta \cos^2 \beta - \cos^4 \beta \\ &= 1 - \cos^2 \beta (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \\ &= 1 - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta \end{aligned}$$

### مسئله ۱۱

الف) نشان دهید که  $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$  (ب) درستی اتحاد  $\cot a - \tan a - 2 \tan 2a - 4 \tan 4a = 8 \cot 8a$  را ثابت کنید

حل:

الف:

$$\begin{aligned} \cot x - \tan x &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \\ \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} &= \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} = 2 \cot 2x \end{aligned}$$

(ب): با استفاده از قسمت الف عبارت سمت چپ برابر است با:

$$\begin{aligned} \cot a - \tan a - 2 \tan 2a - 4 \tan 4a \\ &= 2 \cot 2a - 2 \tan 2a - 4 \tan 4a \\ &= 2(\cot 2a - \tan 2a) - 4 \tan 4a \\ &= 2(2 \cot 4a) - 4 \tan 4a = 4(\cot 4a - \tan 4a) = 4(2 \cot 8a) \\ &= 8 \cot 8a \end{aligned}$$

### مسئله ۱۲

با فرض  $0 < a < \pi$ ، ثابت کنید

$$\frac{1 + \sin a + \cos a}{1 + \sin a - \cos a} = \cot \frac{a}{2}$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{(1 + \cos a) + \sin a}{(1 - \cos a) + \sin a} = \frac{(\frac{1}{2} \cos \frac{a}{2}) + \sin \frac{a}{2}}{(\frac{1}{2} \sin \frac{a}{2}) + \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{a}{2} (\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2})}{\frac{1}{2} \sin \frac{a}{2} (\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2})} = \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \cot \frac{a}{2} \end{aligned}$$

### مسئله ۱۳

ثابت کنید  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$

حل:

داریم:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2 \\ \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= (1)^2 - 2(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 = 1 - 2(\frac{1}{2} \sin 2\alpha)^2 \end{aligned}$$

پس:

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= 1 - 2(\frac{1}{4} \sin^2 2\alpha) \\ \Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \end{aligned}$$

### مسئله ۱۴

ثابت کنید  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$

حل:

داریم:

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 &= (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2 b^2) \\ a^6 + b^6 &= (a^2 + b^2)^3 - 3a^2 b^2(a^2 + b^2) \\ \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \\ &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= (1)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 \\ &= 1 - 3(\frac{1}{2} \sin 2\alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \end{aligned}$$

پس:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

# آشنایی با بسته نرم افزاری متمتیکا

دکتر محمدعلی فریبرزری عراقی

عضو هیات علمی گروه ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

## مقدمه

مبحث حسابان از جمله مباحث پایه‌ای و اساسی در ریاضیات دوره دبیرستان است. در کتاب حسابان سال سوم دبیرستان و کتاب‌های ریاضی دوره پیش دانشگاهی، مباحث حد، مشتق، انتگرال و کاربردهای آنها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. بسته نرم افزاری متمتیکا قابلیت بالایی در محاسبه ساده حد، مشتق، انتگرال معین و نامعین توابع دارد. در این قسمت دستورالعمل‌های مربوط به محاسبه حد توابع معرفی می‌شود.

## کلیدواژه‌ها:

متمتیکا،  
حد چپ و راست،  
مجانِب قائم،  
مجانِب افقی،  
مجانِب مایل،  
عدد نپر،  
صورت‌های مبهم.

## معرفی دستورالعمل Limit

این دستور با قالب کلی زیر مقدار حد عبارت داخل کروشه را وقتی  $x$  به  $x_0$  میل کند مشخص خواهد کرد. در این حالت  $x_0$  می‌تواند یک عدد یا بی‌نهایت باشد.

Limit [عبارت,  $x \rightarrow x_0$ ]

به عبارت دیگر، دستور فوق حاصل  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  را در صورت وجود، زمانی که عبارت مفروض ضابطه تابع  $f$  باشد، مشخص می‌کند. در این دستور حرف  $L$  در ابتدای Limit باید بزرگ تایپ شود. همچنین برای وارد کردن علامت  $\rightarrow$  از پنجره Basic Math Input استفاده می‌کنیم و در این پنجره روی علامت  $\rightarrow$  کلیک می‌کنیم. برای اجرای این دستور به‌طور هم‌زمان دکمه‌های Shift + Enter را فشار می‌دهیم.

**مثال ۱:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8}$  را به دست آورید.  
**حل:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^5 - 32)}{(x^3 - 8)}, x \rightarrow 2$$

همچنین با به‌کارگیری پنجره Basic Math Input و با کلیک روی نمادهای کسر و توان می‌توان عبارت فوق را وارد و حاصل حد را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8}$$

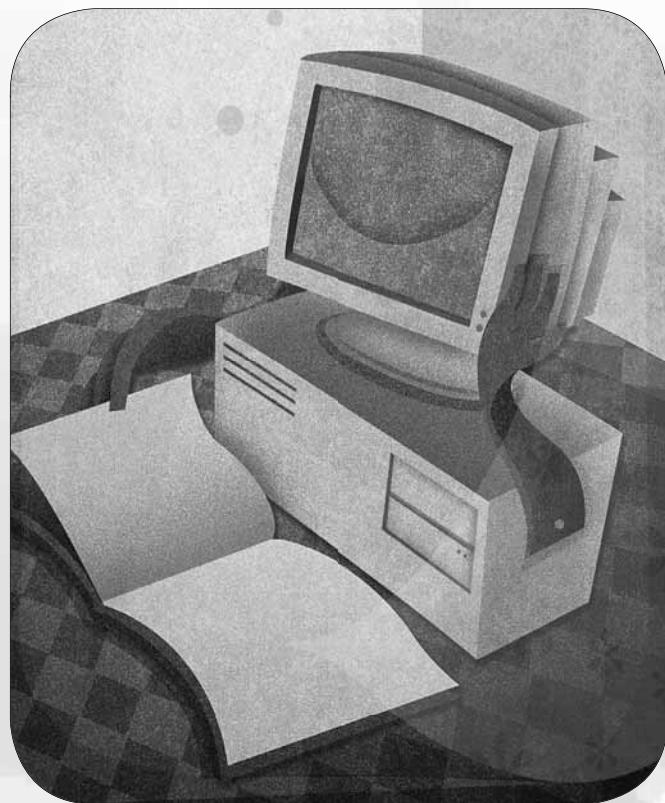
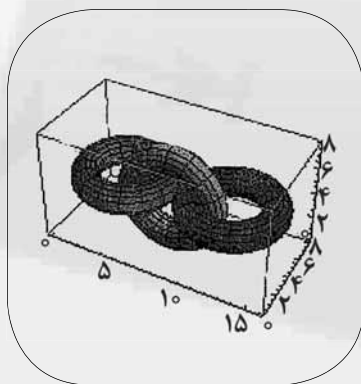
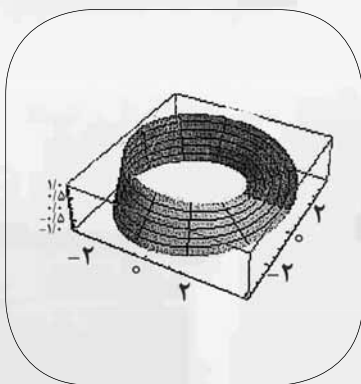
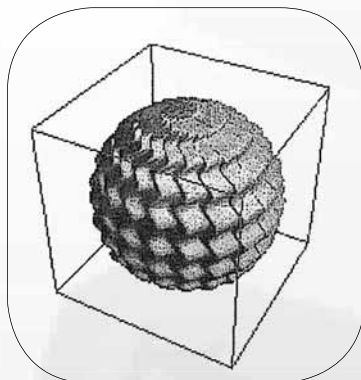
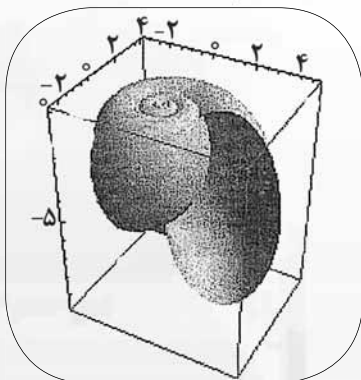
توجه داشته باشیم که در این مثال حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  می‌آید که با استفاده از دستور Limit حاصل حد پس از رفع ابهام مشخص خواهد شد.

**نکته ۱:** می‌دانیم یک تابع در یک نقطه دارای حد است، هرگاه مقادیر حد چپ و حد راست تابع در آن نقطه موجود و برابر باشند. در متمتیکا برای محاسبه حد چپ، عبارت  $\rightarrow 1$  Direction و برای محاسبه حد راست، عبارت  $\rightarrow -1$  Direction در دستورالعمل Limit اضافه می‌شود:

Limit [عبارت,  $x \rightarrow x_0$ , Direction  $\rightarrow 1$ ]

Limit [عبارت,  $x \rightarrow x_0$ , Direction  $\rightarrow -1$ ]

دستور اول حاصل  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  و دستور دوم حاصل  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  را وقتی  $f(x)$  همان عبارت مفروض باشد، مشخص



**مثال ۲:** ضابطه تابع علامت به صورت  $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  را در نظر می‌گیریم.

آیا این تابع در  $x = 0$  دارای حد است؟

**حل:** در دستورهایی زیر، حدود چپ و راست این تابع در  $x = 0$  محاسبه شده‌اند:

$$\text{Limit}[\text{Sign}[x], x \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow 1]$$

۱

$$\text{Limit}[\text{Sign}[x], x \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow -1]$$

۱

بنابراین، تابع فوق در  $x = 0$  دارای حد نیست.

**مثال ۳:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 3}{x - 3}$  را به دست آورید.

**حل:** در ممتیکا به منظور محاسبه قسمت صحیح یک عدد حقیقی مثبت از دستور IntegerPart استفاده می‌شود.

برای مثال  $\text{IntegerPart}[3/1] = 3$  و  $\text{IntegerPart}[2/9] = 2$

می‌کند. گفتنی است در ممتیکا مبنای محاسبه حد راست است و نوشتن عبارت  $\text{Direction} \rightarrow 1$  در محاسبه حد راست لزومی ندارد. بنابراین، دستور،  $[x \rightarrow x]$ ، عبارت Limit مقدار حد راست عبارت مفروض را وقتی  $x$  به  $x$  میل می‌کند مشخص خواهد کرد. در این حالت، اگر عبارت در  $x = x$  دارای حد باشد، مقدار حاصل از اجرای این دستور همان حد عبارت مفروض در  $x = x$  خواهد بود.

**مثال ۲:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x}$  را به دست آورید.

**حل:**

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Abs}[x]}{x}, x \rightarrow 0\right]$$

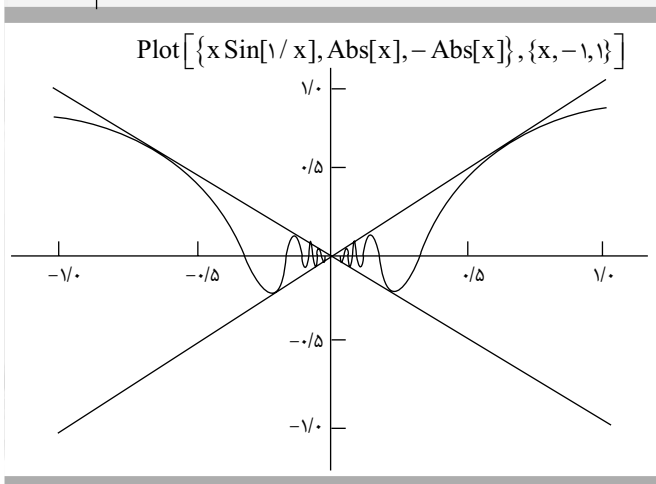
۱

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Abs}[x]}{x}, x \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow 1\right]$$

۱

ملاحظه می‌شود که در دستور اول حاصل حد راست برابر با ۱ و در دستور دوم حاصل حد چپ برابر با -۱ به دست آمده است. بنابراین، تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{[x]}{x}$  در  $x = 0$  حد ندارد.

برای ملاحظه رفتار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  در حومه  $x=0$  با استفاده از دستور Plot به طور همزمان تابع فوق و توابع با ضابطه‌های  $|x|$  و  $-|x|$  در زیر رسم شده‌اند:



**نکته ۴:** به منظور محاسبه خط مجانب افقی یک تابع باید رفتار تابع را وقتی  $x \rightarrow +\infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  مورد بررسی قرار داد. برای مثال تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$  را در نظر می‌گیریم. برای وارد کردن نماد  $\infty$  می‌توان واژه Infinity را پس از علامت  $\rightarrow$  تایپ یا در پنجره Basic Math Input روی علامت  $\infty$  کلیک کرد. حد تابع  $f$  وقتی  $x$  به  $\infty$  و  $-\infty$  میل می‌کند به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{Limit}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, x \rightarrow \text{Infinity}\right]$$

۱

$$\text{Limit}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, x \rightarrow -\text{Infinity}\right]$$

-۱

به این ترتیب، خطوط  $y=1$  و  $y=-1$  مجانب‌های افقی این تابع به حساب می‌آیند.

**نکته ۵:** برای محاسبه حد یک تابع، می‌توان ضابطه تابع مفروض را جداگانه تعریف کرد و سپس حد تابع را بدون نیاز به تایپ ضابطه در داخل کروشه با استفاده از دستور Limit یافت. به این منظور، ضابطه تابع مفروض  $f$  را وارد و در انتهای ضابطه

با استفاده از این دستور حاصل حد چپ و حد راست عبارت  $\frac{[x]-3}{x-3}$  به صورت زیر به دست می‌آید. توجه شود که حروف I و P باید در این دستور بزرگ تایپ شوند.

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{IntegerPart}[x]-3}{x-3}, x \rightarrow 3, \text{Direction} \rightarrow 1\right]$$

.

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{IntegerPart}[x]-3}{x-3}, x \rightarrow 3, \text{Direction} \rightarrow 1\right]$$

$\infty$

در این حالت، حاصل حد راست صفر شده، در حالی که حاصل حد چپ  $+\infty$  به دست آمده است. (در متمتیکا  $+\infty$  به صورت  $\infty$  اعلام می‌شود). بنابراین، تابع فوق در  $x=3$  دارای حد نیست.

**نکته ۲:** اگر  $x=a$  خط مجانب قائم تابع  $f$  باشد، می‌توان با محاسبه حد چپ و حد راست  $f$  در  $x=a$  به این امر پی برد. در این حالت، حاصل این حدود  $+\infty$  یا  $-\infty$  خواهد بود. برای مثال، می‌دانیم  $x=-1$  مجانب قائم تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  است. حال اگر حدود چپ و راست این تابع در  $x=-1$  محاسبه شود، خواهیم داشت:

$$\text{Limit}\left[\frac{1}{x+1}, x \rightarrow -1, \text{Direction} \rightarrow 1\right]$$

$-\infty$

$$\text{Limit}\left[\frac{1}{x+1}, x \rightarrow -1\right]$$

$\infty$

**نکته ۳:** در صورتی که  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  قابل محاسبه نباشد و به عبارت دیگر این حد وجود نداشته باشد، با پیغام خاص این امر در صفحه نمایان می‌شود. برای مثال، می‌دانیم  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  وجود ندارد. رفتار این تابع در هسایگی صفر به شکل نوسانی بین -۱ و ۱ مشاهده می‌شود. در این حالت، حاصل حد قابل محاسبه نیست و متمتیکا پیغامی به صورت زیر را آشکار می‌کند:

$$\text{Limit}\left[\sin\left[\frac{1}{x}\right], x \rightarrow 0\right]$$

$$\text{Interval}\left[\{-1, 1\}\right]$$

ویژگی کران‌دار بودن تابع فوق کمک می‌کند تا حاصل حد

عبارتی چون  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  در  $x=0$  موجود باشد و برابر با صفر شود. این حقیقت را با اجرای دستور زیر می‌توان دید:

$$\text{Limit}\left[x \times \sin\left[\frac{1}{x}\right], x \rightarrow 0\right]$$

.

**نکته ۶:** در مثال اول نمونه‌ای از محاسبه حد در حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  را ملاحظه کردیم. در متمتیکا تمام حالات مبهم  $\frac{0}{0}$ ،  $\frac{\infty}{\infty}$  و  $\infty - \infty$  قابل بررسی هستند و حاصل حد تابع در هر حالت به دست می‌آید. به مثال زیر توجه کنید.

**مثال ۵:** حاصل هر یک از حدود زیر را به دست آورید:

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$

ج)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x - \frac{\pi}{4}) \tan 2x$

**حل:**

الف) این مثال نمونه‌ای از حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  است که حاصل آن عبارت است از:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin[x]}{\sqrt{1 + \tan[x]} - \sqrt{1 - \tan[x]}}, x \rightarrow 0 \right]$$

۱

ب) این مثال نمونه‌ای از حالت مبهم  $\infty - \infty$  است که به طور جداگانه حاصل حد را وقتی  $x \rightarrow +\infty$  و  $x \rightarrow -\infty$  به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$$

-۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$$

۲

ج) این مثال نمونه‌ای از حالت مبهم  $0 \times \infty$  است که حاصل آن عبارت است از:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[ \tan[2x] \times (x - \frac{\pi}{4}), x \rightarrow \frac{\pi}{4} \right]$$

$-\frac{1}{2}$

**مثال ۶:** با استفاده از دستورالعمل  $\lim$  می‌توان حاصل صورت‌های مبهم نمایی نظیر  $\frac{0}{0}$ ،  $\frac{\infty}{\infty}$  و  $\infty^0$  را نیز به دست آورد. می‌دانیم  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ؛ این حقیقت را می‌توان با محاسبه حد این تابع به صورت زیر در متمتیکا مشاهده کرد. با اجرای دستور  $\lim$  حاصل حد به صورت  $e$  (عدد نپر) در سلول خروجی درج می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x, x \rightarrow \infty$$

e

علامت  $\frac{0}{0}$  را درج می‌کنیم. سپس در خط بعدی دستور  $\lim$  را تایپ می‌کنیم. در این حالت، داخل کروشه فقط  $f[x]$  تایپ می‌شود. فرض کنید که می‌خواهیم مجانب‌های افقی و قائم تابع هموگرافیک  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$  را به دست آوریم. در این حالت، باید حاصل حد تابع  $f$  را وقتی  $x \rightarrow \infty$  بررسی کنیم هم‌چنین رفتار تابع  $f$  را در همسایگی ریشه مخرج یعنی  $x = \frac{4}{3}$  بررسی می‌کنیم. نتایج در زیر مشخص شده‌اند.

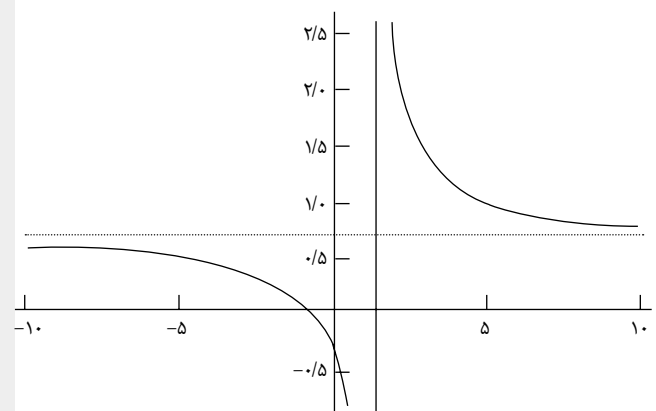
$$f[x] = \frac{2x+1}{3x-4};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f[x], x \rightarrow \infty]$$

$\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} [f[x], x \rightarrow \frac{4}{3}]$$

$$\text{Plot} \left[ \left\{ f[x], x = \frac{4}{3} \right\}, \{x, -10, 10\} \right]$$



به‌منظور اجرای دستورالعمل‌های فوق ابتدا باید سلول حاوی

ضابطه تابع  $f$  با فشار هم‌زمان دکمه‌های Shift+Enter اجرا

شوند. سپس دستورهای بعدی مربوط به محاسبه  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  و

$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} f(x)$  اجرا شوند. دستور Plot نیز برای مشاهده منحنی

تابع  $f$  و خطوط مجانب‌های آن در یک شکل اجرا شده است. در

این مثال، خط  $x = \frac{4}{3}$  مجانب قائم و خط  $y = \frac{2}{3}$  مجانب افقی

تابع  $f$  به حساب می‌آیند.

**نکته ۸:** حالت سنتی نمایش حد تابع  $f$  وقتی  $x \rightarrow x_0$  را می توان با اجرای دستور زیر مشاهده کرد:

Limit[f[x], x → x<sub>0</sub>] // Traditional Form

Limit f[x]  
x → x<sub>0</sub>

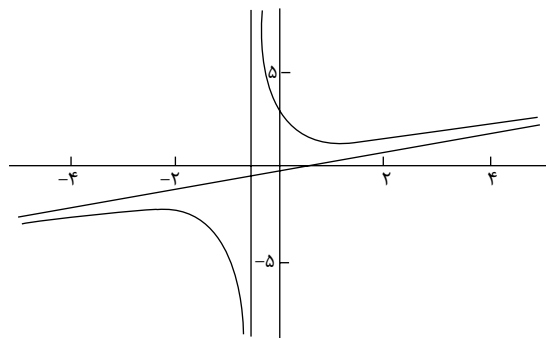
با اجرای این دستور در سلول خروجی عبارت  $\text{Limit}[f[x], x \rightarrow x_0]$  مشخص می شود که همان صورت رایج نمایش حد تابع  $f$  وقتی  $x \rightarrow x_0$  است. در این حالت هر ضابطه ای جای  $f(x)$  قرار گیرد و هر مقداری به  $x_0$  نظیر شود، در نمایش رایج مذکور جایگزین می شود.

**نکته ۹:** با استفاده از دستور Limit می توان مجانب های مایل یک تابع مفروض را در صورت وجود یافت. می دانیم اگر خط  $y = ax + b$  مجانب مایل تابع  $f$  باشد، ضرایب  $a$  و  $b$  به صورت زیر به دست

$$\text{می آیند: } a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ و } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

برای مثال، مجانب مایل تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x + 1}$  را به صورت زیر به دست می آوریم. در این حالت، حاصل حدود به  $a$  و  $b$  تخصیص داده شده و در دستور Plot با معلوم بودن  $a$  و  $b$  به طور همزمان نمودار تابع  $f$  و خط مجانب مایل آن در بازه  $[-5, 5]$  رسم شده است. توجه شود که این تابع مجانب قائم  $x = -\frac{1}{2}$  را نیز دارد.

```
f[x_] := (x^2 + 3) / (2x + 1)
a = Limit[f[x] / x, x → Infinity]
1/2
b = Limit[f[x] - ax, x → Infinity]
-1/4
Plot[{f[x], ax + b}, {x, -5, 5}]
```



در زیر مثال هایی از حالات مبهم نمایشی مطرح و اجرا شده اند:

**مثال ۷:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x^x}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\cot x}$  را بیابید.

حل:

(حالت مبهم  $\frac{\infty}{\infty}$ )

Limit[n!^(1/n) / n, n → Infinity]

1/e

(حالت مبهم  $\frac{0}{0}$ )

Limit[x^x, x → 0]

1

(حالت مبهم  $\frac{0}{0}$ )

Limit[x^x^x, x → 0]

0

(حالت مبهم  $\frac{\infty}{\infty}$ )

Limit[(Tan[x])^(Cos[x]), x → π/2]

1

(حالت مبهم  $\frac{1}{\infty}$ )

Limit[(2 - x)^(Tan[πx/2]), x → 1]

e^(2/π)

(حالت مبهم  $\frac{1}{\infty}$ )

Limit[(1 + Sin[x])^(Cot[2x]), x → 0]

√e

توجه می کنیم که در محاسبه حد راست نیازی به تایپ عبارت Direction → نیست و در متمتیکابه صورت حد راست محاسبه می شود.

**مثال ۸:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$  را بیابید.

حل:

Limit[(Exp)[x] + x]^(1/x), x → ∞]

e

Limit[(Exp)[x] + x]^(1/x), x → -∞]

1

#### منابع.....

۱. کتاب حسابان سال سوم آموزش متوسطه ۱۳۸۹
۲. کتاب حسابان دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی، ۱۳۸۹
3. Mathematica, Eugene Don, Schaum's outlines series, Mc Graw Hill, 2009.

**مثال ۱۱:** حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$  را بیابید.

**حل:**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}, h \rightarrow 0 \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}$$

ملاحظه می کنیم که حاصل حد یک عبارت در حالت پارامتری هم در متمتیکا قابل محاسبه است. در این مثال  $h$  متغیر و  $a$  یک ثابت مفروض (با فرض  $a > 0$ ) در نظر گرفته می شود. در این حالت، حاصل حد یعنی  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  همان مشتق تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$  در  $x = a$  است. در قسمت بعد دستورالعمل های مربوط به محاسبه مشتق در متمتیکا معرفی خواهند شد.

**مثال ۹:** مقدار  $a$  را طوری بیابید که تابع  $f$  با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$
 پیوسته باشد.

**حل:** در این حالت باید حاصل حد تابع  $f$  وقتی  $x \rightarrow 0$  وجود

داشته باشد و برابر با  $f(a)$  شود. لذا  $a = \frac{1}{3}(1 + \ln 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^2 + x - 1}{x}, x \rightarrow 0 \right]$$

$$\frac{1}{3}(1 + \log[2])$$

**مثال ۱۰:** حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x (e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}})$  را بیابید.

**حل:**

$$\lim_{x \rightarrow \text{Infinity}} [\text{Exp}[x](\text{Exp}[1/x] - \text{Exp}[-x]) - \text{Exp}[1/x], x \rightarrow \text{Infinity}]$$

-۱

## اسم وبگاه: Cool Math

صفحه اصلی این وبگاه دربرگیرنده عنوان های متعدد زیر است که هر یک از این عناوین شامل پیوندها و زیرعنوان های گوناگونی می باشد.



- کتاب ها (Books)
- جبر مقدماتی (Pre-algebra)
- ریاضی برای کودکان (Math for Kids)
- جبر (Algebra)
- بازی های ریاضی (Math Games)
- حسابان مقدماتی / حسابان (Pre-calculus / Calculus)
- معلمان (Teachers)
- معماها (Puzzles)
- والدین (Parents)
- هنر هندسی (Geometry Art)
- درس های ریاضی (Math Lessons)
- تمرین ریاضی (Math Practice)
- لغت نامه ریاضی (Math Dictionary)
- منابع هندسه / مثلثات (Geometry / Trigonometry References)

احسان یارمحمدی



## برای دانش آموزان سال دوم

سید محمدرضا هاشمی موسوی

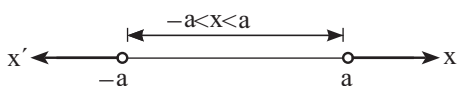
تعیین علامت  
عبارت‌های  
جبری  
و حل نامعادله‌ها  
و دستگاه توأم

## کلیدواژه‌ها:

تعیین علامت،  
عبارت‌های جبری،  
نامعادله‌ها، دستگاه  
توأم، علامت  
دوجمله‌ای، نمایش  
هندسی، علامت  
سه‌جمله‌ای.

مثال:

$$۷) x^2 < a^2, a > 0 \Rightarrow -a < x < a$$



$$۸) x^2 > a^2, a > 0 \Rightarrow x > a \text{ یا } x < -a$$



$$۹) ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \text{ و } b > 0) \text{ یا } (a < 0 \text{ و } b < 0)$$

$$۱۰) ab < 0 \Rightarrow (a > 0 \text{ و } b < 0) \text{ یا } (a < 0 \text{ و } b > 0)$$

$$۱۱) a < b, \begin{cases} a > 0, b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ a < 0, b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$۱۲) ab < 0, a < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

## تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول

دوجمله‌ای درجه اول را به حالت عمومی  $(ax+b)$  نمایش

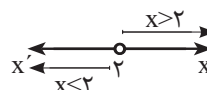
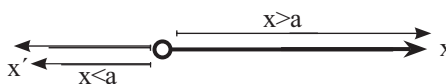
می‌دهیم. منظور از علامت دوجمله‌ای، تعیین مقادیری از  $x$  است که به ازای این مقادیر مقدار دوجمله‌ای مثبت یا منفی یا صفر باشد.

تعریف.....

هر رابطه با نماد «>» یا «<» در مجموعه عددهای حقیقی را یک نامساوی می‌نامیم. مانند:  $a > b$  یا  $b < a$ .

## نامساوی‌ها و محور اعداد

هر یک از نامساوی‌ها  $x > a$  یا  $x < a$  را روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



## قوانین و خواص نامساوی‌ها.....

اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  اعداد حقیقی دلخواه باشند؛ داریم:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

داریم:

$$۱) a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

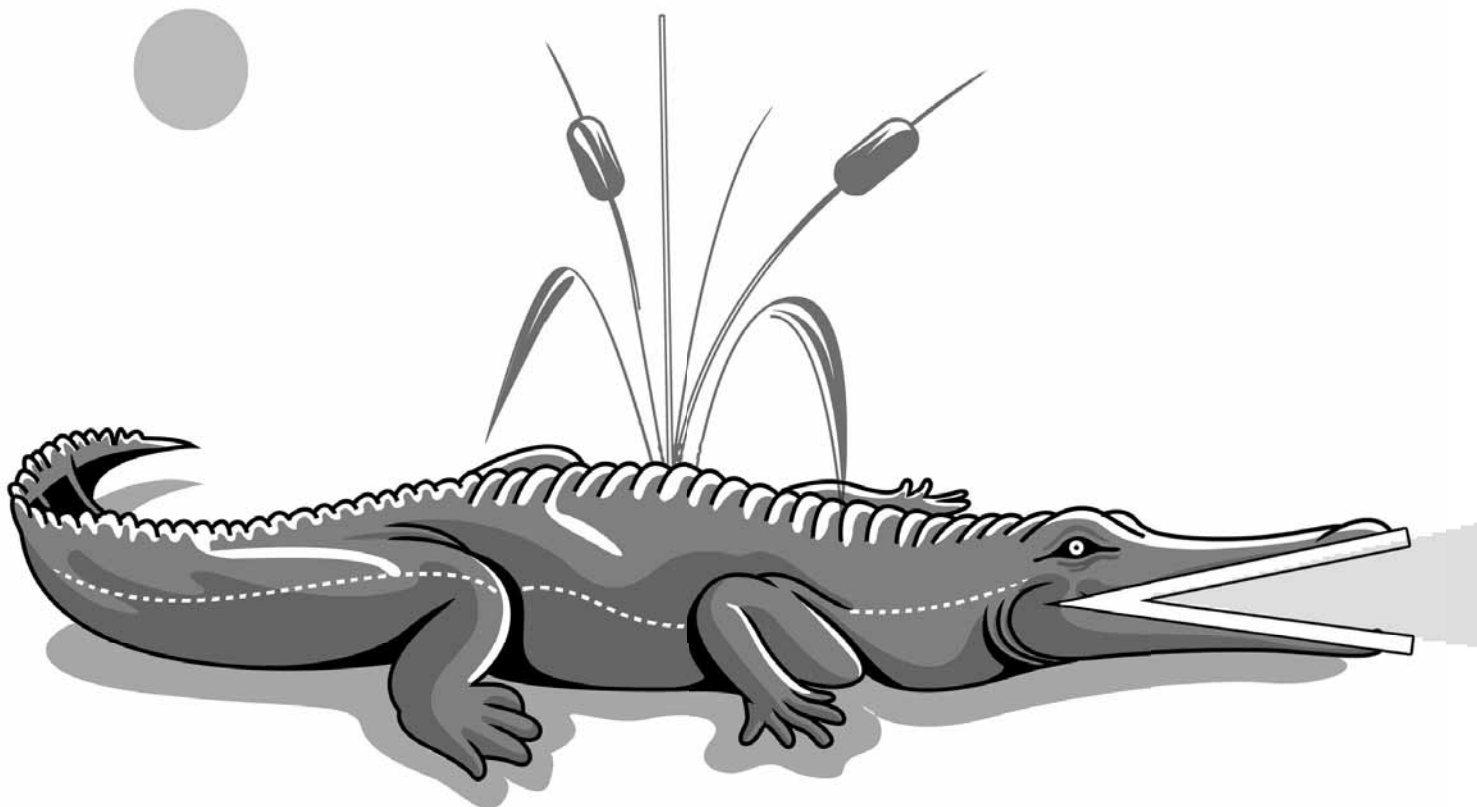
$$۲) a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$$

$$۳) a < b, \begin{cases} c > 0 \Rightarrow ac < bc \text{ یا } \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \\ c < 0 \Rightarrow ac > bc \text{ یا } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$۴) a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

$$۵) 0 < a < b, 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$$

$$۶) |a| < |b| \Rightarrow a^2 < b^2$$



به طور کلی اگر دوجمله‌ای  $(ax+b)$  را به صورت زیر بنویسیم:

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a\left[x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right]$$

ملاحظه می‌شود که برای  $x > -\frac{b}{a}$  مقدار داخل کروشه مثبت و در این صورت، علامت دوجمله‌ای با علامت  $a$  یکی خواهد بود و به اصطلاح می‌گوییم علامت دوجمله‌ای موافق علامت  $a$  است. برای  $x < -\frac{b}{a}$  مقدار داخل کروشه منفی است و در این صورت، علامت دوجمله‌ای مخالف با علامت  $a$  است. بنابراین به طور خلاصه داریم:

| مقادیر $x$   | کوچک‌تر از $-\frac{b}{a}$ | $-\frac{b}{a}$ | بزرگ‌تر از $-\frac{b}{a}$ |
|--------------|---------------------------|----------------|---------------------------|
| علامت $ax+b$ | (مخالف علامت $a$ )        | $\circ$        | (موافق علامت $a$ )        |

**مثال ۱:** عبارت  $3x+6$  را تعیین علامت کنید.

**حل:** ابتدا ریشه عبارت را به دست می‌آوریم:

$$3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

| $x$    | $-\infty$ | $-2$    | $+\infty$ |
|--------|-----------|---------|-----------|
| $3x+6$ | $-\infty$ | $\circ$ | $+\infty$ |

**مثال ۲:** عبارت  $\frac{5x-10}{3-6x}$  را تعیین علامت کنید.

**مثال:** برای دوجمله‌ای  $(2x-4)$  عددهای مختلف را طبق جدول

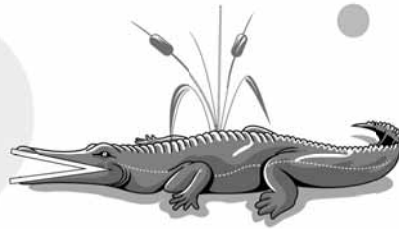
زیر به  $x$  نسبت داده‌ایم و نظیر هریک از آن‌ها را برای عبارت فوق حساب کرده‌ایم:

| $x$    | $-4$  | $-3$  | $-2$ | $-1$ | $0$  | $1$  | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|--------|-------|-------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|
| $2x-4$ | $-12$ | $-10$ | $-8$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |

از این مثال متوجه می‌شویم که برای تعیین علامت یک دوجمله‌ای، کافی است دوجمله‌ای را برابر صفر قرار دهیم. در این صورت با به دست آوردن ریشه دوجمله‌ای (مقداری که عبارت را صفر می‌کند) مرز مقادیر منفی و مثبت دوجمله‌ای مورد نظر به دست خواهد آمد. در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ‌تر از ریشه (مرز) دوجمله‌ای علامتش مثبت و به ازای مقادیر کوچک‌تر از ریشه، علامت دوجمله‌ای مفروض منفی خواهد بود. به طور کلی علامت دوجمله‌ای  $(ax+b)$  در دو حالت  $a > 0$  و  $a < 0$  چنین است:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

|           |                  |  |                    |                |                    |
|-----------|------------------|--|--------------------|----------------|--------------------|
| $a > 0$ : | $\frac{x}{ax+b}$ |  | $-\infty$          | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$          |
|           |                  |  | -                  | $\circ$        | +                  |
|           |                  |  | (مخالف علامت $a$ ) |                | (موافق علامت $a$ ) |
| $a < 0$ : | $\frac{x}{ax+b}$ |  | $-\infty$          | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$          |
|           |                  |  | +                  | $\circ$        | -                  |
|           |                  |  | (موافق علامت $a$ ) |                | (مخالف علامت $a$ ) |



**حل:** ابتدا ریشه هریک از عبارت‌های صورت و مخرج را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x - 10 = 0 \Rightarrow \Delta x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{\Delta} = 2 \Rightarrow x = 2$$

$$3 - 6x = 0 \Rightarrow -6x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

| x                               | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | 2 | $+\infty$ |
|---------------------------------|-----------|---------------|---|-----------|
| $\Delta x - 10$                 | -         | -             | + | +         |
| $-6x + 3$                       | +         | +             | - | -         |
| $\frac{\Delta x - 10}{-6x + 3}$ | -         | -             | + | -         |

تعریف نشده

**تعیین علامت عبارت‌های متشکل از عامل‌های درجه اول**

**مثال ۳:** عبارت  $P = \frac{-x(3-6x)(x+1)}{(x-1)(2x-3)}$  را تعیین علامت کنید.

**حل:** برای تعیین عباراتی نظیر عبارت P ابتدا هریک از عامل‌های موجود را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه هر کدام از عامل‌ها را به دست می‌آوریم. سپس جدولی رسم می‌کنیم و در سطر اول آن مقادیر جواب‌های به دست آمده را به ترتیب صعودی از چپ به راست می‌نویسیم و در هریک از سطرها دیگر آن، علامت یکی از عامل‌های عبارت P را تعیین می‌کنیم. در آخر علامت P برای هر فاصله عددی از ضرب علامت‌های واقع در ستون نظیر آن به دست می‌آید.

| x      | $-\infty - 1$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|--------|---------------|---|---------------|---|---------------|-----------|
| $x+1$  | -             | + | +             | + | +             | +         |
| $-x$   | +             | + | -             | - | -             | -         |
| $3-6x$ | +             | + | +             | - | -             | -         |
| $x-1$  | -             | - | -             | - | +             | +         |
| $2x-3$ | -             | - | -             | - | -             | +         |
| P      | -             | + | -             | + | -             | +         |

تعریف نشده

تعریف نشده

تعریف نشده

تعریف نشده

**توجه:** از آن جا که به ازای ریشه‌های مخرج عبارت P بی‌معناست، بنابراین لازم است در جدول، ریشه‌های مخرج را تعریف نشده تلقی کنیم.

دوجمله‌ای درجه اول را به حالت عمومی  $(ax+b)$  نمایش می‌دهیم. منظور از علامت دوجمله‌ای، تعیین مقادیری از x است که به ازای این مقادیر مقدار دوجمله‌ای مثبت یا منفی و در یک مورد صفر باشد

\* تعیین علامت عبارت‌ها کاربردهای بسیاری دارد که از آن جمله می‌توان حل نامعادلات را نام برد که در این جا به حل و بحث نامعادلات می‌پردازیم.

### نامعادله.....

نامعادله، گزاره‌نمایی به صورت نامساوی بین دو عبارت جبری شامل یک یا چند متغیر است. مجموعه جواب نامعادله، مجموعه مقادیری است که در ازای آن‌ها نامعادله به گزاره درست تبدیل می‌شود. ممکن است که در دامنه معینی از متغیر یا متغیرها، مجموعه جواب نامعادله تهی باشد. اگر برای نامعادله‌ای دامنه متغیر مشخص نشده باشد، دامنه آن را مجموعه عددهای حقیقی (R) اختیار می‌کنیم. نامعادله را یک مجهولی یا یک متغیری درجه اول گوئیم هرگاه پس از اختصار لازم به یکی از صورت‌های زیر برسیم:

$$ax + b \leq 0 \quad \text{یا} \quad ax + b \geq 0 \quad \text{یا} \quad ax + b < 0 \quad \text{یا} \quad ax + b > 0$$

(در نامعادلات اخیر x متغیر و a و b ضرایب حقیقی هستند)

### حل نامعادله یک مجهولی درجه اول.....

در حالت کلی نامعادله درجه اول را به شکل  $ax+b>0$  یا  $ax+b<0$  در نظر می‌گیریم. حل یک نامعادله در واقع به دست آوردن مجموعه جواب آن نامعادله است که ممکن است مجموعه جواب آن دارای هیچ یا بی‌شمار عضو باشد. به طور کلی، حل نامعادلات فوق چنین است:

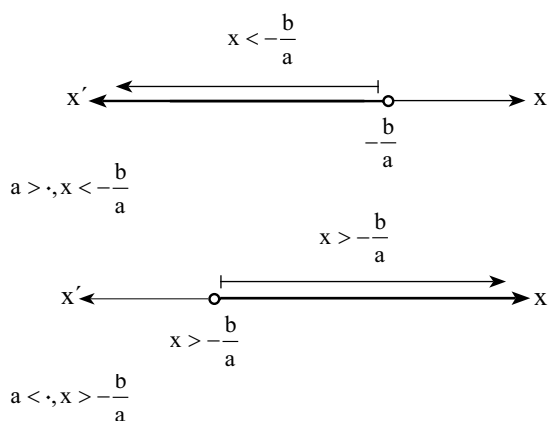
$$ax + b > 0 \Rightarrow ax + b - b > -b \Rightarrow ax > -b$$

$$ax + b < 0 \Rightarrow ax < -b, \begin{cases} a > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}; \left\{ x \mid x < -\frac{b}{a} \right\} \\ a < 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}; \left\{ x \mid x > -\frac{b}{a} \right\} \end{cases}$$

(مجموعه جواب)

(مجموعه جواب)

نمایش مجموعه جواب روی محور اعداد:



**تبصره:** اگر نامعادله دارای مساوی باشد، خود ریشه نیز جزو مجموعه جواب است و در این صورت نقطه را روی محور توپر نمایش می‌دهیم.

**مثال ۴:** نامعادله زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$5(2x+3)^2 > 4(\sqrt{5}x-2)^2$$

**حل:**

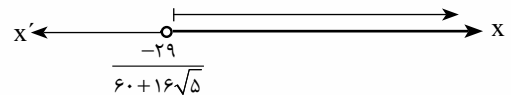
$$5(4x^2 + 12x + 9) > 4(5x^2 - 4\sqrt{5}x + 4)$$

$$\Rightarrow 60x + 45 > -16\sqrt{5}x + 16$$

$$\Rightarrow (60 + 16\sqrt{5})x > 16 - 45 \Rightarrow x > \frac{-29}{60 + 16\sqrt{5}}$$

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{ x \mid x > \frac{-29}{60 + 16\sqrt{5}} \right\}$$

**نمایش هندسی:**



**مثال ۵:** نامعادله زیر را حل کنید و نمودار هندسی مجموعه جواب آن را رسم کنید.

$$\frac{-5+2x}{3} \leq \frac{-3x+1}{2}$$

**حل:** برای حل نامعادله، ابتدا طرفین نامعادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها ضرب می‌کنیم و سپس مجهولات را به یک‌طرف و معلومات را به طرف دیگر (با تعویض علامت آنان) می‌بریم و از آن‌جا  $x$  را محاسبه می‌کنیم:

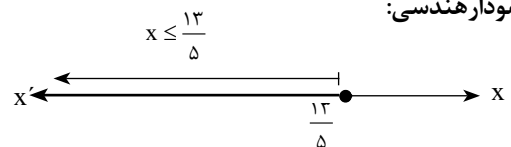
$$-2(5+2x) \leq 3(-3x+1)$$

$$\Rightarrow -10 - 4x \leq -9x + 3 \Rightarrow -4x + 9x \leq 3 + 10$$

$$\Rightarrow 5x \leq 13 \Rightarrow x \leq \frac{13}{5}$$

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{ x \mid x \leq \frac{13}{5} \right\}$$

**نمودار هندسی:**



**مثال ۶:** نامعادله زیر را حل کنید.

$$\frac{-x(x+2)}{(x+1)(3x-6)} \geq 0$$

**حل:** طرف اول نامعادله را با  $p$  نمایش می‌دهیم:

$$p = \frac{-x(x+2)}{(x+1)(3x-6)}$$

اینک برای حل نامعادله، کافی است عبارت  $p$  را تعیین علامت کنیم:

| $x$                      | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|--------------------------|-----------|------|------|-----|-----|-----------|
| $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ |           |      |      |     |     |           |
| $x+2$                    | -         | o    | +    | +   | +   | +         |
| $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ |           |      |      |     |     |           |
| $x+1$                    | -         | -    | o    | +   | +   | +         |
| $-x=0 \Rightarrow x=0$   |           |      |      |     |     |           |
| $-x$                     | +         | +    | +    | o   | -   | -         |
| $3x-6=0 \Rightarrow x=2$ |           |      |      |     |     |           |
| $3-6x$                   | -         | -    | -    | -   | o   | +         |
| $p \geq 0$               | -         | o    | +    | -   | o   | -         |

تعریف نشده      تعریف نشده

با توجه به جدول و نامعادله  $p \geq 0$  مجموعه جواب را تعیین می‌کنیم:

$$p \geq 0 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \{x \mid -2 \leq x < -1 \text{ یا } 0 \leq x < 2\}$$

**مثال ۷:** نامعادله زیر را حل کنید.

$$\frac{2(x-3)}{x} < \frac{-3}{x}$$

**حل:** ابتدا عبارت سمت راست نامعادله را به سمت چپ آن (با

تغییر علامت) می‌آوریم و پس از اختصار لازم، طرف چپ را با  $P$  نمایش می‌دهیم. برای حل نامعادله، کافی است عبارت  $P$  را تعیین علامت کنیم:

$$P = \frac{2(x-3)}{x} + \frac{3}{x} < 0 \Rightarrow \frac{2x-6+3}{x} < 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{x} < 0$$

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|---------------|-----------|
| $2x-3$  | -         | -   | o             | +         |
| $x$     | -         | o   | +             | +         |
| $p < 0$ | +         | -   | o             | +         |

تعریف نشده

$$p < 0 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \left\{ x \mid 0 < x < \frac{3}{2} \right\}$$

|                                                 |           |      |     |     |           |
|-------------------------------------------------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$                                             | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $-x^2$                                          | $-$       | $-$  | $0$ | $-$ | $-$       |
| $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0, x = \pm 1$ | $+$       | $0$  | $-$ | $-$ | $+$       |
| $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$        | $+$       | $+$  | $+$ | $+$ | $+$       |
| $p \geq 0$                                      | $-$       | $0$  | $+$ | $+$ | $-$       |

$P \geq 0$ : مجموعه جواب:  $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$

### حل دستگاه نامعادلات.....

نامعادلات توأم عبارت است از دو یا چند نامعادله که باید به ازای مقادیر مشترکی از مجهول برقرار باشند.  
برای حل نامعادلات توأم، کافی است هریک را جداگانه حل کنیم و جواب‌های مشترک را بین همگی آن‌ها به دست آوریم.  
مجموعه جواب دو یا چند نامعادله توأم عبارت است از اشتراک مجموعه‌های جواب هریک از آن‌ها. به عبارت دیگر، مجموعه جواب مجموعه‌ای است که برای تمام نامعادلات دستگاه صادق باشد.

**مثال ۱۰:** دستگاه دو نامعادله توأم زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 5x - 3 > 2x + 3 \\ 3 - 4x < 1 \end{cases}$$

**حل:**

$$\begin{cases} 5x - 3 > 2x + 3 \\ 3 - 4x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2x > 3 + 3 \\ -4x < 1 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > 6 \\ -4x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{6}{3} \\ x > \frac{-2}{-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

مجموعه جواب نامعادله (۱) عبارت است از:

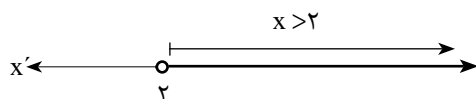
$$\{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$$

مجموعه جواب نامعادله (۲) عبارت است از:

$$\{x \in \mathbb{R} | x > \frac{1}{2}\}$$

مجموعه جواب دستگاه مفروض اشتراک دو مجموعه فوق است:

$$\{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$$



### تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم $(P=ax^2+bx+c)$ ....

ابتدا عبارت درجه دوم را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$P = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

در این جا اگر عبارت  $\Delta = b^2 - 4ac$  منفی یا برابر صفر باشد،

بدیهی است که علامت  $p$  هم علامت  $a$  خواهد بود، زیرا داخل کروشه در حالت  $\Delta < 0$  همواره مثبت و در حالت  $\Delta = 0$   $(x = -\frac{b}{2a})$  صفر می‌شود. بنابراین  $p$  در حالت  $\Delta < 0$  هم علامت  $a$  و در حالت  $\Delta = 0$  برابر صفر است. درحالتی که  $\Delta > 0$  باشد سه جمله‌ای دو ریشه حقیقی متمایز دارد که در این حالت می‌توان نوشت:

$$P = a \left[ \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \right]$$

در این صورت با تشکیل جدول نتیجه می‌شود که علامت  $P$

همواره بین دو ریشه، مخالف علامت  $a$  و به ازای مقادیر حقیقی  $x$  خارج دو ریشه، موافق علامت  $a$  است.

**مثال ۸:** عبارت درجه دوم  $B=x^2-3x+2$  را تعیین علامت کنید.

**حل:** ابتدا ریشه‌های معادله  $B=0$  را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

اینک جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم:

|                        |           |   |   |           |   |
|------------------------|-----------|---|---|-----------|---|
| x                      | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |   |
| B=x <sup>2</sup> -3x+2 | +         | ○ | - | ○         | + |

بنابراین علامت  $B$  بین دو ریشه (مخالف علامت  $a=1$ ) منفی

است.

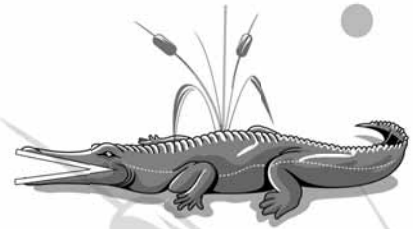
**مثال ۹:** نامعادله  $\frac{-x^2(x^2-1)}{x^2+x+1} \geq 0$  را حل کنید.

**حل:** ابتدا ریشه تمام عامل‌های صورت و عبارت مخرج را در

صورت وجود به دست می‌آوریم و سپس جدول تعیین علامت عبارت

$P$  را رسم می‌کنیم:

در حالت کلی  
نامعادله درجه  
اول را به شکل  
 $ax+b>0$   
یا  $ax+b<0$  در نظر  
می‌گیریم. حل  
یک نامعادله  
در واقع به دست  
آوردن مجموعه  
جواب آن  
نامعادله است  
که ممکن است  
مجموعه جواب  
آن دارای هیچ  
یا بی‌شمار عضو  
باشد



**مثال ۱۱:** دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3} + \frac{x-3}{2} < \frac{3x-2}{6} & (1) \\ \frac{x+1}{2} - \frac{3x+2}{3} < \frac{x-1}{4} & (2) \end{cases}$$

**حل:** ابتدا طرفین نامعادله (۱) را در ۶ و طرفین نامعادله (۲) را

در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2(2x-1) + 3(x-3) < 3x-2 \\ 6(x+1) - 4(3x+2) < 3(x-1) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} 4x-2+3x-9-3x+2 < 0 \\ 6x+6-12x-8-3x+3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x < 9 \\ -9x < -1 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{9}{4} \\ x > \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعه جواب دستگاه} = \left\{ x \mid \frac{1}{9} < x < \frac{9}{4} \right\} \end{aligned}$$

**نامعادلات و قدر مطلق**.....

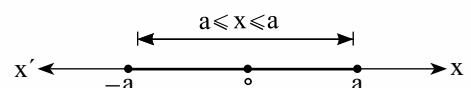
می‌دانیم که قدر مطلق عدد حقیقی  $a$  عبارت است از  $|a|$  به قسمی که:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

برای مثال:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}, \quad |-\pi| = \pi, \quad |\pm 3| = 3, \quad |5| = 5 \\ & \dots \quad \sqrt{2} = |\sqrt{2}| \end{aligned}$$

نمایش  $|x| \leq a$  چنین است:



به‌طور کلی حل هر معادله یا نامعادله شامل قدر مطلق مجهول به حل دو یا چند دستگاه از معادله‌ها و نامعادله‌ها تبدیل می‌شود.

**مثال ۱۲:** معادله  $3x - |x - 4| = 1$  را حل کنید.

**حل:** برای حل معادله فوق دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$(1): \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ 3x - (x - 4) = 1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad (2): \begin{cases} x - 4 < 0 \\ 3x + (x - 4) = 1 \end{cases}$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(1): \begin{cases} x \geq 4 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{یا} \quad (2): \begin{cases} x < 4 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$(1) \text{ مجموعه جواب } = \left\{ x \mid x \geq 4, x = -\frac{3}{2} \right\} = \emptyset$$

$$(2) \text{ مجموعه جواب } = \left\{ x \mid x < 4, x = \frac{5}{4} \right\} = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$$

$$\text{مجموعه جواب معادله} = \left\{ \frac{5}{4} \right\} \cup \emptyset = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$$

بنابراین، تنها جواب معادله  $x = \frac{5}{4}$  است.

**مثال ۱۳:** نامعادله  $|x - 2| \leq 1$  را حل کنید.

**حل:** مانند مثال ۱۱ برای حل نامعادله مفروض، کافی است دو حالت در نظر بگیریم:

$$(1): \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad (2): \begin{cases} x - 2 < 0 \\ -(x - 2) \leq 1 \end{cases}$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(1): \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad (2): \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$(1) \text{ یا } \{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = \text{مجموعه جواب (۱)}$$

$$(2) \text{ مجموعه جواب } = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$$

$$\begin{aligned} \text{مجموعه جواب نامعادله} &= \{x \mid 1 \leq x < 2 \text{ یا } 2 \leq x \leq 3\} \\ &= \{x \mid 1 \leq x \leq 3\} \end{aligned}$$

**مثال ۱۴:** عبارت  $p(x) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2-4}$  به‌ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف شده است.

**حل:** می‌دانیم زیر رادیکال با فرجه زوج همواره باید مثبت یا صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x^2 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow$$

از اشتراک مجموعه جواب‌ها داریم:

$$\text{مجموعه جواب} = \{-2, 2\}$$

بنابراین عبارت  $p(x)$  فقط به‌ازای  $x=2$  و  $x=-2$  تعریف شده است.

**مثال ۱۵:** عبارت  $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^3-8}} + \sqrt[6]{32-2x^2}$  به‌ازای چه مقادیری از  $x$  معین است.

**حل:** عبارت مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^3-8}} + \sqrt[6]{32-2x^2}$$

بنابراین، عبارت فوق وقتی تعریف شده و معین است که زیر رادیکال‌های با فرجه زوج مثبت یا صفر باشد:

$$\begin{cases} x^3-8 \geq 0 \\ 32-2x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \geq 8 \\ 2x^2 \leq 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 \leq 16 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

بنابراین از اشتراک مجموعه جواب‌های نامعادلات دستگاه داریم:

$$\text{مجموعه جواب} = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$$

نامعادلات توأم عبارت است از دو یا چند نامعادله که باید در عین حال به‌ازای مقادیر مشترکی از مجهول برقرار باشند

کوزه  
در  
خیاط

## تاریخچه مجله ریاضی برهان

غلامرضا یاسی پور

## اشاره

## کلیدواژه‌ها:

مجموعه‌ها، مجله ریاضی برهان، معادله درجه ۳، اصل حجره‌ها، توابع گزاره‌ای و سورها.

در شماره قبل به مرور مجلات برهان متوسطه تا شماره ۹ پرداختیم، اینک در ادامه برهان شماره ۹ به مقاله تاریخچه مجلات برخورد می‌کنیم و در مقاله مربوط به مجله آشتی با ریاضیات در مورد مجموعه‌ها چنین آمده است:

مجموعه چیست و چه معنایی دارد؟ اگر شرافتمندانه بخواهید، باید بگوییم که تعریفی برای این مفهوم نداریم. تعریف یعنی چه؟ تعریف را، برای مثال می‌توان به این معنا دانست که ابتدا چیزی کلی‌تر از مفهوم مورد نظر خود نام ببریم، سپس در این محدوده کلی، مرزهایی را مشخص کنیم که مفهوم مورد نظر ما را از همه مفاهیم‌های دیگر جدا کند (یعنی، خصلت‌ها و ویژگی‌هایی که این مفهوم را از دیگر مفاهیم متمایز می‌کند، معین کنیم).

در مورد مفهوم «مجموعه» هیچ مفهومی را که نسبت به آن کلی‌تر باشد نمی‌شناسیم (باید گفت، همین عام بودن مفهوم مجموعه موجب شده است که یکی از بنیانی‌ترین نقش‌ها را در ریاضیات امروزی داشته باشد). اما وقتی

تعریف مجموعه را نمی‌دانیم چگونه می‌توانیم برای مثال از مجموعه مشخصی مثل مجموعه اعداد طبیعی صحبت کنیم؟ در

این مورد، نوعی ناسازگاری وجود ندارد؟ جواب این است که جای هیچ‌گونه ناسازگاری نیست. این درست است که مجموعه به عنوان یک مفهوم انتزاعی ریاضی قابل تعریف نیست، ولی برای تعریف یک مجموعه مشخص به هیچ دشواری بر نمی‌خوریم.

در این شماره به مقاله‌ای برخورد می‌کنیم که نام «آشنایی با مشاهیر ریاضی جهان» را دارد. در این مقاله درباره کوشی چنین می‌خوانیم:

**کوشی** یکی از مهم‌ترین ریاضی‌دان‌های اوایل قرن نوزدهم و چهره مسلط ریاضیات فرانسوی بود. آثارش در زمینه‌های وسیعی از ریاضیات تغییر می‌کند، اما وی به ویژه به عنوان یکی از پایه‌گذاران آنالیز ریاضی دقیق به خاطر مانده است. او کارهای عمیقی در مورد مفاهیم پیوستگی و همگرایی انجام داد و نتایج آن در نظریه «توابع مختلط» برای دانشجویان دوره کارشناسی بسیار آشناست. مقاله دیگر این شماره، مقاله‌ای در مورد «نظریه گراف» است. در این مقاله از این

موضوع آگاه می‌شویم که:

مفهوم گراف، یکی از مفیدترین و جالب‌ترین مفاهیم ریاضیات گسسته است. در واقع، می‌توان گفت تمامی ما گراف‌ها را گه‌گاه ملاحظه کرده و به کار برده‌ایم.

مفهوم گراف، مفهومی ساده است. در این مورد آن چه نیاز به انجام دادن آن داریم تنظیم این مفهوم است که نقاطی (موسوم به رؤوس) داریم که به‌طور مستقیم با قطعه‌خطهایی (موسوم به یال‌ها) به نقاط دیگر وصل شده‌اند.

بعضی از مقاله‌های دیگر این شماره مقاله‌های زیرند:

**معادله درجه سوم و حل آن:** احمد قندهاری و مهدی قمصری

**توابع گزاره‌ای و سورها:** غلامرضا یاسی پور  
**دوران در هندسه تحلیلی:** محمد ابراهیم گیتی‌زاده

**پارامترهای جبری متجانس:** دکتر احمد شرفالدین

**اصل حجره‌ها:** مهدی نساجی

**مسائل مسابقه‌ای:** حمیدرضا امیری

\*\*\*

دهمین شمارهٔ برهان در بهار ۱۳۷۳ به بهای ۱۰۰۰ ریال انتشار یافته است. در حرف اول یا سخن سردبیر این شماره به این داستان نقل شده از پیامبر (ص) برمی‌خوریم: گروهی مسافر سوار کشتی شدند و هر یک در جایگاه خود نشستند. پس از مدتی صدای کوبیده شدن چیزی به بدنهٔ کشتی، توجه مسافران را به خود جلب کرد. آن‌ها دیدند مردی با تیشه‌ای کوچک در حال سوراخ کردن کشتی است. با تعجب به او گفتند: «چه می‌کنی ای مرد؟» مرد با خونسردی سرش را بلند کرد و گفت: «این‌جا جای من است و هر کاری که دلم بخواهد با آن می‌کنم.»

این داستان حکیمانه که از پیامبر اسلام، حضرت محمد (ص)، نقل شده است به خوبی اهمیت امر به معروف و نهی از منکر در یک جامعه را نشان می‌دهد، زیرا سرنوشت جامعه و مردم مانند آن کشتی و مسافران، به نوعی با یکدیگر گره خورده است.

در این شماره، مقالهٔ تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران به مجلهٔ یکان پرداخته است. از مقاله‌های جالب این تاریخچه، مقالهٔ چرا معلم ریاضی شدم از غلامرضا عسجدی است که شمای از آن را با هم می‌خوانیم:

پدر و کسان پدری من پیش‌تر اهل داد و ستد و بازاری بوده‌اند و مرحوم پدرم عقیده داشت اگر من در آتیه شغل آزاد داشته باشم بهتر است در صورتی که خویشان مادری من کتابی و از دوستان علم بوده‌اند بین آن‌ها چند تن روحانی بزرگ و چند تن طبیب یافت می‌شد. به خاطر دارم در ایام طفولیت گاهی به خانهٔ دایی خود که از مجتهدین طراز اول بود می‌رفتم. موقعی

که بین آن مرحوم و شاگردانش بحث علمی درگرفته بود در آن زمان رسم چنین بود که استاد هر اندازه دانشمند و شاگرد هر قدر حقیر و کم اطلاع می‌بود، در بحث علمی خجالت و تعارف و مدهانه وجود نداشت. اگر شاگرد در گفتار استاد نکتهٔ ضعیفی به نظرش می‌رسید بی‌پروا اظهار می‌کرد. این دیگر وظیفهٔ استاد بود که یا با منطق او را متقاعد سازد یا خود تسلیم شود. این جریان به هیچ‌وجه ذره‌ای از مقام استاد کم نمی‌کرد و حتی بر صفا و صدق مقام او می‌افزود. بارها به چشم خود دیده بودم این آقایان پس از بحث علمی مفصل که شبیه مشاجره بود یک‌دفعه فارغ و مشغول تناول ناهار می‌شدند که عبارت از یک غذای سادهٔ ایرانی بود. اگر کسی شوخی‌ها و خنده‌های اینان را در این موقع می‌دید باور نمی‌کرد که همان کسانی هستند که لحظه‌ای پیش در بحث علمی چنان سختگیر و بی‌گذشت بودند. این قبیل سنجایا که منشأ ترقی قومی تواند بود، متأسفانه در محیط فرهنگ جدید ما ضعیف شده است. گاهی انسان مشاهده می‌کند تسامح و چاپلوسی از یک طرف و افاده و تفرعن بی‌جا از طرف دیگر همه‌جا حتی به مجالس درس و تحقیق نیز راه یافته است.

مجلهٔ «یکان» مجله‌ای ماهانه بود و در هر ماه، یک شماره از آن بر بساط روزنامه‌فروشان ظاهر می‌شد، اما مانند بعضی از مجله‌های علمی دیگر، ویژه‌نامه هم داشت.

اولین ویژه‌نامهٔ «یکان» با عنوان شماره فوق‌العادهٔ یکان مجلهٔ ریاضیات در فروردین

۱۳۴۴ شمسی انتشار یافت.

در این شماره با نویسندگانی چون دکتر محسن هشترودی، احمد بیرشک، جهانگیر شمس‌آوری، جلیل قراگزلو، محمد علی شیخان، مهدی مدغم، هوشنگ شریف‌زاده، محمد حسن رزاقی خمسی و عبدالحسین مصحفی مواجه می‌شویم.

در این شماره، در مقالهٔ ادامهٔ گزارش بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور در شرح حال مرحوم استاد احمد بیرشک چنین می‌خوانیم:

استاد احمد بیرشک روز جمعه ۱۰ ذیحجهٔ ۱۳۲۴ هجری قمری مقارن با ۴ بهمن ۱۲۸۵ هجری شمسی متولد شد. پدر وی عضو گمرک بود و همهٔ عمر را در مرزهای کشور گذراند. به همین علت پسر خانواده نتوانست تحصیلات آموزشی‌اش را منظمی به دست آورد و همین موجب کشیده شدنش به خودآموزی شد.

او دورهٔ شش سالهٔ دبیرستان را در دو سال و سه ماه (از تیرماه ۱۳۰۶ تا شهریور ۱۳۰۸) گذراند و در شهریور ۱۳۰۸ در امتحان کلاس ششم قبول شد و در دارالمعلمین عالی ثبت‌نام کرد.

در ۱۳۱۱ در رشتهٔ ریاضی تحصیل را به پایان برد و وارد مشاغل دولتی شد. در ۱۳۱۵ به ریاست جامعهٔ لیسانسیه‌های دانشسرای عالی رسید و در ۱۳۲۱ به دانشگاه منتقل شد. در این سال از طرف دکتر علی اکبر سیاسی، رئیس دانشگاه و وزیر فرهنگ، به سمت ریاست ادارهٔ کارگزینی دانشگاه منصوب شد و تا ۱۳۳۴ در این شغل باقی ماند.

از ۱۳۲۴ تا ۱۳۴۲ در رشتهٔ معماری دانشکدهٔ هنرهای زیبای تهران، و نیز از ۱۳۳۷ تا ۱۳۳۹ در دانشسرای عالی به تعلیم ریاضی پرداخت و به سال ۱۳۴۲ بازنشسته شد.

در سال ۱۳۲۷ با همکاری بعضی از فرهنگیان، گروه فرهنگی هدف را تأسیس کرد. کار این گروه تا بدان جا رسید که ۱۳

مجلهٔ «یکان»  
مجله‌ای ماهانه  
بود و در هر  
ماه، یک شماره  
از آن بر بساط  
روزنامه‌فروشان  
ظاهر می‌شد، اما  
مانند بعضی از  
مجله‌های علمی  
دیگر، ویژه‌نامه  
هم داشت

دو راه برای پی بردن به حل مسئله وجود دارد: راه اول این است که کتاب حل مسئله‌ها را باز کنیم و راه حل آن را ببینیم یا منتظر جلسه بعدی کلاس بمانیم تا دبیر ریاضی (یا یکی از دانش آموزان) آن را حل کند و «کلید حل مسئله» را به ما بدهد (و دریغ که اغلب همین راه را انتخاب می‌کنند). این، برخورد «غیرفعال» با مسئله است

مدرسه روزانه پیدا کرد و تعداد دانش آموزانش متجاوز از ۱۴۰۰ نفر شد. از ۱۳۲۷ تا ۱۳۵۶ در گروه فرهنگی هدف به کار پرداخت و از آن پس به ویراستاری کتاب‌های دانشگاهی و غیردانشگاهی مشغول است و در فرصت‌های مناسب دست به تألیف و ترجمه نیز می‌زند. استاد بیرشک در حال حاضر مسئول اداره بنیاد دانشنامه بزرگ فارسی است. آثار ایشان عبارت‌اند از: هشت جلد کتاب ریاضیات دبستانی، چهار و هشت جلد کتاب ریاضیات دبیرستانی، سه جلد کتاب ریاضیات دانشگاهی، و کتاب‌های ریاضیات عام دیگری از قبیل: ریاضیات نوین، فلسفه ریاضی، فرض و اسطوره در فیزیک، هندسه لباچفسکی، هندسه ناقلیدسی، ریاضیات نو برای معلمان، ریاضیات برای خانم‌ها، و... **ادب ریاضی** این شماره سخنی است از مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب در کتاب **آنالیز ریاضی** وی: شما خود می‌دانید که در ریاضیات تا چه اندازه با اصطلاحاتی از قبیل برهان خلف، شرط لازم، شرط کافی و غیره سروکار داریم. البته بدون فهمیدن این‌گونه مطالب نباید انتظار داشته باشید که ریاضیات را بفهمید، چه رسد به این‌که بتوانید شخصاً تصرفی در بازی‌های ریاضی بکنید. کسی که از منطق بی‌بهره است بین استدلال و مغالطه و تعریف و قضیه و نظایر آن‌ها تمیز نمی‌دهد و به آسانی فریب می‌خورد. برای مثال، شاید شما کسانی را دیده‌اید که هنوز پس از تعریف کردن قوای طبیعی به وسیله ضرب، رابطه  $a=1$  را برای شاگردان خود ثابت می‌کنند! این‌ها کسانی هستند که تعریف عمل ضرب و تفاوت تعریف و قضیه را نمی‌فهمند

در مقاله معرفی کتاب درباره هندسه‌های جدید، تألیف جیمز. ار. اسمارت و ترجمه غلامرضا یاسی‌پور، چنین آمده است که: کتاب هم برای زبردستان و هم برای زبردستان ریاضی طرح شده و هم مناسب دانشجویانی است که از نظرگاه هنرهای آزاد به ریاضیات شوق دارند و هم مناسب آنانی است که سودای معلم ریاضیات شدن را در سر می‌پرورانند. مقاله دیگر این شماره عبارت است از مقاله **آیا تابعی جبری وجود دارد که متناوب باشد؟** مقاله از دکتر احمد شرف‌الدین است و در آن ثابت شده که تنها تابع جبری متناوب، تابع ثابت است. در ادب ریاضی این شماره، مطلبی در مورد ریمان آمده که به صورت زیر است: ریمان، یعنی موجد افکاری که موهای ریاضی‌دانان را روی سرشان بلند کرده بود از لحاظ ظاهر قیافه شخص انقلابی را نداشت. وی جوان بیست و هشت ساله‌ای بود که حجب و حیا در او به مرتبه مرض رسیده بود و از عایدات درس‌های خصوصی که می‌داد با نهایت فقر و فلاکت زندگی می‌کرد. بعد از آن که در سال ۱۸۵۴ میلادی تبعات خود را انتشار داد، توانست اندکی کره روی نان خالی خود بمالد، اما افسوس که از این وضع استفاده شایانی نکرد، زیرا از مرض سل رنج فراوان می‌برد و مجبور شد برای استراحت به ایتالیا برود و در آن جا هر وقت که از چنگ مرض فراغتی می‌یافت کار می‌کرد و آخرین روزهای عمر خود را در کنار دریاچه مازور گذراند. روز ۲۰ ژوئیه ۱۸۶۶ میلادی در نهایت افتخار و در منتهای جوانی،

زندگی را بدرود گفت.

مقاله گزارشی

از بیست و پنجمین

کنفرانس ریاضی کشور از

جمله مقاله‌های مفید این شماره

است. مقاله‌ای که اطلاعات جزئی درباره

رویدادهای این کنفرانس به خواننده می‌دهد.

در یکی از مطالب جالب این مقاله، که

معرفی کتاب **لطف‌الحساب قطب‌الدین**

**لاهیجی** از محمد باقری است، به موارد زیر

برخوردمی‌کنیم:

در این مقاله، کتابی که چهار

قرن پیش یعنی در عهد صفویه

به زبان فارسی و عربی (آمیخته)

در لاهیجان نوشته شده است،

معرفی می‌شود و محتوای

آن مورد بحث قرار می‌گیرد.

قطب‌الدین لاهیجی، فیلسوف و

فقیه و ریاضی‌دان بود. تفسیر قرآن

کریم وی با عنوان «تفسیر شریف

لاهیجی» یک‌بار در هندوستان و

یک‌بار در ایران به چاپ رسیده

است. کتاب معروف او در تاریخ

فلسفه محبوب القلوب نام دارد.

قطب‌الدین لاهیجی کتاب لطائف

الحساب خود را که در واقع نوعی

کتاب سرگرمی‌های ریاضی است

در سال ۱۰۲۰ هجری هنگامی

که از شهر اصفهان پایتخت

حکومت صفویه به لاهیجان

برگشته بود، نگاشته است. نسخه

خطی منحصر به فرد این اثر در

۱۳۲ صفحه، در کتابخانه آستان

قدس رضوی (مشهد) نگهداری

می‌شود. لطائف‌الحساب شامل

دیباجه، مقدمه، دو مقاله و یک

خاتمه است. مقاله اول آن در دو

باب است. در باب اول از خبایا

(جمع خبی) سخن می‌رود، یعنی



# مسائل مسابقه ریاضی اسکاتلند در سال ۲۰۰۲-۲۰۰۱



ترجمه و تألیف: هوشنگ شرقی

مقدمه

مسابقات ریاضی در تمام کشورهای عضو جامعهٔ بریتانیای کبیر (انگلستان، اسکاتلند، ایرلند و ولز) سال‌هاست که برگزار می‌شوند. در این کشورها مسابقه‌های ریاضی در سطوح گوناگونی برگزار می‌شوند. مسابقات المپیادهای ریاضی برای آمادگی و انتخاب تیم المپیاد بین‌المللی این کشورها نیز از سال‌ها پیش انجام می‌شود. دربارهٔ المپیاد ریاضی انگلستان قبلاً مطالبی داشته‌ایم و کتاب مجموعه مسائل آن قبلاً به قلم نگارنده ترجمه و از سوی انتشارات مدرسه منتشر شده است.

به جز کشور انگلستان، سایر کشورهای این جزیرهٔ بزرگ، حضور چندان پررنگی در المپیادهای بین‌المللی نداشته‌اند و به جز کشور ایرلند، دیگر کشورها و از جمله اسکاتلند به‌طور مستقل در المپیاد ریاضی بین‌المللی حاضر نشده‌اند. اما مسابقات ریاضی در این کشورها به‌طور منظم در جریان است. یکی از این مسابقه‌ها، مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در کشور اسکاتلند است که در دو سطح مقدماتی و پیشرفته برگزار می‌شود. در این جا مسائل سطح پیشرفتهٔ این مسابقات را در سال تحصیلی ۲۰۰۱-۲۰۰۲ آورده‌ایم.

سطح سؤال‌ها چنان‌چه خواهید دید، خیلی بالانگیز و به مسائل المپیاد ریاضی شباهت زیادی ندارند، اما مسائل سطحی و پیش‌پاافتاده‌ای هم نیستند و می‌توانند مورد توجه اقشار بیش‌تری از دانش‌آموزان ماقرار گیرند و بعضی از آن‌ها از جمله مسئلهٔ ۳ واقعاً تفکربرانگیز و جالب توجه‌اند. توصیهٔ همیشگی‌ام این است که قبل از دیدن راه‌حل‌ها خودتان را بیازمایید و سعی کنید مسائل را با تفکر خودتان حل کنید و بدانید که حتماً از این کار لذت خواهید برد.

هیچ طرفشان سیاه نیست؟ یک وجهشان سیاه است؟ دو وجهشان سیاه است؟ سه وجهشان سیاه است؟ چهار وجهشان سیاه است؟ پنج وجهشان سیاه است؟ هر شش وجهشان سیاه است؟

۲. کامیون‌های غذا باید سر ساعت ۳ بعدازظهر وارد یک بندر آزاد شوند. اگر آن‌ها با سرعت ۶۰ مایل در ساعت حرکت کنند ساعت ۲ وارد بندر می‌شوند و اگر با سرعت ۴۰ مایل در ساعت حرکت کنند، ساعت ۴ بعدازظهر وارد می‌شوند. طول مسیر مسافرت آن‌ها چند مایل است و با چه سرعتی باید حرکت کنند تا سر ساعت ۳ بعدازظهر به مقصد برسند.

۳. در زمان جنگ دوم جهانی، خانواده‌ها مجبور بودند پنجره‌هایشان را استتار کنند. آقای براون یک پنجره‌ی مربع شکل به ابعاد ۱۲۰ در ۱۲۰ سانتی‌متر داشت. اما تنها چیزی که برای این کار داشت یک ورقه‌ی تخته‌سولایی به ابعاد ۱۶۰ سانتی‌متر در ۹۰ سانتی‌متر بود، با مساحتی برابر مساحت پنجره ولی با شکلی متفاوت. او با رسم تعدادی خط راست روی این ورقه و برش دادن آن به دو شکل یکسان و وصل کردن آن‌ها به هم توانست مربعی دقیقاً با همان ابعاد بسازد. او چگونه این کار را کرد؟



## صورت مسائل

۱. فرض کنید هر شش رویه‌ی خارجی یک مکعب بزرگ را به رنگ سیاه نقاشی کرده‌ایم. این مکعب را به  $n^2$  مکعب کوچک برش می‌زنیم. چه تعداد از این مکعب‌ها:

کلیدواژه‌ها:

مسابقات

ریاضی، المپیاد

ریاضی، مثلث

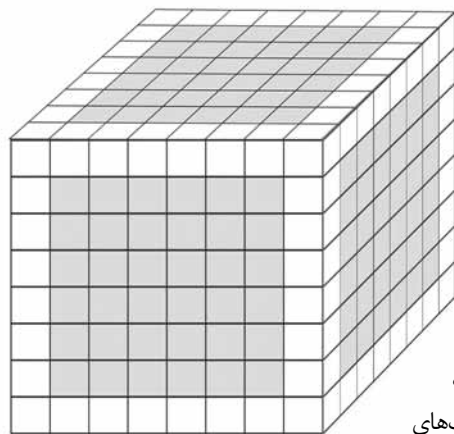
متساوی‌الاضلاع.

فقط یک ششم آن‌ها و فقط نصف بقیه‌ی شهروندان لایق، این پول را قبول کردند. بالاخره جو، مبلغ ۱۳۸۷۴۸۳ پوند پول دارد، اما هنوز هم ثروتمند است! او به هر مدیر شهر نار کیا چه قدر پول داد؟



۱. این یک مسئله‌ی ساده، اما مهم از نظر توجه به هندسه‌ی فضایی و داشتن دید دقیق و سه بعدی است. بدیهی است که اگر هر ضلع مکعب را به  $n$  قسمت مساوی تقسیم کنیم و از محل‌های تقسیم، برش‌هایی موازی ابعاد مکعب بزنیم، مکعب اصلی به  $n^3$  مکعب کوچک تقسیم می‌شود.

از این مکعب‌های کوچک، آن‌هایی که درون مکعب اصلی هستند، یعنی هیچ‌وجه آن‌ها منطبق بر وجه‌های خارجی مکعب اصلی نیست از هیچ‌طرف رنگ نمی‌خورند. تعداد این مکعب‌ها چقدر است؟ خیلی ساده است، کافی است از هر طرف مکعب، دو لایه‌ی رویی را حذف کنیم، یک مکعب دیگر به ابعاد  $n-2$  به وجود می‌آید که از هیچ‌طرف رنگ نمی‌خورد. بنابراین تعداد مکعب‌هایی که هیچ‌وجه آن‌ها رنگ سیاه ندارد، مساوی  $(n-2)^3$  است. اما کدام مکعب‌ها فقط یک وجه سیاه رنگ دارند؟



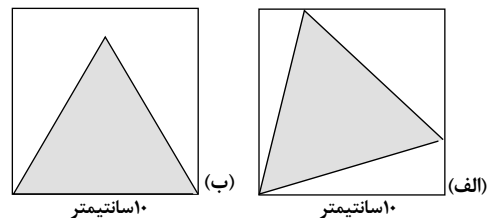
در شکل، این گونه مکعب‌ها مشخص شده‌اند، کافی است از وجه رویی مکعب اصلی که  $n^2$  مربع دارد،  $(n-2)^2$  مربع را که در وسط قرار دارند انتخاب کنیم. مکعب‌های کوچکی که این مربع‌ها یک وجه آن‌ها هستند فقط یک وجه سیاه رنگ دارند و لذا تعداد این گونه مکعب‌ها  $6(n-2)^2$  است. بدیهی است که مکعب‌های گوشه‌ای تنها مکعب‌های

هستند که سه وجه آن‌ها رنگ می‌شود و تعداد آن‌ها ۸ تاست و هیچ مکعبی هم دارای ۴ یا ۵ یا ۶ وجه رنگ شده نخواهد بود. اما چند مکعب داریم که دارای دو وجه سیاه رنگ هستند؟ این مکعب‌ها فقط آن‌هایی هستند که روی یال‌های مکعب اصلی (و نه در رأس‌ها) هستند. پس تعداد آن‌ها برابر است با:  $12(n-2)$

نکته‌ی جالب توجه، مجموع تعداد این مکعب‌هاست:

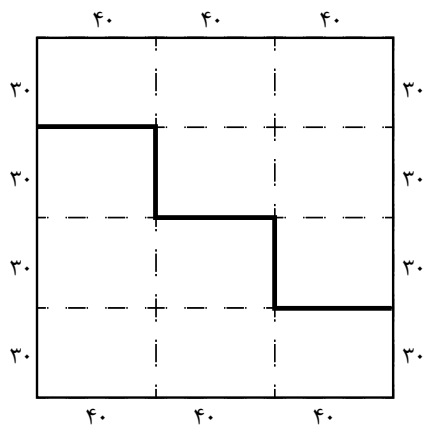
$$(n^3 - (n-2)^3) + 6(n-2)^2 + 12(n-2) + 8 = [(n-2) + 2]^3 = n^3 \quad (!)$$


۴. مربعی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر داده شده است. دو روش زیر برای محاط کردن یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درون این مربع در نظر بگیرید. کدام مثلث بزرگ‌تر است و چه قدر؟

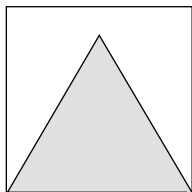


۵. شهر نار کیا، ۱۲۳۱۳۶ نفر جمعیت دارد. یکی از این شهروندان به نام جو پانتر در یک قرعه‌کشی عمومی پول زیادی را برنده شد. وقتی او پس از شنیدن این خبر به حال عادی خود بازگشت، متوجه شد که نمی‌داند با این پول چه کند، اما او یک چیز را می‌دانست و آن این‌که نمی‌خواهد از این پول به هیچ‌یک از آن‌ها که از او درخواست پول کنند، چیزی بدهد. به هر حال فقط ۲۰۳۵۹ نفر از شهروندان نار کیا از این دسته بودند. سرانجام او تصمیم گرفت بقیه‌ی شهروندان را لایق دریافت یک هدیه بداند، و آن‌ها را به دو دسته تقسیم کرد: مدیران شهر نار کیا (البته به استثنای خودش) و شهروندان عادی. آقای پانتر تصمیم گرفت مبلغ معینی پول به هر مدیر لایق شهر نار کیا و ۲۷ پوند به هر یک از شهروندان عادی لایق دریافت هدیه، بدهد. تعداد مدیران لایق دریافت هدیه زیاد نبود ولی یک عدد دورقمی می‌شد. به دلایلی که هنوز معلوم نیست،

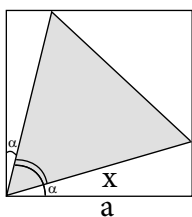
حال از کنار هم قرار دادن دو قطعه‌ی حاصل (که یکسان نیز هستند) مربع  $۱۲۰ \times ۱۲۰$  کاملاً پوشیده می‌شود.



۴. این یک مسئله‌ی محاسباتی بسیار ساده است. کافی است با توجه به دستور  $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$  که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  را به ما می‌دهد، مساحت‌های دو مثلث را جداگانه محاسبه کنیم



$$a = ۱۰ \text{ cm} \Rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times ۱۰^2 = ۲۵\sqrt{3}$$



$$\alpha = \frac{۹۰ - ۶۰}{۲} = ۱۵^\circ \quad \cos \alpha = \frac{a}{x} = \frac{۱۰}{x}, \quad \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{x} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow x = \frac{۴۰}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{۴۰(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{۶ - ۲}$$

$$= ۱۰(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times ۱۰^2 (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$$

$$= ۲۵\sqrt{3} (۶ + ۲ - ۴\sqrt{3}) = ۲۵(۸\sqrt{3} - ۱۲)$$

و می‌توان ثابت کرد که  $\sqrt{3} > ۱۲ - ۸\sqrt{3} > \frac{۱۲}{\sqrt{3}}$  (یا  $\sqrt{3} > \frac{۱۲}{\sqrt{3}}$ ). پس با مقایسه‌ای ساده مشخص است که  $S_2 > S_1$  و مقدار این اختلاف نیز



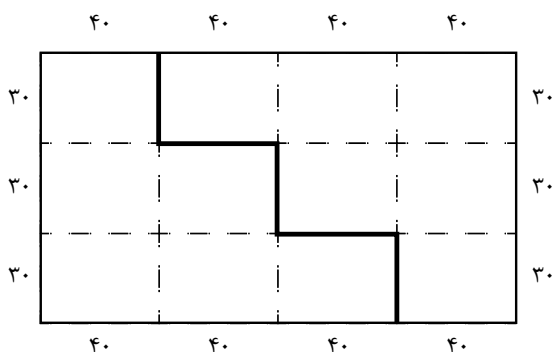
۲. این یک مسئله‌ی آسان از مدل‌سازی ریاضی است. دو مجهول اصلی داریم: مسافت مسیر کامیون‌ها و زمان طی این مسیر. اگر این مسافت را  $x$  و زمان حرکت کامیون با سرعت  $۶۰$  مایل در ساعت را  $t$  در نظر بگیریم، زمان حرکت کامیون با سرعت  $۴۰$  مایل در ساعت مساوی  $t+۲$  است و با توجه به رابطه‌ی سرعت - مسافت - زمان داریم:  $(V = \frac{x}{t})$

$$۶۰ = \frac{x}{t}, \quad ۴۰ = \frac{x}{t+۲} \Rightarrow ۶۰t = ۴۰(t+۲)$$

$$\Rightarrow ۲۰t = ۸۰, \quad t = ۴ \text{ hr}, \quad x = ۲۴۰ \text{ mile}$$

یعنی طول مسیر  $۲۴۰$  مایل است، حال اگر کامیون‌ها بخواهند سر ساعت  $۳$  بعد از ظهر به مقصد برسند، زمان طی مسیر آن‌ها یک ساعت بیش‌تر از وقتی است که سرعت آن‌ها  $۶۰$  مایل در ساعت است، یعنی  $۵$  ساعت و در نتیجه سرعت آن‌ها برابر است با:  $V = \frac{۲۴۰}{۵} = ۴۸ \text{ m/h}$ ؛ یعنی باید با سرعت  $۴۸$  مایل بر ساعت حرکت کنند تا به موقع به مقصد برسند.

۳. به نظر من این مسئله، زیباترین و تفکربرانگیزترین مسئله‌ی این آزمون است که خودم هم برای حل آن مدت نسبتاً زیادی مشغول شدم! برای رسیدن به پاسخ مسئله ایده‌های زیادی را آزمودم تا به این راه‌حل رسیدم. مستطیل  $۹۰$  در  $۱۶۰$  سانتی‌متری را به  $۱۲$  مستطیل  $۳۰ \times ۴۰$  تقسیم می‌کنیم، به این ترتیب که طول مستطیل را به  $۴$  قسمت  $۴۰$  سانتی‌متری و عرض آن را به سه قسمت  $۳۰$  سانتی‌متری تقسیم و نقاط تقسیم را با خطوطی موازی به هم وصل می‌کنیم. سپس روی این خطوط، برش‌هایی به صورت زیر می‌زنیم:



برابر است با:

$$S_p - S_1 = 25(8\sqrt{3} - 12 - \sqrt{3}) = 25(7\sqrt{3} - 12) \approx 3 / \text{cm}^2$$

۵. اگر تعداد شهروندان نالایق دریافت هدیه و خود جو پانتر را از مجموع شهروندان کم کنیم، شهروندان لایق دریافت هدیه مشخص می‌شوند:

$$123136 - 20359 - 1 = 102776$$

حال فرض می‌کنیم  $a$  نفر از این افراد مدیران لایق باشند و به هر یک از آن‌ها  $x$  پوند هدیه تعلق گیرد و  $b$  نفر از این افراد نیز سایر شهروندان لایق دریافت هدیه باشند و هر یک ۲۷ پوند هدیه بگیرند. با توجه به این که فقط  $\frac{1}{6}$  مدیران لایق و فقط نصف شهروندان عادی هدیه‌ی خود را قبول کرده‌اند و با توجه به مجموع پولی که پانتر داده است، به معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} a + b = 102776 \\ \frac{1}{6}ax + \frac{1}{2}b(27) = 1387483 \end{cases}$$

با ضرب معادله‌ی پایین در ۶ و معادله‌ی بالا در  $(-۸۱)$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -81a - 81b = -8324856 \\ ax + 81b = 8324898 \end{cases}$$

و با توجه به این که  $a$  یک عدد طبیعی دو رقمی است، نتیجه می‌شود که:

$$a = 42, \quad x - 81 = 1 \Rightarrow x = 82$$

یعنی هر یک از مدیران لایق شهر نارکیا ۸۲ پوند پول گرفته‌اند و عده‌ی آن‌ها (قبل از دریافت پول) ۴۲ نفر بوده است که فقط ۷ نفر آن‌ها پول را قبول کرده‌اند.

## اسم وبگاه: Free Math Help

در صفحه اصلی این وبگاه، قسمتی وجود دارد که کاربر می‌تواند با ارائه سؤالات و مسائلی از جبر به دریافت پاسخ آن‌ها به صورت گام‌به‌گام نائل آید. در ضمن، یکی از ویژگی‌های این وبگاه، ارائه یک مسئله روزانه به همراه پاسخ آن برای کاربر است.

صفحه اصلی وبگاه Free Math Help، دربرگیرنده عنوان‌های زیر است:

- جبر (Algebra)
- هندسه (Geometry)
- مثلثات (Trigonometric)
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
- آمار (Statistics)
- موضوعات بیشتر (More Subjects)

ریاضیات  
در سینما



# جهان سینمای در ریاضیات

اسم فیلم: ویل هانتینگ نابغه<sup>۱</sup>

احسان یارمحمدی

کارگردان: گوس فان سانت<sup>۲</sup>

تهیه کنندگان: لورنس بندر<sup>۳</sup>، اسکات موزیر<sup>۴</sup>، کوین اسمیت<sup>۵</sup>، باب وینستین<sup>۶</sup> و هاروی وینستین<sup>۷</sup>

نویسندگان: بن افلک<sup>۸</sup> و مت دامون<sup>۹</sup>

تاریخ اکران: پنجم دسامبر ۱۹۹۷

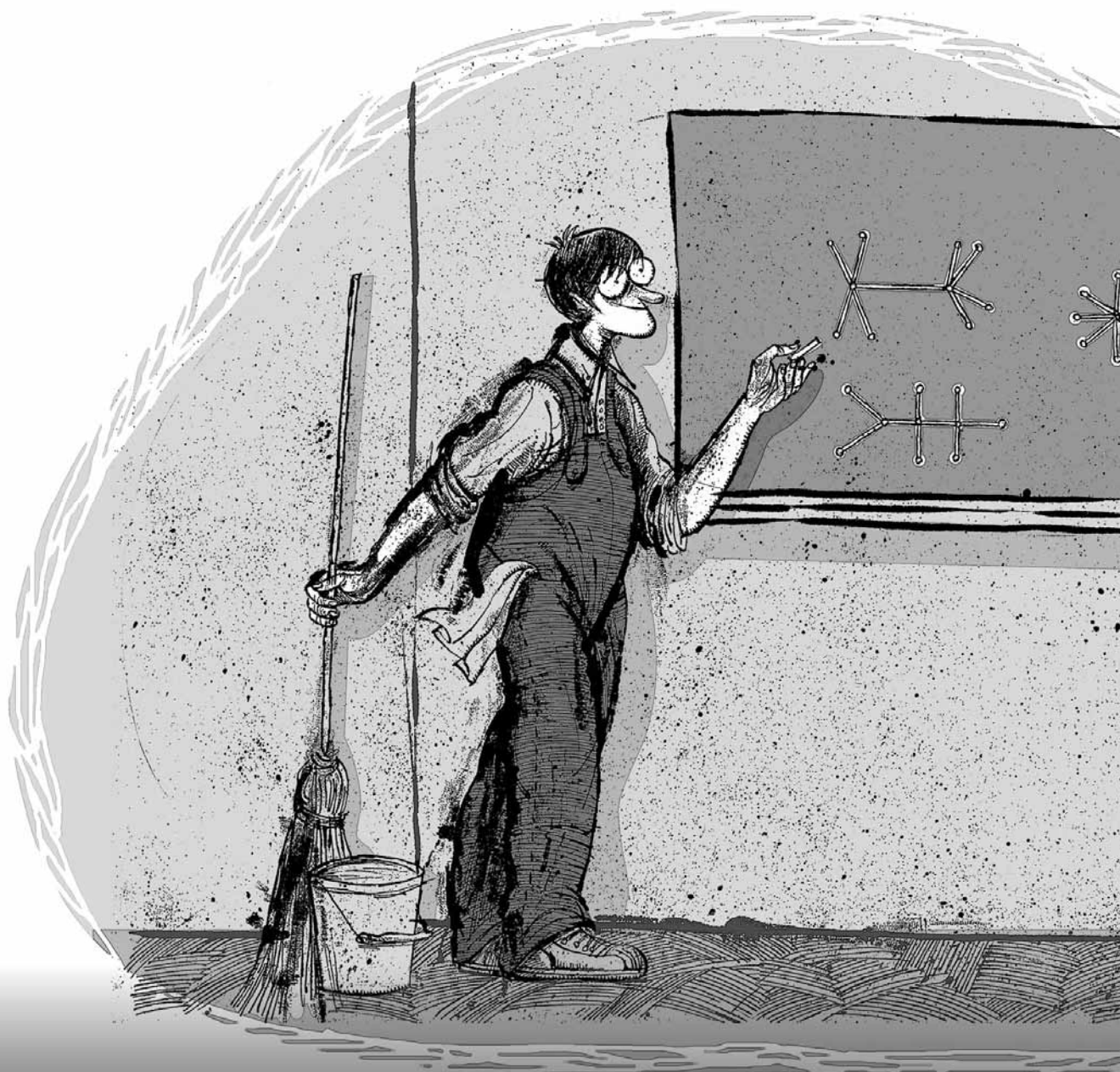
مدت فیلم: ۱۲۶ دقیقه

ویل هانتینگ نابغه که نقش آن را مت دامون ایفا می‌کند، جوان بیست ساله نابغه‌ای است که به عنوان کارگر ساختمانی مشغول به کار است و اوقات فراغت خود را با تعدادی از دوستان خود به تفریح می‌گذراند. در ضمن او به عنوان فراش در مؤسسه فنی ماساچوست<sup>۱۱</sup> نیز مشغول به کار می‌باشد. در یک

روز که او مشغول تمیز کردن یکی از راهروهای دانشگاه است با مسئله‌ای چالش‌پذیر از نظریه گراف جبری<sup>۱۲</sup> روبرو می‌شود. این مسئله بر روی تابلوی اعلانات توسط پروفیسور ریاضی آن دانشگاه (که برنده مدال فیلدز<sup>۱۳</sup> در ریاضیات است) ارائه شده بود، و او توانست آن را به راحتی و سهولت حل کند.

حل این سؤال باعث تعجب تمام دانشجویان و پروفیسور ریاضی طراح آن سؤال می‌شود و پروفیسور را وادار می‌سازد تا سؤالی پیکار جوتر و چالش‌پذیرتر مطرح کند تا مشخص شود که چه کسی توانسته سؤال قبل را حل نماید. هنگامی که ویل هانتینگ نابغه مشغول حل کردن این سؤال است، پروفیسور ریاضی

متوجه او می‌شود و به این ترتیب آشنایی بین ویل هانتینگ نابغه و پروفیسور ریاضی آغاز می‌گردد. پروفیسور ریاضی هنگامی که متوجه استعداد و توانایی‌های ویژه ویل هانتینگ می‌شود، ابراز علاقه می‌کند که ویل هانتینگ به ریاضیات روی آورد تا بتواند به مدارج بالای علمی در این رشته دست یابد. اما متوجه می‌شود که



#### پی‌نوشت.....

1. Good Will Hunting
2. Gus Van Sant
3. Lawrence Bender
4. Scott Mosier
5. Kevin Smith
6. Bob Weinstein
7. Harvey Weinstein
8. Ben Affleck
9. Matt Damon
10. December
11. Massachusetts
12. Algebraic Graph Theory
13. Fields Medal

ویل هانتینگ می‌بایست، راه و خطی‌مشی خودش را به دلخواه خود انتخاب کند و با ویل هانتینگ نیز در این زمینه گفت‌وگوهای را انجام می‌دهد و در نهایت در پایان این فیلم ویل هانتینگ به دور از تلاطم‌های روحی و ذهنی و با قدرت اختیار و انتخاب، راه و آینده خود را انتخاب می‌کند.

دوستان خود که یک پروفسور روانشناس است، کمک می‌گیرد تا به ویل هانتینگ کمک شود تا او بتواند در آینده بسیار نزدیک به یک ریاضیدان بزرگ تبدیل شود. اما بعد از ملاقات‌هایی که بین ویل هانتینگ و پروفسور روانشناس رخ می‌دهد پروفسور روانشناس دوست ریاضیدان خود را متقاعد می‌سازد که

ویل هانتینگ دارای روحیاتی است که مانع پیشرفت او در ریاضیات می‌شود. به همین دلیل تصمیم می‌گیرد که ویل هانتینگ را به روانشناسانی معرفی کند. اما هر یک از آن روانشناسان نمی‌توانند بنابر دلایلی موفق شوند که از عهده بحث و جدل با ویل هانتینگ برآیند و در نهایت پروفسور ریاضی از یکی از

اعداد  
فیبوناتچی

غلامرضا یاسی پور

نویسنده‌ی کتاب کد داوینچی<sup>۱</sup> دان براون<sup>۲</sup>، ژاک سُنیر<sup>۳</sup> موزه‌دار به قتل رسیده‌ی خود را مجبور می‌کند هشت جمله‌ی اولیه‌ی دنباله‌ای از اعداد را به عنوان سر نخ در مورد سرنوشتش به جا بگذارد. این ماجرا مهارت سوفی نووی<sup>۴</sup> رمز شناس را می‌طلبد تا اعداد ۱، ۱، ۲، ۳، ۵ را مرتب کند و معنای آن‌ها را دریابد. به مشهورترین دنباله‌ی اعداد در ریاضیات خوش آمدید.

دنباله‌ی اعداد تمام فیبوناتچی عبارت است از:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، ۲۳۳، ۳۷۷، ۶۱۰، ۹۸۷، ۱۵۹۷، ۲۵۸۴، ...

این دنباله به خاطر ویژگی‌های شگفت‌انگیزش بسیار معروف است. اساسی‌ترین این ویژگی‌ها - در واقع ویژگی مشخصه‌ای که آن‌ها را تعریف می‌کند - این است که هر جمله‌ی آن، مجموع دو جمله‌ی پیشین است. برای نمونه:

$$۸=۵+۳، ۱۳=۸+۵، ...، ۲۵۸۴=۱۵۸۷+۹۸۷$$

و غیره. در این مورد تمام چیزی که باید به خاطر بسپاریم آغاز کردن با دو عدد ۱ و ۱ است، در این صورت می‌توان بقیه‌ی دنباله را بدون درنگ تولید کرد. دنباله‌ی فیبوناتچی در طبیعت به صورت تعداد پیچ‌های تشکیل شده از تعداد دانه‌های واقع در مارپیچ گل آفتابگردان یافت می‌شود (برای مثال، ۳۴ در یک جهت، ۵۵ در جهت دیگر)، و نسبت‌های اتاق و نسبت‌های ساختمان‌هایی یافت می‌شود که معمارها طراحی کرده‌اند. آهنگ‌سازان کلاسیک از آن به عنوان الهامی با سوئیت رقص بارتوک<sup>۵</sup> که معتقدند به این دنباله مرتبط است، استفاده کرده‌اند. در موسیقی معاصر، برایان ترانسو<sup>۶</sup> (معروف به BT) نیز در آلبوم «این جهان دوگانه»<sup>۷</sup> قطعه‌ای دارد موسوم به ۱/۶۱۸ که سلامی به نسبت بنیادین اعداد فیبوناتچی است؛ عددی که اندکی بعد به بحث در مورد آن خواهیم پرداخت.

کلیدواژه‌ها:  
فیبوناتچی، دنباله،  
نسبت طلایی،  
برنولی.

مبدأها. دنباله‌ی فیبوناتچی در کتاب محاسبات<sup>۸</sup> که توسط لئوناردوی پیزایی<sup>۹</sup> (فیبوناتچی<sup>۱۰</sup>) به سال ۱۲۰۲ انتشار یافت، ظاهر شد، اما این اعداد احتمالاً پیش از آن در هندوستان شناخته شده بودند. فیبوناتچی در این مورد، مسئله‌ی زاد و ولد خرگوش‌ها را مطرح کرد:

جفت‌های خرگوش‌های بالغ، جفت‌های خرگوش‌های جوان را در هر ماه تولید می‌کنند. در آغاز سال یک جفت خرگوش جوان موجود است که در آخر ماه اول بالغ می‌شوند و در پایان ماه دوم زوج بالغ هنوز وجود دارند و یک جفت خرگوش جوان تولید کرده‌اند. این فرایند بالغ شدن و تولید کردن ادامه می‌یابد. البته هیچ یک از جفت‌های خرگوش‌ها، معجزه‌آسا، نمی‌میرند.

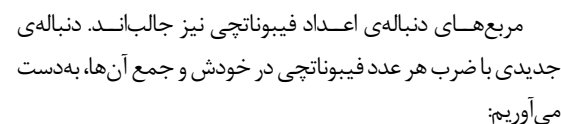
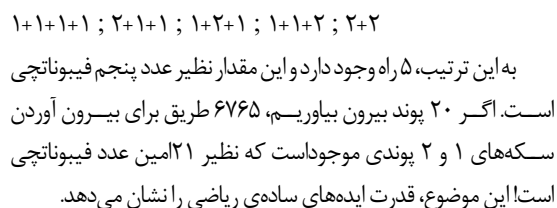
فیبوناتچی می‌خواست بداند در پایان سال چند جفت خرگوش وجود خواهند داشت. این تولید را می‌توان با «شجره‌ی خانوادگی» نشان داد. اجازه دهید نگاهی به تعداد جفت‌ها در پایان ماه مه (پنجمین ماه) بیفکنیم. ملاحظه می‌کنیم که تعداد جفت‌ها برابر ۸ است. در این چنینش شجره‌ی خانوادگی، گروه سمت چپ،

یعنی:

● ○ ● ● ○

کپی ردیف کامل بالاست و گروه سمت راست، یعنی

● ○ ● کپی ردیف بالای آن است.



**نسبت طلایی:** اگر نگاهی به نسبت جمله‌هایی که از دنباله‌ی

فیبوناتچی با تقسیم یک جمله بر جمله پیشین آن ساخته می‌شوند بیفکنیم، ویژگی جالب دیگری از اعداد فیبوناتچی را درمی‌یابیم. بگذارید این کار را در مورد چند جمله، یعنی ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵ انجام دهیم:

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ۱/۱   | ۲/۱   | ۳/۲   | ۵/۳   | ۸/۵   | ۱۳/۸  | ۲۱/۱۳ | ۳۴/۲۱ | ۵۵/۳۴ |
| ۱.۰۰۰ | ۲.۰۰۰ | ۱.۵۰۰ | ۱.۳۳۳ | ۱.۶۰۰ | ۱.۶۲۵ | ۱.۶۱۵ | ۱.۶۱۹ | ۱.۶۱۷ |

چندی نمی‌گذرد که نسبت‌های مورد بحث به مقداری نزدیک می‌شود که به عنوان نسبت طلایی<sup>۱۱</sup> شناخته می‌شود؛ عددی مشهور در ریاضیات که با حرف یونانی  $\phi$  مشخص شده است. این عدد در میان ثابت‌های مهم ریاضی از قبیل  $\pi$  و  $e$  جای دارد، و مقدار دقیق آن:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

۱.۶۱۸۰۳۳۹۸۸... نمایش داده شود. باندکی بررسی بیشتر، می‌توان نشان داد که هر عدد فیبوناتچی را می‌توان بر حسب  $\phi$  نوشت. با وجود شناخت مفصل از دنباله‌ی فیبوناتچی، هنوز در مورد آن به پرسش‌های بسیاری پاسخ داده نشده است. چند عدد اول اولیه‌ی دنباله‌ی فیبوناتچی عبارت‌اند از ۲، ۳، ۵، ۱۳، ۸۹، ۲۳۳، ۱۵۹۷ - اما هنوز نمی‌دانیم بی‌نهایت اول در این دنباله موجود است یا خیر.

**شباهت‌های خانوادگی.** دنباله‌ی فیبوناتچی مفتخر است که

در میان خانواده‌ای با برد وسیعی از دنباله‌های مشابه جای دارد. یکی از اعضای برجسته‌ی این خانواده، عضوی است که می‌توان آن را به مسئله‌ی جمعیت گله مرتبط کرد. به جای جفت‌های خرگوش‌های فیبوناتچی که در یک ماه از جفت جوان به جفت بالغی تبدیل می‌شوند که بار دیگر تولید را شروع می‌کنند، مرحله‌ی میانه‌ای در فرایند بلوغ موجود است که در آن جفت‌های گله از جفت‌های جوان به جفت‌های نابالغ سپس به جفت‌های بالغ پیشروی می‌کنند و به این ترتیب، تنها جفت‌های بالغ‌اند که توان تولید مثل دارند. در این صورت دنباله‌ی گله عبارت است از:

۱، ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۹، ۱۳، ۱۹، ۲۸، ۴۱، ۶۰، ۸۸، ۱۲۹، ۱۸۹، ۲۷۷، ۴۰۶، ۵۹۵...

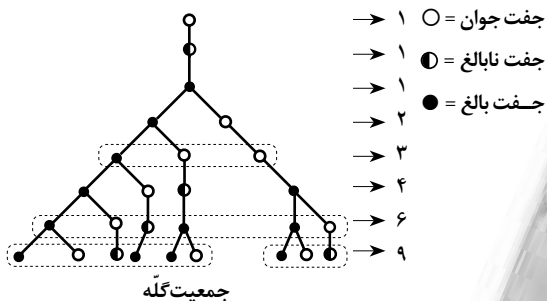
به این ترتیب، برای مثال تولید مورد بحث مقداری مانند

$$۶۰ = ۴۱ + ۱۹ \text{ و } ۴۱ = ۲۸ + ۱۳$$

را حذف می‌کند. این دنباله ویژگی‌هایی مشابه دنباله‌ی فیبوناتچی دارد. در مورد دنباله‌ی گله، نسبت‌های به دست آمده از تقسیم یک جمله به جمله پیشین آن، به حدی تقریب می‌کنند که با حرف یونانی  $\psi$ ، نمایش داده می‌شود:

$$\psi = 1/465557123187676802665...$$

این نسبت به «نسبت آبر طلایی»<sup>۱۲</sup> موسوم است.



پی نوشت.....

1. The DaVinci Code
2. Dan Brown
3. Jacques Saunière
4. Sophie Neveu
5. Bartok's Dance Suite
6. Brian Transeau
7. This Binary Universe
8. Liber Abaci
9. Leonardo of Pisa
10. Fibonacci
11. golden ratio
12. supergolden ratio



# رسم نمودار تابع

$$f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$



احسان یارمحمدی

## اشاره

موضوع این مقاله بحث و بررسی رسم نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  &  $a, b, d \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} - \{0\}$  است. در ضمن می‌دانیم که تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$  را تابع هموگرافیک می‌نامند. بنابراین اگر شما ریاضی‌آموزان، آشنایی لازم و کافی را با تابع هموگرافیک و رسم نمودار آن داشته باشید، به علت تشابه‌های مشترک بین توابع هموگرافیک و  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, c \neq 0$  درک بهتر و مفیدتری از این مقاله خواهید داشت.

۱. در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  اگر  $c = 0$  باشد، تابع مزبور به  $f(x) = \sqrt{\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}}$  تبدیل می‌شود.

۲. در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  اگر  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  باشد و دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی تهی نباشد، تابع مزبور به تابع ثابت تبدیل می‌شود.

## مراحل رسم نمودار این تابع

الف) دامنه‌ی تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  را تعیین می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها:  
رسم نمودار،  
مجموعه تهی،  
جدول تغییرات،  
مجاانب قائم و افقی،  
مشتق صعودی،  
دامنه.

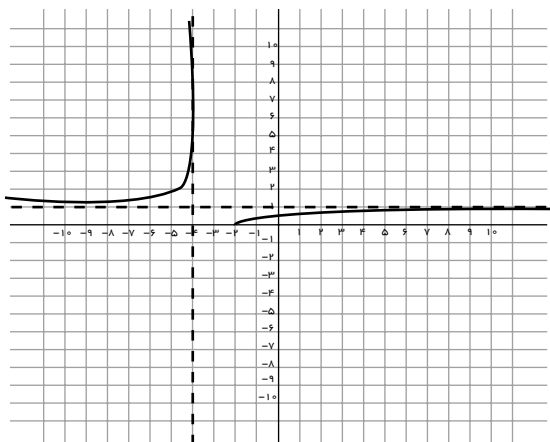
ب) مجانب‌های قائم و افقی تابع آن را در صورت وجود، تعیین می‌کنیم.  
پ) مشتق تابع را تعیین و با توجه به آن، صعودی و یا نزولی بودن تابع مزبور را مشخص می‌کنیم.  
ت) جدول تغییرات (و جدول صلیبی را برای نقاط تلاقی منحنی با محورها در صورت نیاز) تابع را رسم می‌کنیم.  
ث) با توجه به موارد الف تا ت، نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  را در دستگاه مختصات دکارتی رسم می‌کنیم.

به‌طور کلی، دوازده حالت را برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  در نظر می‌گیریم.

## حالت اول.....

اگر در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  داشته باشیم:  
 $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$  یا  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$  در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی  $D_f = (-\infty, -\frac{d}{c}) \cup [-\frac{b}{a}, +\infty)$

|         |           |           |      |           |
|---------|-----------|-----------|------|-----------|
| x       | $-\infty$ | $-4$      | $-2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           | +    |           |
| $f(x)$  | 1         | $+\infty$ |      | 1         |

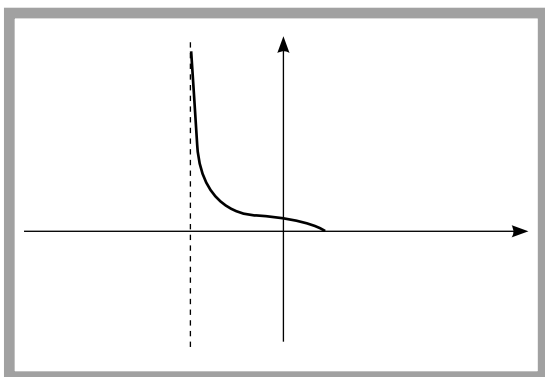


تمرین ۱: جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{-x-3}{-4x-8}}$

را رسم کنید.

### حالت دوم

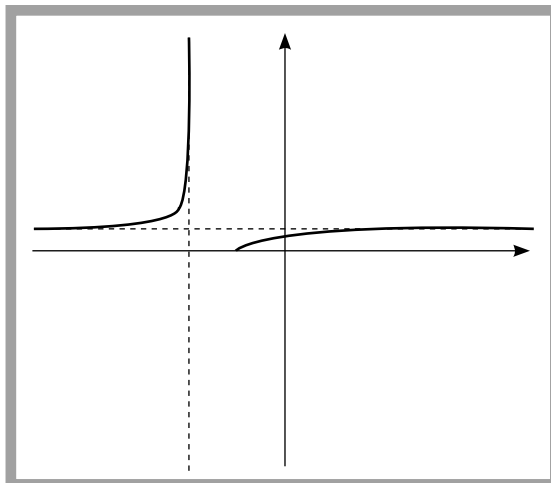
اگر در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  داشته باشیم:  
 $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$  یا  $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$  در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه  $D_f = (-\frac{d}{c}, -\frac{b}{a}]$ ، مجانب قائم  $x = -\frac{d}{c} < 0$  است و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه منحنی زیر خواهد بود:



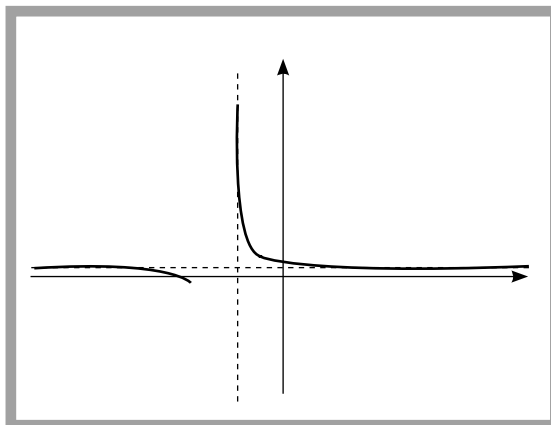
مثال ۲: جدول تغییرات و نمودار  $f(x) = \sqrt{\frac{-x+3}{x+1}}$  را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع مزبور  $D_f = (-1, 3]$ ، مجانب افقی ندارد و مجانب قائم آن  $x = -1$  است.

یا  $y = \sqrt{\frac{a}{c}} > 0$ ، مجانب افقی  $D_f = (-\infty, -\frac{b}{a}] \cup (-\frac{d}{c}, +\infty)$  و مجانب قائم  $x = -\frac{d}{c} < 0$  است و نمودار آن شبیه یکی از منحنی‌های زیر خواهد بود:



یا



مثال ۱: جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$

را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع مزبور  $D_f = (-\infty, -4) \cup [-2, +\infty)$ ،

مجانب افقی آن  $y = 1$  و مجانب قائم آن  $x = -4$  است.

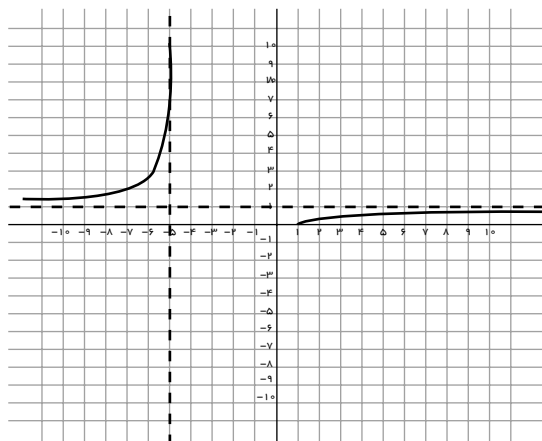
$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+4)^2 \times \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}} > 0 \Rightarrow f(x)$  صعودی

**مثال ۳:** جدول تغییرات و نمودار  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+5}}$  را رسم کنید

**حل:** دامنه‌ی تابع مزبور  $D_f = (-\infty, -5) \cup [1, +\infty)$ ،  
مجاانب افقی آن  $y = 1$  و مجانب قائم آن  $x = -5$  است.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{(x+5)^2 \times \sqrt{\frac{x-1}{x+5}}} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ صعودی}$$

| x       |  | -5 | 1         | $+\infty$ |
|---------|--|----|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |  | +  | +         | +         |
| $f(x)$  |  |    | $+\infty$ |           |



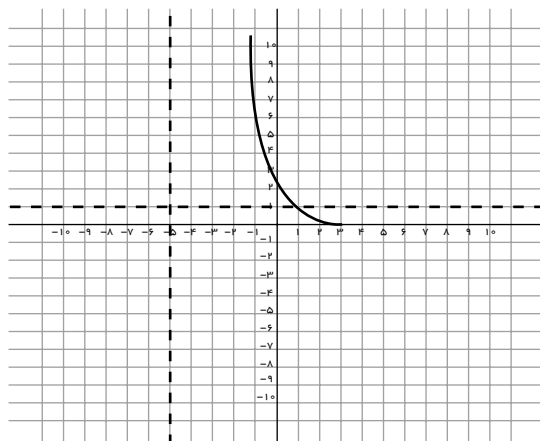
**تمرین ۳:** جدول تغییرات و نمودار  $f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{-x-2}}$  را رسم کنید

**حالت چهارم:**

اگر در تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  داشته باشیم:  
در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی  $D_f = [-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c})$  و مجانب قائم  $x = -\frac{d}{c} > 0$  است و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه منحنی ذیل خواهد بود:

$$f(x) = \sqrt{\frac{-x+3}{x+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2 \times \sqrt{\frac{-x+3}{x+1}}} < 0 \Rightarrow f(x) \text{ نزولی}$$

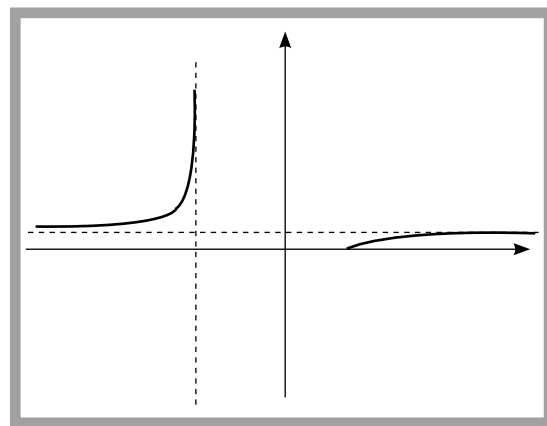
| x       |  | $-\infty$ | -1        | 3 | $+\infty$ |
|---------|--|-----------|-----------|---|-----------|
| $f'(x)$ |  |           |           |   |           |
| $f(x)$  |  |           | $+\infty$ |   |           |



**تمرین ۲:** جدول تغییرات و نمودار  $f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{-x-2}}$  را رسم کنید

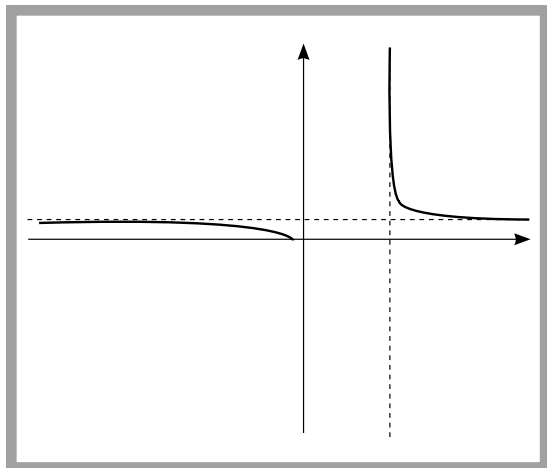
**حالت سوم:**

اگر در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  داشته باشیم:  
در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی  $D_f = (-\infty, -\frac{d}{c}) \cup [-\frac{b}{a}, +\infty)$ ،  
مجاانب افقی  $y = \sqrt{\frac{a}{c}} > 0$  و مجانب قائم  $x = -\frac{d}{c} < 0$  است و نمودار آن شبیه منحنی زیر خواهد بود:



در این  $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$  یا  $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$

صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی  $D_f = (-\infty, -\frac{b}{a}] \cup (-\frac{d}{c}, +\infty)$ ،  
مجاانب افقی  $y = \sqrt{\frac{a}{c}} > 0$  و مجانب قائم  $x = -\frac{d}{c} > 0$  است و نمودار آن شبیه منحنی زیر خواهد بود:

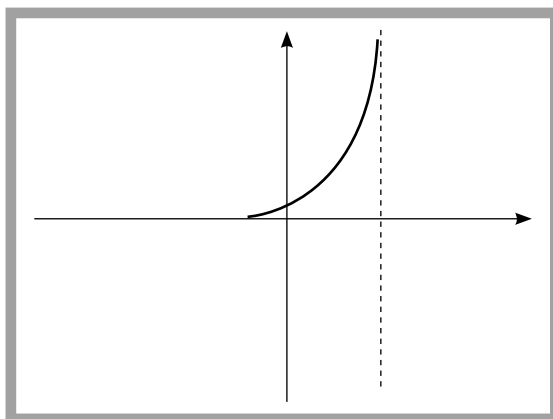
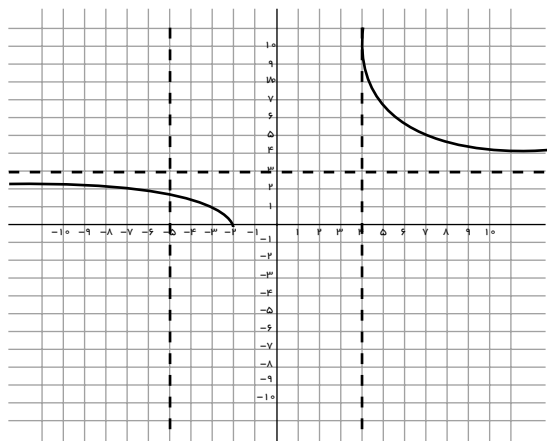


**مثال ۵:** جدول تغییرات و نمودار  $f(x) = \sqrt{\frac{27x+56}{3x-12}}$  را رسم کنید

**حل:** دامنه‌ی تابع مزبور  $D_f = (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup (3, +\infty)$ ،  
مجاانب افقی آن  $y = 3$  و مجانب قائم آن  $x = 3$  است.

$$f(x) = \sqrt{\frac{27x+56}{3x-12}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-246}{(3x-12)^2 \times \sqrt{\frac{27x+56}{3x-12}}} < 0 \Rightarrow f(x) \text{ نزولی}$$

| x       | $-\infty$ | $-\frac{2}{3}$ | 3         | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | —         | —              | —         | —         |
| $f(x)$  | 3         | $+\infty$      | $+\infty$ | 3         |

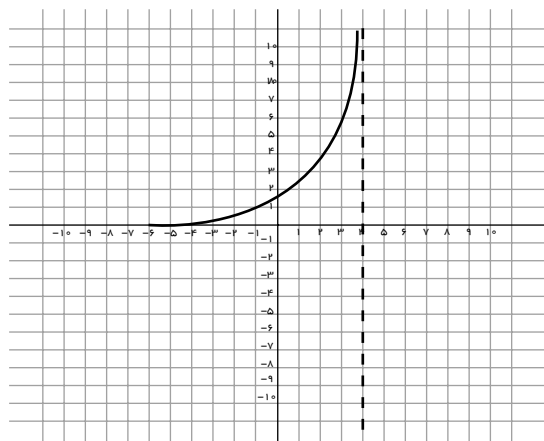


**مثال ۴:** جدول تغییرات و نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{x+6}{-x+3}}$  را رسم کنید

**حل:** دامنه‌ی تابع مزبور  $D_f = [-6, 3)$ ، مجانب قائم آن  $x = 3$  است و مجانب افقی ندارد.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+6}{-x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{2(-x+3)^2 \times \sqrt{\frac{x+6}{-x+3}}} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ صعودی}$$

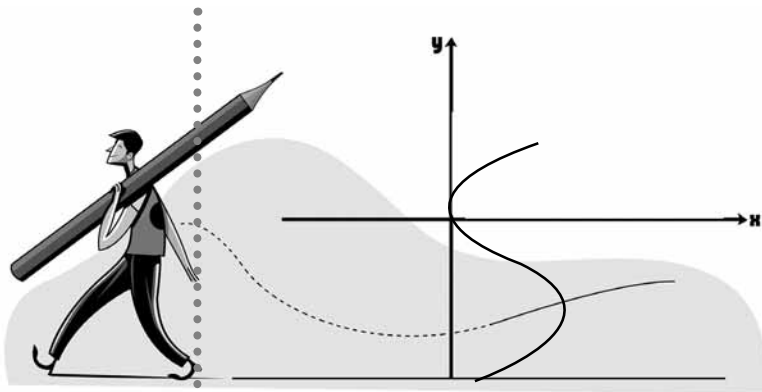
| x       | $-\infty$ | -6 | 3         | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | —         | —  | —         | —         |
| $f(x)$  | —         | 0  | $+\infty$ | —         |



**تمرین ۴:** جدول تغییرات و نمودار  $f(x) = \sqrt{\frac{-4x-16}{8x-2}}$  را رسم کنید

**حالت پنجم:**

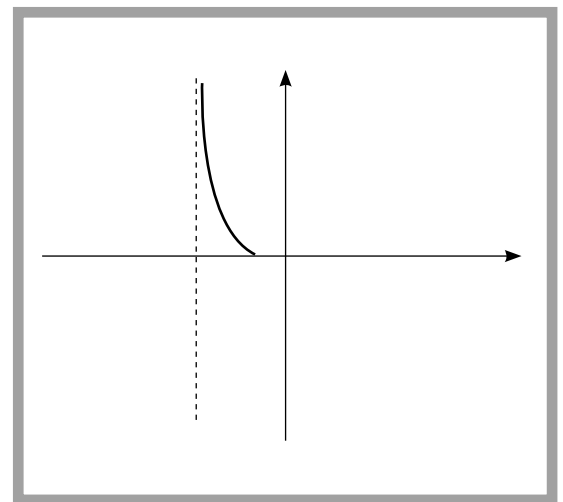
اگر در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  داشته باشیم:



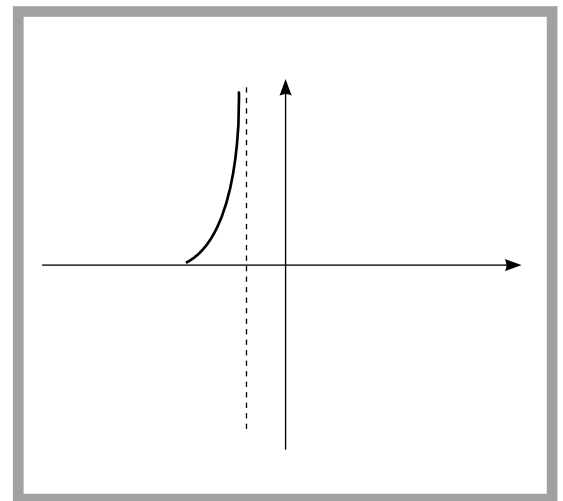
تمرین ۵: جدول تغییرات و نمودار  $f(x) = \sqrt{\frac{-8x-2}{-2x+10}}$  را رسم کنید.

#### حالت ششم

اگر در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$  داشته باشیم:  
 $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$  یا  $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$   
 در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه  $D_f = (-\frac{d}{c}, -\frac{b}{a}]$  یا  $D_f = [-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c})$  و مجانب قائم  $x = -\frac{d}{c} < 0$  است و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه یکی از منحنی‌های زیر خواهد بود:



یا



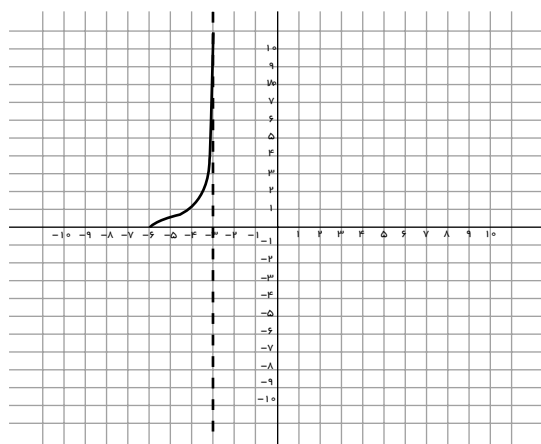
مثال ۶: جدول تغییرات و نمودار  $f(x) = \sqrt{\frac{x+6}{-x-3}}$  را رسم کنید

حل: دامنه‌ی تابع مزبور  $D_f = [-6, -3)$ ، مجانب قائم آن  $x = -3$  است و مجانب افقی ندارد.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+6}{-x-3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2(-x-3)^2 \times \sqrt{\frac{x+6}{-x-3}}} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ صعودی}$$

| x    | $-\infty$ | -6 | -3        | $+\infty$ |
|------|-----------|----|-----------|-----------|
| f(x) |           | +  |           |           |
| f(x) |           |    | $+\infty$ |           |



تمرین ۶: جدول تغییرات و نمودار  $f(x) = \sqrt{\frac{-x-2}{x-4}}$  را رسم کنید.

ادامه دارد ...

#### منابع.....

۱. حسابان (رشته‌ی ریاضی و فیزیک). مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر پروچردیان، ابراهیم ریحانی، محمدتقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.
۲. ریاضیات ۲ (رشته‌های علوم تجربی - ریاضی و فیزیک). مؤلفان: علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.
۳. حسابان (رشته‌ی ریاضی و فیزیک). مؤلفان: محمدحسن بیژن‌زاده، غلام علی فرشادی و یدالله ایلخانی‌پور. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۷.
۴. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی جدید. مؤلف: ریچارد ا. سیلورمن، مترجم: علی اکبر عالم‌زاده، ناشر: انتشارات علمی و فنی، ۱۳۷۰.
۵. حساب و دیفرانسیل و انتگرال. مؤلف: تام.م. آپوستا، مترجم: علی‌رضا ذکایی، مهدی رضائی دلفی، علی‌اکبر عالم‌زاده و فرخ فیروزان، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۰.

## برای دانش آموزان سال دوم

میرشهرام صدر

چند مسئله کاربردی  
در  
نامعادله‌ها

## اشاره

در این مقاله، به حل نامعادله‌های گوناگون و مسائلی کاربردی پرداخته‌ایم تا دانش آموزان با کاربردهای ریاضی در زندگی آشنا شوند.

## چند مسئله کاربردی نامعادله یک مجهولی

## درجه اول

ارتفاع  $h$  از سطح زمین از رابطه  $T = 70 - 0.0055h$  به دست می‌آید. حدود تغییرات ارتفاع را وقتی که درجه حرارت هوا از  $40^\circ\text{F}$  تا  $26^\circ\text{F}$  تغییر می‌کند، به دست آورید.

## حل:

$$\begin{aligned} -40 \leq T \leq 26 &\Rightarrow -40 \leq 70 - 0.0055h \leq 26 \\ T = 70 - 0.0055h &\Rightarrow -40 - 70 \leq -0.0055h \leq 26 - 70 \\ \Rightarrow -110 \leq -0.0055h \leq -44 &\Rightarrow \frac{110}{0.0055} \geq h \geq \frac{44}{0.0055} \Rightarrow 20000 \geq h \geq 8000 \end{aligned}$$

یعنی در ارتفاع ۸۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ پا بالاتر از سطح زمین، حرارت هوا بین  $40^\circ\text{F}$  تا  $26^\circ\text{F}$  تغییر می‌کند.

۳. روان‌شناسی: آی کیوی (IQ) افراد مختلف از رابطه زیر

به دست می‌آید:

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

که در آن  $MA$  سن هوشی و  $CA$  سن تقویمی افراد است. در صورتی که  $80 \leq IQ \leq 140$ ، برای بچه‌های ۱۲ ساله حدود تغییرات سن هوشی را به دست آورید.

۱. زمین‌شناسی: در جریان حفاری زمین در سال ۱۹۸۴، دانشمندان زمین‌شناس روسیه به این نتیجه رسیدند که درجه حرارت در  $x$  کیلومتری زیر سطح زمین از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T = 25(x - 3) + 30 \quad (3 \leq x \leq 15)$$

که در این رابطه،  $T$  درجه حرارت بر حسب درجه سانتی‌گراد است. مشخص کنید در چه محدوده‌ای از عمق زمین، درجه حرارت بین  $200^\circ\text{C}$  تا  $300^\circ\text{C}$  تغییر می‌کند.

## حل:

$$T = 200 \Rightarrow 200 = 25(x - 3) + 30 \Rightarrow x = 9/8$$

$$T = 300 \Rightarrow 300 = 25(x - 3) + 30 \Rightarrow x = 13/8$$

در نتیجه  $9/8 \leq x \leq 13/8$ ، یعنی در عمق  $9/8$  تا  $13/8$  کیلومتری زیر سطح زمین، درجه حرارت بین  $200^\circ\text{C}$  تا  $300^\circ\text{C}$  تغییر می‌کند.

۲. هواشناسی: وقتی هوای گرم از سطح زمین به طرف بالامی‌رود،

منبسط می‌شود و تقریباً بعد از ۴۰۰۰ پا، برای هر ۱۰۰۰ پا؛ ۵/۵ فارنهایت از درجه هوا کم می‌شود. اگر درجه حرارت در اطراف سطح زمین  $70^\circ\text{F}$  باشد، آن‌گاه درجه حرارت ( $T$ ) در

حل:

$$\begin{cases} 80 \leq IQ \leq 140 \\ IQ = \frac{MA}{CA} \times 100 \Rightarrow 80 \leq \frac{MA}{12} \times 100 \leq 140 \\ CA = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{100} \times 80 \leq MA \leq \frac{12}{100} \times 140$$

$$\Rightarrow 9.6 \leq MA \leq 16.8$$

در نتیجه، سن هوشی بچه‌های ۱۲ ساله بین ۹/۶ تا ۱۶/۸ است.

#### ۴. تجارت و اقتصاد: در یک تجارت سودآور واضح است که باید

سود (R) بیش‌تر از هزینه (C) باشد، یعنی  $R > C$ . اگر معادله هزینه یک شرکت تولیدی ساعت در یک هفته به صورت  $C = 300 + 1/5x$  و معادله سود شرکت در یک هفته به صورت  $R = 2x$  باشد که در این معادله‌ها x تعداد ساعت‌های فروخته شده در یک هفته است، در این صورت این شرکت در هفته باید چند ساعت بفروشد تا فعالیت تولیدی آن سودآور باشد.

حل:

$$\begin{cases} R > C \\ C = 300 + 1/5x \Rightarrow 2x > 300 + 1/5x \Rightarrow x > 600 \\ R = 2x \end{cases}$$

در نتیجه برای این که فعالیت این شرکت سودآور باشد، باید در هفته بیش‌تر از ۶۰۰ عدد ساعت بفروشد.

#### نامعادله یک مجهولی

##### درجه دوم

۱. تجزیه و تحلیل سود و زیان: اگر قیمت یک واحد کالا P ریال باشد، گروه بازاریابی یک شرکت تولیدی معادله‌های هزینه (C) و درآمد (R) و C بر حسب ریال هستند را در طول یک هفته به صورت زیر تخمین می‌زند:

$$\begin{aligned} C &= 280000 - 200P \\ R &= 900P - P^2 \end{aligned}$$

با توجه به معادله‌های بالا، قیمت هر واحد کالا چه قدر باشد تا این که (الف) شرکت درآمد را (ب) شرکت زیان آور باشد.

حل:

(الف) این شرکت درآمدزا خواهد بود، هرگاه درآمد بیش‌تر از هزینه باشد، یعنی:

$$\begin{aligned} R > C &\Rightarrow 900P - P^2 > 280000 - 200P \\ &\Rightarrow P^2 - 1100P + 280000 < 0 \\ P^2 - 1100P + 280000 = 0 &\Rightarrow P = 400, P = 700 \end{aligned}$$

| P                      | 0 | 400 | 700 | $+\infty$ |   |
|------------------------|---|-----|-----|-----------|---|
| $P^2 - 1100P + 280000$ | + | 0   | -   | 0         | + |

با توجه به جدول تعیین علامت در می‌یابیم که اگر قیمت هر واحد کالا بین ۴۰۰ و ۷۰۰ ریال ( $400 < P < 700$ ) باشد، شرکت درآمدزا است.

(ب) شرکت زیان‌آور است، هرگاه  $R < C$ ؛ در نتیجه:

$$\begin{aligned} 900P^2 - P^2 &< 280000 - 200P \\ &\Rightarrow P^2 < 280000 - 200P \Rightarrow P^2 - 1100P + 280000 > 0 \end{aligned}$$

چون  $P > 0$ ، با توجه به جدول تعیین علامت بالا در می‌یابیم که اگر قیمت هر واحد کالا  $P > 700$  یا  $0 < P < 400$  باشد، شرکت زیان‌آور است.

#### ۲. فیزیک: اگر جسمی با سرعت اولیه ۱۱۲ متر بر ثانیه از

سطح زمین به طرف بالا پرتاب شود، مسافت پیموده شده d (بر حسب متر) پس از t ثانیه (از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم) از فرمول  $d = 112t - 16t^2$  به دست می‌آید. یک بازه زمانی پیدا کنید که در آن جسم در ارتفاع ۱۶۰ متری یا بیش‌تر از سطح زمین قرار داشته باشد.

حل:

$$\begin{aligned} 112t - 16t^2 &\geq 160 \Rightarrow 16t^2 - 112t + 160 \leq 0 \\ 16t^2 - 112t + 160 = 0 &\Rightarrow t = 2, t = 5 \end{aligned}$$

| t                    | 0 | 2 | 5 | $+\infty$ |   |
|----------------------|---|---|---|-----------|---|
| $16t^2 - 112t + 160$ | + | 0 | - | 0         | + |

در بازه زمانی  $[2, 5]$  ( $2 \leq t \leq 5$ ) جسم در ارتفاع ۱۶۰ متری یا بیش‌تر از سطح زمین است.

تمرین: در مسئله قبل، بازه زمانی را بیابید که شیء از لحظه پرتاب تا لحظه برخورد با زمین مسافت موردنظر را طی کرده است (راهنمایی: با شرط  $d \geq 0$  تمرین را حل کنید).

### نامعادله‌های گویا

۱. تجارت: وقتی یک نوع کالای مرغوب و جدید به بازار می‌آید، بازار فروش هفتگی آن به طور معمول برای یک دوره زمانی افزایش و سپس کاهش می‌یابد، فرض کنید بازار فروش  $s$  هزار واحد کالا،  $t$  هفته بعد از معرفی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{200t}{t^2 + 100}$$

چه موقع فروش هفتگی کالا ۸ هزار واحد یا بیش‌تر در هر هفته است؟

حل:

$$S \geq 8 \Rightarrow \frac{200t}{t^2 + 100} \geq 8 \Rightarrow \frac{200t}{t^2 + 100} - 8 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-8t^2 + 200t - 800}{t^2 + 100} \geq 0$$

$$P = \frac{-8t^2 + 200t - 800}{t^2 + 100}$$

$$-8t^2 + 200t - 800 = 0 \Rightarrow t = 5, t = 20; t^2 + 100 > 0$$

چون  $t^2 + 100 > 0$ ، پس علامت  $P$  بستگی به علامت صورت کسر دارد، بنابراین کافی است صورت کسر را تعیین علامت کنیم:

|                      |           |     |      |           |
|----------------------|-----------|-----|------|-----------|
| $t$                  | $-\infty$ | $5$ | $20$ | $+\infty$ |
| $-8t^2 + 200t - 800$ | $-$       | $0$ | $+$  | $-$       |

$t \in [5, 20]$ ، در نتیجه از ابتدای هفته پنجم تا آخر هفته بیستم، فروش هفتگی این کالا ۸ هزار واحد یا بیش‌تر در هفته است.

.....

۲. پزشکی: وقتی که یک داروی تزریقی در عضله دست راست یک بیمار تزریق می‌شود، غلظت دارو بر حسب میلی گرم در هر میلی لیتر در عضله دست چپ،  $t$  ساعت بعد از تزریق به‌طور تقریبی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C = \frac{0.12t}{t^2 + 2}$$

چه موقع غلظت دارو در عضله دست چپ،  $0.04$  میلی گرم در هر میلی لیتر یا بیش‌تر است؟



۳. ایمنی در رانندگی: اتومبیلی با سرعت  $v$  (بر حسب کیلومتر بر ساعت) در حال حرکت است. راننده اتومبیل ناگهان با دیدن یک مانع ترمز می‌کند و مسافت  $d$  را از لحظه ترمز کردن تا لحظه توقف می‌پیماید. اگر مسافت پیموده شده  $d$  (بر حسب متر) از فرمول  $d = 0.044v^2 + 1/17$  به دست آید، آن‌گاه راننده با چه سرعتی باید ترمز کند تا پس از طی مسافتی کم‌تر از ۳۳۰ متر اتومبیل متوقف شود.

حل:

$$0.044v^2 + 1/17 < 330 \Rightarrow v^2 + 257 - 7500 < 0$$

$$v^2 + 257 - 7500 = 0 \Rightarrow v = 75, v = -100$$

|                        |           |        |      |           |
|------------------------|-----------|--------|------|-----------|
| $v$                    | $-\infty$ | $-100$ | $75$ | $+\infty$ |
| $v^2 + 257 - 7500 < 0$ | $+$       | $0$    | $-$  | $+$       |

چون  $v > 0$ ، با توجه به جدول بالا درمی‌یابیم که اگر سرعت اتومبیل کم‌تر از ۷۵ کیلومتر بر ساعت باشد ( $v < 75$ )، اتومبیل از لحظه ترمز تا لحظه توقف، مسافتی کم‌تر از ۳۳۰ متر را می‌پیماید.

.....

تمرین: در مسئله قبل، راننده با چه سرعتی ترمز کند تا اتومبیل پس از طی مسافتی کم‌تر از ۲۰۰ متر بایستد.

حل:

$$C \geq 0.4 \Rightarrow \frac{0.12t}{t^2 + 2} \geq 0.4 \Rightarrow \frac{12t}{t^2 + 2} \geq 4$$

$$\Rightarrow \frac{-4t^2 + 12t - 8}{t^2 + 2} \geq 0$$

$$P = \frac{-4t^2 + 12t - 8}{t^2 + 2}$$

$$-4t^2 + 12t - 8 = 0 \Rightarrow t = 1, t = 2; t^2 + 2 > 0$$

چون  $t^2 + 2 > 0$ ، پس علامت P بستگی به علامت صورت کسر دارد، بنابراین کافی است صورت کسر را تعیین علامت کنیم

| t                 | 1 | 2 |
|-------------------|---|---|
| $-4t^2 + 12t - 8$ | - | + |

$t \in [1, 2]$ ، در نتیجه یک تا دو ساعت بعد از تزریق، غلظت

دارو در عضله دست چپ بیمار  $0.4$  میلی گرم در هر میلی لیتر یا بیش تر است.

حل:

$$\left| \frac{x - 45/4}{3/2} \right| < 1 \Rightarrow |x - 45/4| < 3/2$$

$$\Rightarrow -3/2 < x - 45/4 < 3/2$$

$$\Rightarrow -3/2 + 45/4 < x < 3/2 + 45/4 \Rightarrow 42/2 < x < 48/2$$

$$\Rightarrow x \in (42/2, 48/2)$$

تمرین: مسئله قبل را برای  $m=2/6$ ،  $s=6/5$  و  $n=2$  حل کنید.

تجارت: تولید روزانه یک شرکت خودروسازی (P) بین 20 تا 50 واحد است. تولید روزانه را به صورت یک نامعادله شامل قدر مطلق مجهول دار بنویسید.

حل:

$$20 \leq P \leq 50; 20 + 50 = 70, 70 \div 2 = 35$$

$$20 \leq P \leq 50 \Rightarrow 20 - 35 \leq P - 35 \leq 50 - 35$$

$$\Rightarrow -15 \leq P - 35 \leq 15$$

$$\Rightarrow |P - 35| \leq 15$$

### نامعادله شامل

### قدر مطلق های مجهول دار

۱. محاسبات فنی: در حل بعضی از مسائل درس محاسبات فنی، از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\left| \frac{x - m}{s} \right| < n$$

اگر در این فرمول  $s=3/2$ ،  $m=45/4$  و  $n=1$ ، در این صورت مجموعه جواب نامعادله را برای متغیر x به دست آورید.

۳. شیمی: درجه حرارت یک ماده شیمیایی (T) را بین  $10^\circ C$  تا  $200^\circ C$  نگه می دارند. محدوده درجه حرارت را به صورت یک نامعادله، شامل قدر مطلق مجهول دار بنویسید.

$$10 \leq T \leq 200; 10 + 200 = 210, 210 \div 2 = 105$$

$$10 \leq T \leq 200 \Rightarrow 10 - 105 \leq T - 105 \leq 200 - 105$$

$$\Rightarrow -95 \leq T - 105 \leq 95 \Rightarrow |T - 105| \leq 95$$

### منبع:

نابرابری ها و نامعادله ها،  
میرشهرام صدر، انتشارات  
مدرس.

## با مجله های رشد آشنا شوید

دفتر انتشارات کمک آموزشی



مجله های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می شوند.

### مجله های دانش آموزی

(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شوند):

لشاد کم رک (برای دانش آموزان ادبی و پایه اول دوره دبستان)

لشاد نوآموز (برای دانش آموزان پایه های دوم و سوم دوره دبستان)

لشاد دانش آموز (برای دانش آموزان پایه های چهارم و پنجم دوره دبستان)

لشاد نوجوان (برای دانش آموزان دوره راهنمایی تحصیلی)

لشاد جوان (برای دانش آموزان دوره متوسطه و پیش دانشگاهی)

### مجله های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شوند):

رشد آموزشی ابتدایی (رشد آموزش راهنمایی تحصیلی - رشد تکنولوژی آموزشی - رشد مدرسه فردا - رشد مدیریت مدرسه - رشد معلم)

### مجله های بزرگسال و دانش آموزی تخصصی

(به صورت فصل نامه و چهار شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شوند):

رشد پوهان راهنمایی (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره راهنمایی تحصیلی)  
رشد پوهان متوسطه (مجله ریاضی برای دانش آموزان دوره متوسطه)  
رشد آموزش قرآن (رشد آموزش معارف اسلامی - رشد آموزش زبان و ادب فارسی - رشد آموزش هنر - رشد مشاوره مدرسه - رشد آموزش تربیت بدنی - رشد آموزش علوم اجتماعی - رشد آموزش تاریخ - رشد آموزش جغرافیا - رشد آموزش زبان - رشد آموزش ریاضی - رشد آموزش فیزیک - رشد آموزش شیمی - رشد آموزش زیست شناسی - رشد آموزش زمین شناسی - رشد آموزش فن و حرفه ای - رشد آموزش پیش دبستانی)

مجله های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش جویان مراکز تربیت معلم و رشته های دبیری دانشگاه ها و کورسهاست. تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می شوند.

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر، شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

تلفن و فاکس: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۳۷۸

# اسم وبگاه: Quick Math

این وبگاه یک سرویس خودکار برای پاسخ‌گویی به مسائل و سؤالات ریاضی در اینترنت است که شبیه به یک محاسبه‌گر آنلاین که توانایی حل معادلات و توانایی ارائه جواب در تمامی موضوعات جبر، حساب دیفرانسیل و انتگرال را به صورت فوری و خودکار برای دانش‌آموزان دبیرستانی و نیز دانشجویان را دارد. در این سایت هنگامی که شما یک سؤال را برای Quick Math ارائه می‌کنید، او آن پرسش را به وسیله «متمتیکا» که بزرگترین و قدرتمندترین بسته جبری رایانه‌ای قابل دسترس امروزی است، مورد بررسی و پردازش قرار می‌دهد و سپس پاسخ نهایی را برای شما ارسال می‌دارد. صفحه اصلی سایت Quick Math دربرگیرنده عنوان‌های زیر است.

وبگاه‌های  
ریاضی  
جهان

- جبر (Algebra)
- حذف کردن (Cancel)
- حل (Solve)
- انتگرال‌گیری (Integrate)
- بسط (Expand)
- کسرهای جزئی (Partial Fractions)
- رسم (Plot)
- ماتریس‌ها (Matrices)
- عامل (Factor)
- ساده کردن (Simplify)
- معادله‌ها (Equations)
- درجه دوم‌ها (Quadratics)
- حساب (Arithmetic)
- نامعادلها (Inequalities)
- نامعادلها (Inverse)
- نامعادلها (Inequalities)
- دترمینان (Determinant)
- حل (Solve)
- نمودارها (Graphs)
- رسم (Plot)
- معادلها (Equations)
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
- مشتق‌گیری (Differentiate)
- نامعادلها (Inequalities)
- اعداد (Numbers)
- درصدها (Percentages)
- نماد علمی (Scientific Notation)



## جهاد اقتصادی

### برگ اشتراک مجله‌های رشد

نحوه اشتراک:  
شما می‌توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۴۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سراه آزمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:  
۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد: نشانی: [www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir) و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.  
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگه‌دارید).

#### نام مجلات در خواستی:

نام و نام خانوادگی:  
تاریخ تولد:  
میزان تحصیلات:  
تلفن:  
نشانی کامل پستی:  
استان:  
شماره فیش:  
شماره پستی:  
پلاک:

در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شماره اشتراک خود را ذکر کنید:

امضا:

نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۶۵۵/۱۱۱  
[www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir)  
وبگاه مجلات رشد:  
اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۵۶/۷۷۳۳۶۱۱۰/۷۷۳۳۶۱۱۳-۱۴

هرزبه اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۹۶۰۰۰ ریال  
هرزبه اشتراک یکساله تخصصی (چهار شماره): ۶۰۰۰۰ ریال